



**T.C.
BURSA TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

SONLU BOYUTLU CEBİRLERDE AYRIŞTIRILAMAZ TEMSİLLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sena YILMAZ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Tezli Yüksek Lisans Programı

TEMMUZ 2025

**T.C.
BURSA TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

SONLU BOYUTLU CEBİRLERDE AYRIŞTIRILAMAZ TEMSİLLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Sena YILMAZ
(22435022004)
ORCID: 0009-0001-1490-2422**

**Matematik Anabilim Dalı
Matematik Tezli Yüksek Lisans Programı**

**Danışman: Prof. Dr. Nil ORHAN ERTAŞ
ORCID: 0000-0003-1526-6963**

TEMMUZ 2025

BTÜ, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü'nün 22435022004 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi Sena YILMAZ, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “SONLU BOYUTLU CEBİRLERDE AYRIŞTIRILAMAZ TEMSİLLER” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı: **Prof. Dr. Nil ORHAN ERTAŞ**
Bursa Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri: **Doç. Dr. Fatma KAYNARCA**
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Mert Sinan ÖZ
Bursa Teknik Üniversitesi

Savunma Tarihi : 17 Temmuz 2025
Teslim Tarihi :



20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, Bursa Teknik Üniversitesi’nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

İNTİHAL BEYANI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belgelediğimi, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim.

Adı Soyadı: Sena YILMAZ

İmzası:



Kadınlara,

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanması sürecinde çalışmamı yönlendiren, bilgisi, emeği ile her zaman yanımda olan Sayın Hocam Prof. Dr. Nil ORHAN ERTAŞ' a, bilgi ve görüşlerini paylaşarak yol gösteren Sayın Hocam Doç. Dr. Fatma KAYNARCA' ya ve teze katkılarından dolayı Sayın Hocam Dr. Öğr. Üyesi Mert Sinan ÖZ' e teşekkürü borç bilirim.

Eğitim, öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle hep yanımda olan, bugünlere gelmeme destek olan, bana güvenen aileme teşekkürlerimi sunarım.

Temmuz 2025

Sena YILMAZ
(Matematik Öğretmeni)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	vii
İÇİNDEKİLER.....	viii
SEMBOLLER.....	ix
ŞEKİL LİSTESİ.....	x
ÖZET	xii
SUMMARY	xiii
1. GİRİŞ	1
1.1. Halkalar.....	1
1.2. Modüller	3
1.3. Kategoriler	7
1.4. Çizgeler	8
2. QUIVER TEMSİLLERİ	10
2.1 Quiver Temsilleri ve Ayrıştırılmaz Temsiller	10
2.2 Dik Toplam ve Ayrıştırılmaz Temsiller	17
3. QUIVER TİPLERİ	20
3.1 A_n Tipli Quiverların Ayrıştırılmaz Temsilleri	23
3.2 D_n Tipli Quiverların Ayrıştırılmaz Temsilleri	26
3.3 E_6 Tipli Quiverların Ayrıştırılmaz Temsilleri	26
3.4 E_7 Tipli Quiverların Ayrıştırılmaz Temsilleri	27
3.5 E_8 Tipli Quiverların Ayrıştırılmaz Temsilleri	28
4. EŞKARELER VE DİK TOPLAM PARÇALANIŞLARI	30
4.1 Eşkareler	30
4.2 Ayrıştırılmazlık İçin Kriter	34
5. KÖKLER	40
5.1 Temsil Çeşitliliği	40
5.2 Bir Quiverın Kuadratik Formu	42
5.3 Kök Tanımı ve Özellikleri	48
5.3.1 A_n tipindeki quiverların pozitif kökleri	49
5.3.2 D_n tipindeki quiverların pozitif kökleri	50
5.3.3 E_6 tipindeki quiverların pozitif kökleri	51
5.3.4 E_7 tipindeki quiverların pozitif kökleri	51
5.3.5 E_8 tipindeki quiverların pozitif kökleri	51
5.4 Gabriel Teoremi	52
6. A_3 TİPLİ BİR QUIVER TEMSİLİNİN PARÇALANIŞI	57
KAYNAKLAR	63
ÖZGEÇMİŞ	65

SEMBOLLER

s	: Her oku başlangıç noktasına götüren fonksiyon
t	: Her oku bitiş noktasına götüren fonksiyon
Q	: Bir quiver
k	: Cebirsel kapalı bir cisim
$k[x]$	: k cismi üzerindeki polinomlar halkası
Q_1	: Bir Q quiverındaki köşelerin kümesi
Q_2	: Bir Q quiverındaki okların kümesi
S	: Bir Q quiverının temsili
S_i	: Bir i köşesine karşılık gelen vektör uzayı
β_α	: Bir α okuna karşılık gelen lineer dönüşüm
$görf$	: f homomorfizmasının görüntüsü
$çekf$	: f homomorfizmasının çekirdeği
$rep_k Q$	: Bir Q quiverının tüm sonlu boyutlu temsillerinin kategorisi
$Hom(S, S')$	: S' den S ye giden tüm temsil morfizmalarının kümesi
$Ext^1(S, S')$	: S nin S' ile genişlemelerinin kümesi
$Hom(_, S)$	: Kontravaryant Hom fonktoru
$Hom(S, _)$	: Kovaryant Hom fonktoru
$End A$	: A 'nın endomorfizmaların kümesi
ϕ	: Tüm köklerin kümesi
B_n	: Yıldız quiver
T_n	: n -oklu Kronecker quiver
$\underline{dim} M$	: M temsiliinin boyut vektörü
$S \oplus S'$	: S ve S' temsillerinin dik toplamı
R	: Birimli bir halka
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1	: Tanım 1.2.10. için diyagram	5
Şekil 1.2	: Tanım 1.2.11. için diyagram	5
Şekil 1.3	: Tanım 1.2.12. için diyagram	5
Şekil 1.4	: Tanım 1.2.13. için diyagram	6
Şekil 1.5	: Teorem 1.2.14. için diyagram	6
Şekil 1.6	: Tanım 1.2.15. için diyagram	6
Şekil 1.7	: Tanım 1.3.4. için diyagram	8
Şekil 1.8	: Bağlantılı çizge örneği	9
Şekil 2.1	: Örnek 2.1.2. için diyagram	11
Şekil 2.2	: Örnek 2.1.11. için diyagram	12
Şekil 2.3	: Örnek 2.1.11. için diyagram	13
Şekil 2.4	: Temsil morfizmi için diyagram.....	13
Şekil 2.5	: Örnek 2.1.16. için diyagram	14
Şekil 2.6	: Örnek 2.1.16. için diyagram	14
Şekil 2.7	: Örnek 2.1.16. için diyagram	14
Şekil 2.8	: Örnek 2.1.16. için diyagram	15
Şekil 2.9	: Örnek 2.1.17. için diyagram	15
Şekil 2.10	: Örnek 2.1.17. için diyagram	15
Şekil 2.11	: Örnek 2.1.17. için diyagram	15
Şekil 2.12	: Örnek 2.1.17. için diyagram	16
Şekil 2.13	: Örnek 2.1.17. için diyagram	16
Şekil 2.14	: Örnek 2.2.3. için diyagram	17
Şekil 2.15	: Örnek 2.2.3. için diyagram	17
Şekil 2.16	: Örnek 2.2.3 için diyagram	18
Şekil 2.17	: Örnek 2.2.3. için diyagram	18
Şekil 2.18	: Örnek 2.2.5. için diyagram	18
Şekil 2.19	: Örnek 2.2.6. için diyagram	18
Şekil 2.20	: Örnek 2.2.7. için diyagram	19
Şekil 3.1	: Dynkin diyagramı	21
Şekil 3.2	: Öklidyen diyagramlar	22
Şekil 3.3	: Evcil tipli quiver örneği	23
Şekil 3.4	: Vahşi tipli quiver örneği	23
Şekil 3.5	: Vahşi tipli quiver örneği	23
Şekil 4.1	: Örnek 4.1.10. için diyagram	32
Şekil 4.2	: Örnek 4.2.7. için diyagram	37
Şekil 4.3	: Örnek 4.2.7. için diyagram	38
Şekil 5.1	: Grup hareketi için diyagram	41

Şekil 5.2 : Yardımcı Teorem 5.1.3. için diyagram	41
Şekil 5.3 : Örnek 5.2.3. için diyagram	43
Şekil 5.4 : Teorem 5.2.4. için diyagram	43
Şekil 5.5 : Yardımcı Teorem 5.4.3. için diyagram	53
Şekil 5.6 : Gabriel'in Teoremi için diyagram	55
Şekil 5.7 : Gabriel'in Teoremi için diyagram	55
Şekil 5.8 : Gabriel'in Teoremi için diyagram	55
Şekil 5.9 : Gabriel'in Teoremi için diyagram	55
Şekil 5.10 : Gabriel'in Teoremi için diyagram	55
Şekil 5.11 : Gabriel'in Teoremi için diyagram	56
Şekil 6.1 : Örnek 6.2. için diyagram	58
Şekil 6.2 : Örnek 6.2. için diyagram	58
Şekil 6.3 : Örnek 6.2. için diyagram	58
Şekil 6.4 : Örnek 6.2. için diyagram	58
Şekil 6.5 : Örnek 6.3 için diyagram	59



SONLU BOYUTLU CEBİRLERDE AYRIŞTIRILAMAZ TEMSİLLER

ÖZET

Bu çalışmanın amacı, A_3 tipli quiver temsilinin ayrıştırılamaz temsillerinin diktoplamı olacak şekilde bir parçalanışını bulmak ve Python programında bulunan parçalanış için kod elde etmektir.

Birinci bölümde, modül teorisi hakkında temel bilgiler verilmiş olup quiverlar için gerekli olan bazı temel bilgiler yer almaktadır.

İkinci bölümde, quiverlar ve quiver temsillerinin tanımı ve temel özelliklerine değinilmiştir.

Üçüncü bölümde, quiver tipleri tanıtılmıştır. Sonlu temsil tipli olan A_n , D_n , E_6 , E_7 , E_8 tipli quiverların temsillerinin ayrıştırılamaz temsillerine değinilmiştir.

Dördüncü bölümde, modüllerin ayrıştırılamaz alt modülleri ve parçalanışları verilmiştir. Ayrıca parçalanışlar için önemli olan eşkare kavramı ve bazı özelliklerine değinilmiştir.

Beşinci bölümde, bir quiverın kuadratik formu ve kökleri tanıtılmıştır ve ardından kuadratik form ve kök kavramı arasındaki ilişki incelenmiştir. Ayrıca quiverların sınıflandırmasında önemli rol oynayan Gabriel teoremi ve ispatına yer verilmiştir.

Altıncı bölümde, A_3 tipli quiver temsili için parçalanışlar elde edilmiştir ve Python programında bu parçalanışlar için kod verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Quiver, Quiver temsili, Quiver tipleri, Ayrıştırılamaz temsil

INDECOMPOSABLE REPRESENTATIONS IN FINITE DIMENSIONAL ALGEBRAS SUMMARY

The aim of this study is to examine the decompositions of indecomposable representations of $\mathbb{A}_3$ type quivers and to develop Python code that computes these decompositions.

In the first chapter, basic information about module theory is provided, including some basic concepts necessary for quivers.

In the second chapter, the definitions and fundamental properties of quivers and their representations are discussed.

In the third chapter, the types of quivers are introduced. The indecomposable representations of quivers of finite type, namely $\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8$.

In the fourth chapter, the indecomposable submodules of modules and their decompositions are presented. Also, the concept of idempotent which is important for decompositions and some of its properties are discussed.

In the fifth chapter, the quadratic form of a quiver and roots are given and followed by the relationship between the quadratic form and the concept of roots. This chapter also includes Gabriel's theorem, which plays a significant role in the classification of quivers, along with its proof.

In the sixth chapter, decompositions are obtained for the representations of $\mathbb{A}_3$ and Python code is provided for this decomposition.

Keywords: Quiver, Quiver representations, Quiver type, Indecomposable representations

1.GİRİŞ

Bu bölümde tez için gerekli olan tanımlar ve bazı cebirsel yapılar verilecektir. Bu bölümdeki tüm bilgiler [1] nolu kaynaktan alınmıştır.

1.1 Halkalar

Tanım 1.1.1. $(R, +)$ değişmeli bir grup ve R üzerinde “.” çarpma işlemi verilmiş olsun. Eğer

(1) R ’ de çarpma işlemi birleşme özelliğine sahip ise,

(2) R ’ de çarpma işlemi toplama üzerinde soldan ve sağdan dağılma özelliğine sahip ise, o zaman $(R, +, .)$ üçlüsüne bir *halka (ring)* denir.

Tanım 1.1.2. $(R, +, .)$ bir halka olsun. Eğer $e \in R$ olmak üzere her $x \in R$ için

$$e \cdot x = x \cdot e = x$$

ise o zaman e ’ ye R ’ de *birimli halka (identity ring)* denir.

Tanım 1.1.3. R birimli bir halka, x belirsiz ve $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n \in R[x]$$

$$g(x) = b_0x^0 + b_1x^1 + \dots + b_mx^m \in R[x]$$

olsun. $k = \max\{m, n\}$ ve $c_i = \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j}$ olmak üzere

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^k (a_i + b_i)x^i, \quad f(x) \cdot g(x) = \sum_{i=0}^{m+n} c_i x^i$$

şeklinde tanımlı işlemlerle $(R[x], +, .)$ birimli bir halkadır. Bu halkaya R üzerindeki *polinomlar halkası (polynomial ring)* denir.

Tanım 1.1.4. R bir halka ve N, R ’ nin sağ ideali olsun. Eğer $N \subseteq T \subseteq R$ olacak şekilde R ’ nin T sağ ideali yoksa N ’ ye R halkasında *sağ maksimal ideal (right maximal ideal)* denir.

Tanım 1.1.5. R bir halka olsun. R ’ nin bütün maksimal sağ ideallerinin kesişimine R ’ nin *Jacobson radikali (Jacobson radical)* denir. $Rad(R)$ ile gösterilir.

Yardımcı Teorem 1.1.6. R bir halka ve $b \in R$ olsun. O zaman aşağıdakiler birbirine denktir:

- (1) $b \in \text{Rad } R$
- (2) Her $c \in R$ için $1 - bc$ elemanı sağ terse sahiptir.
- (3) Her $c \in R$ için $1 - bc$ elemanı hem sağ terse hem de sol terse sahiptir.
- (4) b, R' deki tüm sol maksimal ideallerin kesişiminin elemanıdır.
- (5) Her $c \in R$ için $1 - cb$ elemanı sol terse sahiptir.
- (6) Her $c \in R$ için $1 - cb$ elemanı hem sağ terse hem de sol terse sahiptir.

Tanım 1.1.7. R ve R' iki halka olsun. $f: R \rightarrow R'$ fonksiyonu her $a, b \in R$ için

$$(i) f(a + b) = f(a) + f(b)$$

$$(ii) f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$$

şartlarını sağlarsa f' ye bir *halka homomorfizması (ring homomorphism)* denir.

Tanım 1.1.8. A bir halka olsun. A' dan A' ya giden tüm halka homomorfizmalarının kümesi

$$\text{End } A = \{f: A \rightarrow A \mid f \text{ bir halka homomorfizması}\}$$

ile gösterilir ve A' nın *endomorfizmalarının kümesi* olarak adlandırılır. $\text{End } A$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.9. R birimli halka, x bilinmeyen, n pozitif bir tamsayı olmak üzere R üzerinde tanımlı sabit olmayan $f(x)$ polinomu verilmiş olsun. Eğer $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ şartını sağlayan her $g(x), h(x) \in R[x]$ için $g(x)$ ya da $h(x)$ tersinir ise o zaman $f(x)$ polinomuna R üzerinde *indirgenemez polinom (irreducible polynomial)* denir.

Tanım 1.1.10. R bir halka ve $x \in R$ için $x^n = 0$ olması durumunda bir $n \geq 1$ tamsayısı bulunabiliyorsa x elemanına *üstel sıfır (nilpotent)* denir.

Tanım 1.1.11. F bir cisim olmak üzere;

- I. $\deg(g) \geq 1$ olacak şekilde her $g \in F[x]$ polinomunun F' de bir kökü vardır.
- II. F üzerindeki her indirgenemez polinomun derecesi 1' dir.
- III. $\deg(g) \geq 1$ özelliğine sahip her $g \in F[x]$ polinomunun, $a, a_1, a_2, \dots, a_n \in F$ olmak üzere

$$g = a(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

biçiminde bir yazılışı vardır.

Bu koşullardan birini sağlayan F cisminde *cebirsel kapalı cisim (algebraically closed field)* denir.

1.2 Modüller

Tanım 1.2.1. R birimli bir halka, T bir toplamsal abel grup olmak üzere $\cdot : R \times T \rightarrow T; (r, t) \rightarrow r \cdot t$ ile tanımlanan dış işlem, her $r, v \in R$ ve $t, s \in T$ için;

$$(T1) \ r \cdot (t + s) = r \cdot t + r \cdot s$$

$$(T2) \ (r + v) \cdot t = r \cdot t + v \cdot t$$

$$(T3) \ (rv) \cdot t = r \cdot (v \cdot t)$$

$$(T4) \ 1_R \cdot t = t$$

koşulları sağlanıyor ise T' ye bir *sol R -modül (left R -module)* denir.

Sağ R -modül de benzer şekilde tanımlanır. Bir T kümesi hem sol hem sağ R -modül ise T' ye kısaca *R -modül (R -module)* denir.

R ve V birer halka olsun. T bir sol R -modül, bir sağ V -modül ve her $r \in R, t \in T, v \in V$ için $(rt)v = r(tv)$ oluyorsa T' ye bir *(R, V) -bimodül (bimodule)* denir.

Tanım 1.2.2. G ve H birer R -modül olsun. Her $g, h \in G$ ve her $r \in R$ için

$$I. \ f(g + h) = f(g) + f(h)$$

$$II. \ f(r \cdot g) = r \cdot f(g)$$

özelliklerini sağlayan $f: G \rightarrow H$ fonksiyonuna bir *R -modül homomorfizması (module homomorphism)* denir.

Eğer Tanım 1.2.1' deki modül tanımında R halkası yerine F cismi alınırsa bu yapıya *vektör uzayı (vector space)* denir.

Tanım 1.2.3. A_F ve B_F iki vektör uzayı olsun. Bir $L: A \rightarrow B$ arasında tanımlı bir fonksiyonu her $a, b \in A$ ve $\lambda \in F$ için

$$(I) \ L(a + b) = L(a) + L(b)$$

$$(II) L(\lambda. a) = \lambda. L(a)$$

özellikleri sağlanırsa L' ye bir *lineer dönüşüm* (*linear transformation*) denir.

Tanım 1.2.4. k bir cisim, A ve B birer k -vektör uzayı olmak üzere bir $f: A \rightarrow B$ lineer dönüşümü için;

I. $\text{çek} f = \{a \in A \mid f(a) = 0\} \subseteq A$ altkümesi f' nin *çekirdeği* (*kernel*)

II. $\text{gör} f = f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq B$ altkümesi f' nin *görüntüsü* (*image*)

III. $\text{coker} f = B / \text{gör} f$ kümesi B' nin *eşçekirdeği* (*cokernel*)

IV. Eğer $A = B$ ise f lineer dönüşümü *endomorfizma*

V. f lineer dönüşümü birebir ise *monomorfizma*

VI. f lineer dönüşümü örten ise *epimorfizma*

VII. f lineer dönüşümü birebir ve örten ise *izomorfizma* olarak isimlendirilir.

Özel olarak $f: A \rightarrow A$ lineer dönüşümü *izomorfizma* ise *otomorfizma* (*automorphism*) denir.

Tanım 1.2.5. A bir F -vektör uzayı olsun. A , F -vektör uzayının taban vektörlerinin sayısına V F -vektör uzayının *boyutu* (*dimension*) denir ve $\dim_F(V)$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.6. A , $n \times n$ tipinde bir matris olsun. $f(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ şeklinde verilen $f(\lambda)$ fonksiyonuna *karakteristik polinom* (*characteristic polynomial*) denir.

Tanım 1.2.7. A , n boyutlu bir vektör uzayı ve $L: A \rightarrow A$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer A' nın sıfırdan farklı herhangi bir a vektörü için

$$L(a) = \lambda. a \tag{1.1}$$

ise, bu durumda $\lambda \in F$ skalerine L' nin bir *özdeğeri* (*eigenvalue*) denir. (1.1) denklemini sağlayan sıfırdan farklı her a vektörüne de L' nin λ özdeğerine karşılık gelen *özvektörü* (*eigenvector*) denir.

Teorem 1.2.8. A ve B birer vektör uzayı olsun. $f: A \rightarrow B$ bir lineer dönüşüm olmak üzere $\dim A = \dim \text{çek} f + \dim \text{gör} f$ dir.

Tanım 1.2.9. k cebirsel kapalı bir cisim olsun. R birimli bir halka ve aynı zamanda $b, c \in R$ ve $\lambda \in k$ için

$$\lambda(bc) = (\lambda b)c = b(\lambda c)$$

özelliğini sağlayan bir k -vektör uzayı yapısına sahipse R ' ya bir k -cebir (k -algebra) denir.

Tanım 1.2.10. P bir R -modül olmak üzere her $\varphi : C \rightarrow D$ epimorfizması ve her $g : P \rightarrow D$ R -morfizması için

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \swarrow h & \downarrow g & & \\ C & \xrightarrow{\varphi} & D & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Şekil 1.1: Tanım 1.2.10. için diyagram

diyagramını değişmeli yapan, yani $g = \varphi h$ olacak şekilde, bir $h : P \rightarrow C$ R -morfizmi varsa P ' ye bir *projektif modül* (*projective module*) denir.

Tanım 1.2.11. $\{S_n | n \in \mathbb{Z}\}$ modüllerin bir ailesi olmak üzere $f_n : S_n \rightarrow S_{n+1}$ R -modül homomorfizmalarından oluşan bir

$$\cdots \rightarrow S_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} S_n \xrightarrow{f_n} S_{n+1} \rightarrow \cdots$$

Şekil 1.2: Tanım 1.2.11. için diyagram

dizisi verilsin. Her bir $n \in \mathbb{Z}$ için $\text{gör} f_n = \text{çek} f_{n+1}$ oluyor ise bu diziye her bir S_n ' de *tam dizi* (*exact sequence*) denir.

Tanım 1.2.12. S bir R -modül olsun. Herhangi $i \geq 0$ için P_i ' ler projektif olmak üzere bir

$$\cdots \rightarrow P_s \xrightarrow{f_s} P_{s-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} S \rightarrow 0$$

Şekil 1.3: Tanım 1.2.12. için diyagram

tam dizisi vardır. $f_0 : P_0 \rightarrow S$ epimorfizması ile birlikte yukarıdaki tam diziye S ' nin *projektif çözücüsü* (*projective resolution*) denir.

Tanım 1.2.13. f birebir, g örten ve $\text{gör } f = \text{çek } g$ olmak üzere

$$0 \longrightarrow S' \xrightarrow{f} S \xrightarrow{g} S'' \longrightarrow 0$$

Şekil 1.4: Tanım 1.2.13. için diyagram

formunda bir tam diziye *kısa tam dizi* (*short exact sequence*) denir. Bu kısa tam diziye aynı zamanda S'' ' nün S' ile tüm genişlemelerinin grubu $\mathcal{E}(S', S'')$ ile gösterilir ve $\text{Ext}^1(S', S'')$ grubuna izomorftur.

Teorem 1.2.14.

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

Şekil 1.5: Teorem 1.2.14 için diyagram

kısa tam dizisi için aşağıdakiler birbirine denktir:

- (1) $\alpha f = 1_A$ olacak şekilde bir $\alpha : B \rightarrow A$ homomorfizması vardır.
- (2) g ör f ; B ' nin dik toplananıdır.
- (3) $g\beta = 1_C$ olacak şekilde bir $\beta : C \rightarrow B$ homomorfizması vardır.

Tanım 1.2.15. Teorem 1.2.14' deki denk olan koşullardan biri gerçekleştiğinde

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

Şekil 1.6: Tanım 1.2.15 için diyagram

kısa tam dizisine *parçalanmış dizi* (*split sequence*) denir.

Tanım 1.2.16. M bir sağ R -modül ve N, M' nin boş olmayan bir altkümesi olsun.

- (I) Her $x, y \in N$ için $x - y \in N$
- (II) Her $x \in N, r \in R$ için $xr \in N$

koşulları sağlanıyorsa N ' ye M' nin bir *R-altmodülü* (*submodule*) denir.

Tanım 1.2.17. M bir R -modül, N ve T, M' nin altmodülleri olmak üzere N altmodülü $N \cap T = 0$ özelliğine göre maksimalse N ' ye T ' nin M' deki *tamlayanı* (*complement*) denir.

1.3 Kategoriler

Tanım 1.3.1. Bir $\mathcal{C}$ kategorisi;

(I) Kategoriye ait objelerin sınıfı $Ob\mathcal{C}$,

(II) İki farklı $(A, B) \neq (A', B')$ obje çifti için

$$Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \cap Hom_{\mathcal{C}}(A', B') = \emptyset$$

özelliğine sahiptir ve morfizmlerin oluşturduğu sınıf $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$,

(III) Her bir $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ ve $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$ için $(g, f) \mapsto g \circ f$ ile tanımlı

$$Hom_{\mathcal{C}}(B, C) \times Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$$

yukarıdaki özelliği sağlayan bileşkesinden oluşur. Öyle ki:

(i) Birim eleman: Her $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$ ve her $A \in Ob\mathcal{C}$ objesi ve morfizmi için $f \circ 1_A = f$ ve $1_A \circ g = g$ olması durumunda bir $1_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$ birim morfizması vardır.

(ii) Birleşme: Her $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$, $h \in Hom_{\mathcal{C}}(C, D)$ ve her A, B, C objesi için $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ eşitliği sağlanır.

Tanım 1.3.2. $\mathcal{D}$ ve $\mathcal{E}$ iki kategori olsun. $\mathcal{D}$ 'nin her A objesine $\mathcal{E}$ 'nin bir $F(A)$ objesini, $\mathcal{D}$ 'deki her $f \in Hom_{\mathcal{D}}(A, B)$ morfizmasına $\mathcal{E}$ 'deki bir $F(f) \in Hom_{\mathcal{E}}(F(A), F(B))$ morfizmasını karşılık getiren;

$$(1) f \in Hom_{\mathcal{D}}(A, B), g \in Hom_{\mathcal{D}}(B, C) \text{ için } F(gf) = F(g)F(f)$$

$$(2) \text{ Her } A \in Ob\mathcal{D} \text{ için } F(1_A) = 1_{F(A)}$$

yukarıdaki koşulları sağlayan $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ fonksiyonuna bir *kovaryant functor* (*covariant functor*) denir.

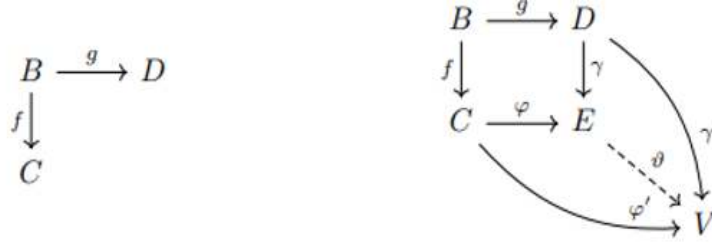
Tanım 1.3.3. $\mathcal{D}$ ve $\mathcal{E}$ iki kategori olsun. $\mathcal{D}$ 'nin her A objesine $\mathcal{E}$ 'nin bir $F(A)$ objesini, $\mathcal{D}$ 'deki her $f \in Hom_{\mathcal{D}}(A, B)$ morfizmasına $\mathcal{E}$ 'deki bir $F(f) \in Hom_{\mathcal{E}}(F(B), F(A))$ morfizmasını karşılık getiren;

$$(1) f \in Hom_{\mathcal{D}}(B, C), g \in Hom_{\mathcal{D}}(A, B) \text{ için } F(gf) = F(f)F(g)$$

$$(2) \text{ Her } B \in Ob\mathcal{D} \text{ için } F(1_B) = 1_{F(B)}$$

yukarıdaki koşulları sağlayan $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ fonksiyonuna bir *kontravaryant functor* (*contravariant functor*) denir.

Tanım 1.3.4. Herhangi bir $\mathcal{C}$ kategorisinde $f : B \rightarrow C$ ve $g : B \rightarrow D$ morfizmaları verilsin. f ile g 'nin ileri itmesi (push out) $\gamma g = \varphi f$ olması durumunda $\varphi : C \rightarrow E$, $\gamma : D \rightarrow E$ morfizmaları ile beraber (E, γ, φ) üçlüsüdür.



Şekil 1.7: Tanım 1.3.4 için diyagram

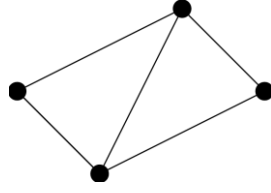
Öyle ki $\gamma' g = \varphi' f$ olması durumundaki her (V, γ', φ') üçlüsü için yukarıdaki üçgensel diyagramları değişmeli yapan, yani $\gamma' = \vartheta \gamma$ ve $\varphi' = \vartheta \varphi$ olacak şekilde bir tek $\vartheta : E \rightarrow V$ morfizması vardır.

1.4 Çizgeler

Çizgeler 18. Yüzyılda Leonhard Euler'in ünlü "Königsberg Köprüleri" problemi üzerine yaptığı çalışmayla doğmuştur. Euler, bu problemde şehrin nehir üzerindeki yedi köprüsünün her birinden yalnızca bir kez geçerek bir yürüyüş yapıp yapılamayacağını matematiksel olarak incelemiş ve bu süreçte çizge kuramının temelini atmıştır. O günden bu yana çizgeler, nesneler (düğümler) ve bunlar arasındaki ilişkiler (kenarlar) üzerinden karmaşık sistemleri anlamak ve modellemek için geliştirilmiştir. Bir çizge, düğüm (veya köşe) adı verilen varlıklar ile bu düğümler arasındaki bağlantıları temsil eden kenarlardan oluşur. Kenarlar yönlü ya da yönsüz olabilir.

Tanım 1.4.1. Elemanları köşe olarak adlandırılan sonlu, boş olmayan köşe kümesi $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ve elemanları kenar olarak adlandırılan sonlu kenar kümesi $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ kümelerinden oluşan (V, E) ikilisine çizge (graph) denir. $G = (V, E)$ ile gösterilir.

Tanım 1.4.2. Bir G çizgesinde her iki köşe arasında bir yol varsa buna *bağlantılı çizge* (*connected graph*) denir.



Şekil 1.8: Bağlantılı çizge örneği

2. QUIVER TEMSİLLERİ

Bu bölümde [2] nolu kaynak temel alınarak quiverlar, quiverların temsilleri tanıtılıp bazı örnekler verilecektir.

2.1 Quiver Temsilleri ve Ayrıştırılmaz Temsilleri

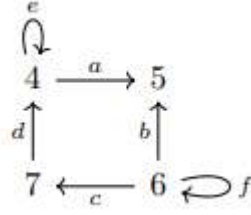
Quiverlar, sonlu ve yönlendirilmiş olması haliyle bir çizgenin özel halidir. Quiverlar modern matematikte oldukça önemli yer tutar çünkü cebirsel yapıları görselleştirerek anlamayı kolaylaştırır. Özellikle temsil teorisinde, vektör uzayları ve bu uzaylar arasındaki lineer dönüşümleri bir quiver üzerinden ifade etmek, karmaşık yapıları sadeleştirmeye olanak tanır. Tüm bu yönleriyle quiverlar, hem teorik çalışmalarda hem de uygulamalı matematik ve fizik problemlerinde merkezi bir araç haline gelmiştir. Quiver kavramı ilk kez 1940' ta Thrall [3] tarafından ortaya atılmıştır. 1970' li yıllardan sonra Peter Gabriel [4],[6] ve [7] tarafından geliştirilen bu kavram “Quiver” adı altında incelenmiştir. Bu bölümde ilk olarak quiver tanımı verilecektir. Sonrasında quiver temsili ve morfizmleri kavramları tanıtılıp birkaç örnek verilecektir.

Tanım 2.1.1. Köşe (vertex) lerden oluşan küme Q_1 , ok (arrow) lardan oluşan küme Q_2 ve $s: Q_1 \rightarrow Q_2$ her oku başlangıç (source) noktasına götüren fonksiyon, $t: Q_1 \rightarrow Q_2$ her oku bitiş (terminal) noktasına götüren fonksiyon olmak üzere $Q = \{Q_1, Q_2, s, t\}$ sistemi bir *quiver* (*quiver*) olarak adlandırılır. Bir α oku

$$s(\alpha) \xrightarrow{\alpha} t(\alpha)$$

biçiminde gösterilebilir.

Örnek 2.1.2. $Q_1 = \{4,5,6,7\}$, $Q_2 = \{a,b,c,d,e,f\}$ olmak üzere;



Şekil 2.1: Örnek 2.1.2 için diyagram

$s(a) = 4, s(b) = 6, s(c) = 6, s(d) = 7, s(e) = 4, s(f) = 6$; $t(a) = 5, t(b) = 5, t(c) = 7, t(d) = 4, t(e) = 4, t(f) = 6$ ile tanımlanan quiverin diyagramı yukarıdaki biçimindedir.

Tanım 2.1.3. Bir quiverdaki oklar için yönlendirilme kaldırıldığında zaman Q_1 köşeleri ve Q_2 kenarlarının oluşturmuş olduğu çizge *quiverin altında yatan yönlendirilmemiş çizge (underling undirected graph)* denir. $\hat{Q}$ ile gösterilir.

Bir Q quiverının altında kalan $\hat{Q}$ çizgesi bağlantılıysa Q quiverına *bağlantılı (connected)* denir.

Tanım 2.1.4. Q_1 ve Q_2 sonlu kümeler ise Q quiverı *sonlu (finite)* olarak isimlendirilir.

Bu çalışmada tüm quiverlar sonlu ve bağlantılı varsayılacaktır.

Tanım 2.1.5. Q bir quiver olsun. Q' daki her $i \in Q_1$ köşesi için bir k -vektör uzayı S_i ve her $\alpha \in Q_2$ okuna karşılık gelen $\gamma_\alpha: S_{s(\alpha)} \rightarrow S_{t(\alpha)}$ k -lineer dönüşümü ile oluşan $S = (S_i, \gamma_\alpha)_{i \in Q_1, \alpha \in Q_2}$ ikilisine bir *temsil (representation)* denir.

Not 2.1.6. Bir S temsiliinin elemanı; $s_i \in S_i$ olmak üzere $s = (s_i)_{i \in Q_1}$ sıralısı şeklindedir.

Tanım 2.1.7. $S = (S_i, \gamma_\alpha)_{i \in Q_1, \alpha \in Q_2}$ temsiliinde her $i \in Q_1$ köşesine karşılık gelen S_i vektör uzayı $0 = \{0\}$ olursa bu temsile *sıfır temsili (zero representation)* denir ve $S = 0$ ile gösterilir. Buradaki γ_α lineer dönüşümlerinin sıfır dönüşümü olduğu aşikârdır. S temsili sıfırdan farklı bir temsilse, en az bir $i \in Q_1$ için $S_i \neq 0$ 'dır.

Tanım 2.1.8. i köşesinde bir boyutlu, diğer köşelerde sıfır boyutlu olan vektör uzaylarından ve tamamı sıfır olan lineer dönüşümlerden oluşan temsile i köşesindeki *basit temsil (simple representation)* denir ve $S(i)$ ile gösterilir. Böylece i köşesindeki basit temsil;

$$S(i)_j = \begin{cases} k, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \text{ ve } \gamma_\alpha = 0$$

olmak üzere $S(i) = (S(i)_j, \gamma_\alpha)_{i \in Q_1, \alpha \in Q_2}$ biçimindedir.

Tanım 2.1.9. i ' den j ' ye giden tüm yolların kümesini taban kabul eden vektör uzayları ve i ' den j ' ye giden bir d yoluna j ' den h ' ye giden bir α okunun eklenmesi olarak tanımlı lineer dönüşümlerinin oluşturduğu $P(i) = (P(i)_j, \gamma_\alpha)_{i \in Q_1, \alpha \in Q_2}$ temsiline i köşesindeki *projektif temsil* (*projective representation*) denir. Böylece i köşesindeki projektif temsilde; d , i ' den j ' ye giden bir yol ve $\lambda_d \in k$ olmak üzere $P(i)_j$ ' nin elemanları $\sum_d \lambda_d d$ formundadır. γ_α lineer dönüşümleri; $j \xrightarrow{\alpha} h$ oku yardımıyla $P(i)_j$ ' nin bir tabanıyla $P(i)_h$ ' in bir tabanı arasında aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$P(i)_j \text{ tabanı} \rightarrow P(i)_h \text{ tabanı}$$

$$d = (i | \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n | j) \mapsto d\alpha = (i | \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n | h)$$

olmak üzere

$$\gamma_\alpha \left(\sum_d \lambda_d d \right) = \sum_d \lambda_d d\alpha$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.10. Her bir S_i vektör uzayının boyutunun oluşturduğu sıralı bir Q quiverının bir S temsiline *boyut vektörü* (*dimension vector*) olarak adlandırılır. Şöyle ki; her $i \in Q_1$ için $\dim S_i = t_i$ ise $S_i \cong k^{t_i}$ olup S temsiline boyut vektörü şu şekildedir:

$$\underline{\dim} S = t = (\dim S_i)_{i \in Q_1} = (t_i)_{i \in Q_1}$$

Bir S temsiline her S_i vektör uzayı sayet sonlu boyutluysa S temsiline *sonlu boyutlu* (*finite dimensional*) denir. Her bir $\gamma_\alpha: S_{s(\alpha)} \rightarrow S_{t(\alpha)}$ lineer dönüşümü de $t_{s(\alpha)} \times t_{t(\alpha)}$ tipinde bir matris olarak gösterilir.

Örnek 2.1.11.

$$Q : 4 \longrightarrow 5$$

Şekil 2.2: Örnek 2.1.11. için diyagram

Q quiverı ele alınsın.

$$\begin{aligned} S_1 : & 0 \longrightarrow k \\ S_2 : & k \longrightarrow k \\ S_3 : & k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix}} k \\ S_4 : & k^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 111 \\ 101 \end{bmatrix}} k^2 \end{aligned}$$

Şekil 2.3: Örnek 2.1.11. için diyagram

Q quiverının boyut vektörleri S_1, S_2, S_3, S_4 olan temsillerine bakılsın.

$$\begin{aligned} \underline{\dim}(S_1) &= (0,1) & \underline{\dim}(S_2) &= (1,1) \\ \underline{\dim}(S_3) &= (2,1) & \underline{\dim}(S_4) &= (3,2) \end{aligned}$$

olur.

Tanım 2.1.12. Q bir quiver olsun. $A = (A_j, \gamma_\alpha)$ ve $A' = (A'_j, \gamma'_\alpha)$, Q quiverının iki temsili olsun. Q_2 'daki her $\gamma: j \rightarrow m$ oku için aşağıda verilen diyagramı değişmeli yapan bir $g: A \rightarrow A'$ fonksiyonuna bir *temsil morfizmi* (*representation morphism*) denir.

$$\begin{array}{ccc} A_j & \xrightarrow{\gamma_\alpha} & A_m \\ \downarrow g_j & & \downarrow g_m \\ A'_j & \xrightarrow{\gamma'_\alpha} & A'_m \end{array}$$

Şekil 2.4: Temsil morfizmi için diyagram

Şöyle ki bir $g: A \rightarrow A'$ temsil morfizmi; her $a \in A_j$ için

$$g_j \circ \gamma_\alpha(a) = \gamma'_\alpha \circ g_m(a)$$

olacak şekilde $g_j: A_j \rightarrow A'_j$ lineer dönüşümlerinin bir $(g_j)_{j \in Q_1}$ sıralısıdır.

Tanım 2.1.13. Bir k cismi üzerinde bulunan bir Q quiverının sonlu boyutlu temsilleri temsil morfizmleri ile beraber bir kategori meydana getirir. Bu oluşan kategori $\text{rep}_k Q$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.14. Herhangi bir $(g_i)_{i \in Q_1}: A \rightarrow A'$ temsil morfizmindeki her g_i hem birebir hem de örten ise g bir izomorfizmadır. Şöyle ki her $i \in Q_1$ için g_i lineer dönüşümlerinin tersinir (izomorfizm) olması için gerekli ve yeterli şart g ' nin izomorfizm olmasıdır. g bir izomorfizma ise A temsili A' temsiline *izomorf* (*isomorphic*) denir ve $A \cong A'$ ile gösterilir. Bir A temsiline izomorf olan tüm temsillerin sınıfına A ' nın *izosınıfı* (*isoclass* A) denir. $A, A' \in \text{rep}_k Q$ temsilleri için $\text{Hom}(A, A') = \{g | g: A \rightarrow A' \text{ temsil morfizması} \}$ olarak ifade edilecektir.

Önerme 2.1.15. $A, A' \in \text{rep}_k Q$ olsun. Tüm temsil morfizmlerinin kümesi olan $\text{Hom}(A, A')$; her $g, h \in \text{Hom}(A, A'), a \in A$ ve $\mu \in k$ için

$$(g \oplus h)(a) = g(a) + h(a)$$

$$(\mu \odot g)(a) = \mu g(a)$$

ile tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir k -vektör uzayıdır.

Örnek 2.1.16.

$$Q: 4 \longrightarrow 5$$

Şekil 2.5: Örnek 2.1.16. için diyagram

quiverı olsun.

$$S_1: \quad 0 \longrightarrow k$$

$$S_2: \quad k \longrightarrow k$$

Şekil 2.6: Örnek 2.1.16. için diyagram

alınsın. $g = (g_1, g_2): S_1 \rightarrow S_2$ temsil morfizmi g_1 ; sıfır dönüşümü ve g_2 ; $x \in k$ ile skaler çarpım ile belirlidir. Şöyle ki;

$$\begin{array}{ccc} S_1 & & 0 \xrightarrow{0} k \\ \downarrow g & & \downarrow 0 \quad \downarrow x \\ S_2 & & k \xrightarrow{1} k \end{array}$$

Şekil 2.7: Örnek 2.1.16. için diyagram

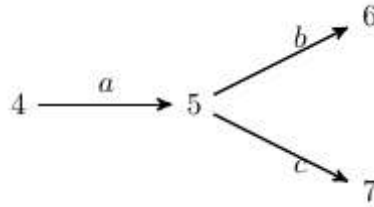
diyagramı değişmeli olur. Böylelikle $\text{Hom}(S_1, S_2) \cong \{(x, 0) | x \in k\}$ olur. şimdi aşağıdaki diyagramı değişmeli yapacak $h: S_2 \rightarrow S_1$ morfizmleri belirlenecektir.

$$\begin{array}{ccc} S_2 & & k \xrightarrow{1} k \\ \downarrow h & & \downarrow h_1=0 \quad \downarrow h_2 \\ S_1 & & 0 \xrightarrow{0} k \end{array}$$

şekil 2.8: rnek 2.1.16. için diyagram

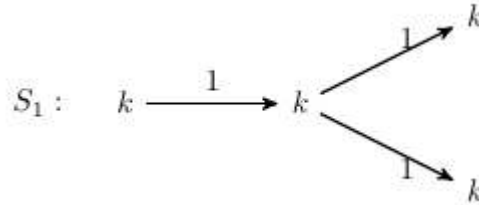
Her $y \in k$ için $(h_2 \circ 1)(y) = (0 \circ h_1)(y)$ olmalıdır. Burada $h_2 = 0$ olur. h_1 sıfır dnşmdr. Sonuçta $h = (h_1, h_2) = (0, 0)$ olur. Dolayısıyla $\text{Hom}(S_2, S_1) \cong 0$ 'dır.

rnek 2.1.17. Q quiverı aşağıdaki gibi alınsın.

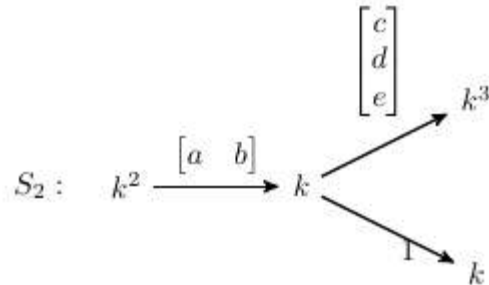


şekil 2.9: rnek 2.1.17 için diyagram

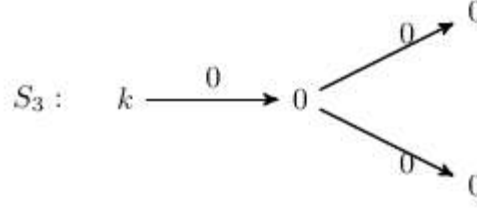
Q ' nun S_1, S_2 ve S_3 temsilleri aşağıdaki biçimde göz önüne alınsın.



şekil 2.10: rnek 2.1.17. için diyagram



şekil 2.11: rnek 2.1.17. için diyagram

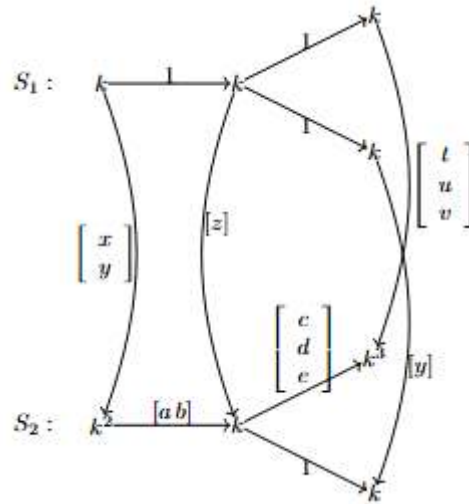


Şekil 2.12: Örnek 2.1.17. için diyagram

$$\text{Hom}(S_1, S_2) \cong k \quad \text{Hom}(S_1, S_3) \cong 0$$

$$\text{Hom}(S_2, S_3) \cong 0 \quad \text{Hom}(S_3, S_1) \cong 0$$

olur. Şimdi $\text{Hom}(S_1, S_2) \cong k$ olduğu gösterilecektir. $S_1 \rightarrow S_2$ temsil morfizmi aşağıdaki diyagramı değişmeli yapacak şekilde $x, y, z, t, u, v, y \in k$ skalerlerinin seçimi ile tespit edilir.



Şekil 2.13: Örnek 2.1.17. için diyagram

diyagram değişmeli olduğunda aşağıdaki eşitlikleri elde edilir.

$$x = y = t = u = v = y = z$$

Böylece

$$\text{Hom}(S_1, S_2) = \{([c]) \mid c \in k\} \cong k$$

olur. Benzer şekilde $\text{Hom}(S_1, S_3) = 0 = \text{Hom}(S_2, S_3) = \text{Hom}(S_3, S_1)$ olduğu gösterilebilir.

2.2 Dik Toplam ve Ayırıştırılamaz Temsiller

Bu bölümde dik toplam ve ayırıştırılamaz temsil tanımı verilecektir.

Tanım 2.2.1. Q bir quiver olsun. $A = (A_i, \gamma_\alpha)$ ve $A' = (A'_i, \gamma'_\alpha)$ temsilleri Q ' nun temsilleri olsun.

$$A \oplus A' = (A_i \oplus A'_i, \begin{bmatrix} \gamma_\alpha & 0 \\ 0 & \gamma'_\alpha \end{bmatrix})_{i \in Q_1, \alpha \in Q_2}$$

ile tanımlanmış olan Q ' nun temsiline A ve A' temsillerinin *dik toplamı* (*direct sum*) denir.

Not 2.2.2. İki temsilin dik toplamının tanımı sonlu sayıda temsil için tekrarlanarak sonlu sayıda $A_1, A_2, \dots, A_p \in \text{rep}_k Q$ temsilleri için

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_p = (A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_{p-1}) \oplus A_p$$

ile tanımlanır.

Örnek 2.2.3. Q quiverı aşağıdaki gibi alınsın.

$$Q : \quad 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$$

Şekil 2.14: Örnek 2.2.3 için diyagram

Aşağıdaki temsiller alınsın.

$$S_1 : \quad k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} 0$$

$$S_2 : \quad k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 11 \\ 01 \end{bmatrix}} k^2 \xrightarrow{[11]} k$$

Şekil 2.15: Örnek 2.2.3 için diyagram

O zaman $S_1 \oplus S_2$ dik toplamı şu şekilde yazılır:

$$k \oplus k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} k \oplus k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}} 0 \oplus k$$

Şekil 2.16: Örnek 2.2.3 için diyagram

Yukarıdaki dik toplam aşağıdaki temsile izomorftur:

$$k^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} k^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}} k$$

Şekil 2.17: Örnek 2.2.3 için diyagram

Tanım 2.2.4. $A \in \text{rep}_k Q$ bir temsil olsun. Eğer $A \neq 0$ ve A iki sıfırdan farklı temsilin bir dik toplamı olarak yazılamazsa; yani $R, P \in \text{rep}_k Q$ olmak üzere $A \cong R \oplus P$ iken $R = 0$ veya $P = 0$ olursa A 'ya *ayrıştırılamaz temsil (indecomposable representation)* denir.

Örnek 2.2.5. Örnek 2.2.3' deki S_1 temsili ayrıştırılamazdır fakat S_2 değildir. S_2 aşağıdaki temsile izomorftur (eşit değildir):

$$(k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k) \oplus (k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} 0)$$

Şekil 2.18: Örnek 2.2.5. için diyagram

Örnek 2.2.6. İki köşe ve $n \geq 1$ tamsayısı için n tane oktan oluşan quivera n -oklu Kronecker quiver denir. T_n ile gösterilir.

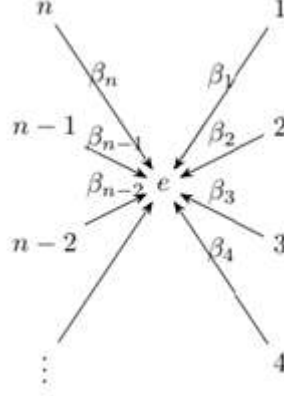
$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\beta_1} & \\ 1 & \xrightarrow{\beta_2} & 2 \\ & \xrightarrow{\beta_n} & \end{array}$$

Şekil 2.19: Örnek 2.2.6. için diyagram

Yukarıda çizilen quiverın bir T temsili; sıra ile 1 ve 2 köşelerine karşılık gelen vektör uzayları $T_n(1), T_n(2)$ ve her $i = 1, 2, \dots, n$ için $\mu_{\beta_n}: T_n(1) \rightarrow T_n(2)$ lineer

dönüşümleriyle $(T_n(1) \oplus T_n(2), \{\mu_{\beta_n}\}_{\beta_n \in T_n})$ şeklindedir. Bu temsilin boyut vektörü $p, r \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $(p, r) := (\dim T_n(1), \dim T_n(2))$ şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.2.7. Köşelerin kümesi $n \geq 1$ tamsayısı için $\{1, 2, \dots, n, e\}$ ve oklarının kümesi $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ olan quiver yıldız (star) quiver denir. B_n ile gösterilir.



Şekil 2.20: Örnek 2.2.7. için diyagram

Yukarıda çizilen quiverın temsili; $A_1, A_2, \dots, A_n$ sırası ile $1, 2, \dots, n$ köşelerine karşılık gelen vektör uzayları ve T ; e köşesine karşılık gelen vektör uzayı ve her $i = 1, 2, \dots, n$ için $\mu_{\beta_n}: A_i \rightarrow T$ lineer dönüşümleri ile $(A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n \oplus T, \{\mu_{\beta_n}\}_{\beta \in B_{n_1}})$ şeklindedir. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $\dim A_i = a_i$ ve $\dim T = t$ olmak üzere $A_i \cong k^{a_i}$ ve $T \cong k^t$ olur. Bu temsilin boyut vektörü $(a_1, a_2, \dots, a_n, t)$ şeklindedir.

3. QUIVER TİPLERİ

Bu bölümde quiverlerin tiplerinden ve özel olarak A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 tipli quiverların ayrıştırılmaz temsillerinden bahsedilecektir. Quiverlar; altında yatan çizgelere göre isimlendirilir ve sonlu (finite), evcil (tame), vahşi (wild) olmak üzere üç gruba ayrılırlar. Bu bölümdeki bilgiler [2] nolu kaynaklardan alınmıştır.

Tanım 3.1. Bir quiver; ayrıştırılmaz temsillerinin yalnızca sonlu sayıda izomorfizm sınıfına sahipse, *sonlu tip (finite type)* olarak adlandırılır.

Tanım 3.2.

$$A_n : 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n-1 \longrightarrow n$$

$$B_n : 1 \xlongequal{\quad} 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n-1 \longrightarrow n$$

$$C_n : 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n-1 \xlongequal{\quad} n$$

$$D_n : \quad 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n-2 \begin{array}{l} \nearrow n-1 \\ \searrow n \end{array}$$

$$E_6 : \quad \begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 5 \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & 6 & & & & \end{array}$$

$$\mathbb{E}_7 : \quad \begin{array}{ccccccccc} 1 & \text{---} & 2 & \text{---} & 3 & \text{---} & 4 & \text{---} & 5 & \text{---} & 6 \\ & & & & | & & & & & & \\ & & & & 7 & & & & & & \end{array}$$

$$\mathbb{E}_8 : \quad \begin{array}{ccccccccccc} 1 & \text{---} & 2 & \text{---} & 3 & \text{---} & 4 & \text{---} & 5 & \text{---} & 6 & \text{---} & 7 \\ & & & & | & & & & & & & & \\ & & & & 8 & & & & & & & & \end{array}$$

$$\mathbb{F}_4 : \quad 1 \text{ --- } 2 \text{ === } 3 \text{ --- } 4$$

$$\mathbb{G}_2 : \quad 1 \equiv 2$$

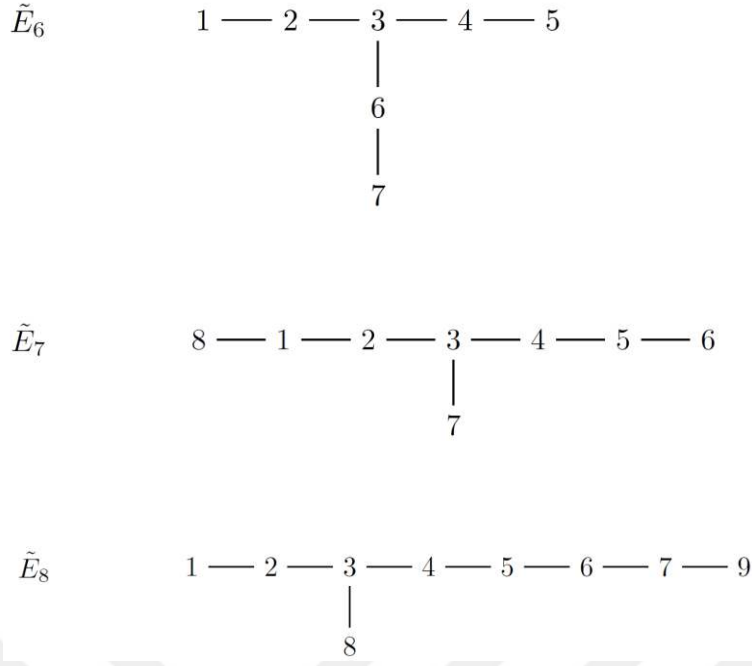
Şekil 3.1: Dynkin diyagramları

Yukarıda gösterilen (Şekil 3.1) diyagramlara *Dynkin diyagramları* (*Dynkin diagrams*) denir.

Tanım 3.3.

$$\tilde{A}_n \quad \begin{array}{ccccccc} & & & n+1 & & & \\ & \swarrow & & \searrow & & & \\ 1 & \text{---} & 2 & \text{---} & 3 & \text{---} & 4 & \text{---} & \cdots & \text{---} & n-1 & \text{---} & n \end{array}$$

$$\tilde{D}_n \quad \begin{array}{ccccccc} & 1 & & & & & n-1 \\ & \swarrow & & & & \searrow & \\ & & 2 & \text{---} & 3 & \text{---} & 4 & \text{---} & \cdots & \text{---} & n-2 & \\ & \swarrow & & & & \searrow & & & & & \\ n+1 & & & & & & & & & & n \end{array}$$



Şekil 3.2: Öklidyen diyagramları

Yukarıda gösterilen (Şekil 3.2) diyagramlara *Öklidyen diyagramları* (Euclidean diagrams) denir.

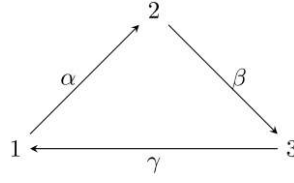
Örnek 3.4. A_2 tipli quiverların ayrıştırılamaz temsilleri sadece $k \xrightarrow{0} 0$, $0 \xrightarrow{0} k$ $k \xrightarrow{1} k$ olduğundan bu quiver sonlu tiptedir. A_2 tipli bir quiverın bir temsili M olsun. $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ olmak üzere $M: k^{n_1} \xrightarrow{f} k^{n_2}$ temsili için, çek f ' nin k^{n_1} ' deki tamlayanı V , gör f ' in k^{n_2} deki tamlayanı W olsun. Tamlayanların özelliği gereği $k^{n_1} = \text{çek } f \oplus V$ ve $k^{n_2} = \text{gör } f \oplus W$ olur. O zaman

$$k^{n_1} \xrightarrow{f} k^{n_2} = (\text{çek } f \xrightarrow{0} 0) \oplus (V \xrightarrow{\sim} \text{gör } f) \oplus (0 \xrightarrow{0} W)$$

olur. Dolayısıyla $M: k^{n_1} \rightarrow k^{n_2}$ temsiliinin ayrıştırılamaz temsilleri $k \xrightarrow{0} 0$, $0 \xrightarrow{0} k$, $k \xrightarrow{1} k$ olur.

Tanım 3.5. Bir quiverın sonsuz sayıda ayrıştırılamaz temsili var ve bu temsillerdeki vektör uzaylarının boyutu en fazla 1 ise, bu quiver *evcil tipli quiver* (tame type quiver) denir.

Örnek 3.6.



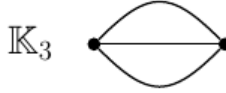
Şekil 3.3: Evcil tipli quiver örneği

Tanım 3.7. Yönlü döngü içermeyip ne Dynkin ne de Öklidyen olan diyagramlara *vahşi tipli quiver* (wild type quiver) denir.

Örnek 3.8.



Şekil 3.4: Vahşi tipli quiver örneği



Şekil 3.5: Vahşi tipli quiver örneği

3.1 A_n Tipli Quiverların Ayrıştırılmaz Temsilleri

Bu bölümde A_n tipli quiverlar için ayrıştırılmaz temsilleri verilecektir.

Örnek 3.9. $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ olmak üzere A_2 tipli bir quiverın bir temsili $M: k^{n_1} \xrightarrow{f_1} k^{n_2}$ göz önüne alınsın. A_2 tipli quiverlar için ayrıştırılmaz temsiller verilecektir. Örnek 3.4’ de ispatı verildiği gibi; $M: k^{n_1} \xrightarrow{f_1} k^{n_2}$ olmak üzere M ’ nin ayrıştırılmaz temsilleri şu şekildedir:

$$S_1: k \xrightarrow{0} 0$$

$$S_2: 0 \xrightarrow{0} k$$

$$M_{12}: k \xrightarrow{1} k$$

Örnek 3.10. $\mathbb{A}_3$ tipli quiverin bir temsili M olsun. $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ olmak üzere $M: k^{n_1} \xrightarrow{f_1} k^{n_2} \xrightarrow{f_2} k^{n_3}$ göz önüne alınsın. $\mathbb{A}_2$ tipli quiverlarda olduğu gibi $\text{çek}f_1$ ' in k^{n_1} ' deki tamlayanı alınarak $\ker f_1 \rightarrow 0 \rightarrow 0$ elde edilebilir. Bu parçaya karşı gelen ayrıştırılmaz temsil ise $k \rightarrow 0 \rightarrow 0$ ' dır. $\text{Gör}f_2$ ' nin k^{n_3} ' deki tamlayanı Y' olsun. O zaman tamlayanların özelliklerinden $k^{n_3} = \text{gör}f_2 \oplus Y'$ olur. Böylece bu parçalanışlar $0 \rightarrow 0 \rightarrow Y'$ elde edilir ve bu ise $0 \rightarrow 0 \rightarrow k$ ayrıştırılmaz temsile karşılık gelir. $X = \text{çek}(f_2 \circ f_1)$ olarak alınırsa k^{n_1} ' deki X ' in tamlayanı X' olsun. $f_1(X') \subseteq W'$ olacak şekilde $f_1(X)$ ' in k^{n_2} ' deki tamlayanı W' olsun. Böylece

$$k^{n_1} \xrightarrow{f_1} k^{n_2} \xrightarrow{f_2} k^{n_3} = (X \xrightarrow{f_1} f_1(X) \xrightarrow{f_2} 0) \oplus (X' \xrightarrow{f_1} W' \xrightarrow{f_2} k^{n_3})$$

parçalanışı elde edilir. İlk parçadan $k \rightarrow k \rightarrow 0$ ayrıştırılmaz temsili elde edilir. $A = \text{gör}(f_2 \circ f_1)$ ' in k^{n_3} ' deki tamlayanı A' olsun. $f_2^{-1}(A') = T'$ olsun ve $T', f_1(X')$ 'nin W' 'daki tamlayanıdır. Böylece

$$X' \xrightarrow{f_1} W' \xrightarrow{f_2} k^{n_3} = (X' \xrightarrow{f_1} f_1(X') \xrightarrow{f_2} A) \oplus (0 \xrightarrow{f_1} T' \xrightarrow{f_2} A')$$

parçalanışı elde edilir. İlk parçadan $k \rightarrow k \rightarrow k$ ayrıştırılmaz temsili elde edilir. Benzer şekilde $\text{çek}f_2$ ' nin tamlayanı alınarak da $0 \rightarrow k \rightarrow k$ ve $0 \rightarrow k \rightarrow 0$ ayrıştırılmaz temsilleri elde edilir.

$$S_1: k \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0$$

$$S_2: 0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{0} 0$$

$$S_3: 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} k$$

$$M_{12}: k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} 0$$

$$M_{23}: 0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{1} k$$

$$M_{13}: k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k$$

Benzer şekilde $\mathbb{A}_4, \mathbb{A}_5$ tipli quiverların temsilleri için de yapılır. $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 \in \mathbb{N}$ olmak üzere;

$$M: k^{n_1} \xrightarrow{f_1} k^{n_2} \xrightarrow{f_2} k^{n_3} \xrightarrow{f_3} k^{n_4}$$

olmak üzere M temsiliinin ayrıştırılmaz temsilleri şu şekildedir:

$$S_1: k \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0$$

$$S_2: 0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0$$

$$S_3: 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{0} 0$$

$$S_4: 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} k$$

$$M_{12}: k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0$$

$$M_{23}: 0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} 0$$

$$M_{34}: 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{1} k$$

$$M_{13}: k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} 0$$

$$M_{24}: 0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k$$

$$M_{14}: k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k$$

A_5 tipli bir quiverin T temsili aşağıdaki gibi olsun.

$$T: k^{n_1} \xrightarrow{f_1} k^{n_2} \xrightarrow{f_2} k^{n_3} \xrightarrow{f_3} k^{n_4} \xrightarrow{f_4} k^{n_5}$$

olmak üzere T temsiliinin ayrıştırılmaz temsilleri şu şekildedir:

$$S_1: k \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0$$

$$S_2: 0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0$$

$$S_3: 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0$$

$$S_4: 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{0} 0$$

$$S_5: 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} k$$

$$M_{12}: k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0$$

$$M_{23}: 0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0$$

$$M_{34}: 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} 0$$

$$M_{45}: 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{1} k$$

$$M_{13}: k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0$$

$$M_{24}: 0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} 0$$

$$M_{35}: 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k$$

$$M_{14}: k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} 0$$

$$M_{24}: 0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k$$

$$M_{15}: k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k$$

3.2 $\mathbb{D}_n$ Tipli Quiverların Ayrıştırılmaz Temsilleri

Bu bölümde $\mathbb{D}_n$ tipli quiverların ($n \geq 4$) ayrıştırılmaz temsilleri verilecektir. $m_1, m_2, m_3, m_4 \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{array}{c} D: k^{m_1} \rightarrow k^{m_2} \leftarrow k^{m_3} \\ \uparrow \\ k^{m_4} \end{array}$$

D temsili yukarıdaki şekilde olmak üzere ayrıştırılmaz temsilleri aşağıdaki gibidir:

$k \rightarrow 0 \leftarrow 0, 100$ olarak ifade edilsin. Bu gösterim kullanılarak

$$\begin{array}{c} \uparrow \quad 0 \\ 0 \end{array}$$

$$100, 010, 001, 000, 110, 011, 010, 110, 111, 011, 111, 121$$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

ayrıştırılmaz temsilleri yazılır.

3.3 $\mathbb{E}_6$ Tipli Quiverların Ayrıştırılmaz Temsilleri

Bu bölümde $\mathbb{E}_6$ tipli quiverların ayrıştırılmaz temsilleri verilecektir. $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6 \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{array}{c} E: k^{m_1} \rightarrow k^{m_2} \rightarrow k^{m_3} \rightarrow k^{m_4} \rightarrow k^{m_5} \\ \uparrow \\ k^{m_6} \end{array}$$

E temsili yukarıdaki gibi olmak üzere ayrıştırılmaz temsilleri aşağıdaki gibidir:

$k \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0$, 10000 olarak gösterilsin.

$\uparrow$ 0
 0

10000 , 00001 , 00011 , 11000 , 00010 , 01000 , 11111 , 01111

0 0 0 0 0 0 0 0

01110 , 11100 , 01100 , 00111 , 00100 , 00100 , 00110 , 11100

0 0 0 0 1 1 1 1

00111 , 01110 , 11110 , 01111 , 11111 , 01221 , 01211 , 01210

1 1 1 1 1 1 1 1

11211 , 12211 , 12210 , 11221 , 12221 , 11210 , 12321 , 12321

1 1 1 1 1 1 1 2

00000

1

3.4 $\mathbb{E}_7$ Tipli Quiverların Ayrıştırılmaz Temsilleri

Bu bölümde $\mathbb{E}_7$ tipli quiverlar ayrıştırılmaz temsilleri verilecektir.

$m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7 \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{array}{c}
 K: k^{m_1} \rightarrow k^{m_2} \rightarrow k^{m_3} \rightarrow k^{m_4} \rightarrow k^{m_5} \rightarrow k^{m_6} \\
 \uparrow \\
 k^{m_7}
 \end{array}$$

K temsili yukarıdaki gibi olmak üzere ayrıştırılmaz temsilleri aşağıdaki gibidir:

$k \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0$, 100000 olarak ifade edilecektir.

$\uparrow$ 0
 0

100000 , 010000 , 001000 , 000000 , 000100 , 000010 , 000001 , 110000

0 0 0 0 0 0 0 0

0011110 , 0111110 , 0121110 , 0121100 , 0121000 , 0122110 , 0122100
 1 1 1 1 1 1 1
 0122210 , 1100000 , 1110000 , 1111000 , 1110000 , 1111100 , 1111000
 1 0 0 1 0 1 0
 1111110 , 1111100 , 1111110 , 1121110 , 1121100 , 1121000 , 1102110
 1 1 1 1 1 1 1
 1122100 , 1122210 , 2343210 , 1222210 , 1232210 , 1233210 , 1232210
 1 1 2 1 1 2 2
 1233210 , 1243210 , 1232100 , 1221100 , 1221110 , 1221000 , 1343210
 1 2 1 1 1 1 2
 0000000 , 0000011 , 0000111 , 0001111 , 0011111 , 0111111 , 0011111
 1 0 0 0 0 0 1
 0111111 , 0121111 , 0122111 , 0122211 , 1111111 , 1111111 , 1121111
 1 1 1 1 0 1 1
 1122111 , 2343211 , 1222211 , 1232211 , 1232210 , 1232210 , 1233211
 1 2 1 1 2 2 1
 1233211 , 1243211 , 1221111 , 1222111 , 1232111 , 1232111 , 1343211
 2 1 1 2 2 1 2
 2464321 , 2354321 , 1354321 , 2343321 , 1343221 , 1343321 , 1344321
 3 3 3 2 2 2 2
 1244321 , 2344321 , 2465421 , 2465321 , 1233221 , 1232221 , 1243321
 2 2 3 3 2 2 2
 0122221 , 122221 , 1354321 , 2354321 , 1454321 , 2454321 , 1232221
 1 1 2 2 2 3 1
 1233321 , 1233321 , 1233321 , 2343221 , 1243221 , 1122221 , 2465431
 1 2 1 2 2 1 3
 2465431 , 0000001
 3 0

4. EŞKARELER VE DİK PARÇALANIŞLARI

Bu bölümde, bir cismin üzerinde tanımlı modüllerin ayrıştırılamaz altmodülleri ve parçalanışları ile ilgili genel bilgiler verilecektir. Parçalanışlar için önemli olan eşkare kavramı ve bazı özellikleri verilecektir. Bu bölümdeki tüm bilgiler [2] nolu kaynaktan alınmıştır.

4.1 Eşkareler

Bu bölümde eşkare tanımı ve bazı teoremler verilecektir.

B bir k -cebiri olsun.

Tanım 4.1.1. $e \in B$ için eğer $e^2 = e$ koşulunu sağlıyorsa e ' ye eşkare (*idempotent*) adı verilir. e_1, e_2 iki eşkare olmak üzere eğer $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$ eşitlikleri sağlanıyorsa e_1 ve e_2 *ortogonal* (*orthogonal*) olarak adlandırılır. Her $b \in B$ için $eb = be$ sağlanıyorsa e eşkare elemanına *merkezi eşkare* (*central idempotent*) denir. Eğer e sıfırdan farklı ortogonal eşkareler e_1 ve e_2 eşkarelerinin $e = e_1 + e_2$ toplamı olarak yazılamazsa e ' ye *ilkel eşkare* (*primitive idempotent*) denir.

Örnek 4.1.2. 0 ve 1 eşkaredir. Bunlara *aşık eşkareler* (*trivial idempotent*) denir. Diğer tüm eşkarelere *aşık olmayan eşkareler* (*non-trivial idempotent*) denir.

Tanım 4.1.3. Q bir quiver ve $i, j \in Q_1$ olsun. Q ' da i ' den j ' ye giden l uzunluğunda bir c yolu (*path*); $\alpha_h \in Q_2$ olmak üzere

$$s(\alpha_1) = i,$$

$$s(\alpha_h) = t(\alpha_{h-1}), h = 2, 3, \dots, l,$$

$$t(\alpha_l) = j$$

olacak şekilde bir $c = (i|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l|j)$ dizisidir.

Tanım 4.1.4. i köşesindeki $l = 0$ uzunluklu $(i||i)$ yoluna *sabit yol (lazy path)* denir ve e_i ile gösterilir.

Tanım 4.1.5. Q bir quiver olsun. Q ' nun *yol cebri (path algebra)* kQ ; Q quiverındaki tüm yolları taban kabul eden ve c, c' iki taban elemanı olmak üzere

$$cc' = \begin{cases} c \cdot c', & \text{eğer } s(c') = t(c) \text{ ise} \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

ile tanımlanan çarpma işlemi ile bir k -cebirdir ve kQ ile gösterilir. Böylece kQ ' nın keyfi iki elemanı olan $\sum_c \lambda_c c$, $\sum_{c'} \lambda'_{c'} c'$ nin çarpımı $\sum_{cc'} \lambda_c \lambda'_{c'} cc'$ şeklindedir.

Örnek 4.1.6. Eğer $B = kQ$ bir yol cebri ise, o zaman her e_i sabit yolu bir eşkaredir.

Lemma 4.1.7. Eğer $B = kQ$ bir yol cebri ise, o zaman her e_i sabit yolu bir ilkel eşkaredir.

Kanıt: e ve e' ortogonal eşkare elemanlar olmak üzere $e_i = e + e'$ varsayılın ve quiverdaki tüm yollar üzerindeki toplam

$$e = \sum_c \lambda_c c, e' = \sum_{c'} \lambda'_{c'} c'$$

şeklinde alınsın. $e^2 = e$ ve $e = \sum_c \lambda_c c$ bir eşkare olduğundan dolayı,

$$0 = e^2 - e = \sum_{c,c'} \lambda_c \lambda'_{c'} cc' - \sum_{c''} \lambda_{c''} c'' = \sum_{cc'=c''} (\lambda_c \lambda'_{c'} - \lambda_{c''}) c'' \quad (4.1)$$

elde edilir.

Özellikle $\lambda_{e_j} \lambda_{e_j} = \lambda_{e_j}$ dir. Böylece herhangi bir j köşesi için $\lambda_{e_j} = 0$ veya 1 dir. Öte yandan $ee' = 0$ olduğundan $\lambda_{e_j} = 0$ olur ve böylece $\lambda'_{e_j} = 1$ dir. $e + e' = e_i$ olduğu için eğer $i \neq j$ ise $\lambda_{e_j} = 0$ ve $\lambda'_{e_j} = 0$ olmalıdır ve $\lambda_{e_i}, \lambda'_{e_i}$ 'den biri 0, diğeri 1 olmalıdır. $\lambda_{e_i} = 1$ ve $\lambda'_{e_i} = 0$ olarak alınsın. Şimdi herhangi bir c yolu için (4.1)' den $\lambda_{c'} = 0$ olur. Böylece $e' = 0$ dir.

Not 4.1.8. B bir k -cebir olsun. Aynı zamanda B , bir B -modüldür.

Yardımcı Teorem 4.1.9. e aşikar olmayan bir eşkare olsun. O zaman $1 = e + (1 - e)$ olacak şekilde e ve $(1 - e)$ ortogonal eşkarelerdir ve sağ B -modül B , aşağıdaki dik toplama eşittir:

$$B = eB \oplus (1 - e)B$$

Ek olarak e merkezil bir eleman ise, o zaman B 'nin bir, k -cebiri olarak $B = eB \oplus (1 - e)B$ şeklinde bir parçalanışı vardır.

Kanıt: $(1 - e)^2 = 1 - e - e + e^2 = 1 - e - e + e = 1 - e$ olduğundan,

$(1 - e)$ 'nin bir eşkare eleman olur. Ancak, $e(1 - e) = e - e^2 = e - e = 0$ ve ayrıca $(1 - e)e = 0$ 'dır. Bu sayede e ve $(1 - e)$ ortogonal eşkarelerdir. Şimdi B modülü düşünölsün. Herhangi bir $b \in B$ için $b = eb + b - eb = eb + (1 - e)b \in eB + (1 - e)B$ şeklinde yazılabilir. Bu toplam vektör uzaylarının dik toplamı olduğunu göstermek için, $eB \cap (1 - e)B$ kesişiminin yalnızca 0 içermesini göstermek yeterlidir. $b \in eB \cap (1 - e)B$ olsun. O zaman bazı $b', b'' \in B$ için $b = eb' = (1 - e)b''$ dir. Bu nedenle $eb' - (1 - e)b'' = 0$ olur. Son denklemden $e^2 = e$ ve $e(1 - e) = 0$ olduğu için buradan $0 = e0 = e(eb' - (1 - e)b'') = eb'$ olur. Buradan $0 = eb' = b'$ yi gösterir ve böylelikle $eB \cap (1 - e)B = 0$ 'dır. Bu dik toplam ayrışımı, $bc = eb + (1 - e)b)c = ebc + (1 - e)bc$ olduğu için B 'nin sağ B -modül yapısını korur.

Ayrıca e merkezil ise $ebeb' = ebb'$ ve $(1 - e)b(1 - e)b' = (1 - e)bb' - (1 - e)ebb' = (1 - e)bb'$ olduğu için bileşenlere göre çarpma ile,

$$(eb, (1 - e)b). (eb', (1 - e)b') = (ebeb', (1 - e)b(1 - e)b')$$

$eB \oplus (1 - e)B$ bir k -cebiri olur.

Örnek 4.1.10.

$$Q : \quad 4 \xrightarrow{\alpha} 5$$

Şekil 4.1: Örnek 4.1.10 için diyagram

Q quiverının bir yol cebiri B olsun. O zaman e_1 ve $e_2 = 1 - e_1$ sabit yolları ortogonal eşkarelerdir ve sağ B -modül $e_1B \oplus e_2B$ olarak parçalanır. e_1 merkezil değildir çünkü $\alpha e_1 = 0$ iken $e_1\alpha = \alpha'$ 'dır. Bu yüzden $e_1B \oplus e_2B$ dik toplamı B 'nin halka parçalanışı değildir. Aslında herhangi bir $e_2b \in e_2B$ için $\alpha(e_2b) \in e_1B$ 'dir. Yardımcı Teorem 4.1.9' dan, toplamı birim olan iki ortogonal eşkare sağ B -modülü B 'nin dik toplam ayrışımına yol açar.

Yardımcı Teorem 4.1.11. $B = S_1 \oplus S_2$ sağ B -modüllerin dik toplamı olsun. O zaman

- (1) $1 = e_1 + e_2$ olacak şekilde $e_1 \in S_1$ ve $e_2 \in S_2$ ortogonal eşkareleri vardır.
- (2) S_i ayrıştırılmazdır gerek ve yeter koşul $i = 1, 2$ için e_i ilkelidir.

Kanıt: (1) $B = S_1 \oplus S_2$ olduğu için, B 'deki her eleman, S_2 'deki bir eleman ve S_1 'deki bir elemanın bir toplamı olarak tek türlü yazılır. Böylece, $1 = e_1 + e_2$ olacak şekilde $e_i \in S_i$ vardır. Sağ B -modül yapısı sebebiyle her $b \in B$ için $e_i b \in S_i$ 'dir. Özellikle $e_1 e_2 \in S_1$ 'dir. Ayrıca $1 = e_1 + e_2$ ise $e_2 = e_1 e_2 + e_2^2$ 'dir ve bu yüzden $e_1 e_2 = e_2 - e_2^2 \in S_2$ 'dir. Bu nedenle $e_1 e_2 \in S_1 \cap S_2$ olur. $B = S_1 \oplus S_2$ olduğundan $S_1 \cap S_2 = 0$ ve $e_1 e_2 = 0$ 'dır. Benzer şekilde $e_2 e_1 = 0$ olduğunu göstermek mümkündür. Bu ortogonalite olduğunu da kanıtlar. O zaman $e_2 = e_1 e_2 + e_2^2$ olduğundan $e_2 = e_2^2$ 'dir ve dolayısıyla e_2 bir eşkaredir. Aynı şekilde, e_1 bir eşkare olduğu gösterilir.

(2) ($\Rightarrow$) e_1 ilkel olmasın. O zaman $e, e' \in B$ iki aşık olmayan ortogonal eşkareler için $e_1 = e + e'$ 'dir.

Yardımcı Teorem 4.1.9'un ispatında olduğu gibi $S_1 = eS_1 \oplus e'S_1$ olur. Ancak, $eS_1 \neq 0$ çünkü $ee_1 = ee + ee' = e \neq 0$ elemanını içerir. $e'S_1 \neq 0$ çünkü e' elemanını içerir. Sonuç olarak e_1 ilkel değilse S_1 ayrıştırılmaz değildir.

($\Leftarrow$) S_1 ayrıştırılmaz olmasın. S_1 'in uygun sıfırdan farklı S_1', S_1'' alt modülleri için $S_1 = S_1' \oplus S_1''$ olur. O zaman bazı $e_1'' \in S_1''$ ve $e_1' \in S_1'$ elemanları için $e_1 = e_1' + e_1''$ şeklinde yazılır. e_1', e_1'' aşık olmayan ortogonal eşkareler olduğu gösterilecektir.

$$1 = e_1 + e_2 = e_1' + e_1'' + e_2$$

ifadesi e_1'' ile çarpılarak

$$e_1'' = e_1' e_1'' + e_1'' e_1'' + e_2 e_1'' \quad (4.2)$$

elde edilir. Böylece $e_2 e_1'' \in S_1$ olur. Fakat S_2 bir sağ B -modül ve $e_2 \in S_2$ olduğu için $e_2 e_1'' \in S_2$ 'nin bir elemanıdır. $S_1 \cap S_2 = 0$ olduğu için $e_2 e_1'' = 0$ 'dır. Bu yüzden (4.2)'den

$$e_1' e_1'' = e_1'' - e_1'' e_1'' \in S_1''$$

elde edilir. Fakat S_1' sağ B -modül olduğu için $e_1' e_1'' \in S_1'$ olduğundan böylelikle $e_1' e_1'' \in S_1' \cap S_1'' = \{0\}$ olur. Başka bir deyişle, $e_1 = e_1' + e_1''$; $e_1'^2 \in S_1'$ ve $e_1''^2 \in S_1''$ olacak şekilde $e_1 = e_1^2 = e_1'^2 + e_1''^2$ olur. Fakat $S_1 = S_1' \oplus S_1''$ yazılımının tek türlü olduğundan $e_1 = e_1' + e_1''$ 'dir ve böylece $e_1'^2 = e_1'$ ve $e_1''^2 = e_1''$ olur. e_1' 'nin aşık olmadığını göstermek için $e_1' = 0$ olduğu kabul edilsin. $s' \in S_1'$, $s' \neq 0$ olsun ve

$e_1 s' \in S_1$ ve $e_2 s' \in S_2$ olmak üzere $s' = (e_1 + e_2)s' = e_1 s' + e_2 s'$ dır. Fakat $S = S_1 \oplus S_2$ ve $s' \in S_1$ olduğu için $s' = e_1 s'$ olur. Dolayısıyla $s' \in S_1' \cap S_1''$ için

$$s' = e_1 s' = e_1' s' + e_1'' s' = e_1'' s' \in S_1''$$

olur. Buradan $s' \in S_1' \cap S_1'' = 0$ ve $s' = 0$ olur. Bu ise bir çelişkidir. Böylece e_1 ilkel değildir.

Şimdi B' nin sonlu boyutlu olduğunu varsayalım. O zaman B -modülü aşağıdaki biçimde ayrıştırılamaz modüllerin dik toplamı olarak yazılabilir:

$$B = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_t$$

Yardımcı Teorem 4.1.11' den, $e_i \in S_i$ olmak üzere $e_1, e_2, \dots, e_t$ ikişerli ilkel olarak ortogonal eşkare elemanlar vardır öyle ki $1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_t$ ve $S_i = e_i B$ dir. Bunun aksine, $e_1, e_2, \dots, e_t$ ilkel ise $1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_t$ olacak şekilde ikili olarak ortogonal eşkare elemanlar ise o zaman Yardımcı Teorem 4.1.10' dan, her bir $e_i B$ ayrıştırılamaz bir modül olmak üzere:

$$B = e_1 B \oplus e_2 B \oplus \cdots \oplus e_t B$$

parçalanışı vardır.

Örnek 4.1.12. $Q_1 = \{1, 2, \dots, t\}$ köşelerinin kümesi ile Q yönlü döngüleri olmayan bir quiver ve $B = kQ$ bir yol cebri olsun. Yardımcı Teorem 4.1.7' den e_i sabit yolu ilkel ortogonal eşkaredir. Ancak $1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_t$ dir. Bu yüzden B sağ B -modül aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$B = e_1 B \oplus e_2 B \oplus \cdots \oplus e_t B$$

ve her bir $e_i B$ bir ayrıştırılamaz modüldür.

4.2 Ayrıştırılmazlık İçin Kriter

Bu bölümde, bir modülün ayrıştırılamaz olup olmadığı sorusunun, onun endomorfizm cebirleri açısından ele alınacaktır.

Tanım 4.2.1. B tek bir maksimal sağ ideale sahip ise bir B cebirine yerel (local) denir.

Yardımcı Teorem 4.2.2. B bir k –cebir olsun. O zaman aşağıdakiler birbirine denktir:

- (1) B yereldir.
- (2) B tek maksimal sol ideale sahiptir.
- (3) B' nin tersinir olmayan elemanlarının kümesi idealdir. (hem sağ ideal hem sol ideal)
- (4) $\forall b \in B$ için b ya da $(1 - b)$ tersinirdir.
- (5) $B/\text{Rad}B$ k -cebiri bir cisimdir.

Kanıt: (1) $\Rightarrow$ (3) B yerel ise $\text{Rad} B$ tek maksimal sağ idealdir. Radikal öz ideal olduğundan tersinir elemanları içeremez. Öte yandan, eğer x tersinir değilse, o zaman $x \in \text{Rad}B'$ dir. Çünkü x' in oluşturduğu sağ ideal B' ye eşit değildir ve dolayısıyla tek maksimum ideal olan $\text{Rad}B'$ ye dahildir. Böylece B' nin tersinir olmayan elemanlarının kümesi $\text{Rad} B'$ ye eşittir ki bu ise bir idealdir.

(2) $\Rightarrow$ (3) Benzer şekilde yapılır.

(3) $\Rightarrow$ (4) b ve $(1 - b)$ tersinir olmayan elemanlar ise o zaman (3)' ten $1 = b + (1 - b)$ tersinir olmayandır. Bu ise çelişkidir.

(4) $\Rightarrow$ (5) $B/\text{Rad}B'$ deki sıfırdan farklı her elemanın tersinir olduğu gösterilecektir. Her $b \in B \setminus \text{Rad}B$ için $(1 - bc) \in \text{Rad}B$ olacak şekilde $c \in B$ vardır. Şimdi $b \notin \text{Rad}B$ olduğu için Yardımcı Teorem 1.1.6' dan $(1 - bd)$ olacak şekilde d, B' de tersi yoktur. O zaman (4)' ten bd' nin tersi d' olur. Böylelikle $1 = bdd'$ olur. $c = dd'$ alınrsa ispat biter.

(5) $\Rightarrow$ (1)&(2) (5)' ten $\text{Rad}B'$ nin maksimal (iki yönlü) bir ideal olduğunu gösterir.

Sonuç 4.2.3. Eğer B sonlu boyutlu yerel bir k -cebir ise $B/\text{Rad}B \cong k'$ dır.

Kanıt: Yardımcı Teorem 4.2.2' den $B/\text{Rad}B'$ nin k üzerinde bir cisim genişlemesi olduğu sonucuna varılır. B sonlu boyutlu olduğu için bu genişlemede sonlu boyutludur. Dolayısıyla bu bir cebirsel genişlemedir. k cebirsel kapalı olduğu için aşıkardır. $B/\text{Rad}B \cong k$ olur.

Sonuç 4.2.4. B yerel ise B sadece 1 ve 0 aşıkarelerine sahiptir.

Kanıt: e bir eşkare olduğunu varsayalım. O zaman Yardımcı Teorem 4.1.9' dan $e(1 - e) = 0$ ' dır. Diğer taraftan Yardımcı Teorem 4.2.2' ün (4) koşulundan e ya da $(1 - e)$ tersinirdir. Bu yüzden $e = 0$ ya da $(1 - e) = 0$ ' dır.

Sonuç 4.2.5. $e \in B$ olmak üzere bir eşkare ilkeldir gerek ve yeter koşul eBe cebiri sadece 0 ve 1 birim eşkarelerine sahiptir.

Kanıt: İlk olarak, e 'nin eBe cebirinde birim elemandır.

($\Rightarrow$) e bir ilkel eşkare olsun. e' , eBe ' de bir eşkare eleman olsun. Böylece, bazı $b \in B$ için $e' = ebe$ dir. Öyleyse $(e - e')$ aynı zamanda bir eşkaredir. Yardımcı Teorem 4.1.9' dan $e'(e - e') = 0$ dır ve $e = e' + (e - e')$ dir. Çünkü e ilkel olduğu için $e' = 0$ ya da $e - e' = 0$ olmalıdır. Buradan $e - e' = 0$ olur. Yani e' aşikar eşkaredir.

Dolayısıyla eBe 'nin tüm eşkareleri aşikar olur.

($\Leftarrow$) $e', e''; B$ 'de ortogonal eşkareleri için $e = e' + e''$ olsun. O zaman

$$(ee'e)(ee'e) = ee'ee'e = ee'(e' + e'')e'e = ee'e + ee'e''e'e = ee'e$$

'dir. $e'e'' = 0$ olduğundan $(ee'e)$ bir eşkaredir. eBe 'de $(ee'e)$ bir eşkare elemandır. Kabulden $ee'e = 0$ ya da $ee'e = e$ olur. İlk durumda $e'e'' = e''e' = 0$ olduğu için $0 = ee'e = (e' + e'')e'(e' + e'') = e'$ olur. İkinci durumda $e' + e'' = e = ee'e = (e' + e'')e'(e' + e'') = e'$ olur. Böylece $e'' = 0$ olur. Bu, e 'nin iki aşikar olmayan ortogonal eşkarenin toplamı olarak yazılamayacağını gösterir. Dolayısıyla e ilkeldir.

Sonuç 4.2.6. B bir k -cebiri olsun. S sonlu boyutlu bir B -modül ve $End S$ endomorfizm cebiri olsun. O zaman aşağıdakiler denktir:

(1) S ayrıştırılmazdır.

(2) Her $f \in End S$, her endomorfizmi $\lambda \in k$ ve $g \in End S$ üstel sıfır (nilpotent) olmak üzere $f = \lambda 1_S + g$ formundadır.

(3) $End S$ yereldir.

Kanıt: (1) $\Rightarrow$ (2) f , S 'nin bir endomorfizması olduğundan $f: S \rightarrow S$ sonlu boyutlu k -vektör uzayları arasındaki k -lineer dönüşümdür. Çünkü k -cismi cebirsel olarak kapalı olduğu için f 'nin karakteristik polinomu aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\chi_f(x) = \prod_{i=1}^t (x - \lambda_i)^{v_i}$$

Böylece λ_i , f 'nin özdeğerleri olmak üzere S 'nin C tabanına kaşılık gelen f 'nin matrisi üçgensel matristir ve köşegen elemanları v_i, λ_i şeklindedir. $S_i = çek(f - \lambda_i 1_S)^{v_i}$ olsun. O zaman $dim S_i = v_i$ ve S vektör uzayı aşağıdaki şekilde ayrışır:

$$S = S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_t \quad (4.3)$$

Şimdi $h_i = (f - \lambda_i 1_S)^{v_i}$ olsun. Dolayısıyla h_i, f 'de bir polinomdur. Yani öyle $b_j \in k$ için

$$h_i = f^{v_i} + b_{v_i-1} f^{v_i-1} + \dots + b_1 f + b_0 1_S$$

$f \in \text{End} S$ olduğu için $h_i \in \text{End} S$ olur ve bu yüzden $\text{çek } S_i = \text{çek } h_i$ bir B -modülüdür. (4.3)'ten aslında B -modülündeki S 'nin bir parçalanışıdır. S ayrıştırılamaz olduğu için $t = 1$ 'dir ve dolayısıyla f 'nin sadece bir λ özdeğeri vardır. Bu yüzden C bazına göre f 'nin matrisi, köşegen elemanları üçgensel matris olan tümü λ 'ya eşittir. Böylece g üstel sıfır olacak şekilde $f = \lambda 1_S + g \in \text{End} S$ 'dir.

(2) $\Rightarrow$ (3) $f = \lambda 1_S + g \in \text{End} S$ olsun. Eğer f tersinir değilse ya $f = g$ üstel sıfır ya da $\lambda = 0$ 'dır. Böylece $f^l = 0$ olacak şekilde $l \geq 0$ vardır.

Fakat

$$1_S = 1_S - f^l = (1_M + f + f^2 + \dots + f^{n-1})(1 - f)$$

olduğundan $(1 - f)$ 'nin tersinir olur. Yardımcı Teorem 4.2.2' den $\text{End } S$ yerel olur.

(3) $\Rightarrow$ (1) $\text{End} S$ yerel ve $S = S_1 \oplus S_2$ olduğu kabul edilsin. $i = 1, 2$ için $p_i: S \rightarrow S_i$ doğal projeksiyon ve $u_i: S_i \rightarrow S$ doğal injeksiyon olsun. Dolayısıyla $u_i \circ p_i \in \text{End} S$ ve $(u_i \circ p_i)^2 = u_i \circ p_i$ olur. Çünkü $\text{End } S$ yereldir. Böylece $u_i \circ p_i, \text{End } S$ 'de eşkare eleman ve $u_i \circ p_i = 0$ ya da $u_i \circ p_i = 1$ olur. Eğer $u_i \circ p_i = 0$ ise $S_i = 0$ olur ve eğer $u_i \circ p_i = 1$ ise $S_i = S$ olur. Buradan S ayrıştırılamazdır.

Örnek 4.2.7. Q quiverı aşağıdaki gibi alınsın.

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} 2$$

Şekil 4.2: Örnek 4.2.7. için diyagram

Q 'nun bir S temsili aşağıdaki gibi olsun.

$$k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 10 \\ 01 \end{bmatrix}} k^2$$

Şekil 4.3: Örnek 4.2.7. için diyagram

S' nin bir endomorfizmi bir $f: S \rightarrow S$ temsil morfizmidir. Yani S' nin $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ iki dönüşümüyle değişmeli olan $f_1, f_2: k^2 \rightarrow k^2$ iki lineer dönüşümlerinden oluşur. φ_α birim matris ile verildiği için f_1 ve f_2 aynı matris olmak zorundadır. Bu matrisi aşağıdaki gibi gösterilsin.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Ancak, $f_2 \varphi_\beta = \varphi_\beta f_1$ olduğu için

$$\begin{bmatrix} a & \lambda a + b \\ c & \lambda c + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + \lambda c & b + \lambda d \\ c & d \end{bmatrix}$$

'dir. Eğer $\lambda \neq 0$ ise bu eşitlikten ya $c = 0$ ya da $a = d$ olur. Böylece $End S$ aşağıdaki matris formundaki tüm matrislerin cebiridir.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

$End S'$ nin bir elemanı tersinirdir gerek ve yeter koşul $a \neq 0$ 'dır. Başka bir deyişle eğer $a = 0$ ise

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

tersinirdir. Yardımcı Teorem 4.2.2' den $End S$ yereldir. Sonuç 4.2.6' dan S ayrıştırılamazdır.

Yani, eğer $\lambda = 0$ ise $End S$, tüm 2×2 tipindeki matrislerin cebirine izomorfudur. Bu cebir yerel değildir.

Çünkü

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

her ikisi de tersinir değildir.



5. KÖKLER

Bu bölümde bir quiverının kuadratik formu ve kökleri incelenecektir. Bir quiver, Dynkin tipli ise tüm temsilleri tam olarak kökler yoluyla sınıflandırılabilir. Bu nedenle; kuadratik formlar ve kökler, cebirsel yapıları anlamada, sınıflandırmada ve sonlu ve sonsuz durumları ayırt etmede temel araçlardır. Bu bölümdeki tüm bilgiler [2] nolu kaynaktan alınmıştır.

5.1 Temsil Çeşitliliği

Bu bölümde kuadratik form tanımı ve bazı teoremler verilecektir.

Tanım 5.1.1. $Q = (Q_1, Q_2)$ yönlendirilmiş döngü içermeyen bir quiver olsun ve köşelerin sayısı n olsun. Her i için $d_i \geq 0$ olacak şekilde $d = (d_i) \in \mathbb{Z}^n$ olsun. O zaman d ' ye bir *boyut vektörü* (*dimension vector*) denir.

E_d , Q ' nun $d = (d_i)$ boyut vektörlü tüm $S = (S_i, \gamma_\alpha)_{i \in Q_1, \alpha \in Q_2}$ temsillerinin uzayı olsun. Böylece her $i \in Q_1$ için $S_i \cong k^{d_i}$ olur. Başka bir deyişle; E_d ' deki S temsillerinin S_i vektör uzayları izomorfizma farkıyla bellidir ve E_d ' deki temsiller γ_α doğrusal dönüşümleri ile tamamen tanımlanır ve böylece;

$$E_d = \bigoplus_{\alpha \in Q_2} \text{Hom}_k(k^{d_{s(\alpha)}}, k^{d_{t(\alpha)}})$$

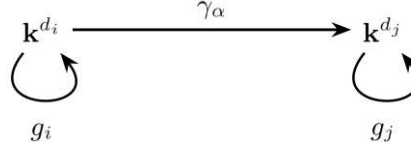
'dır. Her bir $\text{Hom}_k(k^{d_{s(\alpha)}}, k^{d_{t(\alpha)}})$, bileşenleri k ' dan gelen $d_{s(\alpha)} \times d_{t(\alpha)}$ tipindeki matrisler uzayına izomorftur. Özellikle; E_d , $\sum_{\alpha} d_{s(\alpha)} d_{t(\alpha)}$ boyutlu bir k -vektör uzayıdır. O zaman $GL_{d_i}(k)$, k^{d_i} ' den kendine giden tersinir lineer dönüşümlerin grubu olmak üzere

$$G_d = \prod_{i \in Q_1} GL_{d_i}(k)$$

şeklinde tanımlansın. G_d grubunun, E_d uzayı üzerinde grup hareketi vardır. Eğer $g = (g_i) \in G_d$ ise $S = (S_i, \gamma_\alpha) \in E_d$ ve $i \xrightarrow{\alpha} j$, Q ' da bir ok ise $(g \cdot \gamma)_\alpha = g_j \gamma_\alpha g_i^{-1}$ olur. Bu hareket altındaki bir S temsilinin *yörüngesi* (*orbit*)

$$\wp_S = \{g \cdot S | g \in G_d\}$$

ile tanımlıdır ve $\wp_S$ ile gösterilecektir.



Şekil 5.1: Grup hareketi diyagramı

Örnek 5.1.2. Eğer $Q : 4 \rightarrow 5$ quiver ve $d = (d_1, d_2)$ ise o zaman E_d , $d_2 \times d_1$ tipindeki matrisin uzayına izomorftur. $S \in E_d$ temsili γ ile verilir. G grubunun (g_1, g_2) elemanları d_1 ve d_2 boyutundaki tersinir kare matrislerin ikilileridir ve $\wp_S = \{g_2 \gamma g_1^{-1} | (g_1, g_2) \in G_d\}$ yörüngesi rankı, γ ' nin rankına eşit olan tüm matrislerden oluşan kümedir.

Yardımcı Teorem 5.1.3. $\wp_A$ yörüngesi A temsilinin tam bir izosınıfıdır. Yani

$$\wp_A = \{A' \in \text{rep}_k Q | A' \cong A\}$$

olur.

Kanıt: $A = (A_j, \gamma_\alpha)$ ve $A' = (A'_j, \gamma'_\alpha)$ aynı yörüngede olsun. O zaman aşağıdaki diyagramı değişmeli yapacak şekilde her bir $j \xrightarrow{\alpha} m$ oku için $g \cdot A = A$ olacak şekilde bir $g = (g_j)_{j \in Q_1}$ vardır.

$$\begin{array}{ccc} A_j & \xrightarrow{\gamma_\alpha} & A_m \\ \downarrow g_j & & \downarrow g_m \\ A'_j & \xrightarrow{\gamma'_\alpha} & A'_m \end{array}$$

Şekil 5.2: Yardımcı Teorem 5.1.3. için diyagram

Böylece g bir temsil morfizmasıdır. Fakat her bir g_j , $GL_{d_j}(k)$ ' nin bir elemanıdır. Böylelikle bir izomorfizmadır. Dolayısıyla A ve A' izomorfik temsillerdir. Diğer

yandan, eğer $g: A \rightarrow A'$ temsillerin bir izomorfizması ise o zaman her bir g_j , $GL_{d_j}(k)$ 'nin bir elemanıdır ve böylece $A' = g(A) = g \cdot A$ olur.

Tanım 5.1.4. Bir A temsili olmak üzere $Stab A = \{g \in G_d | g \cdot A = a\}$ kümesine A 'nın *sabitleyicisi (stabilizer)* denir.

Yardımcı Teorem 5.1.5. $d \in \mathbb{Z}^n$ olsun. O zaman

(1) d boyut vektörlü A temsili için

$$\dim \wp_A = \dim G_d - \dim Aut A$$

'dir.

(2) E_d 'de eşboyutu 0 olan en çok bir $\wp$ yörüngesi vardır.

Kanıt : (1) $G_d/Stab A \rightarrow \wp_A, \bar{g} \mapsto g \cdot A$ ile tanımlanan dönüşüm birebir ve örtendir. Dolayısıyla $G_d/Stab A$ ve $\wp_A$ aynı boyuta sahip olur. $Stab A = Aut A$ olduğundan sonuç elde edilir.

(2) Cebirsel çeşitlilik olan E_d indirgenemezdir (yani, herhangi bir boş olmayan açık alt kümenin yoğun) ve eşboyutu sıfır olan bir yörünge E_d içinde açıktır.

5.2 Bir Quiverin Kuadratik Formu

Bu bölümde Q ile ilişkili olan kuadratik form, kök kavramı ve aralarındaki ilişkiler incelenecektir.

Tanım 5.2.1. Q yönlendirilmiş döngü içermeyen bir quiver olsun. $x_1, x_2, \dots, x_n$ değişkenler olmak üzere katsayıları $\mathbb{Z}$ 'den gelen 2. dereceden homojen polinomlara n -li *integral kuadratik form (n-ary integral quadratic form)* denir. Böylece $b_{ij} \in \mathbb{Z}$ için

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j$$

formundadır.

Burada kuadratik form bir dönüşüm olarak şu şekilde düşünebilir:

$$q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto q(x)$$

Ayrıca her $r \in \mathbb{Z}$ için $q(rx) = r^2 q(x)$ olur.

q bir kuadratik form olsun. O zaman aşağıdaki *simetrik bilinear formu* (*symmetric bilinear form*) $(-, -)$ tanımlanabilir:

$$(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y) \quad (5.1)$$

Basit bir hesaplama ile $(x, y) = \sum b_{ij}(x_i x_j + x_j x_i)$ olur. Tersine simetrik bilinear form verildiğinde kuadratik form;

$$q(x) = \frac{1}{2}(x, x)$$

formül ile gösterilebilir.

Tanım 5.2.2. Q yönlendirilmiş döngü içermeyen bir quiver olsun. Kuadratik form aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}, \quad q(x) = \sum_{i \in Q_1} x_i^2 - \sum_{\alpha \in Q_2} x_{s(\alpha)} x_{t(\alpha)}$$

Örnek 5.2.3. Q quiveri aşağıdaki şekilde alınsın.

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3$$

Şekil 5.3: Örnek 5.2.3. için diyagram

Kuadratik formu şu şekildedir:

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 - x_2 x_3$$

Teorem 5.2.4. Q ' nun herhangi bir A temsili alınsın.

Aşağıdaki şekilde A ' nin projektif çözücüsü vardır:

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

Şekil 5.4: Teorem 5.2.4. için diyagram

Önerme 5.2.5. d boyut vektörlü bir A temsili için

$$q(d) = \dim \operatorname{Hom}(A, A) - \dim \operatorname{Ext}^1(A, A)$$

olur.

Kanıt: Standart projektif çözücüsü göz önüne alınsın.

$$0 \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in Q_2} d_{s(\alpha)} P(t(\alpha)) \xrightarrow{f} \bigoplus_{i \in Q_1} d_i P(i) \xrightarrow{g} A \rightarrow 0$$

$Hom(-, A)$ fonktörünü uygulayarak, aşağıdaki tam dizi elde edilir:

$$0 \rightarrow Hom(A, A) \rightarrow \bigoplus_{i \in Q_1} d_i Hom(P(i), A)$$

$$\rightarrow \bigoplus_{\alpha \in Q_2} d_{s(\alpha)} Hom(P(t(\alpha)), A) \rightarrow Ext^1(A, A) \rightarrow 0$$

Her bir $P(i)$ projektif olduğu için bu dizideki son terim 0 ' dır. Böylece $dim Hom(A, A) - dim Ext^1(A, A)$ aşağıdaki denkleme eşit olur:

$$\sum_{i \in Q_1} d_i dim Hom(P(i), A) - \sum_{\alpha \in Q_2} d_{s(\alpha)} dim Hom(P(t(\alpha)), A).$$

Dolayısıyla bu ifade

$$\sum_{i \in Q_1} d_i^2 - \sum_{\alpha \in Q_2} d_{s(\alpha)} d_{t(\alpha)}$$

eşit olur.

Tanım 5.2.6. $A, \mathbb{D}$ ya da $\mathbb{E}$ tipli Dynkin diyagramlarına bir köşenin (ve bazı kenarların) eklenmesiyle elde edilen ve *Öklidyen diyagramları* (*Euclidean diagrams*) veya *afin Dynkin diyagramları* (*affine Dynkin diagrams*) olarak adlandırılan (Şekil 3.1) diyagramlardır. Öklidyen diyagramının kendisi bir Dynkin diyagramı değildir fakat Öklidyen diyagramından herhangi bir köşe silinirse Dynkin diyagramlarının bir birleşimi elde edilir. Böylece Öklidyen diyagramlarına *genişletilmiş Dynkin diyagramları* (*extended Dynkin diagrams*) denir.

Tanım 5.2.7. q bir kuadratik form olsun.

(1) Her $x \neq 0$ için eğer $q(x) > 0$ ise q ' ya *pozitif tanımlı* (*positive definite*) denir.

(2) Eğer her x için $q(x) \geq 0$ ise q 'ya *pozitif yarı-tanımlı* (*positive semi-definite*) denir.

Yardımcı Teorem 5.2.8. Q bağlantılı quiver olsun. Her $x \in \mathbb{Z}^n$ için $(d, x) = 0$ olacak şekilde $d = (d_i) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ olsun. O zaman

(1) q pozitif yarı- tanımlıdır.

(2) Her i için $d_i \neq 0$ olur.

(3) $q(x) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul a, b tamsayıları için $x = \frac{a}{b}d$ olmasıdır.

Kanıt: (2) n_{ij} gösterimini; j ' den i ' ye ok vardır öyle ki i ' den j ' ye olan okların sayısının toplamı olarak kullanılacaktır. Başka bir deyişle; n_{ij} , Q ' nun altında yatan çizgedeki kenarların sayısı olur. Ayrıca köşeleri $1, 2, \dots, n$ olacak şekilde etiketleyerek (rastgele) bir sıralansın. Bu gösterim ile

$$q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j:j < i} n_{ij} x_i x_j$$

ve

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n 2x_i x_j - \sum_{i=1}^n \sum_{j:j \neq i} n_{ij} x_i x_j$$

olur. Şimdi, d ' nin Yardımcı Teoremin 5.2.8' nin hipotezlerini sağladığı varsayılсын ve $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ ifadesinin $\mathbb{Z}^n$ ' deki i . standart baz vektörü olduğunu kabul edilsin. O zaman $0 = (d, e_i) = 2d_i - \sum_{j:j \neq i} n_{ij} d_j$ elde edilir.

Böylece

$$d_i = \sum_{j:j < i} n_{ij} d_j \quad (5.2)$$

'dır. $n_{ij} \geq 0$ olduğundan, eğer $d_i = 0$ olacak şekilde bir i köşesi varsa, o halde tüm komşuları j için de $d_j = 0$ olur. Q bağlantılı olduğundan, bu durum her $j \in Q_1$ için $d_j = 0$ olduğunu gösterir. Bu da bir çelişkidir.

(1) Şimdi $x \in \mathbb{Z}^n$ olsun. O zaman (5.2) kullanarak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_i \frac{x_i^2}{d_i} \sum_{j:j < i} n_{ij} d_j$$

Son ifade düzenlenerek aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_i \sum_{j:j < i} n_{ij} d_j \frac{x_i^2}{d_i} \\ &= \sum_i \sum_{j:j \neq i} \frac{n_{ij} d_j}{2} \frac{x_i^2}{d_i}\end{aligned}\quad (5.3)$$

$$\begin{aligned}&= \sum_i \sum_{j:j < i} \left(\frac{n_{ij} d_j}{2} \frac{x_i^2}{d_i} + \frac{n_{ij} d_i}{2} \frac{x_j^2}{d_j} \right) \\ &= \sum_i \sum_{j:j < i} \frac{n_{ij} d_i d_j}{2} \left(\frac{x_i^2}{d_i^2} + \frac{x_j^2}{d_j^2} \right)\end{aligned}\quad (5.4)$$

(5.3) ifadesi sağlanır çünkü $j < i$ çiftlerinden $j \neq i$ sıralı çiftlerden toplamdaki değişiklik 2 ile bölünerek kolaylaştırılır ve (5.4) ifadesi sağlanır, çünkü toplamdaki $j \neq i$ çiftlerinden sıralı çiftler $j < i$ ’ye yapılan değişiklik, ikinci terimin eklenmesiyle telafi edilir.

Böylece,

$$\begin{aligned}q(x) &= \sum_i x_i^2 - \sum_i \sum_{j:j < i} n_{ij} x_i x_j \\ &= \sum_i \sum_{j:j < i} \frac{n_{ij} d_i d_j}{2} \left(\frac{x_i^2}{d_i^2} + \frac{x_j^2}{d_j^2} - 2 \frac{x_i x_j}{d_i d_j} \right) \\ &= \sum_i \sum_{j:j < i} \frac{n_{ij} d_i d_j}{2} \left(\frac{x_i}{d_i} - \frac{x_j}{d_j} \right)^2\end{aligned}\quad (5.5)$$

$d_i, d_j > 0$ ve $n_{ij} \geq 0$ olduğundan $q(x) \geq 0$ elde edilir.

(3) Ayrıca, (5.5) ifadesi $q(x) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $n_{ij} \neq 0$ olduğunda $\frac{x_i}{d_i} = \frac{x_j}{d_j}$ olmasıdır. Q bağlantılı olduğundan, $q(x) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul her $i, j \in Q_1$ için $\frac{x_i}{d_i} = \frac{x_j}{d_j}$ olmasıdır.

Teorem 5.2.9. Q bağlantılı bir quiver olsun. O zaman

- (1) q pozitif tanımlıdır ancak ve ancak $Q, A, \mathbb{D}, \mathbb{E}$ Dynkin tipindedir.
- (2) q ’nun pozitif yarı-tanımlı olması için gerek ve yeter koşul $Q, \tilde{A}, \tilde{\mathbb{D}}, \tilde{\mathbb{E}}$ Öklidyen tipinde ya da $A, \mathbb{D}, \mathbb{E}$ Dynkin tipinde olmasıdır.

Kanıt: (1) ve (2)’nin ispatı aynı anda yapılacaktır. Q Öklidyen tipli bir quiver olsun. q ’nun pozitif yarı-tanımlı olduğu gösterilecektir. Yardımcı Teorem 5.2.8’den her bir

Öklidyen diyagram her x için $(\delta, x) = 0$ olacak şekilde bir δ vektörü bulmak yeterlidir. δ vektörleri Şekil 3.1’ de gösterilmiştir.

Her x için $(\delta, x) = \sum_{i=1}^n 2\delta_i x_i - \sum_{i=1}^n \sum_{j:j \neq i} n_{ij} \delta_i x_j = 0$ ’ dır.

Örneğin; $\widetilde{\mathbb{E}}_6$ için

$$\begin{aligned}
 (\delta, x) &= 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 4x_6 + 2x_7 \\
 &\quad - 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 2x_5 - 3x_6 - 2x_7 \\
 &\quad - 3x_2 - 2x_3 - x_4 \quad \quad \quad - x_6 \\
 &\quad \quad \quad - 2x_3 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Tersine, Q pozitif yarı-tanımlı olsun ve kabul edilsin ki Q ne Öklidyen ne de Dynkin olsun. Bu durumda Q , Öklidyen tipte öz bir Q' alt quiverı içerir. q' , Q' ’ nun kuadratik formu ve δ , Şekil 3.1’ deki verilen bir boyut vektörü olsun. Eğer Q ve Q' aynı köşe kümesine sahipse o zaman Q , Q' dan daha fazla ok içerir. Dolayısıyla $0 = q'(\delta) > q(\delta)$ olur bu da bir çelişkidir. Başka bir deyişle; eğer Q , Q' dan daha fazla köşeye sahipse Q' da bulunan bir köşe i_1 ’ e bir ok ile bağlı olan Q' daki bir köşe j_1 seçilsin ve her $i \in Q'_1$ için x ’ i $x_i = 2\delta_i$, $x_{i_1} = 1$ ve tüm diğer $j \in Q$ için $x_j = 0$ tanımlansın. O zaman $q(x) \geq q'(2\delta) + 1 - 2\delta_{j_1} = 1 - 2\delta_{j_1} < 0$ olur. Bu da bir çelişkidir. Bu q' ’ nun pozitif yarı-tanımlı olursa Q' ’ nun Öklidyen ya da Dynkin olduğunu gösterir. Ancak, eğer q pozitif tanımlı ise o halde Q Dynkin olmalıdır, çünkü her Öklidyen diyagram için δ , $q(\delta) = 0$ olmalıdır.

Sadece şunu göstermek kalır: Eğer Q ; $\mathbb{A}, \mathbb{D}, \mathbb{E}$ Dynkin tipinde bir quiver ise o zaman q pozitif tanımlıdır.

$\overline{Q}$, $n + 1$ ile etiketlenmiş bir köşe ekleyerek elde edilen Öklidyen bir quiver olarak alınsın ve $\overline{q}$, $\overline{Q}$ ’ nun kuadratik formu olarak tanımlansın. $q(x) \leq 0$ olacak şekilde $x \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ var olduğu kabul edilsin. $\overline{x} \in \mathbb{Z}^{n+1}$, $\overline{x}_i = x_i$ ile tanımlanan vektör eğer $i \neq n + 1$ ve $\overline{x}_{n+1} = 0$ ise $\overline{q}(\overline{x}) = q(x) \leq 0$ olur ve böylece $\overline{q}(\overline{x}) = 0$ olur, çünkü $\overline{q}$ pozitif yarı-tanımlıdır. Yardımcı Teorem 5.2.8’ den bazı a, b tamsayıları için $\overline{x} = \frac{a}{b} \delta$ vardır. Ancak bu mümkün değildir, çünkü $\overline{x}_{n+1} = 0$ verilmiştir. Bu çelişkidir. Böylece q pozitif tanımlıdır.

5.3 Kök Tanımı ve Özellikleri

Bu bölümde Gabriel teoreminin ispatı için gerekli olan pozitif ve negatif kök tanımı yapılacaktır. Pozitif yarı-tanımlı kuadratik bir form için iki tür kök vardır : gerçek kök ve sanal kök.

Tanım 5.3.1. $x \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ bir eleman olmak üzere eğer $q(x) = 1$ ise *gerçek kök (real root)* ve eğer $q(x) = 0$ ise *sanal kök (imaginary root)* olarak adlandırılır. ϕ , tüm köklerin kümesi olarak verilsin.

$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^n$ olsun. Yani $\mathbb{Z}^n$ 'nin her elemanı (özellikle her kök) $b_i \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\sum_i b_i e_i$ formundadır. $\alpha = \sum_i b_i e_i$ için eğer tüm $b_i \geq 0$ ise *pozitif kök (positive root)* ve α , her $b_i < 0$ ise *negatif kök (negative root)* olarak adlandırılır. ϕ_+ , pozitif köklerin kümesi ve ϕ_- negatif köklerin kümesini ifade etsin.

Yardımcı Teorem 5.3.2.

- (1) Her $i \in Q_1$ için e_i gerçek köktür.
- (2) Eğer α bir kök ise $-\alpha$ da bir köktür.
- (3) Eğer α bir Öklidyen quiverın kökü ve α , Şekil 3.1' deki δ sanal kök değil ise o zaman $\alpha - \lambda$ bir kök olur.
- (4) Eğer q pozitif yarı-tanımlı ise her kök ne pozitif ne de negatiftir ve $\phi = \phi_- \sqcup \phi_+$ ve $\phi_- = -\phi_+$ dir.

Kanıt: (1) q tanımından açıktır.

(2) $q(-\alpha) = q((-1)\alpha) = (-1)^2 q(\alpha) = q(\alpha)$ olduğundan açıktır.

(3) ifadesini göstermek için (5.1) eşitliğinden $q(\alpha - \delta) = q(\alpha) + q(-\delta) + (\alpha, -\delta)$ olur. Bu da $q(\alpha - \delta) = q(\alpha)$ sonucunu verir, çünkü δ 'nin tanımı gereği $q(\alpha - \delta) = (\alpha, \delta) = 0$ dır.

(4) $\alpha = \sum_i b_i e_i$ bir kök olsun ve $\varphi = \sum_{i: b_i > 0} b_i e_i$ ve $\psi = \sum_{i: b_i < 0} b_i e_i$ olarak tanımlansın. Böylece $\alpha = \varphi + \psi$ olur. Eğer φ ve ψ sıfırdan farklı kabul edilsin.

$$\varphi = \sum_i \varphi_i e_i \quad , \quad \psi = \sum_i \psi_i e_i$$

olarak yazılır. Şunu not edelim ki $\varphi_i \psi_i = 0$ ve $\varphi_i \psi_i \leq 0$ dır. Dolayısıyla $(\varphi, \psi) > 0$ olur. Şimdi $q(\alpha) = q(\varphi + \psi) = q(\varphi) + q(\psi) + (\varphi, \psi)$ olduğundan $q(\alpha) > q(\varphi) + q(\psi)$ elde edilir. Fakat $q(\alpha)$, ya 0 ya da 1' dir. Böylece $q(\varphi) + q(\psi) \leq 0$ olur. q pozitif yarı-tanımlı olduğundan $q(\varphi) = q(\psi) = 0$ elde edilir. Böylece Yardımcı Teorem 5.2.7' den bazı c, d tamsayıları için $\varphi = \frac{c}{d} \lambda$ olur. Özellikle tüm i köşeleri için $\varphi_i \neq 0$ olur. Bu nedenle $\psi = 0$ ve $\alpha = \varphi$ pozitif olur.

Sonuç 5.3.3. Eğer Q , Dynkin tipli ise o zaman sonlu sayıda kök vardır ve her kök gerçek bir köktür.

Kanıt: q pozitif tanımlı bir kök olduğu için sanal kök yoktur. α, q ' nun pozitif bir kökü olsun. $\bar{Q}, Q'$ yu genişletilerek elde edilen bir Öklidyen quiveri olsun ve yeni köşe i_0 ile gösterilsin. O zaman $\bar{q}, \bar{Q}'$ nun kuadratik formu olsun ve δ , Şekil 3.1' de verilen $\bar{q}'$ nun sanal kökü olsun. O zaman $\alpha - \delta$, Yardımcı Teorem 5.3.2.' den i_0 köşesinde olduğundan negatif bir kök olur. Bu da her bir $i \in Q_1$ için $\alpha_i \leq \delta_i$ olur ve α için yalnızca sonlu sayıda olasılık vardır. Bu sonuç ile; bir Dynkin diyagramının her pozitif kökü, ona karşılık gelen Öklidyen diyagramının sanal kökünden daha küçük olur. Bu durum, Dynkin diyagramlarında tüm pozitif köklerin tam bir listesini yapmamıza olanak sağlar.

5.3.1. A_n tipindeki quiverların pozitif kökleri

A_n tipinde, pozitif kök α , $\widetilde{A}_n$ tipindeki sanal kökü δ ' dan daha küçüktür. Bu yüzden her $i \in Q_1$ için $\alpha_i \leq 1$ olur. Eğer α pozitif bir kök ise o zaman $\alpha_i = 1$ olması durumunda i köşelerinin kümesi, Q' nun bağlı bir altquiverlarının formunda olmalıdır. Böylece pozitif kökler $1 \leq c \leq d \leq n$ olacak şekilde c, d çiftleri ile indekslenir. Pozitif köklerinin sayısı $\frac{n(n+1)}{2}$, dir.

Örneğin , A_3 tipindeki pozitif kökler şunlardır:

$$100, 010, 001, 110, 011, 111$$

5.3.2. $\mathbb{D}_n$ tipindeki quiverların pozitif kökleri

$\mathbb{D}_n$ tipindeki, pozitif kök α , $\widetilde{\mathbb{D}}_n$ tipindeki sanal kökü δ ' dan daha küçüktür. Bu yüzden $1, n-1, n$ etiketlenen üç dış köşe hariç her $i \in Q_1$ için $\alpha_i \leq 2$ ' dir. Ancak Q' nun $\mathbb{A}$ tipindeki altquiverları, Q' nun $\mathbb{A}$ tipindeki köklerine karşılık gelir. $\mathbb{D}$ tipinde olan fakat $\mathbb{A}$ tipinin alt quiverlarına karşılık gelmeyen pozitif kökler:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 11 \dots 11, 11 \dots 12, 11 \dots 122, \dots, 12 \dots 22. \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

' dir.

Pozitif köklerin sayısı $n(n-1)$ ' dir.

Örneğin; $\mathbb{D}_5$ ' in pozitif kökleri şunlardır:

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 100, 010, 001, 000, 000, 110, 011, 001, 001, 111 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 011, 011, 001, 111, 111, 011, 111, 012, 112, 122 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$\mathbb{D}_4$ ' in pozitif kökleri şunlardır:

$$\begin{array}{cccccccccc} 100, 010, 001, 000, 110, 011, 010, 110, 111, 011, 111, 121 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

5.3.3. $\mathbb{E}_6$ tipindeki quiverların pozitif kökleri

$\mathbb{E}_6$ tipindeki, pozitif kök α , $\widetilde{\mathbb{E}}_6$ tipindeki sanal kök δ ' dan daha küçüktür. Böylece $\alpha \leq 12321$ olur.

2

Ancak Q' nun $\mathbb{A}$ ve $\mathbb{D}$ tipindeki alt quiverları, Q' nun $\mathbb{A}$ tipindeki ve $\mathbb{D}$ tipindeki köklerine ortaya çıkar. 36 pozitif kök vardır; $\mathbb{A}$ ya da $\mathbb{D}$ de olmayan kökler şunlardır:

11111 , 11211 , 12211 , 11221 , 12221 , 12321 , 12321
1 1 1 1 1 1 2

5.3.4. $\mathbb{E}_7$ tipindeki quiverların pozitif kökleri

$\mathbb{E}_7$ tipindeki, pozitif kök α , $\widetilde{\mathbb{E}}_7$ tipindeki sanal kökü δ ' dan daha küçüktür. Böylece $\alpha \leq 234321$ olur.

2

63 tane pozitif kök vardır. $\mathbb{A}$, $\mathbb{D}$ ya da $\mathbb{E}_6$ olmayan kökler şunlardır:

111111 , 112111 , 112211 , 122111 , 112221 , 122211 , 122221 , 123211
1 1 1 1 1 1 1 1
123221 , 123211 , 123321 , 123221 , 123321 , 124321 , 134321 , 234321
1 2 1 2 2 2 2 2

5.3.5. $\mathbb{E}_8$ tipindeki quiverların pozitif kökleri

$\mathbb{E}_8$ tipindeki, pozitif kök α , $\widetilde{\mathbb{E}}_8$ tipindeki sanal kökü δ ' dan daha küçüktür. Böylece $\alpha \leq 2465432$ olur.

3

120 tane pozitif kök vardır. $\mathbb{A}$, $\mathbb{D}$ ya da $\mathbb{E}_7$ olmayan kökler şunlardır:

1111111	1121111	1221111	1122111	1222111	1122211	1232111
1	1	1	1	1	1	1
1222211	1122221	1232111	1232211	1222221	1232211	1233211
1	1	2	1	1	2	1
1232221	1233211	1232221	1233221	1243211	1233221	1233321
1	2	2	1	2	2	1
1343211	1243221	1233321	2343211	1343221	1243321	2343221
2	2	2	2	2	2	2
1343321	1244321	2343321	1344321	1354321	2344321	1354321
2	2	2	2	2	2	3
2354321	2354321	2454321	2454321	2464321	24654321	2465421
2	3	2	3	3	3	3
2465431 , 2465432						
3			3			

5.4 Gabriel Teoremi

Gabriel Teoremi, 1972 yılında Alman matematikçi Peter Gabriel tarafından yayımlanan makalede [4] ortaya konmuştur. Makale temsil teorisinin sınıflandırma problemini çözmeye yönelik ilk tam sonuçlardan biri verilmiştir. Bu çalışma sonlu boyutlu cebirlerin temsilleri üzerine bir sonuçtur. İlk olarak, bir quiverın temsillerinin cebirsel olarak yol cebirinin modülleriyle nasıl ilişkili olduğunu kurarak bu iki kuramsal yapıyı birbirine bağlamıştır. Ardından, ayrıştırılamaz temsillerin yapılarını derinlemesine incelemiş ve hangi quiverların yalnızca sonlu sayıda temsile sahip olduğunu belirlemiştir. Temel sonuç olan Gabriel Teoremi'nde, yalnızca altında yatan yönsüz çizgeleri bir Dynkin diyagramı (A_n, D_n, E_6, E_7, E_8) olan quiverların sonlu sayıda ayrıştırılamaz temsile sahip olduğunu ispatlamıştır. Bu bölümde, sonlu temsil türüne sahip quiverları sınıflandırmasında önemli rol olan Gabriel' in Teoremi ve bu teorem için gerekli olan bilgiler [6]-[18] verilecektir.

Önerme 5.4.1. Q quiverı bağlantılı olsun ve A , d boyut vektörlü bir temsili olsun.

O zaman

$$\text{codim} \wp_A = \dim \text{End } A - q(d) = \dim \text{Ext}^1(A, A)$$

olur.

Kanıt: Yardımcı Teorem 5.1.5' den $\dim \wp_A = \dim G_d - \dim \text{Aut}(A)$ ' dır. A ' nın otomorfizm grupları endomorfizm gruplarının açık bir alt grubudur. Böylece $\dim \text{Aut}(A) = \dim \text{End}(A)$. Başka bir deyişle; GL_{d_i} , d_i^2 ' nin boyutudur. Bu yüzden $\dim G_d = \sum_{i \in Q_1} d_i^2$ olur.

Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \text{codim} \wp_A &= \dim E_d - \dim \wp_A \\ &= \sum_{\alpha \in Q_2} d_{s(\alpha)} d_{t(\alpha)} - \sum_{i \in Q_1} d_i^2 + \dim \text{End}(A) \end{aligned}$$

Böylece $\text{codim} \wp_A = \dim \text{End } A - q(d)$ ' dir. Önerme 5.2.6' dan $\dim \text{End } A - q(d) = \dim \text{End } (A, A)$ ' dır.

Sonuç 5.4.2. Eğer $q(d) \leq 0$ ise o zaman d boyut vektörüne sahip Q ' nun temsillerinin sonsuz sayıda izosınıfı vardır.

Kanıt: dim $S = d$ olması durumunda $q(d) \leq 0$ olsun. O zaman Önerme 5.4.1' den $\text{codim} \wp_S \geq \dim \text{End } S \geq 1$ ' dir. Böylece E_d ' nin boyutu, yörüngelerinin boyutundan daha büyüktür. Böylece yörüngelerin sayısı sonsuz olur.

Yardımcı Teorem 5.4.3. Eğer

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} S \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

Şekil 5.5: Yardımcı Teorem 5.4.3 için diyagram

temsillerinin parçalanamayan kısa tam dizisi ise o zaman

$$\dim \wp_{L \oplus N} < \dim \wp_S$$

' dir.

Teorem 5.4.4. (Gabriel's Teoremi) Q bağlantılı quiver olsun.

(1) Q ' nun sonlu temsil tipinde olması için gerek ve yeter koşul Q , $\mathbb{A}$, $\mathbb{D}$ ya da $\mathbb{E}$ Dynkin tipindedir.

(2) Eğer Q , $\mathbb{A}$, $\mathbb{D}$ ya da $\mathbb{E}$ Dynkin tipinde ise o zaman boyut vektörü yardımıyla, Q ' nun ayrıştırılamaz temsillerinin izosınıfı ile pozitif kökler kümesi arasında birebir eşleme vardır.

$$\chi : ind Q \rightarrow \phi_+ , \quad \chi(S) = \underline{dim} S$$

Kanıt: İlk olarak (2)' i gösterilecektir. χ iyi tanımlıdır:

S bir ayrıştırılamaz temsil olsun. $q(\underline{dim} S) = 1$ olduğunu gösterilecektir. Dolayısıyla Önerme 5.2.6' dan $End S \cong k$ ve $\dim Ext^1(S, S) = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. $End S \cong k$ olduğunu göstermek için, S ' nin boyutu üzerinde tümevarım yapılacaktır. Eğer S basit bir temsil ise sonuç açıktır. Şimdi S ' nin boyutunun 1' den büyük olduğunu ve S ' nin tüm öz ayrıştırılamaz alt temsili olan L için $End L \cong S$ olduğu varsayalım.

$End S \not\cong k$ olduğu kabul edilsin. S ayrıştırılamaz olduğu için Sonuç 4.2.6' dan bazı $\lambda \in k$ ve g üstel sıfır endomorfizmler için S ' nin her endomorfizmi $\lambda 1_S + g$ formundadır. Ancak $End S \not\cong k$ olduğu için $0 \neq g \in End S$ bir üstel sıfır endomorfizm vardır. Bu yüzden bazı $n \geq 2$ için $g^n = 0$ olur. Fakat genelliği bozmaksızın $n = 2$ olduğunu varsayalım. Aksi halde g ' yi g^{n-1} endomorfizması ile değiştirmek yeterlidir. Ancak, karesi sıfır olan sıfırdan farklı endomorfizmler arasından görüntüsü minimum boyuta sahip olacak şekilde g ' yi seçilebilir. $g^2 = 0$ olduğu için $g \circ g \subset çek g$ olur.

Dolayısıyla $g \circ g \cap L$ sıfırdan farklı olacak şekilde $çek g$ ' nin ayrıştırılamaz dik toplananı L temsili vardır. $\pi : çek g \rightarrow L$ projeksiyon fonksiyonu olsun. $g \circ g \subset çek g$ ' den meydana gelen içerim dönüşüm ile π ' nin bileşkesi i ile gösterilsin.

$$\begin{array}{ccccc} g \circ g & \xrightarrow{\text{icerim}} & çek g & \xrightarrow{\pi} & L \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & i & & \end{array}$$

Şekil 5.6: Gabriel Teoremi için diyagram

O zaman bileşke işlemi ile,

$$S \xrightarrow{g} g\text{örg} \xrightarrow{i} L \xrightarrow{\text{icerim}} S$$

Şekil 5.7: Gabriel Teoremi için diyagram

bu dönüşüm S ' nin sıfırdan farklı karesi 0 olan bir endomorfizması ve görüntü kümesi $i(g\text{örg})$ ' dir. g ' nin minimalliği ve $\dim i(g\text{örg}) \geq \dim g\text{örg}$ olduğundan i birebir olur. Dolayısıyla aşağıdaki kısa tam dizi oluşur.

$$0 \longrightarrow g\text{örg} \xrightarrow{i} L \longrightarrow \text{coker } i \longrightarrow 0$$

Şekil 5.8: Gabriel Teoremi için diyagram

$\text{Hom}(-, L)$ fonktörünü uygulayarak bir örten morfizm elde edilir:

$$\text{Ext}^1(L, L) \longrightarrow \text{Ext}^1(g\text{örg}, L) \longrightarrow 0 \quad (5.6)$$

Şekil 5.9: Gabriel Teoremi için diyagram

Tümevarım varsayımından $\dim \text{Hom}(L, L) = 1$ ve q pozitif tanımlı olduğundan Sonuç 5.2.5.' den $\dim \text{Ext}^1(L, L) = 0$ elde edilir. Bu nedenle (5.6)' dan $\text{Ext}^1(g\text{örg}, L) = 0$ olduğunu gösterir. Şimdi aşağıdaki değişmeli diyagram ele alınsın. Bu diyagramda diziler tamdır ve alt dizi üst dizinin π morfizması boyunca itme fonksiyonu (push out) alınarak elde edilmiştir.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & çekg & \xrightarrow{y} & S & \xrightarrow{g} & g\text{örg} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \pi & & \downarrow k_2 & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{k_1} & X & \longrightarrow & g\text{örg} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Şekil 5.10: Gabriel Teoremi için diyagram

$\text{Ext}^1(g\text{örg}, L) = 0$ olduğundan alt dizi parçalanır. Böylece $hk_1 = 1_L$ olacak şekilde $h: X \rightarrow L$ morfizması vardır. L , $çekg$ ' nin dik toplananı olduğundan $v: L \rightarrow çekg$ içerim (inclusion) dönüşümü vardır ve $\pi v = 1_L$ olur. $hk_2: S \rightarrow L$ ve $yv: L \rightarrow S$

morfizmaları vardır ve bu morfizmalar $hk_2\gamma v = hk_1\pi v = 1_L 1_L = 1_L$ özelliğini sağlar. Bu L' nin, S' nin ayrıştırılmaz temsillerinin bir dik toplananı olduğunu gösterir. Böylelikle $L = 0$ ya da $L = S$ olur. Ancak $L \neq 0$ çünkü $g \cap L$ sıfırdan farklıdır. Ayrıca $L \neq S$ çünkü $L \subsetneq g$ ve g sıfırdan farklı bir dönüşümdür. Bu bir çelişkidir. Böylece $\dim \text{End } S = 1$ olduğunu gösterir. q pozitif tanımlı olduğundan $\dim \text{Ext}^1(S, S) = 0$ ve $q(\underline{\dim} S) = 1$ olur. Böylece $\underline{\dim} S$ pozitif bir köktür ve χ iyi tanımlıdır.

χ birebirdir: $\underline{\dim} S = \underline{\dim} S'$ olacak şekilde S, S' ayrıştırılmaz temsiller olsun. Yukarıda gösterildi ki Dynkin tipinde ayrıştırılmaz temsillerinde kendileriyle öz genişlemesi yoktur. Bu nedenle $\wp_S$ ve $\wp_{S'}$ yörüngelerinin her ikisinde eşboyutu 0'dır. Dolayısıyla Yardımcı Teorem 5.1.5' den $S \cong S'$ olur. Bu, χ fonksiyonun birebir olduğunu gösterir.

χ örtendir: Q , Dynkin tipli olsun. $\underline{\dim} S = d$ olacak şekilde d pozitif kök olacak şekildeki S temsili için $\wp_S$, E_d 'deki en büyük boyuta sahip olsun. S' nin ayrıştırılmaz temsil olduğunu gösterilecektir. $S = S_1 \oplus S_2$ olduğunu varsayalım. İlk olarak, $\text{Ext}^1(S_1, S_2) = \text{Ext}^1(S_2, S_1) = 0$ olduğunu gösterilecektir. $\text{Ext}^1(S_1, S_2) \neq 0$ varsayalım. O zaman şu şekilde parçalanmayan kısa tam dizisi oluşur:

$$0 \longrightarrow S_2 \longrightarrow E \longrightarrow S_1 \longrightarrow 0$$

Şekil 5.11: Gabriel Teoremi için diyagram

Not edilsin ki $\underline{\dim} E = \underline{\dim} S$ olur. Sonuç 5.4.4' den $\dim \wp_S < \dim \wp_E$ olur. Bu da $\wp_S$ 'nin maksimal olması ile çelişir. Böylece $\text{Ext}^1(S_1, S_2) = 0$ olur. Simetrik olarak $\text{Ext}^1(S_2, S_1) = 0$ olur. Sonuç 5.2.4.' den şu sonuç ortaya çıkar:

$$1 = q(d) = \dim \text{Hom}(S_1 \oplus S_2, S_1 \oplus S_2) \geq 2$$

olur. Bu ise çelişkidir. Böylece S ayrıştırılmaz ve $\chi(S) = d$ olur. Dolayısıyla χ örtendir. Bu (2)'yi gösterir.

(1) Q 'nin Dynkin olmadığını varsayalım. O zaman $q(d) \leq 0$ olacak şekilde $d \neq 0$ olan öyle bir boyut vektörü vardır. Sonuç 5.4.2.'den boyut vektörü d olan temsillerin sonsuz sayıda izosınıfı vardır. Bu temsillerin her biri, ayrıştırılmaz temsillerin sonlu dik toplamıdır ve dolayısıyla ayrıştırılmaz temsille izosınıflarının sayısı sonsuzdur.

6. $\mathbb{A}_3$ TIPLİ BİR QUIVER TEMSİLİNİN PARÇALANIŞI

Bu bölümde ilk olarak her bir temsilin ayrıştırılmaz temsillerin tek türlü şekilde dik toplanabileceği ifade eden Krull-Schmidt teoreminden söz edilecektir. Hans Derksen ve Jerzy Weyman [5] yayımladıkları önemli çalışmaları ile quiver temsilleri teorisine büyük katkılarda bulundular. Bu çalışmada özellikle quiver invariantları ve temsil kategorileri üzerinde yoğunlaştılar. Ana hedefleri, bir quivera karşılık gelen temsillerin modül uzaylarındaki geometrik yapıları ve bu yapıların cebirsel invariantlarla nasıl tanımlanabileceğini anlamaktır. Daha sonrasında Derksen ve Weyman den yola çıkarak $\mathbb{A}_3$ temsilleri için parçalanış elde edilecek ve Python programında bu parçalanışlar için elde edilen kodlar örneklerle birlikte verilecektir.

Teorem 6.1(Krull – Schmidt Teoremi): Q bir quiver olsun. $M \in \text{rep}_k Q$ olmak üzere her $M_j \in \text{rep}_k Q$ ayrıştırılmaz temsiller

$$M \cong M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_p$$

şeklinde tek türlü yazılır.

Kanıt: M' nin boyutu üzerinde tümevarım uygulanacaktır. M ayrıştırılmaz temsil olsun. O halde açıktır. Bu yüzden M ayrıştırılabilir temsil varsayalım. M' ve M'' , M' nin boyutundan kesin olarak daha küçük boyutta olacak şekilde $M \cong M' \oplus M''$ dir. Tümevarım kabulünden M' ve M'' için şu şekilde parçalanış vardır. M'_j, M''_j ayrıştırılmaz olmak üzere $M' \cong M'_1 \oplus M'_2 \oplus \cdots \oplus M'_t$, $M'' \cong M''_1 \oplus M''_2 \oplus \cdots \oplus M''_t$ olur. Böylece parçalanışın varlığı gösterilmiş olur.

Örnek 6.2. (Derksen ve Weyman) (2005):

$$Q: \quad 1 \xrightarrow{\alpha} 2$$

Şekil 6.1: Örnek 6.2. için diyagram

quiverının

$$S_1 : k \xrightarrow{0} 0$$

$$S_2 : 0 \xrightarrow{0} k$$

$$M_{12} : k \xrightarrow{1} k$$

Şekil 6.2: Örnek 6.2. için diyagram

ayrıştırılamaz temsilleri yardımıyla bu quiverin herhangi bir S temsili;

$n_1 = \dim S_1$, $n_2 = \dim S_2$, $r = \text{rank } \alpha$ olmak üzere;

$$S \cong S_1^{n_1-r} \oplus S_2^{n_2-r} \oplus M_{12}^r$$

'dır.

Kanıt:

$$Q: \quad k^{n_1} \xrightarrow{\alpha} k^{n_2}$$

Şekil 6.3: Örnek 6.2. için diyagram

alınsın. O zaman

$$\begin{array}{ccc} S & k^{n_1} & \xrightarrow{\alpha} k^{n_2} \\ f \downarrow & f_1 \downarrow & \downarrow f_2 \\ S' & k^{n_1} & \xrightarrow{f_2 \alpha f_1^{-1}} k^{n_2} \end{array}$$

Şekil 6.4: Örnek 6.2. için diyagram

$f = (f_1, f_2)$ izomorfizma olmak üzere $f_1: k^{n_1} \rightarrow k^{n_1}$ ve $f_2: k^{n_2} \rightarrow k^{n_2}$ izomorfizmdir. $f_2 \alpha f_1^{-1}$, in matris formu $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n_2 \times n_1}$ tipindedir. $f_2 \alpha f_1^{-1}$, in morfizmi ile Q ' nun diğer temsili olan S' alınsın. Dolayısıyla $f_2 \alpha f_1^{-1}$ blok diyagonal bir forma sahiptir.

$$S \cong (\oplus^{n_1-r} S_1) \oplus (\oplus^{n_2-r} S_2) \oplus (\oplus^r M_{21}).$$

Örnek 6.3. $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\mathbb{A}_3$ tipli quiverında

$$M: k^{n_1} \xrightarrow{f_1} k^{n_2} \xrightarrow{f_2} k^{n_3}$$

temsili göz önüne alınsın. $rank f_1 = r_{12}$, $rank f_2 = r_{23}$, $rank f_2 f_1 = r_{13}$ olsun.

$$\begin{array}{ccccccc} M & k^{n_1} & \xrightarrow{f_1} & k^{n_2} & \xrightarrow{f_2} & k^{n_3} \\ \downarrow g & \downarrow g_1 & & \downarrow g_2 & & \downarrow g_3 \\ M' & k^{n_1} & \xrightarrow{g_2 f_1 g_1^{-1}} & k^{n_2} & \xrightarrow{g_3 f_2 f_2^{-1}} & k^{n_3} \end{array}$$

Şekil 6.5: Örnek 6.3 için diyagram

olacak şekilde $g = (g_1, g_2, g_3)$ izomorfizması olsun.

$g_1: k^{n_1} \rightarrow k^{n_1}$, $g_2: k^{n_2} \rightarrow k^{n_2}$, $g_3: k^{n_3} \rightarrow k^{n_3}$ izomorfizmadır.

$$g_2 f_1 g_1^{-1}, \text{ in matris formu } B_1 = \begin{bmatrix} I_{r_{12}} & 0_{r_{12} \times (n_1 - r_{12})} \\ 0_{(n_2 - r_{12}) \times r_{12}} & 0_{(n_2 - r_{12}) \times (n_1 - r_{12})} \end{bmatrix}_{n_2 \times n_1}$$

$$g_3 f_2 g_2^{-1}, \text{ in matris formu } B_2 = \begin{bmatrix} I_{r_{23}} & 0_{r_{23} \times (n_2 - r_{23})} \\ 0_{(n_3 - r_{23}) \times r_{23}} & 0_{(n_3 - r_{23}) \times (n_2 - r_{23})} \end{bmatrix}_{n_3 \times n_2}$$

$$g_3 (f_2 f_1) g_1^{-1}, \text{ in matris formu } B_3 = \begin{bmatrix} I_{r_{13}} & 0_{r_{13} \times (n_1 - r_{13})} \\ 0_{(n_3 - r_{13}) \times r_{13}} & 0_{(n_3 - r_{13}) \times (n_1 - r_{13})} \end{bmatrix}_{n_3 \times n_1}$$

B_1 matrisinden elde edilen parçalanış;

$$(k \rightarrow k)^{r_{12}} \oplus (k \rightarrow 0)^{n_1 - r_{12}} \oplus (0 \rightarrow k)^{n_2 - r_{12}}$$

B_2 matrisinden elde edilen parçalanış;

$$(k \rightarrow k)^{r_{23}} \oplus (k \rightarrow 0)^{n_2 - r_{23}} \oplus (0 \rightarrow k)^{n_3 - r_{23}}$$

B_3 matrisinden elde edilen parçalanış;

$$(k \rightarrow k)^{r_{13}} \oplus (k \rightarrow 0)^{n_1-r_{13}} \oplus (0 \rightarrow k)^{n_3-r_{13}}$$

olur.

Böylece

$$S_1: k \rightarrow 0 \rightarrow 0$$

$$S_2: 0 \rightarrow k \rightarrow 0$$

$$S_3: 0 \rightarrow 0 \rightarrow k$$

$$M_{12}: k \rightarrow k \rightarrow 0$$

$$M_{23}: 0 \rightarrow k \rightarrow k$$

$$M_{13}: k \rightarrow k \rightarrow k$$

ayrıştırılabilir temsilleri olmak üzere

$$M \cong S_1^{n_1-r_{12}} \oplus S_2^{n_2-r_{12}-r_{23}+r_{13}} \oplus S_3^{n_3-r_{23}} \oplus M_{12}^{r_{12}-r_{13}} \oplus M_{23}^{r_{23}-r_{13}} \oplus M_{13}^{r_{13}}$$

elde edilir.

Örnek 6.4. A_3 tipli bir quiverin

$$M: k \xrightarrow{f_1} k^2 \xrightarrow{f_2} k$$

temsili ele alınsın. $f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $f_2 = [1 \ 0]$ olsun. $\text{rank} f_1 = r_{12} = 1$, $\text{rank} f_2 = r_{23} = 1$, $\text{rank} f_2 f_1 = r_{13} = 1$ olur. Dolayısıyla M temsili şu şekilde olur:

$$M \cong S_1^{1-1} \oplus S_2^{2-1-1+1} \oplus S_3^{1-1} \oplus M_{12}^{1-1} \oplus M_{23}^{1-1} \oplus M_{13}^1$$

$$M \cong S_2 \oplus M_{13}$$

$$M \cong (0 \rightarrow k \rightarrow 0) \oplus (k \rightarrow k \rightarrow k)$$

A_3 tipli bir quiverın bir temsili için elde edilmiş parçalanış için düzenlenmiş Python kodu aşağıdaki gibidir:

```
def decompose_a3_representation(n1, n2, n3, f1, f2):

    """
    Decomposes an  $A_3$  quiver representation into a direct sum of indecomposable
    representations.

    Args:
        n1: Dimension of V1.
        n2: Dimension of V2.
        n3: Dimension of V3.
        r12: Rank of the map  $f_1$ :  $V_1 \rightarrow V_2$ .
        r23: Rank of the map  $f_2$ :  $V_2 \rightarrow V_3$ .
        r13: Rank of the composite map  $f_2 \circ f_1$ :  $V_1 \rightarrow V_3$ .

    Returns:
        A dictionary containing the indecomposable components and their dimensions.
    """

    # Compute dimensions of the simple modules (S1, S2, S3)
    S1 = n1 - r12 # Simple module at V1
    S2 = n2 - r12 - r23 + r13 # Simple module at V2
    S3 = n3 - r23 # Simple module at V3

    # Compute dimensions of the string modules (M12, M23, M13)
    M12 = r12 - r13 # String module from V1 to V2
    M23 = r23 - r13 # String module from V2 to V3
    M13 = r13 # String module from V1 to V3

    # Collect the non-zero components

    components = {}
    if S1 > 0:
        components["S1"] = S1

    if S2 > 0:
        components["S2"] = S2

    if S3 > 0:
        components["S3"] = S3

    if M12 > 0:
        components["M12"] = M12

    if M23 > 0:
        components["M23"] = M23
```

```

if M13 > 0:
    components["M13"] = M13

    return components

# Example usage
n1, n2, n3 = 3, 4, 2 # Dimensions of V1, V2, V3
r12, r23, r13 = 2, 1, 1 # Ranks of f1, f2, and f2 ◦ f1

# Decompose the representation
decomposition = decompose_a3_representation(n1, n2, n3, r12, r23, r13)

# Print the decomposition
print("Decomposition of the A3 representation:")
for component, dimension in decomposition.items():
    print(f'{component}: {dimension}')

```

KAYNAKLAR

- [1] **Anderson, F.W., Fuller, K.R.** (1992). *Rings and Categories of Modules*, Graduate Studies in Mathematics, 13. American Mathematical Society.
- [2] **Schiffler, R.** (2014). *Quiver Representations*, Springer International Publishing, Switzerland.
- [3] **Thrall, R. M.** (1947). On ahdır algebras, *Bull. Amer. Math. Soc*, 53 (22): 49-50.
- [4] **Gabriel, P.** (1962). “Des categories abeliennes”, *Bulletin de la Societe Mathematique de France*, 90: 32448, <http://eudml.org/doc/87023>.
- [5] **Derksen, H., Weyman, J.** (2005). Quiver representations, *Notices of the AMS* 52 (2): 200-206.
- [6] **Gabriel, P.** (1972). *Indecomposable Representations I*, Manuscripta Math, 6: 71-103
- [7] **Gabriel, P.** (1973). *Indecomposable Representations II*, Symposia Mat. Inst. Naz. Alta Mat., 11: 81-104.
- [8] **Alizade, R., Pancar, A.** (1999). *Homoloji Cebirine Giriş*, Samsun, 19 Mayıs Üniversitesi Yayınları.
- [9] **Assem, I. Simson, D. , Skowronski, A.** (2006). *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, 1: Techniques of Representation Theory, London Mathematical Society Student Texts 65, Cambridge University Press
- [10] **Barot, M.** (2015). *Introduction to the Representation Theory of Algebra*, Springer International Publishing, Switzerland.
- [11] **C. M. Ringel.** (1984). *Tame Algebras and Integral Quadratic Forms*, Springer Lecture Notes in Mathematics, 1099.
- [12] **C. M. Ringel.** (1980). *Representation Theory I*, Springer Lecture Notes in Mathematics, 831, 137–287.
- [13] **J. J. Rotman.** (2009). *An Introduction to Homological Algebra*, Second Edition, Springer, New York, 110p.

- [14] **Xu, J.** (1996). *Flat Covers of Modules*, Springer Lectures Notes in Maths, 1634.
- [15] **Url-1** <<http://people.bath.ac.uk/ac886/students/emmaCummin.pdf>>, 02.05.2025.
- [16] **Url-2** <<https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/mbrion/notes-quivers-rev.pdf>>, 02.05.2025.
- [17] **Url-3** <<https://www.math.uni-bielefeld.de/~sek/kau/>>, 02.05.2025.
- [18] **Url-4** <<http://mathserver.neu.edu/~king-chris/Webster.pdf>>, 02.05.2025.

