



**T.C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SONLU DEVİRLİ GRUPLARIN
BASİT BAĞLANTILI GRAFLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GÜLÇİN KARACA

HAZİRAN

GÜLÇİN KARACA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN 2023

**SONLU DEVİRLİ GRUPLARIN
BASİT BAĞLANTILI GRAFLARI**

Gülçin KARACA

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**Danışman
Prof. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN**

HAZİRAN 2023

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Gülçin KARACA tarafından hazırlanan “Sonlu Devirli Grupların Basit Bağlantılı Grafları” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan: Doç. Dr. Figen ERYILMAZ

Matematik Anabilim Dalı, Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Engin KAYNAR

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 05/05/2023

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

(İmza)

Gülçin KARACA

.../.../....

SONLU DEVİRLİ GRUPLARIN
BASİT BAĞLANTILI GRAFLARI
(Yüksek Lisans Tezi)

Gülçin KARACA

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Haziran 2023

ÖZET

Bu çalışmada, örnekler üzerinde sonlu devirli birim grafların Kirchhoff indeksi, Hyper-Wiener indeksi, Randic indeksi, Szeged indeksi, Pi indeksi hesaplamaları yapılmış ve bazı sonlu üretilmiş (devirli) grupları graf teorisi yardımıyla sınıflandırılmasına ulaşılmıştır.

Sayfa Adedi : 47
Anahtar Kelimeler : Graf teori, Devirli grupların grafları, Grup teori
Danışman : Prof. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN

SOME FINITELY GENERATED (CYCLIC) IDENTITY GRAPHS

(M. Sc. Thesis)

Gülçin KARACA

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2023

ABSTRACT

In this study, Kirchhoff index, Hyper-Wiener index, Randic index, Szeged index, Pi index calculations of finite-cyclic identity graphs were made on the examples and classification of some finitely generated (cyclic) groups was reached with the help of graphs theory.

Number of pages : 47

Keywords : Graph Theory, Identity Graphs, Group Theory

Supervisor : Prof. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Tez konusunu çalışmam için bana fırsat vererek destekleyen, tezimin gelişmesinde yardımlarını esirgemeyen önerileri ile tezimi bitirmemi sağlayan tez danışmanım Prof. Dr. Burcu Nişancı Türkmen'e teşekkürü bir borç bilirim. En zor anlarımda karşılıksız destekleriyle her zaman yanımda olan, beni her durumda destekleyen annem, babam ve kardeşime teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	viii
1.GENEL BİLGİLER.....	1
1.1 Grafların Tarihçesi.....	7
1.2. Grafın Tanımı ve Graf İçin Temel Kavramlar.....	8
2. MATERYAL VE YÖNTEM.....	10
2.1 Grupların Grafları.....	10
2.2 Graf Çeşitleri.....	31
2.2.1 Basit Graf.....	31
2.2.2 Bağlantılı Graf.....	31
2.3 Grafların Matris Gösterimi	32
2.3.1 Komşuluk Matrisi	32
2.4 İndeksler	34
2.4.1 Kirchhoff İndeks.....	34
2.4.2 Hyper-Wiener İndeksi.....	35
2.4.3 Randic İndeksi	36
2.4.4 Szeged İndeksi	37
2.4.5 Pi İndeksi.....	38
3.BULGULAR ve TARTIŞMALAR	40
4.SONUÇ ve ÖNERİLER.....	45

KAYNAKLAR.....	46
ÖZGEÇMİŞ.....	47



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel Sayılar Kümesi
S_n	Simetrik Grup
A_n	Alterne Grup
$G = (V(G), E(G))$	G Grafi
$V(G)$	G Grafının Köşe Kümesi
$E(G)$	G Grafının Kenar Kümesi
$u \sim v$	Komşu Köşeler
$d^o(V)$	V Köşesinin Derecesi
$A(G)$	G Grafının Komşuluk Matrisi
$Kf(G)$	G nin Kirchhoff İndeksi
$d(u, v)$	u ve v Arasındaki En Kısa Uzaklık
$WW(G)$	G nin Hyper-Wiener İndeksi
$R(G)$	G nin Randic İndeksi
$Sz(G)$	G nin Szeged İndeksi
$Sz_e(G)$	G nin Kenar Szeged İndeksi
$PI(G)$	G nin Pi İndeksi
$PI_v(G)$	G nin Kenar Pi İndeksi

1. GENEL BİLGİLER

Bu kısımda çalışmamızda yer vereceğimiz kadarıyla önemli tanım ve teoremler, graf teorisinin tanımı ve çıkış noktası ile ilgili bilgiler (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021), (Büyükköse, 2021), (Taşcı, 2017), (Vasanth, 2009) ve (Biggs, 1986) dan faydalanılarak sunulmuştur.

1.1. Tanım $(G,*)$ cebirsel yapısı (G_1) kapalılık özelliği ve (G_2) birleşme özelliği olarak adlandırılan

$$(G_1): a, b \in G \text{ için } a * b \in G$$

$$(G_2): a, b, c \in G \text{ için } a * (b * c) = (a * b) * c$$

iki koşulu sağlıyorsa $(G,*)$ ikilisine yarı grup denir.

1.2. Örnek $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \dots\}$ çarpma işlemi altında bir yarı gruptur.

1.3. Örnek $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ çarpma altında bir yarı gruptur.

1.4. Tanım $(G,*)$ yarı grubunda her $a \in G$ için $a * e = e * a = a$ eşitliğini sağlayan $e \in G$ elemanı var ve $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ olacak şekilde $a^{-1} \in G$ elemanı mevcutsa $(G,*)$ ikilisine grup denir. $a, b \in G$ için $a * b = b * a$ ise G ye değişmeli (abel) grup adı verilir.

1.5. Örnek $G = \{-1, 1\}$ kümesi çarpım işlemine göre bir gruptur.

1.6. Örnek $G, \mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi olsun. G , toplama altında bir değişmeli gruptur.

1.7. Örnek $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ üzerinde tanımlı toplama işlemine göre bir değişmeli gruptur.

1.8. Örnek $p \neq 2$ olan bir asal sayı olmak üzere $G = \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} = \{1, 2, \dots, p-1\}$, kümesi çarpma altında bir gruptur.

1.9. *Örnek* S_n , $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesi üzerindeki permütasyonların kümesi olsun. S_n permütasyonlar üzerinde tanımlı olan bileşke işlemine göre bir grup yapısına sahiptir. S_n e n. mertebeden permütasyon grubu veya simetrik grup adı verilir. S_n simetrik grubunun mertebesi $n!$ dir.

1.10. *Örnek* Tüm çift permütasyonların kümesi A_n olsun. A_n , S_n 'in bir alt grubu olup A_n 'e alterne alt grup denir. Ayrıca $\circ(A_n) = \frac{n!}{2}$ dir.

1.11. *Örnek* $D_{2n} = \{a, b | a^2 = b^n = 1; bab = a\}$; D_{2n} dihedral grubudur. D_{2n} grubu değişmeli grup değildir.

1.12. *Örnek* $G = \langle g | g^n = 1 \rangle$, G , n mertebeli devirli bir gruptur.

1.13. Tanım $(G, *)$ bir grup olsun. H , G nin bir alt kümesi ve $(H, *)$ bir grup ise, H G nin alt grubu olarak adlandırılır ve $H \leq G$ yazılışı kullanılır.

1.14. *Örnek* $\mathbb{Z}_{10} = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ toplama altında bir grup olsun. $H = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $\mathbb{Z}_{10}$ 'un bir öz alt kümesidir ve H , G nin bir alt grubudur.

1.15. *Örnek* $D_{26} = \{a, b | a^2 = b^6 = 1, bab = 1\}$, 12. dereceden dihedral bir gruptur. $H = \{1, b, b^2, b^3, b^4, b^5\}$, D_{26} alt grubudur. Ayrıca $H_1 = \{1, ab\}$ de D_{26} alt gruptur.

1.16. Tanım (S, o) bir yarı grup olsun. H , S nin alt kümesi olsun. Eğer (H, o) bir grup ise, o zaman (S, o) Smarandache yarı grubu (S -yarı grubu)'u olarak adlandırılır. Bu durumu bazı örneklerle açıklayalım.

1.17. *Örnek* $\mathbb{Z}_{15} = \{0, 1, 2, \dots, 14\}$ çarpma altında bir yarı gruptur. $H = \{1, 14\} \subseteq \mathbb{Z}_{15}$ alalım, H bir gruptur. Böylece $(H, \cdot)$ $\mathbb{Z}_{15}$ yarı grubu olur. Ayrıca $P = \{5, 10\} \subseteq \mathbb{Z}_{15}$ $\mathbb{Z}_{15}$ yarı grubudur.

1.18. Tanım G boş olmayan bir küme ve $" * "$ G üzerinde ikili işlem olsun.

- 1) Her $a, b \in G$ için $a * b \in G$ ve
- 2) Her $a, b, c \in G$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$

3) Her $a, b \in G$ için $a * b = b * a$

oluyorsa $(G, *)$ ye grupoid adı verilir.

1.19. Örnek Aşağıda verilen tabloda G grupoid olsun.

*	0	1	2	3	4
0	0	2	4	1	3
1	2	4	1	3	0
2	4	1	3	0	2
3	1	3	0	2	4
4	3	0	2	4	0

1.20. Uyarı $0 \in G$ olmak üzere $a, b \in G \setminus \{0\}$ için $a * b = 0$ ise G sıfır bölünli grupoid olur.

1.21. Tanım Eğer her $a \in G$ için $a * e = e * a = a$ eşitliği sağlayan $e \in G$ varsa G ye monoid adı verilir.

1.22. Uyarı Eğer $a \in G$ için $a * b = b * a = e$ olacak şekilde $b \in G$ var ise o zaman b , G de tektir.

1.23. Örnek $G = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, G üzerinde $*$ işlemi tanımlasın. $a, b \in G \setminus \{0\}$ ve $a * b \equiv 8a + 4b \pmod{10}$ için $(G, *)$ bir grupoiddir.

1.24. Tanım Boş olmayan bir L kümesinin, L üzerinde $*$ ile gösterilen çarpım olarak adlandırılan L ye $*$ ikili işlemi altında bir döngü denir.

1. Her $a, b \in L$ için $a * b \in L$.

2. Her $e \in L$ için $a * e = e * a = a$ eşitliğini doğrulayan bir $a \in L$ elemanı mevcuttur. e , L 'nin birim elemanı olarak adlandırılır.

3. Her $(a, b) \in L \times L$ sıralı ikilisi için, $ax = b$ ve $ya = b$ olacak şekilde tek bir tane $(x, y) \in L$ çifti vardır.

1.25. Örnek: $L = \{e, 1, 2, 3, 4, 5\}$ olsun. L için kullanan döngü aşağıdaki tabloda verilmiştir.

*	e	1	2	3	4	5
e	e	1	2	3	4	5
1	1	e	5	4	3	2
2	2	3	e	1	5	4
3	3	5	4	e	2	1
4	4	2	1	5	e	3
5	5	4	3	2	1	e

1.26. Tanım $L_n(m) = \{e, 1, 2, \dots, n\}$ verilsin. $n > 3$ ün tek ve m 'nin pozitif bir tam sayı olduğu (m, n) = 1 olacak şekilde ve ($m-1, n$) = 1, olacak şekilde $m < n$ tamsayı çiftini alalım. Bu takdirde $L_n(m)$ üzerinde bir ikili işlem “o” aşağıdaki gibi tanımlanır.

1. $\forall i \in L_n(m)$ için $e o i = i o e = i$
2. $\forall i \in L_n(m)$ için $i^2 = i o i = e$
3. $\forall i, j \in L_n(m); i \neq j; i \neq e$ ve $j \neq e$ için $i o j = t$.

Buradan $t \equiv (mj - (m-1)i) \pmod{n}$ olup $L_n(m)$, o işlemi altında bir dögüdür.

1.27.Örnek: $L_7(3) = \{e, 1, 2, \dots, 7\}$ için $L_7(3)$, o işlemi altında bir dögüdür.

o	e	1	2	3	4	5	6	7
e	e	1	2	3	4	5	6	7
1	1	e	4	7	3	6	2	5
2	2	6	e	5	1	4	7	3
3	3	4	7	e	6	2	5	1
4	4	2	5	1	e	7	3	6
5	5	7	3	6	2	e	1	4
6	6	5	1	4	7	3	e	2
7	7	3	6	2	5	1	4	e

Yukarıdaki tablo çözümlenirse;

- 1) $\forall i \in L_7(3)$ için $e o i = i o e = i$ vardır ve birim eleman e dir.
- 2) $\forall i \in L_7(3)$ için $i^2 = i o i = e$ eşitliğinin kontrolü aşağıdaki gibi yapılır.
 $1^2 = 1 o 1 = e$, $2^2 = 2 o 2 = e$, $3^2 = 3 o 3 = e$, $4^2 = 4 o 4 = e$, $5^2 = 5 o 5 = e$, $6^2 = 6 o 6 = e$, $7^2 = 7 o 7 = e$.

- 3) $\forall i, j \in L_7(3); i \neq j; i \neq e$ ve $j \neq e$ için $i o j = t$ olduğu görülür.

Buradan $t \equiv (3j - (3-1)i) \pmod{7}$ olup $L_7(3)$, o işlemi altında bir dögüdür.

$i = 2, j = 3$ alalım. $2 o 3 = 5$ olup buradan $5 \equiv (3.3 - 2.2) \pmod{7}$ bulunur. Böylece eşitlik doğrulanır.

1.28. Tanım R boştan farklı kümesi üzerinde $+$ ve $\cdot$ ikili işlemleri için

1. $(R, +)$ bir değişmeli gruptur.

2. $(R, \cdot)$ bir yarı gruptur.

3. Her $a, b, c \in R$ elemen üçlüsü için “.” nın “+” üzerine sağdan ve soldan dağılım özellikleri sağlanıyorsa $(R, +, \cdot)$ cebirsel üçlüsüne halka denir.

$(R, \cdot)$ birim elemanlı bir yarı grup (yani, bir monoid) ise, o zaman $(R, +, \cdot)$ ye birimli bir halka denir. Tüm $a, b \in R$ için $a \cdot b = b \cdot a$ ise $(R, +, \cdot)$ a değişmeli halka denir.

1.29. Örnek $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ tamsayılar kümesi bir halkadır.

1.30. Örnek $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ rasyonel sayılar kümesi bir halkadır.

1.31. Örnek 30 moduna göre kalan sınıfı $\mathbb{Z}_{30} = \{0, 1, 2, \dots, 29\}$ olan bir halkadır.

1.32. Tanım Boştan farklı F kümesinde $+$ ve $\cdot$ ikili işlemleri verilsin. Aşağıdaki koşulları doğrulayan $(F, +, \cdot)$ üçlüsüne cisim adı verilir.

1. $(F, +)$ bir değişmeli gruptur.

2. $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ bir değişmeli gruptur.

3. $\forall a \in F$ için $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ eşitliğini sağlayan $1 \in F$ elemanı mevcuttur.

4. F nin her elemen üçlüsü için “.” nın “+” üzerine sağdan ve soldan dağılıma özellikleri sağlanır.

1.33. Örnek $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ rasyonel sayılar bir cisimdir.

1.34. Örnek $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ bir cisimdir.

1.35. Örnek $I = \langle x^2 + x + 1 \rangle$, $\mathbb{Z}_2[x]$ polinomlar halkasının bir ideali olmak üzere $F = \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x^2+x+1 \rangle = I}$ bir cisimdir.

1.36. Tanım $(R, +, \cdot)$ halkası verilsin. R , uygun bir $(P, +, \cdot)$ cismi içeriyorsa, R ye bir Smarandache halkası (S-halkası) denir.

1.37. *Örnek* $\mathbb{Q}[x]$ bir polinom halkası olsun. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[x]$ olduğundan, $\mathbb{Q}[x]$ için bir S halkasıdır.

1.38. *Örnek* $M_{2 \times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q} \right\}$ matris toplama ve çarpma işlemine göre bir halka olsun. $P = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Q} \right\}$ bir cisim olan $M_{2 \times 2}$ 'nin uygun bir alt kümesidir. Böylece $M_{2 \times 2}$ bir S-halkasıdır.

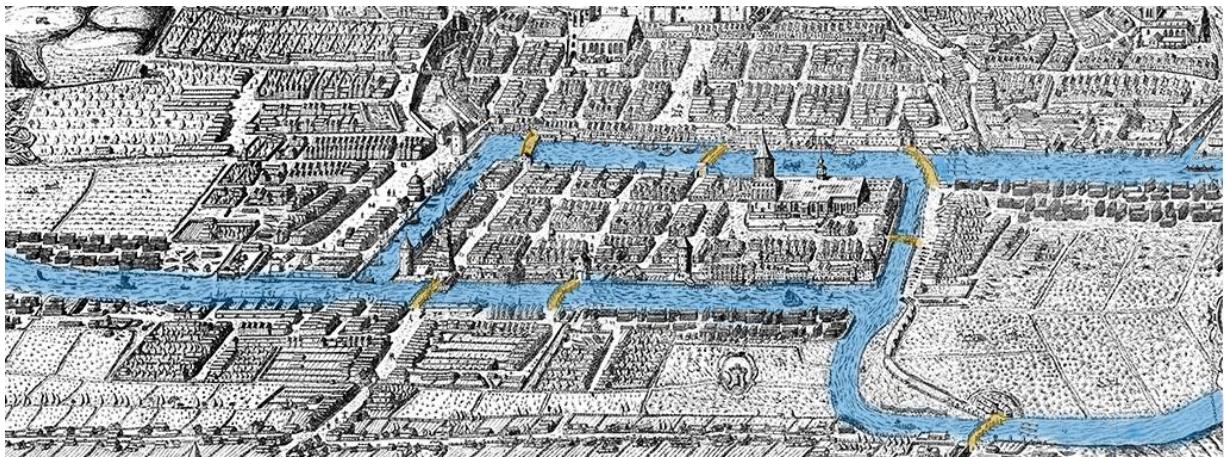
1.39. *Örnek* $R = \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{11}$, bileşen bazında 11 moduna göre toplama ve çarpma işlemleri altında halka olsun. $P = \mathbb{Z}_{11} \times \{0\} \times \{0\}$ R de bulunan bir cisimdir. Dolayısıyla R , bir S-halkasıdır.

Genel olarak tüm halkaların S halkası olmadığını sıradaki örnekten görülmektedir.

1.40. *Örnek:* $\mathbb{Z}$ tamsayıların halkası bir S-halkası değildir.

1.1 GRAFLARIN TARİHÇESİ

Graf teori, Leonhard Euler tarafından 1736 yılında ortaya atılmış bir çalışma alanıdır. Euler, Königsberg kasabasının “Yedi Köprü” problemini çözmek için uğraşırken bu teori temellenmiştir.



Şekil 1: Königsberg ve 7 köprüsü

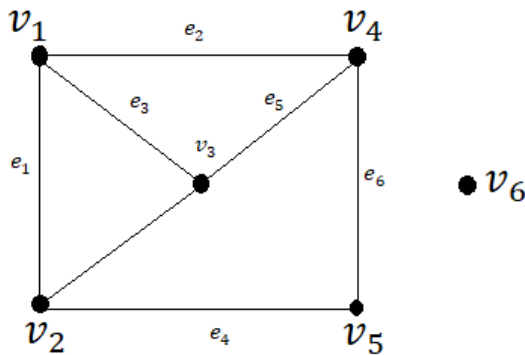
Königsberg Kasabasında yer alan Pregel nehri, Kneigh adlı adacığın etrafından akarak Şekil 1 de görüldüğü üzere iki kola ayrılıyordu. Şekil 1deki 7 köprü, kentin 4 parçasını birbirine

bağlıyordu. Kasaba halkı eğlenmek maksadıyla kentin farklı noktalarından hareket ederek 7 köprüyü birer kez geçip başladıkları noktaya dönmeyi denemiş ancak kimse geziyi bu kurala göre tamamlayamamıştır. Kentte merak uyandıran bu problem o zamanın ünlü matematikçisi Leonhard Euler'ın ilgisini çekmiş ve Euler, problemi üzerinde daha rahat oynayabilecek bir şekilde temsil ederek işe başlamış ve graf teorisinin temeli bu şekilde atılmıştır (Biggs ve Lloyd ve Wilson 1986).

Euler Königsberg ve 7 köprüsüne ait problemin çözümü için yeni bir uygulama alanı geliştirmiştir. Sonraki yıllarda graf teori olarak bilinen bu yeni uygulama alanı sadece matematikle sınırlı kalmayan birçok bilimsel problemin de çözümüne katkılar sunmaktadır. Grafların, fizikten coğrafyaya, bilgisayar biliminden bulmacalara ve oyunlara bir çok uygulama alanı mevcuttur.

1.2. Grafın Tanımı ve Graf için Temel Kavramlar

1.2.1 Tanım Bir G grafi V ile gösterilen nokta kümeleri yardımıyla bu nokta kümelerini birbirine bağlayan ve kenar adı verilen elemanlardan oluşan E kümesinden meydana gelir ve G grafi (V, E) şeklinde gösterilir. (Hall, 1961)

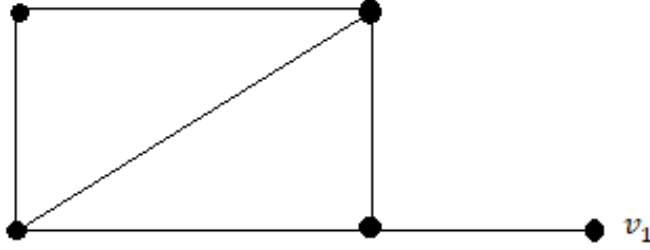


Şekil 2: 6 noktalı graf

Şekil de verilen grafta $e_2 = (v_1, v_4)$ olduğundan v_1, v_4 komşu noktalardır. e_2 ve e_6 kenarları ortak v_4 noktası ile bağlı olduklarından bitişik kenarlar olarak adlandırılır.

1.2.2. Tanım G grafında v noktasına bağlı kenarların sayısı v noktasının derecesi olarak adlandırılır ve $d^o(V)$ şeklinde gösterilir. G grafında herhangi bir noktanın derecesi sıfır ise

bu nokta ayırık (izole) nokta, herhangi bir noktanın derecesi 1 ise bu noktaya uç nokta adı verilir.

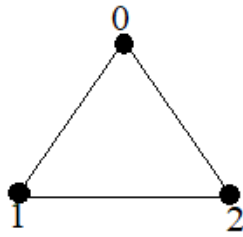


Şekil 3: v_1 uç nokta

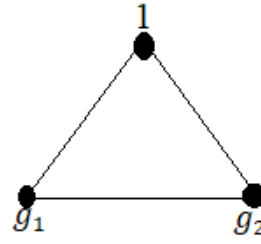


v_2 ayırık (izole) nokta

1.2.3. Tanım $(\mathbb{Z}_n, *)$ yarı grubu verilsin. $x, y \in \mathbb{Z}_n$ olmak üzere $x * y = 0$ ise işlemini gösteren graf sıfır graf olarak adlandırılır. $x * y = 1$ iken işlemini ifade eden graf ise birim graf olarak adlandırılır. Örneğin; $\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$ yarı grubu bir sıfır graftır. Burada $*$ ikili işlemi $\mathbb{Z}_3$ üzerindeki adi toplama işlemidir.



Şekil 4: Sıfır graf



Şekil 5: Birim graf

Şekil 4 ve $M_3 = \langle g: g^3 = 1 \rangle$ çarpımsal işlemine göre birim graf yapısı Şekil 5 ile gösterilmiştir.

2. MATERİYAL ve YÖNTEM

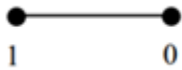
Bu kısımda grupları graf olarak ifade etmeye çalışarak grafların yapısından grupların özellikleri incelenmeyecektir. Grubu bir graf olarak tanımlamak için gruptaki birim eleman kavramından yararlanılır, bu nedenle grupla ilişkili graf birim graf olarak adlandırılır. Birim graf birim elemanı e olan bir G grubundaki iki x, y elemanının komşu olmasını $x \cdot y = e$ ile gösterilir. Benzer şekilde bu graftaki x, y elemanlarının bir kenarla birleştirilebileceğini söyler. $x \cdot y = y \cdot x = e$ eşitliği sebebiyle gruplarda çalışacağımız için değişmeli özelliğini kullanmamız gerekmez. Toplama sayesinde bütün elemanlar G grubunun birim elemanı ile ilişkilendirilir.

Eğer $G = \{ g, 1 \mid g^2 = 1 \}$ ise o zaman bunu $g^2 = 1$ olarak bir doğru ile temsil edilir. Bu eşitlik, bir grubu graf olarak temsil etmeye çalışırken kullanılan bir kuraldır. Noktalar grubun elemanlarına karşılık gelir, dolayısıyla G grubunun elemanları, birim graftaki noktaların sayısına karşılık gelir.

Aşağıdaki bilgilerin kaynağı için kaynakçada bulunan (Akbari, 2007), (Anderson, 1999), (Büyükköse, 2021), (Tascı, 2017) ve (Vasantha, 2009) referanslarına bakılabilir.

2.1. Grupların Grafları

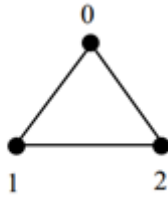
2.1.1. *Örnek* 2 moduna göre kalan sınıfların kümesi olan $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ toplama altında bir grup olup bu grubun birim grafi şu şekildedir:



Şekil 2.1

$1 + 1 \equiv 0 \pmod{2}$ 0, $\mathbb{Z}_2$ nin birim grafıdır.

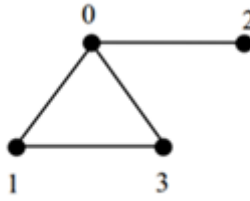
2.1.2. *Örnek* 3 moduna göre kalan sınıfların kümesi olan $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ burada toplama altında grup olup bu grubun birim grafi;



Şekil 2.2

ile gösterilir.

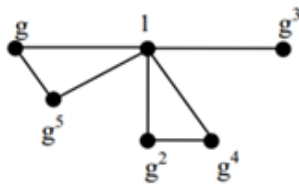
2.1.3. Örnek 4 moduna göre kalan sınıfların kümesi olan $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ grup olup bu grubunun birim grafi,



Şekil 2.3

ile gösterilir.

2.1.4. Örnek $G = \langle g \mid g^6 = 1 \rangle$ çarpma altında 6. mertebeden devirli grup olup G nin birim grafi



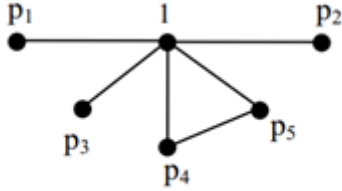
Şekil 2.4

ile gösterilir.

2.1.5. Örnek $S_3 = \left\{ e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \right.$
 $\left. p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$

$$p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve } p_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

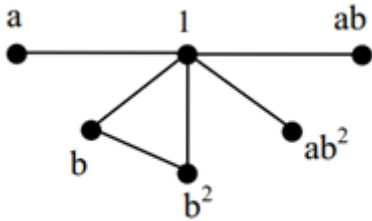
simetrik grubu verilsin . S_3 ile ilişkili birim grafi,



Şekil 2.5

ile gösterilir. S_3 ve G grupları altıncı mertebeden gruplar olmasına rağmen S ve G nin birim graflarının aynı olmadığını görüyoruz.

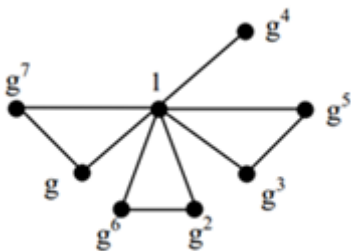
2.1.6. Örnek $D_3 = \{a, b \mid a^2 = b^3 = 1; bab = a\}$ dihedral grubun mertebesi $o(D_3) = 6$ olup D_3 ile ilişkili birim grafi aşağıda verilmiştir.



Şekil 2.6

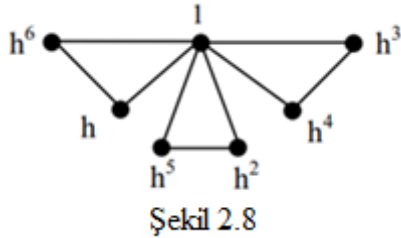
D_3 ve S_3 ün birim grafinin aynı olduğunu görmekteyiz.

2.1.7. Örnek $G = \langle g \mid g^8 = 1 \rangle$ olsun. G nin birim grafi şu şekilde verilir:

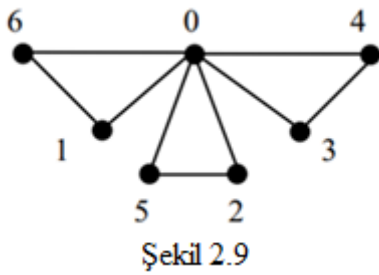


Şekil 2.7

2.1.8. *Örnek 7.* mertebeden $G = \langle h | h^7 = 1 \rangle$ devirli grup olsun. G birim grafi şu şekilde verilir:

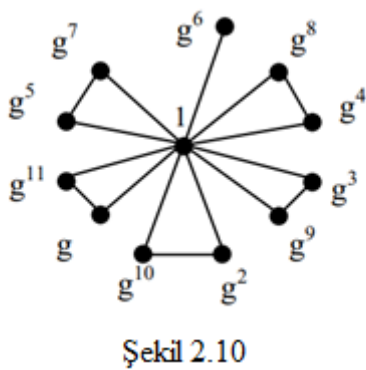


2.1.9. *Örnek 7* moduna göre kalan sınıfların kümesi olan $\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, \dots, 6\}$ abel grubu olup bu grubun birim grafi aşağıdaki gibidir.



Örnek 2.1.8 de $\mathbb{Z}_7$ ve G nin birim grafinin aynı olduğunu gözlemlemekteyiz.

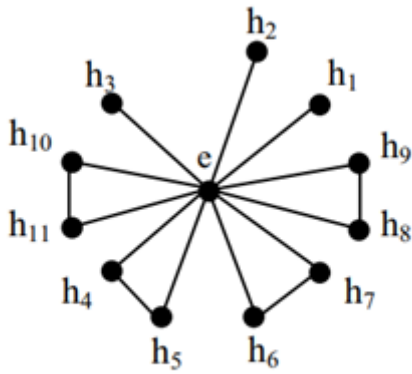
2.1.10. *Örnek 12.* mertebeden $G = \langle g | g^{12} = 1 \rangle$ devirli grubu verilsin. G nin birim grafi;



şeklindedir.

$$2.1.11. \text{ Örnek } A_4 = \left\{ \begin{array}{l} e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \\ h_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \\ h_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, h_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \\ h_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, h_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \\ h_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, h_9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \\ h_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, h_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

12. mertebeden alterne grubunun ilişkili birim grafı,

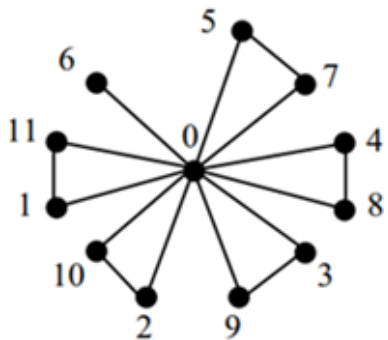


Şekil 2.11

şeklindedir.

A_4 ve G 'nin 12. mertebeden olduğunu gözlemlemekteyiz, ancak hem A_4 hem de G 'nin birim grafı aynı değildir. Şimdi $\mathbb{Z}_{12}$ 'nin birim grafını buluyoruz.

2.1.12. Örnek $\mathbb{Z}_{12} = \{0, 1, 2, \dots, 11\}$ abel grubunun birim grafı,

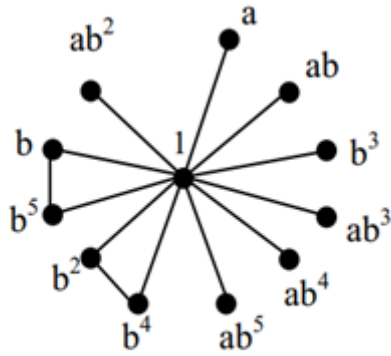


Şekil 2.12

şeklinde. Örnek 2.1.10'da verilen G nin birim grafi olduğunu görmekteyiz. Şimdi D_{12} nin birim grafini bulalım.

2.1.13. Örnek $D_{12} = \{a, b | a^2 = b^6 = 1, bab = a\}$

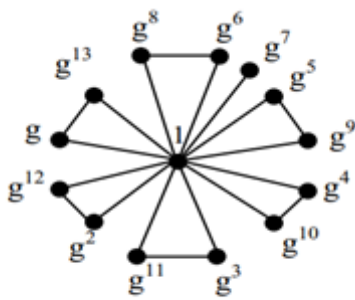
$= \{1, a, b, ab, ab^2, ab^3, ab^4, ab^5, b^2, b^3, b^4, b^5\}$ dihedral grubunun birim grafi,



Şekil 2.13

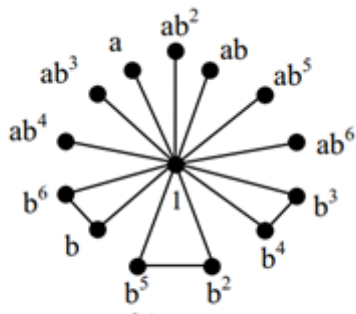
$o(D_{12}) = 12$ olmasına rağmen, D_{12} 'nin birim grafinin A_4 , $\mathbb{Z}_{12}$ ve G ninkinden farklı olduğunu görmekteyiz.

2.1.14. Örnek $G = \langle g | g^{14} = 1 \rangle$ devirli grubunun birim grafi aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.14

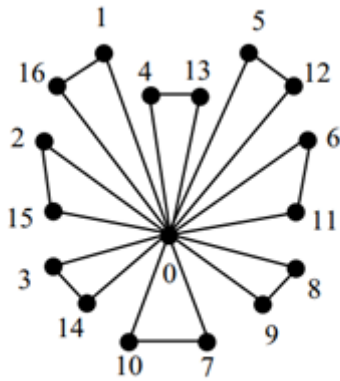
2.1.15. Örnek $D_{14} = \{a, b | a^2 = b^7 = 1, bab = a\}$ dihedral grubunun birim grafi aşağıdaki gibidir:



Şekil 2.15

$o(D_{14}) = o(G) = 14$ iken, D_{14} ün birim grafının ve G nin birim grafi özdeş olmadığı görülmektedir.

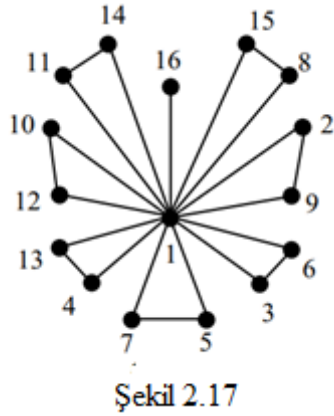
2.1.16. Örnek $\mathbb{Z}_{17} = \{0, 1, 2, \dots, 16\}$ abel grubu toplama işlemi altında bir grup olsun. $\mathbb{Z}_{17}$ nin birim grafi,



Şekil 2.16

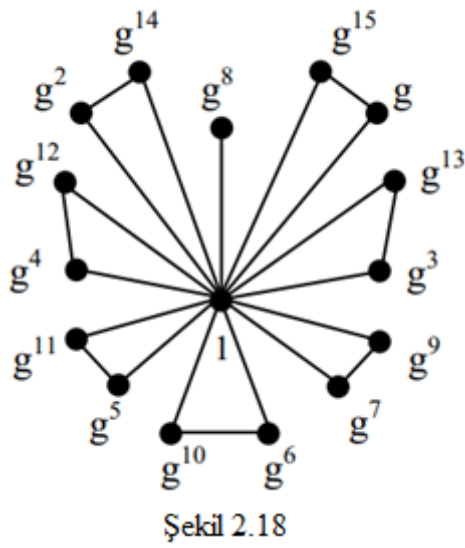
şeklindedir.

2.1.17. Örnek $G = \mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\} = \{1, 2, \dots, 16\}$ abel grubunun çarpma altında bir grup olsun. G ile ilişkili birim grafi,



şeklindedir.

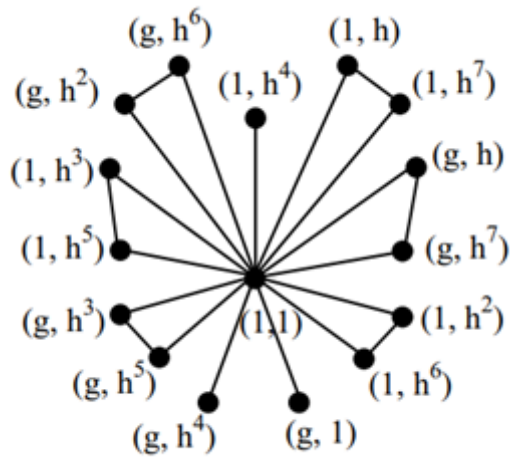
2.1.18. Örnek 16. mertebeden $G' = \langle g | g^{16} = 1 \rangle$ devirli grubunun birim grafi;



G ve G' birim graflarıyla özdeş olduğunu görmekteyiz.

2.1.19. Örnek

$$\begin{aligned} \bar{G} &= H \times K = \{1, g | g^2 = 1\} \times \{h | h^8 = 1\} \\ &= \{(1, 1), (1, h), (1, h^2), (1, h^3), (1, h^4), (1, h^5), (1, h^6), (1, h^7), (g, h), (g, h^2), (g, h^3), \\ &\quad , (g, h^4), (g, h^5), (g, h^6), (g, h^7), (g, 1), (g, h^7)\} , \end{aligned}$$



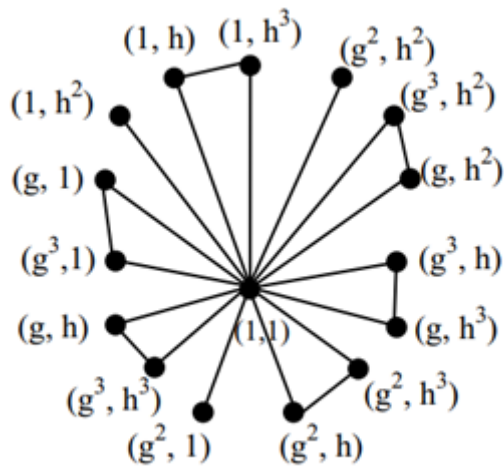
Şekil 2.19

$\bar{G} = H \times K$ nin 16. mertebeden olduğunu görüyoruz, ancak birim grafi $\bar{G}$ 'nin, örneklerde verilen G ve G' nin birim grafları özdeş değildir.

2.1.20. *Örnek* 16. mertebeden $K = P \times Q = \{1, g, g^2, g^3 | g^4 = 1\} \times \{1, h, h^2, h^3 | h^4 = 1\}$ grubunu göz önüne alalım.

$K = \{(1,1), (1, h), (1, h^2), (1, h^3), (g, h), (g, 1), (g, h^2), (g, h^3), (g^2, 1), (g^2, h^2), (g^2, h), (g^2, h^3), (g^3, 1), (g^3, h), (g^3, h^2), (g^3, h^3)\}$.

K nın birim grafi aşağıdaki gibidir.



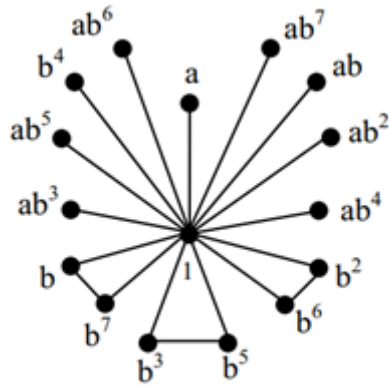
Şekil 2.20

$o(K) = o(\bar{G}) = 16$ olup K ve $\bar{G}$ nin birim graflarının özdeş olduğu görülmektedir.

2.1.21. Örnek $D_8 = \{a, b | a^2 = b^8 = 1, bab = a\}$

$$= \{1, a, b, b^2, b^3, b^4, b^5, b^6, b^7, ab, ab^2, ab^3, ab^4, ab^5, ab^6, ab^7\}$$

16. mertebeden dihedral grup olsun. D_8 in birim grafi,



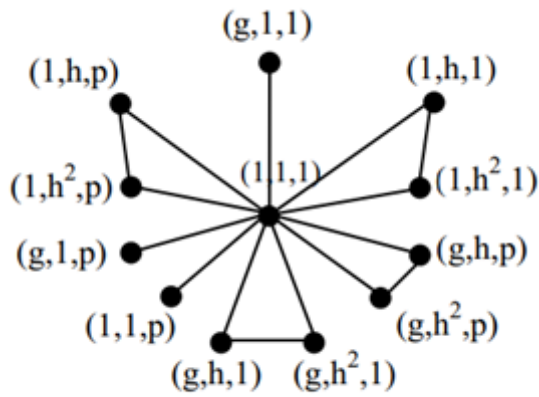
Şekil 2.21

şeklindedir. $o(D_8) = o(\bar{G}) = o(K) = o(G) = 16$ iken D_8 grubunun birim grafi belirgin bir şekilde örneklerde verilen $\bar{G}$ ve K gruplarının birim graflarına özdeş değildir.

2.1.22. Örnek $G = \{g | g^2 = 1\} \times \{h | h^3 = 1\} \times \{p | p^2 = 1\}$

$$= \{(1,1,1), (g,1,1), (1,h,1), (1,h^2,1), (g,h,1), (g,h^2,1), (1,1,p), (g,h,p),$$

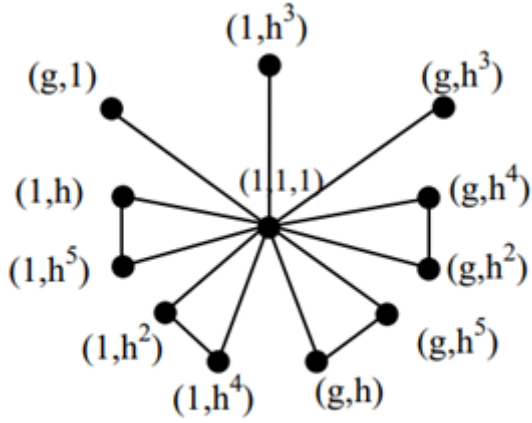
$(g,1,p), (g,h^2,p), (1,h,p), (1,h^2,p)\}$ grubunun birim grafi



Şekil 2.22

şeklinde olup bu grubun birim grafi A_4 ün birim grafına özdeşdir.

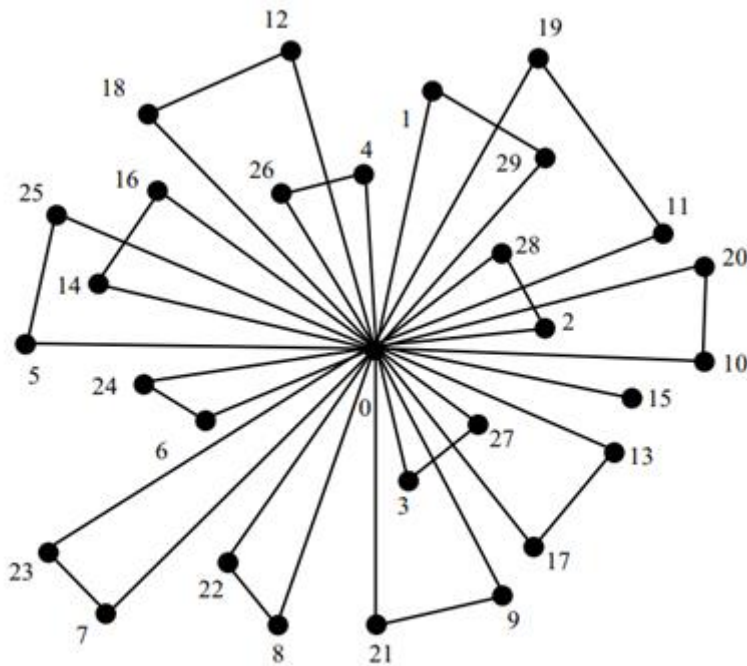
2.1.23. Örnek $G = \{g|g^2 = 1\} \times \{h|h^6 = 1\} = \{(1,1), (g,1), (1,h), (1,h^2), (1,h^3), (1,h^4), (1,h^5), (g,h), (g,h^2), (g,h^3), (g,h^4), (g,h^5)\}$ 12. mertebeden bir grup olsun. H nin birim grafi şu şekildedir:



Şekil 2.23

G nin birim grafi A_4 grubunun birim grafına özdeştir.

2.1.24. Örnek $G = \mathbb{Z}_{30} = \{0, 1, 2, \dots, 29\}$ abel grubunun ilişkili birim grafi aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.24

Bundan böyle her G grubunu, G nin birim elemanından çıkan doğru ve üçgenlerden oluşan birim grafi olarak ifade edebiliriz. Doğrular, gruptaki kendi kendine ters çevrilmiş elemanların sayısını verir. Üçgenler, kendi kendine ters çevrilmemiş öğeleri temsil eder.

2.1.25. Tanım G bir grup ve $H \leq G$ alt grup olsun. H alt grubu için çizilen birim grafi, G nin birim özel alt grafi olarak tanımlanır.

2.1.26. Örnek 8. mertebeden $G = \{g | g^8 = 1\}$ grubunun alt grupları

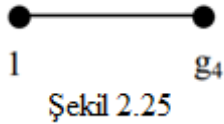
$H_1 = \{1, g^4\}$, $H_2 = \{1, g^2, g^4, g^6\}$, $H_3 = \{1\}$ ve $H_4 = G$ dir. H_1, H_2, H_3 ve $H_4 = G$ nin birim grafları aşağıdaki gibidir:

H_3 ün birim özel alt grafi sadece bir noktadır.



aşık birim grafi olarak bilinir.

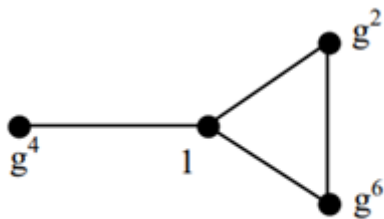
H_1 in birim grafi:



Şekil 2.25

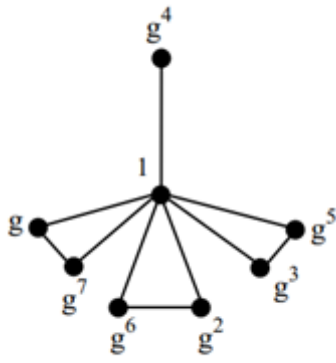
şeklindedir, g^4 in bir çizgi grafi, G nin kendi kendine ters çevrilmiş bir elemanıdır.

H_2 nin birim grafi:



Şekil 2.26

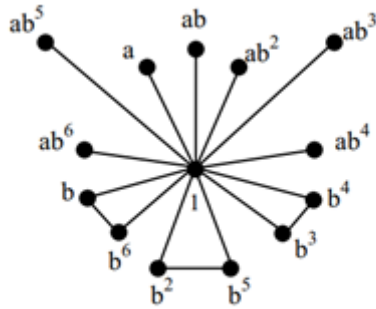
şeklindedir. $H_4 = G$ nin birim grafi aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.27

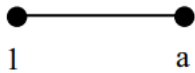
H_1, H_2, H_3 ve H_4 ün birim graflarını açıkça görüyoruz. Bunlar G nin birim alt graflarıdır.

2.1.27. Örnek 14. mertebeden $D_{14} = \{a, b | a^2 = b^7 = 1, bab = a\}$ 14. mertebeden dihedral grubunun birim grafi aşağıdaki gibidir.

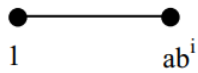


Şekil 2.28

D_{14} ün $H_0 = \{1, a\}$ alt grubunun birim grafi;

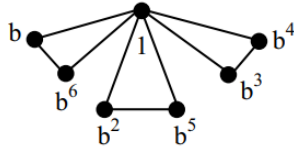


D_{14} ün bir alt grubu olan $H_i = \{1, ab^i\}$ alt grubunun birim grafi şu şekildedir.



$i = 1, 2, 3, 4, 5$ ve 6 için bu tür alt gruplar yukarıdaki gibidir.

$H_7 = \{1, b, b^2, b^3, b^4, b^5, b^6\}$, D_6 nin bir alt grubu olup bu alt grubun birim grafi aşağıdaki gibidir:

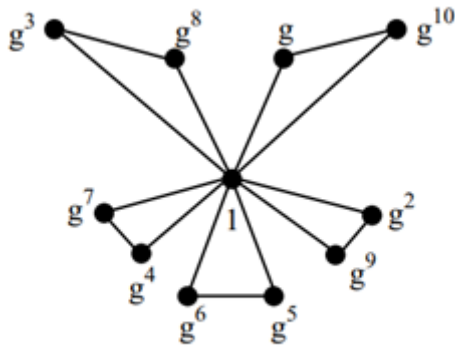


2.1.18 Teorem G bir grup ve G_i , G ile ilişkilendirilmiş birim grafi olsun. Bu takdirde G nin her alt grubunun bir birim grafi G_i nin her birim alt grafının özel bir birim alt grafıdır ve genel olarak bir G alt grubuyla ilişkilendirilmesine gerek yoktur.

Kanıt Verilen G bir gruptur. G_i , G nin birim grafi ile ilişkilidir. Diyelim ki H , G nin bir alt grubu o zaman H nin kendisi bir grup ve H ile ilişkilendirilmiş birim grafi olan G nin bir alt kümesi olan H , G_i nin özel bir birim alt grafı olacaktır.

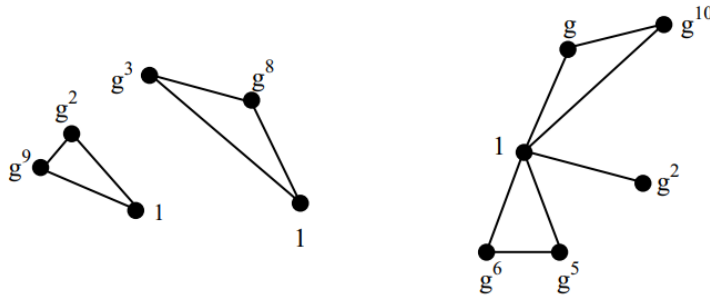
Eğer H_i, G_i nin birim alt grafı ise o zaman genel olarak onunla ilişkili bir alt grup bulunmayabilir.

$G = \{g | g^{11} = 1\}$ 11. mertebeden devirli grup olsun. G ile ilişkilendirilmiş G_i birim grafi aşağıdaki gibi olsun:



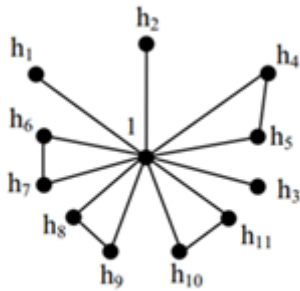
Şekil 2.29

Bunlar



G_i 'nin bazı birim alt graflarına sahiptir. $o(G) = 11$ asal ya da G nin uygun alt grupları olmadığından, açıkça hiçbir alt grup bunlarla ilişkilendirilemez.

2.1.29 Örnek $A_4 = \{1, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, h_{11}\}$, S_4 ün alterne alt grubu olsun. A_4 ile ilişkilendirilmiş G_i birim grafi aşağıdaki gibidir:



Şekil 2.30

A_4 alt grupları $\{1\} = P_1$, $P_2 = A_4$, $P_3 = \{1, h_2\}$, $P_4 = \{1, h_1\}$, $P_5 = \{1, h_3\}$, $P_6 = \{1, h_1, h_2, h_3\}$, $P_7 = \{1, h_4, h_5\}$, $P_8 = \{1, h_6, h_7\}$, $P_9 = \{1, h_8, h_9\}$ ve $P_{10} = \{1, h_{10}, h_{11}\}$ şeklindedir.

P_1 in özel birim alt grafi H_1 ,



P_2 nin özel birim alt grafi Şekil 2.30 da verilmiştir. Bu P_3 alt grubunun özel birim alt grafi



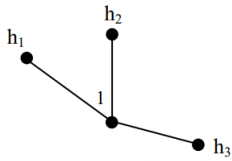
P_4 alt grubunun özel birim alt grafi



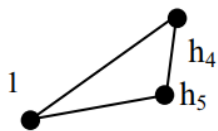
P_5 alt grubunun özel birim alt grafi,



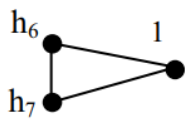
P_6 nın özel birim alt grafi,



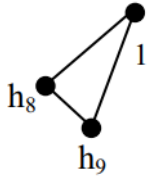
A_4 ün alt grubu olan P_7 nin özel birim alt grafi,



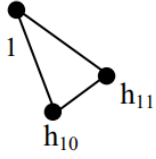
P_8 alt grubunun özel birim alt grafi,



P_9 alt grubunun özel birim alt grafi,

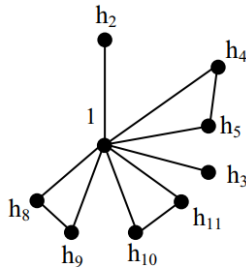
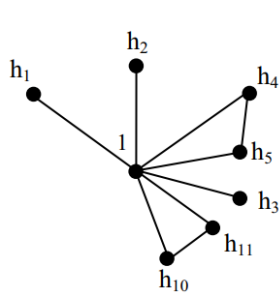
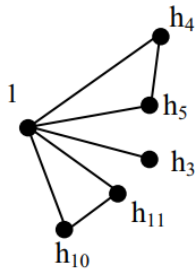


P_{10} alt grubunun özel birim alt grafi,



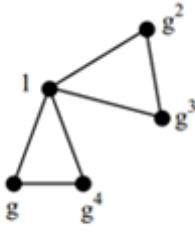
şeklindedir.

Ancak G_i nin birim grafının bazı alt graflarının aşağıdaki şekildeki gibi olduğunu görüyoruz.



Bunlar, kendisiyle ilişkilendirilmiş hiçbir A_4 alt grubuna sahip değildir.

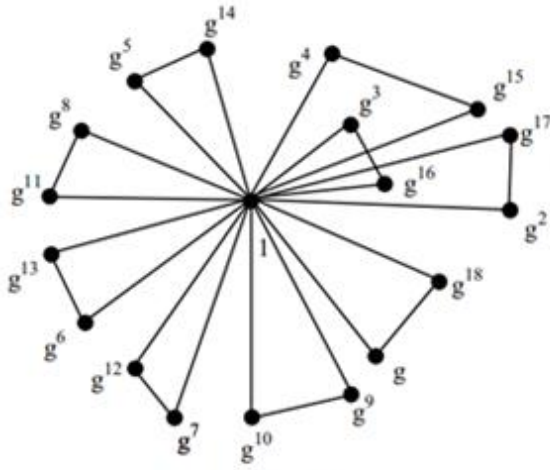
2.1.29. Örnek $G = \langle g | g^5 = 1 \rangle$, 5. mertebeden devirli grup olsun. G ile ilişkilendirilmiş G_i birim grafi,



Şekil 2.31

şeklindedir. Bu birim grafın, özel bir birim alt grafı olmadığı açıktır.

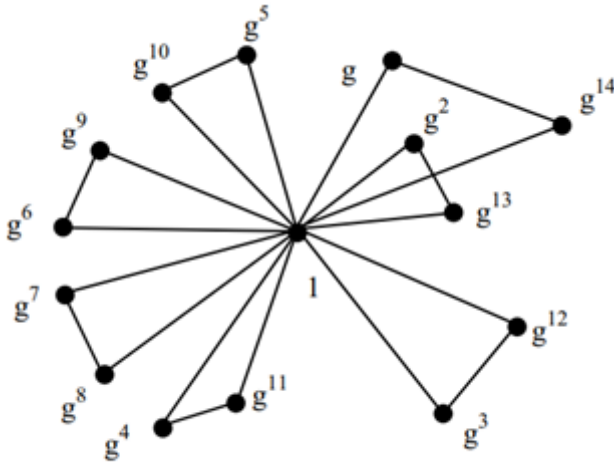
2.1.30. Örnek 19. mertebeden $G = \langle g | g^{19} = 1 \rangle$, devirli grubuyla ilişkilendirilmiş birim grafı



Şekil 2.32

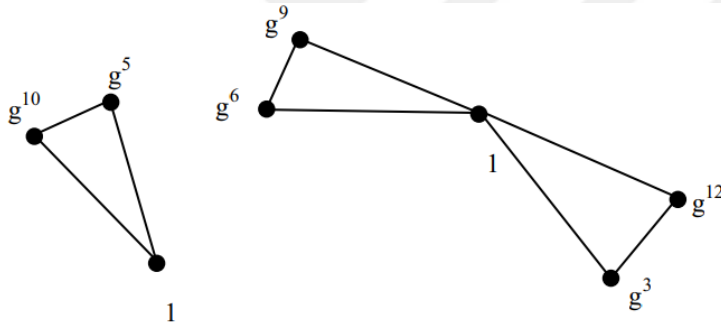
olup bu birim grafında da birim özel alt grafı yoktur.

2.1.31. Örnek $G = \langle g | g^{15} = 1 \rangle$, 15. mertebeden devirli grup olsun. G nin birim grafı aşağıda verilmiştir.



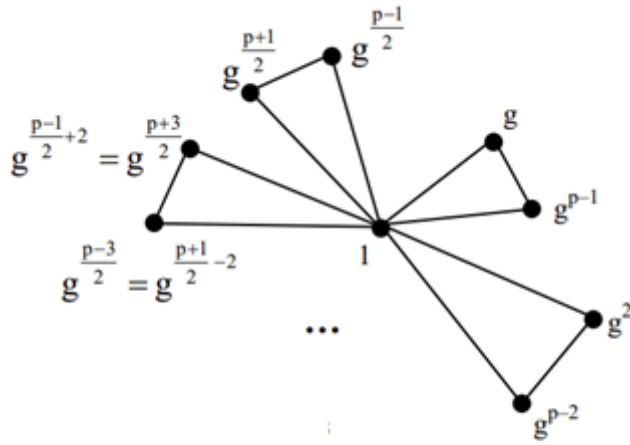
Şekil 2.33

G 'nin alt grupları $H_1 = \{1\}$, $H_2 = G$, $H_3 = \{1, g^3, g^6, g^9, g^{12}\}$, $H_4 = \{1, g^5, g^{10}\}$ dur. G_i nin ilişkili özel birim alt grafi şunlardır:



2.1.32. Teorem p asal mertebeli devirli $G = \langle g | g^p = 1 \rangle$, grubunun oluşturduğu birim grafında sadece $(p-1)/2$ üçgen vardır.

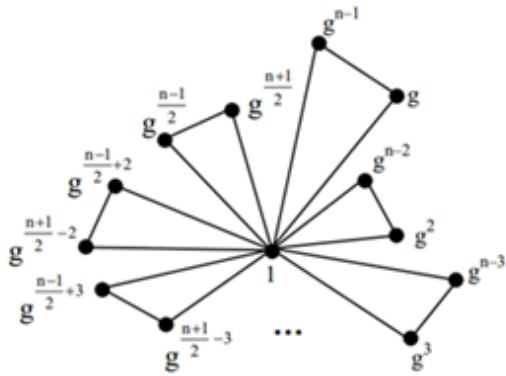
Kanıt $G = \langle g | g^p = 1 \rangle$, p asal mertebeli bir devirli gruptur. G asal mertebeli olduğundan G nin birim altgrup ve kendisinden farklı alt grubu yoktur. Dolayısıyla G deki hiçbir eleman kendi kendine ters çevrilmiş bir eleman değildir. Cauchy teoremi gereğince, $(g_i)^2 = 1$ olacak şekilde $g_i \in G$ yoktur. Dolayısıyla $\forall g^i \in G$ için $g^i \cdot g^j = 1$ olacak şekilde $\exists g^j \in G$ vardır. Burada $j=(p-i)$ yani bir üçgenin $1, g^i, g^{p-i}$ elemanlarıdır. Bu nedenle, birim grafın herhangi bir tek doğru grafları olmayacaktır. Böylece, bu G nin bir birim grafi aşağıdaki biçimde olacaktır.



Şekil 2.34

2.1.33. *Sonuç* G mertebesi tek olan devirli bir grup ise G , sadece doğruları olmayan üçgenlerden oluşan G_i birim grafına sahiptir.

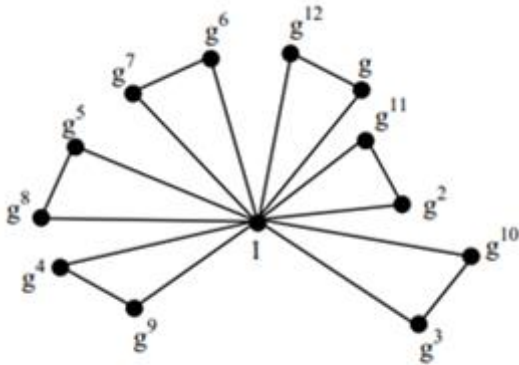
Kanıt n tek tamsayı olmak üzere $G = \{g | g^n = 1\}$ verilsin. O halde G ile ilişkilendirilmiş birim grafı aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.35

Bunu örneklerle gösterelim.

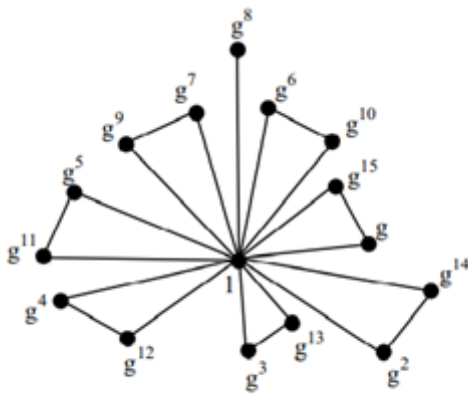
2.1.34. *Örnek 13.* mertebeden $G = \langle g | g^{13} = 1 \rangle$ devirli grubuyla ilişkilendirilmiş G_i birim grafı aşağıdaki gibidir:



Şekil 2.36

Bu grafın özel bir birim alt grafı yoktur.

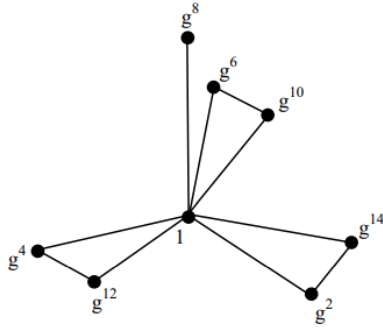
2.1.35 Örnek $G = \langle g | g^{16} = 1 \rangle$, 16. mertebeden devirli grup olsun. G nin birim grafı G_i 'dir.



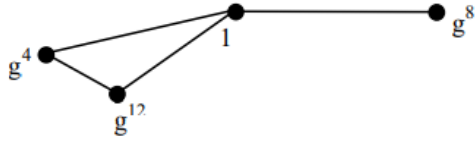
Şekil 2.37

G nin alt grupları $H_1 = \{g^2, g^4, g^6, g^8, g^{10}, g^{12}, g^{14}, 1\}$, $H_2 = \{g^4, g^8, g^{12}, 1\}$ ve $H_3 = \{1, g^8\}$.

H_1 in özel birim alt grafı,



H_2 'in özel birim alt grafı,



H_3 'in özel birim alt grafı,



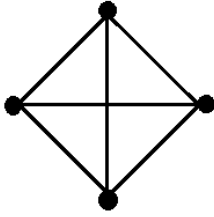
şeklindedir.

2.2 Graf Çeşitleri

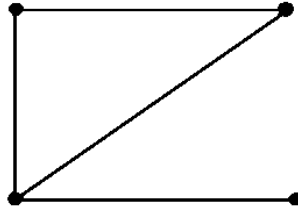
2.2.1 Basit Graf

2.2.1.1 Tanım Herhangi iki noktası arasında en fazla bir kenar bulunan ve ilmek içermeyen grafa basit graf denir.

2.2.1.2. Örnek



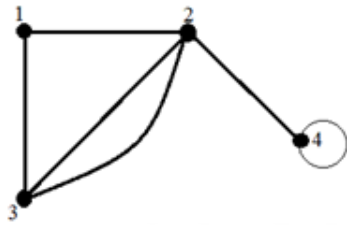
Şekil 1: G_1



Şekil 2: G_2

şekilde verilen G_1 ve G_2 grafi katlı kenar ve ilmek içermediğinden basit graftır.

2.2.1.3. Örnek



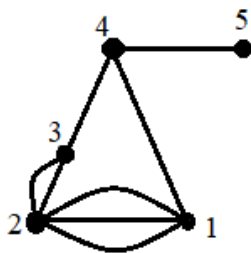
Şekil 3: G

Şekilde verilen G grafi katlı kenar ve ilmek içerdiği için basit graf değildir.

2.2.2 Bağlantılı Graf

2.2.2.1. Tanım Herhangi iki noktası arasında bir yol bulunan grafa bağlantılı graf adı verilir.

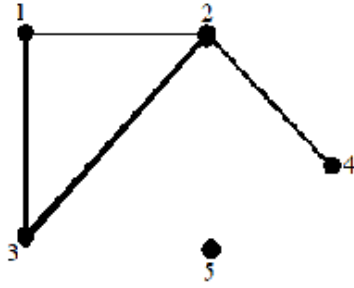
2.2.2.1. Örnek



Şekil 4: G

Şekilde verilen G grafının herhangi iki noktası arasında bir yol bulunduğundan G bağlantılı bir graftır.

2.2.2.2. Örnek



Şekil 5: G

Şekilde verilen G grafı için 5 noktası bir izole nokta olup 5 noktası diğer noktalar arasında bir yol bulunmadığından G bağlantılı bir graf değildir.

2.3 Grafların Matris Gösterimi

Bu bölümde grafların komşuluk matrisi ile gösterimi üzerinde duracağız.

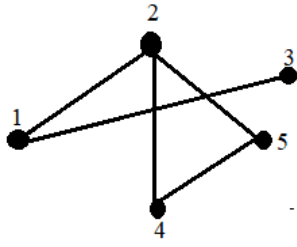
2.3.1. Komşuluk Matrisi

G , n noktalı basit bir graf olsun. G nin komşuluk matrisi, $A(G) = (a_{ij})_{n \times n}$ ile gösterilir ve elemanları,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1; & i \sim j \text{ ise} \\ 0; & \text{aksi halde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

2.3.1. Örnek

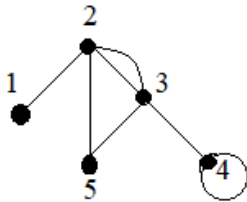


grafının komşuluk matrisi

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

2.3.2. Örnek



grafının komşuluk matrisi

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

2.4. İndeksler

Bu bölümde çalışmamızda kullanacağımız Kirchhoff indeksi, Hyper-Wiener indeksi, Randic indeksi, Szeged indeksi, Pi indeksi tanımlamaları verilecektir. Bu tanımlar (Büyükköse, 2021) adlı kaynaktan alınmıştır.

2.4.1 Kirchhoff İndeks

2.4.1.1. Tanım G basit, bağlantılı ve n noktalı graf olmak üzere G nin Kirchhoff indeksi,

$$Kf(G) = \sum_{i < j} r_{ij}$$

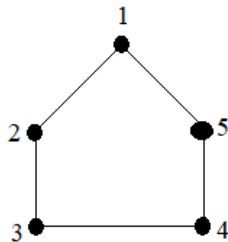
şeklinde tanımlanır. Burada r_{ij} , i ve j noktaları arasındaki resistans uzaklıktır.

2.4.1.2. Yardımcı Teorem $n \geq 2$ için G , noktalı bağlantılı graf olsun. O halde,

$$Kf(G) = n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i}$$

dir.

2.4.1.3. Örnek G grafi aşağıdaki gibi verilsin



G grafinın Kirchhoff indeksini hesaplamak için öncelikle G grafinın komşuluk matrisi hesaplanır. Gerekli hesaplamalarla

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. Bu komşuluk özdeğerleri $\lambda_1 = -1,6180$, $\lambda_2 = -1,6180$, $\lambda_3 = +0,6180$ ve $\lambda_4 = +0,6180$ dir. O halde G grafının Kirchhoff indeksi,

$$\begin{aligned} Kf(G) &= n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i} \\ &= 5 \sum_{i=1}^4 \frac{1}{\lambda_i} \\ &= 5 \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_4} \right) \\ &= 5 \left(\frac{1}{-1,6180} + \frac{1}{-1,6180} + \frac{1}{0,6180} + \frac{1}{0,6180} \right) \\ &= 2,0001 \end{aligned}$$

bulunur.

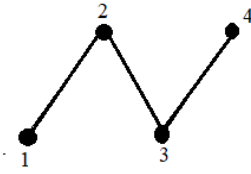
2.4.2. Hyper-Wiener İndeksi

2.4.2.1. Tanım G basit, bağlantılı bir graf olsun. G nin Hyper-Wiener indeksi

$$WW(G) = \frac{1}{2} \sum_{u,v \in V(G)} d(u,v) + \frac{1}{2} \sum_{u,v \in V(G)} d^2(u,v)$$

şeklinde tanımlanır. Öyle ki $d(u,v)$, u ve v arasındaki en kısa uzaklıktır.

2.4.2.2. Örnek G grafı aşağıdaki gibi verilsin.



G grafının Hyper-Wiener indeksini hesaplamak için Tanım 2.4.2.1 deki formüllerden faydalanalım. Böylece

$$\begin{aligned}
 WW(G) &= \frac{1}{2} \left(d(1,2) + d(1,3) + d(1,4) + d(2,3) + d(2,4) + d(3,4) \right. \\
 &\quad \left. + d(2,1) + d(3,1) + d(4,1) + d(3,2) + d(4,2) + d(4,3) \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(d^2(1,2) + d^2(1,3) + d^2(1,4) + d^2(2,3) + d^2(2,4) + d^2(3,4) \right. \\
 &\quad \left. + d^2(2,1) + d^2(3,1) + d^2(4,1) + d^2(3,2) + d^2(4,2) + d^2(4,3) \right) \\
 &= \frac{1}{2} (1 + 2 + 3 + 1 + 2 + 1 + 1 + 2 + 3 + 1 + 2 + 1) \\
 &\quad + \frac{1}{2} (1^2 + 2^2 + 3^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2) \\
 &= 10 + 20 \\
 &= 30
 \end{aligned}$$

elde edilir.

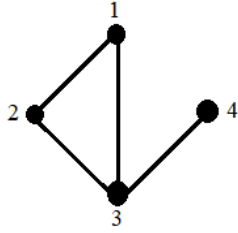
2.4.3. Randic İndeksi

2.4.3.1. Tanım G basit, bağlantılı bir graf olsun. d_i , G nin v_i noktasının derecesini göstermek üzere, Randic İndeksi

$$R = R(G) = \sum_{i \sim j} \frac{1}{\sqrt{d_i d_j}}$$

Şeklinde tanımlanır. Burada, toplamı bir grafın komşu nokta çiftleri belirler.

2.4.3.2. *Örnek* G grafi aşağıdaki gibi verilsin.



G grafinın Randic indeksi Tanım 2.4.3.1 deki formüllerden yararlanarak

$$\begin{aligned} R(G) &= \frac{1}{\sqrt{d_1 d_2}} + \frac{1}{\sqrt{d_1 d_3}} + \frac{1}{\sqrt{d_2 d_3}} + \frac{1}{\sqrt{d_3 d_4}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= 1,8938 \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.

2.4.4. Szeged İndeksi

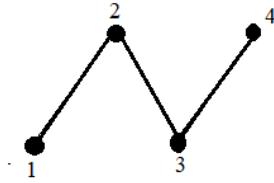
2.4.4.1. Tanım G basit, bağlantılı bir graf olsun. $e = uv$, G grafinın bir kenarı olsun. $n_u(e)$ ile u noktasına v noktasından daha yakın nokta sayısını, $n_v(e)$ ile v noktasına u noktasından daha yakın nokta sayısını gösterebilir. $m_u(e)$ ile u noktasına v noktasından daha yakın kenar sayısını, $m_v(e)$ ile v noktasına u noktasından daha yakın kenar sayısını gösterebilir. Böylece G nin Szeged İndeksi ve kenar Szeged İndeksi

$$Sz(G) = \sum_{e \in E} (n_u(e)n_v(e))$$

$$Sz_e(G) = \sum_{e \in E} (m_u(e)m_v(e))$$

şeklinde tanımlanır.

2.4.4.2. Örnek G grafi aşağıdaki gibi verilsin.



G grafinın Szeged indeksi Tanım 2.4.4.1 deki formüller kullanılarak

$$e = uv \quad n_u(e) = |\{x \in V : d(x, u) < d(x, v)\}|$$

$$n_u(e) + n_v(e) = |V| = n$$

$$e = 12 \text{ için } n_1(e) = |\{x \in V : d(x, 1) < d(x, 2)\}| = |\{1\}| = 1$$

$$n_2(e) = |\{x \in V : d(x, 2) < d(x, 1)\}| = |\{2, 3, 4\}| = 3$$

$$e = 23 \text{ için } n_2(e) = |\{x \in V : d(x, 2) < d(x, 3)\}| = |\{1, 2\}| = 2$$

$$n_3(e) = |\{x \in V : d(x, 3) < d(x, 2)\}| = |\{3, 4\}| = 2$$

$$e = 34 \text{ için } n_3(e) = |\{x \in V : d(x, 3) < d(x, 4)\}| = |\{2, 1, 3\}| = 3$$

$$n_4(e) = |\{x \in V : d(x, 4) < d(x, 3)\}| = |\{4\}| = 1$$

$$Sz(G) = n_1(e)n_2(e) + n_2(e)n_3(e) + n_3(e)n_4(e)$$

$$= 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 10$$

$$Sz_e(G) = m_1(e)m_2(e) + m_2(e)m_3(e) + m_3(e)m_4(e)$$

$$= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0$$

$$= 1$$

olarak bulunur.

2.4.5. Pi İndeksi

2.4.5.1. Tanım G basit, bağlantılı bir graf olsun. $e = uv$, G grafinın bir kenarı olsun. $n_u(e)$ ile u noktasına v noktasından daha yakın nokta sayısını, $n_v(e)$ ile v noktasına u noktasından daha yakın nokta sayısını gösterebilir. $m_u(e)$ ile u noktasına v noktasından daha yakın kenar sayısını, $m_v(e)$ ile v noktasına u noktasından daha yakın kenar sayısını gösterebilir. Böylece G nin Pi indeksi ve kenar Pi indeksi sırasıyla

$$PI(G) = \sum_{e \in E} (m_u(e) + m_v(e))$$

$$PI_v(G) = \sum_{e \in E} (n_u(e) + n_v(e))$$

formülleri ile hesaplanır.

2.4.5.2. Örnek G grafi aşağıdaki şekilde verilsin.



Pi indeksini ve Pi kenar indeksi Tanım 2.4.5.1deki formülleri kullanarak sırasıyla

$$\begin{aligned} PI(G) &= (m_1(e) + m_2(e)) + (m_1(e) + m_3(e)) + (m_1(e) + m_4(e)) \\ &= (2 + 0) + (2 + 0) + (2 + 0) = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PI_v(G) &= (n_1(e) + n_2(e)) + (n_1(e) + n_3(e)) + (n_1(e) + n_4(e)) \\ &= (2 + 0) + (2 + 0) + (2 + 0) = 6 \end{aligned}$$

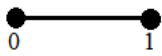
elde edilir.

3. BULGULAR VE TARTIŞMALAR

Bu kısımda grupların özelde birim graflarını kullanarak 2.4. kısmında bahsedilen indeks hesaplamalarını verdik.

3.1 SONLU DEVİRLİ BİRİM GRAFLARIN İNDEKS HESAPLAMALARI

3.1.1.Örnek $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ grubunun birim grafının



biçiminde olduğunu biliyoruz. Bu grafın Krichhoff indeksi hesaplayalım.

G grafının komşuluk matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Komşuluk matrisinin özdeğerleri ise

$$\det(A - \lambda I_m) = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$$

olarak bulunur. O halde G grafının Kirchhoff indeksi,

$$Kf(G) = n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \sum_{i=1}^1 \frac{1}{\lambda_i} \\
&= 2 \left(\frac{1}{1} \right) = 2
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Hyper-Wiener indeksi ise

$$\begin{aligned}
WW(G) &= \frac{1}{2} \sum_{u,v} d(u,v) + \frac{1}{2} \sum_{u,v} d^2(u,v) \\
WW(G) &= \frac{1}{2} (d(0,1) + d(1,0)) + \frac{1}{2} (d^2(0,1) + d^2(1,0)) \\
&= \frac{1}{2} (1 + 1) + \frac{1}{2} (1^2 + 1^2) \\
&= 2
\end{aligned}$$

bulunur. Son olarak sırasıyla Randic, Szeged ve Pi indeksleri hesaplanırsa sırasıyla

$$\begin{aligned}
R &= R(G) = \sum_{i \sim j} \frac{1}{\sqrt{d_i d_j}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{d_0 d_1}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

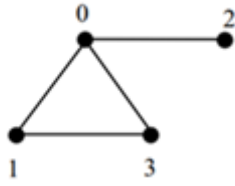
$$\begin{aligned}
Sz(G) &= \sum_{e \in E} n_u(e) n_v(e) \\
&= n_0(e) n_1(e) = 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
PI(G) &= \sum_{e \in E} m_u(e) + m_v(e) \\
&= m_0(e) + m_1(e) = 0
\end{aligned}$$

değerine ulaşılır.

3.1.2. Örnek $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ grubunun birim grafinin



şeklinde olduğunu hatırlayalım. Bu grafin Krichhoff indeksini bulmak için hesaplama yapılırsa ilk olarak $G = \mathbb{Z}_4$ grafinin komşuluk matrisini

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Bu komşuluk matrisinin özdeğerleri

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda^4 - 4\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda^3 - \lambda^2 - 3\lambda + 1) = 0$$

$\lambda_1 \cong -1,481$, $\lambda_2 \cong 0,311$, $\lambda_3 \cong 2,170$ olur. Böylece denkleminin çözüm kümesini kökler belirler Krichhoff indeksi

$$\begin{aligned} Kf(G) &= n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i} \\ &= 4 \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\lambda_i} \\ &= 4 \cdot \left(\frac{1}{-1,481} + \frac{1}{2,170} + \frac{1}{0,311} \right) \\ &= 4 \cdot (0,460 - 0,675 + 3,125) = 4 \cdot 3 = 12 \end{aligned}$$

elde edilir. G grafinin Hyper-Wiener indeksi ise

$$\begin{aligned}
 WW(G) &= \frac{1}{2} \sum_{u,v} d(u,v) + \frac{1}{2} \sum_{u,v} d^2(u,v) \\
 &= \frac{1}{2} (d(0,1) + d(0,2) + d(0,3) + d(1,2) + d(1,3) + d(2,3)) \\
 &\quad + \frac{1}{2} (d^2(0,1) + d^2(0,2) + d^2(0,3) + d^2(1,2) + d^2(1,3) + d^2(2,3)) \\
 &= \frac{1}{2} (1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2) + \frac{1}{2} (1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2) \\
 &= \frac{1}{2} (8) + \frac{1}{2} (12) = 4 + 6 = 10
 \end{aligned}$$

şeklindedir. G grafinin Randic indeksi

$$\begin{aligned}
 R &= R(G) = \sum_{i \sim j} \frac{1}{\sqrt{d_i d_j}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{d_0 d_1}} + \frac{1}{\sqrt{d_0 d_2}} + \frac{1}{\sqrt{d_0 d_3}} + \frac{1}{\sqrt{d_1 d_3}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{4}} \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2,449} + \frac{1}{1,732} \\
 &= 0,5 + 0,816 + 0,577 \\
 &= 1,893
 \end{aligned}$$

bulunur. G grafinin Szeged ve kenar Szeged indeksleri sırasıyla

$$\begin{aligned}
 e &= uv \quad n_u(e) = |\{x \in V : d(x,u) < d(x,v)\}| \\
 n_u(e) + n_v(e) &= |v| = n \\
 e &= 01 \text{ için } n_0(e) = |\{x \in v : d(x,0) < d(x,1)\}| = |\{0,2\}| = 2 \\
 n_1(e) &= |\{x \in v : d(x,1) < d(x,0)\}| = |\{1\}| = 1 \\
 e &= 02 \text{ için } n_0(e) = |\{x \in v : d(x,0) < d(x,2)\}| = |\{0,1,3\}| = 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_2(e) &= |\{x \in v: d(x, 2) < d(x, 0)\}| = |\{2\}| = 1 \\
e = 03 \text{ için } n_0(e) &= |\{x \in v: d(x, 0) < d(x, 3)\}| = |\{0, 2\}| = 2 \\
n_3(e) &= |\{x \in v: d(x, 3) < d(x, 0)\}| = |\{3\}| = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e = 13 \text{ için } n_1(e) &= |\{x \in v: d(x, 1) < d(x, 3)\}| = |\{1\}| = 1 \\
n_3(e) &= |\{x \in v: d(x, 3) < d(x, 1)\}| = |\{3\}| = 1
\end{aligned}$$

$$Sz(G) = \sum_{e \in E} n_u(e)n_v(e)$$

$$\begin{aligned}
Sz(G) &= n_0(e)n_1(e) + n_0(e)n_2(e) + n_0(e)n_3(e) \\
&\quad + n_1(e)n_3(e) \\
&= 2.1 + 3.1 + 2.1 + 2.1 + 1.1 \\
&= 10
\end{aligned}$$

ve

$$Sz_e(G) = \sum_{e \in E} m_u(e)m_v(e)$$

$$\begin{aligned}
Sz_e(G) &= m_0(e)m_1(e) + m_0(e)m_2(e) + m_0(e)m_3(e) \\
&\quad + m_1(e)m_3(e) \\
&= 2.1 + 2.0 + 2.1 + 2.1 \\
&= 6
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. G grafinın Pi indeksi ise

$$\begin{aligned}
PI(G) &= \sum_{e \in E} m_u(e) + m_v(e) \\
PI(G) &= (m_0(e) + m_1(e)) + (m_0(e) + m_2(e)) + (m_0(e) + m_3(e)) \\
&\quad + (m_1(e) + m_3(e)) \\
&= (2 + 1) + (3 + 1) + (2 + 1) + (1 + 1) \\
&= 11
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

4.1 Sonuç Bu tezde, sonlu devirli grupların birim grafları yeniden ele alınmış ve bu graflardaki üçgen sayısı, kenar sayısı belirlenmiştir. Örnekler üzerinde sonlu üretilmiş (devirli) birim graflarının Kirchhof, Hyper-Wiener, Randic, Szeged ve Pi indeks hesaplamaları yapılmış ve bazı sonlu devirli grupların sınıflandırılması yapılmıştır ve bu süreç graf teorisi yardımıyla ilerletilmiştir.

4.2. Öneri Öneriler İki sonlu devirli grubun direkt çarpımının oluşturduğu birim graflar için graf işlemleri göz önüne alınarak oluşan grafların üçgen sayıları, kenar sayıları ve Kirchhof, Hyper-Wiener, Randic, Szeged ve Pi indeks hesaplanabilir.

KAYNAKLAR

- Akbari, S. and Mohammadian, A. (2007). On Zero Divisor Graphs of Finite Rings, *Journal of Algebra*. 314, 168-184.
- Anderson, D. F. and Livingston, P. S. (1999). The Zero Divisor Graph of a Commutative Ring, *Journal of Algebra*, 217, 434-447.
- Biggs, N. L. G., Lloyd, E. K. and Wilson, R. J. (1986). *Graph Theory*, Oxford University Press, 239.
- Büyükköse, Ş., Kaya Gök, G., Kızılırmak Özkan, G. ve Eren, S. (2009). *Graf Teori*, Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara.
- Marshall Hall, JR. (1976). *The Theory of Groups*, Ams Chelsea Publishing, American Mathematical Society, Rhode Island, (2), 434.
- Nişancı Türkmen, B. ve Türkmen, E. (2021). *Grup Teorisi-I*, Amasya Üniversitesi Yayınları, Amasya.
- Taşcı, D. (2005). *Lineer Cebir*, Gazi Kitabevi, Ankara, 585.
- Vasanth Kandasamy, W. B., and Smarandache, F. (2009). *Groups as Graphs*, Editura Cuart, Romania.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Gülçin KARACA

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Şükrü Kaptanoğlu Anadolu Lisesi

Lisans : Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik
Bölümü