



T.C.

**AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



T.C.

**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**

**SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İLE KDV DENKLEMİNİN
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

REBWAR MOHAMMED MAWLOOD

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Ali ŞAHİN

ORTAK DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Yücel ÇENESİZ

AKSARAY, 2016



T.C.

**AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



T.C.

**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**

**SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İLE KDV DENKLEMİNİN
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

REBWAR MOHAMMED MAWLOOD

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Ali ŞAHİN

ORTAK DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Yücel ÇENESİZ

AKSARAY, 2016

AKSARAY ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ONAY BELGESİ

Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 132309804 numaralı Tezli Yüksek Lisans öğrencisi, "REBWAR MOHAMMED MAWLOOD", ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İLE KDV DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ" başlıklı tezini, aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı: **Yrd. Doç. Dr. Ali ŞAHİN**
Aksaray Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Doç. Dr. Yıldırım KESKİN**
Selçuk Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Yrd. Doç. Dr. Halis BİLGİL**
Aksaray Üniversitesi

Teslim Tarihi: 1 Mart 2016

Savunma Tarihi: 25 Mart 2016

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ve bu eserleri her kullanışında alıntı yaparak yararlandığımı belirtir; bunu şerefimle doğrularım.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

REBWAR MOHAMMED MAWLOOD

İmza



Bu tezimi aileme armağan ediyorum...

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında KdV denkleminin ve ilgili test problemlerinin tanıtımı yapıldı. Daha sonra ise sonlu farklar yöntemi kullanılarak denklemin nümerik çözümleri sunuldu.

Nümerik yöntemin uygulanışında, ilk olarak, Crank-Nicolson formülleri yardımıyla diferensiyel denklemin zaman ayrıştırması yapıldı. Daha sonra denklem sistemindeki lineer olmayan terimler iki farklı yöntem ile lineerleştirildi. Konum ayrıştırması için problemin çözüm bölgesi eşit uzunluklu alt aralıklara bölündü. Sonlu farklar yönteminin uygulanması ile ortaya çıkan matris denkleminin çözümleri için ise Thomas algoritması kullanıldı.

Denklemin çözümlerinin elde edilmesinde C++ programı kullanıldı ve elde edilen sonuçlar Grapher programı ile çizildi.

TEŞEKKÜR

İlk olarak, tez çalışması boyunca bana sürekli yardımcı olan, gösterdiği anlayış, motivasyon ile bu bilgileri yazmamı sağlayan Dr. Ali ŞAHİN'e ve Dr. Yücel ÇENESİZ'e en içten şükranlarımı sunmak isterim. Yaptıkları rehberlik, araştırmanın her aşamasında ve tezin yazımı esnasında bana yardımcı oldu.

Ve bu tezin her aşamasında benden yardımlarını esirgemeyen ve sürekli tavsiyelerde bulunan Mr. Dashti ve Mr. Balen' e de çok minnettar olduğumu belirtmek isterim.

Son olarak, tüm hayatım boyunca ve hazırladığım tez esnasında beni desteklediklerinden dolayı aileme, akrabalarım, kız ve erkek kardeşlerime de çok minnettar olduğumu belirtmek isterim.

REBWAR MOHAMMED MAWLOOD

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖNSÖZ	i
TEŞEKKÜR	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
1.1 Dalga	1
1.2 Lineer Dalga Denklemi	2
1.3 İlerleyen Dalgalar	2
1.4 Dalga Yayılımı	3
1.5 Dalgaların Sınıflandırılması	3
1.5.1 Enine dalga	3
1.5.2 Boyuna dalga	3
1.6 Sığ Su Dalgası	4
1.7 Soliton ve Soliter dalgalar	5
1.7.1 Solitonlar ve Soliter Dalgalar arasındaki Farklar	5
2. KORTEWEG-DE VRIES DENKLEMİ	6
2.1 Doğrusal Olmayan Dalga Denklemleri	6
2.2 Korteweg-de Vries Denklemi	6
3. SONLU FARK YÖNTEMİ	10
3.1. Sonlu Fark	10
3.2 Taylor Seri Açılımlarına Dayalı Sonlu Fark Formülleri	10
3.3 Sonlu Fark Yöntemi	11
3.4 Kesme Hatası	13

3.4.1 Tutarlılık	13
3.4.2 Yakınsama	13
3.4.3 Kararlılık	14
3.4.4 Lax Richtmyer denklik teoremi	15
3.5 Üç Temel Sonlu Fark Yöntemleri	15
3.5.1 İleri fark yöntemi	15
3.5.2 Geri fark yöntemi	17
3.5.3 Merkezi Fark Yöntemi	18
4. KdV DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ	20
4.1 KdV Denkleminin Sonlu Farklar Yöntemi ile Çözümü	20
4.1.1 KdV denkleminin nümerik çözümü için birinci yöntem	20
4.1.1.1 Birinci yöntem için kararlılık analizi	23
4.1.2 KdV denkleminin nümerik çözümü için ikinci yöntem	24
4.1.2.1 İkinci yöntem için kararlılık analizi	26
4.2 Sayısal Örnekler ve Karşılaştırmalar	27
4.2.1 Problem 1: Tek soliton örneği	28
4.2.2 Problem 2: Maxwellian başlangıç koşulu	31
4.2.3 Problem 3: Tanh formunda başlangıç koşulu	33
5. SONUÇ	35
KAYNAKLAR	36
APPENDIX A. SONLU FARK FORMÜLLERİ	41
APPENDIX B. THOMAS ALGORİTMASI	43
APPENDIX C. BİLGİSAYAR KODLARI	44
ÖZGEÇMİŞ	55

ÖZET

SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İLE KdV DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Bu tez çalışmasının temel amacı, dalga teorisinde oldukça önemli bir yer tutan KdV denkleminin nümerik çözümlerinin elde edilmesidir. Bu amaç doğrultusunda, en temel nümerik çözüm yöntemlerinden birisi olan sonlu farklar yöntemi kullanılmıştır.

Dalga teorisine ilişkin bazı temel bilgiler ve tanımlar birinci bölümde verilmiş, KdV denkleminin ve ilgili test problemlerinin tanıtılması ise ikinci bölümde yapılmıştır. Türevler için sonlu fark yaklaşımları ve sonlu farklar yöntemine ilişkin temel bazı bilgiler üçüncü bölümde sunulmuştur. Nümerik yöntemin KdV denklemine uygulanması ise dördüncü bölümde verilmiştir.

Nümerik yöntemin uygulanışında, ilk olarak, Crank-Nicolson formülleri yardımıyla diferensiyel denklemin zaman ayrıştırması yapıldı. Daha sonra denklem sistemindeki lineer olmayan terimler iki farklı yöntem ile lineerleştirildi. Konum ayrıştırması için problemin çözüm bölgesi eşit uzunluklu alt aralıklara bölündü. Sonlu farklar yönteminin uygulanması ile ortaya çıkan matris denkleminin çözümleri için ise Thomas algoritması kullanıldı. Kullanılan yöntem, farklı problemler üzerinde test edildi. Yöntemin doğruluğunun araştırılması için hata normları ve KdV denkleminin korunum kanunları hesaplandı. Son olarak, elde edilen sonuçlar ile bir değerlendirme yapıldı.

Anahtar Kelimeler: Dalga, KdV, Soliton, Sonlu farklar

ABSTRACT
NUMERICAL SOLUTIONS OF KdV EQUATION USING FINITE
DIFFERENCE METHOD

The main objective of this thesis is to obtain the numerical solutions of KdV equation which has a quite importance in wave theory. For this objective, one of the basic numerical method, the finite difference method, is used.

Some basic informations about waves are given in the first chapter. KdV equation and its related test problems are introduced in the second chapter. Finite difference formulas for the derivatives and some introductory informations about finite difference method are presented in the third chapter. Application of the numerical method for the KdV equation is constructed in the forth chapter.

In the application of the numerical method, firstly, the time discretization of the equation is achieved by the help of Crank-Nicolson formulae. Then, the nonlinear terms in the equation are linearized by two different methods. A uniform partition of the solution domain is considered for the space discretization. The Thomas algorithm is used for the solutions of the obtained matrix equations. The numerical method is tested on different test problems. Accuracy of the method is investigated by error norms and the conservative laws of KdV equation. Finally, a conclusion is given in the last chapter.

Keywords: Wave, KdV, Soliton, Finite difference

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1.a: Gerçek dalga profili	1
Şekil 1.1.b: Matematiksel dalga profili	1
Şekil 1.2: İlerleyen Dalga	3
Şekil 1.3: Enine dalga ve Boyuna dalga	4
Şekil 1.4: Su yüzeyindeki periyodik dalga	4
Şekil 2.1: John Scott Russell (1808-1882)	7
Şekil 2.2: Union Kanal'daki su kemeri üzerinde soliter dalga inşası	9
Şekil 3.1: Sürekli ve ayrık problemler arasındaki ilişki	11
Şekil 3.2: Bir boyutlu bölüntü noktaları	12
Şekil 3.3: İleri Fark yaklaşımı	16
Şekil 3.4: Geri Fark yaklaşımı	17
Şekil 3.5: Merkezi fark yaklaşımı	18
Şekil 3.6: Merkezi fark yaklaşımında hata azalması	19
Şekil 4.1: Yöntem 1 için tek soliton profili	29
Şekil 4.2: Yöntem 1 için $t=3$ anındaki mutlak hata	29
Şekil 4.3: Yöntem 2 için tek soliton profili	30
Şekil 4.4: Yöntem 2 için $t=3$ anındaki mutlak hata	30
Şekil 4.5: Maxwellian başlangıç koşullu problem $t = 12.5, \mu = 0.04, \Delta t = 0.01$	31
Şekil 4.6: Maxwellian başlangıç koşullu problem $t = 12.5, \mu = 0.01, \Delta t = 0.01$	32
Şekil 4.7: Problem 3 için farklı zamanlardaki çözüm profilleri	34

ÇİZELGELER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 3.1: Çözüm bölgesindeki ayrıştırma ile ortaya çıkan notasyon	13
Çizelge 4.1: Tek soliton için Yöntem1 sonuçları	29
Çizelge 4.2: Tek soliton için Yöntem 2 sonuçları	30
Çizelge 4.3: Maxwellian probleminde $\varepsilon = 1.0$ ve $\mu = 0.04$ için korunum sabitleri	32
Çizelge 4.4: Maxwellian probleminde $\varepsilon = 1.0$ ve $\mu = 0.01$ için korunum sabitleri	32
Çizelge 4.5: Problem 3 için korunum sabitleri	33

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

KdV Korteweg-de Vries

α Alfa

β Beta

γ Gama

δ Delta

ξ Psi

∂ Kumi türev

Σ Toplam

λ Lamda

$\approx$ Yaklaşık eşit

ε Epsilon

ϵ Epsilon değişkeni

μ Mu

∞ Sonsuz

$\geq$ Büyük eşit

$\leq$ Küçük eşit

$!$ Faktöriyel

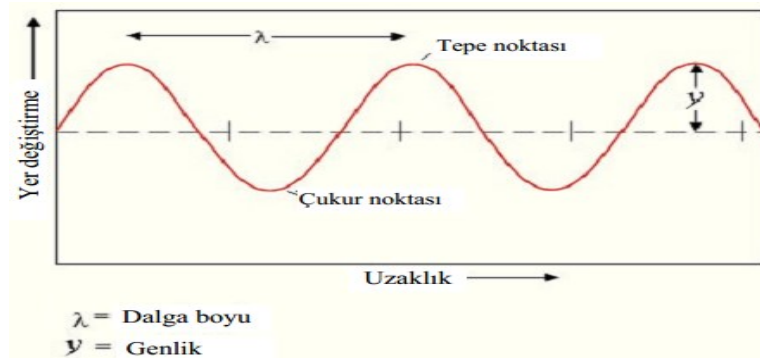
1. GİRİŞ

1.1 Dalga

Hava, su veya boşluk gibi uygun ortamlarda ilerleyen bir dağılıma dalga denir. Su dalgaları, ses dalgaları, radyo dalgaları buna örnek gösterilebilir [1]. Matematiksel olarak ise dalga, hareket eden herhangi bir fonksiyon olarak tanımlanabilir. Şekil1.1 ve Şekil1.2 sırasıyla bir gerçek dalga ve bir matematiksel dalga profilini göstermektedir. x_0 pozitif bir değer olmak üzere, bağımsız değişkenin x noktasından $x - x_0$ noktasına değişimi, bir $u(x)$ fonksiyonun grafiğinin sağ tarafa doğru yer değiştirmesine, ötelenmesine neden olur. t zamanı göstermek üzere, özel olarak eğer $x_0 = ct$, ($c > 0$) kabul edilirse, zamanın ilerlemesi, fonksiyonun grafiğindeki yer değişiminin artmasına sebep olur. Bu nedenle, $u(x - ct)$ biçimindeki bir fonksiyon, ileri yönlü ya da diğer bir deyişle sağa doğru bir dalga yayılımını karakterize eder. Benzer şekilde, $u(x + ct)$ fonksiyonu da dalga yayılımının geri yönlü ya da sola doğru olduğunu gösterir. Burada, c sayısı matematiksel olarak dalganın hızını temsil eder [2].



Şekil 1.1.a: Gerçek dalga profili.



Şekil 1.1.b: Matematiksel dalga profili.

1.2 Lineer Dalga Denklemi

Lineer ve lineer olmayan dalga denklemleri, fizik ve mühendisliğin birçok alanında uygulama alanlarına sahiptirler [3]. Bir dalga denkleminin lineer olması için aşağıdaki özelliklere sahip olması gerekir [4]:

- a) İki lineer dalgaların toplamı yine bir lineer dalgadır.
- b) Herhangi bir lineer dalganın hızı ve şekli, genliğinden bağımsızdır.
- c) Lineer dalgaların genlikleri küçüktür.

Matematiksel olarak lineer dalga denklemi,

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \quad (1.1)$$

şeklinde yazılır. Burada c dalganın yayılım hızını, Δ ise Laplace operatörünü göstermektedir. Buna göre, zamana bağlı bir boyutlu lineer dalga denklemi,

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad (1.2)$$

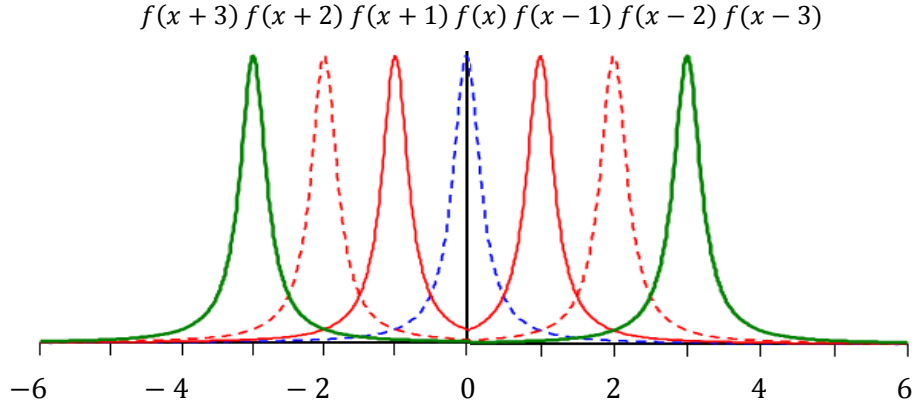
olarak ifade edilir [5]. Bu denklemin

$$u(x, t) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct)$$

formunda analitik çözümlerinin varlığı kolayca gösterilebilir.

1.3 İlerleyen Dalgalar

c reel sayısı dalga yayılım hızını ve $f: \mathbb{R} \rightarrow V$ fonksiyonu da dalga profilini temsil etmek üzere, $u(x, t) = f(x \pm ct)$ şeklindeki bir fonksiyona ilerleyen dalga denir. Böylece, $x \rightarrow u(x, t)$ noktasal dönüşümü bir t anındaki dalga profilini tanımlar. Buna göre, $t = 0$ anındaki grafik sadece $f(x)$ fonksiyonunun grafiğini gösterirken ilerleyen t zamanlarındaki, ($t > 0$), grafikler ise $(x, f(x))$ noktalarının sağa (ya da sola) doğru ötelenmiş hallerini dolayısı ile de zaman içerisinde bir yöne doğru c hızı ile hareket eden dalga profillerini gösterir [6]. Şekil 1.3. Bu olguyu resmetmektedir.



Şekil 1.2: İlerleyen dalga.

1.4 Dalga Yayılımı

Bir dalganın (sismik ya da ses dalgası gibi) yayılımı, içerisinde bulunduğu ortamın özelliklerine bağlıdır. Bu özellikler, ortamın makro modelini tarif etmek için kullanılabilir ve aşağıdaki statik bileşenleri kapsar:

- p-dalga hızı
- Kesme dalga hızı
- Yoğunluk

Dinamik parametrelerin resmedilmesi için ise diferensiyel denklemler bir alternatif oluşturur [7].

1.5 Dalgaların Sınıflandırılması

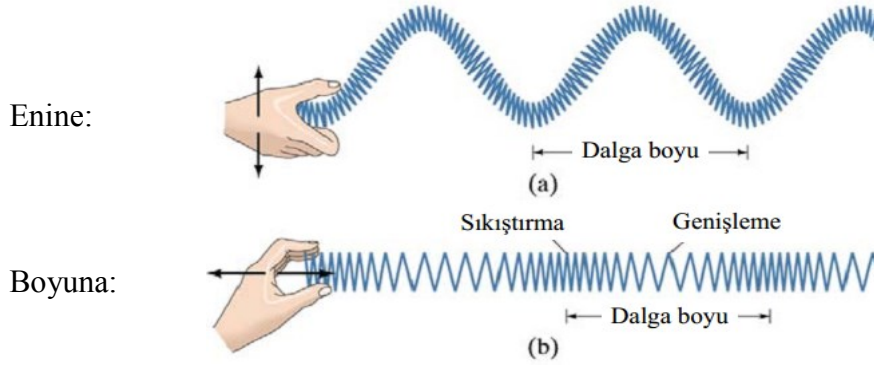
Dalgaların sınıflandırılmasında, genel anlamda iki yaklaşım dikkate alınabilir. Enine ve boyuna dalgalar olarak ifade edilen bu yaklaşımlar Şekil 1.3 ile gösterilmiştir.

1.5.1 Enine dalga

Bir ucu sabit, diğeri ucu ise hareket halinde bulunan ve ortamdaki parçacıkların dalga hız vektörüne dik olacak şekilde hareket ettiği durum olarak ifade edilebilecek dalgalardır. Bu dalga tipine örnek olarak, uzatılmış bir halatın hızlı bir şekilde aşağı yukarı hareket ettirilmesi ile elde edilen dalga profili verilebilir. Bakınız Şekil 1.3.a.

1.5.2 Boyuna dalga

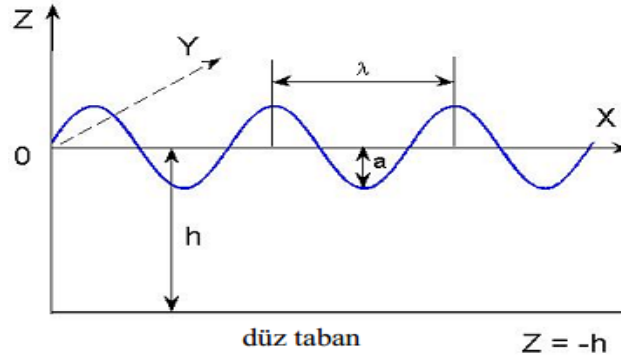
Bulunduğu ortama paralel olarak ilerleyen bir dalganın hareketi, boyuna dalgayı tarif eder. Bu dalga tipine örnek olarak, ses dalgaları düşünülebilir. Bakınız Şekil 1.3.b. Bununla birlikte, bazı dalgalar her iki dalga türüne de ait özellikleri gösterebilirler [8].



Şekil 1.3: Enine dalga ve boyuna dalga.

1.6 Sığ Su Dalgası

Su dalgaları için [9] numaralı referansa bakıldığında, sığ su dalgaları için farklı yaklaşımlarla ortaya çıkan denklemlerin, tamamen integrallenebilen kısmi türevli diferensiyel denklemler oldukları görülür. Bu denklemlerin elde edilmesinde, dört uzunluk ölçümü hayati bir role sahiptir. Şekil 1.5 te açıkça görüldüğü gibi λ ile gösterilen *dalga boyu*, birbirini takip eden iki zirve arasındaki uzunluk olarak bulunur. a ile gösterilen *genlik*, dalganın yüksekliğini temsil eder ve dalganın tepesinden suya kadar ki uzaklığı gösterir. *Suyun derinliği* ise suyun dibi ile durgun serbest yüzey arasındaki h mesafesidir. Dördüncü ve son uzunluk, koordinat sisteminde xz – düzlemine dik olan ve y –ekseni boyunca uzanan dalga tepe genişliğidir.



Şekil 1.4: Su yüzeyindeki periyodik dalga.

Düzgün derinliğe sahip bir suda yayılan dalgayı dikkate alalım. Yani h nin sabit olduğu ve herhangi bir kaybın olmadığı durumu düşünelim. Bu durumda bizim inceleyeceğimiz model denklemin bazı karakteristikleri ve bu denklemin matematiksel olarak kontrol edilmesine olanak sağlayan sınırlamaları vardır [10].

$h \ll \lambda$ olması ile sığ su yada uzun dalga olduğu, $a \ll h$ ile oldukça küçük bir genliğe sahip olduğu ve x – eksenini boyunca hareket ediyorsa tek, xy – düzleminde hareket ediyorsa iki boyutlu bir dalga olduğu anlaşılır. Ayrıca model kurarken, küçük etkiye sahip parametrelerin benzer büyüklüğe sahip olması gerekir.

Bir yüzey dalgası, dalga boyunun lokal su derinliğinden daha büyük olduğu sığ suda şekillenir. Ayrıca bir sığ su dalgası, yerçekimi kuvveti etkisindeki bir sığ su kütesinin, serbest yüzey akışına ya da yatay basınç altındaki bir sıvı akışına çok benzer. Bütün bu gibi gerçeklerin dikkate alınması ile sığ su dalgalarını temsil eden matematiksel model, bir kısmi diferensiyel denklem ya da denklem sistemi olarak karşımıza çıkar [11].

1.7 Soliton ve Soliter Dalgalar

Soliton ve soliter dalgalar, bir veya daha çok kısmi diferensiyel denklem tarafından ifade edilen, özel koşullara sahip dinamik yapılardır [12]. Birbirleri arasındaki doğrudan çarpışma sonrası aynı hız ve şekilleri ile hareketlerine devam edebilmelerinden dolayı elastik dağılım özelliğine sahiptirler.

Lineer olmayan hidrodinamik özellikleri ile bir soliter dalga, tutarlılığını ve dolayısıyla şeklini koruyan yerçekimi sınırlı bir dalgadır. Soliter dalgaların, genliği sınırlıdır ve sabit hız ve sabit şekil ile yayılırlar [11].

Bir soliton, diğer başka bir soliton ile çarpıştıktan sonra şeklini kaybetmez ve çarpışma sonrasında tekrar aynı özelliklerini koruyarak hareketine devam eder [4].

1.7.1 Soliton ve soliter dalgalar arasındaki farklar

Birçok benzerliklerine rağmen soliter dalgaları ve solitonlar arasında bazı farklılıklar vardır. Soliter dalgalar, integrallenemez denklemlerin sınırlı çözümleri iken solitonlar, integrallenebilir denklemlerin kısıtlanmış sonuçlarıdır. Solitonların bir diğer ayırt edici özelliği ise diğer solitonlar ile zıt yönlü çarpışma sonrasında bile kendi şekillerini korumalarıdır. Soliter dalgalar, aynı yönlü çarpışmalarda özelliklerini korusalar da zıt yönlü çarpışmalarda farklılık gösterirler. Bu nedenle, soliter dalgaların çeşitliliği gerçek solitonların çeşitliliğinden çok daha geniştir. Tornadolar ve girdaplar gibi bazı soliter dalgaları ayırt etmek zordur. Bu nedenle, soliter dalgalar zaman zaman soliton benzeri hareketlilikler gösteren solitonumsu dalgalar olarak bilinirler [4].

2. KORTEWEG-de VRIES (KdV) DENKLEMİ

2.1 Doğrusal Olmayan Dalga Denklemleri

Doğrusal olmayan kısmi diferensiyel denklemler, çoğunlukla, fiziksel problemler için yapılan bilimsel araştırmalarda ortaya çıkan ve alışılmış diyebileceğimiz temel yasaları formüle ederken ortaya çıkan denklemlerdir. Buna ilişkin; tek boyutlu dalga denklemi, KdV ve modifiye KdV denklemleri, Boussinesq denklemi, Burgers' denklemi, lineer olmayan Schrödinger (NLS) denklemi, Fisher denklemi, Klein-Gordon denklemi ve daha pek çok denklem örnek olarak verilebilir [13].

2.2 Korteweg-de Vries Denklemi

KdV denklemi,

$$U_t + \varepsilon U U_x + \mu U_{xxx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilen bir lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemdir. Bu denklemin soliton tipinde çözümleri vardır [14],[15].

(2.1) denkleminde yer alan t ve x alt gösterimleri sırasıyla zamana ve konuma göre kısmi türevleri göstermektedir. ε ile μ ise pozitif parametrelerdir.

KdV denklemi, uzun süreli dalga olgusunu temsil etmesi açısından oldukça önemli ve basit sayılabilecek bir modeldir [13]. Matematiksel olarak ise bu denklem üçüncü mertebeden, lineer olmayan bir denklemdir. KdV denklemi, lineer olmayan UU_x terimi ile U_{xxx} dağılım terimi arasında bir denge içerir [16,17].

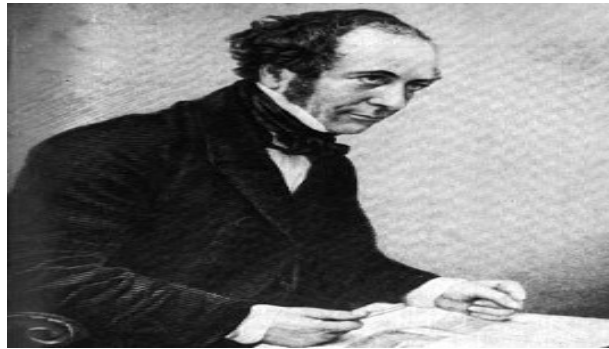
KdV denklemi, Hamiltonyan sisteminin tamamen integrallenebilir bir türü olup açık olarak çözülebilir bir denklemdir. Bu nedenle, uygun başlangıç koşulları altındaki bazı analitik çözümleri literatürde mevcuttur. Buna ek olarak, belirli başlangıç şartları için, KdV denkleminin çözümlerinin varlığı ve tekliği üzerine farklı çalışmalar da yapılmıştır [16,18,19].

KdV denklemi ilk olarak, tek yönlü sığ su dalgalarının yayılmasını açıklamak için kullanılmıştır [14]. Denklemin soliton şeklindeki bilinen tam çözümleri, akışkan gaz balonu içindeki basınç dalgası [20] ve bir silindir içindeki dönen akış yapıları [21] gibi bazı fiziksel olaylarda ortaya çıkmaktadır.

KdV denklemi ayrıca, biharmonik kristallerdeki akustik dalgalar, elastik çubuklarda boyuna ilerleyen dalgalar, bir sıkıştırılabilir ağır akışkan içindeki akustik-yerçekimi dalgası, ters simetrik manyeto hidrodinamik dalgalar, soğuk plazmalardaki lineer olmayan dalgalar ve düzensiz dönen akışkanlardaki ters simetrik dalgalar gibi fiziksel sistemlerde de kullanılabilir [13].

KdV denkleminin ilerleyen dalga çözümleri, 150 yılı aşkın bir süredir ilgi çekici bir çalışma sahası olmuştur. Bu denklemin temel bazı fiziksel özellikleri ile ilgili harika bir hikâye vardır. Bir İskoç mühendis ve deniz mimarı olan John Scott Russell (bkz. Şekil 2.1) bundan yaklaşık 180 yıl önce, kanal tekneleri üzerinde deneyler yaparken sığ sulardaki soliter dalgalar üzerine ilk tespitleri yapmıştır [22]. Birleşik Kanal Şirketi (Union Canal Company) için daha etkili kanal teknesi tasarımları üzerine testler yaparken yaptığı gözlemleri orijinal el yazmasıyla kendisi şu şekilde anlatmaktadır:

"Dar bir kanal boyunca iki çift at tarafından hızla çekilen bir botun hareketini gözlemliyordum. Bot aniden durduğunda, bota hareket sağlayan kanaldaki su kütlesi durmadı ve su kütlesi şiddetli bir çalkalanma şeklinde botun uç kısmı etrafında toplandı ve aniden botu arkasında bırakarak, büyük bir hızla harekete geçti. Büyük bir dalga yüksekliğine sahip olarak düşündüğüm soliter formdaki, dairesel ve düzgün bir su kütlesinin kanal boyunca şekil veya hızını bozmadan yoluna devam ettiğini gördüm. Bu dalga formunu, at üzerinde takip ettim ve yaklaşık 30 ft mesafe sonunda 8 veya 9 mil/saat hızında, ilk baştaki orijinal şeklinde ve yarı yüksekliğinde yuvarlanır halde gördüm. Yüksekliği kademeli olarak azaldı ve yaklaşık 1 veya 2 mil takip sonunda, kanalın kenarlarında kaybolduğunu gördüm. İşte 1834 yılının Ağustos ayı, ilk kez ötelenme dalgası olarak adlandırdığım bu ilginç ve güzel olayı gözleme şansı bulduğum zamandı" [23].



Şekil 2.1: John Scott Russell (1808-1882).

Russell bir su tankı kurarak aynı olayı tekrarlar ve gözlemlediği soliter dalganın özelliklerini inceler. Russell'in bu çalışması, Bullough [24], Craik [25] ve Darrigol [26] tarafından yayınlanan makaleler ile Emmerson [27] tarafından kaleme alınan Russell biyografisinde detaylı olarak verilmiştir. Öte yandan Hollandalı profesör Diederik Korteweg ve onun doktora öğrencisi Gustav de Vries [28], Russell tarafından gözlemlenen bu soliter dalgayı 1895 yılında matematiksel olarak modellemiş ve bu olayı bir kısmi diferensiyel denklem ile ifade etmişlerdir [14]. Böylece bu meşhur denklem onların anısına Korteweg de Vries (KdV) denklemi ismini almıştır. Boussinesq [29], 1872 yılında su dalgaları üzerine yayınladığı etkili makalesinde bugün kendi ismiyle anılan yeni bir denklemi ortaya koymuştur. Devam eden yıllarda lineer olmayan dalga teorisi ve soliter dalgalar çok az merak konusu olmuştur. Pasta, Ulam ve Fermi [30] nin "termalizasyon" için kullandıkları bir boyutlu harmonik latilerde KdV denkleminin görünürlüğü'nün Kruskal ve Zabusky [31] tarafından anlaşılmasıyla bu süreç 1965 yılında sona ermiştir. Yaptıkları çalışmalarında Kruskal ve Zabusky [31], soliter dalgaların çarpışmasının birbenzerini simüle etmişler ve bu simülasyondaki dalgaların zıt yönlü çarpışmadan sonra bile kendi hız ve şekillerini koruduklarını görmüşlerdir. Kruskal ve Zabusky, elastik olarak çarpışan bu dalgaları "*soliton*" dalgalar olarak tanımladılar. [32] numaralı referansta solitonların bulunulmasına ilişkin bir hikaye yer almaktadır.

1970'lerden sonra, soliter ve soliton dalga çözümüne sahip KdV tarzı denklemler önemli bir çalışma konusu olmuştur. Örneğin, Dauxois ve Peyrard [33], Filippov [34] ve Remoissenet [35] yakın geçmişte bu konuda yayınlar yapmışlardır. Sığ su dalga modellerinin matematiksel teorisi ve fiziksel özellikleri bilim adamlarının ilgi konusu olmaya devam etmektedir. Özellikle tamamiyle integrallenebilir modeller, ters saçılma dönüşümü (inverse scattering transform (IST)) kullanılarak elde edilmiştir. Bu yöntem hakkındaki daha detaylı bilgi için [36], [37] ve [38] referanslarına bakılabilir.

1995 yılında, Heriot-Watt Üniversitesinde bir konferans için biraraya gelen bilim adamları, bir soliter dalga inşa etmişlerdir. Ancak bu dalganın boyutları, Russell [23] tarafından ortaya konan dalgadan daha küçük olmuştur. Bu deneye ilişkin bir fotoğraf Şekil 2.2 ile verilmiştir.



Şekil 2.2: Union Kanal'daki su kemeri üzerinde soliter dalga inşası.

3. SONLU FARKLAR YÖNTEMİ

3.1 Sonlu Fark

Sonlu fark yaklaşımı, bir fonksiyonun x_0 noktasındaki türevi için yaklaşık hesaplama yapan bir yaklaşım tekniğidir. Bu yöntemde hesaplama yapılırken; x_0 noktası ile bu noktadan küçük bir artış ile elde edilen $(x_0 + h)$ noktasındaki fonksiyon değerleri kullanılabilir.

Türev tanımından

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} \quad (3.1)$$

olduğu bilinmektedir. Sonlu fark yaklaşımında bu eşitlik yerine, örneğin

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_0} \approx \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h}$$

yaklaşımı kullanılır. Burada h , x – ekseninde istenilen derecede küçük bir artışı göstermektedir [39].

Bir fonksiyonun değişik mertebeden türevlerine yapılan bu benzeri sonlu fark yaklaşımlarının elde edilmesinde özellikle Taylor seri açılımları önemli yer tutmaktadır.

3.2 Taylor Seri Açılımlarına Dayalı Sonlu Fark Formülleri

$u(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktası civarında Taylor seri açılımı aşağıdaki şekilde verilir:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (3.2)$$

$x = x_0 + h$ seçilirse, $u(x_0 + h)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktası civarındaki seri açılımı

$$\begin{aligned} u(x_0 + h) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{(n)}(x_0)}{n!} h^n \\ &= u(x_0) + \frac{u'(x_0)}{1!} h + \frac{u''(x_0)}{2!} h^2 + O(h^3) \end{aligned} \quad (3.3)$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki $O(h^3)$ ifadesi serinin kalan terimleridir ve bu gösterim, kalan terimler içerisindeki ilk terimin h^3 terimini içerdiğini söyler. Burada h küçük bir değeri temsil ettiğinden, $h < 1$ olması durumunda $h > h^2 > h^3 > h^4 > \dots$ gerçeğinden hareketle, $u(x_0 + h)$ değerinin hesaplanmasında gözardı edilen $O(h^3)$ ifadesinin hata derecesini verdiği söylenebilir.

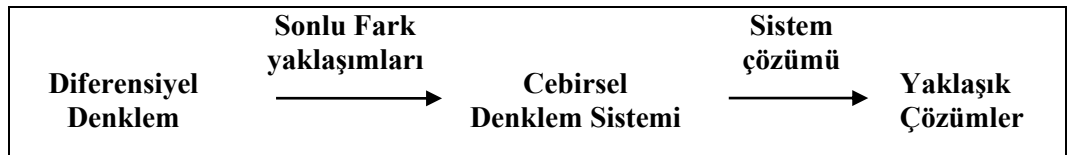
(3.3) ile verilen Taylor seri açılımına göre, $u'(x_0)$ türevinin bir gösterimi aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$$\begin{aligned} u'(x_0) &= \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} + \frac{h}{2!} u''(x_0) + O(h^2) \\ &= \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} + O(h). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Sonlu farklar yönteminin uygulamalarında, diferensiyel denklemdeki türev terimleri yerine, böylece elde edilen yaklaşımlar kullanılır ve uygun bir h değeri için ayırık noktalardaki yaklaşık çözümler elde edilir [39].

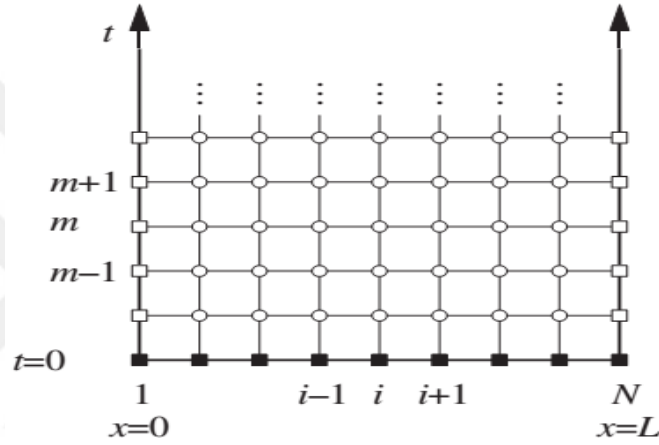
3.3 Sonlu Farklar Yöntemi

Sonlu farklar yöntemi, bir diferensiyel denkleminin nümerik çözümünün elde edilmesi için kullanılan temel bir yöntemdir. Bu yöntemde, diferensiyel denklemdeki sürekli fonksiyon, ayırık yaklaşımlar ile yer değiştirir. Buradaki, "ayırık" kelimesi, fiziksel alan ya da çözüm bölgesinde tanımlanan sonlu sayıdaki noktaların, nümerik çözümde yerine konulacağını ifade eder. Bu ayırık noktaların sayısı, probleme göre değişiklik arz edebilir. Nokta sayısının artırılması, genellikle, istenilen doğrulukta sonuçların elde edilmesi açısından bir gereklilik olarak ortaya çıkar. Türev terimleri yerine, denklemde ayırık yaklaşım kullanılması, diferensiyel denklemin bir cebirsel denklem sistemine dönüşmesini sağlar. Bu cebirsel sistemin çözümlerinin yapılması ile de bilinmeyen değerler bulunmuş olur. Şekil 3.1 ile bu süreç gösterilmiştir.



Şekil 3.1: Sürekli ve ayırık problemler arasındaki ilişki.

Zamana bağılı bir boyutlu kısmi diferansiyel denklem için konum ve zaman ayrıştırmasına esas olan adım uzunluklarının eşit ve sırasıyla Δx ve Δt olduğunu kabul edelim. Bu durumda yapılacak ayrıştırma işlemi Şekil 3.2 de görülen şekilde olacaktır. Çözüm bölgesi üzerinde elde edilen bu ayrık noktalar kümesine çoğunlukla ızgara (mesh), her bir bölünme noktasına ise düğüm (knot) adı verilmektedir. Diferansiyel denkleme sonlu farklar yönteminin uygulanması, denklemdeki bütün türevler için bu düğüm noktalarında oluşturulan sonlu fark yaklaşımlarının yerine yazılmasını gerektirir [40].



Şekil 3.2: Bir boyutlu bölüntü noktaları.

Düzgün parçalanmanın kullanıldığı sonlu bir aralıkta, $0 \leq x \leq L$, $u(x, t)$ yaklaşık çözümünü elde etmek için

$$x_i = (i - 1)\Delta x, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N.$$

Bölünme noktaları kullanılır. Burada N , sınır noktalarını da kapsayacak şekildeki tüm düğüm noktalarının sayısıdır. Böylece

$$\Delta x = \frac{L}{N - 1}$$

elde edilir. Benzer şekilde, $0 \leq t \leq t_{max}$ değerleri için

$$t_m = (m - 1)\Delta t, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

noktaları zaman eksenindeki bölünme noktalarına karşılık gelir. Δt zaman adımı ve M de zaman adımlarının sayısı olmak üzere

$$\Delta t = \frac{t_{max}}{M - 1}$$

şeklindedir.

Çözüm bölgesindeki bu ayrıştırma sonucu ortaya çıkan notasyon Çizelge 3.1 ile verilmiştir [40].

Çizelge 3.1: Çözüm bölgesindeki ayrıştırma ile ortaya çıkan notasyon.

Notasyon	Anlamı
$u(x, t)$	Sürekli çözüm (Tam Çözüm)
$u(x_i, t_m)$	Bölüntü noktalarında hesaplanan sürekli çözüm
u_i^m	SDD in çözümüyle elde edilen yaklaşık numerikayrik çözüm

3.4 Kesme Hatası

Kesme katası, türevin tam değeri ile sonlu fark yaklaşımı arasındaki fark olarak tanımlanır [41]. Kesme katası, sonlu fark yaklaşımlarındaki Taylor serilerindeki yüksek mertebeden türevli bazı terimlerin kesilmesiyle elde edilir.

3.4.1 Tutarlılık

Nümerik yöntemde, konum ve zaman adımları sıfıra yaklaştırıldığında ilgili kesme hatası da sıfıra yaklaşıyorsa yöntem tutarlıdır denir. Bu durum aşağıdaki tanım ile verilir.

Tanım 3.1: P bir diferensiyel operatör olmak üzere $Pu = f$ şeklindeki bir kısmi diferensiyel denklemin sonlu farklar yöntemi ile ayrıştırılmış halini $P_{\Delta x, \Delta t}u = f$ olarak kabul edelim. Bu durumda

$$(\Delta x, \Delta t) \rightarrow 0 \text{ iken } (Pu - P_{\Delta x, \Delta t}u) \rightarrow 0$$

oluyorsa kullanılan sonlu fark algoritması tutarlıdır denir.

Uyarı: Taylor serisi tabanlı her nümerik yöntem tutarlı olmayabilir [42].

3.4.2 Yakınsama

Sonlu farklar yönteminin yakınsalığı, ızgara aralıkları sıfıra yakın seçildiğinde nümerik çözümün tam çözüme yaklaşması olarak ifade edilebilir. Yakınsaklık için daha teknik bir tanım aşağıdaki şekilde verilir.

Tanım 3.2: Bir kısmi diferansiyel denklemin tam çözümü $u(x, t)$ nümerik çözümü de u_m^n ile verilsin. Bu durumda

$$(\Delta x, \Delta t) \rightarrow 0 \text{ iken } (x_m, t^n) \rightarrow (x, t) \text{ ve } u(x, t) - u_m^n \rightarrow 0$$

oluyorsa sonlu farklar yöntemi yakınsaktır denir [42].

3.4.3 Kararlılık

Kararlılık özelliği, tutarlı bir nümerik yöntemin yakınsaklığı için gerekli bir özelliktir. Zamana bağlı diferansiyel problemlerinde, çözüm için uygulanan nümerik yöntem eğer yakınsak ise problemin tam çözümü sınırlıyken nümerik yöntem de sınırlı çözümler üretir. Kararlılık kavramının temelinde yatan esas budur. Aşağıdaki tanım bu esası ifade etmektedir.

Tanım 3.3: P bir diferansiyel operatörü olmak üzere $Pu = 0$ ile verilen bir homojen kısmi diferansiyel denklem için ilgili sonlu farklar yönteminin $P_{\Delta x, \Delta t} u = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $0 \leq t^n \leq T$ ve yeterince küçük Δx ve Δt için

$$\|u^n\|_{\Delta x} \leq C_T \sum_{j=0}^J \|u^j\|_{\Delta x}$$

olacak şekilde bir C_T sabiti var ise ilgili nümerik yöntem kararlıdır denir. Buradaki norm

$$\|u^n\|_{\Delta x} \leq \left(\Delta x \sum_{m=-\infty}^{\infty} |u_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanır [42].

Bir sonlu farklar yönteminin tutarlılık, kararlılık ve yakınsaklığını basit bir problem üzerinde örneklendirmek için t zaman değişkeni ve A bir sabit sayı olmak üzere zamana bağlı

$$\frac{du}{dt} = A \cos(t) \quad (3.5)$$

diferansiyel denklemini dikkate alınırsa bu denkleme ilişkin bir sonlu farklar yöntemi

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = A \cos(n\Delta t) \quad (3.6)$$

şeklinde verilebilir. Burada Δt ile zaman artımı ve U^n ile de n . zaman adımındaki çözüm kastedilmektedir. Eğer başlangıç anı sıfır olarak kabul edilirse ($t_0 = 0$), n . zaman adım $t_n = n\Delta t$ şeklinde olacaktır. Böylece

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t(A \cos(n\Delta t)) \quad (3.7)$$

bulunur. (3.7) iterasyonu, başlangıç değeri belli olduğunda herhangi bir zamandaki çözümleri iterasyon yaparak hesaplamaya olanak sağlar.

Tutarlılık: (3.7) yönteminin tutarlı olması, $\Delta t \rightarrow 0$ için ilgili kesme hatasının sıfıra yaklaşmasını gerektirdiğinden, U^{n+1} terimi

$$U^{n+1} = U^n + \frac{\Delta t}{1!} U_t + \frac{\Delta t^2}{2!} U_{tt} + \dots$$

şeklinde Taylor serisine açılır ve bu ifade (3.7) denkleminde kullanılırsa

$$U^n + \frac{\Delta t}{1!} U_t + \frac{\Delta t^2}{2!} U_{tt} + \dots = U^n + \Delta t(A \cos(n\Delta t))$$

ve buradan da

$$U_t = (A \cos(n\Delta t)) - \frac{\Delta t}{2!} U_{tt} - \dots$$

elde edilir. Bu son ifade, $\Delta t \rightarrow 0$ için başlangıçtaki diferensiyel denklemi netice verir. Yani $\Delta t \rightarrow 0$ iken kesme hatası sıfır olur. Bu durum yöntemin tutarlı olması anlamına gelir.

Yakınsaklık: (3.7) yönteminin yakınsak olması $\Delta t \rightarrow 0$ iken sonlu farklar yönteminden elde edilen çözümün tam çözüme yaklaşmasını gerektirir [43].

3.4.4 Lax Richtmyer denklik teoremi

Kısmi diferensiyel denklemlerin herhangi bir iyi tanımlı başlangıç değer problemi için oluşturulan tek adımlı nümerik yöntemin yakınsak olması için gerek ve yeter şart yöntemin tutarlı ve kararlı olmasıdır.

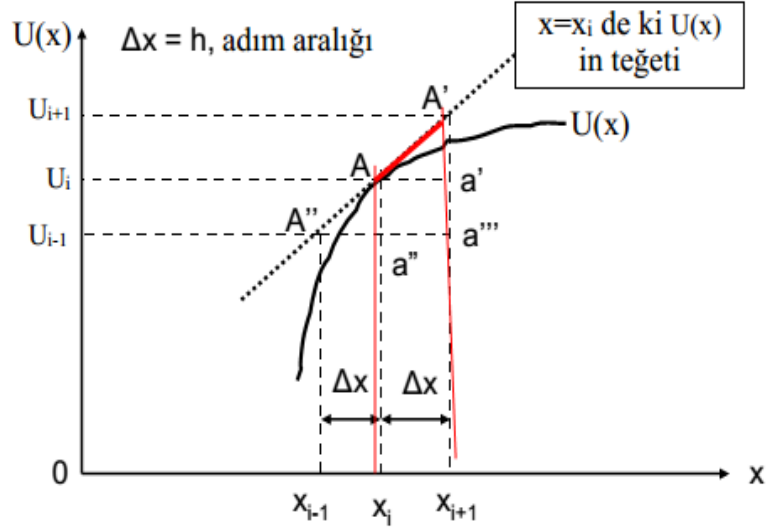
İspat: İspat için [44] numaralı referansa bakılabilir.

3.5 Üç Temel Sonlu Fark Yöntemleri

Bir $u(x)$ fonksiyonunun türevlerini ifade etmek için kullanılan üç temel yöntem ileri, geri ve merkezi fark yöntemleridir. Bu yöntemler aşağıda tanımlanmıştır.

3.5.1 İleri fark yöntemi

Bir $u(x)$ fonksiyonunun x değişkenine göre değişim oranının (yani türevinin), x_i ve x_{i+1} noktalarına bağlı olarak ifade edildiği durumdur (bkz. Şekil 3.3).



Şekil 3.3: İleri fark yaklaşımı.

Buna göre, $u(x)$ fonksiyonunun birinci mertebeden türevi için

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=x_i} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$$

şeklindedir [45].

Bu yaklaşım, Taylor serisi kullanılarak da elde edilebilir:

$u(x_{i+1})$ değeri, $u(x)$ fonksiyonunun x_i noktası civarındaki Taylor seri açılımı ile hesaplanırsa

$$u(x_i + h) = u(x_i) + h \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=x_i} + \frac{h^2}{2!} \left. \frac{d^2u}{dx^2} \right|_{x=x_i} + \frac{h^3}{3!} \left. \frac{d^3u}{dx^3} \right|_{x=x_i} + \dots \quad (3.8)$$

bulunur. Buradan birinci mertebeden türevli terim çekilirse

$$\begin{aligned} \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=x_i} &= \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} - \frac{h}{2!} \left. \frac{d^2u}{dx^2} \right|_{x=x_i} - \frac{h^2}{3!} \left. \frac{d^3u}{dx^3} \right|_{x=x_i} + \dots \\ &= \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} + O(h) \end{aligned}$$

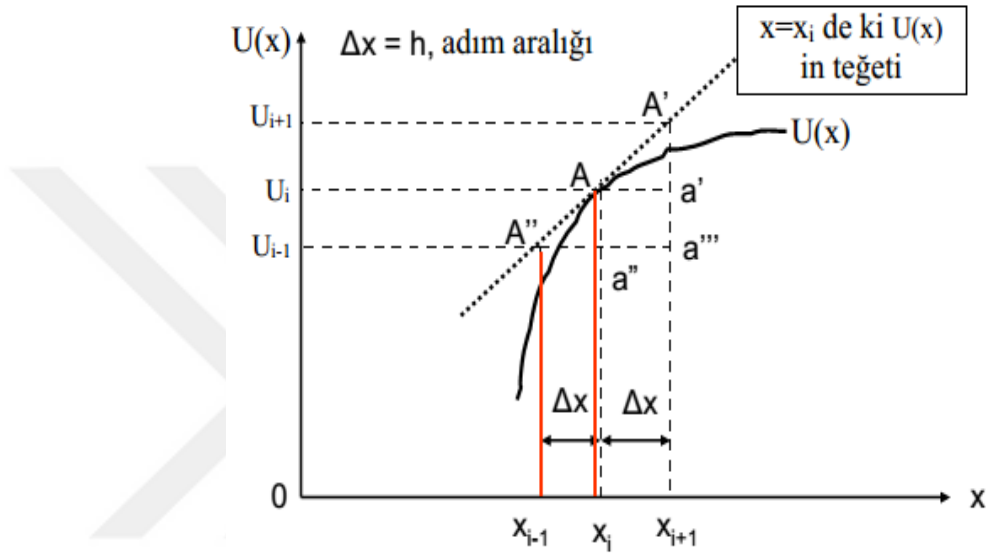
elde edilir. Böylece h terimini içeren terimlerin kesilmesiyle ileri fark formülü elde edilmiş olur. Bu yöntem, kesilen terimlerin oluşturacağı hataya ilişkin de bilgi verdiğinden ayrıca önem arz etmektedir. Birinci türev için klasik ileri fark yönteminde, hatanın büyüklüğü $O(h)$ olduğundan, ileri fark yöntemine birinci mertebeden doğruluğa sahiptir denir [40].

3.5.2 Geri fark yöntemi

İleri fark yöntemine benzer düşünce ile türev yaklaşımı için x_i ve x_{i-1} noktaları kullanılırsa geri fark yaklaşımı bulunur. Burada bir “geri” nokta kullanıldığından yöntem bu ismi almıştır. Buna göre birinci mertebeden türev için geri fark yaklaşımı

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=x_i} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + O(h)$$

şeklinde verilir. Bu yaklaşıma ilişkin geometrik yorum Şekil 3.4 ile verilmiştir [45].



Şekil 3.4: Geri fark yaklaşımı.

Geri fark yaklaşımın Taylor serisi yardımı ile elde edilmesinde $u(x_{i-1})$ değerinin, $u(x)$ fonksiyonunun x_i noktası civarındaki seri açılımından hesaplanması kullanılır. Buna göre

$$u(x_i - h) = u(x_i) - h \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=x_i} + \frac{h^2}{2!} \left. \frac{d^2u}{dx^2} \right|_{x=x_i} - \frac{h^3}{3!} \left. \frac{d^3u}{dx^3} \right|_{x=x_i} + \dots \quad (3.9)$$

elde edilir. Buradan birinci mertebeden türevli terim çekilirse

$$\begin{aligned} \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=x_i} &= \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{h} - \frac{h}{2!} \left. \frac{d^2u}{dx^2} \right|_{x=x_i} + \frac{h^2}{3!} \left. \frac{d^3u}{dx^3} \right|_{x=x_i} - \dots \\ &= \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{h} + O(h) \end{aligned}$$

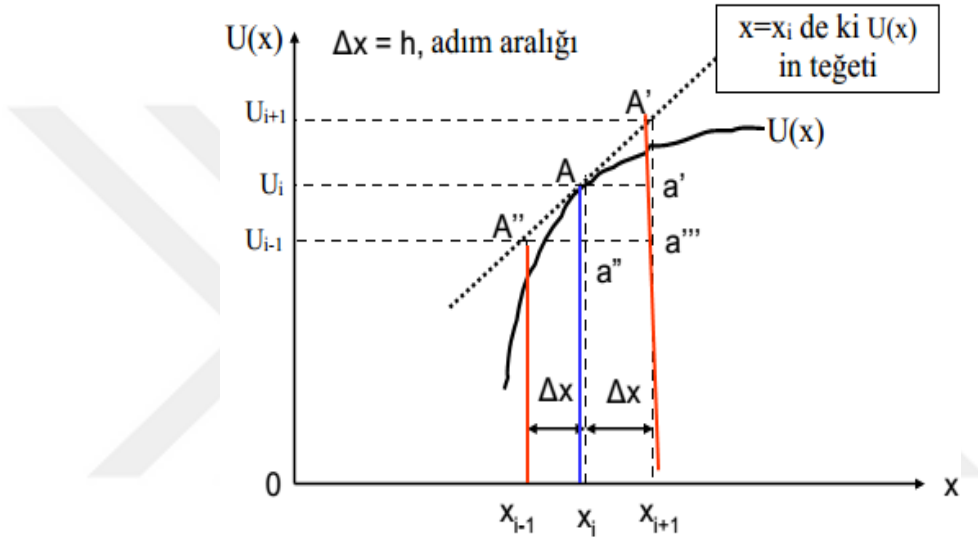
elde edilir. Geri fark yaklaşımında da kesme hatasının büyüklüğü $O(h)$ dır ve bu yöntem de birinci mertebeden doğruluğa sahip bir yöntemdir [40].

3.5.3 Merkezi Fark Yöntemi

Türev için elde edilen ilk iki yöntem de birinci mertebeden doğruluğa sahip yöntemlerdi. Şimdi ise doğruluk mertebesini artırarak yeni bir yaklaşım sunulacaktır. $u'(x)$ türevinin x_i noktasındaki değerine x_{i-1} ve x_{i+1} noktaları kullanılarak yapılacak bu yaklaşıma merkezi fark yaklaşımı denir. Buna göre;

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=x_i} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$

bulunur. Merkezi fark yaklaşımı, Şekil 3.5 da grafik üzerinde gösterilmiştir.



Şekil 3.5: Merkezi fark yaklaşımı.

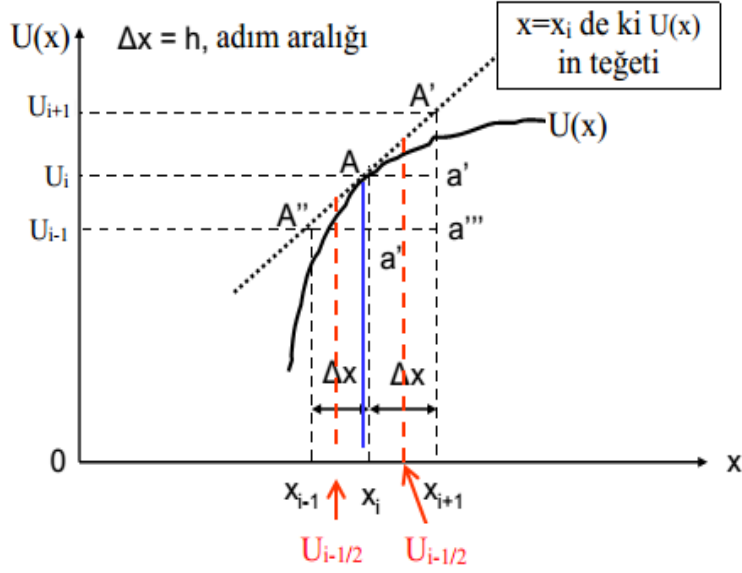
Merkezi fark yaklaşımının doğruluğu için her bir ileri ve geri yönlü adım aralığının ölçüsü yarıya düşürülürse ortaya çıkacak yeni yaklaşım

$$u_{i+\frac{1}{2}} = u\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \text{ ve } u_{i-\frac{1}{2}} = u\left(x_i - \frac{h}{2}\right) \text{ olmak üzere}$$

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=x_i} \approx \frac{u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}}{h} \quad (3.10)$$

şeklinde elde edilir [45]. Hatayı azaltma düşüncesi ile oluşturulan bu yeni yaklaşım Şekil 3.6 ile gösterilmiştir.

Merkezi fark yaklaşımındaki hata büyüklüğünü görmek için Taylor serisi kullanılırsa u_{i+1} ve u_{i-1} değerleri için x_i noktası civarındaki seri açılımları dikkate alınmalıdır. Buna göre;



Şekil 3.6: Merkezi fark yaklaşımında hata azalması.

$$u_{i+1} = u_i + h \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=x_i} + \frac{h^2}{2!} \left. \frac{d^2u}{dx^2} \right|_{x=x_i} + \frac{h^3}{3!} \left. \frac{d^3u}{dx^3} \right|_{x=x_i} + \dots \quad (3.11)$$

$$u_{i-1} = u_i - h \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=x_i} + \frac{h^2}{2!} \left. \frac{d^2u}{dx^2} \right|_{x=x_i} - \frac{h^3}{3!} \left. \frac{d^3u}{dx^3} \right|_{x=x_i} + \dots \quad (3.12)$$

(3.11) ve (3.12) denklemlerinin taraf tarafa çıkarılması ile aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$u_{i+1} - u_{i-1} = 2h \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=x_i} + \frac{2h^3}{3!} \left. \frac{d^3u}{dx^3} \right|_{x=x_i} + \dots$$

buradan da birinci mertebeden türevin çözülmesi ile

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x_i} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - \frac{h^2}{3!} \left. \frac{d^3u}{dx^3} \right|_{x=x_i} + \dots$$

veya

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_i} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + O(h^2) \quad (3.13)$$

bulunur. (3.13) eşitliğinden de görüldüğü üzere merkezi fark yaklaşımı ikinci mertebeden doğruluğa sahip bir yöntemdir dolayısı ile de hem ileri fark hem de geri fark yöntemlerine göre daha iyi sonuçlar verir [40].

4. KdV DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

KdV denklemi, ilgili başlangıç ve sınır koşulları ile birlikte aşağıdaki şekilde verilir:

$$U_t + \varepsilon U U_x + \mu U_{xxx} = 0 \quad (4.1)$$

$$U(a, t) = \alpha_1, \quad U(b, t) = \alpha_2, \quad U_x(a, t) = U_x(b, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (4.2)$$

$$U(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (4.3)$$

burada α_1 ve α_2 sabit sayılardır.

4.1 KdV Denkleminin Sonlu Farklar Yöntemi ile Çözümü

KdV denkleminin zaman ayrıştırması için Crank-Nicolson yaklaşımı kullanılabilir.

Bu yaklaşım ikinci mertebeden doğruluğa sahip bir yöntemdir ve

$$U_t = \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} \quad \text{ve} \quad U(x_m) = \frac{U_m^{n+1} + U_m^n}{2}$$

şeklinde ifade edilir. Böylece KdV denklemin zamana göre parçalanmış hali ardışık n ve $n + 1$ zamanları için

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \varepsilon \frac{(U U_x)^{n+1} + (U U_x)^n}{2} + \mu \frac{(U_{xxx})^{n+1} + (U_{xxx})^n}{2} = 0 \quad (4.4)$$

olarak bulunur. Diğer yandan (4.4) denklemi lineer değildir ve buradaki lineer olmayan terimlerin lineerleştirilmesi aşağıdaki yöntemler ile yapılabilir:

Yöntem 1) $(U U_x)^{n+1} = U^n (U_x)^{n+1}$

Yöntem 2) $(U U_x)^{n+1} = U^{n+1} (U_x)^n + U^n (U_x)^{n+1} - U^n (U_x)^n$

4.1.1 KdV denkleminin nümerik çözümü için birinci yöntem

İlk olarak KdV denkleminin lineerleştirilmesi için (4.4) eşitliğinde Yöntem 1 ile verilen yaklaşım kullanılırsa

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \varepsilon \frac{U^n (U_x)^{n+1} + (U U_x)^n}{2} + \mu \frac{(U_{xxx})^{n+1} + (U_{xxx})^n}{2} = 0$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{1}{\Delta t} U^{n+1} + \frac{\varepsilon}{2} U^n (U_x^{n+1}) + \frac{\mu}{2} (U_{xxx}^{n+1}) = \frac{1}{\Delta t} U^n - \frac{\varepsilon}{2} U^n (U_x^n) - \frac{\mu}{2} (U_{xxx}^n) \quad (4.5)$$

bulunur.

Zamana göre parçalanmış denkleme konum ayrıştırması yapmak için (4.5) eşitliğindeki türevli terimler yerine aşağıdaki sonlu fark yaklaşımları kullanılır. Bunun için $[a, b]$ çözüm bölgesi üzerinde

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

parçalanması dikkate alınır $x_m, m = 1, \dots, N-1$ noktaları iç noktalar, $x_m, m = 0, N$ noktaları ise sınır noktalar olur. Bir x_m düğüm noktasında bağımlı değişken ve ilgili türevleri

$$\begin{aligned} U^n(x_m) &= U_m^n, & U^{n+1}(x_m) &= U_m^{n+1} \\ U_x^{n+1} &= \frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2h}, & U_x^n &= \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2h} \\ U_{xxx}^{n+1} &= \frac{U_{m+2}^{n+1} - 2U_{m+1}^{n+1} + 2U_{m-1}^{n+1} - U_{m-2}^{n+1}}{2h^3} \\ U_{xxx}^n &= \frac{U_{m+2}^n - 2U_{m+1}^n + 2U_{m-1}^n - U_{m-2}^n}{2h^3} \end{aligned} \quad (4.6)$$

şeklinde eşitlikleri denklem (4.5) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} U_m^{n+1} + \frac{\varepsilon}{2} U_m^n \left(\frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2h} \right) + \frac{\mu}{2} \left(\frac{U_{m+2}^{n+1} - 2U_{m+1}^{n+1} + 2U_{m-1}^{n+1} - U_{m-2}^{n+1}}{2h^3} \right) \\ = \frac{1}{\Delta t} U_m^n - \frac{\varepsilon}{2} U_m^n \left(\frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2h} \right) - \frac{\mu}{2} \left(\frac{U_{m+2}^n - 2U_{m+1}^n + 2U_{m-1}^n - U_{m-2}^n}{2h^3} \right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

elde edilir. Denklem (4.7) de $U_m^n = z$ alınır ve denklem yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} U_m^{n+1} + \frac{\varepsilon z}{4h} U_{m+1}^{n+1} - \frac{\varepsilon z}{4h} U_{m-1}^{n+1} + \frac{\mu}{4h^3} U_{m+2}^{n+1} \\ - \frac{\mu}{2h^3} U_{m+1}^{n+1} + \frac{\mu}{2h^3} U_{m-1}^{n+1} - \frac{\mu}{4h^3} U_{m-2}^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Delta t} U_m^n - \frac{\varepsilon Z}{4h} U_{m+1}^n + \frac{\varepsilon Z}{4h} U_{m-1}^n - \frac{\mu}{4h^3} U_{m+2}^n \\
&\quad + \frac{\mu}{2h^3} U_{m+1}^n - \frac{\mu}{2h^3} U_{m-1}^n + \frac{\mu}{4h^3} U_{m-2}^n
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan basit bir düzenleme ile

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{\mu}{4h^3}\right) U_{m-2}^{n+1} + \left(\frac{\mu}{2h^3} - \frac{\varepsilon Z}{4h}\right) U_{m-1}^{n+1} + \left(\frac{1}{\Delta t}\right) U_m^{n+1} \\
&\quad + \left(\frac{\varepsilon Z}{4h} - \frac{\mu}{2h^3}\right) U_{m+1}^{n+1} + \left(\frac{\mu}{4h^3}\right) U_{m+2}^{n+1} \\
&= \left(\frac{\mu}{4h^3}\right) U_{m-2}^n + \left(\frac{\varepsilon Z}{4h} - \frac{\mu}{2h^3}\right) U_{m-1}^n + \left(\frac{1}{\Delta t}\right) U_m^n \\
&\quad + \left(\frac{\mu}{2h^3} - \frac{\varepsilon Z}{4h}\right) U_{m+1}^n + \left(-\frac{\mu}{4h^3}\right) U_{m+2}^n \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Bulunur. Böylece (4.8) ifadesi, KdV denklemi için zamana ve konuma göre tam ayrıştırılmış bir lineer cebirsel denklem sistemini verir. (4.8) tekrarlı bağıntısı bu tezin geriye kalan kısmında **İZMK1** yaklaşımı olarak isimlendirilecektir.

Her bir $m = 0, 1, \dots, N$ değeri dikkate alındığında, (4.8) tekrarlı bağıntısı ile ortaya çıkan cebirsel denklem sistemi, $(N + 1)$ denklem ve $(N + 5)$ bilinmeyen içeren bir sistem olur. Bu sistemin çözülebilmesi için 4 tane bilinmeyenin sistemden elimine edilmesi gereklidir. Bunun için sınır koşulları kullanılarak $U_{-2}, U_{-1}, U_{N+1}, U_{N+2}$ bilinmeyenleri elimine edilebilir. Buna göre, KdV denkleminin sınır koşulları aşağıdaki gibi birinci mertebeden türev formülleri ile birlikte düşünüldüğünde eliminasyon için gerekli eşitlikler bulunmuş olur.

$$\begin{aligned}
U_x(x_0) &= \frac{U_1 - U_{-1}}{2h} = 0 \Rightarrow U_{-1} = U_1 \\
U_x(x_0) &= \frac{-U_2 + 8U_1 - 8U_{-1} + U_{-2}}{12h} = 0 \Rightarrow U_{-2} = U_2 \\
U_x(x_N) &= \frac{U_{N+1} - U_{N-1}}{2h} = 0 \Rightarrow U_{N+1} = U_{N-1} \\
U_x(x_N) &= \frac{-U_{N+2} + 8U_{N+1} - 8U_{N-1} + U_{N-2}}{12h} = 0 \Rightarrow U_{N+2} = U_{N-2}
\end{aligned} \quad (4.9)$$

Böylece, $(N + 1)$ denklem ve $(N + 1)$ bilinmeyenden oluşan denklem sistemi elde edilir. Bu sistem matris formunda yazılırsa

$$D \cdot U^{n+1} = F \cdot U^n$$

şeklinde matris denklemi bulunur. Burada

$$D = \begin{bmatrix} C & -B & -A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & C & -B & -A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & B & C & -B & -A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & B & C & -B & -A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A & B & C & -B & -A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A & B & C & -B & -A \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & B & C & -B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & B & C \end{bmatrix},$$

$$U = [U_0, U_1, \dots, U_N]^T$$

$$F = \begin{bmatrix} C & B & A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B & C & B & A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A & -B & C & B & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A & -B & C & B & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A & -B & C & B & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -A & -B & C & B & A \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A & -B & C & B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A & -B & C \end{bmatrix},$$

ve

$$A = -\frac{\mu}{4h^3}, \quad B = \frac{\mu}{2h^3} - \frac{\varepsilon z}{4h}, \quad C = \frac{1}{\Delta t}$$

$$F = -AU_{m-2}^{n+1} - BU_{m-1}^{n+1} + CU_m^{n+1} + BU_{m+1}^{n+1} + AU_{m+2}^{n+1}$$

şeklindedir. Kullanılan lineerleştirmeden kaynaklı hatayı azaltmak için aşağıda verilen iç iterasyon her bir zaman adımında 2 yada 3 kez uygulanır.

İç iterasyon: $(U^*)^{n+1} = U^n + \frac{1}{2}(U^{n+1} - U^n)$

4.1.1.1 Birinci yöntem için kararlılık analizi

Yöntemin kararlılığını engellemenin bir yolu Von Neumann kararlılık analizidir.

Bune göre (4.8) denkleminde

$$U_m^n = q^n \cdot e^{im\theta}, \quad i = \sqrt{-1}$$

eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& q^{n+1}(Ae^{i(m-2)\theta} + Be^{i(m-1)\theta} + Ce^{im\theta} - Be^{i(m+1)\theta} - Ae^{i(m+2)\theta}) \\
& = q^n(-Ae^{i(m-2)\theta} - Be^{i(m-1)\theta} + Ce^{im\theta} + Be^{i(m+1)\theta} + Ae^{i(m+2)\theta})
\end{aligned}$$

elde edilir.

Gerekli sadeleştirmeler yapılarak

$$q = \frac{-Ae^{-i2\theta} - Be^{-i\theta} + C + Be^{i\theta} + Ae^{i2\theta}}{Ae^{-i2\theta} + Be^{-i\theta} + C - Be^{i\theta} - Ae^{i2\theta}}$$

bulunur.

Kompleks analizden bilinen

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

İfadesi

$$\cos(-\theta) = \cos\theta, \quad \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

eşitlikleri ile birlikte kullanılırsa

$$q = \frac{C + iD}{C + iD}$$

elde edilir. Burada

$$D = 2A\sin 2\theta + 2B\sin\theta$$

şeklindedir. Böylece

$$|q| = \frac{\sqrt{C^2 + D^2}}{\sqrt{C^2 + D^2}} = 1$$

olur. Nümerik yöntemin kararlılığı için $|q| \leq 1$ olması gerektiğinden elde edilen bu sonuç ile yöntemin koşulsuz kararlı olduğu gösterilmiş olur.

4.1.2 KdV denkleminin nümerik çözümü için ikinci yöntem

Denklem (4.4) ile verilen lineer olmayan terim yukarıdaki Yöntem 2 tekniği ile lineerleştirilirse

$$(UU_x)^{n+1} = U^{n+1}(U_x)^n + U^n(U_x)^{n+1} - U^n(U_x)^n \quad (4.10)$$

olur. Bu teknik Rubin and Graves tarafından önerilmiştir [46].

Denklem (4.4) te bu eşitlik kullanılırsa

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \varepsilon \frac{U^{n+1}(U_x)^n + U^n(U_x)^{n+1}}{2} + \mu \frac{(U_{xxx})^{n+1} + (U_{xxx})^n}{2} = 0$$

$$\frac{1}{\Delta t} (U^{n+1} - U^n) + \frac{\varepsilon}{2} (U^{n+1} U_x^n + U^n U_x^{n+1}) + \frac{\mu}{2} (U_{xxx}^{n+1} + U_{xxx}^n) = 0$$

elde edilir. Buradan da

$$U^{n+1} + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} (U_x)^n U^{n+1} + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} U^n U_x^{n+1} + \frac{\mu \Delta t}{2} (U_{xxx}^{n+1}) = U^n - \frac{\mu \Delta t}{2} (U_{xxx}^n) \quad (4.11)$$

yazılabilir.

Türevler için (4.6) ile verilen sonlu fark yaklaşımları (4.11) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} U_i^{n+1} + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} (U_x)_i^n U_i^{n+1} + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} U_i^n \left(\frac{U_{i+1}^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{2h} \right) \\ + \frac{\mu \Delta t}{2} \left(\frac{U_{i+2}^{n+1} - 2U_{i+1}^{n+1} + 2U_{i-1}^{n+1} - U_{i-2}^{n+1}}{2h^3} \right) \\ = U_i^n - \frac{\mu \Delta t}{2} \left(\frac{U_{i+2}^n - 2U_{i+1}^n + U_{i-1}^n - U_{i-2}^n}{2h^3} \right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

bulunur.

(4.12) denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned} -\frac{\mu \Delta t}{4h^3} U_{i-2}^{n+1} + \left(\frac{\mu \Delta t}{2h^3} - \frac{\varepsilon \Delta t}{4h} U_i^n \right) U_{i-1}^{n+1} + \left(1 + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} (U_x)_i^n \right) U_i^{n+1} \\ + \left(\frac{\varepsilon \Delta t}{4h} U_i^n - \frac{\mu \Delta t}{2h^3} \right) U_{i+1}^{n+1} + \frac{\mu \Delta t}{4h^3} U_{i+2}^{n+1} \\ = \frac{\mu \Delta t}{4h^3} U_{i-2}^n - \frac{\mu \Delta t}{2h^3} U_{i-1}^n + U_i^n + \frac{\mu \Delta t}{2h^3} U_{i+1}^n - \frac{\mu \Delta t}{4h^3} U_{i+2}^n \end{aligned} \quad (4.13)$$

Bu son denklem, KdV denkleminin zaman ve konuma göre ayrıştırılmış bir versiyonudur ve bu tezin geriye kalan kısmında **İZMK2** yaklaşımı olarak isimlendirilecektir.

$$R = \frac{\mu \Delta t}{4h^3} \quad , \quad P = \frac{\mu \Delta t}{2h^3} - \frac{\varepsilon \Delta t}{4h} U_i^n \quad , \quad S = 1 + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} (U_x)_i^n$$

kabul edilirse. (4.13) denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} -R U_{i-2}^{n+1} + P U_{i-1}^{n+1} + S U_i^{n+1} - P U_{i+1}^{n+1} + R U_{i+2}^{n+1} \\ = R U_{i-2}^n - 2R U_{i-1}^n + U_i^n + 2R U_{i+1}^n - R U_{i+2}^n \end{aligned} \quad (4.14)$$

Her bir $m = 0, 1, \dots, N$ değeri dikkate alındığında, (4.14) tekrarlı bağıntısı ile ortaya çıkan cebirsel denklem sistemi, $(N + 1)$ denklem ve $(N + 5)$ bilinmeyen içeren bir sistem olur. Bu sistemin çözülebilmesi için 4 tane bilinmeyen sistemden elimine edilmesi gereklidir. Bunun için sınır koşulları kullanılarak $U_{-2}, U_{-1}, U_{N+1}, U_{N+2}$ bilinmeyenleri elimine edilebilir. Bunun için KdV denkleminin sınır koşullarından elde edilen (4.9) eşitlikleri kullanılabilir. Böylece, $(N + 1)$ denklem ve $(N + 1)$ bilinmeyen içeren denklem sistemine ulaşılır. Bu sistem matris formunda

$$M \cdot U^{n+1} = N \cdot U^n$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$M = \begin{bmatrix} S & -P & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P & S & -P & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R & P & S & -P & R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R & P & S & -P & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R & P & S & -P & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -R & P & S & -P & R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R & P & S & -P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R & P & S \end{bmatrix},$$

$$U = [U_0, U_1, \dots, U_N]^T,$$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 2R & -R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2R & 1 & 2R & -R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R & -2R & 1 & 2R & -R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & -2R & 1 & 2R & -R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R & -2R & 1 & 2R & -R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R & -2R & 1 & 2R & -R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R & -2R & 1 & 2R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R & -2R & 1 \end{bmatrix},$$

şeklindedir.

4.1.2.1 İkinci yöntem için kararlılık analizi

İkinci yöntemin kararlılık analizi için de yine von Neumann metodu kullanılabilir.

Buna göre (4.13) denkleminde

$$U_m^n = q^n \cdot e^{jm\theta}, \quad j = \sqrt{-1}$$

eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& q^{n+1}(-Re^{j(m-2)\theta} + Pe^{j(m-1)\theta} + Se^{jm\theta} - Pe^{j(m+1)\theta} + Re^{j(m+2)\theta}) \\
& = q^n(Re^{j(m-2)\theta} - 2Re^{j(m-1)\theta} + e^{jm\theta} + 2Re^{j(m+1)\theta} - Re^{j(m+2)\theta})
\end{aligned}$$

elde edilir.

Gerekli sadeleştirmeler yapılır ve bu ifade düzenlenirse

$$q = \frac{Re^{-j2\theta} - 2Re^{-j\theta} + 1 + 2Re^{j\theta} - Re^{j2\theta}}{-Re^{-j2\theta} + Pe^{-j\theta} + S - Pe^{j\theta} + Re^{j2\theta}}$$

bulunur.

Kompleks analizden bilinen

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

İfadesi

$$\cos(-\theta) = \cos\theta, \quad \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

eşitlikleri ile birlikte kullanılırsa

$$q = \frac{1 - j[2R\sin 2\theta - 4R\sin\theta]}{S + j[2R\sin 2\theta - 2P\sin\theta]}$$

elde edilir. Böylece

$$|q| = \frac{\sqrt{1^2 + (2R\sin 2\theta - 4R\sin\theta)^2}}{\sqrt{S^2 + (2R\sin 2\theta - 2P\sin\theta)^2}} = 1$$

Bu son ifade için $|q| \leq 1$ olması durumunda yöntem kararlı olur.

4.2 Sayısal Örnekler ve Karşılaştırmalar

Bu kısımda KdV denkleminin bilinen bazı nümerik örnekleri kullanılarak sunulan yöntem test edilecektir.

KdV denkleminin sonsuz çoklukta korunum yasasına sahip olduğu Muira ve arkadaşları tarafından [47] referansında gösterilmiştir. KdV denkleminin en çok kullanılan korunum sabitleri

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} U dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} U^2 dx, \quad I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(U^3 - \frac{3}{\varepsilon} \mu(U_x)^2 \right) dx \quad (4.15)$$

ile verilir ve bunlar sırası ile kütle, enerji ve momentuma karşılık gelir. Bu değişmezler bütün hesaplama süresinde sabit kalmalıdır. Analitik çözümün olmadığı test problemlerinde bu sabitler verilen yöntemlerin doğruluklarını gözlemek için kullanılacaktır.

Nümerik yöntemin doğruluğu araştırılırken aşağıda verilen hata normları hesaplanmıştır.

$$L_2 = \|U^{analitik} - U^{nümerik}\|_2 = \sqrt{h \sum_{j=0}^N |U^{analitik} - (U^{nümerik})_j|^2},$$

$$L_\infty = \|U^{analitik} - U^{nümerik}\|_\infty = \max_j |U^{analitik} - (U^{nümerik})_j|.$$
(4.16)

4.2.1 Problem 1: Tek soliton örneği

İlk test problemi olarak bir tek solitonun hareketi ele incelenecektir. Bunun için

$$U(x, 0) = 3c \operatorname{sech}^2(Ax + D), \quad t \geq 0$$

başlangıç koşulu ve

$$U(x, t) = U(2, t) = 0, \quad t \geq 0$$

sınır koşulları dikkate alınacaktır. Bu şartlar altında KdV denkleminin analitik çözümü

$$U(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2(Ax - Bt + D),$$
(4.17)

ile verilir. Burada

$$A = \frac{1}{2}(\varepsilon c / \mu)^{1/2} \text{ ve } B = \frac{1}{2}\varepsilon c A$$

şeklindedir.

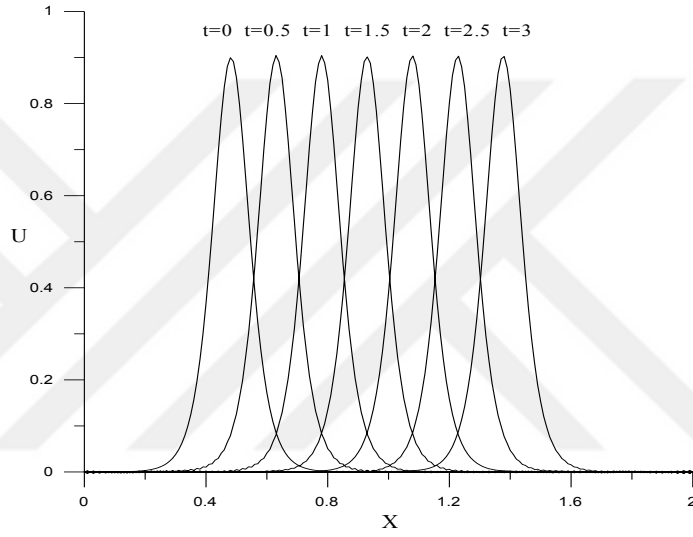
(4.17) ile verilen çözüm, $3c$ genliğe sahip bir solitonun, sağ tarafa hareketini temsil eder. Başlangıç dalgası $x = 0$ merkezlidir ve dalganın hızı da $3c$ dir. Nümerik hesaplamalarda [16] referansına benzer olarak kullanılan parametreler

$$\varepsilon = 1, \mu = 4.84 \times 10^{-4}, c = 0.1, D = -6$$

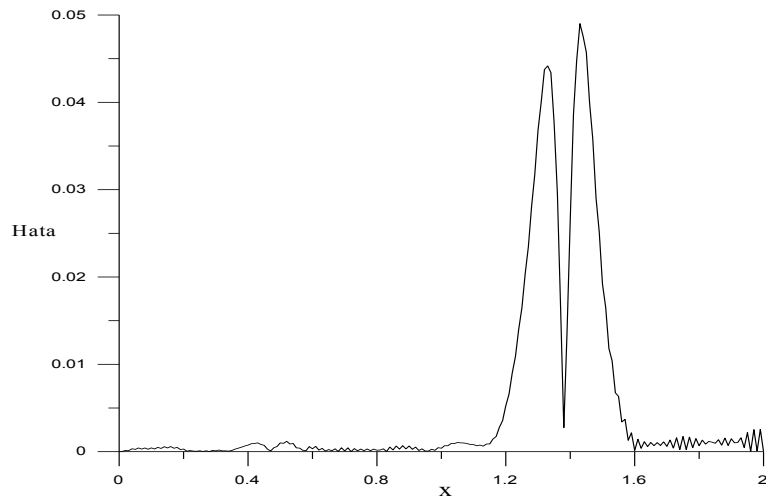
şeklinde seçilerek $[0, 2]$ aralığında çözümler araştırılmıştır. Yazılan çözüm algoritması $h = 0.01$ ve $\Delta t = 0.05$ değerleri için $t=3$ anına kadar çalıştırılmış ve ilgili hata normları ve korunum sabitleri hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar, Yöntem 1 ve Yöntem 2 için sırasıyla Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.2 de sunulmuştur. Diğer yandan, Şekil 4.1-4 ile oluşan dalga profilleri ve mutlak hatalar gösterilmiştir.

Çizelge 4.1: Tek soliton için Yöntem1 sonuçları.

Zaman	$L_2 \times 10^1$	$L_\infty \times 10^1$	I_1	I_2	I_3
0.0	0	0	0.144598	0.0867593	0.0470778
0.5	0.0382005	0.108414	0.145749	0.0869141	0.0472148
1.0	0.0618583	0.177872	0.143613	0.0866445	0.0469764
1.5	0.0891988	0.254411	0.143806	0.0866495	0.0469809
2.0	0.117149	0.323045	0.144626	0.0867444	0.0470683
2.5	0.14671	0.40932	0.145216	0.0868526	0.047164
3.0	0.177211	0.490116	0.144395	0.0867197	0.0470463



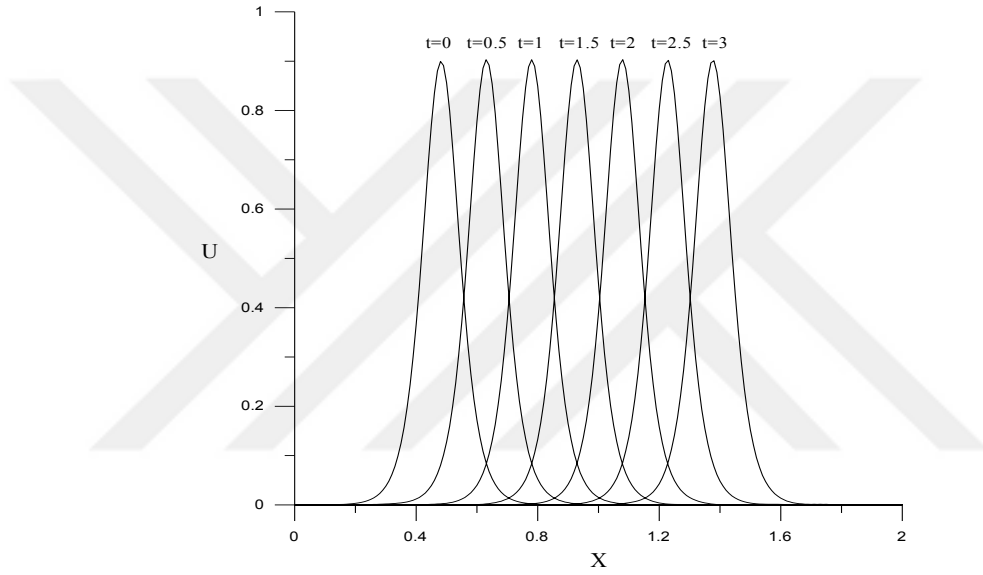
Şekil 4.1: Yöntem 1 için tek soliton profili.



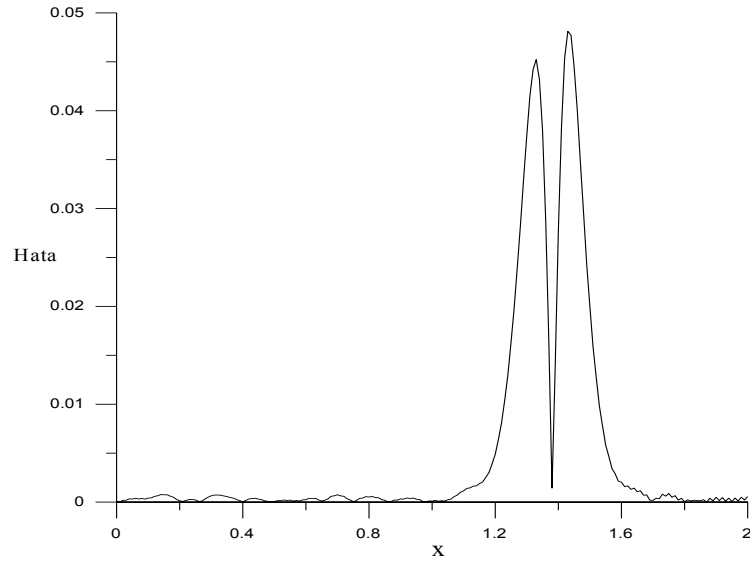
Şekil 4.2: Yöntem 1 için t=3 anındaki mutlak hata.

Çizelge 4.2: Tek soliton için Yöntem 2 sonuçları.

Zaman	$L_2 \times 10^1$	$L_\infty \times 10^1$	I_1	I_2	I_3
0.0	0	0	0.144597	0.0867593	0.0470778
0.5	0.0305698	0.0958634	0.144394	0.086753	0.0470766
1.0	0.0594514	0.17613	0.144676	0.0867777	0.0470988
1.5	0.0886643	0.245777	0.144611	0.0867714	0.0470925
2.0	0.118189	0.327563	0.144585	0.0867566	0.0470801
2.5	0.14823	0.404618	0.14469	0.0867704	0.0470914
3.0	0.177639	0.481133	0.144731	0.0867683	0.0470892



Şekil 4.3: Yöntem 2 için tek soliton profili.



Şekil 4.4: Yöntem 2 için t=3 anındaki mutlak hata.

4.2.2 Problem 2: Maxwellian başlangıç koşulu

Bu test probleminde, [48] referansında yer alan

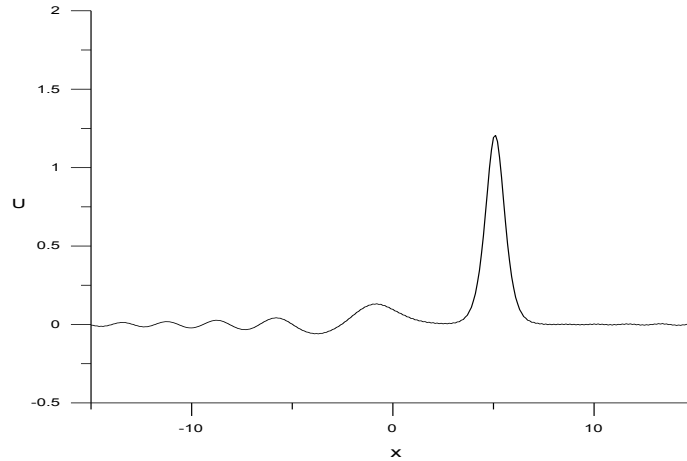
$$U(x, 0) = \exp(-x^2)$$

şeklindeki Maxwellian başlangıç koşulu,

$$U(-15, t) = U(15, t) = 0, \quad t > 0.$$

sınır koşulları ile birlikte dikkate alındı. Hesaplamalar için ayrıştırma parametreleri ve ε sabiti $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ ve $\varepsilon = 1.0$, olarak kullanıldı. Farklı μ değerleri için oluşan çözümler Şekil 4.5 ve Şekil 4.6 ile verildi. Elde edilen sonuçlar incelendiğinde, oluşan dalgaların davranış şeklinin tamamıyla $\mu < \mu_c$ ya da $\mu > \mu_c$ olmasına bağlı olduğu gözlemlendi. Burada μ_c [49] referansında yer alan ve kritik parametre olarak isimlendirilen bir parametredir. Berezin ve Karpman yaptıkları çalışmada [50] bu kritik parametreyi $\mu_c = 0.0625$ olarak kullanmışlardır. $\mu \ll \mu_c$ olacak şekildeki seçimlerde başlangıç koşulu μ sayısına bağlı olarak birden fazla dalgaya ayrışırken $\mu \gg \mu_c$ olması durumunda böyle bir ayrışma yerine daha hızlı salınım yapan dalga paketleri oluşmaktadır [51].

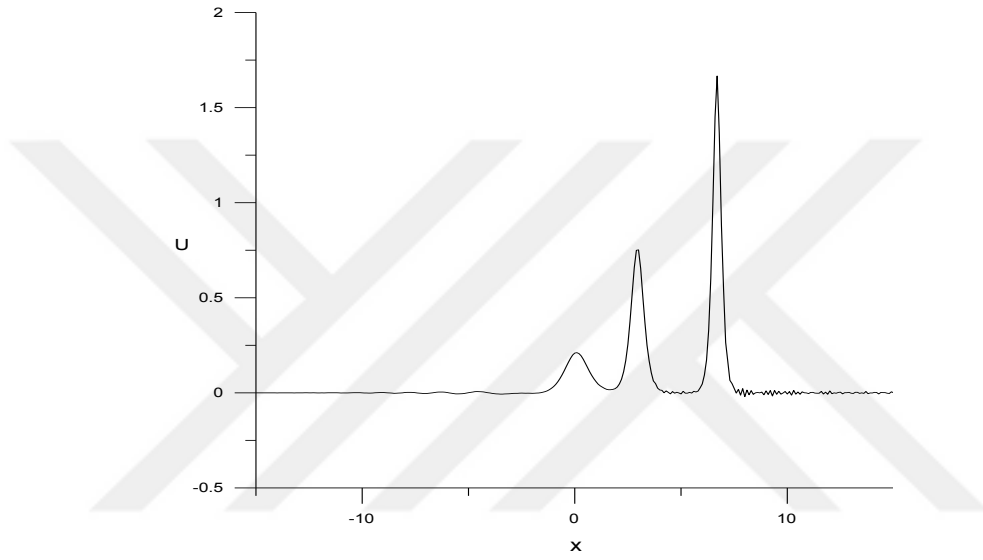
İki farklı μ değeri için hesaplanan korunum sabitleri Çizelge 4.3 ve Çizelge 4.4 ile verilmiştir. Hem bu çizelgelerde hem de Şekil 4.5 ve Şekil 4.6 de görüldüğü üzere μ değeri küçüldükçe çözüm profillerinin oluşturulmasında kullanılan nümerik yöntem zorlanmaktadır. $\mu = 0.01$ seçiminde dalganın sağ tarafında oluşan salınımlar buna işaret etmektedir. $\mu = 0.001$ seçimi ile hesaplama yapıldığında çözümlerin bozulduğu görülmüştür.



Şekil 4.5: Maxwellian başlangıç koşullu problem $t = 12.5, h = 0.1, \Delta t = 0.01, \mu = 0.04$.

Çizelge 4.3: Maxwellian probleminde $\varepsilon = 1.0$ ve $\mu = 0.04$ için korunum sabitleri.

Zaman	I_1	I_2	I_3
0.0	1.772454	1.253314	0.874423
2.5	1.772456	1.256129	0.8822085
5.0	1.772759	1.257326	0.8848848
7.5	1.773902	1.257563	0.8854049
10.0	1.781677	1.258257	0.8862091
12.5	1.755611	1.255208	0.8831938



Şekil 4.6: Maxwellian başlangıç koşullu problem $t = 12.5, h = 0.1, \Delta t = 0.01, \mu = 0.01$.

Çizelge 4.4: Maxwellian probleminde $\varepsilon = 1.0$ ve $\mu = 0.01$ için korunum sabitleri.

Zaman	I_1	I_2	I_3
0.0	1.772454	1.253314	0.9861008
2.5	1.772197	1.27361	1.051559
5.0	1.773074	1.290827	1.111356
7.5	1.772256	1.288617	1.096313
10.0	1.771684	1.285888	1.083662
12.5	1.773193	1.292054	1.117952

4.2.3 Problem 3: Tanh formunda başlangıç koşulu

Son test problemi olarak, KdV denkleminin, [16] referansında yer alan.

$$u(x, 0) = \frac{1}{2} \left[1 - \tanh \left(\frac{|x| - 25}{5} \right) \right]$$

başlangıç koşulu ve

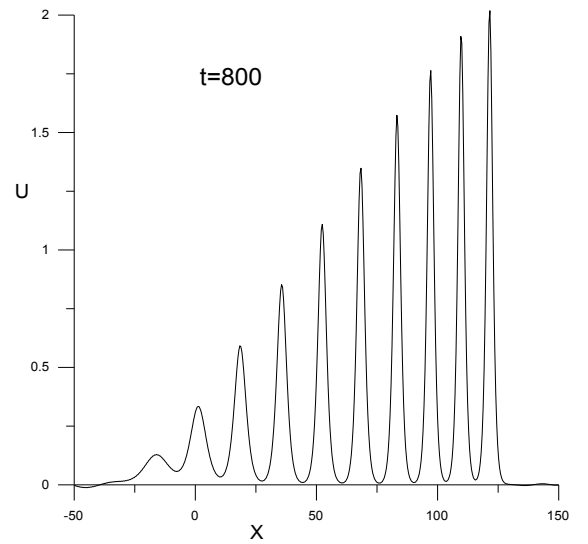
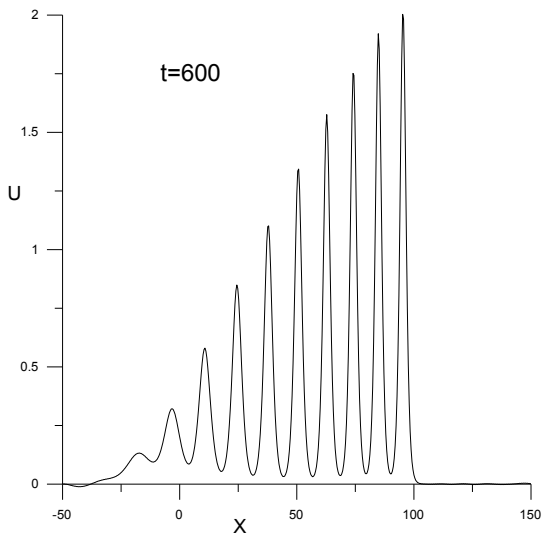
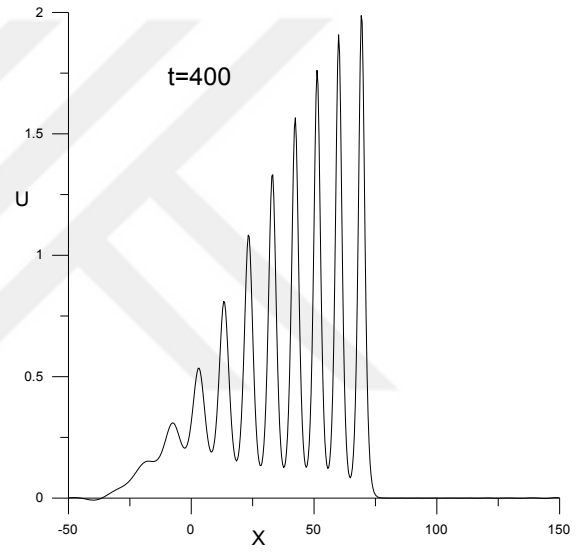
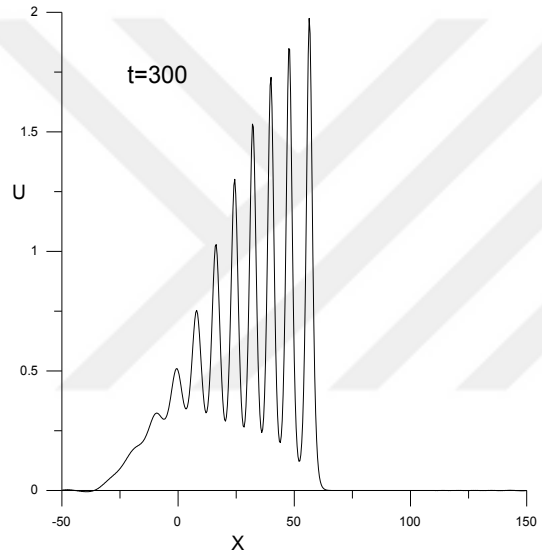
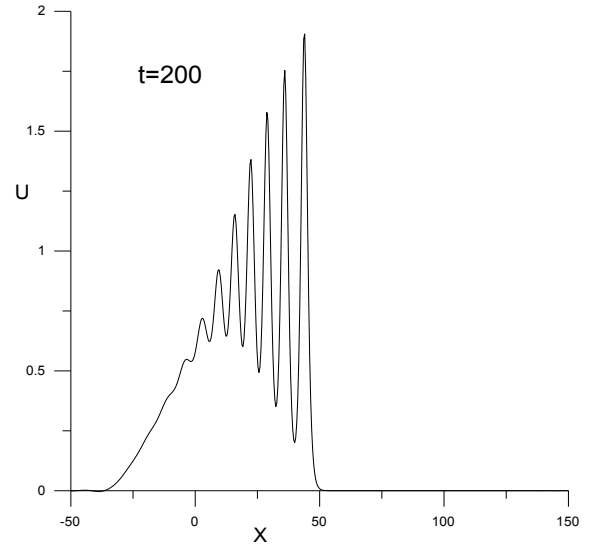
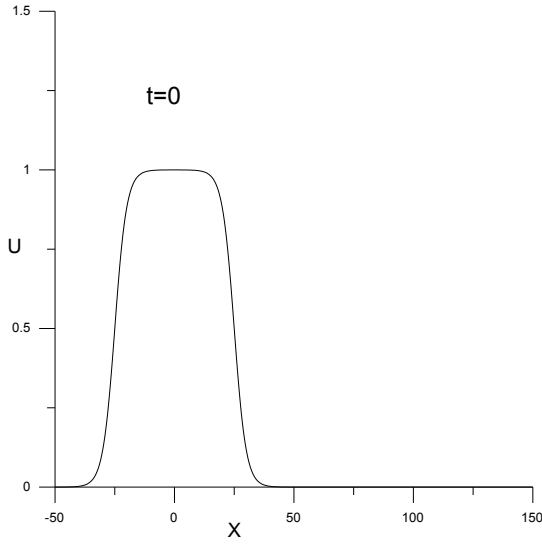
$$U(-50, t) = U(150, t) = 0, \quad U_x(-50, t) = U_x(150, t) = 0, \quad t > 0$$

sınır koşulları altındaki çözümleri araştırıldı. Hesaplanan korunum sabitleri Çizelge 4.5 ile sunuldu.

Yapılan hesaplamalarda çözüm parametreleri olarak $\varepsilon = 0.2$, $\mu = 0.1$ değerleri $\Delta t = 0.05$ ve $h = 0.4$ ayrıştırma parametreleri ile birlikte kullanıldı. Çözümler için program $t = 800$ zamanına kadar çalıştırıldı ve dalga profillerindeki kuyruk oluşumu gözlemlendi. Farklı bazı zamanlardaki çözümler Çizelge 4.5 ile sayısal olarak sunuldu ve Şekil. 4.7 ile gösterildi. Öte yandan, oluşan dalgaların genliklerinin neredeyse lineer olduğu ve en öndeki dalganın hızının teorik dalga hızıyla uyumlu olduğu görüldü.

Çizelge 4.5: Problem 3 için korunum sabitleri.

Zaman	I_1	I_2	I_3
0.0	50.000114	45.000456	42.301024
100	50.000289	45.074866	42.566876
200	50.008099	45.292009	43.365405
300	49.998908	45.422825	43.835325
400	49.976394	45.470108	43.991981
500	49.974299	45.488904	44.046712
600	49.966234	45.496014	44.065706
700	49.991361	45.51399	44.090886
800	50.017085	45.530616	44.112816



Şekil 4.7: Problem 3 için farklı zamanlardaki çözüm profilleri.

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında KdV denkleminin nümerik çözümleri, sonlu farklar yöntemi ile araştırıldı. Problemin zaman ayrıştırmasında Crank-Nicolson yöntemi kullanıldı. Bu sayede KdV denklemi, ardışık iki zaman adımını içeren bir tekrarlı bağıntı haline getirildi. Sunulan nümerik yöntem, ilk olarak analitik çözümü bilinen tek soliton problemi üzerinde test edildi ve farklı dalga hızları için sonuçlar verildi. İkinci olarak ise Maxwellian başlangıç koşulunun ürettiği dalgalar incelendi. Bu problemde μ değeri küçüldükçe çözüm profillerinin oluşturulmasında kullanılan nümerik yöntemin zorlandığı ve çözümlerin salınım yaptığı gözlemlendi. Son olarak ise Tanh fonksiyonu içeren bir başlangıç koşulu ile oluşan dalga profilleri incelendi.

Nümerik yöntemin uygulanışında, standard sonlu fark yaklaşımları tercih edilerek lineer olmayan KdV denklemi için iki farklı lineerleştirme tekniği kullanıldı ve denklemin sonlu farklar çözümleri bulundu. Elde edilen sonuçlar incelendiğinde ilk etapta, ikinci yöntemin daha doğru sonuçlar verdiği gözlemlendi. Bununla beraber kullanılan bir iç iterasyon ile birinci yöntemde lineerleştirmeden kaynaklanan hata azaltılarak her iki yöntemin hatası da aynı doğruluk seviyesine getirildi.

Sonuç olarak, KdV denkleminin nümerik çözümlerinde, dalga profillerinin oluşturulması ve denklemin karakteristiklerinin incelenmesinde kullanılan standard sonlu farklar yönteminin yeterli doğrulukta sonuçlar verdiği söylenebilir. Yöntemin uygulama kolaylığı ve hesaplama maliyeti açısından ekonomik olması da bir avantaj olarak not edilebilir. Diğer yandan, elde edilen sonuçların daha güçlü nümerik yöntemlerle karşılaştırılabilirliği ve yöntemi zorlayacak parametre seçimlerinde ortaya çıkan güçlükler ise zayıf yönü olarak ifade edilebilir. Bu nedenle, standard yaklaşımın ötesinde iyileştirme tekniklerinin kullanılarak yöntemin güçlendirilmesi ileriki bir çalışma konusu olarak düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] R. S. Howard and H. D. Vaughan, "Navy Electricity and Electronics Training Series," no. September, pp. 1–3, 1998.
- [2] "Waves and the Wave Equation." Available: www.geo.mtu.edu/~scarn/teaching/GE4250/ComplexWave_lecture.ppt. Accessed: 10-May-2015.
- [3] Y. Keskin and G. Oturanç, "Reduced differential transform method for solving linear and nonlinear wave equations," *Iran. J. Sci. Technol. Trans. A*, vol. 34, no. A2, 2010.
- [4] Y. Yousefi and K. K. Muminov, "A Simple Classification of Solitons," *arXiv Prepr. arXiv1206.1294*, 2012.
- [5] P. Deuflhard and M. Weiser, *Adaptive numerical solution of PDEs*. Walter de Gruyter, 2012.
- [6] R. S. Palais, "An introduction to wave equations and solitons," *Morningside Cent. Math. Chinese Acad. Sci. Beijing*, 2000.
- [7] Tesseral Technologies, "Finite-difference solution of Wave Equation in Tesseral," 2012. Available: <http://www.tesseral-geo.com/documentation/en/solutions/WaveEquationFinite-differenceCalculations.pdf>. Accessed: 03-Apr-2015.
- [8] E. Tucholski, "Wave and the One-Dimensional Wave Equation," *Underwater Acoustics and Sonar (Chapter 2)*, 2007. Available: <http://www.usna.edu/Users/physics/ejtuchol/documents/SP411/Chapter2.pdf>. Accessed: 12-Mar-2015.
- [9] G. G. Stokes, "On the theory of oscillatory waves," *Trans. Camb. Phil. Soc.*, vol. 8, pp. 441–455, 1847.

- [10] H. Segur, “Integrable models of waves in shallow water,” *Probab. Geom. Integr. Syst.*, pp. 345–371, 2008.
- [11] W. Hereman, “Shallow Water Waves and Solitary Waves,” *arXiv Prepr. arXiv1308.5383*, 2013.
- [12] V. Benci and D. Fortunato, “Variational Methods in Nonlinear Field Equations: Solitary Waves, Hylomorphic Solitons and Vortices,” *Springer Monogr. Math.*, 2014.
- [13] L. Debnath, *Nonlinear partial differential equations for scientists and engineers*. Springer Science and Business Media, 2011.
- [14] G. L. J. Lamb, *Elements of soliton theory*. 1980.
- [15] A. Sjöberg, *Numerical Solution of the Korteweg-de Vries Equation*. 1969.
- [16] I. Dağ and Y. Dereli, “Numerical solutions of KdV equation using radial basis functions,” *Appl. Math. Model.*, vol. 32, no. 4, pp. 535–546, 2008.
- [17] M. Sarboland and A. Aminataei, “On the numerical solution of the nonlinear Korteweg--de Vries equation,” *Syst. Sci. Control Eng. An Open Access J.*, vol. 3, no. 1, pp. 69–80, 2015.
- [18] R. K. Dodd, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, and H. C. Morris, “Solitons and nonlinear wave equations,” 1982.
- [19] B. Saka, “Cosine expansion-based differential quadrature method for numerical solution of the KdV equation,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 40, no. 5, pp. 2181–2190, 2009.
- [20] L. van Wijngaarden, “On the equations of motion for mixtures of liquid and gas bubbles,” *J. Fluid Mech.*, vol. 33, no. 03, pp. 465–474, 1968.
- [21] S. Leibovich, “Weakly non-linear waves in rotating fluids,” *J. Fluid Mech.*, vol. 42, no. 04, pp. 803–822, 1970.
- [22] K. Brauer, “The Korteweg-de Vries Equation: History, exact Solutions, and graphical Representation,” *Ger. Univ. Osnabrueck*, no. February, pp. 1–15, 2014.

- [23] A. J. S. Russell, “Report on Waves, Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science, 311-390.” John Murray, London, 1844.
- [24] R. K. Bullough, “‘The Wave’ ‘Par Excellence’, the Solitary Progressive Great Wave of Equilibrium of the Fluid: An Early History of the Solitary Wave,” in *Solitons*, Springer, 1988, pp. 7–42.
- [25] A. D. D. Craik, “The origins of water wave theory,” *Annu. Rev. Fluid Mech.*, vol. 36, pp. 1–28, 2004.
- [26] O. Darrigol, “The spirited horse, the engineer, and the mathematician: water waves in nineteenth-century hydrodynamics,” *Arch. Hist. Exact Sci.*, vol. 58, no. 1, pp. 21–95, 2003.
- [27] G. S. Emmerson, *John Scott Russell: A great Victorian engineer and naval architect*. J. Murray, 1977.
- [28] D. J. Korteweg and G. de Vries, “On the change of form of long Waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary Waves,” *Phil. Mag*, vol. 5, no. 39, p. 422_443, 1895.
- [29] J. Boussinesq, “Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d’un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond,” *J. Math. Pures Appl.*, pp. 55–108, 1872.
- [30] E. Fermi, J. Pasta, and S. Ulam, “Studies of nonlinear problems,” *Los Alamos Rep. LA-1940*, p. 978, 1955.
- [31] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, “Interaction of ‘solitons’ in a collisionless plasma and the recurrence of initial states,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 15, no. 6, p. 240, 1965.
- [32] N. J. Zabusky, “Fermi--Pasta--Ulam, solitons and the fabric of nonlinear and computational science: History, synergetics, and visiometricsa,” *Chaos An Interdiscip. J. Nonlinear Sci.*, vol. 15, no. 1, p. 15102, 2005.
- [33] T. Dauxois and M. Peyrard, *Physics of solitons*. Cambridge University Press,

2006.

- [34] A. T. Yilmaz and M. G. Weiss, “Cultural formulation: Depression and back pain in a young male Turkish immigrant in Basel, Switzerland.,” *Culture, Medicine and Psychiatry*, vol. 24, no. 2. pp. 259–272, 2000.
- [35] M. Remoissenet, “Waves Called Solitons: Concepts and Experiments Third Revised and Enlarged Edition.” New York: Springer-Verlag, 1999.
- [36] M. J. Ablowitz and P. A. Clarkson, *Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering*, vol. 149. Cambridge university press, 1991.
- [37] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, and H. Segur, “The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems,” *Stud. Appl. Math.*, vol. 53, pp. 249–315, 1974.
- [38] M. J. Ablowitz and H. Segur, *Solitons and the inverse scattering transform*, vol. 4. SIAM, 1981.
- [39] I. O. Egonte, “Numerical solution to Ordinary Differential Equations,” 2004.
- [40] G. W. Recktenwald, “Finite-Difference Approximations to the Heat Equation,” 2011.
- [41] G. Qingcheo, “Finite Difference Method,” *Advanced Training Workshop on Reser Voir Sedimentation Management (10-16 October 2007, Beijing China)*, 2007. Available: <http://www.irtces.org/zt/training2007/ppt/lecture2.pdf>. Accessed: 27-Apr-2015.
- [42] S. Kim, “Numerical Methods for Differential Equations.” Lexington, Kentucky, USA, 2003.
- [43] H. Goosse, P. Y. Barriat, W. Lefebvre, M. F. Loutre, and V. Zunz, *Introduction Climate Dynamics and Climate Modelling*. Université catholique de Louvain, 2008.
- [44] J. C. Strikwerda, *Finite difference schemes and partial differential equations*. Siam, 2004.
- [45] T.-R. Hsu, “Introduction to Finite-Difference Methods for Solving Differential

Equation (lecture notes),” 2015. Available: [www.engr.sjsu.edu/trhsu/Chapter 9 Intro to FDM.pdf](http://www.engr.sjsu.edu/trhsu/Chapter%209%20Intro%20to%20FDM.pdf). Accessed: 14-Jun-2015.

- [46] S. G. Rubin and R. A. Graves Jr, “A cubic spline approximation for problems in fluid mechanics,” *NASA STI/Recon Tech. Rep. N*, vol. 75, p. R-436, 1975.
- [47] R. M. Miura, C. S. Gardner, and M. D. Kruskal, “Korteweg-de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion,” *J. Math. Phys.*, vol. 9, no. 8, pp. 1204–1209, 1968.
- [48] L. R. T. Gardner, G. A. Gardner, and A. H. A. Ali, “Simulations of solitons using quadratic spline finite elements,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 92, no. 2, pp. 231–243, 1991.
- [49] A. Jeffrey and T. Kakutani, “Weak nonlinear dispersive waves: a discussion centered around the Korteweg-de Vries equation,” *Siam Rev.*, vol. 14, no. 4, pp. 582–643, 1972.
- [50] Y. A. Berezin and V. I. Karpman, “Nonlinear evolution of disturbances in plasmas and other dispersive media,” *Sov. Phys. JETP*, vol. 24, no. 5, pp. 1049–1056, 1967.
- [51] A. Can\ivar, M. Sari, and I. Dag, “A Taylor--Galerkin finite element method for the KdV equation using cubic B-splines,” *Phys. B Condens. Matter*, vol. 405, no. 16, pp. 3376–3383, 2010.

APPENDIX A. SONLU FARK FORMÜLLERİ

Birinci, ikinci, ve dördüncü dereceden sonlu fark formüllerini özetleyelim. Aşağıda, ($h > 0$) konumsal değişken ve $u_i = u(x_0 + ih)$ olarak alınmıştır.

Tek- Taraflı 1.mertebeden SF yöntemleri:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_0} &\approx \pm \frac{-u_0 + u_{\pm 1}}{h} \\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x_0} &\approx \frac{u_0 - 2u_{\pm 1} + u_{\pm 2}}{h^2} \\ \left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{x_0} &\approx \pm \frac{-u_0 + 3u_{\pm 1} - 3u_{\pm 2} + u_{\pm 3}}{h^3} \\ \left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_{x_0} &\approx \frac{u_0 - 4u_{\pm 1} + 6u_{\pm 2} - 4u_{\pm 3} + u_{\pm 4}}{h^4}\end{aligned}\tag{A.1}$$

2.mertebeden merkezi SF yöntemleri:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_0} &\approx \frac{u_1 - u_{-1}}{2h} \\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x_0} &\approx \frac{u_1 - 2u_0 + u_{-1}}{h^2} \\ \left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{x_0} &\approx \frac{u_2 - 2u_1 + 2u_{-1} - u_{-2}}{2h^3} \\ \left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_{x_0} &\approx \frac{u_2 - 4u_1 + 6u_0 - 4u_{-1} + u_{-2}}{h^4}\end{aligned}\tag{A.2}$$

Tek- Taraflı 2.mertebeden SF yöntemleri:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_0} &\approx \pm \frac{-3u_0 + 4u_{\pm 1} - u_{\pm 2}}{2h} \\
 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x_0} &\approx \frac{2u_0 - 5u_{\pm 1} + 4u_{\pm 2} - u_{\pm 3}}{h^2} \\
 \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_{x_0} &\approx \pm \frac{-5u_0 + 18u_{\pm 1} - 24u_{\pm 2} + 14u_{\pm 3} - 3u_{\pm 4}}{2h^3} \\
 \left. \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|_{x_0} &\approx \frac{3u_0 - 14u_{\pm 1} + 26u_{\pm 2} - 24u_{\pm 3} + 11u_{\pm 4} - 2u_{\pm 5}}{h^4}
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

4.mertebeden merkezi SF yöntemleri:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_0} &\approx \frac{-u_2 + 8u_1 - 8u_{-1} + u_{-2}}{12h} \\
 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x_0} &\approx \frac{-u_2 + 16u_1 - 30u_0 + 16u_{-1} - u_{-2}}{12h^2} \\
 \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_{x_0} &\approx \frac{-u_3 + 8u_2 - 13u_1 + 13u_{-1} - 8u_{-2} + u_{-3}}{8h^3} \\
 \left. \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|_{x_0} &\approx \frac{-u_3 + 12u_2 - 39u_1 + 56u_0 - 39u_{-1} + 12u_{-2} - u_{-3}}{6h^4}
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

APPENDIX B. THOMAS ALGORİTMASI

5-band sistemin doğrudan çözümü için algoritma:

Varsayalım ki 5-band sistemi aşağıdaki gibi olsun:

$$a_i U_{i-2}^{n+1} + b_i U_{i-1}^{n+1} + c_i U_i^{n+1} - d_i U_{i+1}^{n+1} - e_i U_{i+2}^{n+1} = f_i$$

burada

$$0 \leq i \leq N \quad \text{ve} \quad a_0 = b_0 = a_1 = a_{N-1} = d_N = e_N = 0.$$

İlk olarak:

$$\beta_0 = b_0, \quad \mu_0 = c_0, \quad \alpha_0 = \frac{d_0}{\mu_0}, \quad \lambda_0 = \frac{e_0}{\mu_0}, \quad \gamma_0 = \frac{f_0}{\mu_0}$$

ve

$$\begin{aligned} \beta_1 &= b_1, \quad \mu_1 = c_1 - \beta_1 \alpha_0 \\ \alpha_1 &= \frac{(d_1 - \beta_1 \lambda_0)}{\mu_1}, \quad \lambda_1 = \frac{e_1}{\mu_1}, \quad \gamma_2 = \frac{(f_1 - \beta_1 \gamma_0)}{\mu_1} \end{aligned} \quad \text{olsun}$$

Daha sonra aşağıdaki parametreler $i = 2, 3, \dots, N$ için hesaplanır:

$$\beta_i = b_i - a_i \alpha_{i-2}$$

$$\mu_i = c_i - \beta_i \alpha_{i-1} - a_i \lambda_{i-2}$$

$$\alpha_i = \frac{(d_i - \beta_i \lambda_{i-1})}{\mu_i}$$

$$\lambda_i = \frac{e_i}{\mu_i}$$

$$\gamma_i = \frac{(f_i - \beta_i \gamma_{i-1} - a_i \gamma_{i-2})}{\mu_i}$$

Buradan çözüm $i = N - 2, N - 3, \dots, 0$ için

$$U_N = \gamma_N$$

$$U_{N-1} = \gamma_{N-1} - \alpha_{N-1} U_N$$

ve

$$U_i = \gamma_i - U_{i+2} \lambda_i - U_{i+1} \alpha_i$$

şeklinde olur

APPENDIX C. BİLGİSAYAR KODLARI

// Birinci metod için KdV denklemleri tek soliton problemi

```
#include<iostream>

#include<math.h>

#include <stdio.h>

using namespace std;

int main()
{
    int i,j,KK,N=200,FINAL=600;

    double
H,K,MUU,EP,X,XS,T,AA,BB,C,DD,YH,SUM,ERROR,L2,C1,C2,C3,DIFFERENCE,AAA,
BBB,CCC;

    double U[N+1],UX[N+1],Z[N+5],Z1[N+5],Z2[N+5],A[N+1][5],B[N+1][5],F[N+1];

    double AL[N+1],BE[N+1],GA[N+1],MU[N+1],LA[N+1];

    FILE *KdV;

    KdV=fopen("KdV_Single_Soliton.dat","w+");

    cout.precision(6);

    H=0.01; K=0.005; XS=0.; T=0.; EP=1.; DD=-6.; C=0.3;

    MUU=4.84*pow(10.,-4); AA=sqrt(EP*C/MUU)/2.; BB=EP*C*AA;

    X=XS; ERROR=0.; L2=0.;

    for (i=0 ; i<=N ; i++){

        U[i]=Z[i+2]=3.*C*pow(1./cosh(AA*X+DD),2);

        DIFFERENCE=fabs(U[i]-Z[i+2]);

        L2+=pow(DIFFERENCE,2);

        if (DIFFERENCE>=ERROR) ERROR=DIFFERENCE;

        //          cout<<T<<"\t"<<X<<"\t"<<U[i]<<"\t"<<Z[i+2]<<"\n";

        //          fprintf(KdV,"%f\t%f\t%f\t%f\n",T,X,Z[i+2],DIFFERENCE);
```

```

X=X+H;
}
L2=sqrt(H*L2);
C1=C2=C3=0.;
for (i=0; i<=N; i++) {
    if (i==0 or i==N){
        if (i==0) UX[i]=(Z[i+3]-Z[i+2])/H;
        if (i==N) UX[i]=(Z[i+2]-Z[i+1])/H;
        C1+=H/3.*(Z[i+2]);
        C2+=H/3.*(Z[i+2]*Z[i+2]);
        C3+=H/3.*(Z[i+2]*Z[i+2]*Z[i+2]-3.*MUU/EP*UX[i]*UX[i]);
    }
    else{
        UX[i]=(Z[i+3]-Z[i+1])/(2.*H);
        if (i%2==0){
            C1+=H/3.*2.*(Z[i+2]);
            C2+=H/3.*2.*(Z[i+2]*Z[i+2]);
            C3+=H/3.*2.*(Z[i+2]*Z[i+2]*Z[i+2]-
3.*MUU/EP*UX[i]*UX[i]);
        }
        else{
            C1+=H/3.*4.*(Z[i+2]);
            C2+=H/3.*4.*(Z[i+2]*Z[i+2]);
            C3+=H/3.*4.*(Z[i+2]*Z[i+2]*Z[i+2]-
3.*MUU/EP*UX[i]*UX[i]);
        }
    }
}

cout << T << "\t" << L2*pow(10.,3) << "\t" << ERROR*pow(10.,3) << "\t" << C1
<< "\t" << C2 << "\t" << C3 << "\n";

Z[0]=Z[4];
Z[1]=Z[3];

```

```

Z[N+3]=Z[N+1];
Z[N+4]=Z[N];
for (i=0 ; i<=N+4 ; i++)
    Z1[i]=Z[i];
for (KK=1 ; KK<=FINAL ; KK++){
    T=T+K;
    for (int KL=1 ; KL<=5 ; KL++)
    {
        for(i=0 ; i<=N ; i++){
            AAA=-MUU/(4.*H*H*H);
            BBB=MUU/(2.*H*H*H)-EP*Z[i+2]/(4.*H);
            CCC=1./K;
            A[i][0]=AAA;
            A[i][1]=BBB;
            A[i][2]=CCC;
            A[i][3]=-BBB;
            A[i][4]=-AAA;
            B[i][0]=-AAA;
            B[i][1]=-BBB;
            B[i][2]=CCC;
            B[i][3]=BBB;
            B[i][4]=AAA;
        }
        for (i=0 ; i<=N+4 ; i++)
            Z[i]=Z1[i];
        for (i=0 ; i<=N ; i++){
            SUM=0.;
            for (j=0 ; j<=4 ; j++)
                SUM+=B[i][j]*Z[i+j];
            F[i]=SUM;
        }
    }
}

```

```

A[0][3]+=A[0][1];
A[0][4]+=A[0][0];
A[1][2]+=A[1][0];
A[N-1][2]+=A[N-1][4];
A[N][0]+=A[N][4];
A[N][1]+=A[N][3];
A[0][0]=A[0][1]=A[1][0]=0.;
A[N-1][4]=A[N][3]=A[N][4]=0.;
BE[0]=A[0][1];
MU[0]=A[0][2];
AL[0]=A[0][3]/MU[0];
LA[0]=A[0][4]/MU[0];
GA[0]=F[0]/MU[0];
BE[1]=A[1][1];
MU[1]=A[1][2]-BE[1]*AL[0];
AL[1]=(A[1][3]-BE[1]*LA[0])/MU[1];
LA[1]=A[1][4]/MU[1];
GA[1]=(F[1]-BE[1]*GA[0])/MU[1];
for (i=2 ; i<=N ; i++){
BE[i]=A[i][1]-A[i][0]*AL[i-2];
MU[i]=A[i][2]-BE[i]*AL[i-1]-A[i][0]*LA[i-2];
AL[i]=(A[i][3]-BE[i]*LA[i-1])/MU[i];
LA[i]=A[i][4]/MU[i];
GA[i]=(F[i]-BE[i]*GA[i-1]-A[i][0]*GA[i-2])/MU[i];
}
Z2[N+2]=GA[N];
Z2[N+1]=GA[N-1]-AL[N-1]*Z2[N+2];
for (i=N-2 ; i>=0 ; i--)
Z2[i+2]=GA[i]-Z2[i+4]*LA[i]-Z2[i+3]*AL[i];
Z2[0]=Z2[4];
Z2[1]=Z2[3];

```

```

        Z2[N+3]=Z2[N+1];
        Z2[N+4]=Z2[N];
        for (i=0; i<=N+4 ; i++)
        {
            YH=(Z2[i]-Z[i])*(1./2.);
            Z1[i]=Z[i];
            Z[i]=Z[i]+YH;
        }
    }
    for (i=0 ; i<=N+4 ; i++)
    {
        Z[i]=Z2[i];
        Z1[i]=Z2[i];
    }
    X=XS; ERROR=0.; L2=0.;
    for ( i=0 ; i<=N ; i++ ){
        U[i]=3.*C*pow(1./cosh(AA*X-BB*T+DD),2);
        DIFFERENCE=fabs(U[i]-Z[i+2]);
        L2+=pow(DIFFERENCE,2);
        if (DIFFERENCE>=ERROR) ERROR=DIFFERENCE;
        if (KK==FINAL)
            fprintf(KdV,"%f\t%f\t%f\t%f\n",T,X,Z[i+2],DIFFERENCE);
//      cout<<T<<"\t"<<X<<"\t"<<U[i]<<"\t"<<Z[i+2]<<"\t"<<DIFFERENCE<<"\n";
        X=X+H;
    }
    L2=sqrt(H*L2);
    C1=C2=C3=0.;
    for (i=0; i<=N; i++) {
        if (i==0 or i==N){
            if (i==0) UX[i]=(Z[i+3]-Z[i+2])/H;
            if (i==N) UX[i]=(Z[i+2]-Z[i+1])/H;

```

```

        C1+=H/3.*(Z[i+2]);
        C2+=H/3.*(Z[i+2]*Z[i+2]);
        C3+=H/3.*(Z[i+2]*Z[i+2]*Z[i+2]-3.*MUU/EP*UX[i]*UX[i]);
    }

    else{
        UX[i]=(Z[i+3]-Z[i+1])/(2.*H);
        if (i%2==0){
            C1+=H/3.*2.*(Z[i+2]);
            C2+=H/3.*2.*(Z[i+2]*Z[i+2]);
            C3+=H/3.*2.*(Z[i+2]*Z[i+2]*Z[i+2]-
3.*MUU/EP*UX[i]*UX[i]);
        }
        else{
            C1+=H/3.*4.*(Z[i+2]);
            C2+=H/3.*4.*(Z[i+2]*Z[i+2]);
            C3+=H/3.*4.*(Z[i+2]*Z[i+2]*Z[i+2]-
3.*MUU/EP*UX[i]*UX[i]);
        }
    }

}

if (KK%100==0)

    cout << T << "\t" << L2*pow(10.,3) << "\t" << ERROR*pow(10.,3) << "\t"
<< C1 << "\t" << C2 << "\t" << C3 << "\n";

}

fclose(KdV);

return 0;

}

```

// İkinci metod için KdV denklemleri tek soliton problemi

```
#include<iostream>

#include<math.h>

#include<stdio.h>

using namespace std;

int main()

{

    int i,j,KK,N=300,FINAL=600;

    double H,K,MUU,EP,X,XS,T,AA,BB,C,D,U[N+1],UX[N+1],A[N-1][6],B[N-1][6],Z[N+1],SUM,F[N+1],R,P,S,ERROR,DIFFERENCE=0.,C1,C2,C3,L2;

    double AL[N-1],BE[N-1],GA[N-1],MU[N-1],LA[N-1];

    FILE *KDV;

    KDV=fopen("Rebwar.dat","w+");

    H=0.01, K=0.005, XS=0.; T=0., EP=1.; MUU=4.84*pow(10.,-4); C=0.3;
    AA=sqrt(EP*C/MUU)/2.; D=-6.; BB=EP*C*AA;

    X=XS; ERROR=0.; L2=0.;

    for (i=0 ; i<=N ; i++){

        U[i]=Z[i]=3.*C*pow(1./cosh(AA*X+D),2);

        DIFFERENCE=fabs(U[i]-Z[i]);

        L2+=pow(DIFFERENCE,2);

        if (DIFFERENCE>=ERROR) ERROR=DIFFERENCE;

        fprintf(KDV,"%f\t%f\t%f\t%f\t%f\t%f\n",T,X,U[i],Z[i],DIFFERENCE);

        //      cout<<T<<"\t"<<X<<"\t"<<U[i]<<"\n";

        X=X+H;

    }

    L2=sqrt(H*L2);

    C1=C2=C3=0.;

    for (i=0; i<=N; i++) {

        if (i==0 or i==N){

            if (i==0) UX[i]=(Z[i+3]-Z[i+2])/H;

            if (i==N) UX[i]=(Z[i+2]-Z[i+1])/H;

            C1+=H/3.*(Z[i+2]);
```

```

        C2+=H/3.*(Z[i+2]*Z[i+2]);
        C3+=H/3.*(Z[i+2]*Z[i+2]*Z[i+2]-3.*MUU/EP*UX[i]*UX[i]);
    }

    else{
        UX[i]=(Z[i+3]-Z[i+1])/(2.*H);
        if (i%2==0){
            C1+=H/3.*2.*(Z[i+2]);
            C2+=H/3.*2.*(Z[i+2]*Z[i+2]);
            C3+=H/3.*2.*(Z[i+2]*Z[i+2]*Z[i+2]-
3.*MUU/EP*UX[i]*UX[i]);
        }
        else{
            C1+=H/3.*4.*(Z[i+2]);
            C2+=H/3.*4.*(Z[i+2]*Z[i+2]);
            C3+=H/3.*4.*(Z[i+2]*Z[i+2]*Z[i+2]-
3.*MUU/EP*UX[i]*UX[i]);
        }
    }

}

cout << T << "\t" << L2*pow(10.,1) << "\t" << ERROR*pow(10.,1) << "\t" << C1
<< "\t" << C2 << "\t" << C3 << "\n";

for (KK=1 ; KK<=FINAL ; KK++){
    T=T+K;
    for(i=2 ; i<=N-2 ; i++){
        R=MUU*K/(4.*H*H*H);
        P=MUU*K/(2.*H*H*H)-EP*K/(4.*H)*Z[i];
        S=1.+EP*K/2.*(Z[i+1]-Z[i-1])/(2.*H);
        A[i][1]=-R;
        A[i][2]=P;
        A[i][3]=S;
        A[i][4]=-P;
        A[i][5]=R;
    }
}

```

```

        B[i][1]=R;
        B[i][2]=-2.*R;
        B[i][3]=1.;
        B[i][4]=2.*R;
        B[i][5]=-R;
    }
    for ( i=2 ; i<=N-2 ; i++){
        SUM=0.;
        for (j=1 ; j<=5 ; j++)
            SUM+=B[i][j]*Z[i+j-3];
        F[i]=SUM;
    }
    A[2][1]=A[2][2]=A[3][1]=0.;
    A[N-3][5]=A[N-2][4]=A[N-2][5]=0.;
    BE[2]=A[2][2];
    MU[2]=A[2][3];
    AL[2]=A[2][4]/MU[2];
    LA[2]=A[2][5]/MU[2];
    GA[2]=F[2]/MU[2];
    BE[3]=A[3][2];
    MU[3]=A[3][3]-BE[3]*AL[2];
    AL[3]=(A[3][4]-BE[3]*LA[2])/MU[3];
    LA[3]=A[3][5]/MU[3];
    GA[3]=(F[3]-BE[3]*GA[2])/MU[3];
    for ( i=4 ; i<=N-2 ; i++){
        BE[i]=A[i][2]-A[i][1]*AL[i-2];
        MU[i]=A[i][3]-BE[i]*AL[i-1]-A[i][1]*LA[i-2];
        AL[i]=(A[i][4]-BE[i]*LA[i-1])/MU[i];
        LA[i]=A[i][5]/MU[i];
        GA[i]=(F[i]-BE[i]*GA[i-1]-A[i][1]*GA[i-2])/MU[i];
    }

```

```

Z[N-2]=GA[N-2];
Z[N-3]=GA[N-3]-AL[N-3]*Z[N-2];
for ( i=N-4 ; i>=2 ; i--){
    Z[i]=GA[i]-Z[i+2]*LA[i]-Z[i+1]*AL[i];
}
Z[0]=Z[1]=0.;
Z[N]=Z[N-1]=0.;
X=XS; ERROR=0.; L2=0.;
for (i=0 ; i<=N ; i++){
    U[i]=3.*C*pow(1./cosh(AA*X-BB*T+D),2);
    DIFFERENCE=fabs(U[i]-Z[i]);
    L2+=pow(DIFFERENCE,2);
    if (DIFFERENCE>=ERROR) ERROR=DIFFERENCE;
    if (KK%100==0.)
//      cout<<T<<"\t"<<X<<"\t"<<U[i]<<"\t"<<Z[i]<<"\n";
    fprintf(KDV,"%f\t%f\t%f\t%f\t%f\n",T,X,U[i],Z[i],DIFFERENCE);
    X=X+H;
}
L2=sqrt(H*L2);
C1=C2=C3=0.;
for (i=0; i<=N; i++) {
    if (i==0 or i==N){
        if (i==0) UX[i]=(Z[i+3]-Z[i+2])/H;
        if (i==N) UX[i]=(Z[i+2]-Z[i+1])/H;
        C1+=H/3.*(Z[i+2]);
        C2+=H/3.*(Z[i+2]*Z[i+2]);
        C3+=H/3.*(Z[i+2]*Z[i+2]*Z[i+2]-3.*MUU/EP*UX[i]*UX[i]);
    }
    else{
        UX[i]=(Z[i+3]-Z[i+1])/(2.*H);
        if (i%2==0){

```

```

        C1+=H/3.*2.*(Z[i+2]);
        C2+=H/3.*2.*(Z[i+2]*Z[i+2]);
        C3+=H/3.*2.*(Z[i+2]*Z[i+2]*Z[i+2]-
3.*MUU/EP*UX[i]*UX[i]);
    }
    else{
        C1+=H/3.*4.*(Z[i+2]);
        C2+=H/3.*4.*(Z[i+2]*Z[i+2]);
        C3+=H/3.*4.*(Z[i+2]*Z[i+2]*Z[i+2]-
3.*MUU/EP*UX[i]*UX[i]);
    }
}
}
if (KK%100==0)
    cout << T << "\t" << L2*pow(10.,1) << "\t" << ERROR*pow(10.,1) << "\t"
<< C1 << "\t" << C2 << "\t" << C3 << "\n" ;
}
fclose(KDV);
return 0;
}

```

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Rebwar Mohammed MAWLOOD

Doğum Tarihi ve Yeri : 26.09.1986 - Erbil, Irak

E-posta adresi : rebwarmath86@gmail.com

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Koya Üniversitesi, 2006-2010

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, 2013-2016

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLERİ

Matematik öğretmeni, Macidaua Lisesi, 2010-2013