

SONLU FARKLAR YÖNTEMİNİN TAŞIYICI
SİSTEMLERİN DİFERENSIYEL DENKLEMLERİNİN
ÇÖZÜMÜNE UYGULANMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
(MATEMATİK)

Sedat ÇEVİKEL

Eylül 1988

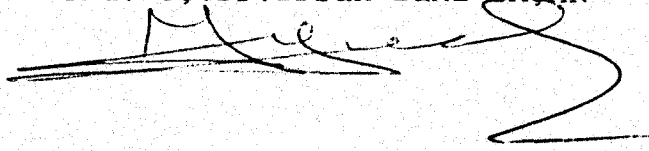
ANKARA

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

T. C.
Yükseköğretim Kurulu
Dokümantasyon Merkezi

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

1 Danışman
Yrd.Doç.Dr.İrfan Baki YAŞAR

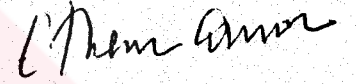


Sınav Jürisi

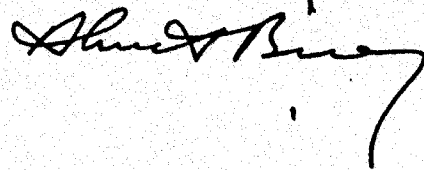
Başkan : Prof.Dr.Muhsin MERT

Üye : Yrd.Doç.Dr.İrfan Baki YAŞAR

Üye : Yrd.Doç.Dr.İ.Ethem ANAR



Bu Tez Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Tez Yazım Esaslarına Uygundur.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZ	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SEMBOLLER	v
TABLOLARIN LİSTESİ	vi
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	vii
GİRİŞ	1
BÖLÜM 1	
TEMEL KAVRAMLAR	3
BÖLÜM 2	
SONLU FARKLAR	18
2.1. Eşit Aralıklar İçin Sonlu Farklar.....	18
2.1.1. İleri Farklar.....	19
2.1.2. Geri Farklar.....	24
2.1.3. Merkezi Farklar	26
2.2. Türev ve Merkezi Fark Operatörleri	
Arasındaki İlişkiler	30
2.3. Basit Sonlu Farklar Yönteminin Taylor	
Serilerinden Yararlanılarak İfadesi ..	32
2.4. Seçilen Nokta Apsislerinin Değişken	
Aralıklı Olması	36
2.5. Üç noktalı Konumun Merkezi Farklarda	
İncelenmesi	36
2.6. Simpson Yaklaşımı, Stirling ve Bessel	
Yaklaşım Formülleri	51

BÖLÜM 3

SONLU FARKLARIN HERMİTE SAYISAL ÇÖZÜM

YÖNTEMİNE UYGULANMASI 53

3.1. Türevlerden Yararlanma ve Hermite'nin
Yaklaşımı 53

3.2. Bir Boyutlu Hermite Operatörlerinin
Eşit Aralıklarda Taylor Serileri ile
Elde Edilmesi 55

3.3. Bir Boyutlu Hermite Yönteminin, Farklı
Aralıklar İçin Genelleştirilmesi..... 60

BÖLÜM 4

SONUÇLARIN KARŞILAŞTIRILMASI VE ÖNERİLER 70

4.1. Eşit Aralıklar İçin Uygulama Sonuç-
ları 70

4.2. Değişken Aralıklar İçin Uygulama
Sonuçları 71

4.3. Öneriler 72

KAYNAKLAR 74

EK

HERMİTE SAYISAL ÇÖZÜMÜN BİLGİSAYAR

PROGRAMI E-1

ÖZGEÇMİŞ

SONLU FARKLAR YÖNTEMİNİN TAŞIYICI
SİSTEMLERİN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİNİN
ÇÖZÜMÜNE UYGULANMASI
(Yüksek Lisans Tezi)

Sedat ÇEVİKEL
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Eylül 1988

ÖZ

Bu çalışmada, sonlu farklar yöntemi yük taşıyıcı sistemlerle ilgili differansiyel denklemlerin çözümünde, sayısal hataların en aza indirilmesi için bir boyutlu Hermite sayısal çözüm yöntemi kullanılmıştır. Eşit ve değişken aralıklar için gerekli formüllerin çıkarılması bu çalışmanın ana hedefi olarak seçilmiştir.

AN APPLICATION OF THE FINITE DIFFERENCE
METHOD TO THE SOLUTION OF DIFFERENTIAL
EQUATIONS FOR LOAD BEARING SYSTEMS

(M.Sc. Thesis)

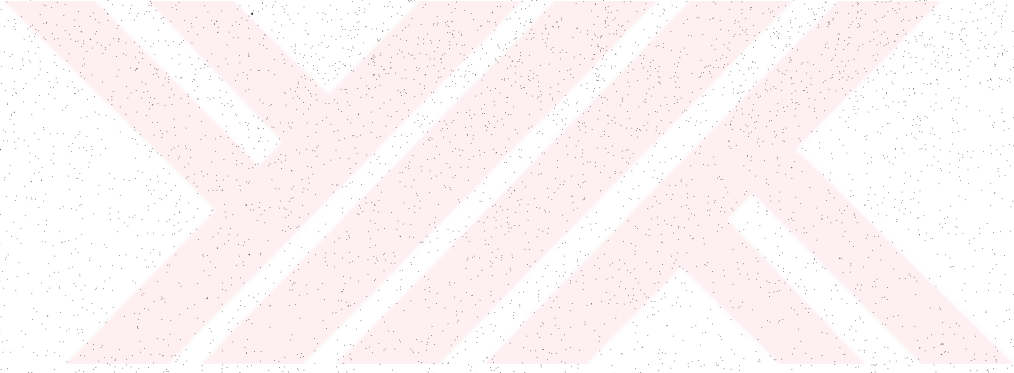
Sedat ÇEVİKEL
GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
September 1988

ABSTRACT

In this study, finite difference method has been applied to the solution of differential equations associated with the load bearing systems. One-dimensional Hermite numerical solution technique has been employed in order to minimize the numerical errors. The derivation of the formulas necessary for equal and variable intervals has been chosen as the primary aim of the study.

TEŞEKKÜR

Uygulamalı Matematik dalında çalışma yapmama vesile olan, bu çalışmamda değerli vakitlerini esirgemedi bana ayıran ve her adımda bilgisine başvurduğum Sayın Hocam Yrd.Doç.Dr. İ. Baki YAŞAR'a , ayrıca bilgilerinden yararlandığım Sayın Hocam Yrd.Doç.Dr. M.Emin TÖZÜN'e teşekkür ederim.



SEMBOLLER

<u>Sembol</u>	<u>Anlam</u>
Δ	İleri fark operatörü
∇	Geri fark operatörü
δ	Merkezi fark operatörü
$D = \frac{d}{dx}$	Türev operatörü
R_n	Hata terimi (= kalan)
C_k^r	Kombinasyon operatörü
C_i^*	Newton oran katsayıları
S_i	Hermite toplama operatörü
D_i	Hermite fark operatörü
ϕ_R	Hermite hata terimi
q	Birim uzunluktaki yük miktarı
σ	Gerilme operatörü
I_x	x-eksenine göre atalet momenti
E	Malzemenin elastisite modülü
M	Moment operatörü
$\underline{G}$	Oran apsisleri matrisi
$\underline{X}$	Hermite operatörleri matrisi
B	Sağ yan kolon matrisi
v	Düşey yerdeğiştirme (vertical)

TABLolarIN LİSTESİ

<u>Tablo</u>		<u>Sayfa</u>
Tablo 1.	İleri farklar tablosu.....	23
Tablo 2.	Geri farklar tablosu.....	25
Tablo 3.	Eşit aralıklarda merkezi farklar tablosu.....	29
Tablo 4.	İleri, merkezi ve geri farklar ara- sındaki ilişki tablosu.....	29
Tablo 5.	Basit sonlu farklar yönteminin yak- laşık formülleri.....	40
Tablo 6.	Sonlu farklar formüllerinin operatör gösterimi.....	41
Tablo 7.	Çeşitli çubuk sistemlerdeki sınır şartları.....	42
Tablo 8.	Simpson yaklaşımı.....	52
Tablo 9.	Stirling ve Bessel yaklaşım formül- leri (y_{i-1} , y_i bilinen değerler.)...	52
Tablo 10.	Bir boyutlu Hermite operatörlerinin hesaplanması için oluşan denklem sistemi.....	63
Tablo 11.	Operatörlerin bulunması için hazır- lanan programın akış diyagramı	64

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

<u>Şekil</u>		<u>Sayfa</u>
Şekil 1.	Lineer enterpolasyon	8
Şekil 2.	Lineer denklem sistemlerinin çözümü için gerekli yöntemlerin bilgisayar işlem zamanları	11
Şekil 3.	Taşıyıcı sisteme etkiyen yük çeşit- leri	13
Şekil 4.	Mesnetler ve tepki kuvvetleri	13
Şekil 5.	İzostatik, tek açıklıklı kirişler...	14
Şekil 6.	Uzama çubuğu	16
Şekil 7.	(ϵ , σ) diyagramı	16
Şekil 8.	Bir kesitin atalet momenti	17
Şekil 9.	Eşit aralıklarda yaklaşım formülü...	18
Şekil 10.	Eşit aralıklarda ordinat farklar ...	19
Şekil 11.	Eşit aralıklı merkezi farklarda nokta apsisleri	27
Şekil 12.	İleri farklarda eşit aralıklı x_i noktaları	30
Şekil 13.	Merkezi farklar	32
Şekil 14.	Değişken aralıklı merkezi farklar ..	36
Şekil 15.	Sözkonusu giriş için 3 ve 5'li konum- daki çökmeler	43
Şekil 16.	z-mesafedeki noktanın momenti	46

<u>Şekil</u>		<u>Sayfa</u>
Şekil 17.	Elastik eğrinin üçlü konum ile eşit iki aralığa ayrılması	47
Şekil 18.	Merkezi farklarda 5'li konumdaki giriş	49
Şekil 19.	Merkezi farklarda apsis indisleri.	55
Şekil 20.	Hermite yönteminin farklı aralıklar için nokta oran apsisleri	60
Şekil 21.	Değişken aralıklarda Hermite çözümü için nokta oran apsisleri..	65
Şekil 22.	Değişken aralıkların sıkıştırılması seçimi ile Hermite çözümü	68

GİRİŞ

Günümüzde teknolojik alandaki gelişme, bilim dalları arasındaki etkileşimi büyötmektedir.

Mühendislik bilimlerindeki pozitif gelişmenin matematiksel metodların kullanılması ve yenilenmesi ile mümkün olduğu herkes tarafından bilinmektedir. Temel bilimlerin, özellikle matematiğin diğör bilim dalları üzerindeki etkinliğı artık araştırmacılar tarafından kabul edilmiş bulunmaktadır.

Geçen yüzyıla kadar mühendislik bilimlerinin problemleri ilkel hesap araçları yada elle yapıılıyor, sorunlar özel şartlara göre kıyaslanarak giderilmeye çalışılıyor. Günümüzde araştırmacıların düşünce ufkunu genişleten çağımızın görkemli makinaları olan bilgisayarlarla büyük hacimli matematiksel problemlerin çözümü optimum hatalı sonuçlara varılarak yapılmaktadır.

Ancak günümüzdeki bu çalışmaların verimliliğı, öncelikle matematiğin olumlu bir şekilde uygulama alanlarına aktarılması ile arttırılabilir.

Bu çalışmada, matematiğin en tanınmış çözüm metodlarından olan *Sonlu Farklar Metodu* ele alınarak ileri bir aşaması olan *Bir boyutlu Hermite Sayısal Çözüm Yöntemi* ne uygulanmıştır. Bu yöntemlerin *Elastisite Teorisi* ne aktarılması, farklı geometrik şekildeki taşıyıcı sistemlere uygulanabilir oluşunu ve birçok kolay-

lıkları beraberinde getirmiştir. Karşılaşılan denklem sistemleri, farklar ve türev arasındaki ilişkiler kurularak çözüm için sadece geometri ve yükleme sınır şartlarının verilmesi ile hesaplamaları gerçekleştirilmiştir. Bu çalışma dört bölümden oluşturulmuştur.

Birinci bölümde temel kavramlara yer verilerek, mekanik ve kinematik büyüklüklerin tanımı ile aralarındaki bağıntılar (taşıyıcı sistemler yükleme konumları, denge şartları ve ilişkileri v.b.) açıklanmıştır.

İkinci bölümü sonlu farklar yöntemlerinin (ileri, geri ve merkezi farklar) incelenmesi oluşturmaktadır.

Üçüncü bölümde ise sonlu farklar yönteminin ileri aşaması olan bir boyutlu Hermite sayısal çözüm yöntemine uygulanması ve genelleştirilmesi yer almıştır.

Son bölümü, diğer bölümlerdeki eşit ve değişken aralıklar için elde edilen sonuçların kıyaslanması ve öneriler kısmı meydana getirmiştir.

Hermite sayısal çözüm yöntemi, Alman matematikçi ve fizikçisi olan ZURMÜHL, R. [1] tarafından 1957 ve 1965 de ele alınmıştır. Yöntemin matematiksel ayrıntısını ve diğer yöntemlerden üstünlüklerini ortaya koymuştur.

Mühendislik dalı olarak inşaat mühendisliğinde ele alınan bu yöntem değişken aralık ve ızgara konumu ile TÖZÜN, M.E. [2] tarafından 1983 de ele alınarak, farklı sınır şartlarını içeren sistemlere uygulamıştır.

BÖLÜM I

TEMEL KAVRAMLAR

1.1. TEOREM (*Rolle teoremi*):

Bir $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı ve sürekli bir $f(x)$ fonksiyonu, bu aralığın her noktasında türevlenebilirse ve $f(a)=f(b)=0$ ise $f'(x_1)=0$ olacak şekilde söz konusu aralıkta ($a < x_1 < b$) en az bir x_1 değeri vardır [3].

1.2. TEOREM (*Ortalama teoremi*):

$f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında tanımlı, sürekli ve türevlenebilirse söz konusu aralıkta en az bir x_1 değeri için

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_1) , a < x_1 < b \quad (1.1)$$

dir [3].

1.3. TEOREM (*Taylor ortalama teoremi*):

Bir $[a,b]$ aralığında tanımlı ve sürekli $f(x)$ fonksiyonu (a,b) de ardışık türevlere sahip ise sözü edilen aralıkta

$$f(b)=f(a)+(b-a).f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}.f''(a)+\dots+ \\ +\frac{(b-a)^n}{n!}.f^{(n)}(a)+R_n \quad (1.2)$$

olacak şekilde bir ξ noktası mevcuttur. R_n terimine

kalan adı verilir. Kalan terim aşağıdaki formlar ile ifade edilebilir.

$$\text{LAGRANGE: } R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi) \cdot (b-a)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad a < \xi < b \quad (1.3)$$

$$\text{CAUCHY : } R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi) \cdot (b-\xi)^n (b-a)}{n!}, \quad a < \xi < b \quad (1.4)$$

dir [3].

1.4. TANIM (Taylor serisi):

Taylor ortalama teoremindeki (1.2) bağıntısı R_n 'in Lagrange şekli kullanılarak (a,b) deki x ve x_0 için,

$$\begin{aligned} f(x) = & f(a) + \frac{(x-a)}{1!} \cdot f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \\ & + \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \end{aligned} \quad (1.5)$$

şeklinde tanımlanan ifadeye x 'in a noktası civarında *ka-
lanlı Taylor serisi* denir. $f(x)$ fonksiyonunu bir polino-
ma yaklaştırmak için kullanılır.

Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ ise sonsuz seriye $f(x)$ 'in $x=a$ cıva-
rında *Taylor serisi* denir [3].

1.5. TANIM (Faktöriyel polinomu):

Faktöriyel polinomlar; n pozitif bir sayı olmak üzere,

$$y_k = k^{(n)} = k(k-1) \dots (k-n+1) \quad (1.6)$$

ile belirtilir. Bu polinomlar, uygun özelliklerinden do-
layı sonlu farklar teorisinde önemli bir rol oynarlar.

Bir faktöriyel polinomun çeşitli farkları, yine faktöri-
yel polinomlardır. Özellikle ilk fark için x 'in kuvveti-

ni hatırlatan,

$$\Delta k^{(n)} = n.k^{(n-1)} \quad (1.7)$$

farkına karşılık gelir. Sıfırdan yüksek farklar için,

$$\Delta^n k^{(n)} = n! \quad (1.8)$$

yazılabilir. İki terimli katsayılar (*Binomial*),

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{k^{(n)}}{n!} \quad (1.9)$$

formülü ile, faktöriyel polinomlara bağlıdır. Bundan dolayı bir sonlu fark formülünün şekli olan,

$$C_{k+1}^{n+1} - C_k^{n+1} = C_k^n \quad (1.10)$$

bağıntısı bu polinomların bazı özelliklerini paylaşmaktadır. Faktöriyel polinomların tanımı doğrudan doğruya,

$$k^{(n+1)} = (k-n).k^{(n)} \quad (1.11)$$

bağıntısını verir [4].

1.6. TANIM (*Newton polinomu*):

Düzenlenmiş polinomlar, sonlu farklar ve faktöriyel polinomları cinsinden ifade edilebilir. Toplam formülü,

$$y_k = \sum_{i=0}^n \binom{k}{i} \cdot \Delta^i y_0 \quad (1.12)$$

ispatlanmış ve sıralanmış polinom için direkt olarak aşağıdaki şekilde yazılabilen Newton formülüne götürür.

$$p_k = \sum_{i=0}^n \binom{k}{i} \cdot \Delta^i y_0 \quad (1.13)$$

Newton formülünün alternatif bir şekli, x_k argümanı cinsinden $x_k = x_0 + k.h$ kullanılarak bulunabilir, aşağıdaki

gibi ispat edilebilir.

$$p(x_k) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h}(x-x_0)(x-x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x_k-x_{n-1}) \quad (1.14)$$

dir. Düzenleme noktaları $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ dir. Bu noktalarda polinom $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ değerleri alır [4].

1.7. TANIM (Taylor polinomu):

Bir x_0 argümanı, polinomun değerleri ve n tane ar-
dışık türevleri verilen $y(x)$ fonksiyonuna çakıştırabil-
mek için gereklidir. Yani,

$$p^{(k)}(x_0) = y^{(k)}(x_0) , (k=0,1,2,\dots,n) \quad (1.15)$$

şeklinde bir polinomun varlığı ve tekliğinin mevcut ol-
ması klasik bir analiz işlemler sonucudur.

Taylor formülü, bir polinom şeklinde olup

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \quad (1.16)$$

ifadesi ile verilebilir. Taylor polinomunun hatası, $y(x)$
fonksiyonuna bir yaklaşım olarak hesaplandığında

$$y(x)-p(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x y^{(n+1)}(x_0) \cdot (x-x_0)^n dx_0 \quad (1.17)$$

ile verilebilir. Integral formülüne (1.3) teoremi uygu-
landığında Lagrange hata formülü elde edilir.

$$R_n = y(x)-p(x) = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1} , x < \xi < x_0 \quad (1.18)$$

dir [4].

Eğer $y(x)$ in türevleri, n 'den bağımsız olarak sınırlanmışsa, o zaman verilen x noktalarının aralıkları üzerindeki verilmiş toleranstan aşağıdaki $|y(x)-p(x)|$ 'i küçültmeye yarayacak ihtiyaç duyulan n derecelerini hesaplamak için diğer hata formüllerine başvurulur.

Özelliği olan analitik fonksiyonlar, $n \rightarrow \infty$ olacak şekilde, verilmiş bir aralıkta bütün x noktaları için sıfır limitindedir. Bu tip fonksiyonlar

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{y^{(i)}(x_0)}{i!} (x-x_0)^i \quad (1.19)$$

Taylor serisince açıklanabilir.

Binomial seriler ise, Taylor serileri nedeniyle önemlidir. $-1 < x < 1$ değerleri için

$$(1+x)^p = \sum_{i=0}^{\infty} C_p^i \cdot x^i \quad (1.20)$$

alınır [4].

1.8. TANIM (Enterpolasyon):

Enterpolasyon, bir $f(x)$ fonksiyonunun $x_0, x_1, \dots, x_n$ gibi ayrık noktalarda verilen $f_0, f_1, \dots, f_n$ değerlerini kullanarak bu fonksiyonun daha basit ve bilinen bir $F(x)$ fonksiyonu ile ifade edilmesi işlemidir. $F(x)$ 'e *enterpolasyon fonksiyonu* denir. Bu tip fonksiyonlar sonlu farklar yönteminde kullanılarak sağlıklı çözümler elde edilebilir [5].

1.9. TANIM (Lineer enterpolasyon):

$[a, b]$ de bir $f(x)$ fonksiyonu verilmiş ise enterpo-

lasyon formülü olarak

$$F(x) = Ax + B \quad (1.21)$$

kullanılarak

$$f(a) = F(a) , f(b) = F(b) \quad (1.22)$$

bağıntıları sağlanmalıdır. Bu nedenle

$$A.a + B = f(a) , A.b + B = f(b) \quad (1.23)$$

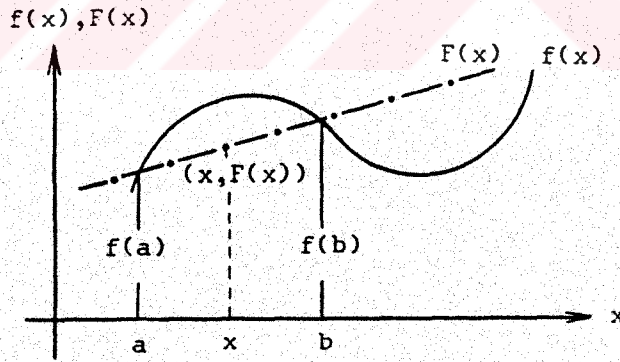
ifadesindeki A ve B katsayıları

$$A = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} , B = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} \quad (1.24)$$

şeklindedir. Böylece $F(x)$,

$$F(x) = \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right).x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} \quad (1.25)$$

olur. Yapılan işlemler Şekil 1.'de gösterilmiştir.



Şekil 1. Lineer enterpolasyon

Lineer enterpolasyondaki kesme yanlışı

$$R(x) = f(x) - F(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c), \quad a < c < b \quad (1.26)$$

ile verilir. $f(x)$ birinci dereceden bir fonksiyon oldu-

ğundan $f''(x) = 0$ dır. Yanlış formülündeki üst limit

$$|R(x)| = |f(x) - F(x)| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \cdot M \quad (1.27)$$

şeklinde verilebilir. Burada $|f''(x)| \leq M$ ile sınırlıdır [5].

1.10. Lineer denklem sistemleri

Bölüm 2 ve 3 de oluşturulan denklem takımlarının çözümü için aşağıdaki (1.10.1), (1.10.2) teoremleri ve (1.10.3) tanımını verelim.

1.10.1. TEOREM

n bilinmeyenli ve m denklemlili $G.X = 0$ sisteminde $\text{rank } G = p$ ise çözüm uzayının boyutu $(n-p)$ dir. $n = p$ ise aşıkâr çözüm, $p \leq m \leq n$ olması halinde aşıkâr olmayan çözümler vardır.

Eğer $m = n$ olması halinde aşıkâr olmayan çözümlerin olabilmesi için gerek ve yeter şart G 'nin singüler olması ($\det G = 0$) gerekir [6].

1.10.2. TEOREM

$G.X = 0$ lineer homojen denklem sisteminin G matrisinin satırca indirgenmiş eşolon formu R ise, $G.X = 0$ ve $R.X = 0$ sistemlerinin çözümü aynıdır [6].

1.10.3. TANIM (ilaveli = genişletilmiş matris):

$G.X = B$ lineer denklem sisteminde aşağıda tanımlanan $G = [GB]$ matrisine ilaveli = genişletilmiş matrisi denir.

$$G = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

şeklindedir. Eğer,

$$\text{rank } G = \text{rank } G \quad (1.29)$$

ise sistemin bir çözümü vardır. Eğer,

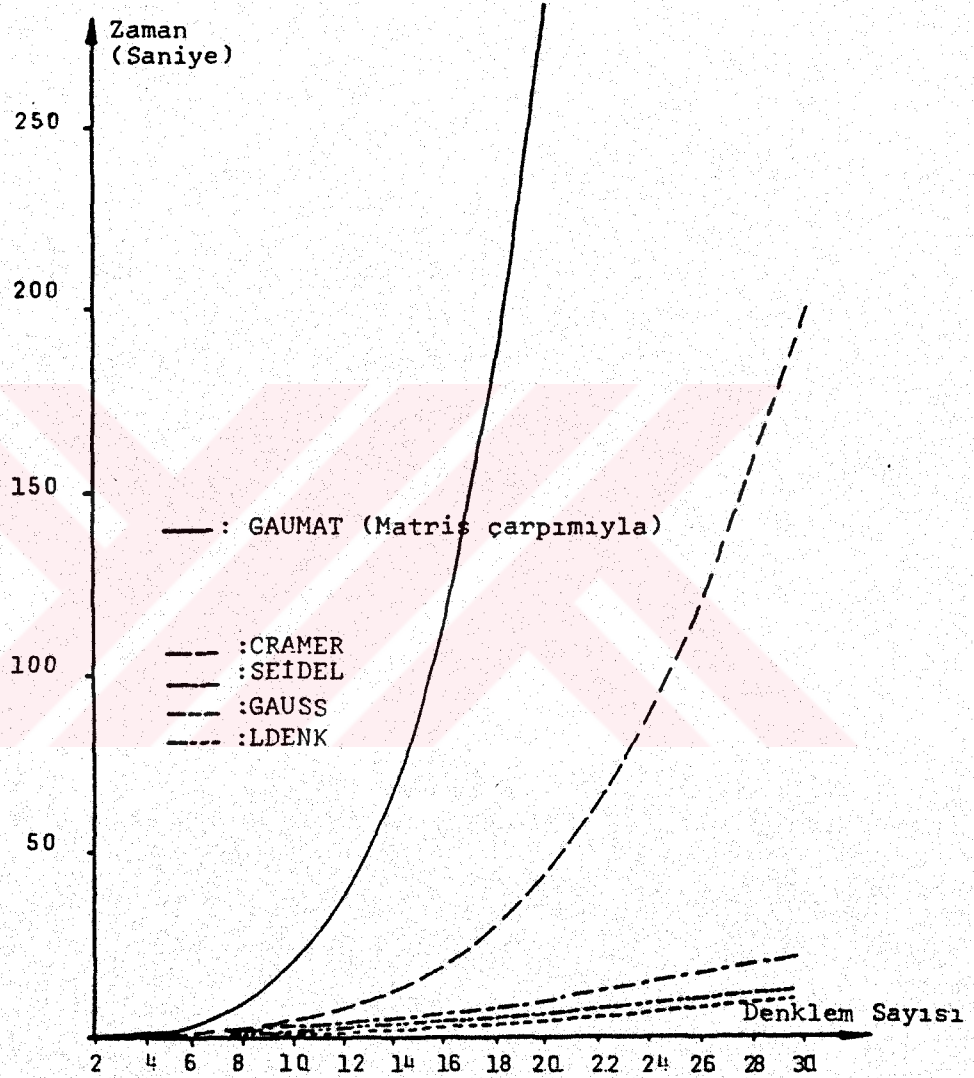
$$\text{rank } G = p < n \quad (1.30)$$

ise sistemin $(n-p)$ tane lineer bağımsız çözümü vardır [6].

Önceki çalışmalarda lineer denklem sistemlerinin çözümleri, optimum süre bakımından farklı yöntemlerle incelenmiş olup, Şekil 2.' deki grafik elde edilmiştir [5].

Bu yöntemler arasında en kısa sürede çözümü gerçekleştiren yöntemin *Gauss eliminasyonu (yoketme)* olduğu gözlenmiştir.

Sonraki bölümlerde elde edilecek olan lineer denklem sistemlerinin çözümünde Gauss eliminasyonu yöntemi kullanılacaktır.



Şekil 2. Lineer denklem sistemlerinin çözümü için gerekli yöntemlerin bilgisayar işlem zamanları

1.11. TANIM (Taşıyıcı sistem):

Bir mühendislik yapısına etki eden çeşitli kuvvetleri, emniyet sınırları içinde taşıyan ve elemanları aracılığı ile bu kuvvetleri zemine aktaran sistemlere taşıyıcı sistemler denir.

Bir boyutlu taşıyıcı sistemlere çubuk sistemler de denilir. Bunlar dolu kesitli veya kafes sistem şeklinde olabilirler. İki boyutlu sistemler; levha, plak ve kabuk v.b. sistemler şeklinde karşımıza çıkarlar. Üç boyutlu sistemler, uzay kafes sistemlerdir [7].

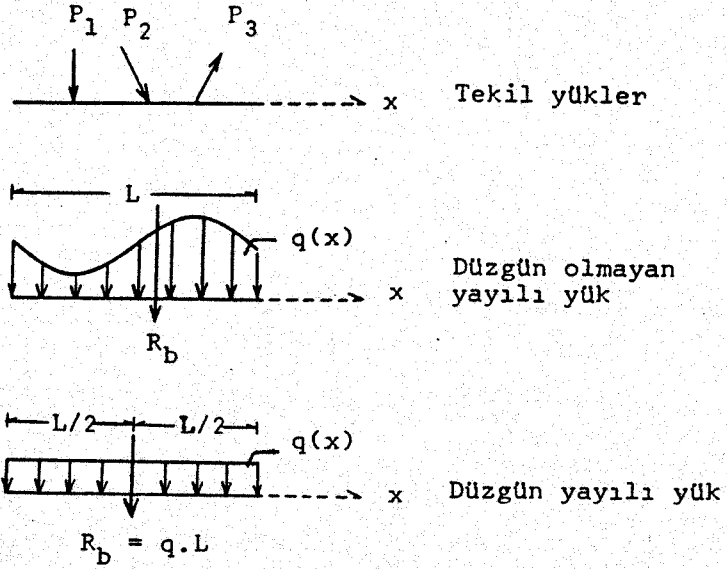
1.12. TANIM (Dış kuvvetler, yükler):

Yükler, taşıyıcı sisteme etkiyen tekil ve yayılı kuvvetlerdir. Yayılı yükler doğrusal yada herhangi bir alana etkiyen kuvvetler olabilirler. Birinci tür yayılı yük, birim boya etki eden kuvvetler (kg/m , ton/m , N/m , v.b.), ikinci tür yayılı yük, birim alana etkiyen kuvvet olup (kg/m^2 , ton/m^2 , N/m^2 , v.b.) boyutlarındadır. Denge problemlerinin çözümünde yayılı yükler yerine bunların tümünün yaptığı etkiyi tek başına üstlenen bileşke (R_D) tekil kuvveti alınarak hesaplamalar yapılır [7]. Yük çeşitleri geometrik olarak Şekil 3.'de gösterilmiştir.

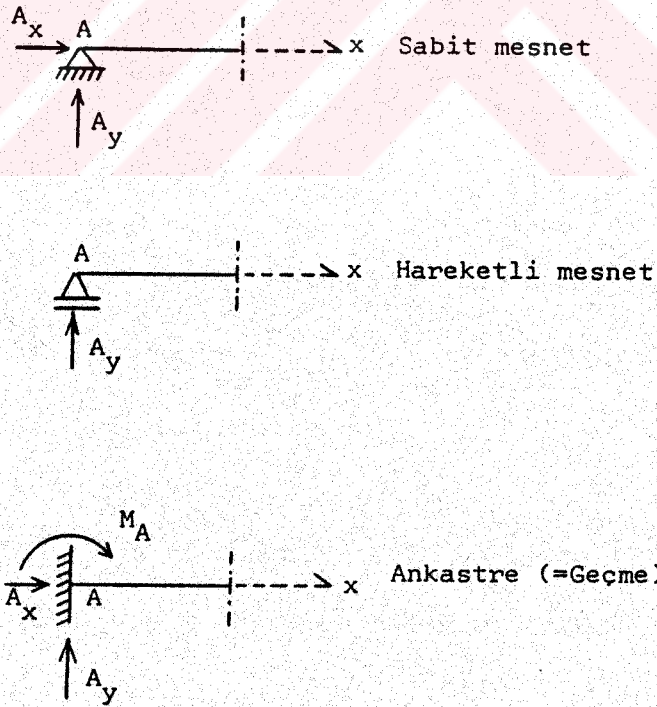
1.13. TANIM (Mesnet ve tepki kuvvetleri):

Taşıyıcı sistemlerin dış ortamla (zeminle) birleştiği noktalara mesnet, burada oluşan kuvvetlere tepki kuvvetleri denir. Çeşitleri Şekil 4.'de verilmiştir.

[7].



Şekil 3. Taşıyıcı sisteme etkiyen yük çeşitleri

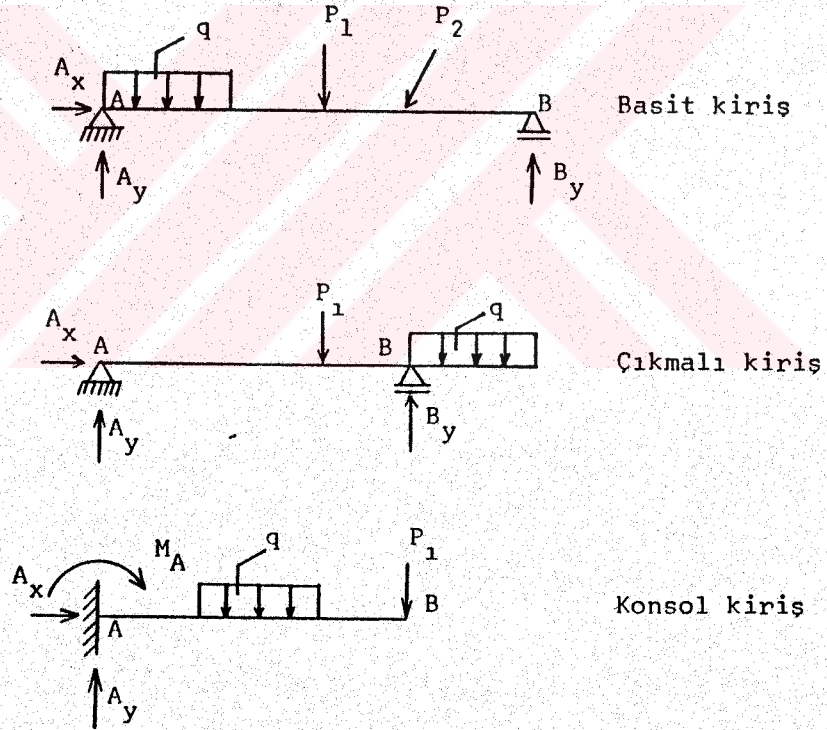


Şekil 4. Mesnetler ve tepki kuvvetleri

1.14. TANIM (izostatik ve hiperstatik sistemler):

Taşıyıcı sisteme etki eden dış ve iç kuvvetlerin hesabı için $\Sigma P_x = 0$, $\Sigma P_y = 0$ ve $\Sigma M = 0$ denge denklemleri yeterli ise bu sistemlere izostatik, yeterli değil ise hiperstatik sistem adı verilir [7].

Bu çalışmada izostatik sistemler ele alınacaktır. İzostatik sistemlerde hesabı istenen kuvvet sayısı kadar denklem vardır. Şekil 5.' de izostatik sistemler görülmektedir.



Şekil 5. İzostatik, tek açıklıklı kirişler

1.15. TANIM (Elastisite modülü):

Taşıyıcı sistemleri ve kuvvetleri aktarıcı elemanların yapısındaki karakteristik özellikleri (kısalma, uzama v.b.) belirleyen bir büyüklüktür. E notasyonu ile gösterilir.

Şekil 6.' da görülen uzama çubuğunun; ilk kesiti F_0 , ilk uzunluğu L_0 , etki eden kuvvet P , son kesit F , son uzunluk L , çubuktaki gerilme σ ve orantılılık sınırı σ_p olmak üzere,

$$\epsilon = \frac{L - L_0}{L_0} \quad \text{uzama oranı} \quad (1.31)$$

$$\frac{P}{F_0} = \sigma \quad \text{gerilme olarak} \quad (1.32)$$

tanımlanır. σ gerilmesi, σ_p sınırının altında kaldıkça cisim *HOOKE KANUNU'* na uyar. Bu değişim şekil (1.7) de görülmektedir. (ϵ, σ) diyagramı bu bölge için bir doğru parçası ile gösterilir.

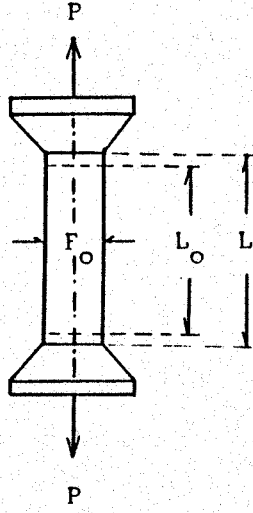
Denklemleri,

$$\sigma = E \cdot \epsilon, \quad (\sigma \leq \sigma_p) \quad (1.33)$$

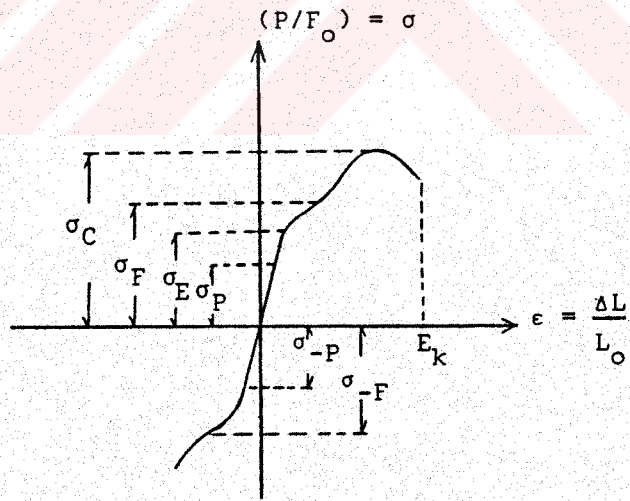
olan doğrunun eğimi, deneye tabi tutulan malzemenin elastisite modülünü verir [8].

$$E = \tan \alpha = \text{eğim} \quad (1.34)$$

taşıyıcı sistemlerde kullanılan yapı malzemesinin (çelik, ahşap, betonarme, v.b.) elastisite modülü farklılıklar gösterir.



Şekil 6. Uzama çubuğu



Şekil 7. (ϵ , σ) diyagramı

1.15. TANIM (Alan atalet momenti):

Şekil 8.' deki F ile gösterilen dik kesitin alan elemanı dF olmak üzere kesitin alan statik momentleri

$$S_x = \iint_F y \cdot dF, S_y = \iint_F x \cdot dF \quad (1.35)$$

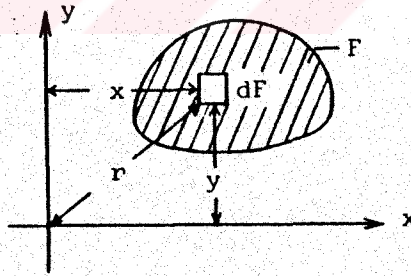
bağıntıları ile verilir. Atalet momenti I operatörü ile gösterilmek üzere x- eksenine göre ve y- eksenine göre alan atalet momentleri sırası ile,

$$I_x = \iint_F y^2 \cdot dF, I_y = \iint_F x^2 \cdot dF \quad (1.36)$$

ve çarpım atalet momenti,

$$I_{xy} = \iint_F x \cdot y \cdot dF \quad (1.37)$$

olarak tanımlanır. Birimi $(\text{br})^4$ dür [8].



Şekil 8. Bir kesitin atalet momenti

BÖLÜM 2

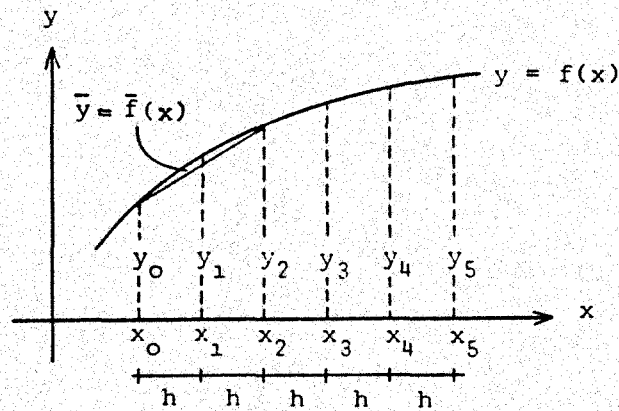
SONLU FARKLAR

2.1. Eşit Aralıklar İçin Sonlu Farklar

Sonlu farklar matematiği, sayısal yöntemler için temel teşkil eder.

Matematik, fizik ve mühendislik bilimlerinde karşılaşılan sürekli fonksiyonların, ayırık noktalarındaki bilinmeyen değerlerine bu çözüm metodu ile iyi bir yaklaşım sağlanabilir.

Bazı durumlarda problem, analitik çözüme sahip olsa da daha basit hale getirilebilir. Şekil 9.' da görülen $\bar{y} = \bar{f}(x)$ fonksiyonu y' nin yaklaşım fonksiyonudur.



Şekil 9. Eşit aralıklarda yaklaşım Formülü

2.1.1. İleri Farklar (Forward differences)

Bir $y = f(x)$ fonksiyonu ve adım h alınarak x noktası için birinci mertebe ileri fark,

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \quad (2.1)$$

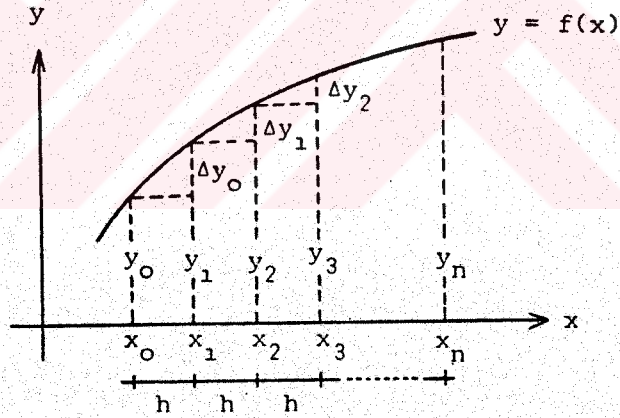
x_i noktası için ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) birinci mertebe ileri fark,

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \quad (2.2)$$

formülü ile belirlidir.

$$x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \dots, x_n = x_0 + nh \quad (2.3)$$

olmak üzere ikinci ve daha yüksek mertebeden ileri farklar formülleri çıkarılabilir.



Şekil 10. Eşit aralıklarda ordinat farklar

$$\begin{aligned} y_0 &= y_0 \\ y_1 &= y_0 + \Delta y_0 \\ y_2 &= y_1 + \Delta y_1 \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + \Delta y_{n-1} \end{aligned} \quad (2.4)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= \Delta y_0 \\ y_2 - y_1 &= \Delta y_1 \\ &\vdots \\ y_{n+1} - y_n &= \Delta y_n \end{aligned} \quad (2.5)$$

şeklinde yazılır. İkinci mertebeden ileri fark için

$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i \quad (2.6)$$

formülü verilebilir. r'nci mertebeden ileri fark için

$$\Delta^r y_i = \Delta(\Delta^{r-1} y_i) = \Delta^{r-1} y_{i+1} - \Delta^{r-1} y_i \quad (2.7)$$

elde edilir. (2.7) bağıntısı; $y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i+r}$ terimleri ile belirlidir.

Çözümü istenen bir $y = f(x)$ fonksiyonunun *Newton polinomu* ile yaklaşımı,

$$\begin{aligned} y(x) &= C_0^* + C_1^*(x-x_0) + C_2^*(x-x_0).(x-x_1) + \\ &+ C_3^*(x-x_0).(x-x_1).(x-x_2) + \dots + \\ &+ C_n^*(x-x_0).(x-x_1) \dots (x-x_{n-1}) + R_{n+1}(x) \end{aligned} \quad (2.8)$$

şeklindedir. Bu polinomdaki C_i^* katsayıları ($i=0,1,\dots,n$) kısa gösterimler olarak

$$\begin{aligned} C_0^* &= y_0 \\ C_1^* &= [x_1 x_0] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ C_2^* &= [x_2 x_1 x_0] = \frac{[x_2 x_1] - [x_1 x_0]}{x_2 - x_0} \\ C_3^* &= [x_3 x_2 x_1 x_0] = \frac{[x_3 x_2 x_1] - [x_2 x_1 x_0]}{x_3 - x_0} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.9)$$

belirlenirse, ordinatlar cinsinden ifade edilebilirler.

$$\begin{aligned}x_i - x_{i-1} &= h \\y_i - y_{i-1} &= \Delta y_i\end{aligned}\tag{2.10}$$

olduğundan (2.9) daki katsayılar

$$\begin{aligned}C_0^* &= y_0 \\C_1^* &= [x_1 x_0] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{h} \\C_2^* &= [x_2 x_1 x_0] = \left(\frac{\Delta y_1}{h} - \frac{\Delta y_0}{h} \right) \cdot \frac{1}{2h} = \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2} \\C_3^* &= [x_3 x_2 x_1 x_0] = \left(\frac{\Delta^2 y_1}{2! h^2} - \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2} \right) \cdot \frac{1}{3h} = \frac{\Delta^3 y_0}{3! h^3} \\&\vdots \\C_r^* &= [x_r x_{r-1} \dots x_1 x_0] = \frac{1}{r!} \cdot \frac{\Delta^r y_0}{h^r}\end{aligned}\tag{2.11}$$

şeklini alır. Bunlar (2.8) de yerlerine konursa

$$\begin{aligned}y(x) &= y_0 + [x_1 x_0] \cdot (x - x_0) + [x_2 x_1 x_0] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \\&\quad + \dots + [x_{n-1} x_{n-2} \dots x_1 x_0] (x - x_0) (x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \\&\quad + [x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0] (x - x_0) (x - x_1) \dots (x - x_n)\end{aligned}\tag{2.12}$$

olur.

$$\begin{aligned}y(x) &\quad \text{Newton polinomu} \\F_n(x) &\quad \text{Yaklaşım formülü} \\R_{n+1}(x) &\quad \text{Kalan (hata) terimi}\end{aligned}$$

olmak üzere en genel şekli

$$y(x) = F_n(x) + R_{n+1}(x)\tag{2.13}$$

dir.

$$R_{n+1}(x) = y(x) - F_n(x) \approx 0 \quad (2.14)$$

olma şartından Newton polinomundaki C_n^* katsayısını, n-ci türev cinsinden ifade edecek olursak;

$$y(x) - F_n(x) = 0 \quad (2.15)$$

$$y^{(n)}(x) = n! \cdot [x_n x_{n-1} \dots x_2 x_1 x_0] \quad (2.16)$$

$$F^{(n)}(x) = n! \cdot [x_n x_{n-1} \dots x_2 x_1 x_0] \quad (2.17)$$

olması nedeni ile (2.11) ifadeleri kullanılarak

$$C_n^* = \frac{y^{(n)}(x)}{n!}, \quad C_r^* = \frac{y^{(r)}(x)}{r!} \quad (2.18)$$

bulunur. Buradan,

$$C_r^* = \frac{1}{r!} y^{(r)}(x) = \frac{1}{r!} \frac{\Delta^r y_0}{h^r} \quad (2.19)$$

eşitlikleri yazılabilir. r-nci mertebeden türev

$$y^{(r)}(x) = \frac{\Delta^r y_0}{h^r} = \frac{d^r y}{dx^r} \quad (2.20)$$

dir.

(2.19) bağıntısı kullanılarak (2.12) ifadesini fark operatörü cinsinden yazarsak,

$$y(x) = y_0 + (x-x_0) \cdot \frac{\Delta y_0}{1!h} + (x-x_0)(x-x_1) \cdot \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} + \dots + (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{n-1}) \cdot \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} + R_{n+1}(x) \quad (2.21)$$

olur. Kalan terim ise,

$$R_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (2.22)$$

dir. $x < \xi < x_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, n$

$$s = \frac{x-x_0}{h}, \quad x = x_0 + hs \quad (2.23)$$

den $x-x_k = h(s-k)$; ($k = 0,1,\dots,n$) olmak üzere

$$y_s = y_0 + s.\Delta y_0 + \frac{s(s-1)}{2!}.\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{s(s-1)\dots(s-n+1)}{n!}.\Delta^n y_0 + R_s(x) \quad (2.24)$$

ve kalan terim

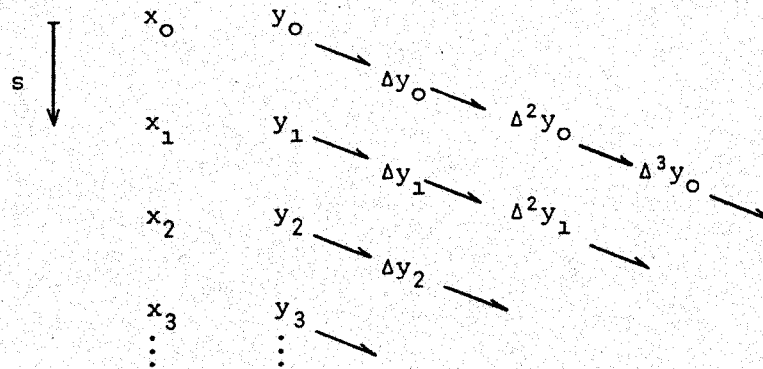
$$R_s(x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} s(s-1)\dots(s-n)y^{(n+1)}(\xi) \quad (2.25)$$

$$y_s \equiv f(x_0 + hs) = y(x) \quad (2.26)$$

$$R_s \equiv R_{n+1}(x_0 + hs) = R_{n+1}(x) \quad (2.27)$$

dir [9].

'Tablo 1.' de ileriye doğru (=inen) farklar tablosu düzenlenmiştir.



Tablo 1. ileri farklar tablosu

2.1.2. Geri farklar (*Backward differences*)

İleri farklardaki işlemler uygulanırsa, x noktasındaki birinci mertebeden geri fark

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h) \quad (2.28)$$

x_i noktasındaki birinci mertebeden geri fark

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1} \quad (2.29)$$

ikinci mertebeden geri fark

$$\nabla^2 y_i = \nabla(\nabla y_i) = \nabla y_i - \nabla y_{i-1} = y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2} \quad (2.30)$$

ve r -nci mertebeden geri fark ise,

$$\nabla^r y_i = \nabla^{r-1} y_i - \nabla^{r-1} y_{i-1} \quad (i = 0, 1, \dots, N) \quad (2.31)$$

şeklinde yazılabilir. Son ifadenin açıklık kazanabilmesi için $y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-r}$ değerleri gereklidir.

(2.9) daki Newton polinomunun katsayıları,

$$\begin{aligned} C_0^* &= y_N \\ &\vdots \\ C_N^* &= [x_{N-r} x_{N-r+1} \dots x_N] = \frac{1}{r!} \cdot \frac{\nabla^r y_N}{h^r} \end{aligned} \quad (2.32)$$

yardımıyla (2.12) bağıntısı

$$\begin{aligned} y(x) &= y_N + [x_N x_{N-1}] \cdot (x - x_N) + \\ &\quad + [x_N, x_{N-1}, x_{N-2}] \cdot (x - x_N)(x - x_{N-2}) + \dots + \\ &\quad + [x_{N-r} x_{N-r+1} \dots x_N] \cdot (x - x_N) \dots (x - x_{N-r}) \\ &\quad + R_N(x) \end{aligned} \quad (2.33)$$

elde edilir.

$$s = \frac{x - x_N}{h}, \quad x = x_N + hs \quad (2.34)$$

olmak üzere

$$y_{N+s} = y_N + s \cdot \nabla y_N + \frac{s(s+1)}{2!} \cdot \nabla^2 y_N + \dots + \frac{s(s+1)\dots(s+n-1)}{n!} \cdot \nabla^n y_N + R_s \quad (2.35)$$

$$R_s = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \cdot s(s+1)\dots(s+n) \cdot y^{(n+1)}(\xi) \quad (2.36)$$

formunda Newton geri fark formülü elde edilir.

$$y_{N+s} \equiv f(x_N + hs) = y(x) \quad (2.37)$$

$$R_s \equiv R_N(x_N + hs) = R_N(x) \quad (2.38)$$

dir [9].

Tablo 2.' de geriye doğru (=yükselen) farklar tablosu görülmektedir.

$\vdots$	$\vdots$				
x_{N-3}	y_{N-3}				
		∇y_{N-2}			
x_{N-2}	y_{N-2}		$\nabla^2 y_{N-1}$		
		∇y_{N-1}		$\nabla^3 y_N$	
x_{N-1}	y_{N-1}		$\nabla^2 y_N$		
		∇y_N			
x_N	y_N				

$s \downarrow$

Tablo 2. Geri farklar tablosu

$$C_r^k = \binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!} \quad (2.39)$$

den, ileri farklar formülü

$$y_s \equiv y(x_0 + hs) \approx \sum_{k=0}^n C_s^k \Delta^k y_0 \quad (2.40)$$

formunda yazılabilir. (2.35) deki bağıntı için

$$\begin{aligned} C_{s+k-1}^k &= \frac{s(s+1)\dots(s+k-1)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{(-s)(-s-1)\dots(-s-k+1)}{k!} \\ &= (-1)^k \cdot C_{-s}^k \end{aligned} \quad (2.41)$$

den geri farklar formülü

$$y_{N+s} \equiv f(x_N + hs) \approx \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot C_{-s}^k \cdot \nabla^k y_N \quad (2.42)$$

veya alternatif olan

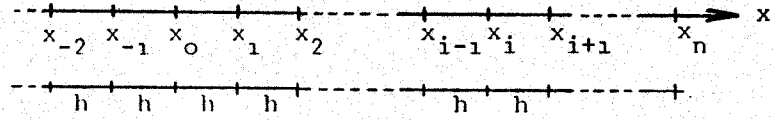
$$y_{N-s} \equiv f(x_N - hs) \approx \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot C_s^k \cdot \nabla^k y_N \quad (2.43)$$

şekli ile verilebilir [9].

2.1.3. Merkezi Farklar (*Central differences*)

Çözüm yapılacak aralık içindeki diğer kalan hesaplamalar için merkezi farklar yöntemini kullanmak en uygun seçimdir.

Merkezi farklarla yapılan hesaplamalar seçilen iç yığılma noktasının kenarlarında etkili ise merkez nokta apsisine x_0 , daha ileri kısımlarına $x_1, x_2, \dots$ ve geriye doğru olanlara $x_{-1}, x_{-2}, \dots$ şeklinde isim vermek yerindedir.



Şekil 11. Eşit aralıklı merkezi
farklarda nokta apsisleri

Merkezi farklar notasyonu δ olmak üzere x noktasındaki birinci ve $(r+1)$ - nci mertebeden merkezi farklar sırası ile

$$\delta f(x) = f(x + \frac{1}{2} h) - f(x - \frac{1}{2} h) \quad (2.44)$$

$$\delta^{r+1} f(x) = \delta^r f(x + \frac{1}{2} h) - \delta^r f(x - \frac{1}{2} h) \quad (2.45)$$

olarak yazılır. x_i noktası için

$$\delta y_i \equiv \delta f_i \equiv \delta f(x_i)$$

alındığında ordinatlar cinsinden ifade edilebilir. İkinci mertebeden merkezi fark

$$\begin{aligned} \delta^2 f_i &= \delta f(x_i + \frac{1}{2} h) - \delta f(x_i - \frac{1}{2} h) \\ &= [f(x_{i+1}) - f(x_i)] - [f(x_i) - f(x_{i-1})] \\ &= f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1} \\ &= y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} \end{aligned} \quad (2.46)$$

ve r -nci mertebeden merkezi fark

$$\delta^r f_i = \delta^{r-1} f_{i+\frac{1}{2}} - \delta^{r-1} f_{i-\frac{1}{2}} \quad (2.47)$$

şeklindedir. $y_i \equiv f_i$ olmak üzere indislerdeki değişim şu şekilde verilebilir.

$$\begin{aligned}
\delta y_{1/2} &= y_1 - y_0 & \text{indis: } \frac{1+0}{2} &= \frac{1}{2} \\
\delta y_{3/2} &= y_2 - y_1 & \text{indis: } \frac{2+1}{2} &= \frac{3}{2} \\
\delta^2 y_1 &= \delta y_{3/2} - \delta y_{1/2} & \text{indis: } \frac{(3/2) + (1/2)}{2} &= 1 \\
\delta^2 y_2 &= \delta y_{5/2} - \delta y_{3/2} & \text{indis: } \frac{(5/2) + (3/2)}{2} &= 2
\end{aligned}$$

(2.9) daki Newton polinomunun katsayıları ile merkezi farklar arasındaki ilişki

$$\begin{aligned}
\delta y_{1/2} &= y_1 - y_0 = h \cdot [x_1 x_0] \\
\delta y_{-1/2} &= y_0 - y_{-1} = h \cdot [x_0 x_{-1}] \\
\delta^2 y_1 &= \delta y_{3/2} - \delta y_{1/2} = h \cdot [x_2 x_1] - h \cdot [x_1 x_0] \\
&= 2! h^2 \cdot [x_2 x_1 x_0] \quad (2.48)
\end{aligned}$$

şeklindedir. En genel halde,

$$\begin{aligned}
\delta^{2m+1} y_{k+(\frac{1}{2})} &= h^{2m+1} (2m+1)! [x_{k+m+1} x_{k+m} \dots x_k \dots x_{k-m}] \\
\delta^{2m+1} y_{k-(\frac{1}{2})} &= h^{2m+1} (2m+1)! [x_{k-m-1} x_{k-m} \dots x_k \dots x_{k+m}] \\
\delta^{2m} y_k &= h^{2m} (2m)! [x_{k-m} \dots x_k \dots x_{k+m}] \quad (2.49)
\end{aligned}$$

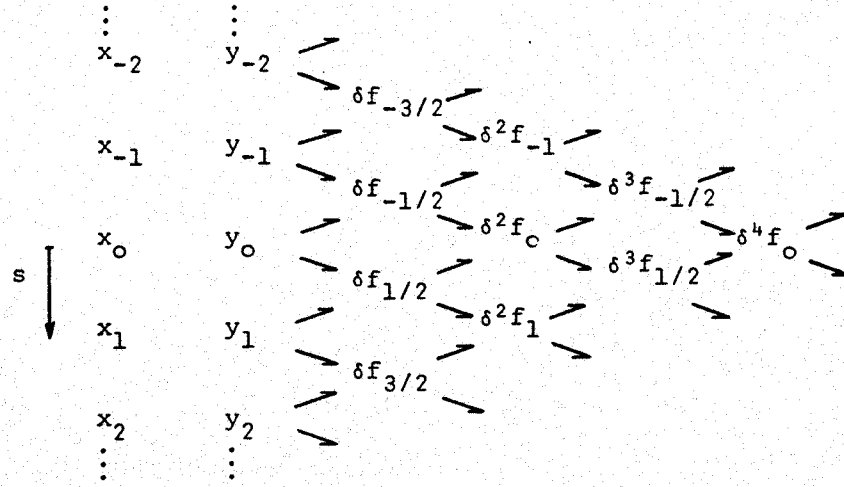
x_0 apsisi için merkezi fark şeması Tablo 3.'de verilmiştir.

Merkezi, ileri ve geri farklar arasındaki ilişki

$$\delta^r y_k = \nabla^r y_{k+r/2} = \Delta^r y_{k-r/2} \quad (2.50)$$

şeklinde olup, ilişki şeması Tablo 4.'de verilmiştir

[9].



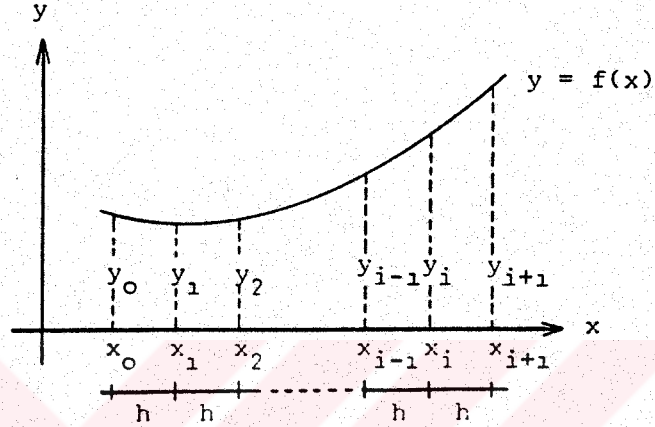
Tablo 3. Eşit aralıklarda merkezi farklar tablosu

$\vdots$	$\vdots$		
x_0	y_0	$\Delta y_0 = \delta y_{1/2} = \nabla y_1$	
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0 = \delta^2 y_1 = \nabla^2 y_2$
x_2	y_2	$\Delta y_1 = \delta y_{3/2} = \nabla y_2$	
$\vdots$	$\vdots$		

Tablo 4. İleri, merkezi ve geri farklar arasındaki ilişki tablosu

2.2. Türev ve Fark Operatörleri Arasındaki İlişkiler

Δ , ∇ ve δ ile türev operatörü $D = \frac{d}{dx}$ arasındaki ilişkilerden yararlanarak, türevli ifadelerle geçilebilir.



Şekil 12. İleri farklarda eşit aralıklı x_i noktaları

(2.7) ve (2.20) bağıntılarında y'_i ;

$$\Delta y_i = \Delta^0 y_{i+1} - \Delta^0 y_i = y_{i+1} - y_i$$

$$\Delta y_i = h \cdot y'_i$$

$$y'_i = \frac{\Delta y_i}{h} = \frac{1}{h} (y_{i+1} - y_i) \quad (2.51)$$

ve y''_i ifadesi ise,

$$\Delta^2 y_i = \Delta^1 y_{i+1} - \Delta^1 y_i = y_{i+2} - y_{i+1} - (y_{i+1} - y_i)$$

$$\Delta^2 y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

$$\Delta^2 y_i = h^2 \cdot y''_i$$

$$y''_i = \frac{1}{h^2} \Delta^2 y_i = \frac{1}{h^2} (y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}) \quad (2.52)$$

ile belirlidir.

Şekil 11.' e göre merkezi farklarda y'_i ifadesi;

$$\delta y_i = \frac{1}{2} (y_{i+1} - y_{i-1})$$

$$\delta y_i = h y'_i$$

$$y'_i = \frac{1}{2!h} (y_{i+1} - y_{i-1}) \quad (2.53)$$

dir. y'''_i hesaplanacak olursa

$$y'''_i = \frac{1}{3!h^3} (y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}) \quad (2.54)$$

eşitliği elde edilir. Genel olarak türev derecesi k, türevin alındığı nokta i olmak üzere,

$$y_i^k = D_i^k \cdot Y + R \quad (2.55)$$

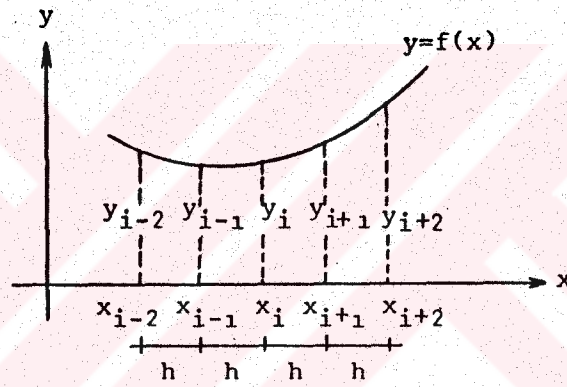
yenı gösterime geçilebilir. Buradaki matris gösteriminde Y , ordinatların kolon matrisi şeklindedir. Yani,

$$Y = \begin{bmatrix} y_{i+2} \\ y_{i+1} \\ y_i \\ y_{i-1} \\ y_{i-2} \end{bmatrix}$$

dir.

2.3. Basit Sonlu Farklar Yönteminin Taylor Serilerinden Yararlanarak İfadesi

Sayısal çözümü aranan $y = f(x)$ fonksiyonunun verilen aralıktaki herhangi bir i noktasında bulunan türevleri ($y'_i, y''_i, y'''_i, \dots$) komşu noktaların ordinatları cinsinden tanımlanabilir. İleri, geri ve merkezi farklar olarak çeşitli formüller elde edilebilir. Aralık sayısını artırarak herhangi bir türev için daha kesin sonuçlara varılacaktır.



Şekil 13. Merkezi farklar

$y_i^k = D_i^k \cdot Y + R$ ifadesindeki operatörlerin hesaplanabilmesi için bir boyutlu Taylor serilerinden yararlanılır.

$y = f(x)$ fonksiyonu için $(x + h)$ noktasındaki Taylor serisi açılımı:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots + R \quad (2.56)$$

veya $D = \frac{d}{dx}$ cinsinden,

$$f(x+h)=f(x)+h.Df(x)+\frac{h^2}{2!}.D^2f(x)+\frac{h^3}{3!}.D^3f(x)+\dots+R \quad (2.57)$$

şeklindedir.

Şekil 13.' e göre h: adım, R: hata terimi olmak üzere merkezi farklara göre r-ninci türevli terim,

$$y_i^{(r)} = \dots + a_{i-2}y_{i-2} + a_{i-1}y_{i-1} + a_i y_i + a_{i+1}y_{i+1} + a_{i+2}y_{i+2} \dots \quad (2.58)$$

dir. Türev derecesi = 1 için Taylor serisine açılırsa,

$$\begin{aligned} y_i' = & a_{i-2} \left[y_i - \frac{2h}{1!} y_i' + \frac{4h^2}{2!} y_i'' - \frac{8h^3}{3!} y_i''' + \frac{16h^4}{4!} y_i^{(1v)} - \frac{32h^5}{5!} y_i^{(v)} \right] \\ & + a_{i-1} \left[y_i - \frac{h}{1!} y_i' + \frac{h^2}{2!} y_i'' - \frac{h^3}{3!} y_i''' + \frac{h^4}{4!} y_i^{(1v)} - \frac{h^5}{5!} y_i^{(v)} \right] \\ & + a_i [y_i + 0 + 0 + 0 + 0 + 0] \\ & + a_{i+1} \left[y_i + \frac{h}{1!} y_i' + \frac{h^2}{2!} y_i'' + \frac{h^3}{3!} y_i''' + \frac{h^4}{4!} y_i^{(1v)} + \frac{h^5}{5!} y_i^{(v)} \right] \\ & + a_{i+2} \left[y_i + \frac{2h}{1!} y_i' + \frac{4h^2}{2!} y_i'' + \frac{8h^3}{3!} y_i''' + \frac{16h^4}{4!} y_i^{(1v)} + \frac{32h^5}{5!} y_i^{(v)} \right] \end{aligned} \quad (2.59)$$

dir. (2.59) da katsayılar ve türevler parantezine alınırsa,

$$\begin{aligned} y_i' = & y_i \cdot [a_{i-2} + a_{i-1} + a_i + a_{i+1} + a_{i+2}] + \\ & + \frac{h}{1!} y_i' [-2a_{i-2} - a_{i-1} + 0 + a_{i+1} + 2a_{i+2}] + \\ & + \frac{h^2}{2!} y_i'' [4a_{i-2} + a_{i-1} + 0 + a_{i+1} + 4a_{i+2}] + \\ & + \frac{h^3}{3!} y_i''' [-8a_{i-2} - a_{i-1} + 0 + a_{i+1} + 8a_{i+2}] + \\ & + \frac{h^4}{4!} y_i^{(1v)} [+16a_{i-2} + a_{i-1} + 0 + a_{i+1} + 16a_{i+2}] + \end{aligned}$$

$$+ \frac{h^5}{5!} y_i^{(v)} [-32a_{i-2} + a_{i-1} + 0 + a_{i+1} + 32a_{i+2}] \quad (2.60)$$

elde edilir. (2.60) dan a_i katsayılarının bulunmasına yetecek sayıda denklem çıkarılır.

$$\begin{aligned} a_{i-2} + a_{i-1} + a_i + a_{i+1} + a_{i+2} &= b_0 \\ -2a_{i-2} - a_{i-1} + 0 + a_{i+1} + 2a_{i+2} &= b_1 \cdot \frac{1!}{h} \\ 4a_{i-2} + a_{i-1} + 0 + a_{i+1} + 4a_{i+2} &= b_2 \cdot \frac{2!}{h^2} \\ -8a_{i-2} - a_{i-1} + 0 + a_{i+1} + 8a_{i+2} &= b_3 \cdot \frac{3!}{h^3} \\ 16a_{i-2} + a_{i-1} + 0 + a_{i+1} + 16a_{i+2} &= b_4 \cdot \frac{4!}{h^4} \\ -32a_{i-2} + a_{i-1} + 0 + a_{i+1} + 32a_{i+2} &= b_5 \cdot \frac{5!}{h^5} \end{aligned} \quad (2.61)$$

(2.61) denklem sistemindeki ilk beş denklem a_i katsayılarının bulunması için, altıncı denklem ise hata teriminin hesaplanmasında kullanılır.

Eğer türev derecesi 1 ise (2.61) sisteminde $b_1 = 1$, $b_0 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = \dots = 0$ alınarak a_i katsayıları için denklem takımı belirlenir.

Türev derecesinin 2 olması halinde $b_2 = 1$ ve $b_0 = b_1 = b_3 = b_4 = b_5 = \dots = 0$ kabul edilerek (2.61) sisteminin çözümü yapılır. Burada h , iki nokta arasındaki birim aralık olduğundan her zaman sayısal olarak belirlidir.

Türev derecesinin 1 olması durumunda 5 noktalı konum için merkezi farklarda a_i operatörleri için istenen denklem takımı,

$$\begin{aligned}
a_{i-2} + a_{i+1} + a_i + a_{i+1} + a_{i+2} &= 0 \\
2a_{i-2} - a_{i-1} + 0 + a_{i+1} + 2a_{i+2} &= 1 \cdot \frac{1!}{h} \\
4a_{i-2} + a_{i-1} + 0 + a_{i+1} + 4a_{i+2} &= 0 \\
-8a_{i-2} - a_{i-1} + 0 + a_{i+1} + 8a_{i+2} &= 0 \\
16a_{i-2} + a_{i-1} + 0 + a_{i+1} + 16a_{i+2} &= 0
\end{aligned} \tag{2.62}$$

dir. (2.62) nin matris formu

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ -8 & -1 & 0 & 1 & 8 \\ 16 & 1 & 0 & 1 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{i-2} \\ a_{i-1} \\ a_i \\ a_{i+1} \\ a_{i+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{h} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.63}$$

şeklindedir. (2.63) sistemi çözülürse,

$$\begin{aligned}
a_{i-2} &= \frac{1}{12h}, \quad a_{i-1} = -\frac{2}{3h}, \quad a_i = 0, \quad a_{i+1} = \frac{2}{3h}, \\
a_{i+2} &= \frac{-1}{12h}
\end{aligned}$$

bulunur. (2.58) bağıntısında bu katsayılar yerine konulursa,

$$y'_i = \frac{1}{12h} (y_{i-2} - 8y_{i-1} + 8y_{i+1} - y_{i+2}) + R \tag{2.64}$$

elde edilir.

Buradaki hata terimi (2.62) deki son satırdan bir sonraki satırı içeren denklemden bulunur.

$$R = \frac{h^5}{5!} y^{(v)}_i \cdot (-32a_{i-2} - a_{i-1} + a_{i+1} + 32a_{i+2}) \quad (2.65)$$

ifadesinde, bulunan a_{i-2} , a_{i-1} , a_i , a_{i+1} , a_{i+2} katsayılarının değerleri yerine yazılırsa,

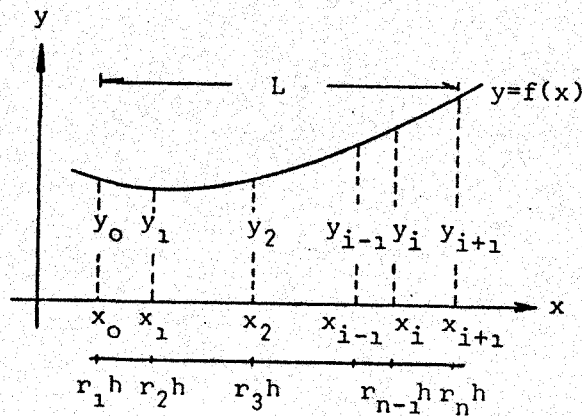
$$R = -\frac{h^4}{30} y^{(v)}_i \quad (2.66)$$

bulunur. Bu terim (2.64) bağıntısında pozitif olarak yerine yazılır. Eğer (2.61) in son satırından elde edilen R kalan terimi sıfır oluyorsa, ondan sonraki satırla işlem yapılır [2].

2.4. Seçilen Nokta Apsislerinin Değişken Aralıklı halinin incelenmesi

İleri ve geri farklarla yapılan işlemler, merkezi farklar tarafından da geçerliliğini korumaktadır. Bu nedenle konuyu önce merkezi farklarla incelemek daha sonra ileri ve geri farklara dönüştürülebilmeyi sağlamaktadır.

2.5. Üç noktalı Konumun Merkezi Farklarda incelenmesi



Şekil 14. Değişken aralıklı merkezi farklar

Şekil 14. 'e göre n noktalı (n-1) aralık için birim adım $h = \frac{L}{n-1}$ olacaktır. Buradaki L bir çubuk veya kirişin boyunu tanımlamaktadır. Birim adımı belirten bu oran, kirişin bazı noktalar arasını daha sık, bazılarında daha seyrek adımlarla incelememize imkan tanıyacaktır.

3'lü konumda merkezi farklarla türev derecesinin 2 olması halinde ordinatlar cinsinden ifadeleri elde edelim.

$$y''_i = a_{i-1}y_{i-1} + a_i y_i + a_{i+1}y_{i+1} \quad (2.67)$$

ifadesinde y'li terimleri Taylor serisine göre açıp, yerine koyarsak,

$$\begin{aligned} y_{i-1} &= y_0 + \frac{(r_1 h)}{1!} y'_0 + \frac{(r_1 h)^2}{2!} y''_0 + \frac{(r_1 h)^3}{3!} y'''_0 + \dots \\ y_i &= y_0 + \frac{(r_2 h)}{1!} y'_0 + \frac{(r_2 h)^2}{2!} y''_0 + \frac{(r_2 h)^3}{3!} y'''_0 + \dots \quad (2.68) \\ y_{i+1} &= y_0 + \frac{(r_3 h)}{1!} y'_0 + \frac{(r_3 h)^2}{2!} y''_0 + \frac{(r_3 h)^3}{3!} y'''_0 + \dots \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} y''_i &= a_{i-1} \cdot \left[y_0 + \frac{r_1 h}{1!} y'_0 + \frac{(r_1 h)^2}{2!} y''_0 + \frac{(r_1 h)^3}{3!} y'''_0 + \dots \right] \\ &+ a_i \cdot [y_0 + 0 + 0 + 0 + \dots] \\ &+ a_{i+1} \cdot \left[y_0 + \frac{r_3 h}{1!} y'_0 + \frac{(r_3 h)^2}{2!} y''_0 + \frac{(r_3 h)^3}{3!} y'''_0 + \dots \right] \end{aligned} \quad (2.69)$$

yazılabilir. Türevler parantezine alınarak a_i katsayılarının hesabı için denklem takımı kurulur.

$$\begin{aligned}
y'' &= y_0 \cdot [a_{i-1} + a_i + a_{i+1}] + \\
& y_0' \cdot \left[\frac{r_1 h}{1!} a_{i-1} + 0 + \frac{r_3 h}{1!} a_{i+1} \right] + \\
& y_0'' \cdot \left[\frac{(r_1 h)^2}{2!} a_{i-1} + 0 + \frac{(r_3 h)^2}{2!} a_{i+1} \right] + \\
& y_0''' \cdot \left[\frac{(r_1 h)^3}{3!} a_{i-1} + 0 + \frac{(r_3 h)^3}{3!} a_{i+1} \right] \quad (2.70)
\end{aligned}$$

Bilinmeyen a_i katsayılarının hesabı için gerekli denklem sisteminin matris formunda yazılımı

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{r_1 h}{1!} & 0 & \frac{r_3 h}{1!} \\ \frac{(r_1 h)^2}{2!} & 0 & \frac{(r_3 h)^2}{2!} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{i-1} \\ a_i \\ a_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_2 \cdot y_0'' \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

şeklindedir. (2.58) ifadesinde olduğu gibi benzer işlemler yapılarak y_i'' nün hesabı istendiğinde, şart denklemi olarak son satırdaki denklemin sağ tarafındaki $b_2 = 1$ ve diğer denklemlerin sağ tarafındaki $b_0 = 0$, $b_1 = 0$ alınarak a_{i-1} , a_i , a_{i+1} katsayıları hesaplanır.

$$\begin{aligned}
a_{i-1} + a_i + a_{i+1} &= 0 \\
r_1 h \cdot a_{i-1} + 0 + r_3 h \cdot a_{i+1} &= 0 \\
\frac{(r_1 h)^2}{2!} a_{i-1} + 0 + \frac{(r_3 h)^2}{2!} a_{i+1} &= 1
\end{aligned} \quad (2.72)$$

olur.

Örnek 2.1.

h = Birim adım, $r_1 = -3$, $r_3 = 1,5$ olduğunu kabul edersek Gauss eliminasyonu metodu ile (2.72) sistemi çözülürse

$$a_{i-1} = \frac{12}{(20,25)h^2}, \quad a_i = \frac{-18}{(20,25)h^2}, \quad a_{i+1} = \frac{6}{(20,25)h^2} \quad (2.73)$$

bulunur. Bu değerler (2.67) de yerine konursa

$$y_i'' = \frac{1}{(20,25)h^2} \cdot [6y_{i-1} - 18y_i + 12y_{i+1}] \quad (2.74)$$

eşitliği elde edilir. Hata terimi ise,

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{3!} \cdot [(r_1 h)^3 a_{i-1} + (r_3 h)^3 a_{i+1}] \\ &= \frac{h}{3!(20,25)} \cdot (-324 + 20,25) = (-2,5) \cdot h \end{aligned} \quad (2.75)$$

dir.

Bu şekilde diğer türev derecelerinin hesapları yapılabilir. Amaca uygun olarak nokta konumu 3'lü, 5'li, 7'li seçilebilir.

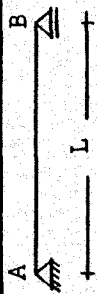
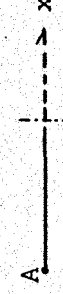
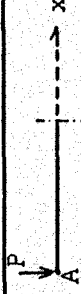
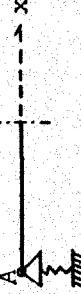
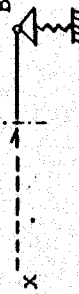
Merkezi farklarda yapılan işlemler ileri ve geri farklara uygulanarak çeşitli sonuçlar elde edilebilir. Çeşitli türevler için elde edilen sonuçlar Tablo 5. ve Tablo 6. ' da toplu halde verilmiştir [2].

TÜREV DERECESİ	FARKLAR	YAKLAŞIM FORMÜLÜ	HATA TERİMİ
y'_i	MERKEZİ	$\frac{1}{2h} (-y_{i-1} + y_{i+1})$	$-\frac{1}{6} h^2 \cdot y''_i$
y'_i	MERKEZİ	$\frac{1}{12h} (y_{i-2} - 8y_{i-1} + 8y_{i+1} - y_{i+2})$	$\frac{1}{30} h^4 \cdot y^{(v)}_i$
y'_i	KARIŞIK	$\frac{1}{6h} (-2y_{i-1} - 3y_i + 6y_{i+1} - y_{i+2})$	$\frac{1}{12} h^3 \cdot y^{(iv)}_i$
y'_i	İLERİ	$\frac{1}{6h} (-11y_i + 18y_{i+1} - 9y_{i+2} + 2y_{i+3})$	$-\frac{1}{4} h^3 \cdot y^{(iv)}_i$
y'_i	İLERİ	$\frac{1}{h} (-y_i + y_{i+1})$	$-\frac{1}{2} h \cdot y''_i$
y''_i	MERKEZİ	$\frac{1}{12h^2} (-y_{i-2} + 16y_{i-1} - 30y_i + 16y_{i+1} - y_{i+2})$	$\frac{1}{90} h^4 \cdot y^{(vi)}_i$
y''_i	İLERİ	$\frac{1}{h^2} (2y_i - 5y_{i+1} + 4y_{i+2} - 4y_{i+3})$	$\frac{11}{12} h^2 \cdot y^{(iv)}_i$
y'''_i	İLERİ	$\frac{1}{h^3} (-y_i + 3y_{i+1} - 3y_{i+2} + y_{i+3})$	$-\frac{3}{2} h \cdot y^{(iv)}_i$

Tablo 5. Basit sonlu farklar yönteminin yaklaşık formülleri

y_i^k	D_i^k	y
y_i'	$\frac{1}{12h} (-1, 0, 1)$	$(i-1, i, i+1)$
y_i'	$\frac{1}{12h} (1, -8, 8, -1)$	$(i-2, i-1, i, i+1, i+2)$
y_i'	$\frac{1}{6h} (-2, -3, 6, -1)$	$(i-1, i, i+1, i+2)$
y_i'	$\frac{1}{6h} (-11, 18, -9, 2)$	$(i, i+1, i+2, i+3)$
y_i'	$\frac{1}{h} (-1, 1)$	$(i, i+1)$
y_i''	$\frac{1}{12h^2} (-1, 16, -30, 16, -1)$	$(i-2, i-1, i, i+1, i+2)$
y_i''	$\frac{1}{h^2} (2, -5, 4, -1)$	$(i, i+1, i+2, i+3)$
y_i'''	$\frac{1}{h^3} (-1, 3, -3, 1)$	$(i, i+1, i+2, i+3)$

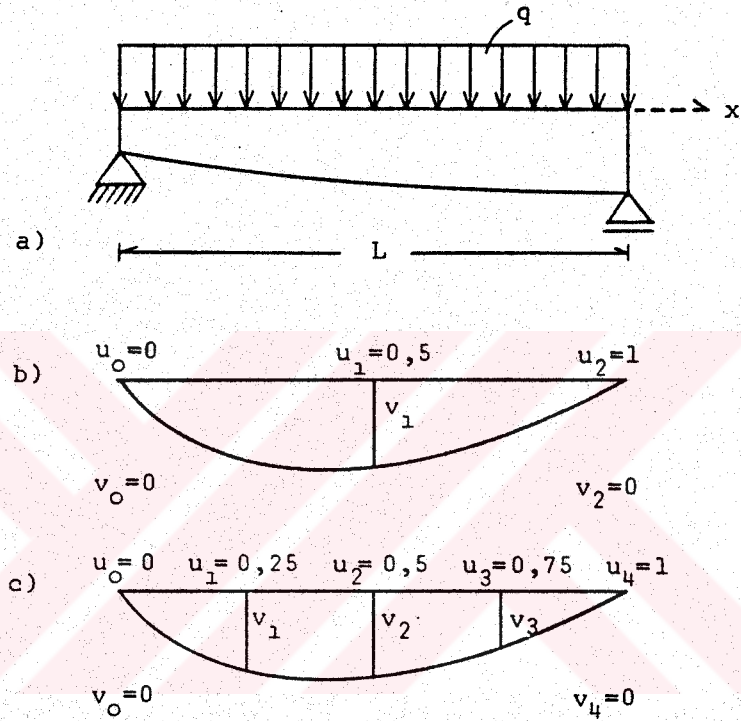
Tablo 6. Sonlu farklar formüllerinin operatör gösterimi

MESNET ÇEŞİTLERİ	GEOMETRİK ŞEKİL	SINIR ŞARTLARI	İLGİLİ BÜYÜKLÜKLER
SABİT VE HAREKETLİ		$v(0) = 0$ $v''(0) = 0$ $v(L) = 0$ $v''(L) = 0$	Çökme Moment
ANKASTRE (= GEÇME)		$v_A = 0$ $v_A' = 0$	Çökme Dönme
MAFSALLI UÇ		$v_A = 0$ $v_A'' = 0$	Çökme Moment
BAGSIZ (BOŞ) UÇ		$v_A'' = 0$ $v_A''' = 0$	Moment Kesme Kuvveti
BAGSIZ, TEKİL YÜKLÜ UÇ		$-E \cdot I_x \cdot v_A''' = P$	Tekil Kuvvet
BAGSIZ, DIŞ MOMENTLİ UÇ		$-E \cdot I_x \cdot v_A'' = M_x$	Moment
ELASTİK ÇÖKEN MAFSALLI MESNET		$-E \cdot I_x \cdot v_A''' = c \cdot v_A$, $v_A'' = 0$	c: Yay Sabiti
		$E \cdot I_x \cdot v_B''' = c \cdot v_B$, $v_B'' = 0$	c: Yay Sabiti

Tablo 7. Çeşitli çubuk sistemlerdeki sınır şartları

Örnek 2.2.

Lineer değişken eğilme rijitliğine sahip kiriş için düşey yerdeğiştirmenin, elastik eğri metodu ile klasik çözümü [10].



Şekil 15. Söz konusu kiriş için 3 ve 5'li konumdaki çökmeler

Çözümüne geçmeden önce bazı kavramların verilmesi gerekir. Bu kavramlar;

E : Malzemenin elastik modülü

I_0 : Başlangıç kesitinin atalet momenti

I_x : Herhangi bir kesitin atalet momenti

$E.I_x$: Eğilme rijitliği

(2.76)

notasyonları ile verilmiştir. Bu kirişteki düşey yerde-
ğiştirmelerin (çökmelerin) yani $v(x)$ fonksiyonunun çe-
şitli türevleri, kirişe ait geometrik ve mekanik tipten
büyüklükler ile orantılıdır. Bunlar

$$\begin{aligned}
 v(x) & \dots\dots\dots : \text{ÇÖKME} \\
 v'(x) & \dots\dots (\omega_x) \dots\dots : \text{DÖNME} \\
 v''(x) & \dots\dots (-M_x/E.I_x) \dots\dots : \text{MOMENT} \quad (2.77) \\
 v'''(x) & \dots\dots (-Q_y/E.I_x) \dots\dots : \text{KESME KUVVETİ} \\
 v^{(1v)}(x) & \dots\dots (-q_y/E.I_x) \dots\dots : \text{YAYILI DIŞ YÜK}
 \end{aligned}$$

dür. Eğilme rijitliğini, başlangıç rijitliği cinsinden

$$E.I_x = E.I_o \left(1 + \frac{x}{L}\right) \quad (2.78)$$

şeklinde verilir.

Elastik eğrinin diferansiyel denklemi,

$$\frac{d^2 W}{dx^2} = W''(x) = - \frac{M_x}{E.I_x} = - \frac{qL^2}{2EI_o} \cdot \frac{(x/L)(1-(x/L))}{1+(x/L)} \quad (2.79)$$

olarak belirlidir. $u = \frac{x}{L}$ gösterimi ile çökme

$$v = \frac{W}{\left(\frac{qL^4}{120EI_o}\right)} \quad (2.80)$$

eşitliği şeklindedir.

$$\frac{d^2 W}{dx^2} = \frac{1}{L^2} \cdot \frac{d^2 W}{du^2} = \frac{1}{L^2} W'' = \frac{qL^2}{120EI_o} \cdot v'' \quad (2.81)$$

eşitliklerinden

$$v'' = -60 \cdot \frac{u(1-u)}{1+u} = 60 \cdot \frac{u^2-u}{1+u} \quad (2.82)$$

elastik eğri diferansiyel denklemimiz daha kısa şekle dönüştürülmüş olur. v çökmelerinin klasik çözümü için integrasyon metodu kullanılırsa,

$$v' = 60 \int \frac{u^2-u}{1+u} du = 60 \left[\frac{u^2}{2} - 2u + 2\ln(1+u) \right] + C_1 \quad (2.83)$$

$$v = 60 \cdot \left[\frac{u^3}{6} - u^2 + 2((1+u) \cdot \ln(1+u) - u) \right] + C_1 u + C_2 \quad (2.84)$$

elde edilir. C_1 ve C_2 integral sabitlerinin belirlenmesi için başlangıç ve bitim noktasındaki

$$v(0) = 0, \quad v(L) = 0 \quad (2.85)$$

sınır şartları kullanılır. Ayrıca bu noktalarda moment olmadığından $v''(0) = 0$, $v''(L) = 0$ sınır şartları da mevcut olup sonlu farklarla yapılacak çözümlerde kullanılacaktır. (2.85) deki sınır şartları kullanılırsa

$C_1 = 10(17-24\ln 2)$, $C_2 = 0$ bulunur. Bunlar (2.84) de yerine yazılırsa,

$$v = 10 \cdot \left[u^3 - 6u^2 + (5-24\ln 2) \cdot u + 12 \cdot (1+u) \ln(1+u) \right] \quad (2.86)$$

çözüm 100 eşit aralık için incelendiğinde $\frac{L}{2}$ deki çökmenin

$$v\left(\frac{L}{2}\right) = 0,00880 \cdot \frac{qL^4}{EI_0} \quad (2.87)$$

olduğu görülür [10] .

Sonraki kısımlarda bu örnek için *Sonlu farklar* ve

sonlu farkların ileri bir aşaması olan *Hermite sayısal çözüm yöntemleri* ile çözüm yapılacak klasik olarak elde edilen sonuç ile mukayese edilecektir [11].

Mukayese kriteri olarak $x = \frac{L}{2}$ deki değer esas alınacaktır. Bununla birlikte

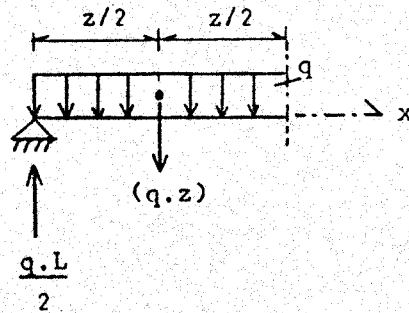
$$v_{\max}(0,48L) = 0,008817037 \cdot \frac{qL^4}{E.I_0} \quad (2.88)$$

neticeside kriter olarak kullanılabilir.

Değişik tip kirişlerin çözümü için gerekli sınır şartları Tablo 7.'de çıkarılmıştır.

Örnek 2.3.

Bir önceki örneğimizi, 3 noktalı konum için merkezi farklarda çözelim. (2.78) ifadesindeki $E.I_x$ eğilme rijitliği, $E.I_x = E.I_0(1 + \frac{x}{L})$ olmak üzere Şekil 15.a - daki kirişin, $v(x) \equiv v(z)$ kabulü ile herhangi bir z mesafesindeki momenti



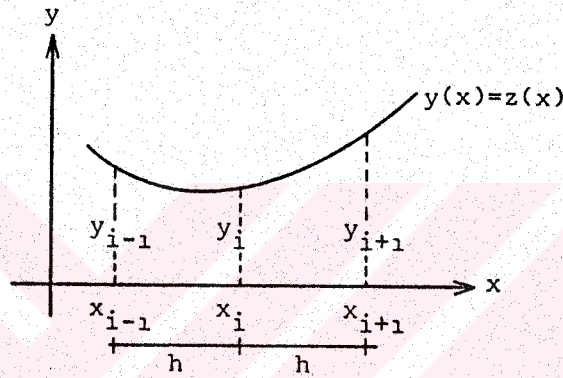
Şekil 16. z -mesafedeki noktanın momenti

$$M_x = \frac{(q.L)}{2} \cdot z - (q.z) \cdot \frac{z}{2} = q.z \left(\frac{L-z}{2} \right) \quad (2.89)$$

dir. Bu durumda

$$v''(z) = - \frac{q \cdot L \cdot z \cdot (L-z)}{2 \cdot E \cdot I_0 \cdot (L+z)} \quad (2.90)$$

olur. Bulduğumuz bu denklemi sonlu farklar yöntemlerinden olan eşit aralıklı üçlü konumda merkezi farklara göre yazalım.



Şekil 17. Elastik eğrinin üçlü konum ile eşit iki aralığa ayrılması

i -nci noktadaki y_i'' nü komşu noktaların ordinatları cinsinden açılımı (2.52) bağıntısına göre:

$$y_i'' = \frac{1}{h^2} (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) \quad (2.91)$$

şeklindedir. Çökme fonksiyonumuz $v(z)$ olduğundan

$$v_i'' = \frac{1}{h^2} (v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}) = - \frac{q \cdot L \cdot z \cdot (L-z)}{2E \cdot I_0 \cdot (L+z)} \quad (2.92)$$

denklemini yazabiliriz. (2.78) deki eğilme rijitliği bağıntısından (2.92) ifadesi,

$$\frac{1}{h^2} (v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}) = - \frac{q \cdot L^2 \cdot \frac{z}{L} (1 - \frac{z}{L})}{2E \cdot I_0 \cdot (1 + \frac{z}{L})} \quad (2.93)$$

şeklini alır. (2.93) eşitliğinde

$$\frac{q \cdot L^2}{2E \cdot I_0} = A = \text{sabit}, \quad \frac{z}{L} = B = \text{sabit}, \quad h = \frac{L}{4} = 0,25 \cdot L \quad (2.94)$$

olduğundan,

$$(v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}) = -A \cdot B \cdot h^2 \cdot \left(\frac{1-B}{1+B} \right) \quad (2.95)$$

yazılabilir. Bu ifade v_i nin sonlu farklar yönteminin uygulanabilir olan türevsiz denklemidir. 3 nokta için,

i	B	$1-B$	$1+B$	$\frac{B \cdot h^2 \cdot (\frac{1-B}{1+B})}{1+B}$
1	0,25	0,75	1,25	$(0,0093750) \cdot L^2$
2	0,50	0,50	1,50	$(0,0104167) \cdot L^2$
3	0,75	0,25	1,75	$(0,0066964) \cdot L^2$

(2.96)

şeklinde belirlenen sabit sayılar yardımı ile

$$\begin{aligned} i=1 \text{ için } v_0 - 2v_1 + v_2 &= -0,0093750 \cdot A \cdot L^2 \\ i=2 \text{ için } v_1 - 2v_2 + v_3 &= -0,0104167 \cdot A \cdot L^2 \\ i=3 \text{ için } v_2 - 2v_3 + v_4 &= -0,0066964 \cdot A \cdot L^2 \end{aligned} \quad (2.97)$$

denklem sistemi kurulur. Şekil 15.b' deki kirişin başlangıç ve bitim noktalarındaki çökmelerin sıfır oluşu, sınır şartlarını ortaya koymaktadır.

$$v(0) = v_0 = 0 \text{ ve } v(L) = v_4 = 0 \quad (2.98)$$

sınır şartları (2.97) denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0093750 \\ 0,0104167 \\ 0,0066964 \end{bmatrix} \cdot (-A.L^2) \quad (2.99)$$

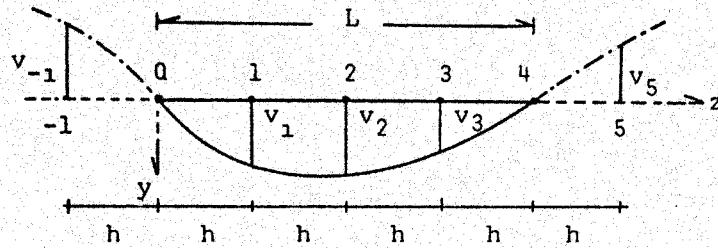
formunda yazılabilir. Bilinmeyenler çözülürse

$$\begin{aligned} v_1 &= 0,0069568 \cdot \frac{q.L^4}{E.I_0} \\ v_2 &= 0,0092262 \cdot \frac{q.L^4}{E.I_0} \\ v_3 &= 0,0062872 \cdot \frac{q.L^4}{E.I_0} \end{aligned} \quad (2.100)$$

çökme değerleri bulunur. Klasik (integral) yöntemiyle bulunan $i=2$ deki v_2 değerini, sonlu farklar neticesindeki v_2 değeri ile karşılaştırdığımızda hata yüzdesi %4,84 olduğu saptanmıştır.

Örnek 2.4.

Hata teriminin minimum olabilmesi nokta sayısının artırılması ile mümkün olmaktadır. Bu nedenle örnek (2.2) için Şekil 15 ' e göre giriş boyunu daha fazla aralığa bölelim.



Şekil 18. Merkezi farklarda 5'li konumdaki giriş

5 noktalı konum için y''_i nü ordinatlar cinsinden

Tablo 5.'e göre

$$y''_i = \frac{1}{12h^2} (-y_{i-2} + 16y_{i-1} - 30y_i + 16y_{i+1} - y_{i+2}) + R \quad (2.101)$$

yazabiliriz. Elastik eğri denklemimiz bu durumda

$$\begin{aligned} v''_i &= \frac{1}{12h^2} (-v_{i-2} + 16v_{i-1} - 30v_i + 16v_{i+1} - v_{i+2}) \\ &= -A \cdot B \cdot h^2 \cdot \left(\frac{1-B}{1+B} \right) \end{aligned} \quad (2.102)$$

olacaktır.

$i=1$ için

$$-v_{-1} + 16v_0 - 30v_1 + 16v_2 - v_3 = -0,11250 \cdot A \cdot L^2$$

$i=2$ için

$$-v_0 + 16v_1 - 30v_2 + 16v_3 - v_4 = -0,12500 \cdot A \cdot L^2$$

$i=3$ için

$$-v_1 + 16v_2 - 30v_3 + 16v_4 - v_5 = -0,08034 \cdot A \cdot L^2 \quad (2.103)$$

Şekil 18.' e göre (2.103) bağıntısında aşağıdaki sınır şartları kullanılır.

$$\begin{aligned} -v_{-1} &= v_1, & -v_5 &= v_3 \\ v_0 &= 0, & v_4 &= 0 \end{aligned} \quad (2.104)$$

olmak üzere denklem sistemimiz,

$$\begin{bmatrix} -29 & 16 & -1 \\ 16 & -30 & 16 \\ -1 & 16 & -29 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1125 \\ 0,125 \\ 0,08034 \end{bmatrix} (-A \cdot L^2) \quad (2.105)$$

olur. Çözüm sonunda elde edilen çökme değerleri

$$\begin{aligned} v_1 &= 0,006592248 \cdot \frac{qL^4}{E \cdot I_0} \\ v_2 &= 0,008808969 \cdot \frac{qL^4}{E \cdot I_0} \\ v_3 &= 0,00601832 \cdot \frac{qL^4}{E \cdot I_0} \end{aligned} \quad (2.106)$$

olarak belirlenir. Bu durumda v_2 çökme değerindeki hata yüzdesi % 0.1 dir. Bu problemin eşit olmayan aralıklar için çözümü Bölüm 3' de Hermite sayısal çözüm yöntemi ile verilecektir.

2.6. Simpson Yaklaşımı, Stirling ve Bessel Yaklaşım Formülleri

Herhangi bir aralıkta integrali aranan $y=f(x)$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} \bar{y} = \int f(x).dx &= n.h.(...+a_{i-2}y_{i-2}+a_{i-1}y_{i-1}+a_i y_i + \\ &+ a_{i+1}y_{i+1}+a_{i+2}y_{i+2} +...) + R_{n+1} \end{aligned} \quad (2.107)$$

yaklaşım formülü verilebilir. Burada aralık sayısı n , birim adım h , a_i söz konusu konuma göre bulunması istenen katsayılarıdır. Taylor serileri yöntemi ile bu hesaplamalar yapılabilir.

Bundan başka yaklaşım formülleri, daha karmaşık olarak *Stirling ve Bessel* tarafından elde edilmiş olup, bunlar Tablo 9.'da verilmiştir [1].

Simpson yaklaşımı çeşitli aralıklardaki integraller

için Tablo 8.'de görülmektedir.

Stirling ve Bessel ise sonlu farklar formüllerini karmaşık olarak ele almış, fonksiyonun herhangi bir noktasındaki bilinen değerlerinden hareketle ilerideki bir noktadaki bilinmeyen değerleri için Tablo 9.'daki formülleri vermişlerdir [1].

İNTEGRAL	YAKLAŞIM FORMÜLÜ	HATA
$\int_{-h}^h f(x)dx$	$\frac{h}{3} \cdot (y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1})$	$-\frac{h^5}{90} y''''_{(1v)}$
$\int_0^{2h} f(x)dx$	$\frac{h}{9} \cdot (y_i + 16y_{i+1} + y_{i+2})$	$\frac{2h^4}{27} y'''_0$
$\int_0^{3h} f(x)dx$	$\frac{3h}{8} \cdot (y_i + 3y_{i+1} + 3y_{i+2} + y_{i+3})$	$-\frac{3h^5}{80} y''''_{(1v)}$

Tablo 8. Simpson yaklaşımı

STIRLING
$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{3} \cdot (y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}) - \frac{h^5}{90} y''''_{(1v)}$
BESSEL
$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} \cdot (-y_{i-1} + 13y_i + 13y_{i+1} - y_{i+2}) + \frac{11h^5}{720} y''''_{(1v)}$

Tablo 9. Stirling ve Bessel yaklaşım formülleri (y_{i-1} , y_i bilinen değerler)

BÖLÜM 3

SONLU FARKLARIN HERMITE SAYISAL ÇÖZÜM YÖNTEMİNE UYGULANMASI

Sonlu farklarla yapılan çözümlerdeki hatanın, Hermite operatörleri yardımı ile daha çok türevleri içeren terimlere aktarılarak azaltıldığı gözlenmiştir. Bu çalışmada sonlu farklar yönteminin ileri bir aşaması olan *Hermite sayısal çözüm yöntemi* kullanılarak sonlu denklem takımlarına varılmıştır. Bu metod birçok çözüm yollarına göre (sonlu farklar yöntemi, seriler ile çözüm v.b.) daha kesin sonuçlar vermektedir. Aşağıdaki kısımlarda Hermite yönteminin, farklar yöntemi ışığında açıklaması yer alacaktır.

3.1. Türevlerden Yararlanma ve Hermite' nin Yaklaşımı

Basit sonlu farkların sayısal çözümlere uygulanmasında, çözümü aranan diferansiyel denkleminin mertebesi ve sınır şartları bir takım zorlukları beraberinde getirmektedir. Hatanın azaltılması için aralık sayısının arttırılması fiziksel problemlerin çözümünde güçlülere yol açar. Fonksiyonun söz konusu noktalarındaki ordinatları ve türevleri arasındaki bağıntıyı veren formülleri geliştiren "Hermite'nin yaklaşımı" bu

tip güçlüklerin giderilmesine yarar.

Simpson ve *Bessel*'in yaklaşımını, Hermite aşağıdaki gibi vermiştir [2] .

$$\begin{aligned} 3(-y_{i-1} + y_{i+1}) &= h(y'_{i-1} + 4y'_i + y'_{i+1}) - \frac{h^5}{30} y_i^{(v)} \\ 24(-y_i + y_{i+1}) &= h(-y'_{i-1} + 13y'_i + 13y'_{i+1} - y'_{i+2}) + \frac{11h^5}{30} y_i^{(v)} \end{aligned} \quad (3.1)$$

dir. Operatör gösterimi ile

$$D_i^r y = S_i y^{(r)} + R_i \quad (3.2)$$

yazılabilir. (3.2) eşitliğinde r türev derecesi, D_i^r farklar operatörü, S_i toplama operatörü, R_i ise kalan terimdir.

Eğer (3.2) bağıntısındaki R_i kalan terimi atılırsa, türevli terimler S_i operatörleri ile çarpılıp yerlerine türevsiz terimleri kapsayan $D_i^r y$ denklemleri gelecektir. Yani

$$D_i^r y = S_i y_i^{(r)} \quad (3.3)$$

olacaktır. En genel halde

$$\Phi_R = \sum_m^n (D_m^r y_m - S_m y_m^{(r)}) \quad (3.4)$$

şeklinde alınması büyük kolaylıklar sağlayacaktır. Burada n nokta sayısı, D_m^r söz konusu noktadaki farklar operatörü, S_m söz konusu noktadaki toplama operatörü Φ_R ise hata terimini göstermektedir. [2].

Fonksiyonun m noktasındaki söz konusu modül koordinatına göre aldığı değer y_m , r -nci türevin aldığı değer ise $y_m^{(r)}$ dir.

(3.1) bağıntısındaki ilk denklemin Hermite operatörleri cinsinden gösterimi,

$$\begin{aligned} S_i &= h(1,4,1) \\ D_i &= (-3,0,3) \\ R_i &= \frac{1}{30}h^5 y_i^{(5)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

şeklindedir.

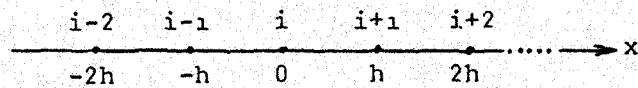
Hermite operatörlerine ait ağırlıkların tayin edilebilmesi, hata teriminin sıfır olması kabulü ile Taylor serilerinden yararlanılarak bulunur.

3.2. Bir Boyutlu Hermite Operatörlerinin Eşit Aralıklarda Taylor Serileri ile Elde Edilmesi

Bir boyutlu Hermite formülleri için

$$y_i = y_0 + \frac{h_i}{1!}y_0' + \frac{h_i^2}{2!}y_0'' + \frac{h_i^3}{3!}y_0''' + \dots \quad (3.6)$$

Taylor serileri kullanılacaktır.



Şekil 19. Merkezi farklarda apsis indisleri

Örnek 3.1.

Birim adım h , türev derecesinin 2 olması halinde 3 noktalı konum için Hermite operatörlerinin eldesi aşağıda verilmiştir.

Buna göre (3.4) formülü,

$$\Phi_R = D_{i-1}^2 y_{i-1} + D_i^2 y_i + D_{i+1}^2 y_{i+1} - (S_{i-1} y_{i-1}'' + S_i y_i'' + S_{i+1} y_{i+1}'') \quad (3.7)$$

şeklini alır. y ve y'' lü terimlerin Taylor açılımına göre yazılımları,

$$\begin{aligned} y_{i-1} &= y_0 - \frac{h}{1} y_0' + \frac{h^2}{2} y_0'' - \frac{h^3}{6} y_0''' + \frac{h^4}{24} y_0^{(4)} - \frac{h^5}{120} y_0^{(5)} \\ y_i &= y_0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$y_{i+1} = y_0 + \frac{h}{1} y_0' + \frac{h^2}{2} y_0'' + \frac{h^3}{6} y_0''' + \frac{h^4}{24} y_0^{(4)} + \frac{h^5}{120} y_0^{(5)}$$

ve

$$\begin{aligned} y_{i-1}'' &= y_0'' - \frac{h}{1} y_0''' + \frac{h^2}{2} y_0^{(4)} - \frac{h^3}{6} y_0^{(5)} + \frac{h^4}{24} y_0^{(6)} - \frac{h^5}{120} y_0^{(7)} \\ y_i'' &= y_0'' \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$y_{i+1}'' = y_0'' + \frac{h}{1} y_0''' + \frac{h^2}{2} y_0^{(4)} + \frac{h^3}{6} y_0^{(5)} + \frac{h^4}{24} y_0^{(6)} + \frac{h^5}{120} y_0^{(7)}$$

dir. (3.8) ve (3.9) eşitlikleri (3.7) de yerine konursa

$$\begin{aligned} \Phi_R &= D_{i-1}^2 (y_0 - \frac{h}{1} y_0' + \frac{h^2}{2} y_0'' - \frac{h^3}{6} y_0''' + \frac{h^4}{24} y_0^{(4)} - \frac{h^5}{120} y_0^{(5)}) + D_i^2 y_0 + \\ &+ D_{i+1}^2 (y_0 + \frac{h}{1} y_0' + \frac{h^2}{2} y_0'' + \frac{h^3}{6} y_0''' + \frac{h^4}{24} y_0^{(4)} + \frac{h^5}{120} y_0^{(5)}) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -S_{i-1} \left(y''_0 - \frac{h}{1} y'''_0 + \frac{h^2}{2} y^{(1v)}_0 - \frac{h^3}{6} y^{(v)}_0 + \frac{h^4}{24} y^{(v1)}_0 - \frac{h^5}{120} y^{(v11)}_0 \right) - \\
& -S_i y''_0 (0 - 0 - 0 - 0 - 0) - \\
& -S_{i+1} \left(y''_0 + \frac{h}{1} y'''_0 + \frac{h^2}{2} y^{(1v)}_0 + \frac{h^3}{6} y^{(v)}_0 + \frac{h^4}{24} y^{(v1)}_0 + \frac{h^5}{120} y^{(v11)}_0 \right) \\
& \quad \quad \quad (3.10)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

$\phi_R = 0$ kabul edilip her iki yönde türevlerin katsayılarını teşkil edip, sıfırlanması ile elde edilen denklem takımının çözümü sonucu Hermite operatörlerinin hesaplanmasına geçebiliriz.

$$\begin{aligned}
& y_0 (D_{i-1}^2 + D_i^2 + D_{i+1}^2) + h y'_0 (-D_{i-1}^2 + D_{i+1}^2) + \\
& + \frac{h^2}{2} y''_0 [D_{i-1}^2 + D_{i+1}^2 - \frac{2}{h^2} (S_{i-1} + S_i + S_{i+1})] + \\
& + \frac{h^3}{6} y'''_0 [-D_{i-1}^2 + D_{i+1}^2 - \frac{6}{h^2} (-S_{i-1} + S_{i+1})] + \\
& + \frac{h^4}{24} y^{(1v)}_0 [D_{i-1}^2 + D_{i+1}^2 - \frac{12}{h^2} (S_{i-1} + S_{i+1})] + \\
& + \frac{h^5}{120} y^{(v)}_0 [-D_{i-1}^2 + D_{i+1}^2 - \frac{20}{h^2} (-S_{i-1} + S_{i+1})] = 0 \quad (3.11)
\end{aligned}$$

(3.11) eşitliğinin olabilmesi için y ve türevleri fonksiyonlarının katsayıları sıfıra eşit olması gerekir.

Operatörlerin oluşturduğu denklem takımı,

$$\begin{aligned}
& D_{i-1}^2 + D_i^2 + D_{i+1}^2 = 0 \\
& -D_{i-1}^2 + D_{i+1}^2 = 0 \\
& D_{i-1}^2 + D_{i+1}^2 - \frac{2}{h^2} (S_{i-1} + S_i + S_{i+1}) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-D_{i-1}^2 + D_{i+1}^2 - \frac{6}{h^2} (-S_{i-1} + S_{i+1}) &= 0 \\
D_{i-1}^2 + D_{i+1}^2 - \frac{12}{h^2} (S_{i-1} + S_{i+1}) &= 0 \\
-D_{i-1}^2 + D_{i+1}^2 - \frac{20}{h^2} (-S_{i-1} + S_{i+1}) &= 0
\end{aligned} \tag{3.12}$$

şeklindedir. Bu denklem sisteminin çözümü için şart denklem oluşturulmalıdır. Bu nedenle $D_{i+1}^2 = 1$ alınarak diğer operatörler hesaplanır. (3.12) sistemi matris formunda yazılımı,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -\frac{2}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & -\frac{2}{h^2} \\ -1 & 0 & 1 & \frac{6}{h^2} & 0 & -\frac{6}{h^2} \\ 1 & 0 & 1 & -\frac{12}{h^2} & 0 & -\frac{12}{h^2} \\ -1 & 0 & 1 & \frac{20}{h^2} & 0 & -\frac{20}{h^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_{i-1}^2 \\ D_i^2 \\ D_{i+1}^2 \\ S_{i-1} \\ S_i \\ S_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

dır. Gauss eliminasyonu sonucu operatörlerin değerleri

$$\begin{aligned}
D_{i+1}^2 &= 1, \quad D_i^2 = -2, \quad D_{i-1}^2 = 1 \\
D_m^2 &\equiv (1, -2, 1) \\
S_{i-1} &= \frac{h^2}{12}, \quad S_i = \frac{10h^2}{12}, \quad S_{i+1} = \frac{h^2}{12} \\
S_m &\equiv \frac{h^2}{12} (1, 10, 1)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

olarak belirlenir. Bulunan bu operatörlerle (3.4) ifade-
sine göre örnek (2.3), 5. noktalı konumda ele alınacak o-
lursa,

$$(1. y_{i-1} + (-2)y_i + 1.y_{i+1}) = \frac{h^2}{12} [1.y''_{i-1} + (10)y''_i + 1.y''_{i+1}] \quad (3.15)$$

denklemini yazılabilir. Bu örnekteki çökme değerlerini
içeren denklemlere Hermite operatörleri uygulandığında

$i = 1$ için

$$\frac{h^2}{12} (v''_0 + 10v''_1 + v''_2) = v_0 - 2v_1 + v_2$$

$i = 2$ için

$$\frac{h^2}{12} (v''_1 + 10v''_2 + v''_3) = v_1 - 2v_2 + v_3$$

$i = 3$ için

$$\frac{h^2}{12} (v''_2 + 10v''_3 + v''_4) = v_2 - 2v_3 + v_4 \quad (3.16)$$

denklemleri elde edilir.

$$v''_0 = 0, v''_4 = 0 \quad (\text{moment değerleri}) \quad (3.17)$$

sınır şartları yerlerine konup, (3.16) sistemi çözülür-
se,

$$v_2 = v\left(\frac{L}{2}\right) = 0,0087922 \cdot \frac{qL^4}{E.I_0} \quad (3.18)$$

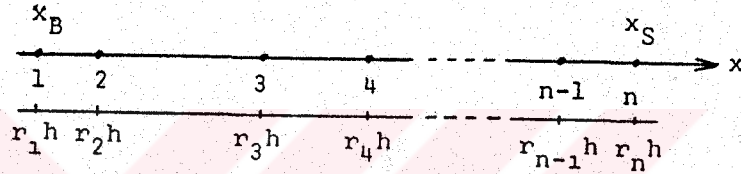
sonucu elde edilir. Hata yüzdesi, % 0,0886 dır.

Bir boyutlu Hermite yöntemi, n nokta için ileri farklar uygulandığında türev derecesi 1 olması durumundaki (3.4) eşitliği,

$$D_1 y_1 + D_2 y_2 + \dots + D_n y_n - (S_1 y_1' + S_2 y_2' + \dots + S_n y_n') = 0 \quad (3.19)$$

şeklini alır.

3.3. Bir Boyutlu Hermite Yönteminin, Farklı Aralıklar İçin Genelleştirilmesi



Şekil 20. Hermite yönteminin farklı aralıklar için nokta oran apsisleri

Şekil 20.'e göre birim aralık,

$$h = \frac{x_S - x_B}{(\text{aralık sayısı})} \quad (3.20)$$

olmak üzere nokta oran apsisleri $r_1 h, r_2 h, r_3 h, \dots, r_n h$ şeklinde gösterelim. r_i 'ler söz konusu modülün noktalarının geline noktaya göre uzaklıklarının oran olarak karşılıklarıdır.

$$h_i = r_i \cdot h \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.21)$$

dir.

Bulunan nokta sayısına göre bu oranlar Taylor serisinde yerlerine konarak, türevli terimlerin katsayıları teşkil edilir.

$$y_i = y_0 + \frac{r_i h}{1!} y_0' + \frac{(r_i h)^2}{2!} y_0'' + \frac{(r_i h)^3}{3!} y_0''' + \dots \quad (3.22)$$

$$y_i' = y_0' + \frac{r_i h}{1!} y_0'' + \frac{(r_i h)^2}{2!} y_0''' + \frac{(r_i h)^3}{3!} y_0^{(iv)} + \dots \quad (3.23)$$

ifadelerinden ve hata teriminin de sıfırlılığı kabulünden 3 noktalı konum için (3.19) bağıntısı,

$$\sum_{i=1}^3 D_i y_i - \sum_{i=1}^3 S_i y_i' = 0 \quad (3.24)$$

olacaktır. Hermite operatörlerini; y_i ve y_i' terimlerinin katsayıları olacak şekilde düzenlersek,

$$\begin{aligned} & y_0 \cdot [D_1 + D_2 + D_3 - (0 + 0 + 0)] + \\ & h y_0' [r_1 D_1 + r_2 D_2 + r_3 D_3 - 1. (S_1 + S_2 + S_3)] + \\ & h^2 y_0'' [r_1^2 D_1 + r_2^2 D_2 + r_3^2 D_3 - 2. (r_1 S_1 + r_2 S_2 + r_3 S_3)] + \\ & h^3 y_0''' [r_1^3 D_1 + r_2^3 D_2 + r_3^3 D_3 - 3. (r_1^2 S_1 + r_2^2 S_2 + r_3^2 S_3)] + \\ & h^4 y_0^{(iv)} [r_1^4 D_1 + r_2^4 D_2 + r_3^4 D_3 - 4. (r_1^3 S_1 + r_2^3 S_2 + r_3^3 S_3)] + \\ & h^5 y_0^{(v)} [r_1^5 D_1 + r_2^5 D_2 + r_3^5 D_3 - 5. (r_1^4 S_1 + r_2^4 S_2 + r_3^4 S_3)] \\ & = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

yazılabilir. Söz konusu operatörlerin hesaplanması için sağ tarafı sıfır olan denklemler alınarak oluşturulacak denklem sisteminin matris formu,

$$\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
r_1 & r_2 & r_3 & -1 & -1 & -1 \\
r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 & -2r_1 & -2r_2 & -2r_3 \\
r_1^3 & r_2^3 & r_3^3 & -3r_1^2 & -3r_2^2 & -3r_3^2 \\
r_1^4 & r_2^4 & r_3^4 & -4r_1^3 & -4r_2^3 & -4r_3^3 \\
r_1^5 & r_2^5 & r_3^5 & -5r_1^4 & -5r_2^4 & -5r_3^4
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
D_1 \\
D_2 \\
D_3 \\
S_1 \\
S_2 \\
S_3
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0
\end{bmatrix}
\quad (3.26)$$

$\underline{G} \qquad \qquad \underline{X} \qquad \qquad \underline{B}$

şeklindedir.

Bu sonuç,

$$\underline{G} \cdot \underline{X} = \underline{B} \quad (3.27)$$

ile kısa olarak verilebilir. Daha önce merkezi farklarla yapılan detaylı işlemler (3.19) eşitliği için uygulayacak olursak, Tablo 10. 'daki en genel denklem sistemine varılır. Tablo 10. 'daki denklem sisteminin sağ tarafı sıfır vektörüdür. Bu durumdaki matematiksel problemin çözümü için şart denklem veya denklemler yazılmasıdır. Operatörlerin bulunması için yetecek sayıda denklem alınarak alttaki denklem ya da denklemler silinir, yerlerine şart denklemler yazılır.

Operatörlerin hesaplanması için kullanılan akış diyagramı Tablo 11.'de görülmektedir.

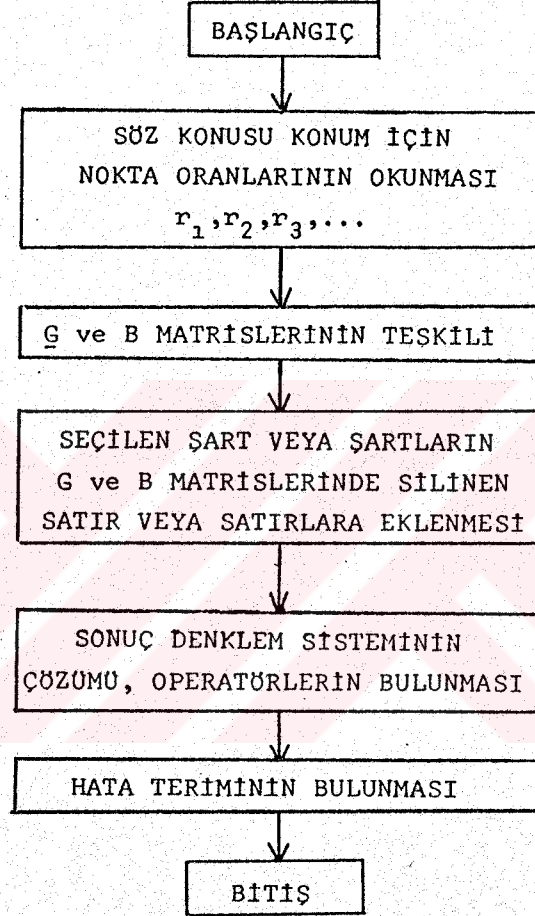
1	1	1	1	0	0	0	0	D_1	0
r_1	r_2	r_3	r_4	-1	-1	-1	-1	D_2	0
r_1^2	r_2^2	r_3^2	r_4^2	$-2r_1$	$-2r_2$	$-2r_3$	$-2r_4$	D_3	0
r_1^3	r_2^3	r_3^3	r_4^3	$-3r_1^2$	$-3r_2^2$	$-3r_3^2$	$-3r_4^2$	D_4	0
=									
$r_1^{(n-3)}$	$r_2^{(n-3)}$	$r_3^{(n-3)}$	$r_4^{(n-3)}$	$-(n-3)r_1^{(n-4)}$	$-(n-3)r_2^{(n-4)}$	$-(n-3)r_3^{(n-4)}$	$-(n-3)r_4^{(n-4)}$	S_{n-2}	0
$r_1^{(n-2)}$	$r_2^{(n-2)}$	$r_3^{(n-2)}$	$r_4^{(n-2)}$	$-(n-2)r_1^{(n-3)}$	$-(n-2)r_2^{(n-3)}$	$-(n-2)r_3^{(n-3)}$	$-(n-2)r_4^{(n-3)}$	S_{n-1}	0
$r_1^{(n-1)}$	$r_2^{(n-1)}$	$r_3^{(n-1)}$	$r_4^{(n-1)}$	$-(n-1)r_1^{(n-2)}$	$-(n-1)r_2^{(n-2)}$	$-(n-1)r_3^{(n-2)}$	$-(n-1)r_4^{(n-2)}$	S_n	0

$\underline{G}$

$\underline{X}$

$\underline{B}$

Tablo 10. Bir boyutlu Hermite operatörlerinin hesaplanması için oluşan denklem sistemi

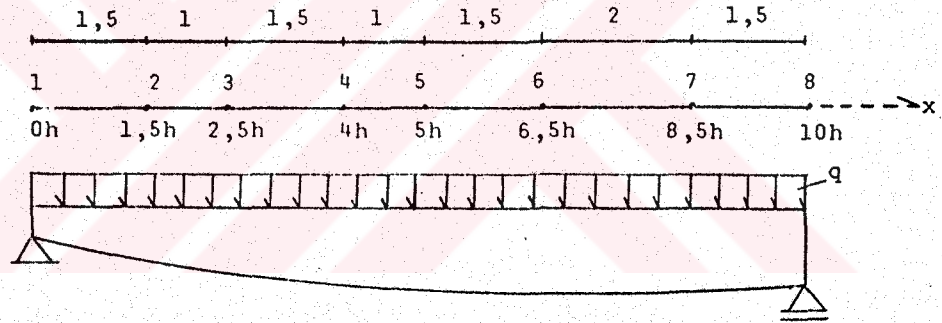


Tablo 11. Operatörlerin bulunması için hazırlanan programın akış diyagramı

Daha önce ele alınan örnek (2.2) kirişinin değişken aralıklarda Hermite sayısal çözümünde; operatörlerin ve denklem sistemlerinin çözümü esnasında karşımıza çıkan işlem yoğunluğu nedeni ile hesaplamalar bilgisayar yardımı ile yapılmıştır.

Örnek 3.2.

İkinci bölümdeki örnek (2.2) kirişine; merkezi farklarda üçlü konum ve türev derecesi 2 için değişken adımlar alarak Hermite yönteminin uygulanması.



Şekil 21. Değişken aralıklarda Hermite çözümü için nokta oran apsisleri

Yukarıdaki şekle göre $h = \frac{\text{Boy}}{\text{Oran}} = \frac{L}{10}$ birim adım olarak alınır. Üçlü konum için merkezi farklarda $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ noktaları için Hermite operatörlerinin hesapları çıkartılmıştır.

1. nokta için:

$$D_1 = -4,800 \quad S_1 = -1,667$$

$$D_2 = 12,000 \quad S_2 = -6,333$$

$$D_3 = -7,200 \quad S_3 = -1,000$$

2. nokta için:

$$D_1 = 32,000 \quad S_1 = 7,333$$

$$D_2 = -80,000 \quad S_2 = 51,667$$

$$D_3 = 48,000 \quad S_3 = 1,000$$

3. nokta için:

$$D_1 = 6,545 \quad S_1 = 0,136$$

$$D_2 = -10,909 \quad S_2 = 7,045$$

$$D_3 = 4,364 \quad S_3 = 1,000$$

4. nokta için:

$$D_1 = 32,000 \quad S_1 = 7,333$$

$$D_2 = -80,000 \quad S_2 = 51,667$$

$$D_3 = 48,000 \quad S_3 = 1,000$$

5. nokta için:

$$D_1 = 6,545 \quad S_1 = 0,136$$

$$D_2 = -10,909 \quad S_2 = 7,045$$

$$D_3 = 4,364 \quad S_3 = 1,000$$

6. nokta için:

$$D_1 = 3,368 \quad S_1 = 0,351$$

$$D_2 = -5,895 \quad S_2 = 7,491$$

$$D_3 = 2,526 \quad S_3 = 1,000$$

7. nokta için:

$$\begin{array}{ll} D_1 = 7,200 & S_1 = 2,850 \\ D_2 = -16,800 & S_2 = 21,350 \\ D_3 = 9,600 & S_3 = 1,000 \end{array}$$

8. nokta için:

$$\begin{array}{ll} D_1 = 9,000 & S_1 = 6,375 \\ D_2 = -21,000 & S_2 = 20,125 \\ D_3 = 12,000 & S_3 = 5,000 \end{array}$$

bulunur. Her nokta için (3.7) bağıntısı yazılarak, bilinmeyen sayısı 8 olan 8 adet denklem elde edilir. Elde edilen denklem sisteminin çözümünden çökme değerleri saptanır. Bu değerler,

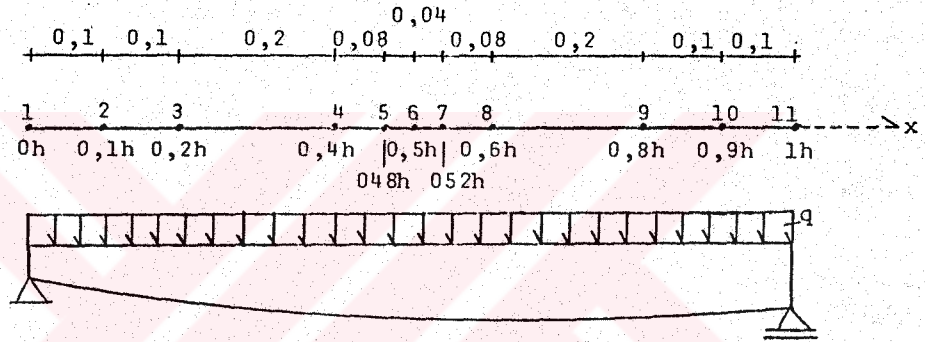
$$\begin{aligned} v_1 &= 4,137982 \cdot 10^{-7} \approx 0 \\ v_2 &= 4,312022 \cdot 10^{-3} \cdot qL^4/E \cdot I_0 \\ v_3 &= 6,574109 \cdot 10^{-3} \cdot qL^4/E \cdot I_0 \\ v_4 &= 8,542548 \cdot 10^{-3} \cdot qL^4/E \cdot I_0 \\ v_5 &= 8,800381 \cdot 10^{-3} \cdot qL^4/E \cdot I_0 \\ v_6 &= 7,656871 \cdot 10^{-3} \cdot qL^4/E \cdot I_0 \\ v_7 &= 3,836675 \cdot 10^{-3} \cdot qL^4/E \cdot I_0 \\ v_8 &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada $v(0) = 0$, $v_8(L) = 0$ olduğu görülmektedir. $v_5(L/2)$ değeri klasik çözüm sonunda elde edilen değere eşit çıktığı gözlenmiştir. İkinci kriter noktası olarak $v_{\max}$ değerinin de irdelenmesi

örnek (3.3) de yapılacaktır.

Örnek 3.3.

Bir önceki problemin 10 değişken aralık için incelenmesinde, $v_{\max}$ nin 5. noktadaki v_5 değeri olarak seçilmesi esas alınmıştır. Bu nedenle 6. nokta kirişin orta noktasını belirlemektedir. Bu şartlar Şekil 22.' de görülmektedir.



Şekil 22 .Değişken aralıkların sıklaştırılması seçimi ile Hermite çözümü

Bu konuma göre seçilen noktalardaki çökme değerleri

$$\begin{aligned}
 v_1 &= -5,955498 \cdot 10^{-8} \approx 0 \\
 v_2 &= 2,963442 \cdot 10^{-3} \cdot qL^4/E.I_0 \\
 v_3 &= 5,530478 \cdot 10^{-3} \cdot qL^4/E.I_0 \\
 v_4 &= 8,542258 \cdot 10^{-3} \cdot qL^4/E.I_0 \\
 v_5 &= 8,816418 \cdot 10^{-3} \cdot qL^4/E.I_0 \\
 v_6 &= 8,800005 \cdot 10^{-3} \cdot qL^4/E.I_0 \\
 v_7 &= 8,750356 \cdot 10^{-3} \cdot qL^4/E.I_0 \\
 v_8 &= 8,229456 \cdot 10^{-3} \cdot qL^4/E.I_0
 \end{aligned}$$

$$v_9 = 4,979556.10^{-3} \cdot qL^4/E.I_0$$

$$v_{10} = 2,606981.10^{-3} \cdot qL^4/E.I_0$$

$$v_{11} = 0$$

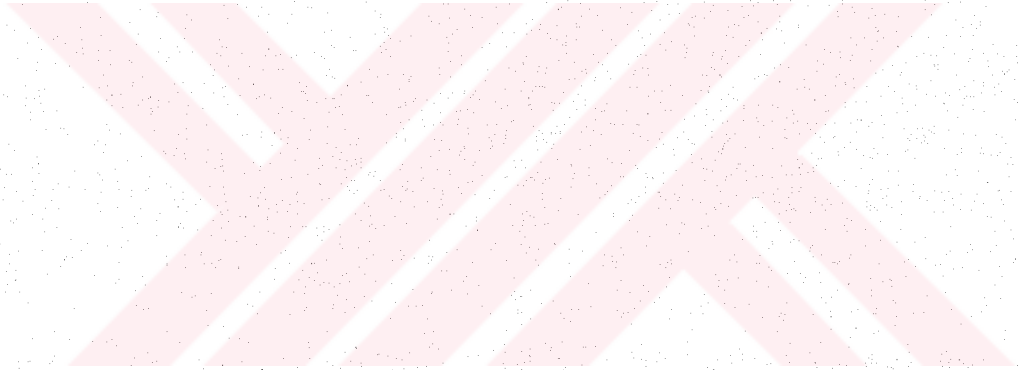
olarak bulunmuştur. Burada ise,

$$v_{\max} = v_5$$

ve

$$v_6 = v(L/2)$$

değerleri klasik yöntemle elde edilen değerlere çok yakın hatta eşit çıkmıştır.



BÖLÜM 4

SONUÇLARIN KARŞILAŞTIRILMASI VE ÖNERİLER

4.1. Eşit Aralıklar için Uygulama Sonuçları

Örnek (2.2) nin klasik integral yöntemiyle elde edilen

$$v(L/2) = 0,00880 \cdot qL^4 / E.I_0$$

ve

$$v_{\max}(0,48.L) = 0,008817037 \cdot qL^4 / E.I_0$$

değerleri kriter olarak esas alınmıştır. Merkezi farklarda eşit aralıklar için elde edilen değerlerle karşılaştırıldığında, aralık sayısının sıklaştırılması işlemi ile daha sağlıklı sonuçlara varıldığı gözlenmiştir.

Örnek (2.3) ün merkezi farklarda 5 noktalı ve 3'lü modül kullanımıyla çözümü sonunda (2.100) değerleri bulunmuştur. Kirişin orta noktasındaki çökme değeri olan $v_2(L/2)$ deki hatanın % 4,84 olduğu görülmüştür.

Örnek (2.4) de ise izafi dış noktalar ile birlikte 7 nokta alınarak 5 li modül seçimi yapılmış ve hesaplamalar neticesinde $v_2(L/2)$ deki hatanın % 0,1 olduğu sonucuna varılmıştır.

Daha sık eşit aralıklar için alınacak noktalardaki v bilinmeyenlerinin artması, oluşturulacak denklem tamlarının hacmini genişletecektir. Bu nedenle hesapmalardaki işlem çokluğu, bilgisayar kullanımı ile giderilebilir. Bilgisayar çözüm sürelerinin azaltılması bazı noktalardaki değerlerin hesaplatılmaması ile mümkündür. Çünkü bazı noktalarda, sınır şartlarından dolayı bilinen v değerlerini tekrar makinaya hesaplattırmak yersiz olacaktır. Bu nedenle çözüm sonunda elde edilen grafikteki değişmelerin yoğun olduğu bölgeyi daha sık aralıklar ile grafiğin, lineere yakın davranış gösteren kısımlarının geniş aralıklarda incelenmesi en mantıklı seçim olacaktır. Bu olumlu yaklaşım bizi, eşit olmayan aralıklardaki hesaplamalara yöneltmiştir.

Klasik çözüm yöntemleri ile çökme değerleri dışındaki büyüklüklerin (dönme, moment, dış yayılı yük, kesme kuvveti v.b. mekanik büyüklükler) hesaplanması çok zordur. Oysa sonlu farklarda, nokta nokta inceleme yapılması bu büyüklüklerin hesabını kolaylaştırmaktadır.

4.2. Değişken Aralıklar için Uygulama Sonuçları

Eşit aralıklar için ele alınan (2.2), (2.3) ve (2.4) örnekleri, Hermite çözüm yöntemi ile ele alınarak hata terimi Taylor serisi yardımı ile daha fazla türevli terimlere aktarılmıştır. Bu nedenle hata yüzdelerinin daha da düşürülmesi mümkün olmaktadır.

Örnek (3.1) de türev mertebesinin 2, merkezi farklarda 3' lü modülün seçimi ile yapılan hesap sonunda

hatanın % 0,0886 olduğu saptanmıştır.

Örnek (3.2) de 7 değişken aralık alınarak yapılan çözüm sonundaki değerlerin, kriter değerlerine çok yakın çıktığını hatta eşit olduğunu görmekteyiz. Ayrıca bu örnekte 10 eşit aralık alınarak aynı sonuçlara varıldığı gözlenmiştir. Seçilen eşit ve değişken aralık sayıları arasındaki fark, 7 değişken aralık seçiminin hesap süresi bakımından ideal olduğunu vurgulamaktadır.

Örnek (3.3) ün çözümünde de değişken aralığın 10 olması, 50 eşit aralıkla yapılan çözüme eşdeğer olduğu görülmüştür.

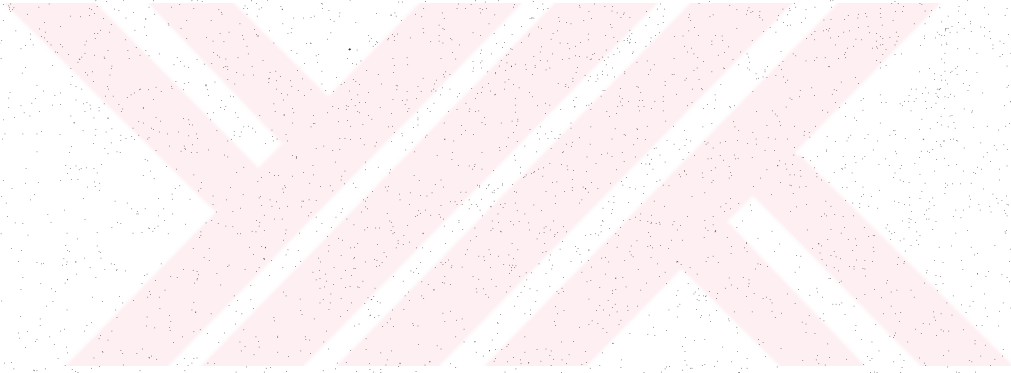
Eşit aralıklarda sağlıklı sonuçların, aralık sayısının arttırılması ile mümkün olduğunu vurgulamıştık. Ancak aynı sağlıklı sonuçların eldesi, değişken aralıklarda daha az adım sayısı ile yapılabilmektedir.

4.3. Öneriler

Sınır değer problemlerinin çözümünde kullanılan nümerik yöntemler, klasik çözüm yöntemlerindeki birçok zorlukların giderilmesinde önemli rol oynarlar. Bu çalışmada, sonlu farklar ve Hermite sayısal çözüm yöntemlerinin, klasik integral çözümünden elde edilen sonuçlara çok yakın değerler verdiği ve hatta daha üstün oldukları gözlenmiştir. Boyutları büyük denklem takımlarının çözümüne kolaylıklar getiren bu yöntem, mühendislik bilimlerine uyarlanabilir oluşu yeni çalışmalara olanak sağlayacaktır. Bu nedenle farklı taşıyıcı sis-

temlere (*yüzeysel taşıyıcılar, kabuk, perde, plak v.b.*) aktarılarak çözüm tekniklerinin türetilmesi açısından verilen bu yöntemin iki boyutta geliştirilmesi doktora çalışması olarak ele alınabilir.

Matematiğin bu yönteminin bütün mühendislik bilimlerine uygulanabilir olması yeni araştırma konularının ortaya çıkmasına yardımcı olabilecektir.



KAYNAKLAR

- 1- ZURMÜHL, R., Praktische Mathematik, Springer-Verlag, Wien, 1965.
- 2- TÖZÜN, M.E., Hermite Yönteminin Gelişigüzel Sınırlı Plak ve Perdelerde Uygulanması, (Doktora Tezi), Yıldız Ü.Mühendislik Fakültesi, İstanbul, Mart-1983.
- 3- SPIEGEL, R.M., Advanced Calculus, Schaum's Outline Series, Mc Graw-Hill, New York, 1968.
- 4- SCHEID, F., Numerical Analysis, Schaum's Outline Series, Mc Graw-Hill International Book Co., Singapore, 1983.
- 5- AKTAŞ, Z., ÖNCÜL, H., ve URAL, S., Sayısal Çözümleme Cilt.1, O.D.T.Ü Yayını, Ankara, 1981.
- 6- HACISALİHOĞLU, H.H., Lineer Cebir, 3.Baskı, Gazi Üni. Fen-Edebiyat Fak. yayın no: 7, X.Bölüm, Ankara, 1985.
- 7- KARATAŞ, H., ÖZKAN, İ., Mühendislik Mekaniğinde Statik Problemleri, Çağlayan Basımevi, İstanbul, 1983.
- 8- İNAN, M., Cisimlerin Mukavemeti, Arı Kitapevi Matbaası, İstanbul, 1967.
- 9- HILDEBRAND, F.B., Introduction To Numerical Analysis, Tata Mc Graw-Hill Publishing Co.Ltd., New Delhi, 1956.
- 10- BECKER, J., DREYER, J.H., HAACKE, W., "Et. al.", Numerische Mathematik für Ingenieure, B.G. Teubner. Stuttgart, 1977.
- 11- YAŞAR, İ.B., Diferensiyel Denklemler, Gazi Üni. Fen-Edebiyat Fak. Yayını, Ankara, 1987.



HERMİTE SAYISAL ÇÖZÜMÜN
BİLGİSAYAR PROGRAMI

```
10 READ NOK,MD,TR,QQ,LC,EE,I0
20 DATA 8,3,2,1,1,1,1
30 MD2=2*MD:KEY OFF
40 DIM A(MD2,MD2),FAK(MD2),R(NOK),D(MD2,MD2),E(MD2+NOK),X(MD2+NOK)
50 DIM VT(NOK),A2(NOK,NOK),B2(NOK),D2(NOK,NOK),B(MD2)
60 FOR CK=1 TO NOK
70 READ R(CK)
80 NEXT CK
90 HA=LC/R(NOK)
100 HTR=HA*TR
110 FOR CK=1 TO NOK
120 Z5=R(CK)*HA
130 VT(CK)=-((QQ*LC*Z5*(LC-Z5))/(2*EE*I0*(LC+Z5)))
140 NEXT CK
150 DATA 0,1.5,2.5,4,5,6.5,8.5,10
160 FAK(0)=1
170 FOR FK=1 TO MD2-1
180 FAK(FK)=FK*FAK(FK-1)
190 NEXT FK
200 FOR I=1 TO NOK
210 FOR YI=1 TO MD2
220 B(YI)=0
230 NEXT YI
240 C2=R(I)
250 FOR SS=1 TO MD2
260 FOR ZZ=1 TO MD2
270 A(SS,ZZ)=0
280 NEXT ZZ
290 NEXT SS
300 FOR SZ=1 TO MD
310 A(1,SZ)=1
320 NEXT SZ
330 IF MD=5 THEN 340 ELSE 400
340 IF I=1 THEN C1=0:RB=1
350 IF I=2 THEN C1=1:RB=2
360 IF I>2 AND I<NOK-1 THEN C1=2:RB=3
370 IF I=NOK-1 THEN C1=3:RB=4
380 IF I=NOK THEN C1=4:RB=5
390 GOTO 430
400 IF I=1 THEN C1=0:RB=1
410 IF I>1 AND I<NOK THEN C1=1:RB=2
420 IF I=NOK THEN C1=2:RB=3
430 FOR K=2 TO MD2
440 II=I-1
450 FOR J=1 TO MD2
```

```

460 II=II+1
470 IF J>MD THEN 480 ELSE 540
480 IF TR>K-1 THEN 560
490 RR=J-MD
500 KK=K-1
510 KR=K-TR
520 A(K,J)=-{FAK(KK)/FAK(KK-TR)}*A(KR,RR)
530 GOTO 550
540 A(K,J)=(R(II-C1)-C2)^(K-1)
550 NEXT J
560 NEXT K:CLS
570 PRINT "I=";I:PRINT STRING$(5,"*"):PRINT
580 FOR XT=1 TO MD2
590 FOR YT=1 TO MD2
600 PRINT USING "#####";A(XT,YT);
610 NEXT YT
620 PRINT
630 NEXT XT
640 IF I=1 OR I=NOK THEN 650 ELSE 740
650 FOR L1=MD2-1 TO MD2
660 FOR L2=1 TO MD2
670 A(L1,L2)=0
680 NEXT L2
690 NEXT L1
700 A(MD2,MD2)=1:B(MD2-1)=12
710 IF I=1 THEN B(MD2)=-1:A(MD2-1,2)=1
720 IF I=NOK THEN B(MD2)=5:A(MD2-1,3)=1
730 GOTO 850
740 FOR L1=1 TO MD2
750 A(MD2,L1)=0
760 NEXT L1
770 A(MD2,MD2)=1:B(MD2)=1
780 IF MD=5 THEN 790 ELSE 840
790 IF I=2 OR I=NOK-1 THEN 800 ELSE 840
800 FOR B4=1 TO MD2
810 A(MD2-1,B4)=0
820 NEXT B4
830 A(MD2-1,MD)=1:B(MD2-1)=1
840 REM GAUSS ELEMINATION
850 M=MD2:N=MD2:EPS=.00001
860 C=0
870 FOR G=1 TO N
880 C=C+1
890 FOR IP=G TO M
900 IF ABS(A(X,G))>=ABS(A(IP,G)) THEN 920

```

```

910 X=IP
920 NEXT IP
930 FOR KJ=C TO N
940 D(C,KJ)=A(X,KJ):A(X,KJ)=A(C,KJ):A(C,KJ)=D(C,KJ)
950 NEXT KJ
960 E(C)=B(X):B(X)=B(C):B(C)=E(C)
970 X=0
980 FOR R=C TO M-1
990 Q=A(R+1,C)/A(C,C)
1000 B(R+1)=B(R+1)-Q*B(C)
1010 FOR S=C TO N
1020 A(R+1,S)=A(R+1,S)-Q*A(C,S)
1030 NEXT S:NEXT R:NEXT C
1040 IF ABS(A(M,N))<=EPS THEN 1050 ELSE 1060
1050 PRINT "DENKLEM COZUMSUZ":GOTO 1260
1060 FOR HI=M TO 1 STEP -1
1070 FOR HJ=N TO 1 STEP -1
1080 IF HI=HJ THEN 1090 ELSE 1100
1090 P=HI:T=HJ:GOTO 1110
1100 TOP=TOP+A(HI,HJ)*X(HJ)
1110 NEXT HJ
1120 X(HI)=(B(HI)-TOP)/A(P,T)
1130 TOP=0:NEXT HI
1140 PRINT :PRINT "      SONUCLAR ":PRINT STRING$(17,"-")
1150 FOR V=1 TO MD
1160 PRINT "D("V")=";:PRINT USING "#####.###";X(V)
1170 A2(I,I-RB+V)=X(V)
1180 NEXT V
1190 FOR TT=1 TO MD
1200 PRINT "S("TT")=";:PRINT USING "#####.###";X(MD+TT)
1210 TP2=TP2+X(MD+TT)*VT(1-RB+TT)
1220 NEXT TT
1230 TP2=TP2*HTR
1240 B2(I)=TP2
1250 TP2=0
1260 NEXT I:CLS
1270 PRINT " KATSAYILAR MATRISI"
1280 PRINT STRING$(22,"*")
1290 FOR I=1 TO NOK
1300 FOR J=1 TO NOK
1310 PRINT USING "###.###";A2(I,J);
1320 NEXT J
1330 PRINT
1340 NEXT I
1350 PRINT " SAG YAN MATRISI"

```

```

1360 PRINT STRING$(19,"*")
1370 FOR I=1 TO NOK
1380 PRINT USING "####.#####";B2(I)
1390 NEXT I
1400 A2(1,1)=1:A2(NOK,NOK)=1:B2(1)=0:B2(NOK)=0
1410 FOR CT=2 TO NOK
1420 A2(1,CT)=0:A2(NOK,CT-1)=0
1430 NEXT CT
1440 REM GAUSS ELEMINATION
1450 M=NOK:N=NOK:EPS=.00001
1460 C=0
1470 FOR G=1 TO N
1480 C=C+1
1490 FOR IP=G TO M
1500 IF ABS(A2(X,G))>ABS(A2(IP,G)) THEN 1520
1510 X=IP
1520 NEXT IP
1530 FOR KJ=C TO N
1540 D2(C,KJ)=A2(X,KJ):A2(X,KJ)=A2(C,KJ):A2(C,KJ)=D2(C,KJ)
1550 NEXT KJ
1560 E(C)=B2(X):B2(X)=B2(C):B2(C)=E(C)
1570 X=0
1580 FOR R=C TO M-1
1590 Q=A2(R+1,C)/A2(C,C)
1600 B2(R+1)=B2(R+1)-Q*B2(C)
1610 FOR S=C TO N
1620 A2(R+1,S)=A2(R+1,S)-Q*A2(C,S)
1630 NEXT S:NEXT R:NEXT G
1640 IF ABS(A2(M,N))<=EPS THEN 1650 ELSE 1660
1650 PRINT "DENKLEM COZUMSUZ":GOTO 1790
1660 FOR HI=M TO 1 STEP -1
1670 FOR HJ=N TO 1 STEP -1
1680 IF HI=HJ THEN 1690 ELSE 1700
1690 P=HI:T=HJ:GOTO 1710
1700 TOP=TOP+A2(HI,HJ)*X(HJ)
1710 NEXT HJ
1720 X(HI)=(B2(HI)-TOP)/A2(P,T)
1730 TOP=0:NEXT HI:CLS
1740 PRINT :PRINT "      SONUCLAR"
1750 PRINT "*****"
1760 FOR I=1 TO NOK
1770 PRINT "V("I")=";:PRINT USING "####.#####";X(I)
1780 NEXT I
1790 STOP

```

SONUCLAR

V(1)= 0.000000414

V(2)= 0.004312022

V(3)= 0.006574109

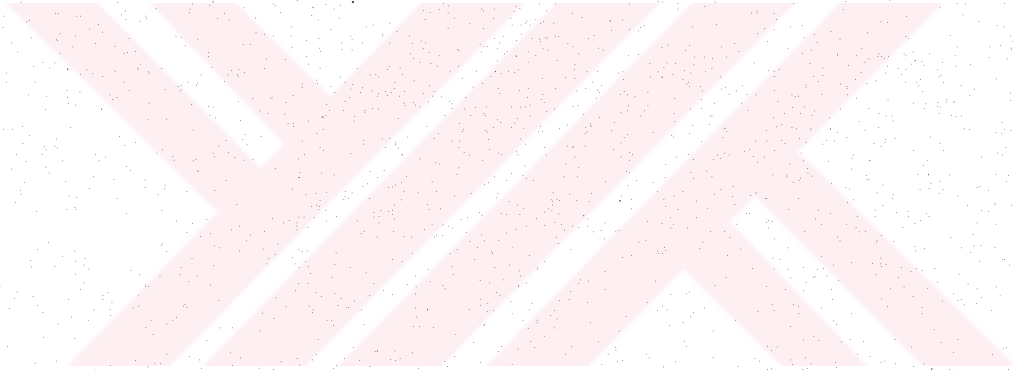
V(4)= 0.008542548

V(5)= 0.008800381

V(6)= 0.007656871

V(7)= 0.003836675

V(8)= 0.000000000



ÖZGEÇMİŞ

ÖZGEÇMİŞ

Sedat ÇEVİKEL, 1957 yılında Zonguldak'ta doğdu. 1974'de Zonguldak Mehmet Çelikel Lisesi'nden mezun oldu. 1980'de Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü bitirdi. Vatani görevini Isparta'da tamamladıktan sonra 1984'de H.Ü.Zonguldak Mühendislik Fakültesine Araştırma Görevlisi olarak girdi. 1987'de Öğretim Görevlisi olup, halen bu görevi sürdürmektedir.

