



**T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



DOKTORA TEZİ

**SONLU GRUPLAR VE BAZI ÖZEL İNDİRGENEMEZ
KARAKTERLERİ**

Jülide Miray Özkan

Matematik Bölümü Anabilim Dalı

Matematik Programı

DANIŞMAN

Doç.Dr. Temha Erkoç

Aralık, 2022

İSTANBUL

Bu alışma 29.12.2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Bölümü Anabilim Dalı Matematik Programında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Doç.Dr. Temha Erkoç (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakóltesi

Doç. Dr. Fatma alıřkan
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakóltesi

Prof. Dr. Kazım İlhan İkedä
Boğaziçi Üniversitesi
Fen Fakóltesi

Prof. Dr. Gülcan Kekeç
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakóltesi

Prof. Dr. İsmail Şuayip Güloğlu
Doğuş Üniversitesi
Fen Fakóltesi



- **İntihal Programı Beyanı**

20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin aboneli olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

- **Tezden Üretilmiş Yayınların Künye Bilgileri**

[Özkan, J. M., Erkoç, T., 2022 *On the relations between the structures of finite groups and their strongly monolithic characters*, Communications in Algebra, Vol 51, Issue 2.]
[Erkoç, T., Güngör, S. B., Özkan, J. M., 2022 *Strongly monolithic characters of finite groups*, Journal of Algebra and Its Applications.]

ÖNSÖZ

Öncelikle, hem bilgi ve birikimini paylaştığı hem de anlayışlı, destek veren ve yardımsever bir hoca olduğu için, tez danışmanım Doç. Dr. Temha Erkoç'a çok teşekkür ederim. Danışman hocam olmadan bu tezi yazamayacağımı rahatlıkla söyleyebilirim. Ayrıca, Tez İzleme Komitesi üyeleri Prof. Dr. İlhan İkedâ ve Doç. Dr. Fatma Çalışkan'a bana ayırdıkları zaman, çalışmalarına olan ilgileri ve yardımları için çok teşekkür ederim.

Tezime aktif olarak yardımda bulunmasa da, bana matematiği sevdiren ve bu tezi yazabilmemde rol oynayan bir çok temel bilgiyi öğretmiş olan Prof. Dr. Ayşe Berkman'a ve araştırmalarım her zaman saygı duyan ve ilgi gösteren, Özyeğin Üniversitesi'nde birlikte çalıştığım iş arkadaşlarıma ve hocalarıma destekleri için teşekkür ederim.

Son olarak, profesyonel hayatıma hiç bir katkıları olmasa da, bir birey olarak varoluşuma kelimelerle ifade edemeyeceğim kadar katkısı olan tüm arkadaşlarıma ve ayrıca bürokrasi ile başa çıkmama yardımcı olan Ege Baran Yalçın'a teşekkür ederim.

Aralık, 2022

Jülide Miray Özkan

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER	v
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ	vii
ÖZET	viii
SUMMARY	ix
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR	2
2.1. GRUP TEORİSİ	2
2.2. SONLU GRUPLARIN GÖSTERİLİŞ TEORİSİ VE KARAKTER TEORİSİ	5
2.2.1. Az Sayıda Lineer Olmayan İndirgenemez Karaktere Sahip Gruplar	13
2.3. MONOLİTİK VE GÜÇLÜ MONOLİTİK KARAKTERLER	17
3. MALZEME VE YÖNTEM	21
4. BULGULAR	22
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	34
KAYNAKLAR	36
ÖZGEÇMİŞ	37

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
E	: birim grup
p'	: p asalına bölünmeyen sayılar
C_n	: mertebesi n olan devirli grup
$\mathbb{Z}^+$	: pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}_p$	: p bir asal sayı olmak üzere, mertebesi p olan toplamsal grup
$\mathbb{C}$	: kompleks sayılar cismi
Q_p	: p bir asal sayı olmak üzere, mertebesi p olan genelleştirilmiş quaternion grubu
He_p	: p tek bir asal sayı olmak üzere, p^3 mertebeli ve p eksponentli abelyen olmayan grup
$F_p = GF(p)$	: mertebesi p olan sonlu cisim
$GL(n, \mathbb{C})$	: $\mathbb{C}$ cismi üzerinde, determinantı sıfırdan farklı, $n \times n$ boyutlu matrislerin oluşturduğu grup, genel lineer grup
$SL(n, F)$	: F cismi üzerinde determinantı bir olan $n \times n$ boyutlu matrislerin oluşturduğu grup, özel lineer grup
$Sp(2n, p)$	: $GF(p)$ üzerinde, $2n$ boyutlu Simplektik grup
$SU_3(F_2)$	: F_2 cismi üzerinde tanımlı, boyutu üç olan ve determinantı bir olan matrislerin oluşturduğu grup
C_4A_4	: A_4 grubunun C_4 grubu ile merkezsiz genişlemesi
$N_G(H)$	: H grubunun G grubu içindeki normalleyeni
$C_G(H)$	: H grubunun G grubu içindeki merkezleyeni
$Aut(G)$	: G grubunun otomorfizm grubu
G'	: G grubunun komutatör grubu
$Syl_p(G)$	: p asalı için, G grubunun Sylow p -alt grupları kümesi
$\Phi(G)$	: G grubunun Frattini alt grubu
$ G : N $	: N grubunun G grubu içindeki indeksi
$HcharG$	: H grubu G grubunun karakteristik alt grubu
$G \rtimes H$	: G grubunun H grubu ile yarı direkt çarpımı
$G \wr H$	: G grubunun H grubu ile çelenk çarpımı

$H = \langle K, x \rangle$	: K grubu ve x elemanın ürettiği grup
$tr(M)$	: M matrisinin izi
$\chi(1)$	: χ karakterinin derecesi
$cd(G)$	: G grubunun indirgenemez karakterlerinin dereceleri kümesi
$Irr(G N)$	: G grubunun çekirdeği N alt grubunu içermeyen indirgenemez karakterlerinin kümesi
$cd(G N)$	: G grubunun çekirdeği N alt grubunu içermeyen indirgenemez karakterlerinin derecelerinin kümesi
$ker(\chi)$	: χ karakterinin çekirdeği
$Z(\chi)$	: χ karakterinin yarı çekirdeği
$I_G(\lambda)$	: λ karakterinin G grubu içindeki inertia grubu
θ^G	: θ karakterinden G grubuna yaptırılmış karakter
θ_N	: θ karakterinin N grubuna kısıtlanması
$dl(G)$	: G grubunun türetilmiş serisinin uzunluğu

ÖZET

DOKTORA TEZİ

SONLU GRUPLAR VE BAZI ÖZEL İNDİRGENEMEZ KARAKTERLERİ

Jülide Miray Özkan

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Bölümü Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Temha Erkoç

Sonlu grupların yapısını anlamada Karakter Teorisi oldukça önemli bir yere sahiptir. Bu tezde de sonlu grupların güçlü monolitik karakterlerinin tanımı verilmiş ve bu karakterlerin sonlu grupların yapısı üzerine etkileri incelenmiştir. Elde edilen ana sonuçlar aşağıdaki gibi sıralanabilir :

- En fazla üç tane güçlü monolitik karaktere sahip sonlu gruplar çözülebilirdir,
- Abelyen olmayan sonlu grupların nilpotent olması için gerek ve yeter koşul grubun güçlü monolitik karakterlerinin çekirdeklerine göre bölüm gruplarının nilpotent olmasıdır,
- Bütün lineer olmayan indirgenemez karakterleri monolitik olan ve tam bir tane güçlü monolitik karakteri bulunan sonlu grupların sınıflandırılması verilmiştir,
- Bütün lineer olmayan indirgenemez karakterleri monolitik olan ve tam iki tane güçlü monolitik karakteri bulunan sonlu grupların sınıflandırılması verilmiştir.

Aralık 2022, 47 sayfa.

Anahtar kelimeler: indirgenemez karakterler, monolitik karakterler, güçlü monolitik karakterler

SUMMARY

Ph.D. THESIS

FINITE GROUPS AND THEIR SOME SPECIAL IRREDUCIBLE CHARACTERS

Jülide Miray Özkan

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Temha Erkoç

Character Theory holds an important place in the study of finite groups. In this thesis, we will introduce the concept of strongly monolithic characters and study their effects on the structure of finite groups. Main result of this thesis can be listed as :

- Finite groups with at most three strongly monolithic characters are solvable,
- A non abelian finite group is nilpotent if and only if the division subgroups determined by the kernels of strongly monolithic characters are nilpotent,
- The classification of finite groups whose nonlinear irreducible charatcers are all monolithic that has exactly one strongly monolithic character,
- The classification of finite groups whose nonlinear irreducible charatcers are all monolithic that has exactly two strongly monolithic characters.

December 2022, 47 pages.

Keywords: irreducible characters, monolitihic characters, strongly monolithic characters

1. GİRİŞ

Bir sonlu G grubundan, $GL(n, \mathbb{C})$ grubuna giden herhangi bir ϕ grup homomorfisine, G grubunun n . dereceden kompleks gösterilişi denir. G grubundan $\mathbb{C}$ cismine giden ve her $g \in G$ için $\theta(g) = tr(\phi(g))$ biçiminde tanımlanan θ sınıf fonksiyonuna G grubunun ϕ gösterilişi tarafından belirlenen (kompleks) karakteri denir. $\mathbb{C}[G]$ grup cebirinin bir indirgenemez modülü tarafından belirlenen, G grubunun bir gösterilişine indirgenemez gösteriliş ve bu gösterilişin belirlediği karaktere de indirgenemez karakter denir.

İndirgenemez karakterlerin sağladığı özellikler, bir gruptaki indirgenemez karakterlerin sayısı ve indirgenemez karakterlerin dereceleri üzerine yapılan varsayımlar sonlu grupların yapıları hakkında bilgi verir. Literatürde sonlu grupların yapısı ile indirgenemez karakterleri arasındaki ilişkiler oldukça çalışılmıştır ve hala çalışılmaya devam etmektedir. Tek bir lineer olmayan indirgenemez karaktere sahip gruplar Seitz tarafından sınıflandırılmıştır. Benzer şekilde Berkovich *ve diğ.* (1992) makalesinde de tüm lineer olmayan indirgenemez karakterlerinin dereceleri birbirinden farklı olan sonlu grupların sınıflandırılması elde edilmiştir.

Bazen bir sonlu grubun bütün lineer olmayan indirgenemez karakterlerinin incelenmesi yerine yalnızca belirli özellikleri sağlayan indirgenemez karakterlerinin incelenmesi yeterli olmaktadır. Bir sonlu G grubunun χ indirgenemez karakteri için $G/\ker\chi$ bölüm grubu bir tek minimal normal alt gruba sahipse, χ karakterine G grubunun monolitik karakteri denir. Literatürde monolitik karakterler kullanılarak sonlu grupların yapıları hakkında elde edilen bir çok sonuç bulunmaktadır. Örneğin tüm monolitik karakterlerinin dereceleri birbirinden farklı olan sonlu grupların çözülebilir olduğu sonucu Berkovich *ve diğ.* (1999) makalesinde verilmiştir. Bu tezde amacımız bir sonlu grubun monolitik karakterler kümesinin bir alt kümesini oluşturan güçlü monolitik karakterleri tanıtmak ve bu karakterleri kullanarak sonlu grupların yapıları hakkında bilgi edinmektir.

2. GENEL KISIMLAR

2.1. GRUP TEORİSİ

Bu bölümde, tezin bulgular bölümünde kullanılacak olan, grup teorisinin bazı temel tanım ve teoremleri hatırlatılacaktır. Ayrıntılı bilgi için Isaacs (2008) kitabından yararlanılabilir.

Tanım 2.1.1 G bir grup olsun. Her $i = 0, \dots, r$ için A_i , G grubunun bir normal alt grubu ve E birim alt grup olmak üzere,

$$E = A_0 \subseteq \dots \subseteq A_r = G$$

olacak şekilde sonlu elemanlı $(A_0, \dots, A_r)$ serisine, G grubunun bir normal serisi denir.

$(A_0, \dots, A_r)$ normal serisinde, A_{i+1}/A_i bölüm gruplarına G grubunun $(A_0, \dots, A_r)$ serisinin faktörleri denir.

Tanım 2.1.2 G bir grup ve her $i = 0, \dots, r$ için A_i , G grubunun bir alt grubu olsun.

$E = A_0 \triangleleft \dots \triangleleft A_r = G$ zincirinde her $i = 0, \dots, r-1$ için A_{i+1}/A_i bölüm grubu basit grup ise, bu zincire G grubunun bir kompozisyon serisi denir. A_{i+1}/A_i ($i = 0, \dots, r-1$) bölüm gruplarına da bu serinin kompozisyon faktörleri denir.

Tanım 2.1.3 G bir grup ve $(A_0, \dots, A_r)$, G 'nin bir normal serisi olsun. Her $i = 0, \dots, r$ için A_{i+1}/A_i faktörü G/A_i bölüm grubunun bir minimal normal alt grubu ise, $(A_0, \dots, A_r)$ serisine G grubunun bir esas serisi denir, serinin faktörlerine de esas faktörler denir.

Tez boyunca minimal normal alt gruplar sıklıkla kullanıldığından esas faktörler önemli bir rol oynayacaktır.

Şimdi farklı bir seri tanımını verip bu tanımları kullanarak nilpotent olmanın tanımını hatırlatalım.

Tanım 2.1.4 G bir grup olsun. $Z_0(G) = E$, $Z_1(G) = Z(G)$ ve her $i \in \mathbb{N}$ için $Z_{i+1}(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G \quad [x, y] \in Z_i(G)\}$ olarak tanımlanmak üzere,

$$Z_0(G) = E \triangleleft Z_1(G) = Z(G) \triangleleft \cdots \triangleleft Z_{i+1}(G) \triangleleft \cdots$$

şeklinde verilen seriye G grubunun artan merkez serisi denir.

Tanım 2.1.5 G grubunun $Z_0(G) = E \triangleleft Z_1(G) = Z(G) \triangleleft \cdots \triangleleft Z_{i+1}(G) \triangleleft \cdots$ artan merkez serisi için, $Z_n(G) = G$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı varsa, G grubuna nilpotent grup denir. Ayrıca, $Z_n(G) = G$ şartını sağlayan en küçük n sayısına da, G grubunun nilpotentlik sınıfı denir.

Tezde verilen sınıflandırmalar sırasında karşılaştığımız grup türlerinden biri maksimal sınıf p -grupları olduğu için, maksimal sınıf p -grubu olma tanımını hatırlatalım.

Tanım 2.1.6 G bir p -grubu ve bir $e \geq 2$ koşulunu sağlayan $e \in \mathbb{N}$ için, $|G| = p^e$ olsun. G grubunun nilpotentlik sınıfı $e - 1$ ise, G grubuna bir maksimal sınıf p -grubu denir.

Şimdi Teorem 4.6'yı ispatlarken kullanacağımız, p -gruplarının abelyen normal alt gruplarına dair aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 2.1.7 [Scott (1987)] Bir p asalı ve $n \geq 4$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}$ tamsayısı için, G grubunun mertebesi p^n olsun. Bu durumda G grubunun, mertebesi p^3 olan bir abelyen H normal alt grubu vardır.

Bu lemmanın ispatından önce gerekli olan bazı temel grup teori bilgilerini hatırlatalım.

Teorem 2.1.8 [Lattice Teoremi] G bir grup ve $N \triangleleft G$ olsun. Bu durumda, $N \subseteq A$ şartını sağlayan, G grubunun A alt gruplarının kümesi ile G/N bölüm grubunun alt gruplarının kümesi arasında birebir bir eşleme vardır.

Teorem 2.1.9 [NC Teoremi] G bir grup ve H , G grubunun bir alt grubu olsun. Bu durumda $N_G(H)/C_G(H)$ bölüm grubu $\text{Aut}(H)$ otomorfizm grubunun bir alt grubuna izomorftur.

Lemma 2.1.10 [Scott (1987)] G bir sonlu p -grubu ise, G grubunun faktörlerinin mertebesi p olan bir esas serisi vardır.

Gözlem 2.1.11 G mertebesi p^2 olan bir grup ise,

$$|Aut(G)| = p(p-1) \text{ veya } |Aut(G)| = (p+1)(p-1)^2 p$$

eşitliklerinden biri sağlanmalıdır. Bu gözlemin doğruluğunu görmek için mertebesi p^2 olan grupların abelyen olduğu ve $\mathbb{Z}_{p^2}$ veya $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ gruplarından birine izomorf olduğunu hatırlamak yeterlidir.

Artık Lemma 2.1.7'yi ispatlayabiliriz.

İspat Lemma 2.1.10'dan her sonlu p -grubun faktörlerinin mertebesi p olan bir esas serisi olduğunu biliyoruz. O halde $|K| = p^2$ olacak şekilde G 'nin bir K normal alt grubu vardır. Gözlem 2.1.11'den $p^2 \nmid |Aut(K)|$ olduğu görülür. Ayrıca K grubu normal olduğundan $N_G(K) = G$ olmalıdır. Bu durumda Teorem 2.1.9'dan

$$[G : C_G(K)] \mid |Aut(K)|$$

elde edilir. O halde, $p^2 \nmid |Aut(K)|$ olduğundan $p^3 \mid |C_G(K)|$ olmalıdır. Böylece $(E, K, C_G(K), G)$ normal serisi elde edilir. Bu seri, mertebesi p olan bir A normal alt grubu ve mertebesi p^3 olan bir H normal alt grubu ile, $(E, A, K, H, \dots, C_G(K), \dots, G)$ şeklinde bir esas seriye genişletilebilir. Son olarak, elde ettiğimiz H alt grubunun abelyen olduğunu göstermemiz yeterlidir. Şimdi $H = \langle K, x \rangle$ olacak şekilde bir $x \in H - K$ elemanı alalım. Bu durumda K abelyen bir grup ve $x \in C_G(K)$ olduğu için H grubu da abelyendir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Aşağıda tezde kullanılan, literatürde bilinen bazı sonuçlar ispatları olmadan verilmiştir.

Lemma 2.1.12 [Fratini Argumanı] G bir grup ve H , G 'nin bir sonlu elemanlı normal alt grubu olsun. $P \in Syl_p(H)$ olmak üzere, $G = N_G(P)H$ eşitliği sağlanır.

Lemma 2.1.13 [Isaacs (1976)] G bir sonlu grup ve $A \triangleleft G$ olsun. A abelyen ve G/A devirli

grup ise,

$$|A| = |G'| |Z(G) \cap A|$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.1.14 [Fitting Teoremi] Bir A grubu, bir abelyen G grubu üzerine otomorfizmalar ile etki ediyor olsun. Ayrıca, A ve G gruplarının mertebeleri aralarında asal olan sonlu gruplar olduğunu varsayalım. Bu durumda, $[G, A] = \{g^{-1}a^{-1}ga \mid g \in G, a \in A\}$ olmak üzere, $G = C_G(A) \times [G, A]$ eşitliği vardır.

Teorem 2.1.15 [Winter (1972)] P , bir p asalı için mertebesi p^{2n+1} olan bir ekstra özel p -grubu olsun. I , P grubunun iç otomorfizmalarının grubu ve $H \triangleleft \text{Aut}(P)$, $Z(P)$ üzerine triviyal etki eden otomorfizmalardan oluşan normal alt grup olsun. Bu durumda, $|\theta| = p - 1$ olmak üzere, $\text{Aut}(P) = \langle \theta \rangle H$, $H \cap \langle \theta \rangle = \langle 1 \rangle$ olur ve H/I bölüm grubu $Sp(2n, p)$ grubunun bir alt grubuna izomorf olur.

Ayrıca, p asalı tek ise ve P grubunun eksponenti p ise, $H/I \cong Sp(2n, p)$ sağlanır ve dolayısıyla H/I grubunun mertebesi $p^{n^2} \prod_{i=1}^n (p^{2i} - 1)$ olur.

Teorem 2.1.16 [Suzuki (1980)] G bir grup ve A , G grubunun abelyen bir normal alt grubu olsun. Ayrıca L , G grubunun $A \subset L \subset G$ koşulunu sağlayan bir alt grubu olsun. $|G : L| = j \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $a \rightarrow a^j$ fonksiyonunun A grubu için bir otomorfizma belirlediğini varsayalım. Bu durumda, G grubunun A grubu üzerinde ayrılması için gerek ve yeter koşul L grubunun A grubu üzerinde ayrılmasıdır.

2.2. SONLU GRUPLARIN GÖSTERİLİŞ TEORİSİ VE KARAKTER TEORİSİ

Bu bölümde modül, gösteriliş ve karakter kavramları tanıtılacak ve karakter teorisine ait bazı temel bilgiler verilecektir. Ayrıntılı bilgi için Isaacs (1976) kitabından yararlanılabilir.

Tanım 2.2.1 F bir cisim ve A bir birimli halka olsun. Ayrıca, A halkasının bir F -vektör uzayı olduğunu varsayalım. Her $c \in F$ ve $x, y \in A$ için

$$(cx)y = c(xy) = x(cy)$$

eşitliği sağlanıyorsa, A bir F -cebridir denir.

Örnek 2.2.2 • F cismi üzerinde $n \times n$ matislerden oluşan $M_n(F)$ bir F -cebridir.

- V bir vektör uzayı olmak üzere, V 'nin F -lineer transformasyonlarından oluşan $End(V)$ bir F -cebridir.

Tanım 2.2.3 G bir sonlu grup, F bir cisim olmak üzere, biçimsel $\{\sum_{g \in G} a_g g \mid a_g \in F\}$ toplamlarından oluşan yapıya $F[G]$ grup cebri denir. $F[G]$ F -cebrî üzerinde toplama işlemi

$$\sum_{g \in G} a_g g + \sum_{g \in G} b_g g = \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g$$

olarak, çarpma işlemi

$$\sum_{g \in G} a_g g \times \sum_{h \in G} b_h h = \sum_{g \in G} \left(\sum_{k \in G} a_k b_{k^{-1}g} \right) g$$

olarak tanımlanır. Kolayca görüleceği üzere, G grubu $F[G]$ F -cebrî içine gömülebilir.

Modül Teorisi, Gösteriliş Teorisinde oldukça önemli bir yere sahiptir. Şimdi, bir cebir üzerinde modül tanımını verelim.

Tanım 2.2.4 A bir F -cebrî ve V bir sonlu boyutlu F vektör uzayı olsun. Her $x \in A$ ve $v \in V$ için biricik bir $vx \in V$ elemanı tanımlandığını varsayalım. Her $x, y \in A$, $v, w \in V$ ve $c \in F$ için,

(a) $(v + w)x = vx + wx$

(b) $v(x + y) = vx + vy$

(c) $(vx)y = v(xy)$

(d) $(cv)x = c(vx) = v(cx)$

(e) $v.1 = v$

eşitlikleri sağlanıyorsa, V uzayına bir A -modül veya kısaca modül denir.

Aşağıdaki tanımlarda F bir cisim olmak üzere, A bir F -cebridir.

Tanım 2.2.5 V bir A -modül olsun. V uzayının A -invariant (A -değişmez) alt uzaylarına alt modül denir. Başka bir deyişle, $W \subseteq V$ alt uzayı bir A -modül ise, W 'ya V 'nin bir alt modülü denir.

Tanım 2.2.6 V sıfırdan farklı bir A -modül olsun. V 'nin $\{0\}$ ve V alt modüllerinden başka alt modülü yoksa V 'ye bir indirgenemez modül denir.

Tanım 2.2.7 G bir sonlu grup ve F bir cisim olsun. Bu durumda, bir $\rho : G \longrightarrow GL(n, F)$ grup homomorfizmasına, G grubunun bir gösterilişi denir. Burada $n \in \mathbb{N}$ sayısına da bu gösterilişin derecesi denir.

Lemma 2.2.8 G bir sonlu grup ve F bir cisim olsun. G grubunun gösterilişleri ile çalışmak $F[G]$ -modüller ile çalışmaya denktir. Yani G 'nin her gösterilişi bir $F[G]$ -modül belirler; tersine her $F[G]$ -modül de G 'nin bir gösterilişini belirler.

Tanım 2.2.9 G bir grup, F bir cisim ve ρ , G 'nin bir gösterilişi olsun. ρ gösterilişini belirleyen bir $F[G]$ -modülünün V olduğunu varsayalım. Bu durumda, G 'nin ρ gösterilişinin bir indirgenemez gösteriliş olması için gerek ve yeter koşul V 'nin bir indirgenemez $F[G]$ -modül olmasıdır.

Artık karakter kavramını tanıtabiliriz.

Tanım 2.2.10 G bir grup, F bir cisim ve ρ , G 'nin bir gösterilişi olsun. Bu durumda, her $g \in G$ için $\chi(g) = \text{tr}(\rho(g))$ biçiminde tanımlanan $\chi : G \longrightarrow F$ fonksiyonuna, G 'nin ρ gösterilişi tarafından belirlenen karakteri denir.

Tanım 2.2.11 G bir grup ve F bir cisim olmak üzere, $\phi : G \longrightarrow F$ fonksiyonu G 'nin eşlenik eleman sınıflarında sabit kalıyorsa; yani, G 'nin aynı eşlenik eleman sınıfında bulunan x ve y elemanı için $\phi(x) = \phi(y)$ oluyorsa, ϕ fonksiyonuna G grubunun bir sınıf fonksiyonu denir.

Sonuç 2.2.12 Her karakter bir sınıf fonksiyonudur.

Tanım 2.2.13 G sonlu bir grup, ρ bu grubun bir gösterilişi ve χ , bu gösterilişin belirlediği karakter olsun. Bu durumda, χ karakterinin indirgenemez olması için gerek ve yeterli koşul ρ gösterilişinin indirgenemez olmasıdır. Ayrıca, χ karakterinin lineer olması için gerek ve yeter koşul ρ gösterilişinin derecesinin bir olmasıdır.

Lemma 2.2.14 Bir sonlu grubun abelyen olması için gerek ve yeter koşul tüm indirgenemez karakterlerinin lineer olmasıdır.

Lemma 2.2.15 Sonlu bir grubun indirgenemez karakterlerinin sayısı eşlenik sınıflarının sayısına eşittir.

Tanım 2.2.16 G sonlu bir grup, ρ bu grubun bir gösterilişi ve χ , bu gösterilişin belirlediği karakter olsun. ρ grup homomorfisinin çekirdeğine, χ karakterinin çekirdeği denir. Ayrıca, bu tanıma denk olarak, χ karakterinin çekirdeğinin tanımı aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 2.2.17 G bir sonlu grup ve χ , G grubunun bir karakteri olmak üzere, χ karakterinin çekirdeği $\ker\chi$ ile gösterilir ve

$$\ker\chi = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\}$$

şeklinde tanımlanır.

Çekirdek tanımı ile bağlantılı olarak bir karakterin yarı çekirdeğinden de bahsedilebilir.

Tanım 2.2.18 G bir sonlu grup ve χ , G grubunun bir karakteri olmak üzere, χ karakterinin yarı çekirdeği $Z(\chi)$ ile gösterilir ve

$$Z(\chi) = \{g \in G \mid |\chi(g)| = \chi(1)\} \text{ burada; } \chi(g) \in \mathbb{C} \text{ için } |\chi(g)| = \sqrt{\chi(g)\overline{\chi(g)}}$$

olarak tanımlanır.

Aşağıdaki lemma bulgular bölümündeki teoremlerin ispatlarında sıklıkla kullanılmaktadır.

Lemma 2.2.19 [Isaacs (1976)] G bir sonlu grup ve χ , G grubunun bir indirgenemez karakteri olmak üzere;

$$Z(\chi)/\ker\chi = Z(G/\ker\chi)$$

eşitliği sağlanır.

Bir grubun indirgenemez karakterinin yarı çekirdeği ile derecesi arasında da aşağıdaki gibi bir ilişki mevcuttur.

Lemma 2.2.20 [Isaacs (1976)] G bir sonlu grup ve $\chi \in Irr(G)$ olsun. Eğer $G/Z(\chi)$ bölüm grubu abelyen ise

$$\chi(1)^2 = |G : Z(\chi)|$$

eşitliği sağlanır.

Bir sonlu grubun tüm indirgenemez karakterlerinin çekirdeklerinin arakesitinin birim grup olduğunu biliyoruz. Tüm lineer olmayan indirgenemez karakterlerinin çekirdeklerinin arakesitinin de birim grup olduğunu aşağıdaki lemma ile verelim.

Lemma 2.2.21 G bir sonlu abelyen olmayan grup olsun. Bu durumda G grubunun tüm lineer olmayan indirgenemez karakterlerinin çekirdeklerinin arakesiti birim gruptur.

İspat $M := \bigcap_{\substack{\chi \in Irr(G) \\ \chi(1) \neq 1}} \ker\chi$ olarak tanımlansın. $M \cap G' = 1$ olduğunu biliyoruz. Şimdi $|M| > 1$ olduğunu kabul edelim. O halde,

$$|G| = |G : G'| + \sum_{\substack{\chi \in Irr(G) \\ \chi(1) \neq 1}} \chi(1)^2$$

ve

$$|G/M| = [G/M : (G/M)'] + \sum_{\substack{\chi \in Irr(G) \\ \chi(1) \neq 1}} \chi(1)^2$$

eşitliklerini kullanarak,

$$|G| - \frac{|G|}{|M|} = \frac{|G|}{|G'|} - \frac{|G|}{|G'||M|}$$

eşitliği elde edilir. Böylece,

$$\frac{|M| - 1}{|M|} = \frac{|M| - 1}{|G'||M|}$$

ve dolayısıyla $|G'| = 1$ bulunur. Fakat G grubu abelyen olmadığı için bu bir çelişkidir. O halde, $|M| = |\bigcap_{\substack{\chi \in Irr(G) \\ \chi(1) \neq 1}} ker \chi| = 1$ olmalıdır. $\square$

Tanım 2.2.22 G bir sonlu grup ve ϕ ile θ , G grubunun birer sınıf fonksiyonu olsun. ϕ ile θ 'nın iç çarpımı $[\phi, \theta]_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g) \overline{\theta(g)}$ ile tanımlanır.

Tanım 2.2.23 G bir grup, $H \leq G$ ve ϕ de H 'nin bir sınıf fonksiyonu olsun. Bu durumda, $\phi^G(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \overset{\circ}{\phi}(xgx^{-1})$ fonksiyonuna, G üzerinde yaptırılmış sınıf fonksiyonu denir; burada,

$$\overset{\circ}{\phi}(h) = \begin{cases} \phi(h), & h \in H \\ 0, & h \notin H \end{cases} \quad (2.1)$$

olarak tanımlanır.

Aşağıda verilen Frobenius Karşılıklılık, karakterlerin alt gruba kısıtlanışları ile üst gruba yaptırılmaları arasında bir iç çarpım ilişkisi verir.

Lemma 2.2.24 [Isaacs (1976)] [Frobenius Karşılıklılık] G bir grup ve H , G grubunun bir alt grubu olsun. Bu durumda ϕ , H 'nin bir sınıf fonksiyonu ve θ da, G 'nin bir sınıf fonksiyonu ise,

$$[\phi, \theta_H]_H = [\phi^G, \theta]_G$$

eşitliği sağlanır. Burada, θ_H , θ fonksiyonunun H alt grubuna kısıtlanışdır.

Teorem 2.2.25 [Isaacs (1976)] [Clifford Teoremi] G bir grup ve $H \triangleleft G$ olsun. Ayrıca, V bir $F[G]$ -modül ve W , V 'nin herhangi bir alt $F[H]$ -modülü olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır :

- (a) W_i , V 'nin indirgenemez $F[H]$ -alt modülleri olmak üzere, $V := \sum W_i$ yazılışı vardır.
- (b) Her W_i $F[H]$ -alt modülü bir $g_i \in G$ için $W g_i$ olarak yazılabilir ve dolayısıyla W ile eşleniktir.
- (c) $n_M(V)$ notasyonu V modülünün M 'ye izomorf W_i alt modüllerinin sayısını göstermek üzere, W modülüne eşlenik her M $F[H]$ -alt modülü için $n_M(V) = n_W(V)$ eşitliği sağlanır.

Şimdi Clifford Teoremini karakterler ile ifade edelim. G bir sonlu grup, $H \triangleleft G$ ve $\chi \in Irr(G)$ olsun. θ karakteri χ_H karakterinin bir indirgenemez ögesi ve $\theta = \theta_1, \dots, \theta_t$ karakterleri θ 'nın G 'deki tüm eşlenikleri olmak üzere, $\chi_H = e \sum_{i=1}^t \theta_i$; $e = [\chi_H, \theta]$ yazılışı vardır. Burada $g \in G$ ve $h \in H$ olmak üzere, $\theta^g(h) = \theta(ghg^{-1})$ biçiminde tanımlanan $\theta^g : H \rightarrow \mathbb{C}$ karakterine θ 'nın G 'de bir eşleniği (g -eşleniği) denir.

Tezde sonlu grupların sınıflandırılması ile ilgili olan bulgulara aşağıdaki teorem oldukça önemli bir yere sahiptir.

Teorem 2.2.26 [Huppert (1967)] C bir devirli grup ve V mertebesi n^2 olan bir sonlu simplektik vektör uzayı olsun. C grubunun V üzerine simplektik formu koruyarak etki ettiğini varsayalım. Bu durumda, V bir indirgenemez ve sadık C -modül ise, C grubunun mertebesi $n + 1$ sayısını böler.

Daha önce belirttiğimiz gibi tez boyunca minimal normal alt gruplar büyük bir önem taşıyacaktır. Şimdi vereceğimiz lemma komütatör alt grubu biricik minimal normal alt grup olan grupların yapısı hakkında bilgi vermektedir.

Lemma 2.2.27 [Isaacs (1976)] G bir çözülebilir sonlu grup olsun. G' komütatör grubu, G grubunun biricik minimal normal alt grubu ise G 'nin lineer olmayan indirgenemez karakterleri aynı dereceye sahiptir ve bu derece f olmak üzere aşağıdakilerden biri gerçekleşir :

1. G bir p -grubudur, $Z(G)$ devirli bir gruptur ve $G/Z(G)$ bölüm grubu mertebesi f^2 olan bir elementer abelyen gruptur.
2. G bir Frobenius grubudur; burada Frobenius tümleyeni abelyendir ve mertebesi f 'dir. Frobenius çekirdeği ise elementer abelyen p -grubu olan G' komutatör alt grubudur.

İspat İlk olarak, $Z(G) > 1$ olduğunu varsayalım. G grubunun biricik minimal normal alt grubu G' olduğundan, $G' \subseteq Z(G)$ gerçekleşir. Dolayısıyla, $Z(G)$ bir devresel p -grubu ve $|G'| = p$ olur. Ayrıca, G grubunun her lineer olmayan indirgenemez karakteri sadıktır. Bu durumda, Lemma 2.2.20'den her lineer olmayan indirgenemez χ karakteri için $\chi(1)^2 = |G : Z(G)|$ eşitliği sağlanır. Her $x, y \in G$ için $[x, y] \in G' \subseteq Z(G)$ olduğundan, $[x^p, y] = [x, y]^p = 1$ bulunur. O halde, her $x \in G$ için $x^p \in Z(G)$ elde edilir. Dolayısıyla, $G/Z(G)$ bölüm grubu bir elementer abelyen p -grubudur. Ayrıca, $Z(G)$ 'nin de p -grubu olduğu göz önüne alınırsa G grubunun bir p -grubu olduğu görülür. Böylece, teoremdaki birinci durum gerçekleşmiş olur.

Şimdi $Z(G) = 1$ olduğunu varsayalım. G' grubu G grubunun biricik minimal normal alt grubu olduğu için bir elementer abelyen bir p -grubu olmalıdır. Ayrıca $Z(G) = 1$ olduğu için, G grubu bir p -grubu olamaz. O halde, G grubunun mertebesini bölen ve p asalından farklı bir q asalı vardır. Şimdi $Q \in Syl_q(G)$ alt grubunu alalım. Bu durumda $G'Q \triangleleft G$ elde edilir ve $N = N_G(Q)$ olmak üzere Lemma 2.1.12 kullanılarak $G = G'N$ bulunur. Burada $G' \cap N \triangleleft N$, $G' \triangleleft G'N$ ve $G' \cap N \triangleleft G'$ olduğundan $G' \cap N \triangleleft G$ elde edilir. G' , G grubunun biricik minimal normal alt grubu olduğu ve mertebesi q asalı ile bölünmediği için Q Sylow q -alt grubu G grubu içinde normal olamaz. Bu durumda, $N < G$ ve $G' \not\subseteq N$ elde edilir. O halde, $G' \cap N = 1$ bulunur ve dolayısıyla $N = N_G(Q)$ grubu abelyendir. Bir $1 \neq x \in N$ elemanı seçelim. N grubu abelyen olduğu için x elemanını merkezler. O halde, N grubu $C_{G'}(x)$ grubunu normaller. G' grubu abelyen olduğu için $C_{G'}(x) \triangleleft G'$ olmalıdır. Dolayısıyla, $C_{G'}(x) \triangleleft G'N = G$ bulunur. $C_{G'}(x) \neq 1$ ise $C_{G'}(x) = G'$ olacağından x elemanı G' grubunu merkezler. Bu durumda x elemanı $G'N = G$ grubunu da merkezleyeceğinden $1 \neq x \in Z(G) = 1$ çelişkisi elde edilir. O halde, her $1 \neq x \in N$ elemanı için $C_{G'}(x) = 1$ olmalıdır. Bu durumda, $G = G' \rtimes N$ bir Frobenius grubudur. Ayrıca, Frobenius çekirdeği G' komutatör grubu ve Frobenius komplementi N grubudur. O halde, bir lineer olmayan indirgenemez χ karakteri için $\lambda^G = \chi$ olacak biçimde bir $\lambda \in Irr(G')$ lineer karakteri vardır. Bu durumda, $f = \chi(1) = [G : G'] \cdot \lambda(1) = |N|$ bulunur ve ispat tamamlanır. $\square$

Şimdi gösteriliş teorisi ve karakter teorisi ile ilgili, tez boyunca kullanılan bazı teorem ve önermeler ispatları olmadan verilmiştir.

Teorem 2.2.28 [Isaacs ve Knutson (1998)] G bir sonlu grup ve $N \triangleleft G$ olsun. Eğer $|cd(G|N)| \leq 2$ ise, N çözülebilir bir gruptur ve $dl(N) \leq |cd(G|N)|$ eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.2.29 [Isaacs (1969)] G en fazla üç farklı indirgenemez karakter derecesine sahip sonlu grup olsun, yani $|cd(G)| \leq 3$ olsun. O halde, G çözülebilir bir gruptur.

Önerme 2.2.30 [Isaacs (1976)] G bir sonlu grup ve $N \triangleleft G$ olsun. Bir $H \leq G$ alt grubu için $G = NH$, $H \cap N = 1$ koşullarının sağlandığını varsayalım. $\theta \in Irr(N)$, G grubu içinde invariant ve $(\theta(1), |G : N|) = 1$ şartını sağlayan bir karakter olsun. Eğer H çözülebilir bir grup ise, θ karakteri G grubuna genişletilebilir.

Teorem 2.2.31 [Berkovich ve diğ. (1999)] G sonlu çözülebilir bir grup ve $N \triangleleft G$, G grubunun bir minimal normal alt grubu olsun. Ayrıca, G grubunun çekirdeğinde N grubunu içermeyen indirgenemez karakterlerin derecelerinin farklı olduğunu varsayalım. N grubunun bir asal bölünü p olsun. Bu durumda, $Q \subseteq G$ bir p' -alt grubu olmak üzere, Q grubunun $Irr(N)$ kümesi ve N grubu üzerine olan etkisi bir Frobenius etkisidir.

2.2.1. Az Sayıda Lineer Olmayan İndirgenemez Karaktere Sahip Gruplar

Bu bölümde az sayıda lineer olmayan indirgenemez karakterlere sahip gruplar hakkında bilinen ve tezde kullanılan bazı sonuçlar verilecektir.

İlk olarak, tam bir tane lineer olmayan indirgenemez karaktere sahip grupların sınıflandırılması için aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 2.2.1.1 [Seitz] G bir sonlu grup olsun. G grubunun tam bir tane lineer olmayan indirgenemez karakteri varsa, G çözülebilirdir.

İspat $[G, G'] = n \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda G grubunun tam $n + 1$ tane indirgenemez karakteri vardır. Dolayısıyla, G grubunda tam $n + 1$ tane eşlenik sınıfı vardır. Şimdi $G = h_1 G' \cup h_2 G' \cup \dots \cup h_n G'$; ($h_1 = 1$) olsun. $1 \leq i \neq j \leq n$ olmak üzere, $[h_i]_G = [h_j]_G$ olduğunu

varsayalım. Bu durumda, $h_i = xh_jx^{-1}$ olacak biçimde bir $x \in G$ vardır. Bu eşitliği $h_i = h_jh_j^{-1}xh_jx^{-1}$ şeklinde yazabiliriz. Fakat burada, $h_j^{-1}xh_jx^{-1} \in G'$ olduğundan, $i \neq j$ için $h_iG' = h_jG'$ çelişkisi elde edilir. O halde, $[h_i]_G \neq [h_j]_G$ şartı sağlanır ve G 'nin $(n-1)$ tane eşlenik sınıfı G' grubunda değildir. Bu durumda G' , biri birimin eşlenik sınıf olmak üzere iki eşlenik sınıfının birleşimi olmalıdır. Dolayısıyla, p bir asal sayı olmak üzere, G bir p -grubudur. Burada G/G' bölüm grubu abelyen ve G' bir p -grubu olduğu için, her iki grup çözülebilirdir. Dolayısıyla G grubu bir çözülebilir gruptur. $\square$

Teorem 2.2.1.2 [Seitz] G bir sonlu grup olsun. G 'nin tam bir tane lineer olmayan indirgenemez karakterinin olması için gerek ve yeter koşul aşağıdakilerden birinin gerçekleşmesidir :

- G bir ekstra özel 2-grubudur,
- Bir p asalı ve $a \in \mathbb{N}$ için G , mertebesi $p^a(p^a - 1)$ olan bir Frobenius grubudur. Burada Frobenius çekirdeği mertebesi p^a olan bir elementer abelyen p -grubudur; Frobenius tümleyeni ise mertebesi $(p^a - 1)$ olan bir devirli gruptur.

İspat G 'nin lineer olmayan indirgenemez karakterine χ diyelim. Lemma 2.2.21'den $\ker \chi = 1$ elde edilir. Ayrıca, G yalnızca bir lineer olmayan indirgenemez karaktere sahip olduğu için bir önceki lemmadan bir çözülebilir gruptur. M , G grubunun bir minimal normal alt grubu olsun. O halde, G/M bölüm grubu tüm indirgenemez karakterleri lineer olduğu için abelyen olmalıdır. Dolayısıyla $G' \leq M$ elde edilir. Bu durumda, G grubu abelyen olmadığı ve M alt grubu minimal normal alt grup olarak alındığı için $G' = M$ olmalıdır. Yani, G' komütatör grubu G grubunun bir minimal normal alt grubudur. Bu durumda, Lemma 2.2.27'den G grubunun bir p -grubu ya da bir Frobenius grubu olduğu görülür.

Öncelikle G grubunun p -grubu olduğunu varsayalım. O halde, $Z(G) > 1$ bir devirli gruptur ve $|G'| = p$ bulunur. Tekrar Lemma 2.2.27 kullanılarak, $G/Z(G)$ bölüm grubunun bir elementer abelyen p -grubu olduğu ve $|G/Z(G)| = \chi(1)^2$ eşitliğinin sağlandığı görülür. Böylece,

$$|G| = [G : G'] + \chi(1)^2 \quad \text{ve} \quad \frac{|G|}{|Z(G)|} = \chi(1)^2$$

eşitlikleri kullanılarak $|Z(G)| = |G'|(|Z(G)| - 1)$ elde edilir. O halde, $|G'| = |Z(G)| = 2$ olmalıdır ve G bir ekstra özel 2-grubudur.

Şimdi G grubunun bir Frobenius grubu olduğunu varsayalım. Bu durumda, $Z(G) = 1$ olmalıdır ve Frobenius çekirdeği G' normal alt grubudur. Dolayısıyla, G' komutatör alt grubu bir elementer abelyen p -grubudur. Şimdi $|G'| = p^a$, ($a \in \mathbb{N}$) olsun. G bir Frobenius grubu olduğundan her $1 \neq \lambda \in \text{Irr}(G')$ için $I_G(\lambda) = G'$ elde edilir. Dolayısıyla, $\lambda^G \in \text{Irr}(G)$ bulunur, yani $\chi = \lambda^G$ 'dir. O halde, Lemma 2.2.24'den $1 = [\lambda^G, \chi] = [\lambda, \chi_{G'}]$ elde edilir. Ayrıca, Teorem 2.2.25'ten $\chi_{G'} = \sum_{1 \neq \lambda \in \text{Irr}(G')} \lambda$ bulunur. Son olarak,

$$[G : G'] = \chi(1) = \chi_{G'}(1) = |G'| - 1 = p^a - 1$$

olduğundan, $|G| = p^a(p^a - 1)$ eşitliği elde edilir. G 'nin Frobenius komplementi abelyen olduğundan devirli bir gruptur. $\square$

Yukarıdaki teoremden verilen gruplar Seitz grupları olarak bilinmektedir ve bu tezde Seitz grupları olarak bahsedilecektir.

Şimdi vereceğimiz teorem sayesinde indirgenemez karakterlerin sayısı üzerine bir varsayımda bulunmak yerine, dereceleri üzerine varsayımlarda bulunarak benzer bir sonuç elde edilebileceği görülür.

Teorem 2.2.1.3 [Berkovich ve diğ. (1992)] G abelyen olmayan sonlu bir grup olsun. G grubunun lineer olmayan indirgenemez karakterlerinin kümesi $\{\theta_1, \dots, \theta_r\}$ ile gösterilsin. Her $i \neq j$ için $\theta_i(1) \neq \theta_j(1)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda G grubu aşağıdaki gruplardan biridir:

1. G ekstra özel 2-grubudur,
2. G grubu bir p asalı ve $n \in \mathbb{N}$ tam sayısı için $p^n(p^n - 1)$ mertebeli bir Frobenius grubudur. G grubunun Frobenius çekirdeği mertebesi p^n olan bir değişmeli grup, Frobenius tümleyeni ise devirli bir gruptur.
3. G mertebesi 72 olan ve Frobenius tümleyeni Q_8 grubuna izomorf olan bir Frobenius grubudur.

Bu teoremden $r = 1$ alındığında Teorem 2.2.1.2'nin elde edildiğine dikkat edelim. Tam iki tane lineer olmayan indirgenemez karaktere sahip grupların sınıflandırılması Berkovich ve

Zhmud (1997) kitabında verilmiştir. Şimdi bu sınıflandırmayı lineer olmayan indirgenemez karakterlerin çekirdekleri cinsinden inceleyelim.

Teorem 2.2.1.4 [Berkovich ve Zhmud (1997)] G tam iki tane lineer olmayan indirgenemez karaktere sahip bir sonlu grup olsun. Bu karakterlere χ_1, χ_2 diyelim. Bu durumda, aşağıdakiler gerçekleşir:

1. $\ker\chi_1 = \ker\chi_2 = 1$ olması için gerek ve yeter koşul G grubunun aşağıdaki gruplardan biri olmasıdır :

- (a) $|G| = 2^{2\alpha}$ ve $Z(G), G' \leq Z(G)$ koşulunu sağlayan bir devirli gruptur. Ayrıca, $|Z(G)| = 4$ ve $|G'| = 2$ gerçekleşir,
- (b) G bir ekstra özel 3-grubudur,
- (c) G , Frobenius tümleyeni H , bir devirli grup ve Frobenius çekirdeği G' , bir elementer abelyen p -grubu olan bir Frobenius grubudur. Ayrıca, $2|H| = |G'| - 1$ eşitliği de sağlanır.

2. $\ker\chi_1 = 1$ ve $\ker\chi_2 > 1$ olması için gerek ve yeter koşul G grubunun aşağıdaki gruplardan biri olmasıdır :

- (d) $G \cong (C_3 \times C_3) \rtimes Q_8$ bir Frobenius grubudur.
- (e) $G/Z(G) \cong N \rtimes H$, Frobenius çekirdeği N , bir elementer abelyen grup, Frobenius tümleyeni H , bir devirli grup olan ve $|H| = |N| - 1$ eşitliğini sağlayan bir Frobenius grubudur. Ayrıca, $|Z(G)| = 2$ ve $Z(G) \cap G' = 1$ eşitlikleri sağlanır.

3. $\ker\chi_1 > 1, \ker\chi_2 > 1$ olması için gerek ve yeter koşul G grubunun aşağıdaki gibi bir grup olmasıdır:

- (f) $|G| = 2^{2\alpha+2}, |G'| = 2, \chi_1(1) = \chi_2(1) = 2^\alpha$ eşitliklerini sağlayan bir gruptur. Ayrıca $Z(G), G' \leq Z(G)$ şartını sağlayan bir Klein 4-grubudur.

Yukarıdaki teoremden verilen gruplar Berkovich grupları olarak bilinmektedir ve bu tezde Berkovich grupları olarak bahsedilecektir.

2.3. MONOLİTİK VE GÜÇLÜ MONOLİTİK KARAKTERLER

Bu bölümde, literatürde bilinen monolitik karakter kavramı ve bu karakterlerle ilgili bazı özellikler Berkovich ve Zhmud (1997) kitabından yararlanılarak verilecektir. Ayrıca, Erkoç ve diğ. (2022) makalesinde tanıtılan güçlü monolitik karakter kavramının tanımı ve özelliklerinden bahsedilecektir.

Tanım 2.3.1 G bir sonlu grup ve χ , G grubunun bir indirgenemez karakteri olsun. $G/\text{Ker}(\chi)$ bölüm grubunun biricik minimal normal alt grubu varsa, χ karakterine G grubunun bir monolitik karakteri denir.

Örneğin, tüm simetrik grupların ve p -gruplarının birim karakter dışındaki tüm indirgenemez karakterleri birer monolitik karakterdir. Öte yandan G grubunun biricik minimal normal alt grubu olsa bile, grubun birim karakterden farklı bazı indirgenemez karakterleri monolitik olmayabilir. Örneğin, A_4 grubunun C_4 grubu ile merkezsiz genişlemesi olan C_4A_4 grubunun biricik minimal normal alt grubu vardır; ancak üçüncü dereceden monolitik olmayan bir indirgenemez karakteri de vardır.

Sonlu bir G grubunun tüm monolitik karakterlerinin çekirdeklerinin arakesiti birim grup olduğundan, G grubunun her normal has alt grubu, G grubunun bir takım monolitik karakterlerinin çekirdeklerinin bir kesişimi olarak yazılabilir.

Aşağıda ilk olarak Erkoç ve diğ. (2022) makalesinde tanıtılan ve sonlu bir grubun monolitik karakterleri kümesinin bir alt kümesini oluşturan güçlü monolitik karakterlerin tanımı verilmiştir.

Tanım 2.3.2 G bir sonlu grup ve χ , G grubunun bir monolitik karakteri olsun. Aşağıdaki şartlardan biri sağlanıyorsa, χ karakterine G grubunun bir güçlü monolitik karakteri denir.

1. $Z(\chi) = \text{ker}\chi$,
2. $G/\text{ker}\chi$ bölüm grubu, komutatör alt grubu biricik minimal normal alt grup olan bir p -grubudur.

Gözlem 2.3.3 Güçlü monolitik karakterlerinin kümesi monolitik karakterlerinin kümesinin bir has alt kümesi olan sonlu grup örnekleri vardır :

- $SL(2,3)$ grubunun birim karakterden farklı her indirgenemez karakteri monolitik olsa da yalnızca derecesi üç olan indirgenemez karakteri güçlü monoliktir.
- Q_{16} grubunun birim karakterden farklı her indirgenemez karakteri monoliktir fakat yalnızca sadık olmayan bir indirgenemez karakteri güçlü monoliktir.
- C_2 grubu He_3 üzerine sadık etki etmek üzere, $He_3 \rtimes C_2$ grubunun birim karakter dışındaki tüm indirgenemez karakterleri monoliktir. İkinci dereceden dört tane, üçüncü dereceden dört tane monolitik karakteri vardır. Bunların sadece ikinci dereceden olanları güçlü monoliktir.

Şimdi güçlü monolitik karakterlerin özelliklerini inceleyebiliriz.

Önerme 2.3.4 Bir grubun lineer karakterleri güçlü monolitik değildir.

İspat G bir sonlu grup ve $1 \neq \lambda \in Irr(G)$, G grubunun bir lineer monolitik karakteri olsun. Bu durumda $G/ker\lambda$ bölüm grubu bir devirli p -grubudur. Dolayısıyla λ karakteri güçlü monolitik olma koşullarından 2) şikkını sağlayamaz. Lemma 2.2.19'dan $Z(\lambda) = G$ ve $G \neq ker\lambda$ olduğundan λ karakteri güçlü monolitik olma koşullarından 1) şikkını da sağlayamaz. O halde λ karakteri G grubunun bir güçlü monolitik karakteri değildir. $\square$

Sonuç 2.3.5 Abelyen grupların güçlü monolitik karakteri yoktur.

Önerme 2.3.6 Abelyen olmayan her grubun en az bir güçlü monolitik karakteri vardır.

İspat G abelyen olmayan bir sonlu grup olsun. O halde G 'nin en az bir tane lineer olmayan indirgenemez karakteri vardır. Şimdi G grubunun lineer olmayan indirgenemez karakterleri arasında maksimal çekirdeğe sahip olan bir χ karakteri seçelim. Bu durumda $(G/ker\chi)'$ komütatör grubu $G/ker\chi$ bölüm grubunun biricik minimal alt grubudur. Eğer $G/ker\chi$ bir çözülebilir grup ise, Lemma 2.2.27'den χ karakteri G grubunun bir güçlü monolitik karakteridir. $G/ker\chi$ bölüm grubunun çözülebilir olmadığını varsayalım. Bu durumda $(G/ker\chi)'$ komütatör grubu bir mükemmel grup ve $Z(G/ker\chi) = 1$ olur. Lemma 2.2.19'dan görüyoruz ki $Z(\chi) = ker\chi$ eşitliği sağlanır ve χ yine bir güçlü monolitik karakter olur. $\square$

Bu Önermenin ispatı ile aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 2.3.7 Abelyen olmayan bir sonlu grubun lineer olmayan indirgenemez karakterleri kümesi içinde, maksimal çekirdeğe sahip olanları birer güçlü monolitik karakterdir.

Ancak abelyen olmayan bir grubun, herhangi bir güçlü monolitik karakterinin çekirdeğinin o grubun lineer olmayan indirgenemez karakterlerinin çekirdekleri arasında bir maksimal çekirdek olması gerekmez. Örneğin S_4 grubunun tüm lineer olmayan indirgenemez karakterleri güçlü monolitikdir. S_4 'ün sadık indirgenemez karakterlerinin çekirdekleri maksimal çekirdek değildir.

Gözlem 2.3.8 G bir sonlu grup ve $N \triangleleft G$ olsun. G grubunun çekirdeğinde N grubunu içeren indirgenemez karakterleri ile G/N bölüm grubunun karakterleri arasında birebir bir eşleme olduğunu biliyoruz. Şimdi $\chi \in \text{Irr}(G)$, $N \subseteq \ker \chi$ koşulunu sağlayan bir indirgenemez karakter olsun. Bu durumda χ karakterinin G grubunun bir güçlü monolitik karakteri olması için gerek ve yeter koşul χ karakterinin G/N bölüm grubunun bir güçlü monolitik karakteri olmasıdır.

İlk olarak Erkoç ve diğ. (2022) makalesinde, bir sonlu grubun yapısı ile güçlü monolitik karakterleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Şimdi bu makalede yer alan ve ana teoremlerimizin ispatlarında kullanacağımız bazı bulguları verelim.

Lemma 2.3.9 [Erkoç ve diğ. (2022)] G bir çözülebilir grup ve p bir asal sayı olsun.

- G grubunun her χ güçlü monolitik karakteri için $p \mid \chi(1)$ sağlanıyorsa, G grubunun bir normal p -tümleyeni vardır.
- G grubunun her χ güçlü monolitik karakteri için $p \nmid \chi(1)$ sağlanıyorsa, G grubunun Sylow p -alt grubu normaldir.

Teorem 2.3.10 [Erkoç ve diğ. (2022)] G bir abelyen olmayan p -grubu olsun. G grubunun güçlü monolitik karakterlerinin dereceleri birbirinden farklı ise aşağıdakilerden biri gerçekleşir :

- G bir ekstra özel 2-grubudur.
- G mertebesi sekizden büyük olan bir maksimal sınıf 2-grubudur.

Önerme 2.3.11 [Erkoç ve diğ. (2022)] G abelyen olmayan bir nilpotent grup olsun. G grubunun güçlü monolitik karakterlerinin dereceleri birbirinden farklı ise, $G = P \times A$ şeklinde yazılabilir; burada A mertebesi tek sayı olan bir abelyen grup, $P \in \text{Syl}_2(G)$ grubu ise bir ekstra özel 2-grubu ya da mertebesi sekizden büyük olan bir maksimal sınıf 2-grubudur.



3. MALZEME VE YÖNTEM

Bu tezde, sonlu grupların yapısı ile güçlü monolitik karakterleri arasındaki bazı ilişkiler verildiğinden, Sonlu Grupların Karakter Teorisi kullanılmıştır. Tezde yer alan Karakter Teorisinin temel kavramları ve teoremleri için Martin Isaacs'ın 'Character Theory of Finite Groups' kitabından yararlanılmıştır. Monolitik karakterler hakkında gerekli bilgi için Berkovich ve Zhmud (1997) kitabı kullanılmıştır. Sonlu bir grubun monolitik karakterleri kümesinin bir alt kümesini oluşturan güçlü monolitik karakterler tanıtılmış, bu karakterlerin özellikleri incelenmiş ve bu özellikler kullanılarak sonlu gruplar hakkında bilgiler edinilmiştir. Tezde yapılan ispatlarda çelişki ile ispat ve doğru yoldan ispat yöntemlerinden yararlanılmıştır. Ayrıca bir iddianın kanıtlanması için aksinin doğruluğu varsayılmış, minimal ters örnek alınmış ve bu ters örneğin var olamayacağı gösterilmiştir. Bu ispatlar yapılırken genel kısımlar bölümünde verilen grup teorisine ve karakter teorisine ait bilgiler kullanılmıştır.

4. BULGULAR

Bu bölümde, doktora çalışması sırasında elde edilen, Erkoç *ve diğ.* (2022) ve Özkan ve Erkoç (2022) makalelerinde yer alan bulgular verilecektir. İlk olarak az sayıda güçlü monolitik karaktere sahip sonlu grupların çözülebilir olduğunu gösterelim.

Teorem 4.1 G bir sonlu grup olsun. G grubunun güçlü monolitik karakterlerinin sayısı en fazla üç ise, G grubu çözülebilirdir.

İspat G bir minimal mertebeli aksi örnek olsun. G grubunun N_1, N_2 gibi birbirinden farklı iki minimal normal alt grubu olduğunu varsayalım. Teoremin hipotezi bölüm gruplarında da geçerli olduğundan $G/N_1, G/N_2$ bölüm grupları çözülebilir gruplardır. Bu durumda, G grubu çözülebilir olan $G/N_1 \times G/N_2$ çarpım grubunun bir alt grubuna izomorf olduğu bilindiğinden, G grubu da çözülebilir bir grup olur. Bu çelişki bize G grubunun bir tek minimal normal alt grubu olduğunu ve dolayısıyla G 'nin en az bir sadık indirgenemez karakterinin olduğunu söyler. Şimdi G grubunun biricik minimal normal alt grubu N olsun. G grubu çözülebilir olmadığı için, $Z(G) = 1$ olmalıdır. O halde, G grubunun her sadık indirgenemez karakteri güçlü monolitik karakterdir. Bu durumda G grubunun en az üç sadık indirgenemez karakteri olmalıdır; çünkü aksi halde, Teorem 2.2.28 ile çelişki elde edilir. Bu durumda G grubunun tüm güçlü monolitik karakterleri sadıktır. O halde, abelyen olmayan her grubun en az bir güçlü monolitik karakteri olması gerektiğinden, G/N bir abelyen grup olmalıdır. Yani $G' = N$ olur ve dolayısıyla G tam üç tane lineer olmayan indirgenemez karaktere sahip bir grup olur. Bu durumda, Teorem 2.2.29 ve Teorem 2.2.1.3 kullanılarak G grubunun çözülebilir olduğu çelişkisi elde edilir. $\square$

Gözlem 4.2 Yukarıdaki teorem, G grubunun güçlü monolitik karakterlerinin sayısı en fazla dört olduğu durumda doğru değildir. Örneğin A_5 grubu dört tane güçlü monolitik karaktere sahip bir basit gruptur.

Bu teorem sayesinde az sayıda güçlü monolitik karaktere sahip bazı grupların sınıflandırmasını yaparken çözülebilir gruplar ile ilgileneceğiz.

Aşağıda lineer olmayan indirgenemez karakterlerinin hepsi monolitik olan ve tam bir tane güçlü monolitik karaktere sahip olan sonlu grupların sınıflandırılması verilmiştir.

Teorem 4.3 [Erkoç ve diğ. (2022)] G abelyen olmayan bir sonlu grup olsun. G grubunun lineer olmayan tüm indirgenemez karakterlerinin monolitik olduğunu varsayalım. Bu durumda G grubunun biricik güçlü monolitik karakterinin olması için gerek ve yeter koşul aşağıdakilerden birinin gerçekleşmesidir:

1. G bir Seitz grubudur,
2. G mertebesi sekizden büyük olan bir maksimal sınıf 2-grubudur,
3. $G \cong SL(2,3)$.

İspat Teorem 4.1'e göre G grubu çözülebilirdir. G grubunun biricik güçlü monolitik karakterine χ diyelim. Sonuç 2.3.7'ye göre G grubunun lineer olmayan indirgenemez karakterleri arasında maksimal çekirdeğe sahip olan tek karakteri χ karakteridir. O halde $G/\ker\chi$ bölüm grubu bir Seitz grubudur. Yani, $G/\ker\chi$ bölüm grubu ya bir ekstra özel 2-grubu ya da bir Frobenius grubu olmalıdır. Eğer $\ker\chi = 1$ ise, G grubu istenilen tipte bir gruptur. O halde, $\ker\chi > 1$ olduğunu varsayalım.

İlk olarak, $G/\ker\chi$ grubunun bir ekstra özel 2-grubu olduğunu varsayalım. Bu durumda $2 \mid \chi(1)$ olacağından Lemma 2.3.9'a göre G grubunun bir normal 2-komplementi vardır. H grubu G 'nin normal 2-komplementi olsun. Bu durumda, Gözlem 2.3.8'e göre G/H bölüm grubunun da yalnızca bir güçlü monolitik karakteri vardır. O halde, Teorem 2.2.1.2'ye göre G/H grubu bir ekstra özel 2-grubu ya da mertebesi sekizden büyük olan bir maksimal sınıf 2-grubudur. Ayrıca, G grubunun $H = \ker\psi$ olacak şekilde lineer olmayan indirgenemez ve dolayısıyla monolitik bir ψ karakteri vardır ve $H \leq \ker\chi$ olur. Eğer $|H| = 1$ ise G grubu istenilen tipte bir gruptur. O halde, $H > 1$ olduğunu varsayalım. Şimdi bir H/T esas faktörü olduğunu varsayalım. Lemma 2.2.21'den G/T grubunun H/T minimal normal altgrubunu çekirdeğine almayan en az bir lineer olmayan indirgenemez karakteri vardır. Şimdi G/T bölüm grubunun H/T minimal normal alt grubunu çekirdeğine almayan lineer olmayan indirgenemez karakterleri arasında maksimal çekirdeğe sahip olan karaktere θ diyelim. Bu durumda $\ker\theta/T$ bir 2-grubudur. Ayrıca, θ bir monolitik karakter olduğundan ve $H\ker\theta/\ker\theta \triangleleft G/\ker\theta$ olduğundan, $G/\ker\theta$ bölüm grubunun biricik minimal normal alt

grubu, q tek bir asal olmak üzere, bir q -grubudur. Aynı zamanda, θ karakteri güçlü monolitik olmadığı için, $Z(G/\ker\theta) \neq 1$ elde edilir. Dolayısıyla, $Z(G/\ker\theta)$ grubu, mertebesi q olan bir devirli gruptur ve $Z(G/\ker\theta) \cong H/T$ olur. Şimdi, $P \in \text{Syl}_2(G)$ olmak üzere, $U := Z(P\ker\theta/\ker\theta).Z(G/\ker\theta)$ grubunu tanımlayalım.

$$U \triangleleft G/\ker\theta \quad \text{ve} \quad Z(P\ker\theta/\ker\theta)\text{char}U$$

olduğundan

$$1 \neq Z(P\ker\theta/\ker\theta) \triangleleft G/\ker\theta$$

çelişkisi elde edilir. O halde $H = 1$ olmalıdır. Yani G ya bir ekstra özel 2-grubu ya da mertebesi sekizden büyük olan bir maksimal sınıf 2-grubudur.

Şimdi $G/\ker\chi$ bölüm grubu devirli olan bir $H/\ker\chi$ tümleyeni ve elementer abelyen p -grubu olan $K/\ker\chi$ çekirdeği ile bir Frobenius grubu olsun; burada p bir asal sayıdır. Ayrıca, $|H/\ker\chi| = |K/\ker\chi| - 1$ sağlandığını varsayalım. Eğer $\ker\chi = 1$ ise G grubu istenilen tipte bir grup olacağından, $\ker\chi > 1$ olduğunu varsayalım. G grubunun bir $\ker\chi/S$ esas faktörünü alalım. Bu durumda, $\ker\chi/S$, q bir asal sayı olmak üzere, bir elementer abelyen q -grubudur. Ayrıca, $\ker\chi$ lineer olmayan indirgenemez karakterlerin çekirdekleri arasında maksimal olduğundan ve Lemma 2.2.21'den, G grubunun $\ker\phi = S$ olacak şekilde lineer olmayan indirgenemez bir ϕ karakteri vardır. ϕ karakteri güçlü monolitik karakter olmadığı için $S < Z(\phi)$ olur ve $Z(G/S) = Z(\phi)/S > 1$ grubu devirli bir gruptur. Ayrıca, $\ker\chi/S \leq Z(G/S)$ olduğu da göz önüne alınırsa $p = q$ elde edilir ve $Z(G/S) = \ker\chi/S$ mertebesi p olan bir devirli gruptur. Şimdi bir $P \in \text{Syl}_p(G)$ alalım. $Z(PS/S) > Z(G/S)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $P\ker\chi/\ker\chi = K/\ker\chi$ bölüm grubu $G/\ker\chi$ grubunun biricik minimal normal alt grubu olduğu için, G/S bölüm grubunun Sylow p -alt grubu olan PS/S bir abelyen normal alt grup olur. Ayrıca, G/S bölüm grubunun biricik minimal normal alt grubu $Z(G/S)$ olduğundan, $Z(G/S) \leq (G/S)'$ elde edilir. Bu durumda, Lemma 2.1.13'ten $|PS/S| = |PS/S| \cdot |Z(G/S)|$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla, $Z(PS/S) = Z(G/S)$ olur ve PS/S Sylow p -alt grubu ekstra özel bir p -grubudur. Bir a pozitif tam sayısı için, $|PS/S| = p^{2a+1}$ olsun. Teorem 2.2.26'dan $|H/\ker\chi| \nmid p^a + 1$ bulunur. Bu durumda, $p^{2a} - 1 = |H/\ker\chi| \leq p^a + 1$ olacağından, $p^a = 2$ elde edilir. Sonuç olarak $|G/S| = 24$ bulunur. Mertebesi yirmidört olan gruplar arasında teoremin varsayımlarını sağlayan tek grup $SL(2, 3)$ olduğu için $G/S \cong SL(2, 3)$ elde edilir. Böylece, $\chi(1) = 3$ olur ve Lemma 2.3.9'a göre G grubunun Sylow 2-alt

grubu normaldir. Şimdi, $V \neq S$ olmak üzere bir $\ker\chi/V$ esas faktörü alalım. Gösterdik ki bu durumda $G/V \cong SL(2,3)$ olur. O halde, $T := S \cap V$ olmak üzere, G/T grubu mertebesi kırksekiz olan bir grup olur. Ayrıca, $Z(\ker\chi/T) = Z(G/T)$ elde edilir ve $P \in Syl_2(G)$ olmak üzere $|PT/T| = 16$ bulunur. Şimdi, A/T grubu PT/T bölüm grubunun bir maksimal abelyen normal alt grubu olsun. Bu durumda, $|A/T| = 8$ olur ve Lemma 2.1.13'ten $|(PT/T)'| = 2$ çelişkisi elde edilir. Yani, $V \neq S$ olacak şekilde bir $\ker\chi/V$ esas faktör yoktur. Son olarak, G grubunun S/D gibi bir esas faktörü olsun. Bu durumda, G/D bölüm grubunun en az bir tane sadık monolitik karakteri vardır ve S/D , G/D bölüm grubunun biricik minimal normal alt grubudur. G/D grubunun sadık karakterleri güçlü monolitik olamayacağından $Z(G/D) > 1$ olmalıdır. Dolayısıyla, $S/D \leq Z(G/D)$ olur. Burada, $Z(G/D) > 1$ grubu devirli bir grup olduğu ve S/D grubu G/D bölüm grubunun biricik minimal normal alt grup olduğu için, $|S/D| = 2$ elde edilir. O halde, G/D bölüm grubu da mertebesi kırksekiz olan bir gruptur ve G/D 'nin bir Sylow 2-alt grubu maksimal sınıf 2-grubudur. Bu durum, $G/\ker\chi \cong A_4$ olması ile çelişir. Diğer taraftan görülebilir ki ,Seitz gruplarının, maksimal sınıf 2-gruplarının ve $SL(2,3)$ grubunun lineer olmayan indirgenemez karakterlerinin tümü monolitiktir ve tam olarak bir tane güçlü monolitik karakterleri vardır. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Bir abelyen olmayan çözülebilir grubun, güçlü monolitik karakterlerinin hepsinin monomial olması gerekmez. Örneğin, yarı dihedral SD_{16} grubunun He_3 grubu üzerine sadık etkisi ile oluşturulan $He_3 \rtimes SD_{16}$ (SmallGroup(432,530), GAP) grubunun derecesi altı olan sadık güçlü monolitik karakterleri monomial değildir. Şimdi aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.4 G abelyen olmayan bir grup olsun.

1. G grubunun nilpotent olması için gerek ve yeter koşul G grubunun her güçlü monolitik χ karakteri için, $G/\ker\chi$ bölüm grubunun nilpotent olmasıdır.
2. G bir çözülebilir grup olsun. Bu durumda, G grubunun nilpotent olması için gerek ve yeter koşul G grubunun her monomial güçlü monolitik χ karakteri için, $G/\ker\chi$ bölüm grubunun nilpotent olmasıdır.

İspat G bir nilpotent grup ise, her bölüm grubu da nilpotent olacağından teoremin gereklilik kısmı her iki durum için sağlanır.

Teoremin her iki durumunda yeterlik kısmını ispatlamak için, G grubunun bir minimal

mertebeli aksi örnek olduğunu varsayalım. Bu durumda, kabul gereği her $1 \neq N \triangleleft G$ için G/N bölüm grubu nilpotent olacağından, G grubunun biricik N minimal normal alt grubu vardır. O halde, G grubunun en az bir sadık indirgenemez karakteri olmalıdır. Diğer yandan, G grubu nilpotent olmadığı için $Z(G) = \Phi(G) = 1$ eşitliği sağlanır. O halde, G grubunun her sadık indirgenemez karakteri bir güçlü monolitik karakterdir. Bu durumda, G grubu teoremin 1). şikkının hipotezi gereği nilpotent olur. Bu çelişki ile birinci durumun ispatı tamamlanır. G grubunun Frattini grubu triviyal olduğu için, Huppert (1967) kitabından $G = HN$ ve $H \cap N = 1$ koşullarını sağlayan G grubunun bir H alt grubu vardır. Şimdi bir $1_N \neq \lambda \in Irr(N)$ indirgenemez karakteri seçelim. Bu durumda, Önerme 2.2.30'dan λ karakteri $I_G(\lambda)$ grubuna genişler, yani, $\theta_N = \lambda$ olacak şekilde bir $\theta \in Irr(I_G(\lambda))$ lineer karakteri vardır. O halde $\theta^G \in Irr(G)$ karakteri monomialdir. Ayrıca, $\theta^G \in Irr(G)$ sadıktır. θ^G sadık olmasa, $N \leq \ker \theta^G = \bigcap_{g \in G} (\ker \theta)^g \leq \ker \theta$ olacağından $\theta_N = \lambda = 1_N$ çelişkisi elde edilir. O halde, $\theta^G \in Irr(G)$ bir sadık monomial karakterdir. $Z(G) = 1$ olduğu için θ^G aynı zamanda G grubunun bir güçlü monolitik karakteridir. Bu durumda, teoremin 2) şikkındaki varsayım gereği G grubu nilpotent olmalıdır. Bu çelişki ile, ikinci durumun ispatı da tamamlanmış olur. $\square$

Bir sonraki teoremi ispatlamadan önce, bir sonlu grubun lineer olmayan indirgenemez karakterlerin çekirdekleri arasında maksimal çekirdeğe sahip indirgenemez karakterlerin çekirdeklerinin arakesiti hakkında aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız var.

Lemma 4.5 G , tüm lineer olmayan indirgenemez karakterleri monolitik olan, bir çözülebilir grup olsun. G grubunun lineer olmayan indirgenemez karakterlerinin çekirdekleri arasında K_1, K_2 gibi tam iki tane maksimal çekirdek olduğunu varsayalım. Bu durumda $T := K_1 \cap K_2$ olmak üzere, G grubunun, $i = \{1, 2\}$ için $T \leq \ker \theta < K_i$ koşulunu sağlayan bir θ indirgenemez karakteri yoktur.

İspat G grubunun $T \leq \ker \theta < K_1$, koşulunu sağlayan bir θ indirgenemez karakterinin olduğunu varsayalım. G grubunun lineer olmayan indirgenemez karakterlerinin hepsi monolitik olduğundan $T < \ker \theta$ olmalıdır. Ayrıca, θ teoremin koşullarını sağlayan herhangi bir lineer olmayan indirgenemez karakter olduğundan, θ karakterini $K_1/\ker \theta$ bölüm grubu bir esas faktör olacak şekilde seçebiliriz. $T < \ker \theta < K_1$ ve $T := K_1 \cap K_2$ olduğundan $\ker \theta K_2 < K_1 K_2$ eşitsizliği elde edilir. Öte yandan, $K_1/\ker \theta$, $G/\ker \theta$ bölüm grubunun biricik minimal normal alt grubu olduğundan $K_1/\ker \theta \leq K_2 \ker \theta / \ker \theta$ eşitsizliği elde edilir.

Bu durumda, $K_1 \leq K_2 \ker \theta$ olacağından, $K_1 K_2 \leq \ker \theta K_2$ çelişkisi elde edilir. O halde, G grubunun, $i \in \{1, 2\}$ için $T \leq \ker \theta < K_i$ koşullarını sağlayan hiç θ indirgenemez karakteri yoktur. $\square$

Şimdi aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.6 G abelyen olmayan bir sonlu grup olsun. G grubunun lineer olmayan tüm indirgenemez karakterinin monolitik olduğunu varsayalım. G grubunun tam iki tane güçlü monolitik karakterinin olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki gruplardan biri olmasıdır;

1. α bir pozitif tam sayı olmak üzere, $|G| = 2^{2\alpha}$ ve $Z(G)$ devirli bir gruptur. Ayrıca, $G' \leq Z(G)$, $|Z(G)| = 4$ ve $|G'| = 2$ sağlanır,
2. G grubu, bölüm grubu abelyen olmayan normal alt grupları içinde biricik maksimal normal K alt grubuna sahip bir 3-grubudur. Ayrıca, G/K bir ekstra özel 3-grubudur,
3. $G = K \rtimes H$ yarı direk çarpım grubu, çekirdeği K ve bir tümleyeni H olan bir Frobenius grubudur; burada, H bir devirli grup ve $K = G'$ bir elementer abelyen p -grubudur. Ayrıca, $2|H| = |K| - 1$ eşitliği de sağlanır,
4. $G \cong He_3 \rtimes C_4$; burada C_4 grubu He_3 üzerine sadık etki eder (SmallGroup(108, 15), GAP),
5. $G \cong (C_3 \times C_3) \rtimes Q_8$; burada Q_8 grubu $C_3 \times C_3$ üzerine Frobenius etki eder (SmallGroup(72, 41), GAP),
6. $G \cong SU_3(F_2)$; (SmallGroup(216, 88), GAP),
7. $G \cong N \rtimes SL(2, 3)$; N mertebesi 25 olan elementer abelyen 5-grubudur ve $SL(2, 3)$, N üzerine Frobenius etki eder,
8. $G \cong He_5 \rtimes SL(2, 3)$; burada, $SL(2, 3)$ grubu He_5 üzerine sadık etki eder,
9. G grubu, bölüm grubu abelyen olmayan normal alt grupları içinde tam iki tane K_1 , K_2 maksimal normal alt grubu olan bir 2-grubudur. Ayrıca G/K_1 ve G/K_2 ekstra özel 2-gruplarıdır.

İspat İlk olarak yukarıdaki teoremden sıralanan grupların her birinin, tüm lineer olmayan indirgenemez karakterlerinin monolitik olduğunu ve tam iki tanesinin de güçlü monolitik karakter olduğunu belirtelim. Dolayısıyla, teoremin ispatı için gereklik tarafının ispatlanması yeterlidir.

Teorem 4.1'e göre G grubu çözülebilirdir. Şimdi, G grubunun güçlü monolitik karakterlerine χ_1 ve χ_2 diyelim.

- İlk olarak $\ker\chi_1 = \ker\chi_2$ olduğunu varsayalım.

Bu durumda, Gözlem 2.3.7'den $\ker\chi_1$ çekirdeğinin, G grubunun lineer olmayan indirgenemez karakterlerinin çekirdekleri arasında maksimal çekirdek olduğu görülür. Eğer $\ker\chi_1 = \ker\chi_2 = 1$ eşitliği sağlanıyorsa, $G/\ker\chi_1 = G$ grubu Teorem 2.2.1.4'teki a), b), c) şıklarındaki gruplardan biridir ve dolayısıyla G istenen tipte bir gruptur. O halde, $\ker\chi_1 = \ker\chi_2 > 1$ olduğunu varsayalım. $\ker\chi_1/T$, G grubunun bir esas faktörü olsun. Bir grubun lineer olmayan indirgenemez karakterlerinin çekirdeklerinin arakesitinin birim olduğu ve bu çekirdekler arasında maksimal çekirdeğe sahip karakterlerin güçlü monolitik olduğu göz önüne alındığında, $\ker\psi = T$ olacak biçimde bir $\psi \in Irr(G)$ indirgenemez karakterinin var olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca, $\psi \in Irr(G)$ monolitik olan fakat güçlü monolitik olmayan bir karakterdir. Bu durumda, $Z(G/T) > 1$ ve dolayısıyla $\ker\chi_1/T \leq Z(G/T)$ elde edilir. İlk olarak, $G/\ker\chi_1$ grubunun Teorem 2.2.1.4'teki a) şıkkı gibi bir grup olduğunu varsayalım. O halde, $|\ker\chi_1/T| = 2$ olur. Bu durumda, G/T bir 2-grubudur ve lineer olmayan indirgenemez karakterlerinin çekirdekleri de kapsama bağlantısına göre bir zincir oluşturur. O halde, Qian ve Wang (2008) makalesinden G/T bir maksimal sınıf 2-grubudur. Böylece, $|G/\ker\chi_1| = 8$ çelişkisi elde edilir. Yani, $G/\ker\chi_1$ grubu Teorem 2.2.1.4'teki a) şıkkı gibi olamaz.

Şimdi $G/\ker\chi_1$ grubunun Teorem 2.2.1.4'teki b) şıkkı gibi olduğunu varsayalım. Bu durumda, $G/\ker\chi_1$ bir ekstra özel 3-grubu olduğu için, Teorem 4.4'ü kullanarak G grubunun nilpotent olduğunu görürüz. G grubunun her lineer olmayan indirgenemez karakterinin monolitik olduğunu varsaydığımız için, G grubu bir 3-grubu olmalıdır. Ayrıca, $\ker\chi_1$ çekirdeğinin, G grubunun lineer olmayan indirgenemez karakterlerin çekirdekleri arasında bir maksimal olduğunu hatırlayalım. O halde, G grubu Teorem 4.6'nın 2) şıkkında verilen yapıda bir gruptur. Bu tür gruplara örnek olarak, $C_3 \wr C_3$ çelenk çarpım grubu ve C_3 grubunun He_3 grubu üzerine sadık etki ettiği $He_3 \rtimes C_3$ yarı

direk çarpım grubu verilebilir.

$\ker\chi_1 = \ker\chi_2$ olduğu durumda, son olarak $G/\ker\chi_1$ grubunun Teorem 2.2.1.4'teki c) şıkkı gibi olduğunu kabul edelim. Yani, $G/\ker\chi_1$ bölüm grubu, devirli olan bir $H/\ker\chi_1$ Frobenius tümleyeni ve elementer abelyen p -grubu olan $K/\ker\chi_1$ Frobenius çekirdeği ile bir Frobenius grubu olsun; burada p bir asal sayıdır. Ayrıca,

$2 \mid |H/\ker\chi_1| = |K/\ker\chi_1| - 1$ eşitliğinin sağlandığını da kabul ettiğimizden $2 \nmid |K/\ker\chi_1|$ elde edilir. Ayrıca $\psi \in \text{Irr}(G)$ karakteri monolitik fakat güçlü monolitik olmadığı için $\ker\chi_1/T = Z(G/T)$ olur ve $|\ker\chi_1/T| = p$ eşitliği sağlanır. O halde, K/T bölüm grubu G/T grubunun bir normal Sylow p -alt grubudur. Bu durumda Lemma 2.1.13'ü kullanarak K/T bölüm grubunun abelyen olamayacağını görürüz. Dolayısıyla, $Z(K/T) = \ker\chi_1/T = (K/T)'$ eşitlikleri sağlandığı için, K/T bölüm grubu bir ekstra özel p -grubu olmalıdır. Şimdi, bir $\alpha \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için $|K/T| = p^{2\alpha+1}$ olsun. O halde, Teorem 2.2.26yi kullanarak $|H/\ker\chi_1| \mid p^\alpha + 1$ olduğunu görürüz. Son olarak, $2|H/\ker\chi_1| = |K/\ker\chi_1| - 1$ eşitliği de göz önüne alınırsa $p^{2\alpha-1}/2 \leq p^\alpha + 1$ elde edilir. Bu durumda, $p^\alpha = 3$ olmak zorundadır. O halde, G/T bölüm grubu, devirli C_4 grubunun He_3 grubu üzerine sadık etki ettiği $He_3 \rtimes C_4$ yarı direk çarpım grubuna izomorftur. Eğer $T = 1$ ise, G grubu Teorem 4.6'da 4) şıkkında verilen grup ile aynı yapıya sahiptir. Şimdi $T > 1$ olduğunu varsayalım. Sonra $U \neq T$ olmak üzere, G grubunun farklı bir $\ker\chi_1/U$ esas faktörü olduğunu varsayalım. $G/(T \cap U)$ bölüm grubunun biricik minimal normal alt grubu olmadığı ve G grubunun lineer olmayan indirgenemez tüm karakterlerinin monolitik olduğu varsayıldığı için, $G/(T \cap U)$ grubunun hiç sadık indirgenemez karakteri olamaz. Ayrıca G grubunun tam iki tane güçlü monolitik karakterinin olduğu ve $|\ker\chi_1/(T \cap U)| = 9$ olduğu göz önüne alınırsa, $Z(G/(T \cap U)) = \ker\chi_1/(T \cap U)$ elde edilir. Şimdi, $K/(T \cap U) \in \text{Syl}_3(G/(T \cap U))$ bölüm grubunun maksimal abelyen normal alt grubu $A/(T \cap U)$ olsun. O halde $[K : A] = 3$ eşitliği sağlanır. Böylece Lemma 2.1.13'ü kullanarak, $27 = |A/(T \cap U)| = |(K/(T \cap U))'|9$ çelişkisine ulaşılır. Yani, G grubunun $U \neq T$ olacak üzere farklı bir $\ker\chi_1/U$ esas faktörü yoktur. Şimdi, G grubunun T/B gibi bir esas faktörü olduğunu varsayalım. O halde $\ker\gamma = B$ olacak şekilde bir $\gamma \in \text{Irr}(G)$ vardır. Varsayımımız gereği, γ karakteri monolitik fakat güçlü monolitik olmadığı için, $Z(G/B) > 1$ ve dolayısıyla $|T/B| = 3$ olmalıdır. Bu durumda, Lemma 2.1.13'ten $Z(G/B) \neq \ker\chi_1/B$ elde edilir. Yani, $Z(G/B) = T/B = Z(K/B)$ eşitliği sağlanır. Lemma 2.1.7'den, K/B grubunun indeksi üç olan bir maksimal abelyen normal alt

grubu olduğunu biliyoruz. Ayrıca, $Z(K/B) < (K/B)'$ eşitsizliği sağlandığından, K/B bölüm grubunun yalnızca bir tane indeksi üç olan maksimal abelyen normal alt grubu vardır. Yani, bu alt grup K/B grubu içinde bir karakteristik alt gruptur ve dolayısıyla $G/\ker\chi_1$ bölüm grubu içinde de normaldir. Fakat, bu sonuç $K/\ker\chi_1$ bölüm grubunun $G/\ker\chi_1$ Frobenius grubu içinde biricik minimal normal alt grup olması ile çelişir. O halde G grubunun T/B gibi bir esas faktörü de olamaz ve $\ker\chi_1 = \ker\chi_2$ eşitliğinin sağlandığı durumlar için ispat tamamlanmış olur.

- Şimdi $\ker\chi_1 > \ker\chi_2$ olduğunu varsayalım. Bu durumu, $G/\ker\chi_2$ bölüm grubunun Berkovich grubu olup olmamasına göre ikiye ayıracağız.

Öncelikle $G/\ker\chi_2$ grubunun bir Berkovich grubu olduğunu kabul edelim. O halde $G/\ker\chi_2$ grubu yalnızca Teorem 2.2.1.4'te d) şıkkı gibi bir grup olabilir, yani, $G/\ker\chi_2 \cong (C_3 \times C_3) \rtimes Q_8$ olmalıdır. Eğer, $\ker\chi_2 = 1$ ise, G grubu istenilen tipte bir gruptur. Şimdi, $\ker\chi_2 > 1$ olduğunu kabul edelim. G grubunun $\ker\chi_1/S \neq \ker\chi_1/\ker\chi_2$ koşulunu sağlayan bir esas faktörü olduğunu varsayalım. Bu durumda, bir grubun lineer olmayan indirgenemez karakterlerin çekirdeklerinin kesişimi triviyal olacağından, $\ker\lambda = S$ olacak şekilde, monolitik olan fakat güçlü monolitik olmayan bir $\lambda \in \text{Irr}(G)$ karakteri vardır. O halde $|\ker\chi_1/S| = 2$ olmalıdır. Ayrıca $V := \ker\chi_2 \cap S$ olmak üzere, $|\ker\chi_2/V| = 2$ elde edilir ve G/V bölüm grubunun Sylow 3-alt grubu normaldir. Dolayısıyla, G/V grubunun sadık karakterleri yoktur. Bu durumda, $144 = |G/V| = |G/\ker\lambda| + (\chi_2(1))^2 = 80$ çelişkisi elde edilir. Yani, G grubunun $\ker\chi_1/S$ şeklinde bir esas faktörü olamaz. Şimdi, G grubunun $\ker\chi_2/M$ şeklinde bir esas faktör seçelim. Yine, $\ker\delta = M$ olacak şekilde G grubunun monolitik olan fakat güçlü monolitik olmayan bir δ indirgenemez karakteri vardır. Bu durumda $Z(G/\ker\delta) = \ker\chi_2/\ker\delta$ ve dolayısıyla $|\ker\chi_2 : \ker\delta| = 3$ eşitlikleri elde edilir. O halde $\ker\chi_1/\ker\delta$, $G/\ker\delta$ bölüm grubunun normal Sylow 3-alt grubudur. Eğer, $\ker\chi_1/\ker\delta$ abelyen ise, Teorem 2.1.14'ten $\ker\chi_1/\ker\delta$ bölüm grubu $\ker\chi_2/\ker\delta$ grubunda ayrılır. Bu durumda, Teorem 2.1.16'dan $G/\ker\delta$ grubu da $\ker\chi_2/\ker\delta$ grubunda ayrılır. Böylece, $G/\ker\delta$ bölüm grubunun biricik minimal normal alt grubu olması ile çelişki elde ederiz. Yani $\ker\chi_1/\ker\delta$ abelyen olamaz. Bu durumda, $\ker\chi_1/\ker\delta$ bir ekstra özel 3-grubudur ve $G/\ker\delta \cong SU_3(F_2)$ elde edilir. Eğer $\ker\delta = 1$ ise, ispat tamamlanacağından $\ker\delta > 1$ olduğunu varsayalım. Şimdi, G grubunun $\ker\chi_2/W \neq \ker\chi_2/M$ şeklinde ikinci bir esas faktörü olmadığını göstereyim. Aksi halde, $\ker\zeta = W$ olacak şekilde monolitik olan fakat güçlü monolitik olmayan bir

$\zeta \in Irr(G)$ karakteri var olur. $D := M \cap W$ olmak üzere, $ker\chi_1/D$, G/D bölüm grubunun normal Sylow 3-alt grubu olur ve $|ker\chi_1/D| = 81$ elde edilir. Ayrıca, G/D grubunun sadık karakterlerinin olmadığını ve χ_1 , χ_2 dışında güçlü monolitik karakterlerinin olmadığını göz önüne alırsak, $Z(G/D) = ker\chi_2/D$ olmalıdır. O halde, $ker\chi_1/D$ bölüm grubunun maksimal normal abelyen alt grubu A/D 'nin indeksi üç olur, yani $|ker\chi_1 : A| = 3$ eşitliği sağlanır. Bu durumda, Lemma 2.1.13'ü kullanarak $|(ker\chi_1/D)'| = 3$ çelişkisi elde edilir. O halde, G grubunun $ker\chi_2/W$ şeklinde bir esas faktörü yoktur. Son olarak, G grubunun $ker\delta/R$ şeklinde bir esas faktör olduğunu varsayalım. Bu durumda, $kerv = R$ olacak şekilde G grubunun monolitik olan fakat güçlü monolitik olmayan bir v indirgenemez karakteri vardır. Bu durumda, Lemma 2.1.13'ten $|Z(G/kerv)| = 3 = |Z(ker\chi_1/kerv)|$ olmalıdır. Lemma 2.1.7'yi kullanarak, $ker\chi_1/kerv$ bölüm grubunun indeksi üç olan bir abelyen normal alt grubu olduğunu görürüz. Ayrıca, $Z(ker\chi_1/kerv) < (ker\chi_1/kerv)'$ olduğu için, $ker\chi_1/kerv$ bölüm grubunun yalnızca bir tane indeksi üç olan abelyen normal alt grubu vardır. Dolayısıyla, bu alt grup karakteristik alt gruptur. Bu durum ise, $G/ker\chi_2$ bölüm grubunun biricik minimal normal alt grubunun $ker\chi_1/ker\chi_2$ olması ile çelişir. Bu çelişki ile $G/ker\chi_2$ bölüm grubunun Berkovich grubu olduğu durum için ispat tamamlanmış olur.

Şimdi $G/ker\chi_2$ bölüm grubunun bir Berkovich grubu olmadığını varsayalım. $N/ker\chi_2$, $G/ker\chi_2$ bölüm grubunun minimal normal alt grubu olsun. $G/ker\chi_2$ bir Berkovich grubu olmadığından, $N < ker\chi_1$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda, G/N bölüm grubu, bütün lineer olmayan indirgenemez karakterleri monolitik olan ve biricik güçlü monolitik karaktere sahip bir gruptur. O halde, Teorem 4.3'ten, G/N bölüm grubu ya mertebesi sekizden büyük olan bir maksimal sınıf 2-grubudur veya $SL(2, 3)$ grubuna izomorftur. İlk olarak, G/N bölüm grubunun mertebesi sekizden büyük olan bir maksimal sınıf 2-grubu olduğunu kabul edelim. χ_2 karakteri G grubunun bir güçlü monolitik karakteri olduğu için, $G/ker\chi_2$ bir 2-grubu olamaz. O halde, $N/ker\chi_2$ bölüm grubu, $2 \neq q$ bir asal sayı olmak üzere, bir elementer abelyen q -grubu olmalıdır. Bu durumda, $|G/ker\chi_2| = 2^\alpha q^\beta$ olacak biçimde $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Ayrıca, Sonuç 2.2.31 sayesinde $G/ker\chi_2$ bölüm grubunun Frobenius çekirdeği $N/ker\chi_2$ olan bir Frobenius grubu olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $q^\beta - 1 = 2^\alpha$ eşitliği elde edilir. $G/ker\chi_2$ bir Berkovich grubu olmadığı için $2 \nmid \beta$ elde edilir. Bu durumda $q^\beta - 1 = 2^\alpha$ eşitliğinin sağlanması için $\beta = 1$ olmalıdır. O halde, $N/ker\chi_2$ bölüm grubu mertebesi q olan

bir devirli gruptur. Fakat, $G/\ker\chi_2$ Frobenius grubunun tümleyeni abelyen olmadığı için çelişki elde ederiz. Şimdi, $G/N \cong SL(2,3)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $N/\ker\chi_2$ bölüm grubu, $2 \neq q$ asalı için bir elementer abelyen q -grubu olduğundan, bir $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ pozitif tamsayısı için $|G/\ker\chi_2| = 24q^\alpha$ olur. O halde, $\chi_2(1) \mid 24$ ve $24q^\alpha = 24 + (\chi_2(1))^2$ olacağından, $q^\alpha = 7$ veya $q^\alpha = 25$ eşitliklerinden biri sağlanmalıdır. Sonuç 2.2.31'den $G/\ker\chi_2$ bir Frobenius grubudur. Dolayısıyla E mertebesi yirmibeş olan bir elementer abelyen 5-grubu olma üzere $G/\ker\chi_2 \cong E \rtimes SL(2,3)$ elde edilir. Eğer $\ker\chi_2 = 1$ ise, G grubu istenilen tipte bir grup olacağından $\ker\chi_2 > 1$ olduğunu varsayalım. G grubunun $\ker\chi_2/R$ şeklinde bir esas faktörünü alalım. Bu durumda, $Y \neq \ker\chi_2$ olacak biçimde, G grubunun Y/R gibi ikinci bir esas faktörü yoktur. Aksi halde, $Y\ker\chi_2 = N$ olacağından, G/Y bölüm grubunun yalnızca bir güçlü monolitik karakteri var olurdu. Fakat bu durumda, Teorem 4.3'ten $G/Y \cong SL(2,3)$ çelişkisini elde ederiz. O halde, G grubunun lineer olmayan indirgenemez karakterlerinin çekirdeklerinin kesişimi triviyal olduğundan, $\ker\mu = R$ olacak şekilde bir $\mu \in Irr(G)$ vardır. Bu μ karakteri monolitik olan fakat güçlü monolitik olmayan bir karakter olduğu için $Z(G/R) = \ker\chi_2/R$ ve böylece $|Z(G/R)| = 5$ eşitlikleri sağlanır. Şimdi, G/R grubunun Sylow 5-alt grubu olan N/R bölüm grubunun abelyen olduğunu varsayalım. Bu durumda, Teorem 2.1.16 ve Teorem 2.1.14'ten $G/R \cong G/\ker\chi_2 \times \ker\chi_2/R$ elde edilir. Bu durum ise, $\mu \in Irr(G)$ karakterinin monolitik oluşu ile çelişir. Yani, $N/R \in Syl_5(G/R)$ alt grubu abelyen olamaz. O halde, N/R grubu He_5 ekstra özel 5-grubuna izomorftur. Böylece, Teorem 2.1.15'den, $SL(2,3)$ grubu He_5 grubu üzerine sadık etki etmek üzere, $G/R \cong He_5 \rtimes SL(2,3)$ elde edilir. Eğer $R = 1$ ise, G istenilen tipte olacağından $R > 1$ olduğunu varsayalım. Şimdi, $L \neq R$ olmak üzere, G grubunun $\ker\chi_2/L$ şeklinde bir esas faktörünün olmadığını gösterelim. Aksi halde, $R \cap L := B$ olmak üzere, N/B bölüm grubu G/B grubunun Sylow 5-alt grubu olur ve $|N/B| = 5^4$ eşitliği elde edilir. G grubunun her lineer olmayan indirgenemez karakterleri monolitik olduğundan, G/B bölüm grubunun sadık indirgenemez karakteri olamaz. Ayrıca, $Z(G/B) = \ker\chi_2/B$ eşitliği sağlanır. O halde, N/B grubunun maksimal abelyen normal alt grubu A/B olmak üzere, $|N : A| = 5$ bulunur. Böylece Lemma 2.1.13'ü kullanarak, $125 = |A/B| = |(N/B)'|.25$ çelişkisi elde edilir. Son olarak, G grubunun R/S şeklinde bir esas faktörü olduğunu varsayalım. Bu durumda $\ker\eta = S$ olacak şekilde, G grubunun monolitik olan fakat güçlü monolitik olmayan bir η indirgenemez karakteri vardır. O halde, $Z(G/S) > 1$ ve dolayısıyla $|R/S| = 5$ elde edilir. Bu ise Lemma

2.1.13'ten $Z(G/S) \neq \ker\chi_2/S$ eşitsizliğini verir. O halde, $Z(G/S) = R/S = Z(N/S)$ eşitlikleri sağlanmalıdır. Şimdi, Lemma 2.1.7'den N/S bölüm grubunun indeksi beş olan bir abelyen normal alt grubu var olur. Ayrıca, $Z(N/S) < (N/S)'$ olduğundan, N/S bölüm grubunun yalnızca bir tane indeksi beş olan abelyen normal alt grubu vardır. Dolayısıyla, bu abelyen normal alt grup karakteristik olacağından, bu durumda $N/\ker\chi_2$ grubunun $G/\ker\chi_2$ Frobenius grubunun biricik minimal normal alt grubu olması ile çelişki elde ederiz. Böylece $\ker\chi_2 < \ker\chi_1$ eşitsizliğinin sağlandığı durumun ispatı tamamlanmış olur.

- Son olarak, $\ker\chi_1 \neq \ker\chi_2$ bu çekirdeklerin G grubunun tüm lineer olmayan indirgenemez karakterlerinin çekirdekleri arasında maksimal olduklarını varsayalım. Bu durumda, $T := \ker\chi_1 \cap \ker\chi_2$ olmak üzere, G/T grubunun bir Berkovich grubu olduğunu Lemma 4.5 sayesinde biliyoruz. O halde, G/T grubu Teorem 2.2.1.4'ten yalnızca 3) şıkkı gibi olabilir. Yani, G/T bölüm grubu bir 2-grubudur. Dolayısıyla, Teorem 4.4'ten G grubunun nilpotent olduğunu görürüz. Dahası, G grubunun tüm lineer olmayan indirgenemez karakterleri monolitik olduğundan, G bir 2-grubudur. $G/\ker\chi_1$ ve $G/\ker\chi_2$ bölüm gruplarının ekstra özel 2-grupları olduğunu biliyoruz. Bu durumda, G grubu teoremden 9) şıkkında verilen grubun yapısına sahiptir. Bu tür gruplara örnek olarak $C_4 \wr C_2$ çelenk grubu verilebilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

□

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde, tanımı ilk defa Erkoç ve diğ. (2022) makalesinde verilen güçlü monolitik karakterler ve özellikleri kullanılarak sonlu grupların yapısı incelenmiştir. Literatürde var olan, indirgenemez karakterler ve monolitik karakterlerin özelliklerinden yararlanılarak elde edilen bazı sonuçların, güçlü monolitik karakterler kullanılarak geliştirilebileceği gösterilmiştir :

- Tam bir tane lineer olmayan indirgenemez karaktere sahip sonlu grupların sınıflandırılması Seitz tarafından yapılmıştır. Bu tezde, Seitz'ın sınıflandırılmasının bir genelleştirilmesi olarak, tüm lineer olmayan indirgenemez karakterleri monolitik olan ve tam bir tane güçlü monolitik karakteri olan sonlu grupların sınıflandırılması yapılmıştır.
- G bir çözülebilir sonlu grup olsun. p asal sayı olmak üzere, G grubunun her lineer olmayan indirgenemez χ karakterleri $p \mid \chi(1)$ şartını sağlıyorsa, G grubunun bir normal p -tümleyeninin olduğu Thompson tarafından ispatlanmıştır. Bu sonucun tüm lineer olmayan indirgenemez karakterler yerine yalnızca monolitik χ karakterleri incelendiğinde de doğru olduğu gösterilmiştir. Monolitik karakterler için elde edilen sonucun güçlü monolitik karakterler kullanılarak da elde edilebileceği Erkoç ve diğ. (2022) makalesinde gösterilmiştir.

Benzer şekilde G grubunun her lineer olmayan indirgenemez χ karakteri $p \nmid \chi(1)$ şartını sağlıyorsa, G grubunun Sylow p -alt grubunun normal olduğu Michler ve Ito tarafından ispatlanmıştır. Bu sonucun da yalnızca monolitik χ karakterler incelenerek elde edildiği bilinmektedir. Yine Erkoç ve diğ. (2022) makalesinde, monolitik karakterler için elde edilen sonucun güçlü monolitik karakterler kullanılarak da elde edilebildiğini gösterilmiştir.

- En fazla üç tane indirgenemez karaktere sahip sonlu grupların çözülebilir olduğu Isaacs tarafından ispatlanmıştır. Bu sonucun en fazla üç tane monolitik karaktere sahip sonlu gruplara genişletilebileceği de bilinmektedir. Bu tezde, bu sonucun en fazla üç tane güçlü monolitik karaktere sahip sonlu gruplara genişletilebileceği ispat edilmiştir.

Yukarıda indirgenemez karakterler ve monolitik karakterler kullanılarak elde edilen bazı sonuçların güçlü monolitik karakterler kullanılarak da elde edilebileceğine dair örnekler verilmiştir. Aynı zamanda, sonlu grupların sınıflandırılmasında da güçlü monolitik karakterlerden yararlanılabilir. Bu tezde, az sayıda güçlü monolitik karaktere sahip olan sonlu grupların bir sınıflandırılması verilmiştir. Elde edilen sonuç aşağıdaki gibidir :

- Tüm lineer olmayan indirgenemez karakterleri monolitik olan ve tam iki tane güçlü monolitik karakteri olan sonlu grupların sınıflandırılması yapılmıştır.

Ayrıca bu tezde, güçlü monolitik karakterler kullanılarak abelyen olmayan sonlu gruplar için nilpotentlik kriteri de verilmiştir :

- G abelyen olmayan bir sonlu grup olsun. G grubunun nilpotent olması için gerek ve yeter koşul her χ güçlü monolitik karakteri için $G/\ker\chi$ bölüm grubunun nilpotent olmasıdır.
- G abelyen olmayan çözülebilir bir sonlu grup olsun. G grubunun nilpotent olması için gerek ve yeter koşul her χ monomial güçlü monolitik karakteri için, $G/\ker\chi$ bölüm grubunun nilpotent olmasıdır.

Literatürde monolitik karakterler kullanılarak sonlu grupların yapısı hakkında bir çok sonuç elde edilmiştir. Daha sonraki çalışmalarda da, sonlu grubun yapısı ile monolitik karakterlerinin bir has alt grubu olan güçlü monolitik karakterleri arasında farklı ilişkiler bulunması amaçlanmaktadır.

KAYNAKLAR

- Berkovich, Y., Chillag, D., Herzog, M., 1992, *Finite Groups in which the Degrees of the Nonlinear Irreducible Characters are Distinct*, Proceedings of The American Mathematical Society, Vol 115, no.4, **955-955**.
- Berkovich, Y., Zhmud, E. M., 1997, *Characters of Finite Groups Part Two*, Trans. of Math. Monographs, Vol 181.
- Berkovich, Y., Isaacs, I. M., Kazarin, L., 1999, *Groups with Distinct Monolithic Character Degrees*, Journal of Algebra, Volume 216, no.2, **448-480**.
- Erkoç, T., Güngör, S. B., Özkan, J. M., 2022, *Strongly monolithic characters of finite groups*, Journal of Algebra and Its Applications, <https://doi.org/10.1142/S0219498823501761>.
- Huppert, B., 1967, *Endliche Gruppen I*, Springer Berlin.
- Isaacs, I. Martin, 1969, *Groups Having at Most Three Irreducible Character Degrees*, Proceedings of the American Mathematical Society 21, no.1, **185-88**.
- Isaacs, I. Martin, 1976, *Character Theory of Finite Groups*, Dover Publications.
- Isaacs, I. Martin, 2008, *Finite Group Theory*, Am. Math. Soc. Graduate Series in Math., Vol 92.
- Isaacs, I. Martin, Knutson, G., 1998, *Irreducible character degrees and normal subgroups*, Journal of Algebra.
- Özkan, J. M., Erkoç, T., 2022, *On the relations between the structures of finite groups and their strongly monolithic characters*, Communications in Algebra, Vol. 51, Issue 2.
- Qian, G., Wang, Y., 2008, *A note on character kernels in finite groups of prime power order*, Arch. Math.
- Scott, W. R., 1987, *Group Theory*, Dover Books on Mathematics.
- Suzuki, M., 1980, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, Springer Series in Optical Sciences, Vol. 247-248.
- Winter, D.L., 1972, *The automorphism group of an extraspecial p -group*, Rocky Mt. J. Math.
- The GAP Group : Groups, Algorithms and Programming, <http://www.gap-system.org>.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Jülide Miray Özkan
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	☒ T.C. ☐ Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
Fakülte	Fen Bilimleri Fakültesi
Bölümü	Matematik
Mezuniyet Yılı	2014

Yüksek Lisans	
Üniversite	Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik Bölümü Anabilim Dalı
Programı	Matematik Programı
Mezuniyet Tarihi	2017

Doktora	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik Bölümü Anabilim Dalı
Programı	Matematik Programı
Mezuniyet Tarihi	2022

Makale ve Bildiriler	
Makaleler	
Özkan, J. M., Erkoç, T., 2022 <i>On the relations between the structures of finite groups and their strongly monolithic characters</i> , Communications in Algebra, Vol 51, Issue 2.	
Erkoç, T., Güngör, S. B., Özkan, J. M., 2022 <i>Strongly monolithic characters of finite groups</i> , Journal of Algebra and Its Applications, https://doi.org/10.1142/S0219498823501761 .	

