

SONLU GRUPLAR VE GEOMETRİLERİ

CANER EYRİSAKAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU GRUPLAR VE GEOMETRİLERİ

CANER EYRİSAKAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
Doç.Dr. Nayıl Kılıç

SİNOP-2014

T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bu çalışma, jürimiz tarafından 15/01/2014 tarihinde yapılan sınav ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Nayil KILIÇ 

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yılmaz Mehmet DEMİRCİ 

Üye : Yrd. Doç. Dr. B. Barış ALKAN 

ONAY :

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

15/01/2014



Doç. Dr. Hünkar Avni DUYAR

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

SONLU GRUPLAR ve GEOMETRİLERİ

ÖZET

Sonlu grup teorisinde önemli çalışmalardan birisi de bütün sonlu ve basit grupların geometrik incelenmesidir. Bu konuyla ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Özellikle Mathieu gruplarının geometrileri üzerinde geniş araştırmalar yapılmış, farklı ranklara sahip geometriler oluşturulmuştur. Bunu yaparken, Mathieu gruplarının alt gruplarından yararlanılmıştır.

3. ünite de Mathieu grupları M_9 , M_{10} , M_{11} ve M_{12} 'nin inşasını tarif etmekteyiz. Daha sonra ilişki geometri tanımı yapılarak M_9 , M_{10} , M_{11} ve M_{12} gruplarının farklı ranklara sahip geometrileri incelenmektedir ve ilişki geometri diyagramı oluşturulmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Mathieu Grupları, İlişki Geometrileri, Geometri Diyagramı

FINITE GROUPS and GEOMETRIES

ABSTRACT

In finite groups theory, one of the most important studies is examination of finite and simple groups. Many studies have been done so far. Especially, wide researches have been done about Mathieu groups geometries, geometries which belongs different ranks, have been constructed. While doing this, it has been benefitted from subgroups of Mathieu groups.

In section 3, we describe the construction of Mathieu groups M_9 , M_{10} , M_{11} and M_{12} . After making defination of incidence geometry, the groups of M_9 , M_{10} , M_{11} and M_{12} groups belonging to different ranks of geometries have been examined and incidence geometry diagram has been constructed.

Key Words: Mathieu Groups, Incidence Geometries, Geometry Diagrams

TEŞEKKÜR

Danışmanım Doç. Dr. Nayil KILIÇ hocama tez boyunca katkılarından ve verdiği destekten dolayı sonsuz teşekkür ederim.

Ayrıca bu süreçte yanımda olan ve desteğini esirgemeyen aileme ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SEMBOLLER ve KISALTMALAR LİSTESİ	v
ŞEKİLLER VE ÇİZELGELER	vi
1. GİRİŞ	1
2. BAZI TANIM ve KAVRAMLAR	2
3. MATHIEU GRUPLARININ İNŞASI	4
3.1. Steiner Sistemler	12
4. INCIDENCE ve KOSET GEOMETRİLER	13
4.1. Incidence Geometri	13
4.2. Koset Geometri	15
5. TETRAHEDRALİN İLİŞKİ GEOMETRİSİ ÖRNEĞİ	18
6. BAZI MATHIEU GRUPLARI İÇİN RANK-2, RANK-3 ve RANK-4 ÖRNEKLERİ	25
6.1. M_9 Mathieu Grubu İçin Rank-2 Örneği	25
6.2. M_{10} Mathieu Grubu İçin Rank-3 Örneği	28
6.3. M_{11} Mathieu Grubu İçin Rank-3 Örneği	32
6.4. M_{12} Mathieu Grubu İçin Rank-4 Örneği	36
7. M_{11} ve M_{12} İÇİN GEOMETRİLER	43
7.1. M_{11} Mathieu Grubu İçin Rank-2 Geometrisi	43
7.2. M_{12} Mathieu Grubu İçin Rank-5 Geometrisi	45
8. TARTIŞMA ve SONUÇ	53
9. KAYNAKLAR	54
ÖZGEÇMİŞ	55

SEMBOLLER ve KISALTMALAR LİSTESİ

SEMBOLLER

$A \times B$	A ve B 'nin direkt çarpımı
$A.B$	A ve B 'nin yarıdirekt çarpımı
C_3	Mertebesi 3 olan devirli grup
A_n	Alterne grup
$A(n)$	Alterne grup
S_n	Simetrik grup
$S(n)$	Simetrik grup
$ X $	X 'in eleman sayısı
$\langle x, y \rangle$	x ve y tarafından üretilen grup
$*$	İlişki bağıntısı
G_x	x 'in sabitleyeni (stabilizeri)
x^G	x 'in orbiti
Γ_F	F 'nin rezidüsü
$\text{Aut}(G)$	G 'nin otomorfizma grubu
G/H	Bölüm grubu
gH	Sol koset (sol yan küme)
Hg	Sağ koset (sağ yan küme)
$[G:H]$	H 'ın G içindeki indeksi

ŞEKİLLER VE ÇİZELGELER

	Sayfa No
Şekil 4.1 Bir ilişki geometrisinin rank-2 diyagramı	14
Şekil 4.2 Rank-2 koset geometrisini diyagramı	16
Şekil 5.1 Tetrahedral	18
Şekil 5.2 Tetrahedralin rank-3 ilişki geometrisinin diyagramı	24
Şekil 6.1 M_9 grubunun Q_8 ve C_2 alt gruplarından oluşan rank-2 diyagramı	28
Şekil 6.2 M_{10} grubunun M_9 , $M_8:2$ ve S_3 alt gruplarından oluşan rank-3 diyagramı	32
Şekil 6.3 M_{11} grubunun $M_9:2$, $M_8:S_3$ ve S_4 alt gruplarından oluşan rank-3 diyagramı	36
Şekil 6.4 M_{12} grubunun M_{11} , $A_6.2.2$, $3^2:2S_4$ ve $2^1+4:S_3$ alt gruplarından oluşan rank-4 diyagramı	42
Şekil 7.1 M_{11} grubunun M_{10} ve $M_9:2$ maksimal alt gruplarından oluşan rank-2 geometrisinin diyagramı	45
Şekil 7.2 M_{12} grubunun M_{11} , $M_{10}.2$, $M_9:S_3$, $M_8:S_4$ ve S_6 alt gruplarından oluşan rank-5 geometri diyagramı	52

1. GİRİŞ

Sonlu grup teorisinde geometrik izahla ilgili bir çok çalışma yapılmıştır. İlk defa grupların geometrisi kavramını Tits ortaya atmış ve daha sonra Tits Lie-Chevalley tipteki sonlu basit grupların geometrileri üzerinde çalışmıştır. Buekenhout (1979), geometri ve gruplar için diyagramlar oluşturmuş ve Buekenhout (1985), Sporadik Gruplar için diyagramlar sunmuştur. Daha sonra Buekenhout, Dehon ve Leemans (1996), M_{11} Mathieu grubunun tüm geometrilerini hesaplamışlardır. Gottschalk ve Leemans (1998), J_1 Janko grubunun residually weakly primitive geometrisini oluşturmuş, Leemans, M_{22} 'nin residually weakly primitive geometrisini oluşturmuş, Leemans (2001), M_{12} Mathieu Grubunun rankı 5 olan, residually connected ve firm geometrilerini inşa etmiştir. Daha sonra Dehon ve Leemans (2002), Koset geometrilerinin inşasını yapıp, ilk önce Cayley paket programı ile başlanmış olup grupların uygulamalı geometri hesaplamaları yapmış ve daha sonra bu programın gelişmiş şekli olan Magma bilgisayar programını kullanarak çalışmışlardır. Leemans (2001), M_{23} Mathieu grubunun rankı 5 olan altı tane geometrisini oluşturmuştur. Ivanov (2002), Sporadik gruplarının geometrileri üzerinde çalışmalar yapmış, Leemans, $PSL(3,4)$ grubunun geometrilerini incelemiş, Leemans (2006), M_{24} Mathieu grubunun residually weakly primitive geometrilerini oluşturmuştur. Daha sonra Buekenhout ve Leemans (2007), McLaughlin Sporadik basit gruplarının rankı 6 olan geometrisini çalışmışlardır. N. Kilic (2010), M_{23} grubunun tüm residually connected Rank-2 geometrilerini hesaplamış, yine Kilic ve Rowley (2012), M_{22} 'nin residually connected geometrileri için maksimal rankın 6 olacağını ispatlamışlardır.

2.BAZI TANIM ve KAVRAMLAR

Tanım 2.1. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, n ögeli bir kümenin tüm permütasyonlar grubuna, n elemanlı simetrik grup denir ve $S(n)$ veya S_n şeklinde gösterilir. n elemanlı simetrik grubun eleman sayısı $n!$ 'dir (Humphreys, 1996).

Tanım 2.2. $n > 2$, bir $S(n)$ grubunun çift permütasyonlarının oluşturduğu alt gruba alterne grup denir ve $A(n)$ veya A_n ile temsil edilir. Bir alterne grubun eleman sayısı $\frac{n!}{2}$ 'dir (Humphreys, 1996).

Tanım 2.3. G bir grup ve X boştan farklı bir küme olsun. Eğer $f : G \times X \rightarrow X$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa, G grubuna X kümesi üzerine etki ediyor denir (Humphreys, 1996).

(i) $\forall x \in X$ için $1_G * x = x$, (Burada 1_G G grubunun birimidir.)

(ii) $\forall g_1, g_2 \in G$ için $(g_1 \cdot g_2) * x = g_1 * (g_2 * x)$

Tanım 2.4. G ve H boştan farklı iki grup olsun. $g \in G$ ve $h \in H$ olmak üzere, (g, h) şeklindeki elemanların oluşturduğu gruba direct çarpım grubu denir ve $G \times H$ şeklinde gösterilir. Bu grup üzerinde tanımlanan işlem ise direct çarpım işlemi olup şöyle tanımlanır: $g_1, g_2 \in G$ ve $h_1, h_2 \in H$ olmak üzere;

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2)$$

(Fraleigh, 1967)

Tanım 2.5. G bir grup olmak üzere H , G grubunun alt grubu ve N ise G 'nin bir normal alt grubu olsun. e , G grubunun birim elemanı olmak üzere $N \cap H = \{e\}$ şartını sağlayan $G = N.H$ çarpımına H ve N 'nin yarıdirect (semidirect) çarpımı denir. Eğer G bu şekilde tanımlanmış bir grup ise G 'nin mertebesi şöyle hesaplanır (Fraleigh, 1967) :

$$|G| = \frac{|N| \cdot |H|}{|N \cap H|} = \frac{|N| \cdot |H|}{1} = |N| \cdot |H| \quad (2.1)$$

Tanım 2.6. Bir G grubu ile bir grubun otomorfizma grubunun yarıdirect çarpımına G grubunun holomorfisi denir ve $Hol(G) = G.Aut(G)$ şeklinde gösterilir (Humphreys, 1996).

Tanım 2.7. G grubu boştan farklı bir X kümesi üzerine etki etsin. $x \in X$ olmak üzere $\{g \in G : gx = x\}$ şartını sağlayan kümeye, x 'in G 'deki sabitleyeni (stabilizeri) denir ve G_x ile gösterilir (Humphreys, 1996).

Tanım 2.8. G grubu, boştan farklı bir X kümesi üzerine etki etsin. $\{gx : g \in G\} \subseteq X$ kümesine G grubunun x 'i kapsayan orbiti denir ve x^G ile gösterilir (Humphreys, 1996).

Teorem 2.9. (Orbit-Stabilizer Teoremi) G bir grup olsun ve G boştan farklı X kümesi üzerine etki etsin. Her bir $x \in X$ için, aşağıdaki eşitlik vardır (Humphreys, 1996).

$$|x^G| = [G : G_x] \quad (2.2)$$

3.MATHIEU GRUPLARININ İNŞASI

Bu bölümde Mathieu grupları hakkında kısaca bilgi verilecek ve bu grupların nasıl inşa edildiği gösterilecektir. Burada M_{11} grubunun nasıl inşa edileceği incelenecektir. Bu üç adımda gerçekleştirilir. İlk olarak M_9 grubu tanımlanır.

$N = C_3 \times C_3$ grubunun otomorfizma grubu, $\mathbb{Z}_3$ üzerinde tanımlanmış olan

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisleri tarafından üretilen Q alt grubunu içerir.

$A^2 = B^2 = -I$ ve $BAB^{-1} = A^{-1}$ olduğundan Q kümesi 8 elemanı olan Quaternion grubuna izomorftur. Çünkü Quaternion grubunun tanımı gereği

$$Q_8 = \langle a, b : a^4 = 1, a^2 = b^2 = -1, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$$

olduğundan A ve B matrisleri için;

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = B^2 \text{ ve } A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

eşitlikleri $Q \cong Q_8$ olduğunu gösterir ve böylece $|Q| = |Q_8| = 8$ olur.

Şimdi N ile Q 'nun yarıdirect çarpımını ele alalım. Böylece oluşan $N.Q$ çarpımı, N 'nin holomorf grubunun alt grubu olup M_9 ile gösterilir. Yani $Q \leq \text{Aut}(N)$ olmak üzere holomorf tanımından ,

$$M_9 = N . Q \leq N . \text{Aut}(N) \text{ olur.}$$

Burada M_9 grubunun eleman sayısını eşitlik (2.1) kullanılarak şöyle hesaplamak mümkündür.

$$|M_9| = |NQ| = \frac{|N| \cdot |Q|}{|N \cap Q|} = \frac{9 \cdot 8}{1} = 72$$

M_9 grubu, aynı zamanda, $S(9)$ simetrik grubundaki bazı permütasyonlar tarafından da temsil etmek mümkündür. Şöyle ki; π_1 ve π_2 , $S(9)$ grubuna ait 2 permütasyon olmak üzere;

$$\pi_1=(123)(456)(789), \quad \pi_2=(147)(258)(369)$$

$\pi_1^3=\pi_2^3=1$ ve $\pi_1\pi_2=\pi_2\pi_1$ olduğundan π_1 ve π_2 tarafından üretilen grup

$N=C_3 \times C_3$ 'e izomorftur.

Şimdi ise $p_1=(2437)(5698)$ ve $p_2=(2539)(4876)$ şeklinde iki permütasyon ele alınsın.

$$p_1^2=(23)(47)(59)(68)=p_2^2 \text{ ve } p_2p_1p_2^{-1}=p_1^{-1} \text{ olduğundan } \langle p_1, p_2 \rangle \cong Q_8 \text{ 'dir.}$$

$$\text{O halde} \quad p_1\pi_1p_1^{-1}=\pi_2 \quad ; \quad p_1\pi_2p_1^{-1}=\pi_1^2;$$

$$p_2\pi_1p_2^{-1}=\pi_1\pi_2 \quad ; \quad p_2\pi_2p_2^{-1}=\pi_1\pi_2^2$$

olduğundan p_1 ve p_2 'nin $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle$ üzerine etkisi tam olarak A ve B matrislerinin $C_3 \times C_3$ grubu üzerine etkisi gibidir. Bu da

$$\langle \pi_1, \pi_2, p_1, p_2 \rangle \cong NQ \quad (3.1)$$

olduğunu gösterir.

Tanım 3.1. X boştan farklı bir küme ve $G \leq S_x$ olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $x^G = X$ ise G grubu geçişlidir (transitive) denir. Geçişli gruplara 1- geçişli grup da denilebilir (Humpreys, 1996).

G , X üzerinde transitive olduğu zaman, G_x sabitleyeni G içinde $|X|$ indeksine sahiptir ve $\forall y \in X$, gx 'lerden oluşur (bazı $g \in G$ için). Herhangi $y \in X$ elemanının orbiti X 'in tamamından oluştuğu kolaylıkla görülür.

Önerme 3.2. $G=\langle \pi_1, \pi_2, p_1, p_2 \rangle$ grubu 72 elemanlı geçişli bir grup olup M_9 'a izomorftur. 1'in sabitleyeni olan G_1 , 8 elemanlı olan $Q=\langle p_1, p_2 \rangle$ grubudur. Eğer τ ,

G 'nin Q da bulunmayan bir elemanı ise $G = Q \cup Q\tau Q$ dur. Burada $Q\tau Q$ bir çift taraflı koset olup $\{x\tau y : x, y \in Q\}$ şeklinde ifade edilir (Humphreys, 1996).

İspat: $M_9 = NQ$ olduğu ve böylece M_9 grubunun mertebesinin 72 olduğu belirtilmişti. Dolayısıyla (3.1) eşitliğine göre G , M_9 'a izomorf olup, 72 elemanlıdır. $\pi_1, \pi_2 \in S(9)$ olmak üzere, $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle$ 'nin ürettiği grup $X = \{1, 2, \dots, 9\}$ kümesi üzerinde geçişlidir ve dolayısıyla $G = \langle \pi_1, \pi_2, p_1, p_2 \rangle$ grubu da bu küme üzerinde geçişli olur. $Q = \langle p_1, p_2 \rangle$ grubunun $\{2, 3, \dots, 9\}$ kümesi üzerinde geçişli olacağı açıktır.

G grubu 72 elemanlı olduğundan Orbit-Stabiliser Teoremi gereği 1'in sabitleyeni olan G_1 grubunu G içindeki indeksi 8 olur. Yani,

$$|G_1| = [G : X] = \frac{|G|}{|X|} = \frac{72}{9} = 8 \text{ 'dir.}$$

Böylece $|G_1| = 8$ olduğundan ve Q grubu, G grubunun alt grubu olduğundan $G_1 = Q$ olur. G 'nin Q da bulunmayan τ elemanı için $\tau(1)$ tam sayısı bazı i ($i \neq 1$) elemanlarına eşittir. Yani, $\tau(1) \neq 1$ olur. Buradan $\tau^{-1}(1) \in \{2, 3, \dots, 9\}$ olur. Yine aynı şekilde G de olup Q da olmayan v gibi farklı bir permütasyon alınsın. $v^{-1}(1)$ tam sayısı da $\{2, \dots, 9\}$ kümesi içinde olur. Q grubu da bu küme üzerinde geçişli olduğundan öyle bir $\phi \in Q$ permütasyonu vardır, öyle ki $\tau^{-1}(1)$ tam sayısını $v^{-1}(1)$ tamsayısına götürür. Böylece, $\phi\tau^{-1}(1) = v^{-1}(1)$ olup buradan $v\phi\tau^{-1}(1) = 1 \Rightarrow Q$ 1'in stabilizeri olduğundan $v\phi\tau^{-1} \in Q \Rightarrow v\phi \in Q\tau \Rightarrow v \in Q\tau Q$ olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi 2. adım olarak 720 elemanlı M_{10} grubu tanımlansın.

Önerme 3.3. M_{10} grubu, M_9 ile birlikte $\sigma = (1 \ 10)(45)(68)(79)$ permütasyonu tarafından üretilen $S(10)$ grubunun bir alt grubudur.

Bu durumda, $M_{10} = M_9 \cup M_9\sigma M_9$ grubu 720 elemanlı geçişli bir grup olup, M_{10} içindeki 10'un sabitleyeni M_9 grubudur (Humphreys, 1996).

İspat: M_9 grubu M ile, M_{10} grubu S ile gösterilsin. $S = M \cup M\sigma M$ grubunun çarpma işlemi altında kapalı olduğu gösterilsin. Yani $x, y \in S$ olmak üzere $xy \in S$ olduğunu gösterelim. Bunun için dört farklı durum vardır:

- i) $x, y \in M$;
- ii) $x \in M$ ve $y \in M\sigma M$;
- iii) $x \in M\sigma M$ ve $y \in M$;
- iv) $x, y \in M\sigma M$.

Birinci durumda $xy \in M \subseteq S$ (M grup olduğundan) $xy \in S$ şartını sağlar. Aynı şekilde (ii) ve (iii) durumlarında $xy \in S$ olacağı açıktır. Dördüncü durumda ise $xy \in M\sigma M\sigma M$ olduğundan kapalılık özelliği sağlanması için $\sigma M\sigma \subseteq S$ olduğu gösterilmelidir.

Bunu göstermek için Önerme 3.2 de olduğu gibi $\pi_1 \in M - Q$ olacak şekilde özel bir $\tau = \pi_1 p_1^2 \pi_1^{-1} = (13)(49)(58)(67)$ elemanı için $M = Q \cup Q\tau Q$ şeklinde alınsın. $\sigma M\sigma = \sigma(Q \cup Q\tau Q)\sigma = \sigma Q\sigma \cup \sigma(Q\tau Q)\sigma \subseteq S$ olduğu gösterilmelidir.

$\sigma^2 = 1$ olduğundan,

$$\sigma p_1 \sigma = \sigma(2437)(5698)\sigma^{-1} = (2539)(4876) = p_2$$

$$\sigma p_2 \sigma = \sigma(2539)(4876)\sigma^{-1} = (2437)(5698) = p_1$$

olduğundan $\sigma Q\sigma = Q$ olur ve böylece $\sigma Q\sigma \subseteq S$ olur.

Şimdi ise sadece $\sigma(Q\tau Q)\sigma \subseteq S$ olduğu gösterilmelidir.

$\sigma\tau = (1\ 3\ 10)(4\ 7\ 8)(5\ 6\ 9)$ olarak bulunur. Buradan $(\sigma\tau)^3 = 1$, $\tau^2 = 1$ olduğundan $\sigma\tau\sigma = \tau\sigma\tau$ olur ve $\sigma Q\sigma = Q$ olduğundan $\sigma Q = Q\sigma$ olur. Böylece

$$\sigma(Q\tau Q)\sigma = \sigma Q\tau Q\sigma = Q\sigma\tau\sigma Q = Q\tau\sigma\tau Q = (Q\tau)\sigma(\tau Q) \subseteq M\sigma M \subseteq S$$

olur, bu da istenilen sonuçtur.

$S = M \cup M\sigma M$ eşitliğinin bir grup olduğu gösterildi. S grubu M ve σ 'yı ihtiva ettiğinden dolayı $\langle M, \sigma \rangle \subseteq S$ olur. $\langle M, \sigma \rangle$ grubu M ve $M\sigma M$ 'yı ihtiva

ettiğinden dolayı da $S \subseteq \langle M, \sigma \rangle$ olur. Böylece $S = M_{10} = \langle M, \sigma \rangle = M \cup M\sigma M$ olur bu da istenilen sonuçtur.

Şimdi ise M_{10} grubunun geçişli olduğu gösterilsin.

M grubunun, $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ üzerinde geçişli olduğu biliniyor. M_{10} grubu, M grubunu ihtiva ettiği için en azından bu küme üzerinde geçişli bir grup olur.

μ , M üzerinde değişen bir eleman olmak üzere M_{10} grubu, 10 sayısını, M_{10} grubundaki uygun bir eleman tarafından $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ içindeki herhangi bir elemana gidecek şekilde tüm $\mu\sigma$ şeklindeki çarpımları ihtiva eder. Böylece M_{10} grubu, $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ üzerinde geçişli olur.

Şimdi ise 10'un sabitleyeninin, M_9 olduğu gösterilsin.

M 'nin her elemanı 10'u sabitlerken $M\sigma M$ 'nin hiçbir elemanı 10'u sabitlemez. Çünkü, $\mu_1, \mu_2 \in M$ olmak üzere,

$$\mu_1\sigma\mu_2(10) = \mu_1\sigma(10) = \mu_1(1) \in \{1, 2, \dots, 9\}$$

Böylece, M grubu, M_{10} grubunda 10 tamsayısının sabitleyenidir. O halde, (2.2) eşitliğinden

$$|M_{10}| = 10 \cdot |M_9| = 10 \cdot 72 = 720$$

olur. Böylece önerme ispatlanmış olur.

Son adımda da M_{11} grubu inşa edilir.

Önerme 3.4. M_{11} grubu, $S(11)$ simetrik grubunun, M_{10} ve $v = (4\ 7)(5\ 8)(6\ 9)(10\ 11)$ permütasyonu tarafından üretilen bir alt grubu olsun.

O halde, M_{11} grubu 7920 elemanlı geçişli bir grup olup $M_{11} = M_{10} \cup M_{10}vM_{10}$ olur ve burada M_{10} grubu, M_{11} 'in 11 noktasını sabitleyenidir (Humphreys, 1996).

İspat: M_{10} grubu S ile gösterilsin. $T = S \cup SvS$ grubu çarpma işlemi altında kapalılık özelliğini sağladığı gösterilsin. M_{10} grubunun inşasında olduğu gibi bu önermenin ispatında da dört farklı durum üzerinden ispat yapılacaktır. İlk 3 adım bir önceki önermedeki sonuçlarla aynıdır. Son adımda gösterilmek istenen ise $x, y \in SvS$ iken $xy \in T$ olduğunu göstermektir. Bunu göstermek için vSv 'nin T 'nin alt kümesi olduğu gösterilmelidir.

Şimdi Önerme 3.3'te olduğu gibi $v = (4\ 7)(5\ 8)(6\ 9)(10\ 11)$ için $T = S \cup SvS$ 'nin çarpma işlemi altında kapalı olduğu gösterilsin. Hatırlanacağı üzere $S = M \cup M\sigma M$ ve $\sigma = (1\ 10)(45)(68)(79)$ olarak bulunmuştu. O halde,

$$vp_1v = v(2437)(5698)v^{-1} = (2734)(5896) = p_1^{-1} \text{ ve}$$

$$vp_2v = v(2539)(4876)v^{-1} = (2836)(4975) = p_1^{-1}p_2$$

olur. Aynı zamanda,

$$v\pi_1v = v(123)(456)(789)v^{-1} = (123)(789)(456) = \pi_1 \text{ ve}$$

$$v\pi_2v = v(147)(258)(369)v^{-1} = (174)(285)(396) = \pi_2^{-1}$$

olur. Böylece, $vMv = M \subseteq S \subseteq T$ olur ve bu da ispatın ilk kısmını oluşturur. Yani $vSv \subseteq T$ olur.

Şimdi ise $v(M\sigma M)v$ 'nin T 'nin bir alt kümesi olduğu gösterilir.

$$v\sigma = (4\ 7)(5\ 8)(6\ 9)(10\ 11)(1\ 10)(4\ 5)(6\ 8)(7\ 9) = (1\ 11\ 10)(4\ 8\ 9)(5\ 7\ 6)$$

olur.

O halde, $(v\sigma)^3 = 1$ ve $v\sigma v = \sigma v\sigma$ 'dir. $vMv = M$ 'den $vM = Mv$ eşitliği elde edilir. Böylece,

$v(M\sigma M)v = M(v\sigma v)M = Mv\sigma vM = M\sigma v\sigma M \subseteq SvS \subseteq T$ olur. Bu da istenilen sonuçtur.

Önerme 3.3.'te olduğu gibi $M_{11} = T = \langle S, v \rangle = S \cup SvS$ eşitliği vardır.

Şimdi ise $S = M_{10}$ grubunun $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ kümesi üzerinde geçişli olduğu biliniyor. Dolayısıyla M_{11} grubu, M_{10} grubunun tüm elemanlarını ihtiva ettiğinden M_{11} grubu da $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ kümesi üzerinde geçişli olur. M_{11} grubu, M_{10} 'un uygun bir μ elemanı tarafından, 11 sayısını, $\{1, 2, 3, \dots, 11\}$ kümesi içindeki herhangi bir elemana gidilebilecek şekilde tüm $\mu\nu$ çarpımları ihtiva ettiğinden dolayı M_{11} grubunda geçişli bir grup olur.

M_{10} 'un her elemanı, 11 sayısını sabitlerken $M_{10}\nu M_{10}$ içindeki hiçbir eleman 11'i sabitlemez. Çünkü;

$$\sigma_1, \sigma_2 \in M_{10} \text{ olmak üzere,}$$

$$\sigma_1\nu\sigma_2(11) = \sigma_1\nu(11) = \sigma_1(10) \in \{1, 2, 3, \dots, 10\}$$

olup M_{10} grubu, $M_{11} = M_{10} \cup M_{10}\nu M_{10}$ grubu içinde 11'i sabitleyen gruptur. O halde; Orbit-Stabilizer Teoremi gereği, $X = \{1, 2, 3, \dots, 11\}$ için;

$$|M_{11}| = |M_{10}| \cdot |X| = 720 \cdot 11 = 7920 \text{ olur.}$$

Uyarı 3.5. Önerme 3.4'te yapılan ispat yöntemi ile aynı şekilde $\omega = (4\ 9)(5\ 7)(6\ 8)(11\ 12)$ permütasyonu ile birlikte M_{11} grubu kullanılarak M_{12} grubu üretilebilir.

Burada $\nu = (4\ 7)(5\ 8)(6\ 9)(10\ 11)$ permütasyonu kullanılarak mertebesi 3 olan $\omega\nu$ permütasyonu oluşur. Yine aynı yöntem kullanılarak $M_{12} = M_{11} \cup M_{11}\omega M_{11}$ olduğu gösterilir ve M_{12} geçişli bir grup olup M_{11} grubu, M_{12} içindeki 12'nin sabitleyenidir. Buradan yine Önerme 3.4'te uygulandığı biçimde, Orbit-Stabilizer Teoremine göre M_{12} grubunun mertebesi 95040 olarak bulunur.

Uyarı 3.6. Sistemli olarak M_{11} grubu geçişli gruplardan elde edilerek inşa edilmiş oldu. Q 8 elemanlı, M_9 9 elemanlı, M_{10} 10 elemanlı ve M_{11} 11 elemanlı kümeler üzerinde geçişli oldukları belirtildi. Buna göre genelleme yapılacak olursa;

Q grubu, M_9 grubu içerisinde bir nokta sabitleyen, M_9 grubu M_{10} içinde bir nokta sabitleyen ve M_{10} grubu da M_{11} grubu içerisinde bir nokta sabitleyendir.

$(k \geq 2)$ olmak üzere G 'nin k -transitive olduğu söylenir, eğer o transitive ve 1 nokta stabilizeri fixleyen nokta dışındaki noktaların üzerinde $k-1$ -transitive ise. O halde, M_{11} grubu 4-geçişli olan bir grup, M_{10} grubu 3-geçişli, M_9 2-geçişli ve Q grubu ise 1-geçişli bir grup olur.

Buradan sonraki bölümlerde Q grubu M_8 şeklinde ifade edilecektir.

Son iki önermedeki sonuçları genelleştirerek aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.7. $k \geq 2$ için, G , bir X kümesi üzerinde k -geçişli olan bir permütasyon grup olsun. X^+ ise X kümesine ' α ' elemanı eklenerek elde edilen bir küme olsun. Kabul edelim ki h , X^+ üzerinde tanımlı bir permütasyon ve $g \in G$ olsun. Öyle ki;

h permütasyonu, α elemanını bazı $x \in X$ elemanları ile değiştirir;

h permütasyonu, X kümesinin bir y elemanını sabitler;

g ise x ve y elemanlarını değiştirir;

$(gh)^3$ ve h^2 , G 'ye ait elemanlardır ve

$hG_x h = G_x$ olur. O halde,

$\langle G, h \rangle$ grubu X^+ kümesi üzerinde $(k+1)$ -geçişli bir grup olup, α 'nın sabitleyeni G grubudur.

Bu teorem Önerme 3.3'te $G = M_9$ ve $X = \{1, 2, \dots, 9\}$ kümesi olmak üzere $\alpha = 10$, $h = (1\ 10)(4\ 5)(6\ 8)(7\ 9)$ ve $g = (1\ 3)(4\ 9)(5\ 8)(6\ 7)$ şeklinde uygulanmıştı. Aynı şekilde Önerme 3.4'te $G = M_{10}$, $X = \{1, 2, \dots, 10\}$ kümesi ile birlikte $\alpha = 11$, $h = (4\ 7)(5\ 8)(6\ 9)(10\ 11)$ ve $g = (1\ 10)(4\ 5)(6\ 8)(7\ 9)$ permütasyonları ile verilmişti. Böylece Teorem 3.7 gereği ile daha önce ispatlanmış olan önermeler genelleştirilmiş oldu.

3.1. Steiner Sistemler

Bu bölümde Steiner sistemlerinin tanımı yapılacak ve bu sistemlerin Mathieu gruplarıyla olan ilişkilerine kısaca değinilecektir.

Tanım 3.1.1. Bir $S(t, k, v)$ Steiner sistemi, v noktalarından oluşan bir X kümesi ile blok adı verilen ve eleman sayısı k olan X 'in alt kümelerinin koleksiyonları tarafından oluşur, öyle ki; X 'in herhangi t noktası sadece bir tane blok içinde olmalıdır. Örneğin; $t = 5$, $k = 6$ ve $v = 12$ için Steiner sistemi $S(5, 6, 12)$ şeklinde olup, 12 elemanlı bu kümeden seçilen herhangi 5 eleman sadece bir tane 6 elemanlı blokta bulunabilir.

$X = \{1, 2, \dots, 12\}$ kümesi üzerinde tanımlanmış olan M_{12} Mathieu grubu, aynı şekilde $\{1, 2, \dots, 12\}$ kümesinin elemanlarından oluşan $S(5, 6, 12)$ Steiner sistemiyle ilişkilidir. Dolayısıyla bunu $M_{12} = \text{Aut}(S(5, 6, 12))$ şeklinde yazmak mümkündür.

Uyarı 3.1.2. Bir $S(t, k, v)$ Steiner sisteminde blok sayısı

$$\binom{v}{t} / \binom{k}{t}$$

formülü ile hesaplanır.

4. INCIDENCE ve COSET GEOMETRİLER

4.1. İlişki (incidence) Geometrisi

İlişki geometri, genel olarak, geometrik objelerin farklı tipleri içeren ve bu farklı tipler arasında ‘ilişki’ (incidence) olarak adlandırılan bir bağıntıyı bulunduran yapıdır. Bu geometrik objeler; noktalar, doğrular, düzlemler, konikler, ...v.s. olabilir. Bu farklı objeleri biz genel olarak ‘varyeteler’ (türler) olarak tanımlayacağız.

Tanım 4.1.1. Bir ilişki geometrisinin yapısı, varyetelerin oluşturduğu bir V kümesinden, tiplerin oluşturduğu bir I tip kümesine, $\tau: V \rightarrow I$ şeklinde tanımlanmış bir fonksiyondan ve V üzerinde tanımlanmış olan simetrik bir ilişki bağıntısından oluşur. Bu ilişki bağıntısı (incidence bağıntısı) ‘ $*$ ’ ile temsil edilip, aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$v, \omega \in V \text{ için } \tau(v) = \tau(\omega) \text{ ve } v * \omega \Leftrightarrow v = \omega \quad (4.1)$$

Yani tipleri aynı olan iki varyete arasında ilişki bağıntısı varsa bu varyeteler eşittir.

Bir ilişki bağıntısının yapısı $\Gamma = \Gamma(V, *, I, \tau)$ şeklinde temsil edilir.

Tanım 4.1.2. $i \in I$ bir ilişki geometrisinde, tipi i olan elemanlara i - eleman denir. Bu tipi i elemanlarının oluşturduğu küme V_i ile ifade edilir.

Tanım 4.1.3. Bir ilişki geometrisindeki farklı tipteki varyetelerin sayısına o ilişki geometrisinin rankı denir.

Tanım 4.1.4. Aralarında ilişki bağıntısının olduğu varyetelerin oluşturduğu kümeye bayrak (flag) denir ve F ile gösterilir.

Bir bayrağın tipi, $\tau(F)$ olup, F bayrağındaki varyetelerin tiplerinin kümesidir. F bayrağının cotipi ise $I \setminus \tau(F)$ kümesi olup, bir F bayrağının rankı ise o bayrağın kardinalitesi olarak adlandırılır.

Tanım 4.1.5. Maksimal olan bayrağa chamber denir. O halde bir chamber tipi I olan her tipteki varyeteleri ihtiva eden bayraktır.

Tanım 4.1.6. F bayrağı chamber olmayan bir bayrak olmak üzere, F 'nin rezidüsü Γ_F ile temsil edilip aşağıdaki gibi tanımlanır.

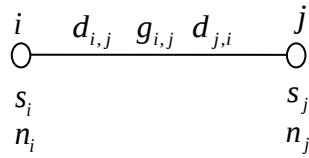
$\forall \omega \in F, \forall v \notin F$ için $v * \omega$ şartını sağlayan tüm varyeteleri ihtiva eder. Yani,

$$\Gamma_F = \{v \mid \forall v \notin F, \forall \omega \in F, v * \omega\}$$

Bir Γ_F rezidüsünün tipi F bayrağının cotipi olup, rankı ise F bayrağının corankıdır. Chamberın rezidüsü $\emptyset$ ' dir.

4.1.7. İlişki Geometrisinin Diyagramı

Rank-2 ilişki geometrisinin diyagramı:



Şekil 4.1. Bir ilişki geometrisinin rank-2 diyagramı

Yukarıda verilmiş olan diyagram iki farklı tipteki elemanlar arasında oluşan diyagramdır. I ilişki geometrisinin tip kümesi olmak üzere $i, j \in I$ 'dır.

Diyagramda kullanılan değerlerin tanımları aşağıdaki gibi verilmiştir.

Tanım 4.1.8. I kümesi, bir geometrinin farklı tiplerinin kümesi olmak üzere;

Her $i \in I$ için F , tipi $I \setminus \{i\}$ olan bir bayrak olsun. s_i değeri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$s_i = |\Gamma_F| - 1 \quad (4.2)$$

Yani; s_i , tipi i olan rezidü kümesinin eleman sayısının bir eksiğidir. Burada $|\Gamma_F|$, F 'nin rezidüsü içindeki eleman sayısını göstermektedir.

Tanım 4.1.9. n_i değeri, Γ geometrisinde bulunan ve tipi i olan elemanlarının sayısıdır.

Tanım 4.1.10. Şekilde görüldüğü gibi bir $\{i, j\}$ kenarı üç pozitif sayı ile ilişkilidir, bunlar $d_{i,j}$, $g_{i,j}$ ve $d_{j,i}$ olarak temsil edilir. Buradaki $g_{i,j}$ (gonality) değeri, Γ geometrisinde, tipi $\{i, j\}$ olan Γ_F rezidü kümesinin elemanları kullanılarak, ilişki bağıntısına bağlı kalacak şekilde oluşturulabilecek en küçük ilişki grafiğinin çevresinin yarısı olarak hesaplanır. Başka bir ifadeyle; rezidü kümesi içindeki herhangi bir elemandan yola çıkıp tekrar başladığımız elemana gelmek üzere aldığımız yolun yarısı olarak hesaplanır. İlişki grafiğinde elemanlar arasında geçiş yaparken ilişki bağıntısı kullanılarak bir yol oluşturulur.

$d_{i,j}$ (i -çap) değeri ($d_{j,i}$ için j -çap), Γ_F kümesi içinde sabitlenmiş herhangi bir i - elemanından ($d_{j,i}$ değeri için j -elemandan), Γ_F ’deki herhangi diğer bir elemana olan en büyük uzaklık olarak hesaplanır.

$d_{i,j} = g_{i,j} = d_{j,i} \neq 2$ ise diyagramdaki $\{i, j\}$ noktaları arasındaki çizgi üzerinde birbirine eşit olan bu değerlerden sadece biri yazılır. Eğer $d_{i,j} = g_{i,j} = d_{j,i} = 2$ ise hiç biri yazılmayıp i ve j noktaları arasındaki çizgi çizilmez. Eğer $d_{i,j}$, $g_{i,j}$ ve $d_{j,i}$ değerlerinden en az biri farklı ise her üçü de yazılır.

4.2. Koset Geometri

Tanım 4.2.1. G bir grup ve $(G_i)_{i \in I}$ ise alt grupların sonlu bir ailesi olmak üzere $\Gamma = \Gamma(G, (G_i)_{i \in I})$ koset geometrisi aşağıdaki gibi tanımlanır.

Γ koset geometrisinin elemanlarından oluşan bir X kümesi, tüm gG_i şeklindeki kosetlerini (yan kümelerini) içermek üzere, X üzerinde bir $*$ bağıntısı, aşağıdaki gibi tanımlanır. $\forall g_1, g_2 \in G$ olmak üzere;

$$g_1G_i * g_2G_j \Leftrightarrow g_1G_i \cap g_2G_j \neq \emptyset \quad (4.3)$$

Γ üzerinde t tip fonksiyonu $t(gG_i) = i$ olarak tanımlanır. X ’in bir Y alt kümesinin tipi $t(Y)$ kümesi olup, rankı ise $t(Y)$ ’nin kardinalitesidir.

Γ 'nin rankı ise $|I|$ sayıdır, yani bu geometrideki farklı tipteki elemanlarının sayıdır.

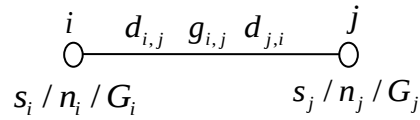
Tanım 4.2.2. X kümesinde yer alan ve aralarında ilişki bağıntısı bulunan elemanların oluşturduğu kümeye bayrak (flag) denir. Tipi I olan bayrağa ise odacık (chamber) denir.

Tanım 4.2.3. Γ bir geometri ve F , Γ 'nın bir bayrağı olsun. O halde; F 'nin rezidüsü,

$$\Gamma_F = \Gamma \left(\bigcap_{j \in t(F)} G_j, \left(G_i \cap \left(\bigcap_{j \in t(F)} G_j \right) \right)_{i \in I \setminus t(F)} \right) \quad (4.4)$$

şeklinde hesaplanır.

Bir rank-2 koset geometrisinin temsili diyagramı aşağıdaki gibidir. Incidence geometride olduğu gibi geometrinin rankı arttıkça, birbirleriyle ilişkili olan farklı tipteki elemanlar da aynı şekilde çizgilerle birbirine bağlanılarak diyagrama eklenir.



Şekil 4.2. Rank-2 koset geometrisini diyagramı

Tanım 4.3.4. I bir geometrideki farklı tiplerin kümesi olmak üzere; her $i \in I$ için F , tipi $I \setminus \{i\}$ olan bir bayrak olsun. s_i değeri şöyle hesaplanır.

$$s_i = |\Gamma_F| - 1 \quad (4.5)$$

Başka bir ifadeyle; s_i , tipi i olan rezidü kümesinin eleman sayısının bir eksiğidir. Yine burada s_j için de geçerlidir.

n_i değeri ilişki geometride olduğu gibi Γ geometrisinde bulunan ve tipi i olan elemanların sayısını temsil eder. Başka bir ifadeyle n_i değeri, G_i grubunun G içindeki indeksidir. Yani;

$$n_i = [G, G_i] \quad (4.6)$$

ile hesaplanır. n_j değeri de aynı yöntemle hesaplanır.

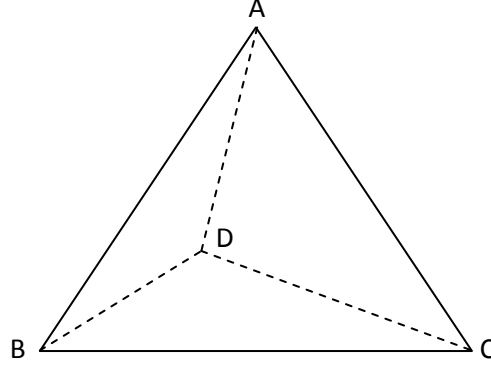
Tanım 4.2.5. Koset geometri diyagramında görüldüğü gibi bir $\{i, j\}$ kenarı üç pozitif sayı ile ilişkilidir ve bunlar $d_{i,j}$, $g_{i,j}$ ve $d_{j,i}$ olarak temsil edilirler. Buradaki $g_{i,j}$ (gonality) değeri, Γ geometrisinde, tipi $\{i, j\}$ olan Γ_F rezidü kümesinin elemanları kullanılarak, ilişki bağıntısına bağlı kalınacak şekilde oluşturulabilecek en küçük ilişki grafiğinin çevresinin yarısıdır.

$d_{i,j}(i\text{-çap})$ değeri ($d_{j,i}$ için $j\text{-çap}$), Γ_F kümesi içinde sabitlenmiş herhangi bir i - elemandan ($d_{j,i}$ değeri için j -elemandan), Γ_F 'deki herhangi diğer bir elemana olan en büyük uzaklık olarak hesaplanır.

Uyarı 4.2.6. ilişki geometrideki uyarılarda belirtilen geometri diyagram kuralları aynen koset geometri diyagramında da geçerlidir.

5. TETRAHEDRALİN İLİŞKİ GEOMETRİSİ ÖRNEĞİ

Burada tetrahedralin nokta, doğru ve yüzeyleri arasında bir ilişki bağıntısı tanımlanarak ilişki geometrisi incelenecek ve diyagramı oluşturulacaktır.



Şekil 5.1. Tetrahedral

Tetrahedral nokta, doğru ve yüzey olmak üzere üç farklı tipten oluşur. Bu tiplerin sayıları 4 nokta, 6 doğru ve 4 düzlemdir. Tetrahedralin ilişki geometrisi bu 3 farklı tipteki elemanlardan oluşur ve rankı 3'tür.

Tetrahedralin köşelerinin oluşturduğu noktalar kümesi $\{A, B, C, D\}$, tipi 1 olan elemanların oluşturduğu küme olsun. Tetrahedralin kenarlarının oluşturduğu noktalar kümesi $\{AB, AC, AD, BD, DC, CB\}$, tipi 2 olan elemanların oluşturduğu küme olsun ve yüzeylerin oluşturduğu $\{ABC, ABD, ADC, BCD\}$, tipi 3 olan elemanların oluşturduğu küme olsun.

Yukarıda belirtilen 3 tip arasında ilişki bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlansın. Tetrahedralin köşelerinin kenarlar üzerinde ve kenarların yüzeyler üzerinde olması şartını sağlasın. Yani

$$A \in AB \in ABC \quad (5.1)$$

Yukarıda belirlenen bağıntıya göre farklı tipler için birer bayrak kümeleri oluşturulur ve bu bayrakların tipleri belirlenir.

$$F_1 = \{A\} \rightarrow \text{tip 1,}$$

$$F_2 = \{AB\} \rightarrow \text{tip 2,}$$

$$F_3 = \{ABC\} \rightarrow \text{tip 3},$$

$$F_{1,2} = \{A, AB\} \rightarrow \text{tip 1,2},$$

$$F_{1,3} = \{A, ABC\} \rightarrow \text{tip 1,3},$$

$$F_{2,3} = \{AB, ABC\} \rightarrow \text{tip 2,3},$$

$$F_{1,2,3} = \{A, AB, ABC\} \rightarrow \text{tip 1,2,3}.$$

İlişki bağıntısına göre yukarıdaki bayrakların rezidü kümeleri aşağıdaki gibi hesaplınsın.

$$\Gamma_{F_{1,2,3}} = \emptyset,$$

$$\Gamma_{F_{2,3}} = \{A, B\} \rightarrow \text{tip 1},$$

$$\Gamma_{F_{1,3}} = \{AB, AC\} \rightarrow \text{tip 2},$$

$$\Gamma_{F_{1,2}} = \{ABC, ABD\} \rightarrow \text{tip 3},$$

$$\Gamma_{F_2} = \{A, B, ABC, ABD\} \rightarrow \text{tip 1,3},$$

$$\Gamma_{F_3} = \{A, B, C, AB, AC, BC\} \rightarrow \text{tip 1,2},$$

$$\Gamma_{F_1} = \{AB, AC, AD, ABC, ABD, ACD\} \rightarrow \text{tip 2,3}.$$

Yukarıdaki rezidülerden faydalananarak ilişki geometrisin diyagramını oluşturan s_i , n_i , $g_{i,j}$ ve $d_{i,j}$ değerlerini hesaplınsın.

İlk olarak $\Gamma_{F_{2,3}}$, $\Gamma_{F_{1,3}}$ ve $\Gamma_{F_{1,2}}$ rezidülerinden faydalananarak s_1 , s_2 ve s_3 sayıları hesaplınsın. Bunun için F , tipi $I \setminus \{i\}$ olan bir bayrak olmak üzere $s_i = |\Gamma_F| - 1$ şeklinde hesaplandığı formülde belirtilmişti. O halde; s_1 için tipi $I \setminus \{1\}$ olan rezidü kümesi $\Gamma_{F_{2,3}}$ kümesi olup eleman sayısı 2' dir. Dolayısıyla,

$$s_1 = |\Gamma_{F_{2,3}}| - 1 = 2 - 1 = 1$$

olarak hesaplanır.

Aynı şekilde s_2 sayısının tipi $I \setminus \{2\}$ olan $\Gamma_{F_{1,3}}$ kümesi kullanılarak hesaplınsın. $\Gamma_{F_{1,3}}$ kümesinin eleman sayısı 2'dir. Dolayısıyla,

$$s_2 = |\Gamma_{F_{1,3}}| - 1 = 2 - 1 = 1$$

olarak hesaplanır.

Son olarak s_3 içinde aynı şekilde tipi $I \setminus \{3\}$ olan $\Gamma_{F_{1,2}}$ rezidü kümesi ele alınarak hesaplınsın. $\Gamma_{F_{1,2}}$ rezidü kümesinin eleman sayısı 2 olduğundan;

$$s_3 = |\Gamma_{F_{1,2}}| - 1 = 2 - 1 = 1$$

olarak hesaplanır.

Şimdi ilişki diyagramının diğer elemanları olan n_1 , n_2 ve n_3 hesaplınsın. Buradaki n_i sayıları tanımda belirtildiği gibi tipi i olan varyetelerin sayısıdır.

n_1 tipi 1 olan varyetelerin sayısıdır. Yani tetrahedralin köşelerinin sayısı 4 olduğundan $n_1 = 4$ 'tür.

n_2 tipi 2 olan varyetelerin sayısıdır. Yani tetrahedralin kenarlarının sayısı 6 olduğundan $n_2 = 6$ 'dır.

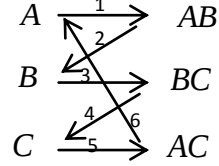
n_3 tipi 3 olan varyetelerin sayısıdır. Yani tetrahedralin yüzeylerinin sayısı 4 olduğundan $n_3 = 4$ 'tür.

Böylece n_1 , n_2 ve n_3 sırasıyla 4, 6 ve 4 olarak hesaplandı.

Şimdi ise ilişki diyagramının $g_{1,2}$, $d_{1,2}$ ve $d_{2,1}$ değerleri hesaplınsın.

$g_{1,2}$, $d_{1,2}$ ve $d_{2,1}$ değerini hesaplamak için tipi 1,2 olan Γ_{F_3} rezidü kümesi göz önüne alınsın.

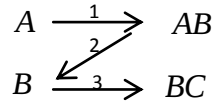
$g_{1,2}$ hesaplanırken Γ_{F_3} kümesinin elemanları kullanarak ilişki bağıntısına bağlı kalacak şekilde oluşturulacak ilişki grafiğinin çevresinin yarısı alınmalıdır. Yani herhangi bir noktadan başlayarak tekrar aynı noktaya gelmek şartıyla oluşturulabilecek en kısa mesafenin yarısı alınmalıdır. Buna göre bu grafik aşağıdaki gibi olur.



Grafikteki uzaklık 6 olduğundan, $g_{1,2} = \frac{6}{2} = 3$ olarak bulunur.

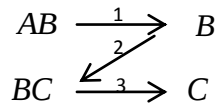
Şimdi $d_{1,2}$ ve $d_{2,1}$ değerleri hesaplınsın.

$d_{1,2}$ hesaplamak için $\Gamma_{F_3} = \{A, B, C, AB, AC, BC\}$ rezidü kümesi içinde tipi 1 olan herhangi elemanı sabitleyip ilişki bağıntısına göre sabitlenen elemandan başlamak üzere, küme içindeki başka bir elemana olan en büyük uzaklık hesaplanır. Buna göre grafik aşağıdaki gibi oluşturulur.



Grafikteki uzaklık 3 birim olduğundan $d_{1,2} = 3$ olarak bulunur.

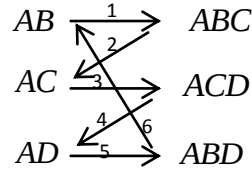
Son olarak $d_{2,1}$ değeri hesaplınsın. $\Gamma_{F_3} = \{A, B, C, AB, AC, BC\}$ rezidü kümesi üzerinde tipi 2 olan herhangi bir elemanı sabitleyip ilişki bağıntısına göre sabitlenen elemandan başlamak üzere, küme içindeki başka bir elemana olan en büyük uzaklık hesaplanır. Buna göre grafik aşağıdaki gibi oluşturulur.



şeklinde olur ve $d_{2,1} = 3$ olarak hesaplanır. Böylece, $g_{1,2} = 3$, $d_{1,2} = 3$ ve $d_{2,1} = 3$ olarak bulunur.

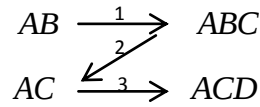
Şimdi ise diyagramda bulunan $g_{2,3}$, $d_{2,3}$ ve $d_{3,2}$ değerleri hesaplınsın.

$g_{2,3}$ hesaplanırken $\Gamma_{F_1} = \{AB, AC, AD, ABC, ACD, ABD\}$ kümesinin elemanları kullanılarak ilişki bağıntısına bağlı kalacak şekilde oluşturulacak ilişki grafiğinin çevresinin yarısı alınmalıdır. Yani herhangi bir noktadan başlayarak tekrar aynı noktaya gelmek şartıyla oluşturulabilecek en kısa mesafenin yarısı alınmalıdır. Buna göre bu grafik aşağıdaki gibi olur.



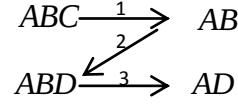
grafikteki uzaklık 6 olduğundan, $g_{2,3} = \frac{6}{2} = 3$ olarak bulunur.

$d_{2,3}$ hesaplamak için $\Gamma_{F_1} = \{AB, AC, AD, ABC, ACD, ABD\}$ rezidü kümesi içinde tipi 2 olan herhangi bir elemanı sabitleyip ilişki bağıntısına göre sabitlenen elemandan başlamak üzere, küme içindeki başka bir elemana olan en büyük uzaklık hesaplanır. Buna göre grafik aşağıdaki gibi oluşturulur.



grafikteki uzaklık 3 birim olduğundan $d_{2,3} = 3$ olarak bulunur.

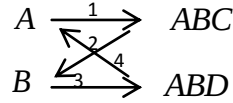
Son olarak $d_{3,2}$ değeri hesaplınsın. $\Gamma_{F_1} = \{AB, AC, AD, ABC, ACD, ABD\}$ rezidü kümesi üzerinde tipi 3 olan herhangi bir elemanı sabitleyip ilişki bağıntısına göre sabitlenen elemandan başlamak üzere, küme içindeki başka bir elemana olan en büyük uzaklık hesaplanır. Buna göre grafik aşağıdaki gibi oluşturulur.



Grafikteki uzaklık 3 birim olduğundan $d_{3,2} = 3$ olarak bulunur. Böylece, $g_{2,3} = 3$, $d_{2,3} = 3$ ve $d_{3,2} = 3$ olarak bulunur.

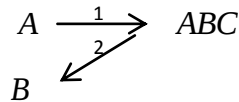
Şimdi ise $g_{1,3}$, $d_{1,3}$ ve $d_{3,1}$ değerleri hesaplınsın.

$g_{1,3}$ hesaplanırken $\Gamma_{F_2} = \{A, B, ABC, ABD\}$ kümesinin elemanları kullanılarak ilişki bağıntısına bağlı kalacak şekilde oluşturulacak ilişki grafiğinin çevresinin yarısı alınmalıdır. Yani herhangi bir noktadan başlayarak tekrar aynı noktaya gelmek şartıyla oluşturulabilecek en kısa mesafenin yarısı alınmalıdır. Buna göre bu grafik aşağıdaki gibi olur.



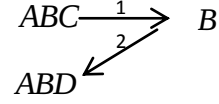
grafikteki uzaklık 4 olduğundan, $g_{1,3} = \frac{4}{2} = 2$ olarak bulunur.

$d_{1,3}$ hesaplamak için $\Gamma_{F_2} = \{A, B, ABC, ABD\}$ rezidü kümesi içinde tipi 1 olan herhangi bir elemanı sabitleyip ilişki bağıntısına göre sabitlenen elemandan başlamak üzere, küme içindeki başka bir elemana olan en büyük uzaklık hesaplanır. Buna göre grafik aşağıdaki gibi oluşturulur.



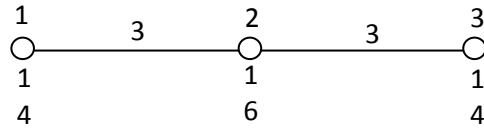
grafikteki uzaklık 2 birim olduğundan $d_{1,3} = 2$ olarak bulunur.

Son olarak $d_{3,1}$ değeri hesaplınsın. $\Gamma_{F_2} = \{A, B, ABC, ABD\}$ rezidü kümesi üzerinde tipi 3 olan herhangi bir elemanı sabitleyip ilişki bağıntısına göre sabitlenen elemandan başlamak üzere, küme içindeki başka bir elemana olan en büyük uzaklık hesaplanır. Buna göre grafik aşağıdaki gibi oluşturulur.



Grafikteki uzaklık 2 birim olduğundan $d_{3,1} = 2$ olarak bulunur. Böylece, $g_{1,3} = 2$, $d_{1,3} = 2$ ve $d_{3,1} = 2$ olarak bulunur.

Gereken tüm değerler hesaplandıktan sonra tetrahedralin rank-3 diyagramı aşağıdaki gibi verilir.



Şekil 5.2. Tetrahedralin rank-3 ilişki geometrisinin diyagramı

6. BAZI MATHIEU GRUPLARI İÇİN RANK-2, RANK-3 ve RANK-4 ÖRNEKLERİ

6.1. M_9 İçin Rank-2 Örneği

M_9 grubunun Q_8 ve C_2 alt gruplarına göre rank-2 incidence yapısı incelensin. Bunu oluşturmak için ilk olarak $X = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ üzerinde tanımlı olan M_9 grubunda Q_8 ve C_2 alt gruplarının yapısı incelensin ve aralarındaki ilişki bağıntısı belirlensin.

M_9 grubunun bir nokta sabitleyeni Q_8 alt grubu ve iki nokta sabitleyeni C_2 alt grubudur. Dolayısıyla bu gruplar aşağıdaki gibi yazılabilir. $x_1, x_2 \in X$ olmak üzere,

$$Q_8 = \text{stab}_{M_9} \{x_1\},$$

$$C_2 = \text{stab}_{M_9} \{x_1, x_2\},$$

M_9 grubunda nokta sabitleyene göre karşılık gelen tipler belirlensin. M_9 grubunda Q_8 alt grubu tek nokta sabitleyen olduğundan tip 1 ve C_2 alt grubu 2 nokta sabitleyen olduğundan tip 2 olarak belirlensin.

M_9 grubunda sabitlenen noktalara karşılık ilişki bağıntısı içerme bağıntısı olarak belirlensin. Yani;

$$\{x_1\} \subset \{x_1, x_2\} \quad (6.1)$$

şeklinde olur. Bu ilişki bağıntısına göre bayrak tipleri aşağıdaki gibidir.

$$F_1 = \{x_1\} \rightarrow \text{tip 1}$$

$$F_2 = \{x_1, x_2\} \rightarrow \text{tip 2}$$

$$F_{1,2} = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\} \rightarrow \text{tip 1,2}$$

şeklinde olur.

Şimdi bu bayrak tiplerine karşılık rezidü kümeleri

$$\Gamma_{F_1} = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \dots, \{x_1, x_9\}\} \rightarrow \text{tip } 2,$$

$$\Gamma_{F_2} = \{\{x_1\}, \{x_2\}\} \rightarrow \text{tip } 1,$$

$$\Gamma_{F_{1,2}} = \emptyset,$$

$$\Gamma_{F_\emptyset} = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_9\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \dots, \{x_1, x_9\}, \dots, \{x_8, x_9\}\} \rightarrow \text{tip } 1,2$$

şeklinde olur.

Şimdi Γ_{F_1} ve Γ_{F_2} kümelerinden faydalanarak s_1 ve s_2 değerleri hesaplınsın. Bunun için F , tipi $I \setminus \{i\}$ olan bir bayrak olmak üzere $s_i = |\Gamma_F| - 1$ şeklinde hesaplandığı (4.5)'te belirtilmişti. O halde; s_1 için tipi $I \setminus \{1\}$ olan rezidü kümesi Γ_{F_2} kümesi olup eleman sayısı 2' dir. Dolayısıyla,

$$s_1 = |\Gamma_{F_2}| - 1 = 2 - 1 = 1$$

olarak hesaplanır.

Aynı şekilde s_2 sayısının tipi $I \setminus \{2\}$ olan Γ_{F_1} kümesi kullanılarak hesaplınsın. Γ_{F_1} kümesinin eleman sayısı 8 olduğundan s_2 değeri;

$$s_2 = |\Gamma_{F_1}| - 1 = 8 - 1 = 7$$

olarak hesaplanır.

Şimdi n_1 ve n_2 hesaplınsın. Buradaki n_i sayıları (4.6)'da belirtildiği gibi tipi i olan varyetelerin sayısıdır.

$$n_1 = [M_9 : Q_8] = \frac{72}{8} = 9,$$

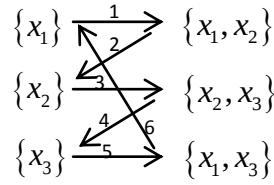
$$n_2 = [M_9 : C_2] = \frac{72}{2} = 36.$$

O halde $n_1 = 9$ ve $n_2 = 36$ olur.

Şimdi ise $g_{1,2}$, $d_{1,2}$ ve $d_{2,1}$ değerleri hesaplansın. Bu değerleri hesaplamak için daha önce belirlediğimiz tipi 1,2 olan $\Gamma_{F_\emptyset}$ rezidü kümesi kullanılır. Bu rezidü kümesi ;

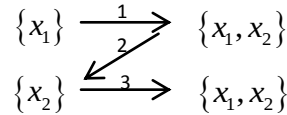
$$\Gamma_{F_\emptyset} = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_9\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \dots, \{x_1, x_9\}, \dots, \{x_8, x_9\}\}$$

kümesidir. O halde Tanım 4.1.10.'a göre bu rezidü kümesinde tipi 1 olan herhangi elemandan başlayarak ilişki bağıntısına bağlı kalacak şekilde ilişki grafiğinin çevresinin yarısı hesaplanmalıdır.



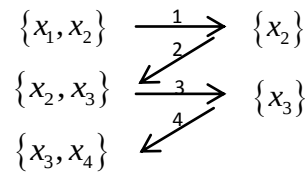
şeklinde olup, Tanım 4.1.10.'a göre $g_{1,2} = \frac{6}{2} = 3$ olarak hesaplanır.

Şimdi ise $d_{1,2}$ değeri hesaplansın. Bunun için ilişki bağıntısına bağlı kalarak $\Gamma_{F_\emptyset}$ kümesi içindeki tipi 1 olan herhangi elemandan herhangi diğer bir elemana olan en büyük uzaklık hesaplanmalıdır. Bu grafik ;



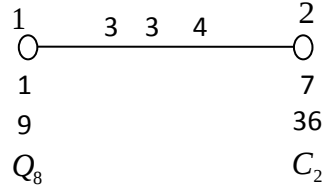
Buna göre $d_{1,2} = 3$ olarak hesaplanır.

$d_{2,1}$ için ise aynı yöntemle belirlenen ilişki bağıntısına bağlı kalarak $\Gamma_{F_\emptyset}$ kümesi içindeki tipi 2 olan herhangi elemandan herhangi diğer bir elemana olan en büyük uzaklık hesaplanmalıdır. Bu tanıma uygun grafik ;



şeklinde olur ve $d_{2,1} = 4$ olarak hesaplanır.

Gereken tüm değerler hesaplandıktan sonra M_9 grubunun Q_8 ve C_2 alt gruplarına göre rank-2 diyagramı aşağıdaki gibidir.



Şekil 6.1. M_9 grubunun Q_8 ve C_2 alt gruplarından oluşan rank-2 diyagramı

6.2. M_{10} İçin Rank-3 Örneği

Bu örnek içinde M_{10} grubu içinde alınan M_9 , $M_8:2$ ve S_3 alt gruplarının rank-3 örneği için incidence relation, s_i , s_j , n_i , n_j , $g_{i,j}$, $d_{i,j}$ ve $d_{j,i}$ değerleri hesaplanacak bulunan bu değerlerle ilgili diyagram oluşturulacaktır. Bunun için ilk olarak $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}\}$ üzerinde tanımlı olan M_{10} grubunda M_9 , $M_8:2$ ve S_3 alt gruplarının yapısı incelensin ve aralarındaki ilişki bağıntısı oluşturulsun.

M_{10} grubunun bir nokta sabitleyen M_9 alt grubu, iki nokta sabitleyen $M_8:2$ alt grubu ve üç nokta sabitleyen S_3 alt grubudur. Dolayısıyla bu grupları aşağıdaki gibi yazmak mümkündür. $x_1, x_2, x_3 \in X$ olmak üzere,

$$M_9 = \text{stab}_{M_{10}} \{x_1\},$$

$$M_8:2 = \text{stab}_{M_{10}} \{x_1, x_2\},$$

$$S_3 = \text{stab}_{M_{10}} \{x_1, x_2, x_3\}.$$

M_{10} grubu nokta sabitleyenine göre alt grupları belirlenmiş olup bu nokta sabitleyenlerine karşılık gelen tipler belirlensin. O halde M_9 grubu M_{10} grubu içerisinde tek noktanın sabitleyeni olduğundan tipi 1, $M_8:2$ grubu M_{10} grubu içerisinde iki noktanın sabitleyeni olduğundan tipi 2 ve S_3 grubu M_{10} grubu içerisinde üç noktanın sabitleyeni olduğundan tipi 3 olarak belirlensin.

Şimdi bu sabitlenen noktalara karşılık ilişki bağıntısı oluşturulsun. Bu ilişki bağıntısı M_{10} grubu içerisinde sabitlenen noktalar arasındaki içermeye bağıntısı olsun. Yani;

$$\{x_1\} \subset \{x_1, x_2\} \subset \{x_1, x_2, x_3\} \quad (6.2)$$

şeklindedir. Şimdi bu bağıntıya karşılık gelen farklı tipteki bayraklar belirlensin.

$$F_1 = \{x_1\} \rightarrow \text{tip 1,}$$

$$F_2 = \{x_1, x_2\} \rightarrow \text{tip 2,}$$

$$F_3 = \{x_1, x_2, x_3\} \rightarrow \text{tip 3,}$$

$$F_{1,2} = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\} \rightarrow \text{tip 1,2,}$$

$$F_{1,3} = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2, x_3\}\} \rightarrow \text{tip 1,3,}$$

$$F_{2,3} = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_2, x_3\}\} \rightarrow \text{tip 2,3,}$$

$$F_{1,2,3} = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_2, x_3\}\} \rightarrow \text{tip 1,2,3,}$$

şeklinde olur.

Şimdi bu bayraklara karşılık ilişki bağıntısına göre rezidüler oluşturulsun ve tipleri belirlensin.

$$\Gamma_{F_1} = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \dots, \{x_1, x_{10}\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_4\}, \dots, \{x_1, x_2, x_{10}\}, \dots,$$

$$\{x_1, x_9, x_{10}\}\} \rightarrow \text{tip 2,3,}$$

$$\Gamma_{F_2} = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_4\}, \dots, \{x_1, x_2, x_{10}\}\} \rightarrow \text{tip 1,3,}$$

$$\Gamma_{F_3} = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}\} \rightarrow \text{tip 1,2,}$$

$$\Gamma_{F_{1,2}} = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_4\}, \dots, \{x_1, x_2, x_{10}\}\} \rightarrow \text{tip 3,}$$

$$\Gamma_{F_{1,3}} = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}\} \rightarrow \text{tip 2},$$

$$\Gamma_{F_{2,3}} = \{\{x_1\}, \{x_2\}\} \rightarrow \text{tip 1},$$

$$\Gamma_{F_{1,2,3}} = \emptyset.$$

Yukarıdaki rezidülerden faydalananarak ilişki diyagramını oluşturan s_i , n_i , $g_{i,j}$ ve $d_{i,j}$ değerleri hesaplınsın.

$$s_1 = |\Gamma_{F_{2,3}}| - 1 = 2 - 1 = 1,$$

$$s_2 = |\Gamma_{F_{1,3}}| - 1 = 2 - 1 = 1,$$

$$s_3 = |\Gamma_{F_{1,2}}| - 1 = 8 - 1 = 7,$$

olarak hesaplanır.

Şimdi ilişki diyagramının diğer elemanlarından n_1 , n_2 ve n_3 hesaplınsın.

$$n_1 = [M_{10} : M_9] = \frac{720}{72} = 10,$$

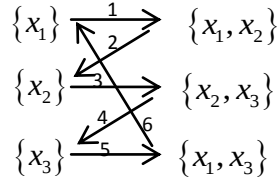
$$n_2 = [M_{10} : \{M_8 : 2\}] = \frac{720}{16} = 45,$$

$$n_3 = [M_{10} : S_3] = \frac{720}{6} = 120.$$

O halde $n_1 = 10$, $n_2 = 45$, $n_3 = 120$ olur.

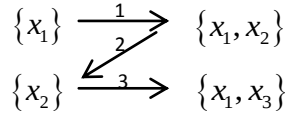
Şimdi ise $g_{1,2}$, $d_{1,2}$ ve $d_{2,1}$ değerleri hesaplınsın. Bu değerleri hesaplamak için daha önce belirlediğimiz tipi 1,2 olan Γ_{F_3} rezidü kümesi kullanılır. Bu rezidü kümesi ;

$\Gamma_{F_3} = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}\}$ olduğunu biliyoruz. Buradan $g_{1,2}$ ile ilgili grafik;



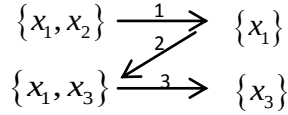
şeklinde olup Tanım 4.1.10.'a göre $g_{1,2} = \frac{6}{2} = 3$ olarak hesaplanır.

Şimdi ise $d_{1,2}$ değeri hesaplansın. $d_{1,2}$ ile ilgili grafik;



Olur. Dolayısıyla $d_{1,2} = 3$ olarak hesaplanır.

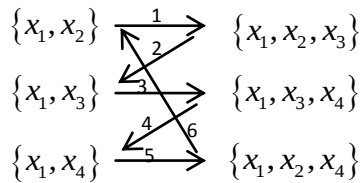
$d_{2,1}$ değeri aşağıdaki gibi hesaplanır.



$d_{2,1} = 3$ olur.

Böylece $g_{1,2} = 3$, $d_{1,2} = 3$ ve $d_{2,1} = 3$ olarak hesaplanır.

Şimdi ise $g_{2,3}$, $d_{2,3}$ ve $d_{3,2}$ değerleri hesaplansın. Bu değerleri hesaplamak için daha önce belirlediğimiz tipi 2,3 olan Γ_{F_1} rezidü kümesi kullanılır. Sırasıyla $g_{2,3}$, $d_{2,3}$ ve $d_{3,2}$ değerlerinin hesaplanması ile ilgili grafikler aşağıda verilmiştir.



$g_{2,3} = \frac{6}{2} = 3$ olarak hesaplanır.

$$\begin{array}{ccc} \{x_1, x_2\} & \xrightarrow{1} & \{x_1, x_2, x_3\} \\ & \searrow 2 & \\ \{x_1, x_3\} & \xrightarrow{3} & \{x_1, x_3, x_4\} \end{array}$$

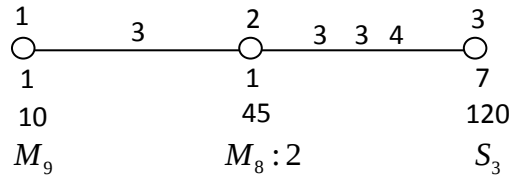
Buna göre $d_{2,3} = 3$ olarak hesaplanır.

$$\begin{array}{ccc} \{x_1, x_2, x_3\} & \xrightarrow{1} & \{x_1, x_2\} \\ & \searrow 2 & \\ \{x_1, x_2, x_4\} & \xrightarrow{3} & \{x_1, x_4\} \\ & \searrow 4 & \\ \{x_1, x_4, x_5\} & & \end{array}$$

$d_{3,2} = 4$ olarak hesaplanır.

Böylece $g_{2,3} = 3$, $d_{2,3} = 3$ ve $d_{3,2} = 4$ olarak bulunur.

Gereken tüm değerler hesaplandıktan sonra M_{10} grubunun M_9 , $M_8:2$ ve S_3 alt gruplarından oluşan rank-3 diyagramı aşağıdaki şekilde olduğu gibidir.



Şekil 6.2. M_{10} grubunun M_9 , $M_8:2$ ve S_3 alt gruplarından oluşan rank-3 diyagramı

6.3. M_{11} İçin Rank-3 Örneği

Bu örnek içinde M_{11} grubu için bir rank-3 diyagramı inşa edilecektir.

M_{11} grubu içinde alınan $M_9:2$, $M_8:S_3$ ve S_4 alt gruplarının rank-3 örneği için ilk olarak bu alt grupların yapıları incelenecek sonra incidence relation tanımlanıp sırasıyla s_i , s_j , n_i , n_j , $g_{i,j}$, $d_{i,j}$ ve $d_{j,i}$ değerleri hesaplanılacaktır son olarak da bulunan bu değerlerle ilgili diyagram verilecektir. Bunun için ilk olarak bu alt grupların yapıları incelensin. $M_9:2$ alt grubu 2 nokta sabitleyen, $M_8:S_3$ alt grubu 3 nokta sabitleyen ve S_4 alt grubu da 4 nokta sabitleyendir.

$$M_9:2 = \text{stab}_{M_{11}} \{x_1, x_2\} \rightarrow \text{tip 1,}$$

$$M_8 : S_3 = \text{stab}_{M_{11}} \{x_1, x_2, x_3\} \rightarrow \text{tip 2},$$

$$S_4 = \text{stab}_{M_{11}} \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \rightarrow \text{tip 3}.$$

Şimdi bu alt gruplara ait ilişki bağıntısı tanımlansın. Bu bağıntı daha önceki örneklerdeki gibi içerme bağıntısı olarak kabul edilsin.

$$\{x_1, x_2\} \subset \{x_1, x_2, x_3\} \subset \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \quad (6.3)$$

Şimdi bu ilişki bağıntısına bağlı kalarak bayrak kümeleri oluşturulsun ve bu kümelerin tipleri belirlensin.

$$F_1 = \{x_1, x_2\} \rightarrow \text{tip 1},$$

$$F_2 = \{x_1, x_2, x_3\} \rightarrow \text{tip 2},$$

$$F_3 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \rightarrow \text{tip 3},$$

$$F_{1,2} = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_2, x_3\}\} \rightarrow \text{tip 1,2},$$

$$F_{1,3} = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}\} \rightarrow \text{tip 1,3},$$

$$F_{2,3} = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}\} \rightarrow \text{tip 2,3},$$

$$F_{1,2,3} = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}\} \rightarrow \text{tip 1,2,3}.$$

Şimdi bu bayraklara karşılık ilişki bağıntısına göre rezidüler oluşturulsun ve tipleri belirlensin.

$$\Gamma_{F_1} = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_4\}, \dots, \{x_1, x_2, x_{11}\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3, x_5\}, \dots,$$

$$\{x_1, x_2, x_3, x_{11}\}, \dots, \{x_1, x_2, x_{10}, x_{11}\}\} \rightarrow \text{tip 2, 3},$$

$$\Gamma_{F_2} = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3, x_5\}, \dots, \{x_1, x_2, x_3, x_{11}\}\} \rightarrow$$

tip 1,3,

$$\Gamma_{F_3} = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \dots, \{x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_4\}, \dots, \{x_2, x_3, x_4\}\} \rightarrow \text{tip 1,2},$$

$$\Gamma_{F_{1,2}} = \{\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3, x_5\}, \dots, \{x_1, x_2, x_3, x_{11}\}\} \rightarrow \text{tip 3},$$

$$\Gamma_{F_{1,3}} = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_4\}\} \rightarrow \text{tip 2},$$

$$\Gamma_{F_{2,3}} = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}\} \rightarrow \text{tip 1},$$

$$\Gamma_{F_{1,2,3}} = \emptyset.$$

Rezidü kümelerini oluşturduktan sonra s_1 , s_2 ve s_3 değerleri

$$s_1 = |\Gamma_{F_{2,3}}| - 1 = 3 - 1 = 2,$$

$$s_2 = |\Gamma_{F_{1,3}}| - 1 = 2 - 1 = 1,$$

$$s_3 = |\Gamma_{F_{1,2}}| - 1 = 8 - 1 = 7$$

şeklinde olur.

n_1 , n_2 ve n_3 değerleri

$$n_1 = [M_{11} : \{M_9 : 2\}] = \frac{7920}{144} = 55,$$

$$n_2 = [M_{11} : \{M_8 : S_3\}] = \frac{7920}{48} = 165,$$

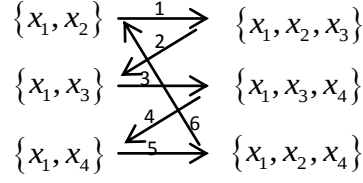
$$n_3 = [M_{11} : S_4] = \frac{7920}{24} = 330.$$

O halde $n_1 = 55$, $n_2 = 165$, $n_3 = 330$ olur.

Şimdi ise $g_{1,2}$, $d_{1,2}$ ve $d_{2,1}$ değerleri hesaplınsın. Bu değerleri hesaplamak için daha önce belirlediğimiz tipi 1,2 olan Γ_{F_3} rezidü kümesi kullanılır. Bu rezidü kümesi;

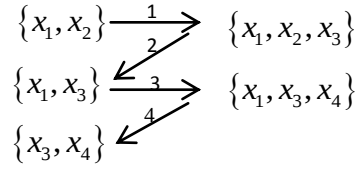
$$\Gamma_{F_3} = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \dots, \{x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_4\}, \dots, \{x_2, x_3, x_4\}\}$$

O halde, bu kümenin elemanları kullanılarak oluşturulacak ilişki grafiği aşağıdaki gibidir.

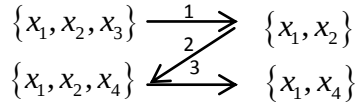


dolayısıyla $g_{1,2} = \frac{6}{2} = 3$ olarak hesaplanır.

$d_{1,2}$ ve $d_{2,1}$ değerlerinin grafikleri sırasıyla aşağıda olduğu gibidir.



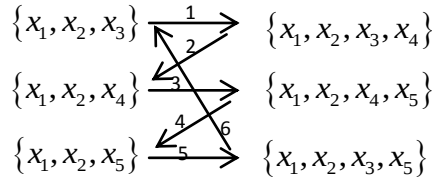
$$d_{1,2} = 4,$$



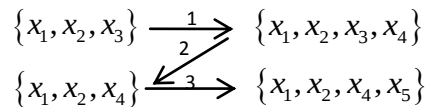
$$d_{2,1} = 3 .$$

Böylece $g_{1,2} = 3$, $d_{1,2} = 4$ ve $d_{2,1} = 3$ olarak hesaplanır.

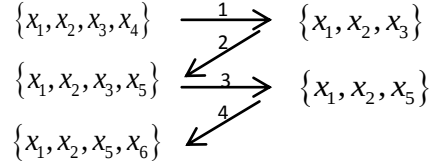
Şimdi ise $g_{2,3}$, $d_{2,3}$ ve $d_{3,2}$ değerleri hesaplınsın. Bu değerleri hesaplamak için daha önce belirlediğimiz tipi 2,3 olan Γ_{F_1} rezidü kümesi kullanılır. Sırasıyla $g_{2,3}$, $d_{2,3}$ ve $d_{3,2}$ grafikleri aşağıdaki gibidir.



$$g_{2,3} = \frac{6}{2} = 3 \text{ olarak bulunur.}$$



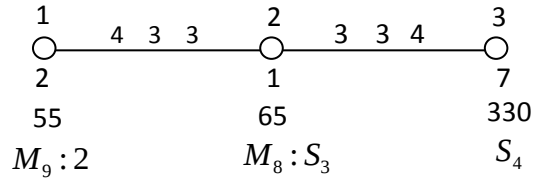
$d_{2,3} = 3$ olarak bulunur.



$d_{3,2} = 4$ olur.

Böylece $g_{2,3} = 3$, $d_{2,3} = 3$ ve $d_{3,2} = 4$ 'tür.

Gereken tüm değerler hesaplandıktan sonra M_{11} grubunun $M_9 : 2$, $M_8 : S_3$ ve S_4 alt grupları ile ilgili rank-3 diyagramı aşağıdaki gibidir.



Şekil 6.3. M_{11} grubunun $M_9 : 2$, $M_8 : S_3$ ve S_4 alt gruplarından oluşan rank-3 diyagramı

6.4. M_{12} İçin Rank-4 Örneği

Bu örnek içinde M_{12} grubu içinde alınan M_{11} , $A_6.2.2$, $3^2 : 2S_4$ ve $2^1 + 4 : S_3$ gruplarının rank-4 örneği için incidence relation s_i , s_j , n_i , n_j , $g_{i,j}$, $d_{i,j}$ ve $d_{j,i}$ değerleri hesaplanılacak en son olarak bulunan bu değerlerle ilgili diyagram oluşturulacaktır.

Bu alt grupların yapısı incelensin ve aralarındaki ilişki bağıntısı oluşturulsun.

M_{12} Mathieu grubunun bir nokta sabitleyen grubu M_{11} alt grubu, iki nokta sabitleyen grubu $A_6.2.2$ alt grubu, üç nokta sabitleyen grubu $3^2 : 2S_4$ alt grubu ve dört nokta sabitleyen grubu $2^1 + 4 : S_3$ alt grubudur.

Yani ;

$$M_{11} = \text{stab}_{M_{12}} \{x_1\} \rightarrow \text{tip 1,}$$

$$A_6.2.2 = \text{stab}_{M_{12}} \{x_1, x_2\} \rightarrow \text{tip 2,}$$

$$3^2 : 2S_4 = \text{stab}_{M_{12}} \{x_1, x_2, x_3\} \rightarrow \text{tip 3},$$

$$2^1 + 4 : S_3 = \text{stab}_{M_{12}} \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \rightarrow \text{tip 4}.$$

Şimdi ise ilişki bağıntısı oluşturulsun. Bu bağıntı, daha önceki örneklerde olduğu gibi içerme işlemi olarak alınsın. Yani;

$$\{x_1\} \subset \{x_1, x_2\} \subset \{x_1, x_2, x_3\} \subset \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \quad (6.4)$$

Şimdi ise bu bağıntıya bağlı kalarak farklı tipteki bayrak kümeleri oluşturulsun ve tipleri belirlensin.

$$F_1 = \{x_1\} \rightarrow \text{tip 1},$$

$$F_2 = \{x_1, x_2\} \rightarrow \text{tip 2},$$

$$F_3 = \{x_1, x_2, x_3\} \rightarrow \text{tip 3},$$

$$F_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \rightarrow \text{tip 4},$$

$$F_{1,2} = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\} \rightarrow \text{tip 1,2},$$

$$F_{1,3} = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2, x_3\}\} \rightarrow \text{tip 1,3},$$

$$F_{1,4} = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}\} \rightarrow \text{tip 1,4},$$

$$F_{2,3} = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_2, x_3\}\} \rightarrow \text{tip 2,3},$$

$$F_{2,4} = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}\} \rightarrow \text{tip 2,4},$$

$$F_{3,4} = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}\} \rightarrow \text{tip 3,4},$$

$$F_{1,2,3} = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_2, x_3\}\} \rightarrow \text{tip 1,2,3},$$

$$F_{1,2,4} = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}\} \rightarrow \text{tip 1,2,4},$$

$$F_{1,3,4} = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}\} \rightarrow \text{tip 1,3,4},$$

$$F_{2,3,4} = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}\} \rightarrow \text{tip } 2,3,4,$$

$$F_{1,2,3,4} = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}\} \rightarrow \text{tip } 1,2,3,4.$$

Şimdi ise ilişki bağıntısına göre bu bayrak kümelerinin rezidüleri oluşturulur ve tipleri belirlenir.

$$\Gamma_{F_{2,3,4}} = \{\{x_1\}, \{x_2\}\} \rightarrow \text{tip } 1,$$

$$\Gamma_{F_{1,3,4}} = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}\} \rightarrow \text{tip } 2,$$

$$\Gamma_{F_{1,2,4}} = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_4\}\} \rightarrow \text{tip } 3,$$

$$\Gamma_{F_{1,2,3}} = \{\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3, x_5\}, \dots, \{x_1, x_2, x_3, x_{12}\}\} \rightarrow \text{tip } 4,$$

$$\Gamma_{F_{3,4}} = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}\} \rightarrow \text{tip } 1,2,$$

$$\Gamma_{F_{1,4}} = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_4\}, \{x_1, x_3, x_4\}\} \rightarrow \text{tip } 2,3,$$

$$\Gamma_{F_{1,2}} = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_4\}, \dots, \{x_1, x_2, x_{12}\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3, x_5\}, \dots, \{x_1, x_2, x_3, x_{12}\}, \dots, \{x_1, x_2, x_{10}, x_{12}\}, \{x_1, x_2, x_{11}, x_{12}\}\}$$

şeklinde olan rezidü kümesinin tipi 3,4'tür.

Şimdi bu rezidü kümelerinden yararlanarak s_1 , s_2 , s_3 ve s_4 hesaplınsın. Eşitlik (4.2)'ye göre bu değerler aşağıdaki gibi hesaplanır;

$$s_1 = |\Gamma_{F_{2,3,4}}| - 1 = 2 - 1 = 1,$$

$$s_2 = |\Gamma_{F_{1,3,4}}| - 1 = 2 - 1 = 1,$$

$$s_3 = |\Gamma_{F_{1,2,4}}| - 1 = 2 - 1 = 1,$$

$$s_4 = |\Gamma_{F_{1,2,3}}| - 1 = 9 - 1 = 8.$$

Dolayısıyla $s_1 = 1$, $s_2 = 1$, $s_3 = 1$ ve $s_4 = 8$ olarak hesaplanır.

Şimdi ise n_1 , n_2 , n_3 ve n_4 değerlerini hesaplayalım.

tipi 1 olan varyetelerin sayısı,

$$n_1 = \frac{|M_{12}|}{|M_{11}|} = \frac{95040}{7920} = 12,$$

tipi 2 olan varyetelerin sayısı,

$$n_2 = \frac{|M_{12}|}{|A_6 \cdot 2.2|} = \frac{95040}{1440} = 66,$$

tipi 3 olan varyetelerin sayısı,

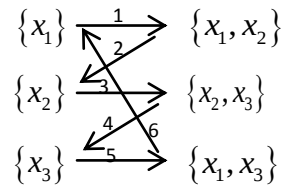
$$n_3 = \frac{|M_{12}|}{|3^2 : 2S_4|} = \frac{95040}{432} = 220,$$

tipi 4 olan varyetelerin sayısı,

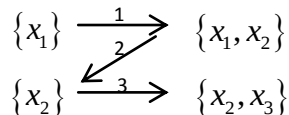
$$n_4 = \frac{|M_{12}|}{|2^1 + 4 : S_3|} = \frac{95040}{192} = 495.$$

Böylece $n_1 = 12$, $n_2 = 66$, $n_3 = 220$ ve $n_4 = 495$ olarak hesaplanır.

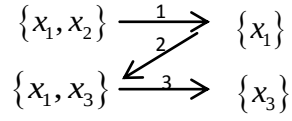
Şimdi de $g_{1,2}$, $d_{1,2}$ ve $d_{2,1}$ değerleri hesaplınsın. Bu değerleri hesaplamak için $\Gamma_{F_{3,4}}$ kullanılır. Sırasıyla $g_{1,2}$, $d_{1,2}$ ve $d_{2,1}$ değerlerine ait grafikler aşağıdaki gibidir.



$$g_{1,2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ olur.}$$



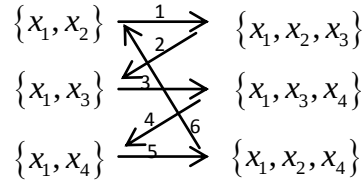
$d_{1,2} = 3$ olarak hesaplanır.



$d_{2,1} = 3$ olur.

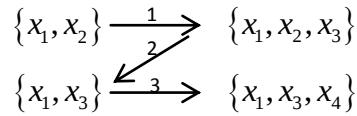
Böylece $g_{1,2} = 3$, $d_{1,2} = 3$ ve $d_{2,1} = 3$ olarak hesaplanır.

Şimdi ise bu diyagramın $g_{2,3}$, $d_{2,3}$ ve $d_{3,2}$ değerleri hesaplınsın. Bunun için tipi 2,3 olan $\Gamma_{F_{1,4}}$ rezidü kümesi ele alırsak, $g_{2,3}$ elemanı ilişki bağıntısına göre grafik oluşturulursa, bu grafik;



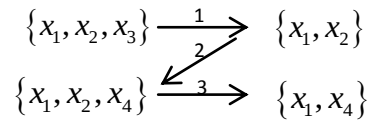
şeklinde olur. Buna göre $g_{2,3} = \frac{6}{2} = 3$ olarak hesaplanır.

$d_{2,3}$ değeri ile ilişkili grafik aşağıdaki gibidir.



Buna göre $d_{2,3} = 3$ olarak hesaplanır.

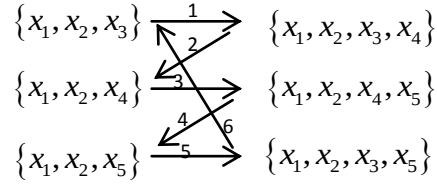
$d_{3,2}$ ile ilişkili grafik aşağıda verilmiştir.



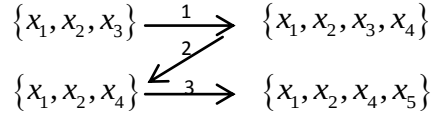
Dolayısıyla $d_{3,2} = 3$ olarak hesaplanır.

Böylece $g_{2,3} = 3$, $d_{2,3} = 3$ ve $d_{3,2} = 3$ olarak bulunur.

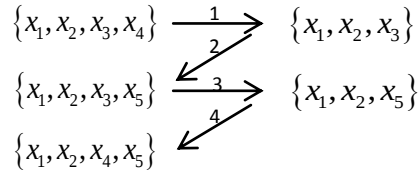
Son olarak $g_{3,4}$, $d_{3,4}$ ve $d_{4,3}$ değerleri hesaplınsın. Bunun için tipi 3,4 olan $\Gamma_{F_{1,2}}$ rezidü kümesi kullanılarak sırasıyla $g_{3,4}$, $d_{3,4}$ ve $d_{4,3}$ değerlerine ait grafikler aşağıda verilmiştir.



$g_{3,4} = \frac{6}{2} = 3$ olarak hesaplanır.



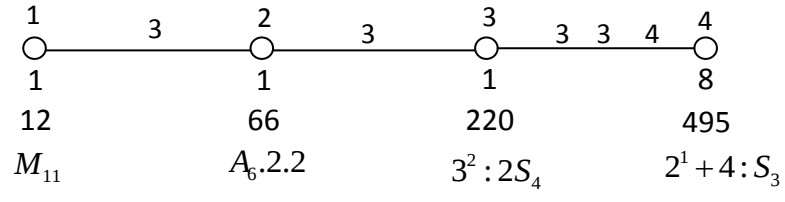
$d_{3,4} = 3$ olur.



$d_{4,3} = 4$ olmaktadır.

Böylece $g_{3,4} = 3$, $d_{3,4} = 3$ ve $d_{4,3} = 4$ olarak hesaplanır.

Bulunan tüm değerler aşağıdaki diyagramda gösterilmiştir



Şekil 6.4. M_{12} grubunun M_{11} , $A_6.2.2$, $3^2:2S_4$ ve $2^1+4:S_3$ alt gruplarından oluşan rank-4 diyagramı

7. M_{11} ve M_{12} İÇİN GEOMETRİLER

7.1. M_{11} Mathieu Grubu İçin Rank-2 Geometrisi

Bu örnek içinde M_{11} grubu için bir rank-2 geometrisinin inşası bu diyagram içindeki değerlerin hesaplanması detaylı bir şekilde verilecektir (Buekenhout ve Dehon, 1996).

M_{11} grubu içinde alınan M_{10} ve $M_9:2$ maksimal alt gruplarının rank-2 geometrisi aşağıdaki gibi oluşturulacaktır. Bunun için bu maksimal alt grupların yapıları incelenerek incidence relation oluşturulacak ve sırasıyla s_i , s_j , n_i , n_j , $g_{i,j}$, $d_{i,j}$ ve $d_{j,i}$ değerleri hesaplanarak, bu değerlerle ilgili diyagram verilecektir.

Bunun için ilk olarak maksimal alt grupların yapıları incelenir ve ilişki bağıntısı tanımlansın.

$$M_{10} = \text{stab}_{M_{11}} \{x_1\} \rightarrow \text{tip 1},$$

$$M_9 : 2 = \text{stab}_{M_{11}} \{x_1, x_2\} \rightarrow \text{tip 2}.$$

Buna göre ilişki bağıntısı aşağıdaki gibidir.

$$\{x_1\} \subset \{x_1, x_2\} \tag{7.1}$$

Şimdi bu ilişki bağıntısına bağlı kalacak şekilde bayrak kümeleri oluşturulsun ve tipleri belirlensin.

$$F_1 = \{x_1\} \rightarrow \text{tip 1},$$

$$F_2 = \{x_1, x_2\} \rightarrow \text{tip 2},$$

$$F_{1,2} = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\} \rightarrow \text{tip 1,2}.$$

Şimdi bu bayrak kümelerine karşılık ilişki bağıntısına göre rezidü kümeleri oluşturulsun ve tipleri belirlensin.

$$\Gamma_{F_1} = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \dots, \{x_1, x_{11}\}\} \rightarrow \text{tip 2},$$

$$\Gamma_{F_2} = \{\{x_1\}, \{x_2\}\} \rightarrow \text{tip 1},$$

$$\Gamma_{F_\emptyset} = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_{11}\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \dots, \{x_1, x_{11}\}, \dots, \{x_{10}, x_{11}\}\} \rightarrow \text{tip 1,2}.$$

Yukarıdaki belirlenen rezidülerden faydalanarak ilişki geometrisinin diyagramının s_i , n_i , $g_{i,j}$ ve $d_{i,j}$ değerleri hesaplınsın.

İlk olarak s_1 ve s_2 hesaplınsın. Eşitlik (4.2)'e göre bu değerler aşağıdaki gibi hesaplanır;

$$s_1 = |\Gamma_{F_2}| - 1 = 2 - 1 = 1,$$

$$s_2 = |\Gamma_{F_1}| - 1 = 10 - 1 = 9.$$

Dolayısıyla $s_1 = 1$ ve $s_2 = 9$ olarak hesaplanır.

Şimdi n_1 ve n_2 hesaplınsın. Bu değerler eşitlik (4.6)'ya göre aşağıdaki gibidir;

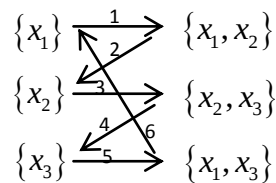
$$n_1 = \frac{|M_{11}|}{|M_{10}|} = \frac{7920}{720} = 11,$$

$$n_2 = \frac{|M_{11}|}{|M_9 : 2|} = \frac{7920}{144} = 55.$$

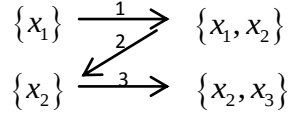
O halde $n_1 = 11$ ve $n_2 = 55$ olur.

Şimdi ise $g_{1,2}$, $d_{1,2}$ ve $d_{2,1}$ değerleri hesaplınsın. Bu değerleri hesaplamak için daha önce belirlediğimiz tipi 1,2 olan $\Gamma_{F_\emptyset}$ rezidü kümesi kullanılır.

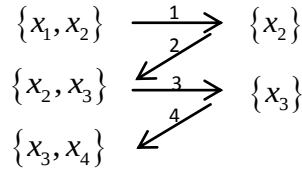
O halde, bu kümenin elemanları kullanılarak oluşturulacak ilişki grafiği aşağıdaki gibidir.



$$g_{1,2} = \frac{6}{2} = 3,$$

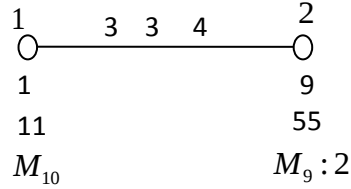


$$d_{1,2} = 3,$$



$d_{2,1} = 4$ olarak hesaplanır.

Gereken tüm değerler hesaplandıktan sonra M_{11} grubunun M_{10} ve $M_9:2$ maksimal alt grupları ile ilgili rank-2 geometrisinin diyagramı aşağıdaki gibidir.



Şekil 7.1. M_{11} grubunun M_{10} ve $M_9:2$ maksimal alt gruplarından oluşan rank-2 geometrisinin diyagramı

7.2. M_{12} Mathieu Grubu İçin Rank-5 Geometrisi

Bu örnek içinde, M_{12} için verilen rank-5 geometrisinin diyagramının detaylı bir şekilde incelemesi yapılmıştır. (Buekenhout, 1982)

M_{12} grubu içinde alınan M_{11} , $M_{10}.2$, $M_9:S_3$, $M_8:S_4$ ve S_6 alt gruplarının oluşturduğu rank-5 geometrisi incelenecektir. Bunun için bu alt grupların yapısı

incelenerek, incidence relation, s_i , s_j , n_i , n_j , $g_{i,j}$, $d_{i,j}$ ve $d_{j,i}$ değerleri hesaplanılacak bulunan bu değerlerle ilgili geometri diyagramı oluşturulacaktır.

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_{12}\}$ üzerinde tanımlı M_{12} grubunu içinde bir nokta sabitleyeni M_{11} , iki nokta sabitleyeni $M_{10}.2$, üç nokta sabitleyeni $M_9 : S_3$, dört nokta sabitleyeni $M_8 : S_4$ ve blok sabitleyeni S_6 alt grubudur. O halde bu alt grupları aşağıdaki gibi yazmak mümkündür. $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$ olmak üzere,

$$M_{11} = \text{stab}_{M_{12}} \{x_1\},$$

$$M_{10}.2 = \text{stab}_{M_{12}} \{x_1, x_2\},$$

$$M_9 : S_3 = \text{stab}_{M_{12}} \{x_1, x_2, x_3\},$$

$$M_8 : S_4 = \text{stab}_{M_{12}} \{x_1, x_2, x_3, x_4\},$$

$$S_6 = B.$$

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_{12}\}$ kümesinin her bir 5 elemanlı alt kümesi bir tek blok içinde ihtiva ediliyor ve bu B bloklarının her birinde 6 eleman vardır. B blokları $S(5,6,12)$ Steiner sistemine göre hesaplanır.

Şimdi bu alt grupların sabitlediği noktalara göre tipler belirlensin.

$$M_{11} \rightarrow \text{tip 1},$$

$$M_{10}.2 \rightarrow \text{tip 2},$$

$$M_9 : S_3 \rightarrow \text{tip 3},$$

$$M_8 : S_4 \rightarrow \text{tip 4},$$

$$S_6 \rightarrow \text{tip 5}.$$

Şimdi ise ilişki bağıntısı oluşturulsun.

$$\{x_1\} \subset \{x_1, x_2\} \subset \{x_1, x_2, x_3\} \subset \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subset B \quad (7.2)$$

Yukarıda belirtilen ilişki bağıntısına bağlı kalarak farklı tipteki bayrak kümeleri oluşturulsun ve tipleri belirlensin.

$$F_1 = \{x_1\} \rightarrow \text{tip 1,}$$

$$F_2 = \{x_1, x_2\} \rightarrow \text{tip 2,}$$

$$F_3 = \{x_1, x_2, x_3\} \rightarrow \text{tip 3,}$$

$$F_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \rightarrow \text{tip 4,}$$

$$F_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\} \rightarrow \text{tip 5,}$$

$$F_{1,2,3} = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_2, x_3\}\} \rightarrow \text{tip 1,2,3,}$$

$$F_{1,2,5} = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}\} \rightarrow \text{tip 1,2,5,}$$

$$F_{1,4,5} = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}\} \rightarrow \text{tip 1,4,5,}$$

$$F_{3,4,5} = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}\} \rightarrow \text{tip 3,4,5,}$$

$$F_{1,2,3,4} = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}\} \rightarrow \text{tip 1,2,3,4,}$$

$$F_{1,2,3,5} = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}\} \rightarrow \text{tip 1,2,3,5,}$$

$$F_{1,2,4,5} = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}\} \rightarrow \text{tip 1,2,4,5,}$$

$$F_{1,3,4,5} = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}\} \rightarrow \text{tip 1,3,4,5,}$$

$$F_{2,3,4,5} = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}\} \rightarrow \text{tip 2,3,4,5.}$$

Bu bayrak kümelerine karşılık ilişki bağıntısına bağlı kalarak bayrak kümeleri oluşturulsun ve tipleri belirlensin.

$$\Gamma_{F_{2,3,4,5}} = \{\{x_1\}, \{x_2\}\} \rightarrow \text{tip 1,}$$

$$\Gamma_{F_{1,3,4,5}} = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}\} \rightarrow \text{tip 2,}$$

$$\Gamma_{F_{1,2,4,5}} = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_4\}\} \rightarrow \text{tip 3},$$

$$\Gamma_{F_{1,2,3,5}} = \{\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3, x_5\}, \{x_1, x_2, x_3, x_6\}\} \rightarrow \text{tip 4},$$

$$\Gamma_{F_{1,2,3,4}} = \{\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_7, x_8\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_9, x_{10}\}, \\ \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_{11}, x_{12}\}\} \rightarrow \text{tip 5},$$

$$\Gamma_{F_{3,4,5}} = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}\} \rightarrow \text{tip 1,2},$$

$$\Gamma_{F_{1,4,5}} = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_4\}, \{x_1, x_3, x_4\}\} \rightarrow \text{tip 2,3},$$

$$\Gamma_{F_{1,2,5}} = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_4\}, \{x_1, x_2, x_5\}, \{x_1, x_2, x_6\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3, x_5\}, \\ \{x_1, x_2, x_3, x_6\}, \{x_1, x_2, x_4, x_5\}, \{x_1, x_2, x_4, x_6\}, \{x_1, x_2, x_5, x_6\}, \} \rightarrow \text{tip 3,4},$$

$$\Gamma_{F_{1,2,3}} = \{\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3, x_5\}, ..., \{x_1, x_2, x_3, x_{12}\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}, \\ \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_7, x_8\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_9, x_{10}\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_{11}, x_{12}\}, \\ \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_7, x_9\}, \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_8, x_{11}\}, \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_{10}, x_{12}\}, \\ \{x_1, x_2, x_3, x_6, x_7, x_{10}\}, \{x_1, x_2, x_3, x_6, x_8, x_{12}\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_9, x_{11}\}\} \rightarrow \text{tip 4,5}.$$

Şimdi bu rezidü kümelerinden yararlanarak s_1 , s_2 , s_3 , s_4 ve s_5 hesaplınsın. Bu değerler aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$s_1 = |\Gamma_{F_{2,3,4,5}}| - 1 = 2 - 1 = 1,$$

$$s_2 = |\Gamma_{F_{1,3,4,5}}| - 1 = 2 - 1 = 1,$$

$$s_3 = |\Gamma_{F_{1,2,4,5}}| - 1 = 2 - 1 = 1,$$

$$s_4 = |\Gamma_{F_{1,2,3,5}}| - 1 = 3 - 1 = 2,$$

$$s_5 = |\Gamma_{F_{1,2,3,4}}| - 1 = 4 - 1 = 3.$$

Dolayısıyla $s_1 = 1$, $s_2 = 1$, $s_3 = 1$, $s_4 = 2$ ve $s_5 = 3$ olarak hesaplanır.

Şimdi ise n_1 , n_2 , n_3 ve n_4 değerlerini hesaplayalım.

$$n_1 = \frac{|M_{12}|}{|M_{11}|} = \frac{95040}{7920} = 12,$$

$$n_2 = \frac{|M_{12}|}{|M_{10} \cdot 2|} = \frac{95040}{1440} = 66,$$

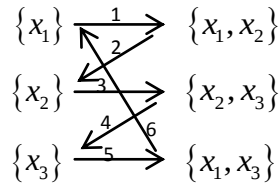
$$n_3 = \frac{|M_{12}|}{|M_9 : S_3|} = \frac{95040}{432} = 220,$$

$$n_4 = \frac{|M_{12}|}{|M_8 : S_4|} = \frac{95040}{192} = 495,$$

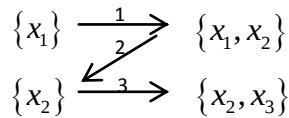
$$n_5 = \frac{|M_{12}|}{|S_6|} = \frac{95040}{720} = 132.$$

Böylece $n_1 = 12$, $n_2 = 66$, $n_3 = 220$, $n_4 = 495$ ve $n_5 = 132$ olarak hesaplanır.

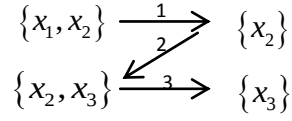
Şimdi de $g_{1,2}$, $d_{1,2}$ ve $d_{2,1}$ değerleri hesaplınsın. Bu değerleri hesaplamak için $\Gamma_{F_{3,4,5}}$ kullanılır. Sırasıyla $g_{1,2}$, $d_{1,2}$ ve $d_{2,1}$ değerlerine ait grafikler aşağıdaki gibidir.



$$g_{1,2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ olur.}$$



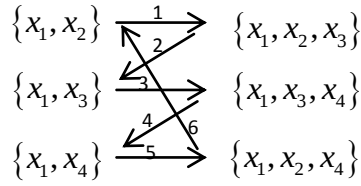
$d_{1,2} = 3$ olarak hesaplanır.



$d_{2,1} = 3$ olur.

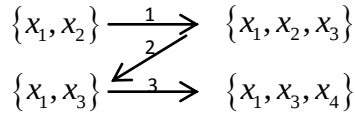
Böylece $g_{1,2} = 3$, $d_{1,2} = 3$ ve $d_{2,1} = 3$ olarak hesaplanır.

Şimdi ise bu diyagramın $g_{2,3}$, $d_{2,3}$ ve $d_{3,2}$ değerleri hesaplınsın. Bunun için tipi 2,3 olan $\Gamma_{F_{1,4,5}}$ rezidü kümesi ele alırsak, $g_{2,3}$ elemanı ilişki bağıntısına göre grafik oluşturulursa, bu grafik;

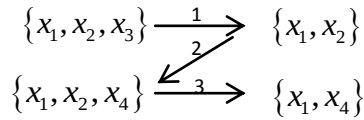


$$g_{2,3} = \frac{6}{2} = 3 ,$$

.



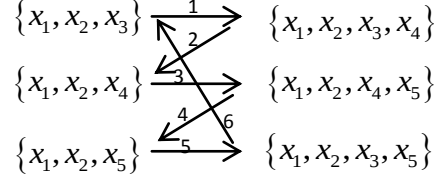
$$d_{2,3} = 3 ,$$



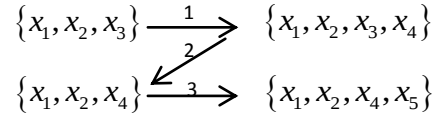
$d_{3,2} = 3$ olarak bulunur.

Böylece $g_{2,3} = 3$, $d_{2,3} = 3$ ve $d_{3,2} = 3$ olarak bulunur.

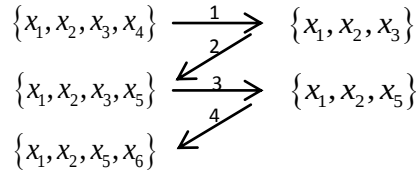
Aynı şekilde $g_{3,4}$, $d_{3,4}$ ve $d_{4,3}$ değerleri hesaplınsın. Bunun için tipi 3,4 olan $\Gamma_{F_{1,2,5}}$ rezidü kümesi kullanılır ve sırasıyla $g_{3,4}$, $d_{3,4}$ ve $d_{4,3}$ değerlerine ait grafikler aşağıda verilmiştir.



$$g_{3,4} = \frac{6}{2} = 3 \text{ olarak hesaplanır.}$$



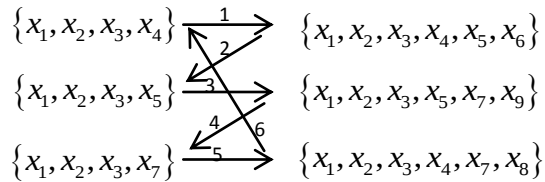
$$d_{3,4} = 3 \text{ olur.}$$



$$d_{4,3} = 4 \text{ olarak hesaplanır..}$$

Böylece $g_{3,4} = 3$, $d_{3,4} = 3$ ve $d_{4,3} = 4$ olarak hesaplanır.

Son olarak $g_{4,5}$, $d_{4,5}$ ve $d_{5,4}$ değerleri hesaplınsın. Bunun için tipi 4,5 olan $\Gamma_{F_{1,2,3}}$ rezidü kümesi kullanılır ve sırasıyla $g_{4,5}$, $d_{4,5}$ ve $d_{5,4}$ değerlerine ait grafikler aşağıda verilmiştir.



$$g_{4,5} = \frac{6}{2} = 3 \text{ olarak hesaplanır.}$$

$$\begin{array}{ccc}
\{x_1, x_2, x_3, x_4\} & \xrightarrow{1} & \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\} \\
& \searrow 2 & \\
\{x_1, x_2, x_3, x_5\} & \xrightarrow{3} & \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_7, x_9\}
\end{array}$$

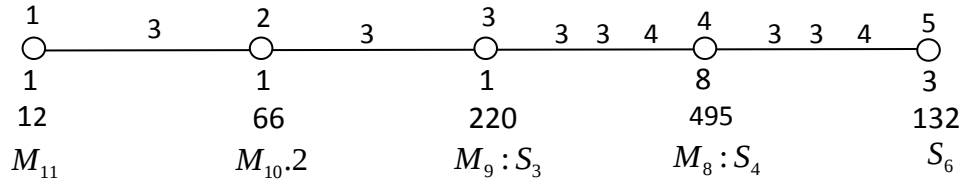
$d_{4,5} = 3$ olur.

$$\begin{array}{ccc}
\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\} & \xrightarrow{1} & \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \\
& \searrow 2 & \\
\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_7, x_8\} & \xrightarrow{3} & \{x_1, x_2, x_3, x_7\} \\
& \searrow 4 & \\
\{x_1, x_2, x_3, x_6, x_7, x_{10}\} & &
\end{array}$$

$d_{5,4} = 4$ olmaktadır.

Böylece $g_{4,5} = 3$, $d_{4,5} = 3$ ve $d_{5,4} = 4$ olarak hesaplanır.

Bulunan tüm değerler aşağıdaki diyagramda gösterilmiştir.



Şekil 7.2. M_{12} grubunun M_{11} , $M_{10}.2$, $M_9 : S_3$, $M_8 : S_4$ ve S_6 alt gruplarından oluşan rank-5 geometri diyagramı

8. TARTIŞMA ve SONUÇ

Sonlu ve basit grupların geometrik incelenmesi, sonlu grup teorisinde çalışılan önemli konulardan biridir. Bu tezde, Mathieu gruplarının değişik ranklara sahip geometrileri çalışılmıştır. Bu çalışmalarda Mathieu gruplarının alt grupları ve maksimal alt gruplarından yararlanılmıştır. Bu tezde, Mathieu gruplarının nasıl inşa edildiği açıklanmış ve ispatlanmıştır. Incidence geometri kavramı açıklanmış ve bu kavram, Tetrahedralin geometrisi oluşturularak pekiştirilmiştir. M_{11} ve M_{12} Mathieu gruplarının maksimal alt gruplarından faydalanarak değişik ranklara sahip geometriler incelenmiştir. Daha önce bilgisayar ortamında hesaplanmış ve ilgili yayınlarda sonuç şeklinde verilmiş olan bu çalışmadaki sonuçların nasıl elde edildiği ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Bu tezden hareketle, Mathieu gruplarından M_{22} , M_{23} ve M_{24} gibi daha yüksek mertebeli grupların geometrileri üzerinde çalışmalar yapılabilir.

9. KAYNAKLAR

- Buekenhout, F., Dehon, M. And Lemans, D., 1996. All Geometries of The Mathieu Group M_{11} Based on Maximal Supgroups. Experiment Math., 5:101-110.
- Buekenhout, F., and Leemans, D., 2007. A Rank Six Geometry Related to The McLaughlin Sporadik Simple Group. Springer Science and Business Media, 44:151-155.
- Buekenhout, F., 1979. Diagrams for Geomerics and Geometries and Groups. J. Combin. Theory, 27 : 121-151.
- Buekenhout, F., 1985. Diagrams Geometry for Sporadik Groups. Contemp. Math., 45:1-32.
- Dehon, M., and Leemans, D., 2002. Construction Coset Geometries with Magma: An Appllication to Sporadik Groups M_{12} and J_1 . Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 50:415-427.
- Fraleigh, B., 1967. A First Course in Abstract Algebra. Addison-Wesley Publishing Company, 447p, USA.
- Gottschalk, H., and Leemans, D., 1998. The Residually Weakly Primitive Geometrier of The Janko Group J_1 . In A. Pasini et al., Editor, Groups and Geometries, 99:65-79
- Humhpreys, J.F.,1996. A Course in Group Theory. Oxford Universty Press 280p. Oxford.
- Ivanov, A. A., 2002. Geometry of Sporadik Groups II, Cambridge University Press, 286p, Cambridge.
- Kilic, N., Rowley, P., 2010. On The Maximal Rank of Primitive Residually Connected Geometries for M_{22} , Journal of Algebra , Vol. 362, 84-91.
- Kilic, N., 2010. On Rank-2 Geometries of The Mathieu Group M_{23} . Taiwanese Journal of Mathematics, Vol. 14, No. 2, 373-387.
- Leemans, D., 2001. On a Rank Five Geometry of Meixner for the Mathieu Group M_{12} . Geometric Dedicate, 85:273-281.

Leemans, D., 2001. Some Rank Five Geometries Related to the Mathieu Group M_{23} .
Journal of Combination Theory, 95:365-372.

Leemans, D., 2006. The Residually Weakly Primitive Geometries of M_{24} . Preprint.

ÖZGEÇMİŞ

Caner EYRİSAKAL 1989 yılında Adana’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Adana’da tamamladı. 2006 yılında girdiği Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Bölümü’nden 2010 yılında mezun oldu. 2010-2013 yılları arasında, Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı ve halen devam etmektedir.