



**T.C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SONLU HİPERGRUPLARIN SS -TÜMLENİMİŞ
ALTHİPERGRUPLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SENA CAM

OCAK

SENA CAM

MATEMATİK ANABİLİM DALI

OCAK 2025

SONLU HİPERGRUPLARIN $\mathbb{S}\mathbb{S}$ -TÜMLENMİŞ ALTHİPERGRUPLARI

SENA CAM

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman
Prof. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN

İkinci Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Yıldız AYDIN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2025

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Sena CAM tarafından hazırlanan “Sonlu Hipergrupların SS -Tümlemiş Althipergrupları” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

İkinci Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Yıldız AYDIN

Matematik Anabilim Dalı, İstanbul Gelişim Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan: Doç. Dr. Figen ERYILMAZ

Matematik Anabilim Dalı, Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Doç. Dr. Hasan Hüseyin ÖKTEN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Engin KAYNAR

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 10/01/2025

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

SENA CAM

10/01/2025

SONLU HİPERGRUPLARIN SS -TÜMLENİMİŞ ALTHİPERGRUPLARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Sena CAM

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2025

ÖZET

Bu tez çalışmasında, sonlu gruplarda SS -tümlenmiş altgruplar kavramı, sonlu kanonik hipergruplara taşınarak tanımlanan hipercebirsel yapının özellikleri incelenmiştir. SS -tümlenmiş althiper grubun her bir althiper grubunun SS -tümlenmiş olduğu gösterilmiştir. Hiperyapılarda önemli bir sonuç olarak SS -tümlenmiş bir hiper grubun güçlü normal althiper grubuna göre her bölüm hiper grubunun SS -tümlenmiş olduğu kanıtlanmıştır. Tanımlanan hipercebirsel yapının çözülebilir hiper gruplarla bağıntılarına değinilmiştir. Bundan hareketle, SS -tümleneyen althiper gruba sahip olma özelliği çözülebilir hiper gruplarda karakterize edilmiştir.

Sayfa Adedi	: 71
Anahtar Kelimeler	: Sonlu kanonik hiper grup, Güçlü normal althiper grup, Çözülebilir althiper grup, SS -tümlenmiş althiper grup
Danışman	: Prof. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN
İkinci Danışman	: Dr. Öğr. Üyesi Yıldız AYDIN

SS-SUPPLEMENTED SUBHYPERGROUPS OF FINITE HYPERGROUPS

(M. Sc. Thesis)

Sena CAM

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2025

ABSTRACT

In this thesis study, the concept of SS -supplemented subgroups in finite groups is transferred to finite canonical hypergroups and the properties of the defined hyperalgebraic structure are investigated. It is shown that each subhypergroup of a SS -supplemented subhypergroup is SS -supplemented. As an important result in hyperstructures, it is proven that every quotient hypergroup of a SS -supplemented hypergroup is SS -supplemented with respect to its strong normal subhypergroup. The relations of the defined hyperalgebraic structure with solvable hypergroups are mentioned. Based on this, the property of having a SS -supplemented subhypergroup is characterized in solvable hypergroups.

Number of pages	: 71
Keywords	: Finite canonical hypergroup, Strong normal subhypergroup, Solvable hypergroup, SS -supplemented subhypergroup
Supervisor	: Prof. Dr. Burcu NIŞANCI TÜRKMEN
Second Supervisor	: Asst. Prof. Dr. Yıldız AYDIN

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans eğitimimde özveriili bilimsel anlayışıyla hep katkı sunan, tezimin geliştirilmesinde etkin olan sayın danışman hocam Prof. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN 'e ve ikinci danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Yıldız AYDIN 'a en derin saygı ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca araştırmam boyunca yardımlarını gördüğüm, bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım Prof. Dr. Ergül TÜRKMEN 'e saygılarımı sunarım. Tez çalışmamın düzenlenmesinde bilgi ve deneyimleri ile katkı sunan Doç. Dr. Figen ERYILMAZ, Doç. Dr. Hasan Hüseyin ÖKTEN ve Dr. Öğr. Üyesi Engin KAYNAR hocalarıma saygılarımı sunarım. Eğitim hayatım boyunca koşulsuz maddi ve manevi desteğini esirgemeyen, beni özveriyle yetiştiren annem Hatice CAM, babam İsmail CAM ve ablam Ayşe CAM 'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER.....	4
2.1. Abel Gruplar ve Özellikleri	4
2.2. Normal Altgrup ve Bölüm Grubu	16
2.3. Cauchy Teoremi ve Sylow Teoremleri	18
2.4. Grup Homomorfizmaları	22
2.5. Çözülebilir ve Nilpotent Gruplar	28
2.6. Süper Çözülebilir Grup	39
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	41
3.1. Hipergruplar ve Kanonik Hipergruplar	41
3.2. Kanonik Hipergrupların Bölüm Hipergrupları.....	46
3.3. Sonlu Grupların SS -Tümlenmiş Altgrupları ve Özellikleri.....	50
3.4. Bir Grubun SS -Tümlenmiş Altgrupları.....	54
4. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	61
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	66
KAYNAKLAR.....	67
ÖZGEÇMİŞ.....	71

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler

Açıklama

 $\mathbb{N}$

Doğal sayılar kümesi

 $\mathbb{Z}$

Tamsayılar abel grubu

 $\mathbb{Q}$

Rasyonel sayılar abel grubu

 $\mathbb{R}$

Reel sayılar abel grubu

 $\mathbb{P}$

Tüm asal sayıların kümesi

 $\frac{\mathbb{Q}(p)}{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_p^\infty$

Prüfer p -grup

 $\cap$

Kesişim işlemi

 $\cup$

Birleşim işlemi

Kısaltmalar

Açıklama

 H

Grup (Hipergrup)

 $[a, b]$

H grubunda a ve b elemanlarının komütatörü

 $\leq$

Altgrup (Althipergrup) sembolü

 $<$

Öz altgrup (Öz althipergrup) sembolü

 $\trianglelefteq$

Normal altgrup (althipergrup) sembolü

 $\triangleleft$

Öz normal altgrup (althipergrup) sembolü

 e

H grubunun (hipergrubunun) birim elemanı

 $H = \langle X \rangle$

Üreteç kümesi X olan H grubu (hipergrubu)

 $H = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$

$a_1, \dots, a_n \in H$ elemanları tarafından sonlu üretilmiş grup (hipergrup)

$H = \langle a \rangle$	$a \in H$ elemanı tarafından üretilen devirli grup (hipergrup)
$a^{-1}Ta$	T altgrubunun a ile eşleniği
$P^*(T)$	T nin boştan farklı tüm alt kümelerinin ailesi
$\Phi(n)$	Euler Φ fonksiyonu
$Gör(\vartheta)$	ϑ fonksiyonunun görüntü kümesi
$\check{C}ek(\psi)$	ψ (Güçlü) Homomorfizmasının çekirdeği
$Oto(H)$	H grubunun otomorfizmalar grubu
$Z(H)$	H grubunun (hipergrubunun) merkezi
$N_K(T)$	T nin K deki normalleştiricisi
$[H:T]$	T nin H grubundaki (hipergrubundaki) indeksi
$C_L(a)$	a elemanının eşlenik sınıfı
T_H	T nin H deki özü
H'	H nin komütatör altgrubu (althipergrubu)
$O^P(H)$	H grubunun en küçük normal p -faktör grubu
$G_L(n, F)$	Genel lineer grup

1. GİRİŞ

Bu çalışmadaki bütün gruplar sonludur. H bir grup, A ve B , H nin altgrupları olmak üzere H , A ve B nin direkt çarpımı ise o zaman H ye A ve B çarpanlarına ayrılmıştır denir. Burada A ve B birbirlerinin tümleyeni olarak adlandırılır. $H = AB$ grubundaki A ve B nin yapısı hakkında pek çok çalışma yapılmıştır. Örneğin, 1955 yılında Ito önemli bir teorem geliştirmiştir. A ve B abel altgruplar ise $H = AB$ nin komütatörünün abel olduğunu göstermiştir. Bu türdeki en ünlü teorem abel grupların çözülebilir olması yardımıyla Kegel ve Wielandt tarafından kanıtlanan A ve B gruplarının ikisinin de nilpotent altgruplar olması durumunda $H = AB$ direkt çarpımının çözülebilir olması teoremidir. Şayet A ve B süper çözülebilir normal altgruplar ise $H = AB$ çözülebilir grup olmayabilir. A ve B süper çözülebilir altgruplar olmak üzere A nın her altgrubu B nin bütün altgrupları ile permüte edilebilir, bir başka deyişle her $A_1 \leq A$ ve $B_1 \leq B$ için $A_1 B_1 = B_1 A_1$ ise o zaman $H = AB$ grubunun süper çözülebilir olduğu gösterilmiştir. Daha sonra 1992 yılında Maier, süper çözülebilir gruplar sınıfını da içeren önemli bir sonuca ulaşmıştır. Bu doğrultuda, Ballester-Bolínches ve diğer bazı araştırmacılar sonlu grupların tam permüte edilebilir ve ortak permüte edilebilir çarpımlarını incelemişler ve sonunda önemli bulgulara ulaşmışlardır. Elde edilen bulgular geliştirilerek; H bir grup ve $A \leq H$ olmak üzere H nin $H = AB$ ve $A \cap B$, B de S -quasinormalse, yani B nin her Sylow P altgrubu için $(A \cap B)P = P(A \cap B)$ eşitliğini sağlayan bir B altgrubu varsa A ya H de SS -tümlemiş altgrup adı verilmiştir. Burada B altgrubuna A nın H deki SS -tümleyeni denir. Kegel tarafından sunulan bu tanımdan sonra, verilen bir grubun altgruplarının bazı ek koşullara sahip olması durumunda grubun yapısının nasıl değiştiği ayrıntılı bir biçimde incelenmiştir. Diğer taraftan, H bir grup $A \leq H$ olmak üzere $H = AB$ ve $A \cap B = \{e\}$ olacak şekilde $B \leq H$ varsa A ya H de tamlanmış altgrup denir. Tamlanmış altgrup tanımını kullanarak, çözülebilir gruplar için temel teorem olan, H grubunun çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul H nin her Sylow altgrubunun H de tamlanmış olduğu kanıtlanmıştır. Son yıllarda araştırmacılar, bazı altgrupların C -tümlemiş olan sonlu p -nilpotent grupları çalışmışlardır. Verilen bir grubun tamlanmış altgrupları üzerindeki araştırmalar devam etmektedir ve bununla ilgili pek çok sonuç elde edilmektedir.

2012 yılında Guo ve Lu çalışmalarında, verilen bir H grubunun SS -tümlemiş altgrupları ile tamlanmış altgrupları ya da S -quasinormal altgrupları arasındaki bağıntılarını tanımlamışlardır. Daha sonra altgrupları SS -tümlemiş olan sonlu grupların yapısı

incelenerek bu yapının uygulamaları üzerine değinilmiştir. 1934 yılında Marty tarafından hiperyapı, özellikle de hipergrup kavramı ortaya atılmıştır. Hiperyapıların çeşitli bilimlerin diğer alanlarında birçok uygulaması vardır. Geometri, hipergraf, ikili bağıntılar, kafesler, bulanık kümeler ve kaba kümeler, kodlar, yapay zeka, olasılık v.b. alanlarda hiperyapıların uygulamaları ile ilgili birçok kitap ve makale yayınlanmıştır.

2022 yılında Davvaz ve Leoreanu-Fotea tarafından verilen tanımda $H \neq \emptyset$ bir küme ve $P^*(H)$, H nin boştan farklı tüm alt kümelerinin bir ailesi olmak üzere $\circ: H \times H \rightarrow P^*(H)$ bir fonksiyon ise $\circ$ ye H üzerinde bir hiperişlem ve $(H, \circ)$ ikilisine ise hipergrupoid adı verilir. $(H, \circ)$ bir hipergrupoid iken her $a, b, c \in H$ için $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ eşitliği sağlanıyorsa, kısaca $\circ$, H üzerinde birleşmeli ise $(H, \circ)$ ikilisine yarı hipergrup adı verilir. $(H, \circ)$ bir hipergrupoid iken her $x \in H$ için $x \circ H = H \circ x = H$ eşitliği sağlanıyorsa $(H, \circ)$ ikilisine quasihipergrup denir. $(H, \circ)$ hipergrupoidi hem yarı hipergrup hem de quasihipergrup ise $(H, \circ)$ ye hipergrup adı verilir.

Davvaz ve Leoreanu-Fotea, 2022 yılında yapmış oldukları çalışmalarında hipergruplarda homomorfizmaları çalışmışlardır. $(H_1, \circ)$ ve $(H_2, *)$ iki hipergrup ve $f: H_1 \rightarrow H_2$ bir fonksiyon olsun. H_1 in her x, y elemanı için $f(x \circ y) \subseteq f(x) * f(y)$ sağlanıyorsa f ye hipergrup homomorfizması adı verilir. Burada H_1 in keyfi x, y elemanları için $f(x \circ y) = f(x) * f(y)$ ise f ye güçlü hipergrup homomorfizması adı verilir. Eğer güçlü hipergrup homomorfizması birebir ve örten ise buna güçlü hipergrup izomorfizması adı verilir. Aralarında güçlü hipergrup izomorfizması olan H_1 ve H_2 hipergrupları için $H_1 \cong H_2$ gösterimi kullanılır.

Davvaz ve Leoreanu-Fotea, 2007 yılında yayınlamış oldukları kaynak kitaplarında kanonik hipergrup kavramını tanımlamışlardır. Boştan farklı bir H kümesi $\circ$ hiperişlemi ile birlikte aşağıdaki aksiyomları gerçekleştiriyor ise $(H, \circ)$ ikilisine kanonik hipergrup denir.

- (i) $(H, \circ)$ bir yarı hipergruptur, yani $H, \circ$ hiperişlemine göre birleşme özelliğine sahiptir: her $x, y, z \in H$ için $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ eşitliği sağlanır.
- (ii) $H, \circ$ hiperişlemine göre değişme özelliğine sahiptir: her $x, y \in H$ için $x \circ y = y \circ x$ dir.

(iii) H nin e birim elemanı mevcuttur: her $x \in H$ için $e \circ x = x \circ e = x$ olacak şekilde tek bir e vardır.

(iv) $\circ$ hiperişlemine göre her elemanın tersi vardır ve tektir: her $x \in H$ için, $e \in x \circ x^{-1}$ olacak şekilde $x^{-1} \in H$ mevcut olup x^{-1} elemanına x in tersi denir ve bu eleman tektürlü biçimde belirli olup $e \in x \circ x^{-1}$ ile gösterilir.

(v) $\circ$ hiperişlemine göre tersinirlik özelliği sağlanır: her $x, y, z \in H$ için $z \in x \circ y$ iken $y \in x^{-1} \circ z$ ve $x \in z \circ y^{-1}$ dir.

Hiperyapılarla ilgili diğer temel kavramlar ve tanımlar için (Corsini, 1993), (Davvaz ve Leoreanu-Fotea, 2007), (Freni, 2004 – Freni, 1991) ve (Shojaei ve Ameri, 2015) kaynakları incelenebilir.

Bu çalışmada hipergrup teorisinin birtakım cebirsel kavramları incelenmiştir. Hipergrupların özel bir sınıfı olarak çalışılan sonlu kanonik hipergruplarda, SS -tümlenmiş althipergrup kavramı abel gruplarda SS -tümlenmiş altgrupların bir genellemesi olarak çalışılmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde çalışmamızın özünde kullanılan tanım, teorem ve bazı önermelere yer verilmiştir.

2.1. Abel Gruplar ve Özellikleri

2.1.1. Tanım H boştan farklı bir küme olmak üzere $*$: $H \times H \rightarrow H$ fonksiyonuna H kümesi üzerinde ikili işlem ve (a, b) sıralı ikilisinin görüntüsü olan $a * b$ elemanına a ile b elemanlarının çarpımı, benzer şekilde $+$ ikili işlemi toplama $+$ işlemi ise, $a + b$ elemanına a ve b elemanlarının toplamı denir. Bu durumda $(H, *)$ ikilisi cebirsel yapı olarak adlandırılır. Şimdi verilen bir $(H, *)$ cebirsel yapısının temel özelliklerini tanımlayalım.

Birleşme Özelliği: Her $a, b, c \in H$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$ eşitliği gerçekleşiyor ise, $*$ ikili işlemi H kümesinde birleşme özelliğini sağlıyor denir. Birleşme özelliği sayesinde $*$ ikili işlemiyle sonlu tane eleman sırayı bozmadan işleme tabi tutulabilir.

Birim Eleman Özelliği: $e \in H$ olmak üzere her $a \in H$ için $e * a = a * e = a$ ise, $*$ ikili işlemi H kümesinde birim eleman özelliğini sağlıyor denir.

$e \in H$ varsa tek türdür: $e_1 * a = a$ ve $a * e_2 = a$ olsun. Bu takdirde verilen eşitlikler her $a \in H$ için geçerli olduğundan özel olarak $e_2, e_1 \in H$ içinde geçerli olup sırasıyla yukarıdaki eşitlikler yerine yazılırsa $e_2 * e_1 = e_1 * e_2 = e_2$ ve $e_1 * e_2 = e_2 * e_1 = e_1$ olup $e_1 = e_2$ eşitliği elde edilir. e elemanına H nin $*$ ikili işlemine göre birim elemanı adı verilir.

Ters Eleman Özelliği: $e \in H$ birim eleman olmak üzere $a \in H$ için $a * b = b * a = e$ olacak şekilde $b \in H$ varsa, a ya ters elemana sahiptir denir. H nin her elemanı ters elemana sahipse $*$ ikili işlemi H de ters eleman özelliğini sağlıyor denir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.1.2. Tanım $(H, *)$ cebirsel yapı olsun. $*$ ikili işlemi H kümesinde birleşme, birim eleman ve ters eleman özelliklerini sağlıyorsa $(H, *)$ ikilisine grup denir.

Bu çalışmada, giriş kısmında bahsedilen ve örneklerini de çoğaltabileceğimiz bilinen cebirsel yapılardaki ikili işlemler dışında kalan ve işlemin sembolik olarak kullanıldığı durumlarda $*$ notasyonu yerine çarpma notasyonu kullanılacaktır. Bu durumda H ile $(H,*)$ cebirsel yapısı için ab ile $a * b$ elemanı kastedilecektir. H grup ve T, H nin boştan farklı alt kümesi olsun. T kümesi H grubundaki işleme göre grup ise, T ye H grubunun altgrubu denir ve $T \leq H$ ile gösterilir. H grubunda $\{e\}$ ve H grubunun kendisi altgruplardır. $\{e\}$ altgrubuna aşikar altgrup veya aşikar grup denir. H nin kendisinden farklı altgruplarına öz altgrup adı verilir ve T, H grubunun bir öz altgrubu ise $T < H$ ile gösterilir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.1.3. Tanım H grubunun birim eleman özelliğini sağlayan $e \in H$ elemanına grubun birimi denir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.1.4. Teorem H grup ve $a \in H$ olsun. Bu takdirde $ab = ba = e$ olacak şekilde bir tek $b \in H$ vardır (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

Kanıt. $b, b' \in H$ için $ab = ba = e$ ve $ab' = b'a = e$ eşitlikleri sağlansın. Buradan $b = be = b(ab') = (ba)b' = eb' = b'$ olup b elemanı tek türdür. $\square$

2.1.5. Tanım H grup ve $a \in H$ olsun. Ters eleman özelliğini sağlayan tek tür olarak belirli olan $b \in H$ elemanına a elemanının tersi denir ve $b = a^{-1}$ ile gösterilir. H grubunun ikili işlemi $+$ ise, a elemanının tersi $-a$ ile gösterilir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.1.6. Teorem H grup olsun. Bu takdirde her $a \in H$ için $(a^{-1})^{-1} = a$ dır (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

Kanıt. $a \in H$ olsun. H grup olduğundan $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ olacak şekilde $a^{-1} \in H$ vardır. Benzer şekilde $a^{-1} \in H$ ve her elemanın tersinin tek türlüğü kullanılarak $a^{-1}(a^{-1})^{-1} = (a^{-1})^{-1}a^{-1} = e$ eşitliğinden $(a^{-1})^{-1} = a$ bulunur. $\square$

2.1.7. Tanım H grup olsun. Her $a, b \in H$ için $ab = ba$ ise, H ye değişmeli grup veya abel grup denir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.1.8. Uyarı A ve B iki küme olsun. A dan B ye tanımlı bire-bir ve örten bir fonksiyon var ise, A ve B kümelerine eşgüçlüdür denir. A kümesinin eşgüçlü olduğu tüm kümelerin sınıfına A kümesinin kardinal sayısı veya kardinalitesi denir ve $|A|$ ile gösterilir.

$0 \leq n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $n = 0$ iken $I_0 = \emptyset$ ve $n > 0$ iken $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ sonlu kümesinin kardinal sayısı $|I_n| = n$ yazılır. Bir A kümesi I_n ile eşgüçlü ise, A ya sonlu küme denir ve $|A| = |I_n|$ olduğundan A kümesinin kardinal sayısı $|A| = n$ dir. Dolayısıyla sonlu elemanlı bir kümenin kardinal sayısı verilen kümenin eleman sayısıdır. A kümesi sonlu değil ise, $|A|$ kardinal sayısı sonsuzdur.

H grup olsun. $|H|$ kardinal sayısına H grubunun mertebesi denir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

$1 < n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(\mathbb{Z}_n, +)$ cebirsel yapısı, birimi $\bar{0}$ ve $\bar{m} \in \mathbb{Z}_n$ elemanının tersi $-\bar{m}$ olan n . mertebeden abel grubudur. Benzer şekilde $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot)$ cebirsel yapısı, birimi $\bar{1}$ ve $-\bar{m} \in \mathbb{Z}_n^*$ elemanının tersi $ma + nb = 1$ eşitliğini sağlayan a tamsayısı için $\bar{0} \neq \bar{a} \in \mathbb{Z}_n^*$ olan $\Phi(n)$. mertebeden abel grubudur (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

Herhangi bir boştan farklı küme kullanılarak grup yapısı kurulabilir. X boştan farklı bir küme olmak üzere S_X , X deki tüm permütasyonların kümesi olsun. I_X birim fonksiyonu bire-bir ve örten olduğundan $I_X \in S_X$ olup $S_X \neq \emptyset$ dir. S_X üzerinde işlem olarak fonksiyonların bileşkesini alalım. $\alpha, \beta \in S_X$ olmak üzere $\alpha \circ \beta$, X de bire-bir ve örten fonksiyon olduğundan $\alpha \circ \beta \in S_X$ dir. Bileşke $\circ$ işlemi S_X kümesinde birleşme özelliğine sahiptir ve her $\alpha \in S_X$ için $\alpha \circ \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \circ \alpha = I_X$ olacak şekilde bir tek $\alpha^{-1} \in S_X$ vardır. Sonuç olarak, $(S_X, \circ)$ gruptur. Bu gruba X kümesinin simetrik grubu denir. X , n elemanlı sonlu bir küme olsun. Bu takdirde X ile eşgüçlü olacak şekilde $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ kümesi vardır. Bu eşgüçlülük yardımıyla X yerine I_n de çalışmak daha kolay olacaktır. Bu durumda S_X gösterimi yerine S_n gösterimi kullanılır. Ayrıca kolaylık açısından $\circ$ bileşke notasyonu için çarpma notasyonu kullanılır.

S_n grubunun eleman sayısını karakterize edelim. $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ ve $\alpha \in S_n$ keyfi bir permütasyon olsun. Buradan $\alpha(1)$ elemanı $1, 2, \dots, n$ elemanlarından birine eşittir ve n farklı seçim yapılabilir. Benzer şekilde $\alpha(2)$ elemanı için $(n - 1)$ farklı seçim yapılabilir ve bu

şekilde devam edilirse α permütasyonu $n(n-1)(n-2) \dots 2.1$ farklı yolla seçilebilir. Sonuç olarak $|S_n| = n!$ dir.

$n \geq 1$ için S_n simetrik grubunun birim elemanı e_n ile gösterilir. $\pi \in S_n$ permütasyonu verilsin. Her bir $i \in I_n$ elemanının π altındaki görüntüsü $\pi(i)$ olmak üzere $\pi = \{(1, \pi(1)), (2, \pi(2)), \dots, (n, \pi(n))\}$ olup bu gösterim yerine $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$ gösterimi kullanılır. Örneğin, $n = 4$ ve $\pi \in S_4$ için $\pi(1) = 2$, $\pi(2) = 4$, $\pi(3) = 3$ ve $\pi(4) = 1$ olmak üzere π permütasyonunun gösterimi $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ şeklindedir. Dolayısıyla $e_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ olduğu açıktır. Permütasyon gösterimini biraz kolaylaştıralım. $\pi \in S_n$ olsun. Her $a \in I_n \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ için $\pi(a) = a$ ve $j = 1, 2, \dots, k-1$ için $i_1 \rightarrow \pi(i_1) = i_2 \rightarrow \dots \rightarrow \pi(i_{j-1}) = i_j \rightarrow \pi(i_j) = i_{j+1} \rightarrow \dots \rightarrow \pi(i_k) = i_1$ ise (k tane elemanın verilen sıraya göre yerini değiştiren ve diğer elemanları sabit bırakan), π permütasyonuna k -döngü veya dairesel permütasyon denir ve $\pi = (i_1 i_2 \dots i_k) = (i_j i_{j+1} \dots i_k i_1 \dots i_{j-1})$ şeklinde gösterilir. $\pi = (i_1 i_2 \dots i_k)$ döngüsünün tersinin $\pi^{-1} = (i_k i_{k-1} \dots i_1)$ döngüsü olduğu açıktır. Eğer k -döngü için $k = 2$ ise (sadece iki elemanın yerini değiştirirken diğerlerini sabitleyen döngü), bu 2-döngüye transpozisyon adı verilir. $\alpha = (i_1 i_2) \in S_n$ transpozisyonu için $\alpha\alpha = (i_1 i_2)(i_1 i_2) = e_n$ olup herhangi bir transpozisyonunun tersi kendisidir. Ayrıca $\pi = (i_1 i_2 \dots i_k) = (i_1 i_k)(i_1 i_{k-1}) \dots (i_1 i_2)$ olduğundan her döngü transpozisyonlarının çarpımı olarak yazılabilir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.1.9. Teorem (Sadeleştirme Özelliği) H grup olsun. $a, b, c \in H$ için $ac = bc$ veya $ca = cb$ ise $a = b$ dir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

Kanıt. $a, b, c \in H$ için $ac = bc$ olsun. c elemanının tersi mevcut olduğundan $ac = bc$ eşitliğin her iki tarafı $c^{-1} \in H$ ile çarpılırsa $(ac)c^{-1} = (bc)c^{-1}$ olup $a = b$ elde edilir. $\square$

H grubunun birim elemanı altgruplarının da birim elemanıdır, gösterelim. $T \leq H$ olsun. $e_T \in T$ birim eleman olmak üzere $e_T e_T = e_T = e_T e$ olup H grubundaki sadeleştirme özelliğinden $e_T = e$ dir. Benzer şekilde H grubundaki bir elemanın tersinin tek olarak belirli olmasından dolayı $a \in T$ elemanının T deki tersi H grubundaki tersidir.

2.1.10. Tanım H grup olmak üzere $a \in H$ elemanı ile aynı mertebeye sahip başka bir elemanı karakterize edelim. $x \in H$ olsun. a ile $b = x^{-1}ax$ elemanının aynı mertebeye sahip olduğunu gösterelim. $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\begin{aligned}
 b^n &= (x^{-1}ax)(x^{-1}ax) \dots (x^{-1}ax) \\
 &= (x^{-1}a)(xx^{-1})a(xx^{-1})a \dots (xx^{-1})ax \\
 &= x^{-1}aeae \dots ax \\
 &= x^{-1}aa \dots ax \\
 &= x^{-1}a^n x
 \end{aligned} \tag{1}$$

olup $a^n = e$ iken $b^n = e$ ve tersine olarak $b^n = e$ iken $a^n = e$ dir. Dolayısıyla a ile $x \in H$ olmak üzere $x^{-1}ax$ elemanının mertebesi eşittir. H grubunda $x^{-1}ax$ elemanına a ile eşleniktir denir. Dolayısıyla a ve b elemanlarının eşlenik olması için gerek ve yeter koşul $b = x^{-1}ax$ olacak şekilde $x \in H$ mevcut olmasıdır. H abel grup ise, her $x \in H$ için $b = x^{-1}ax = x^{-1}xa = a$ olup herhangi bir $a \in H$ elemanının eşleniği sadece kendisidir. $a \in H$ elemanı ile eşlenik olan tüm elemanlar a ile aynı mertebeye sahiptir. Fakat aynı mertebeye sahip iki eleman eşlenik olmak zorunda değildir. Örneğin, $a = (\bar{1}, \bar{0})$, $b = (\bar{0}, \bar{1}) \in \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ mertebesi 2 dir fakat $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ abel grubunda eşlenik değildir. H grubunda $a \sim b \Leftrightarrow a$ ile b eşleniktir ile tanımlı $\sim$ bağıntısı denklik bağıntısıdır. a elemanının denklik sınıfına a nın eşlenik sınıfı denir ve $C_L(a) = \{x^{-1}ax | x \in H\}$ ile gösterilir. e birim elemanının eşlenik sınıfı kendisidir. H abel grup ise, her elemanın eşlenik sınıfının kendisi olduğu açıktır. Her $x \in H$ için $a = x^{-1}ax$ ise, yani $C_L(a) = \{x^{-1}ax | x \in H\} = \{a\}$ ise, a ya merkez eleman denir. H grubunun tüm merkez elemanlarının kümesi $Z(H)$ ile gösterilir. $Z(H)$ ye H grubunun merkezi adı verilir. e birim elemanının eşlenik sınıfı $\{e\}$ olduğundan $e \in Z(H)$ dir. $H = Z(H)$ olması için gerek ve yeter koşul H nin abel grubu olmasıdır.

$a \in H$ elemanının eşleniği yalnızca kendisi olacak şekildeki H grubunun elemanlarının kümesi $C_H(a) = \{x \in H | a = x^{-1}ax\}$ ile gösterelim. $e, a \in C_H(a)$ olup $C_H(a) \neq \emptyset$ dır. $a \in Z(H)$ olması için gerek ve yeter koşulun $C_H(a) = H$ olması olduğu açıktır. Bu yüzden $C_H(a)$ kümesine a elemanının merkezleştiricisi denir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.1.11. Teorem H bir grup ve $\emptyset \neq T \subseteq H$ olsun. $T \leq H$ olması için gerek ve yeter koşul her $a, b \in T$ için $ab^{-1} \in T$ olmasıdır (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

Kanıt. $(\Rightarrow)$ $T \leq H$ olduğundan her $a, b \in T$ için $ab \in T$ ve $b^{-1} \in T$ dir. Burada b yerine b^{-1} alınırsa, $ab^{-1} \in T$ olduğu görülür.

$(\Leftarrow)$ $T \neq \emptyset$ olduğundan bir $a \in T$ vardır ve hipotez gereği $aa^{-1} = e \in T$ dir. Buradan her $b \in T$ için $b^{-1} = eb^{-1} \in T$ olup T kümesindeki her elemanın H grubundaki tersi T kümesinin bir elemanıdır. Böylece her $a, b \in T$ için $a, b^{-1} \in T$ olup $ab = a(b^{-1})^{-1} \in T$ dir. Sonuç olarak H grubundaki ikili işlem T de kapalıdır. Her $a, b, c \in T \subseteq H$ için $(ab)c = a(bc)$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $T \leq H$ dir. $\square$

2.1.12. Önerme $\{T_i\}_{i \in I}$, H grubunun altgruplarının ailesi ise $\bigcap_{i \in I} T_i \leq H$ dir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

Kanıt. Her $i \in I$ için $T_i \leq H$ olduğundan $e \in T_i$ olup $\bigcap_{i \in I} T_i \neq \emptyset$ dır. $a, b \in \bigcap_{i \in I} T_i$ verilsin. Bu takdirde her $i \in I$ için $a, b \in T_i$ dir ve buradan $ab^{-1} \in T_i$ dir. Her $i \in I$ için $ab^{-1} \in T_i$ olduğundan $ab^{-1} \in \bigcap_{i \in I} T_i$ elde edilir. $\square$

2.1.13. Tanım H grup ve $X \subseteq H$ olsun. H grubunda X i kapsayan tüm altgrupların arakesitine X alt kümesiyle üretilen altgrup denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir. Burada X kümesine $\langle X \rangle$ grubunun üreteç kümesi adı verilir. $X = \emptyset$ ise, H de boş kümeyi tüm altgruplar kapsadığından $\langle X \rangle = \{e\}$ olduğu açıktır (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.1.14. Teorem H grubunun boştan farklı bir alt kümesi X olsun. Bu takdirde $\langle X \rangle = \{x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_n^{e_n} \mid x_i \in X, e_i = \pm 1, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{Z}^+\}$ dır (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

Kanıt. $A = \{x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_n^{e_n} \mid x_i \in X, e_i = \pm 1, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{Z}^+\}$ olsun. $X \neq \emptyset$ olduğu için $A \neq \emptyset$ dır. $x = x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_n^{e_n}$, $y = y_1^{d_1} y_2^{d_2} \dots y_m^{d_m} \in A$ keyfi elemanları için $xy^{-1} = x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_n^{e_n} y_m^{-d_m} y_{m-1}^{-d_{m-1}} \dots y_1^{-d_1} \in A$ olup $A \leq H$ elde edilir. $A = \langle X \rangle$ olduğunu gösterelim. $a \in A$ keyfi elemanı için $a = x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_n^{e_n}$ olacak şekilde $x_i \in X$ ve $e_i = \pm 1$

mevcuttur. $a \in \langle X \rangle$ olup $A \subseteq \langle X \rangle$ elde edilir. Her $x \in X$ için $x = x^1 \in A$ olup $X \subseteq A$ dır ve buradan $\langle X \rangle \subseteq A$ dır. Böylece $A = \langle X \rangle$ eşitliği elde edilir. $\square$

2.1.15. Tanım H grup olmak üzere X ve Y , H nin boştan farklı alt kümeleri olsun. $XY = \{xy \mid x \in X \text{ ve } y \in Y\}$ kümesine X ile Y kümelerinin çarpımı denir. H toplamsal grup ise, $X + Y = \{x + y \mid x \in X \text{ ve } y \in Y\}$ kümesine verilen kümelerin toplamı adı verilir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.1.16. Uyarı T ve K, H grubunun altgrupları olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) TK kümesi H nin alt grubudur;
- (ii) $TK = KT$ dır;
- (iii) $\langle T \cup K \rangle = \langle T, K \rangle$ dır (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.1.17. Önerme (Modüler Kural) H grup olmak üzere $T, K, L \leq H$ altgruplar ve $T \leq L$ ise, $(TK) \cap L = T(K \cap L)$ eşitliği vardır (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

Kanıt. $a \in (TK) \cap L$ ise, $a = tk$ olacak şekilde $t \in T$ ve $k \in K$ vardır. $T \leq L$ olduğundan $t \in L$ olup $a = tk$ eşitliğinden $t^{-1}a = k \in K \cap L$ dir ve buradan $a \in T(K \cap L)$ elde edilir. $a \in T(K \cap L)$ ise, $t \in T$ ve $k \in K \cap L$ olmak üzere $a = tk$ olup $T \leq L$ olduğundan $a = tk \in L$ dir ve böylece $a \in (TK) \cap L$ bulunur. Dolayısıyla $(TK) \cap L = T(K \cap L)$ elde edilir. Özellikle, H toplamsal grup iken $(T + K) \cap L = T + (K \cap L)$ dir.

2.1.18. Tanım H grup olsun. $X = H$ alınırsa, $\langle X \rangle = H$ olup H grubu bir üreteç kümesine sahiptir. $H = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \leq H$ olacak şekilde $a_1, a_2, \dots, a_n \in H$ mevcutsa H ye sonlu üretilmiş grup ve $H = \langle a \rangle = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ olacak şekilde $a \in H$ varsa H grubuna devirli grup adı verilir. Bir sonlu H grubunun devirli olması için gerek ve yeter koşul $|H| = |a|$ olacak şekilde $a \in H$ mevcut olmasıdır.

H devirli grubunun abel olduğunu gösterelim. H devirli olduğundan $H = \langle a \rangle$ olacak şekilde $a \in H$ vardır. $x, y \in H$ için $x = a^n$ ve $y = a^m$ olacak şekilde n ve m tamsayıları mevcut

olup $xy = a^n a^m = a^{n+m} = a^{m+n} = a^m a^n = yx$ eşitliği gereği H abel gruptur (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.1.19. Teorem $H = \langle a \rangle$ devirli grup olsun.

(i) H grubunun mertebesi n ise, $H = \langle a \rangle = \{e, a, \dots, a^{n-1}\}$ dir. Özellikle, $H = \langle a^k \rangle$ olması için gerek ve yeter koşul $ebob(k, n) = 1$ olmasıdır;

(ii) H sonsuz mertebeli grup ise, $H = \langle a \rangle = \langle a^{-1} \rangle = \{a^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ dir;

(iii) H grubunun her altgrubu devirlidir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.1.20. Örnek $1 < n \in \mathbb{Z}$ için $(\mathbb{Z}_n, +)$ grubundan $|\bar{1}| = n$ olduğundan $\mathbb{Z}_n = \langle \bar{1} \rangle$ olup $(\mathbb{Z}_n, +)$ grubu devirlidir. $\mathbb{Z}_n = \langle m\bar{1} \rangle \Leftrightarrow ebob(m, n) = 1$ olduğundan $\mathbb{Z}_n^*$ kümesinin her bir elemanı $(\mathbb{Z}_n, +)$ grubunun üreticidir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

H grup ve $T \leq H$ olsun. $a \in H$ olmak üzere $a^{-1}Ta = \{a^{-1}ta \mid t \in T\}$ kümesini tanımlayalım. $T \leq H$ olduğundan $e \in T$ olup $t = e$ için $a^{-1}ta = a^{-1}ea = a^{-1}a = e$ eşitliği elde edilir. Böylece $a^{-1}ta = e \in a^{-1}Ta \neq \emptyset$ olduğu görülür. Şimdi $a^{-1}Ta \leq H$ olduğunu gösterelim. $x, y \in a^{-1}Ta$ keyfi elemanlar olsun. Bu takdirde $x = a^{-1}t_1a$ ve $y = a^{-1}t_2a$ olacak şekilde $t_1, t_2 \in T$ vardır.

$$\begin{aligned} xy^{-1} &= (a^{-1}t_1a)(a^{-1}t_2a)^{-1} \\ &= (a^{-1}t_1a)(a^{-1}t_2^{-1}(a^{-1})^{-1}) \\ &= (a^{-1}t_1)(aa^{-1})(t_2^{-1}a) \\ &= a^{-1}(t_1et_2^{-1})a \\ &= a^{-1}(t_1t_2^{-1})a \end{aligned} \tag{2}$$

olup $T \leq H$ olduğundan $t_1t_2^{-1} \in T$ ve buradan $xy^{-1} = a^{-1}(t_1t_2^{-1})a \in a^{-1}Ta$ elde edilir. O halde $a^{-1}Ta \leq H$ dir. Her $t \in T$ için $\varphi(t) = a^{-1}ta$ ile tanımlı $\varphi : T \rightarrow a^{-1}Ta$ dönüşümü bire-bir ve örten olup kardinal sayıların $|T| = |a^{-1}Ta|$ eşitliği elde edilir. $a^{-1}Ta$ altgrubuna, T altgrubunun a ile eşleniği adı verilir.

Her $a \in H$ için $a^{-1}Ta = T$ ise, T altgrubuna H grubunun normal altgrubu denir ve $T \trianglelefteq H$ ile gösterilir. $\{e\} \trianglelefteq H$ ve $H \trianglelefteq H$ olduğu açıktır. Bu normal altgruplara H nin aşık normal altgrupları denir. Abel grubun her altgrubu normal altgruptur.

H grubunun T ve K altgrupları için $N_K(T) = \{a \in K \mid a^{-1}Ta = T\}$ kümesini tanımlayalım. $e \in N_K(T)$ ve $N_K(T) \leq K$ olduğu açıktır. Ayrıca $N_K(T) = K \cap (N_H(T))$ dır. $T \leq K$ ise, her $t \in T$ için $t^{-1}Tt = T$ olup $T \leq N_K(T)$ ve $a \in N_K(T)$ keyfi elemanı için $a^{-1}Ta = T$ olduğundan $T \trianglelefteq N_K(T)$ elde edilir. Dolayısıyla $T \trianglelefteq H$ olması için gerek ve yeter koşul $N_H(T) = H$ olmasıdır. Bu nedenle $N_K(T)$ altgrubuna T nin K deki normalleştiricisi denir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.1.21. Önerme H grup olsun.

- (i) $T \leq Z(H)$ ise $T \trianglelefteq H$ dir. Özellikle, H grubunun merkezi $Z(H)$ normal altgruptur;
- (ii) $T \leq H$ olmak üzere her $a \in H$ için $a^{-1}Ta \subseteq T$ ise, $T \trianglelefteq H$ dir.
- (iii) $\{T_i\}_{i \in I}$ H grubunda normal altgrupların bir ailesi ise, $T = \bigcap_{i \in I} T_i \trianglelefteq H$ dir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

Kanıt. (i) $T \leq H$ olduğu açıktır. $T \trianglelefteq H$ olduğunu göstermek için T altgrubunun tüm eşleniklerinin yalnızca kendisi olduğunu göstermemiz gerekmektedir. $a \in H$ keyfi olsun. $T \leq Z(H)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
 a^{-1}Ta &= \{a^{-1}ba \mid b \in T\} \\
 &= \{(a^{-1}a)b \mid b \in T\} \\
 &= \{eb \mid b \in T\} \\
 &= T
 \end{aligned} \tag{3}$$

bulunur. Böylece $T \trianglelefteq H$ elde edilir. Özellikle $T = Z(H)$ için $Z(H) \trianglelefteq H$ dir.

(ii) $a \in H$ için $a^{-1}Ta \subseteq T$ olsun. $T \trianglelefteq H$ olması için $T \subseteq a^{-1}Ta$ kapsamasını göstermemiz yeterlidir. $t \in T$ keyfi bir eleman olsun. $t = a^{-1}((a^{-1})^{-1}ta^{-1})a$ eşitliği yazılabildiğinden

her $a \in H$ elemanı için $a^{-1}Ta \subseteq T$ olup $(a^{-1})^{-1}ta^{-1} \in T$ dır. Böylece $t = a^{-1}((a^{-1})^{-1}ta^{-1})a \in a^{-1}Ta$ elde edilir.

(iii) $a \in H$ için $T = \bigcap_{i \in I} T_i$ altgrubunun $a^{-1}Ta = \{a^{-1}ta \mid t \in T\}$ eşleniğini alalım. $x \in a^{-1}Ta$ keyfi olmak üzere $x = a^{-1}ta$ olacak şekilde $t \in T = \bigcap_{i \in I} T_i$ vardır. Buradan her $i \in I$ için $t \in T_i \trianglelefteq H$ olup $x = a^{-1}ta \in T_i$ dir. Dolayısıyla $x \in T = \bigcap_{i \in I} T_i$ olup $x \in a^{-1}Ta \subseteq T$ bulunur. (ii) gereği $T \trianglelefteq H$ elde edilir. $\square$

2.1.22. Tanım H bir grup ve $a, b \in H$ olsun. $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab \in H$ elemanına a ile b nin komütatörü denir. $[a, b] = e$ olması için gerek ve yeter koşul $ab = ba$ olmasıdır. O halde, her $x, y \in Z(H)$ için $[x, y] = e$ dir. $T, K \leq H$ olsun. $t \in T$ ve $k \in K$ elemanları için $[t, k] = t^{-1}k^{-1}tk$ komütatörleri tarafından üretilen altgrubu $[T, K]$ ile gösterelim. Her $t \in T$ ve $k \in K$ için $[t, k] = t^{-1}k^{-1}tk \in \langle T, K \rangle$ olduğundan $[T, K] \leq \langle T \cup K \rangle$ olduğu açıktır (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.1.23. Tanım (i) H bir grup, $T \leq H$ olsun. $a \in H$ olmak üzere $aT = \{at : t \in T\}$ kümesine T altgrubunun a elemanına göre sol yan sınıfı denir.

(ii) H bir grup, $T \leq H$ olsun. $a \in H$ olmak üzere $Ta = \{ta : t \in T\}$ kümesine T altgrubunun a elemanına göre sağ yan sınıfı denir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.1.24. Teorem H grup ve $T \leq H$ olmak üzere $a, b \in H$ olsun. Bu takdirde

(i) $aT = bT \Leftrightarrow b^{-1}a \in T$ olmasıdır. ($Ta = Tb \Leftrightarrow ba^{-1} \in T$);

(ii) $aT = bT$ veya $aT \cap bT = \emptyset$ dir. ($Ta = Tb$ veya $Ta \cap Tb = \emptyset$) (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.1.25. Teorem H grup ve $T \leq H$ olsun. Bu takdirde T nin H deki tüm sol yan sınıflarının kümesi ile tüm sağ yan sınıflarının kümesi arasında bire-bir eşleme vardır (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

Kanıt. $L = \{aT \mid a \in H\}$ ve $R = \{Ta \mid a \in H\}$ olsun. Her $aT \in L$ için $f(aT) = Ta^{-1}$ ile tanımlı $f: L \rightarrow R$ dönüşümünü tanımlayalım. $a_1T, a_2T \in L$ için $a_1T = a_2T$ olsun. Teorem 2.1.24 (i) gereği $a_2^{-1}a_1 \in T$ olup $T \leq H$ olduğundan $(a_2^{-1}a_1)^{-1} = a_1^{-1}a_2 \in T$ elde edilir.

Teorem 2.1.24 (i) sağ yan sınıfları için sağlandığından $Ta_2^{-1} = Ta_1^{-1}$ olup f iyi tanımlıdır. $aT, bT \in L$ olmak üzere $f(aT) = f(bT)$ olduğunu kabul edelim. $f(aT) = Ta^{-1} = Tb^{-1} = f(bT)$ olup tekrar Teorem 2.1.24 (i) sağ yan sınıfları için uygulanırsa, $b^{-1}(a^{-1})^{-1} \in T$ olur. Teorem 2.1.24 (i) den $aT = bT$ olup f bire-birdir. Her $Ta \in R$ için $Ta = T(a^{-1})^{-1} = f(a^{-1}T)$ olacak şekilde $a^{-1}T \in L$ mevcut olduğundan f örtendir. Sonuç olarak L ve R kümeleri arasında bire-bir eşleme vardır. $\square$

2.1.26. Tanım H grup ve $T \leq H$ olsun. Teorem 2.1.24 gereği T nin H grubundaki farklı sol yan sınıflarının oluşturduğu kümesinin kardinalitesi, farklı yan sınıflarının oluşturduğu kümenin kardinalitesine eşit olup bu kardinal sayıya T nin H grubundaki indeksi denir ve $[H:T]$ ile gösterilir. $[H:\langle e \rangle] = |H|$ ve $[H:H] = 1$ olduğu açıktır (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.1.27. Teorem H grup ve $T \leq H$ olsun. $T \trianglelefteq H$ olması için gerek ve yeter koşul her $a \in H$ için $aT = Ta$ olmasıdır (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.1.28. Sonuç $T \leq H$ gruplar olsun. $[H:T] = 2$ ise $T \trianglelefteq H$ dir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.1.29. Teorem H grup ve $a \in H$ olsun. Bu takdirde $[H:C_H(a)] = |C_L(a)|$ dir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

H sonlu grup olsun. $\{C_L(a)\}_{a \in H}$ eşlenik sınıflar kümesi H grubunun ayrışımını verdiği için $H = \cup_{a \in H} C_L(a)$ dir. Böylece H sonlu grup olup $|H| = \sum_{a \in H} |C_L(a)|$ eşitliği elde edilir. $a \in Z(H)$ olması için gerek ve yeter koşul $C_L(a) = \{a\}$ olmasıdır. Dolayısıyla $a \in Z(H)$ iken Teorem 2.1.29 gereği $[H:C_H(a)] = |C_L(a)| = 1$ bulunur. Buradan $|H| = |Z(H)| + \sum_{a \notin Z(H)} [H:C_H(a)]$ denklemi elde edilir. Bu denkleme H grubunun (eşlenik) sınıf denklemi adı verilir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.1.30. Teorem $K \leq T \leq H$ gruplar ise $[H:K] = [H:T][T:K]$ dir. Özellikle, verilen indekslerden ikisi sonlu iken diğeri de sonludur (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.1.31. Teorem (Lagrange Teoremi) H grup ve $T \leq H$ olsun. Bu takdirde $|H| = [H:T]|T|$ dir. H sonlu ise, $|T| \mid |H|$ ve $[H:T] = \frac{|H|}{|T|}$ dır (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

Kanıt. Teorem 2.1.30 da $K = \langle e \rangle$ alalım. Bu takdirde $|H| = [H:\langle e \rangle] = [H:T][T:\langle e \rangle] = [H:T]|T|$ elde edilir. $|H|$ sonlu ise, $|T| \mid |H|$ ve $[H:T] = \frac{|H|}{|T|}$ olduğu açıktır. $\square$

2.1.32. Tanım Aşık normal altgruplarından başka normal altgrubu olmayan $H(\neq \{e\})$ grubuna basit grup adı verilir. Dolayısıyla H abel grubunun basit olması için gerek ve yeter koşul H nin öz altgrubunun mevcut olmamasıdır (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.1.33. Tanım H grup ve $T < H$ olsun. $T \subset T' \leq H$ için $T' = H$ ise, T altgrubuna H grubunun maksimal altgrubu denir. Benzer şekilde maksimal normal altgrup tanımı yapılabilir. H grubunun kendisinden farklı $T \trianglelefteq H$ normal altgrubu verilsin. $T \subset T' \trianglelefteq H$ için $T' = H$ ise, T normal altgrubuna H grubunun maksimal normal altgrubu denir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.1.34. Tanım H grubunun normal altgruplarının $\{T_i\}_{1 \leq i \leq n}$ sonlu ailesi için $\{e\} = T_0 \leq T_1 \leq \dots \leq T_n = H$ artan serisinde $\forall 1 \leq i \leq n$ için $T_{i+1}/T_i, H/T_i$ nin minimal normal altgrubu olsun. Bir başka deyişle her i için $T_i < A < T_{i+1}$ olacak şekilde H nin bir A normal altgrubu bulunmasın. Burada her $1 \leq i \leq n-1$ için T_{i+1}/T_i bölüntüsüne H serisinin esas bölüntüsü adı verilir (Isaacs, 1994).

2.1.35. Örnek H grubu için aşağıdakiler denktir.

(i) H basit ve sonlu devirli gruptur.

(ii) H grubunun mertebesi bir asal sayıdır (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.1.36. Örnek Her $p \in \mathbb{P}$ için $(\mathbb{Z}_p, +)$ abel grubu basittir. Ayrıca $(\mathbb{Z}_p, +)$ abel grubunun tek maksimal altgrubu $\langle \bar{0} \rangle$ aşık altgrubudur (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.1.37. Örnek $n \geq 5$ için A_n basittir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.1.38. Tanım H grubunun tüm maksimal altgruplarının kesişimi olan $\Phi(H)$ a Frattini altgrubu, $\frac{H}{\Phi(H)}$ ye H nin Frattini bölüm grubu denir (Gorenstein, 1968).

2.1.39. Tanım $T, K \trianglelefteq H$ olmak üzere $H = TK$ ve $T \cap K = \{e\}$ ise, H grubuna T ve K normal altgruplarının iç direkt çarpımı (toplamsal H grubu için iç direkt toplamı) denir. Buradan H grubunun T ve K normal altgruplarının iç direkt çarpımı olması için gerek ve yeter koşul her $a \in H$ için $a = tk$ olacak şekilde bir tek $t \in T$ ve $k \in K$ eleman çiftinin mevcut olmasıdır (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.1.40. Tanım H grup ve H nin normal altgruplarının $\{T_i\}_{i \in I}$ ailesi verilsin. $H = \langle \cup_{i \in I} T_i \rangle$ ve $j \in I$ için $T_j \cap (\langle \cup_{i \neq j} T_i \rangle) = \{e\}$ ise, H grubuna $\{T_i\}_{i \in I}$ ailesinin iç direkt çarpımı (toplamsal H grubu için iç direkt toplamı) denir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.2. Normal Altgrup ve Bölüm Grubu

2.2.1. Tanım H grup ve $T \trianglelefteq H$ olsun. $\frac{H}{T}$ grubuna H grubunun T normal altgrubuna göre bölüm grubu denir. Burada $\left| \frac{H}{T} \right| = [H:T]$ olduğu açıktır. Ayrıca $\frac{H}{\langle e \rangle}$ ve $\frac{H}{H}$ aşıkâr bölüm gruplarıdır. $|H:\langle e \rangle| = |H|$ ve $[H:H] = 1$ olduğundan bire-bir eşleme yöntemi kullanılarak doğal homomorfizması yardımıyla $\frac{H}{\langle e \rangle}$ grubunun H grubuyla ve $\frac{H}{H}$ grubunun $\langle e \rangle$ grubuyla aynı yapıya sahip olduğu gösterilir. H grubunun aşıkâr bölüm gruplarından farklı olan bölüm gruplarına öz bölüm grubu adı verilir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.2.2. Örnek $p \in \mathbb{P}$ olsun. $\mathbb{Q}$ nun $\mathbb{Z}$ altgrubunu kapsayan $\mathbb{Q}^{(p)} = \{\frac{m}{p^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$ alt kümesinin $(\mathbb{Q}, +)$ abel grubunun altgrubu olduğunu biliyoruz. Bu grubun $\frac{\mathbb{Q}^{(p)}}{\mathbb{Z}}$ bölüm grubunun yapısını belirleyelim. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $c_n = \frac{1}{p^n} + \mathbb{Z}$ olsun. Buradan $pc_1 = 0, pc_2 = c_1, pc_3 = c_2, pc_4 = c_3, \dots$ olduğundan $\langle c_1 \rangle \subseteq \langle c_2 \rangle \subseteq \langle c_3 \rangle \subseteq \dots$ yazılır ve $\cup_{n \in \mathbb{Z}^+} \langle c_n \rangle \leq \frac{\mathbb{Q}^{(p)}}{\mathbb{Z}}$ dir. Ayrıca $\frac{m}{p^n} + \mathbb{Z} \in \frac{\mathbb{Q}^{(p)}}{\mathbb{Z}}$ ise, $m \left(\frac{1}{p^n} + \mathbb{Z} \right) = mc_n \in \langle c_n \rangle$ olup $\{c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\}$ kümesi $\frac{\mathbb{Q}^{(p)}}{\mathbb{Z}}$ grubunu üretir ve buradan $\frac{\mathbb{Q}^{(p)}}{\mathbb{Z}} = \cup_{n \in \mathbb{Z}^+} \langle c_n \rangle$ elde edilir. Burada

$\frac{\mathbb{Q}^{(p)}}{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ ile gösterilir ve Prüfer p -grup olarak adlandırılır (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.2.3. Önerme $T \trianglelefteq H$ olsun. T ve $\frac{H}{T}$ sonlu üretilmiş gruplar ise H sonlu üretilmiştir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

Kanıt. $T = \langle t_1, t_2, \dots, t_n \rangle$ ve $\frac{H}{T} = \langle a_1T, a_2T, \dots, a_mT \rangle$ olmak üzere $a \in H$ elemanı için $aT = (x_1T)^{k_1} (x_2T)^{k_2} \dots (x_rT)^{k_r} = (x_1^{k_1}T) (x_2^{k_2}T) \dots (x_r^{k_r}T) = (x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_r^{k_r}) T$ eşitliğini sağlayan $x_1, x_2, \dots, x_r \in \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, H abel grubu olarak verilmediğinden $a_1, a_2, \dots, a_m$ elemanları kendi aralarında değişmeyeceğinden belirli bir sıraya göre yazamayız ve bundan dolayı bu şekilde kodlama yapılarak yazılması notasyon açısından kolaylık sağlamaktadır. Örneğin; $aT = (a_1T)^2(a_5T)(a_4T)^7$ şeklinde olabilir. Öyle $k_1, k_2, \dots, k_r \in \mathbb{Z}$ için $aT = (x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_r^{k_r})T$ eşitliğinden bir $t \in T$ için $a = (x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_r^{k_r})t$ yazılabilir. Diğer taraftan hipotez gereği T sonlu üretilmiş olup $t = y_1^{c_1} y_2^{c_2} \dots y_u^{c_u}$ olacak şekilde $y_1, y_2, \dots, y_u \in \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ ve $c_1, c_2, \dots, c_u \in \mathbb{Z}$ vardır. Dolayısıyla $a = (x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_r^{k_r})t$ eşitliğinde $t = y_1^{c_1} y_2^{c_2} \dots y_u^{c_u}$ yerine yazılırsa, $a = (x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_r^{k_r})(y_1^{c_1} y_2^{c_2} \dots y_u^{c_u}) = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_r^{k_r} y_1^{c_1} y_2^{c_2} \dots y_u^{c_u} \in \langle x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_u \rangle$ olup $x_1, x_2, \dots, x_r \in \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ ve $y_1, y_2, \dots, y_u \in \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ olduğundan $a \in \langle a_1, a_2, \dots, a_m, t_1, t_2, \dots, t_n \rangle$ elde edilir. Böylece $\langle a_1, a_2, \dots, a_m, t_1, t_2, \dots, t_n \rangle$ dir. Dolayısıyla $H \subseteq \langle a_1, a_2, \dots, a_m, t_1, t_2, \dots, t_n \rangle$ kapsaması sağlanır. Ters kapsama açık olduğundan $H = \langle a_1, a_2, \dots, a_m, t_1, t_2, \dots, t_n \rangle$ bulunur. $\square$

2.2.4. Teorem H grup ve $T \trianglelefteq H$ olsun. Bu takdirde

(i) H grubunun her K altgrubu için $\frac{KT}{T} \leq \frac{H}{T}$ dir;

(ii) $X \leq \frac{H}{T}$ ($X \trianglelefteq \frac{H}{T}$) ise, $X = \frac{K}{T}$ olacak şekilde $T \leq K \leq H$ ($T \leq K \trianglelefteq H$) vardır;

(iii) $\frac{H}{T}$ bölüm grubunun basit olması için gerek ve yeter koşul T normal altgrubunun H grubunun maksimal normal altgrubu olmasıdır;

(iv) H grubunun T normal altgrubunun kapsayan (normal) altgrupları ile $\frac{H}{T}$ bölüm grubunun (normal) altgrupları arasında bire-bir eşleme vardır (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.2.5. Tanım H bir grup T, H nin bir altgrubu olsun.

(i) H nin $h \in H$ keyfi elemanı için $h^{-1}Th$ altgrubunun normal altgrup olması kullanılarak H nin $\bigcap_{h \in H}(h^{-1}Th)$ normal altgrubu elde edilir. H nin $\bigcap_{h \in H}(h^{-1}Th)$ normal altgrubuna T nin H deki özü denir ve T_H ile gösterilir. Tanımdan açıktır ki T_H, T tarafından içerilen H nin en geniş normal altgrubudur.

(ii) H nin $\langle \bigcup_{h \in H}(h^{-1}Th) \rangle$ altgrubuna T nin H deki kapanışı denir ve T^H ile gösterilir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.2.6. Tanım F bir cisim olmak üzere bileşenleri F cisminden katsayıları $n \times n$ tipinde olan $G_L(n, F)$ matrislerdeki çarpma işlemine göre bir grup yapısına sahiptir. Bu gruba genel lineer grup denir (Suprunenko, 1976).

2.3. Cauchy Teoremi ve Sylow Teoremleri

2.3.1. Önerme H abel grubu ve $|H| = n$ olsun. $p \in \mathbb{P}$ olmak üzere $p|n$ ise $|a| = p$ olacak şekilde $a \in H$ vardır (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

Kanıt. $|H| = n$ üzerine tümevarım uygulayalım. $|H| = 2$ ise, H grubunun birimden farklı $x \in H$ mevcut olup $|x| = 2$ dir. H grubunun mertebesi p asal sayısı ise, H grubunun birimden farklı tüm elemanlarının mertebesi Lagrange teoremi gereği p dir. $|H| = r$ ve $2 \leq r < n$ olan her pozitif tamsayısı için iddia doğru olsun. $|H| = n$ ise $e \neq x \in H$ olmak üzere Lagrange teoreminden $|\langle x \rangle| |n|$ olup $|x| \leq |H| = n$ dir. $|x| = m$ olsun. Buradan Lagrange teoremi uygulanırsa $n = |H| = |\langle x \rangle| [H : \langle x \rangle] = m [H : \langle x \rangle]$ olup $p|n$ olduğundan $p|m$ veya $p \nmid m$ dir.

$p|m$ ise, $m = pk$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Bu takdirde $|x| = m$ ve $k < m$ olduğundan $x^k \neq e$ dir ve böylece $x^m = (x^k)^p = e$ olup $|x^k| = p$ bulunur. Dolayısıyla mertebesi p olan $a = x^k \in H$ elde edilir.

$p \nmid m$ ise, $p \mid [H : \langle x \rangle]$ dir. $T = \langle x \rangle$ olsun. H abel grubu olduğundan $T \trianglelefteq H$ dir. Böylece $\left| \frac{H}{T} \right| = [H : T] < n$ olup tümevarım kabulünden $|yT| = p$ olacak şekilde $yT \in \frac{H}{T}$ vardır. Buradan $(yT)^p = y^p T = T$ eşitliğinden $y^p \in T$ olup $y^{pm} = e$ bulunur. $y^{mp} = (y^m)^p = e$ olduğundan $y^m = e$ veya $|y^m| = p$ dir. $y^m = e$ olsa, $(yT)^m = T$ yazılabilir ve böylece $p \nmid m$ olduğundan yT elemanının mertebesinin p olmasıyla çelişir. O halde $y^m \neq e$ olup $|y^m| = p$ elde edilir. Dolayısıyla $a = y^m \in H$ alınırsa istenilen elde edilir. $\square$

2.3.2. Teorem (Cauchy Teoremi) H grup ve $|H| = n$ olsun. $p \in \mathbb{P}$ olmak üzere $p \mid n$ ise, $|a| = p$ olacak şekilde $a \in H$ vardır (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

Kanıt. H abel grubu ise, Önerme 2.3.1 gereği istenilen elde edilir. H değişmeli olmayan grup olsun. n üzerine tümevarım uygulayalım. $n = 2$ iken iddia açıktır. $2 \leq m < n$ ve $|H| = m$ olacak şekildeki her H grubu için iddia doğru olsun. $|H| = n$ için doğruluğunu kanıtlayalım. H değişmeli olmadığından en az bir $a \in H$ için $a \notin Z(H)$ ve bundan dolayı H grubunun eşlenik sınıf denklemi $|H| = |Z(H)| + \sum_{a \notin Z(H)} [H : C_H(a)]$ şeklindedir. Bu durumda $a \notin Z(H)$ olacak şekildeki her $a \in H$ için $[H : C_H(a)] > 1$ olmalıdır. Buradan $n = |H| = |C_H(a)|[H : C_H(a)] > |C_H(a)| > 1$ dir. $p \mid |C_H(a)|$ ise, tümevarım hipotezinden $C_H(a)$ altgrubunda ve dolayısıyla H grubunda p mertebeli bir eleman vardır. $p \nmid |C_H(a)|$ olsun. Bu takdirde, her $a \notin Z(H)$ için $p \mid [H : C_H(a)]$ olup $p \mid |H| - \sum_{a \notin Z(H)} [G : C_H(a)] = |Z(H)|$ bulunur. Burada Önerme 2.3.1 uygulanırsa bir $x \in Z(H)$ için $|x| = p$ elde edilir. $\square$

2.3.3. Teorem H abel grubu için $|H| = n$ olsun. $m \mid n$ ise, $|K| = m$ olacak şekilde $K \leq H$ vardır (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.3.4. Tanım $p \in \mathbb{P}$ ve H grubu verilsin. $T_p(H) = \{a \in H \mid \exists n \geq 0 ; |a| = p^n\} \subseteq H$ alt kümesinin H abel grubu iken bir altgrup yapısına sahip olduğunu biliyoruz. Ancak H abel grubu değilse, $T_p(H)$ kümesi H grubunun altgrubu olmayabilir. $T_p(H) = H$ ise, H grubuna p -grup adı verilir. $T \leq H$ olmak üzere T , p -grup ise yani, T altgrubunun tüm elemanlarının mertebesi p asalının bir kuvveti ise, T altgrubuna H grubunun p -altgrubu denir ve $T \subseteq T_p(H)$ olduğu açıktır. H grubu ve her $p \in \mathbb{P}$ için $e = e^{p^0}$ olduğundan $\{e\}$, p -altgruptur.

Şimdi keyfi verilen H grubunda her p asalına karşılık gelen p -altgruplarının maksimalinin mevcut olduğunu gösterelim. Bu altgrup grupta maksimal altgrup olmak zorunda değildir. H, p -grup ise, H grubunun kendisi p -altgrupların maksimalidir. H, p -grup olmasın ve $\Gamma = \{T < H \mid H \text{ öz } p\text{-alt grup}\}$ kümesi verilsin. $e = e^{p^0}$ olduğundan $\{e\} \in \Gamma$ olup $\Gamma \neq \emptyset$ dir. $(\Gamma, \subseteq)$ kısmi sıralı bir kümedir. Γ_0, Γ kümesinin keyfi bir zinciri yani tam sıralı alt kümesi olmak üzere $X = \bigcup_{T \in \Gamma_0} T$ olsun. Γ_0 zincir olduğundan $X \leq H$ dir. $a \in X$ ise, $X = \bigcup_{T \in \Gamma_0} T$ olduğundan $a \in T_1 \in \Gamma_0$ vardır ve T_1 bir p -altgrup olup $a \in X$ elemanının mertebesi p asalının bir kuvvetidir. O halde X, p -altgruptur. H, p -altgrup olmadığından $X \neq H$ olup $X \in \Gamma$ dir. X alt grubunun Γ_0 kümesinin bir üst sınırı olduğu açıktır. Dolayısıyla Zorn lemması gereği Γ kümesi bir $Y \in \Gamma$ maksimal elemanına sahiptir. H grubunda $Y \leq K < H$ olacak şekilde $K < H$ öz p -alt grubu mevcut olsa, Γ kümesinin tanımı gereği $K \in \Gamma$ olup $Y \in \Gamma$ maksimal eleman olduğundan $Y = K$ elde edilir. O halde Y, p -alt grubu, H grubunda p -altgruplarının maksimalidir. Burada Y alt grubuna H grubunun Sylow p -alt grubu denir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.3.5. Tanım H bir grup, $T \leq H$ olsun. Her $a \in H, x \in T$ için $axa^{-1} \in T$ ise T ye H nin invariant alt grubu denir (Gorenstein, 1968).

2.3.6. Tanım π asal sayıların bir kümesi olsun. H grubundaki bir x elemanı için $|x|$ si π kümesindeki her bir asal sayıya bölünebiliyorsa bu x elemanına π -eleman denir. p bir asal sayı olmak üzere p -eleman tanımı da benzer biçimde verilebilir. Eğer H grubunun mertebesi π kümesindeki asal sayılara bölünebiliyorsa H grubuna π -grup denir (Gorenstein, 1968).

2.3.7. Önerme H, p -grup olsun. H grubunun her alt grubu ve her bölüm grubu p -gruptur. Tersine $T \trianglelefteq H$ olmak üzere T ve $\frac{H}{T}$ p -gruplar ise, H de p -gruptur (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

Kanıt. $K \leq H$ olsun. $a \in K$ ise, $K \leq H$ olduğundan $a \in H$ dir. H p -grup olduğundan $|a| = p^k$ olacak şekilde $0 \leq k \in \mathbb{Z}$ vardır. Dolayısıyla K alt grubunun her elemanının mertebesi p asalının kuvveti olduğundan K p -gruptur. Şimdi $T \trianglelefteq H$ olmak üzere $\frac{H}{T}$ bölüm grubunu ve $aT \in \frac{H}{T}$ alalım. $a \in H$ olduğundan $|a| = p^n$ olacak şekilde $n \geq 0$ tamsayısı

vardır. Burada $(aT)^{p^n} = a^{p^n}T = T$ olup $|aT| = p^k$ olacak şekilde $0 \leq k \leq n$ tamsayısı vardır.

Tersine, $a \in H$ olsun. $\frac{H}{T}$ bölüm grubu p -grup olduğundan $|aT| = p^n$ olacak şekilde $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $(aT)^{p^n} = a^{p^n}T = T$ olup $a^{p^n} \in T$ dir. Hipotez gereği T p -grup $|a^{p^n}| = p^m$ olacak şekilde $m \geq 0$ tamsayısı mevcut olup $a^{p^{n+m}} = e$ elde edilir. Dolayısıyla $a \in H$ elemanının mertebesi p asalının kuvvetidir. Sonuç olarak H p -gruptur. $\square$

2.3.8. Teorem H grup olsun. H grubunun sonlu p -grup olması için gerek ve yeter koşul negatif olmayan $k \in \mathbb{Z}$ için $|H| = p^k$ olmasıdır (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

Kanıt. $(\Rightarrow)$ $|H| = n$ ve $q \neq p$ olacak şekildeki $q \in \mathbb{P}$ için $q|n$ olsun. Bu takdirde Cauchy teoremi gereği $|a| = q$ olacak şekilde $a \in H$ vardır. Bu ise, H grubunun p -grup olmasıyla çelişir. O halde n tamsayısının p asalından başka asal böleni yoktur. Dolayısıyla $|H| = p^k$ dir.

$(\Leftarrow)$ $a \in H$ için $|a| = m$ olsun. Lagrange teoremi gereği $m|p^k$ olup $m = p^u$ olacak şekilde $u \geq 0$ tamsayısı vardır. Sonuç olarak H p -gruptur. $\square$

2.3.9. Sonuç P sonlu bir p -grubu ve $D < P$ olsun. Bu takdirde $D < N_p(D)$ dir (Asar ve diğerleri, 2010).

2.3.10. Teorem $p \in \mathbb{P}$ için $|H| = p^k$ ($k \geq 1$) olan H grubu verilsin. Bu takdirde

(i) $|Z(H)| > 1$ dir;

(ii) $k = 2$ ise, H abel grubudur;

(iii) H değişmeli olmayan grup ve $k = 3$ ise, $|Z(H)| = p$ dir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.3.11. Lemma H sonlu grup olmak üzere T, H nin Sylow p -altgrubu olsun. $a \in T_p(H)$ elemanı için $a^{-1}Ta = T$ ise, $a \in T$ dir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

Kanıt. $a \in T_p(H)$ elemanı için $a^{-1}Ta = T$ ise, $a \in N_H(T)$ olduğu açıktır. $a \in T_p(H)$ olduğundan $|a| = p^t$ olacak şekilde $t \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Bu takdirde $aT \in \frac{N_H(T)}{T}$ elemanının mertebesi $a \in T_p(T)$ elemanının mertebesini böler. Dolayısıyla $\langle aT \rangle$ bir p -gruptur. Bu takdirde $\frac{K}{T} = \langle aT \rangle$ olacak şekilde $T \subseteq K \subseteq N_H(T)$ vardır. T ve $\frac{K}{T} = \langle aT \rangle$ grupları birer p -grup olduğundan Önerme 2.3.7 gereği K p -gruptur. Böylece T alt grubunun Sylow p -alt grubu olmasından dolayı $K = T$ olup $aT = T$ dir. O halde $a \in T$ dir. $\square$

2.3.12. Teorem (Sylow Teoremleri) H sonlu grup olmak üzere $\text{ebob}(p, m) = 1$ koşulunu sağlayan $p \in \mathbb{P}$ ve $m \in \mathbb{Z}^+$ için $|H| = n = p^r m$ olsun. Bu takdirde

(i) $0 \leq k \leq r$ için $|T_k| = p^k$ olacak şekilde $T_k \leq H$ vardır ve $T_k \subseteq T_p(H)$ dir. Özellikle, $0 \leq k < r$ olmak üzere bir $T_k \leq H$ için $\{e\} = T_0 \trianglelefteq T_1 \trianglelefteq T_2 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq T_r$ artan zinciri vardır. Burada $|T_r| = p^r$ olan T_r alt grubu Sylow p -alt grubudur. Ayrıca T_r grubunun eşlenikleri de Sylow p -alt grubudur. H abel grubu ise, $T_p(H)$ tek Sylow p -alt grubudur;

(ii) H grubunun Sylow p -alt grupları eşleniktir;

(iii) H grubunun Sylow p -alt gruplarının sayısı n_p ise, $n_p \mid |H|$ ve $n_p \equiv 1(p)$ dir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.4. Grup Homomorfizmaları

2.4.1. Tanım $(H, *)$ ve $(H_1, *_1)$ birer grup olmak üzere $f: H \rightarrow H_1$ fonksiyon olsun. Her $a, b \in H$ için $f(a * b) = f(a) *_1 f(b)$ ise, f fonksiyonuna grup homomorfizması veya kısaca homomorfizma denir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

$f: H \rightarrow H_1$ bir homomorfizma olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $e \in H$ için $e_1 = f(e) \in f(H) \neq \emptyset$ dir.

(ii) $f(b^{-1}) = f(b)^{-1}$

(iii) $f(ab^{-1}) = f(a)f(b)^{-1} \in f(H)$

2.4.2. *Örnek* H ve H_1 birer grup olmak üzere her $a \in H$ için $f(a) = e_1$ ile tanımlı $f: H \rightarrow H_1$ fonksiyonunu alalım (H grubunun tüm elemanlarını H_1 in birim elemanına taşıyan fonksiyon). Burada $a, b \in H$ elemanları için $f(ab) = e_1 = e_1 e_1 = f(a)f(b)$ olduğundan f homomorfizma olup f ye aşık homomorfizma adı verilir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.4.3. *Örnek* H abel grubu olmak üzere $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ verilsin. Her $a \in H$ için $f(a) = a^n$ ile tanımlı $f: H \rightarrow H$ fonksiyonunu alalım. $a, b \in H$ elemanları için H nin abel grup olması kullanılarak $f(ab) = (ab)^n = a^n b^n = f(a)f(b)$ eşitliği elde edilir. Dolayısıyla f homomorfizma yapısına sahiptir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.4.4. Teorem $f: H \rightarrow H_1$ homomorfizma olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler vardır.

(i) $T \leq H$ ise, $f(T) = \{f(t) | t \in T\} \leq H_1$ dir;

(ii) $T_1 \leq H_1$ ise, $f^{-1}(T_1) = \{h \in H | f(h) \in T_1\} \leq H$ dir. Özellikle $T_1 \trianglelefteq H_1$ ise, $f^{-1}(T_1) \trianglelefteq H$ dir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

Kanıt. (i) $T \leq H$ olsun. $e \in T$ için $e_1 = f(e) \in f(T) \neq \emptyset$ dir. $f(a), f(b) \in f(T)$ keyfi elemanları olsun. Bu takdirde $a, b \in T$ olup $T \leq H$ olduğundan $ab^{-1} \in T$ dir. Böylece $f(ab^{-1}) = f(a)f(b)^{-1} \in f(T)$ olur. Dolayısıyla $f(T) \leq H_1$ dir.

(ii) $f(e) = e_1 \in T_1$ olduğundan $e \in f^{-1}(T_1) \neq \emptyset$ dir. $a, b \in f^{-1}(T_1)$ keyfi elemanlar olsun. Bu takdirde $f(a), f(b) \in f(T_1)$ dir. Buradan $f(ab^{-1}) = f(a)f(b)^{-1} \in T_1$ olduğundan $ab^{-1} \in f^{-1}(T_1)$ olup $f^{-1}(T_1) \leq H$ dir. $T_1 \trianglelefteq H_1$ olduğunu kabul edelim. $h \in H$ için $a \in h^{-1}f^{-1}(T_1)h$ olsun. Bu takdirde $b \in f^{-1}(T_1)$ için $a = h^{-1}bh$ dir. $f(h) \in H_1$ ve $f(b) \in T_1$ olup f homomorfizma ve $T_1 \trianglelefteq H_1$ olduğundan $f(a) = f(h^{-1}bh) = f(h^{-1})f(b)f(h) = f(h)^{-1}f(b)f(h) \in T_1$ olup $a \in f^{-1}(T)$ bulunur ve böylece $h^{-1}f^{-1}(T_1)h \subseteq f^{-1}(T_1)$ sağlanır. Sonuç olarak Önerme 2.4.4 (ii) gereği $f^{-1}(T_1) \trianglelefteq H$ dir. $\square$

2.4.5. Tanım $f(H) = \{f(a) \in H_1 | a \in H\} \leq H_1$ altgrubuna H grubunun f homomorfizması altında homomorfik görüntüsü ve $f^{-1}(\{e_1\}) \trianglelefteq H$ normal altgrubuna f homomorfizmasının

çekirdeği denir ve $\text{çek}(f) = f^{-1}(\{e_1\}) = \{a \in H \mid f(a) = e_1\}$ ile gösterilir. $f: H \rightarrow H_1$ homomorfizma olsun. Bu takdirde aşağıdaki özelliklerin sağlandığı kolayca görülebilir.

(i) H abel grubu ise, $f(H)$ abel grubudur;

(ii) $H = \langle X \rangle$ ise $f(H) = \langle f(X) \rangle$ dir. Özellikle, $H = \langle a \rangle$ iken $f(H) = \langle f(a) \rangle$ dir;

(iii) $a \in H$ için $|a| = n$ ise, $|f(a)| \mid n$ dir.

Bire-bir homomorfizmaya monomorfizma adı verilir. $T \leq H$ gruplar olsun. Her $t \in T$ için $\iota(t) = t$ ile tanımlı $\iota: T \rightarrow H$ dönüşümü monomorfizmadır. Burada ι monomorfizmasına gömme (içerme) homomorfizması denir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.4.6. Önerme $f: H \rightarrow H_1$ homomorfizma olsun. f nin monomorfizma olması için gerek ve yeter koşul $\text{çek}(f) = \{e\}$ olmasıdır (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.4.7. Tanım (i) H basit grup olmak üzere $f: H \rightarrow H_1$ homomorfizma olsun. $\text{çek}(f) \trianglelefteq H$ ve H basit olduğundan $\text{çek}(f) = H$ veya $\text{çek}(f) = \{e\}$ olmalıdır. Bu durumda $\text{çek}(f) = H$ ise, her $a \in H$ için $f(a) = e_1$ olup f aşık homomorfizmadır. $\text{çek}(f) = \{e\}$ ise Önerme 2.4.6 gereği f monomorfizmadır.

(ii) H ve T iki grup olmak üzere $H \times T$ kartezyen çarpımı, $(a, h), (b, k) \in H \times T$ keyfi elemanları için $(a, h) \cdot (b, k) = (ab, hk)$ ile tanımlı işlemine göre birim elemanı (e_H, e_T) ve $(a, h) \in H \times T$ elemanının tersi (a^{-1}, h^{-1}) olan gruptur. $H \times T$ grubuna H ve T gruplarının kartezyen çarpım grubu denir. Burada e_H elemanı H grubunun birimini ve e_T elemanı T grubunun birimini göstermektedir. H ve T grupları abel grup ise, $H \times T$ abel gruptur. Bu durumda kartezyen çarpım grubu $H \oplus T$ notasyonu ile gösterilir.

(iii) I indis kümesi olmak üzere grupların $\{H_i\}_{i \in I}$ ailesi verilsin. $\prod_{i \in I}^w H_i \trianglelefteq \prod_{i \in I} H_i$ dir, gösterelim. $\prod_{i \in I}^w H_i \leq \prod_{i \in I} H_i$ olduğunu bilmekteyiz. $a = (a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} H_i$ keyfi bir eleman olsun. $b = (b_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I}^w H_i$ olmak üzere $k \in \mathbb{N}$ için $b_{i_1} \neq e_{i_1}, b_{i_2} \neq e_{i_2}, \dots, b_{i_k} \neq e_{i_k}$ olsun. Bu takdirde $i_j \neq i_1, i_2, \dots, i_k$ için $b_{i_j} = e_{i_j}$ olup $a_i^{-1} b_{i_j} a_i = a_i^{-1} e_{i_j} a_i = a_i^{-1} a_i = e_i$ dir. $a_{i_1}^{-1} b_{i_1} a_{i_1}, a_{i_2}^{-1} b_{i_2} a_{i_2}, \dots, a_{i_k}^{-1} b_{i_k} a_{i_k}$ elemanları birim veya birimden farklıdır.

Dolayısıyla $a^{-1}ba = (a_i^{-1}b_ia_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I}^w H_i$ olup Önerme 2.1.21 (ii) gereğince $\prod_{i \in I}^w H_i \trianglelefteq \prod_{i \in I} H_i$ bulunur. $\prod_{i \in I}^w H_i$ grubuna $\{H_i\}_{i \in I}$ ailesinin iç direkt çarpım grubu denir.

(iv) H grup ve normal altgruplarının $\{H_i\}_{i \in I}$ ailesi yardımıyla tanımlanan $H = \prod_{i \in I}^w H_i = \{f: I \rightarrow \cup_{i \in I} H_i \mid \text{her } i \in I \text{ için } f(i) \in H_i\} = \{(a_i)_{i \in I} \mid \text{sonlu sayıda } i \in I \text{ için } a_i \neq e_i\}$ iç direkt çarpım grubu için $a_i \in H_i$ keyfi elemanı verilsin. i . bileşeni a_i ve diğer tüm bileşenleri $i \neq j$ için e_j olan H grubunun $(b_i)_{i \in I}$ elemanı için $\iota_i(a_i) = (b_i)_{i \in I}$ ile tanımlı $\iota_i: H_i \rightarrow H$ dönüşümü monomorfizma yapısına sahiptir. ι_i monomorfizmasına i . kanonik injeksiyon adı verilir. Örten homomorfizma epimorfizma olarak adlandırılır (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.4.8. Tanım $\{H_i\}_{i \in I}$ grupların ailesi olmak üzere $H = \prod_{i \in I} H_i$ olsun. Her $k \in I$ için $\pi_k((a_i)_{i \in I}) = a_k$ ile tanımlı $\pi_k: H \rightarrow H_k$ dönüşümü epimorfizma yapısına sahiptir. π_k epimorfizmasına k . kanonik projeksiyon adı verilir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.4.9. Teorem (Eşleme Teoremi) $f: H \rightarrow H_1$ epimorfizma olsun. H nin $\text{çek}(f)$ yi kapsayan maksimal altgrupları ile H_1 in maksimal altgrupları arasında bire-bir eşleme vardır. T ve K , sırasıyla H ve H_1 gruplarının eşlenmiş altgrupları iseler $T \trianglelefteq H \Leftrightarrow K \trianglelefteq H_1$ dir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.4.10. Önerme H grup ve $T \trianglelefteq H$ olsun. Her $a \in H$ için $\eta(a) = aT$ ile tanımlı (toplamsal ise, $\eta(a) = a + T$ ile tanımlı) $\eta: H \rightarrow \frac{H}{T}$ dönüşümü epimorfizmadır ve $\text{çek}(\eta) = T$ dir. Burada η epimorfizmasına doğal homomorfizma denir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

Bire-bir ve örten homomorfizma izomorfizma olarak adlandırılır. $f: H \rightarrow H_1$ izomorfizma ise, H ve H_1 gruplarına izomorftur denir ve $H \cong H_1$ ile gösterilir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.4.11. Örnek Her $n \in \mathbb{Z}$ için $f(n) = 2n$ ile tanımlı $f: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (2\mathbb{Z}, +)$ fonksiyonunu alalım. Her $n, m \in \mathbb{Z}$ için $f(n + m) = 2(n + m) = 2n + 2m = f(n) + f(m)$ olduğundan verilen dönüşüm homomorfizmadır. f nin örten olduğu açıktır. $n \in \text{çek}(f)$ ise,

$f(n) = 2n = 0$ olup $n = 0$ dır. Buradan $\text{çek}(f) = \{0\}$ olup f bire-birdir. Sonuç olarak f izomorfizmadır (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.4.12. Önerme $f: H \rightarrow H_1$ izomorfizma olsun. Bu takdirde, aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $f^{-1}: H_1 \rightarrow H$ izomorfizmadır;

(ii) H abel grubudur $\Leftrightarrow H_1$ abel grubudur;

(iii) Her $a \in H$ için $|a| = |f(a)|$ dir;

(iv) H burulmalı gruptur $\Leftrightarrow H_1$ burulmalı gruptur;

(v) H devirlidir $\Leftrightarrow H_1$ devirlidir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.4.13. Önerme $f: H \rightarrow H_1$ ve $h: H_1 \rightarrow H_2$ homomorfizmalar ise, $hf: H \rightarrow H_2$ homomorfizmadır (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.4.14. Teorem (Homomorfizma Teoremi) $f: H \rightarrow H_1$ epimorfizma olsun. $T \trianglelefteq H$ ve $T \subseteq \text{çek}(f)$ olmak üzere $\eta: H \rightarrow \frac{H}{T}$ doğal homomorfizması verilsin. Bu takdirde $f = h\eta$ olacak şekilde bir tek $t: \frac{H}{T} \rightarrow H_1$ epimorfizması vardır. Ayrıca t homomorfizmasının monomorfizma olması için gerek ve yeter koşul $T = \text{çek}(f)$ olmasıdır (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.4.15. Teorem (Birinci İzomorfizma Teoremi) $f: H \rightarrow H_1$ homomorfizma olsun. Bu takdirde $\frac{H}{\text{çek}(f)} \cong f(H)$ dir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.4.16. Teorem (İkinci İzomorfizma Teoremi) H grup, $T, K \leq H$ ve $K \trianglelefteq H$ olsun. Bu takdirde $\frac{T}{T \cap K} \cong \frac{TK}{K}$ dir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.4.17. Teorem (Üçüncü İzomorfizma Teoremi) H grup olmak üzere $T_1, T_2 \trianglelefteq H$ ve $T_1 \leq T_2$ olsun. Bu takdirde, $\frac{\frac{H}{T_1}}{\frac{T_2}{T_1}} \cong \frac{H}{T_2}$ (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.4.18. Tanım H grup ve $a \in H$ olsun. Her $b \in H$ için $f_a(b) = ab$ ile tanımlı $f_a: H \rightarrow H$ dönüşümünü alalım. $b, c \in H$ olmak üzere $b = c \Leftrightarrow ab = ac \Leftrightarrow f_a(b) = f_a(c)$ olduğundan f_a bire-bir fonksiyondur. Herhangi bir $b \in H$ için $c = a^{-1}b \in H$ vardır ve $f_a(c) = f_a(a^{-1}b) = a(a^{-1}b) = b$ olup f_a örten fonksiyondur. Böylece f_a, H kümesi üzerinde bir permütasyondur. Bu takdirde $T_H = \{f_a \mid a \in H\}$ kümesi H nin tüm permütasyonlarının kümesi olan S_H nin bir alt kümesidir. Her $b \in H$ için $f_{a^{-1}}(b) = a^{-1}b$ ve $f_a(a^{-1}b) = b$ olması $[(f_a)^{-1}](b) = f_{a^{-1}}(b)$ olmasını ifade eder. Böylece $(f_a)^{-1} = f_{a^{-1}} \in T_H$ dir. $f_a, f_b \in T_H$ olmak üzere her $c \in H$ için $(f_a f_b)(c) = f_a(f_b(c)) = f_a(bc) = a(bc) = (ab)c = f_{ab}(c)$ olduğundan $f_a f_b = f_{ab} \in T_H$ dir. $f_a(f_b)^{-1} = f_a f_{b^{-1}} = f_{ab^{-1}} \in T_H$ olup $T_H \leq S_H$ dir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.4.19. Teorem (Cayley Teoremi) H grup olsun. Bu takdirde H grubu $(T_H, \circ)$ grubuna izomorftur (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

Kanıt. $T_H \leq S_H$ dir. Her $a \in H$ için $h(a) = f_a$ ile tanımlı $h: H \rightarrow F_H$ dönüşümünü alalım. $a, b \in H$ verilsin. Her $c \in H$ için $a = b \Leftrightarrow ac = bc \Leftrightarrow f_a(c) = f_b(c) \Leftrightarrow f_a = f_b \Leftrightarrow h(a) = h(b)$ olduğundan h bire-bir fonksiyondur. H nin örten olduğu açıktır. Her $a, b \in H$ için $h(ab) = f_{ab}$ ve $h(a)h(b) = f_a f_b$ dir. Her $c \in H$ için $f_{ab}(c) = (ab)c = a(bc) = f_a(f_b(c)) = (f_a f_b)(c)$ eşitliğinden $h(ab) = f_{ab} = f_a f_b = h(a)h(b)$ bulunur ki bu ise h nin bir homomorfizma olduğunu gösterir. Böylece $H \cong T_H$ elde edilir. $\square$

H grup olsun. $f: H \rightarrow H$ izomorfizmasına H grubunun otomorfizması denir. H grubunun tüm otomorfizmalarının kümesi $Oto(H)$ ile gösterilir ve $I_H \in Oto(H)$ dir. $Oto(H)$ kümesi, fonksiyonların bileşkesi işlemine göre birim elemanı I_H olan bir gruptur. $Oto(H)$ grubuna H grubunun otomorfizmalarının grubu denir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.4.20. Tanım H grup ve $T \leq H$ olsun. Her $f: H \rightarrow H$ homomorfizması için $f(T) \leq T$ ise, T ye H nin tam değişmez altgrubu denir. Özel olarak, her $f \in Oto(H)$ için $f(T) \leq T$ ise, T ye H nin karakteristik altgrubu denir. Her tam değişmez karakteristik altgrubun H nin bir altgrubu olduğu açıktır. T, H nin karakteristik altgrubu ve $f \in Oto(H)$ olsun. $h = f^{-1}$ olmak üzere $h \in Oto(H)$ dir ve böylece hipotez gereği $h(T) \leq T$ elde edilir. $a \in T$ keyfi olsun. $b = h(a) \in h(T) \leq T$ ve $f(b) = a$ olduğundan $a \in f(T)$ olup $T \leq f(T)$ dir. Dolayısıyla $f(T) = T$ eşitliği elde edilir. Bundan dolayı $T \leq H$ altgrubunun karakteristik altgrup olması

için gerek ve yeter koşul her $f \in \text{Oto}(H)$ için $f(T) = T$ olmasıdır (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2021).

2.5. Çözülebilir ve Nilpotent Gruplar

Çözülebilir grup kavramı bir polinomun köklerle çözümlenmesinin sonucu olarak ortaya çıkmıştır. Polinomun köklerle çözülebilirliği bir polinomun Galois grubu adı verilen grubun çözülebilirliğine denk olduğu Sayılar Teorisinden bilinmektedir.

2.5.1. Tanım H bir grup $\{e\} = T_0 \leq T_1 \leq \dots \leq T_n = H$, H nin altgruplarının bir artan zinciri olsun. Eğer her $0 \leq i < n$ için T_i, T_{i+1} içinde normal ise; yani, $\{e\} = T_0 \triangleleft T_1 \triangleleft \dots \triangleleft T_n = H$ ise bu zince H nin alt normal serisi denir. Her T_i ye alt normal serisinin bir terimi ve $\frac{T_{i+1}}{T_i}$ bölüm grubuna alt normal serisinin bir bölüntüsü denir. Birbirinden farklı bölüntülerin sayısına alt normal serinin uzunluğu denir. Eğer her $0 \leq i \leq n$ için $T_i \triangleleft H$ ise seriye normal seri denir.

T, H nin bir altgrubu olsun. Eğer $T = T_0, T_1, \dots, T_n = H$, H nin altgrupları olmak üzere $T = T_0 \triangleleft T_1 \triangleleft \dots \triangleleft T_n = H$ ise T ye H nin bir alt normal altgrubu denir. Ayrıca her normal altgrup bir alt normal serinin terimidir (Asar ve diğerleri, 2010).

2.5.2. Tanım (i) H bir grup ve $T = T_0 \triangleleft T_1 \triangleleft \dots \triangleleft T_n = H$ H nin bir alt normal serisi olsun. Eğer her $0 \leq i < n$ için $\frac{T_{i+1}}{T_i}$ bölüm grubu abel ise H ye bir çözülebilir grup, bu seriye de çözülebilir seri denir. Her abel grup çözülebilirdir (Asar ve diğerleri, 2010).

(ii) $H = H_0 > H_1 > \dots > H_n = \langle e \rangle$ bir alt normal serisi, her bir $\frac{H_i}{H_{i+1}}$ bölüntüsü basitse bileşim serisidir (Hungerford, 2000).

2.5.3. Örnek $\mathbb{Z}$ abel grubunun bir normal serisi $\{0\} \triangleleft 6\mathbb{Z} \triangleleft 3\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}$ dir. $\mathbb{Z}$ nin tüm altgrupları $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $n\mathbb{Z} = \langle n \rangle$ devirli gruplarıdır. $\mathbb{Z}$ abel grup olduğundan tüm altgrupları $n\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}$ dir. $n\mathbb{Z}, m\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ olsun. $n\mathbb{Z} \leq m\mathbb{Z} \Leftrightarrow m/n$ olmasıdır (Asar ve diğerleri, 2010).

2.5.4. Örnek $I_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ için $S_4 = \{(1), (12), (13), (14), \dots, (1234)\}$ simetrik grubunun $A_4 = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (124), (134), (132), (142), (143),$

$(234), (243)\}$ alterne grubu ve $K_4 = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ Klein 4-altgrubu için S_4 grubunun iki alt normal serisi $\{1\} \triangleleft K_4 \triangleleft A_4 \triangleleft S_4$ ve $\{1\} \triangleleft \langle (1,3)(2,4) \rangle \triangleleft K_4 \triangleleft A_4 \triangleleft S_4$ tür. Burada $\frac{K_4}{\{1\}}$ devirli değildir. Birinci seri normal seri fakat ikinci seri normal seri değildir. Çünkü K_4 ve A_4, S_4 te normal olmasına karşın $\langle (1,3)(2,4) \rangle, S_4$ te normal değildir (Asar ve diğerleri, 2010).

2.5.5. *Örnek* $n \leq 4$ için S_n çözülebilirdir. S_1 ve S_2 abel olduğundan çözülebilirdir. S_3 ün bir normal serisi $\{1\} \triangleleft A_3 \triangleleft S_3$ tür. Burada $\frac{A_3}{\{1\}}$ ile $\frac{S_3}{A_3}$ bölüm grubu abel olduğundan S_3 çözülebilirdir. S_4 ün bir normal serisi $\{1\} \triangleleft K_4 \triangleleft A_4 \triangleleft S_4$ tür. Açıkça görüldüğü gibi $\frac{K_4}{\{1\}}, \frac{A_4}{K_4}, \frac{S_4}{A_4}$ bölüm grupları abel olduğundan S_4 çözülebilirdir (Asar ve diğerleri, 2010).

2.5.6. Teorem H bir çözülebilir grup olsun. H nin her altgrubu ve her bölüm grubu çözülebilirdir (Asar ve diğerleri, 2010).

Kanıt. H çözülebilir olduğundan H nin öyle bir alt normal serisi $\{e\} = T_0 \triangleleft T_1 \triangleleft \dots \triangleleft T_n = H$ vardır ki, her $0 \leq i < n$ için $\frac{T_{i+1}}{T_i}$ abeldir. K, H nin bir altgrubu olsun. Her $0 \leq i < n$ için $K_i = K \cap T_i$ olsun. $K_i \triangleleft K_{i+1}$ olduğundan $\{e\} = K_0 \triangleleft K_1 \triangleleft \dots \triangleleft K_n = K$, K nin bir alt normal serisidir. $1 \leq i < n$ 2. İzomorfizma teoreminden

$$\frac{K_{i+1}}{K_i} = \frac{K \cap T_{i+1}}{(K \cap T_i) \cap T_{i+1}} = \frac{K \cap T_{i+1}}{T_i \cap (K \cap T_{i+1})} = \frac{T_i(K \cap T_{i+1})}{T_i} \quad (4)$$

dir. En sağdaki bölüm grubu $\frac{T_{i+1}}{T_i}$ nin altgrubu olduğundan abeldir. Böylece $\frac{K_{i+1}}{K_i}$ abeldir. O halde K çözülebilirdir. N, H nin bir normal altgrubu olsun. Her $1 \leq i < n$ için $T_i \triangleleft T_{i+1}$ olduğundan $NT_i \triangleleft NT_{i+1}$ dir. Bu durumda $\frac{NT_i}{N} \triangleleft \frac{NT_{i+1}}{N}$ olduğundan $\frac{H}{N}$ nin $\frac{N}{N} \triangleleft \frac{NT_1}{N} \triangleleft \dots \triangleleft \frac{NT_n}{N} = \frac{H}{N}$ alt normal serisi elde edilir. Şimdi $1 \leq i < n$ olsun. 3. İzomorfizma teoreminden

$$\frac{\frac{NT_{i+1}}{N}}{\frac{NT_i}{N}} \cong \frac{NT_{i+1}}{NT_i} \quad (5)$$

ve 2. İzomorfizma teoreminden

$$\frac{NT_{i+1}}{NT_i} = \frac{(NT_i)T_{i+1}}{NT_i} \cong \frac{T_{i+1}}{NT_i \cap T_{i+1}} \quad (6)$$

dir. Modüler kuraldan dolayı $NT_i \cap T_{i+1} = T_i(N \cap T_{i+1})$ olduğundan

$$\frac{T_{i+1}}{NT_i \cap T_{i+1}} = \frac{T_{i+1}}{T_i(N \cap T_{i+1})} \cong \frac{\frac{T_{i+1}}{T_i}}{\frac{T_i(N \cap T_{i+1})}{T_i}} \quad (7)$$

elde edilir. En sağdaki bölüm grubu $\frac{T_{i+1}}{T_i}$ nin bölüm grubu olduğundan abeldir. Dolayısıyla

$$\frac{\frac{NT_{i+1}}{N}}{\frac{NT_i}{N}} \quad (8)$$

abeldir ve $\frac{H}{N}$ çözülebilirdir. □

2.5.7. *Sonuç* $n \geq 5$ olsun. O zaman S_n çözülebilir değildir (Asar ve diğerleri, 2010).

Kanıt. Kabul edelim ki S_n çözülebilir olsun. O zaman bir önceki teoremden dolayı A_n çözülebilirdir. A_n nin çözülebilir serisi $\{e\} = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_n = A_n$ olsun. Burada her $0 < i \leq n$ için $\frac{H_i}{H_{i-1}}$ abeldir. $A_n \neq \{1\}$ olduğundan öyle bir $0 < i \leq n$ vardır ki $H_{i-1} < A_n$ fakat $H_i = A_n$ dir. O zaman $H_{i-1} \triangleleft A_n$ ve $\frac{A_n}{H_{i-1}}$ abeldir. Fakat $n \geq 5$ için A_n alterne altgrubu basit olduğundan $H_{i-1} = \{e\}$ olmalıdır. Dolayısıyla S_n çözülebilir değildir. □

2.5.8. *Teorem* H bir grup ve $N \triangleleft H$ olsun. N ve $\frac{H}{N}$ çözülebilir grupları için H çözülebilir gruptur (Asar ve diğerleri, 2010).

Kanıt. $\frac{H}{N}$ nin bölüntüleri abel olan bir alt normal serisi $\frac{N}{N} = K_0 \triangleleft K_1 \triangleleft \dots \triangleleft K_r = \frac{H}{N}$ olsun. $\mu: H \rightarrow \frac{H}{N}$ doğal homomorfizma olmak üzere her $0 \leq i \leq r$ için $\mu^{-1}(K_i) = T_i$ olsun. Teorem 2.4.4. (ii) den her T_i, T_{i+1} in bir altgrubudur. Burada $\mu(T_i) = \{tN: t \in T_i\} = \frac{T_i}{N}$ olduğundan $\frac{T_i}{N} = K_i$ ve benzer biçimde $\frac{T_{i+1}}{N} = K_{i+1}$ dir. Böylece $\frac{T_i}{N} \triangleleft \frac{T_{i+1}}{N}$ olduğundan $T_i \triangleleft T_{i+1}$ elde edilir. O halde H nin $\{e\} \triangleleft N = T_0 \triangleleft T_1 \triangleleft \dots \triangleleft T_r = H \dots (1)$ alt normal serisi elde edilir. Şimdi izomorfizma teoreminden dolayı

$$\frac{T_{i+1}}{T_i} \cong \frac{\frac{T_{i+1}}{N}}{\frac{T_i}{N}} = \frac{K_{i+1}}{K_i} \quad (9)$$

olduğundan $\frac{T_{i+1}}{T_i}$ abeldir. Öte yandan N çözülebilir olduğundan N nin bölüntüleri abel olan bir alt normal serisi $\{e\} = N_0 \triangleleft N_1 \triangleleft \dots \triangleleft N_s = N \dots (2)$ vardır. (1) ve (2) birleştirilirse $\{e\} = N_0 \triangleleft N_1 \triangleleft \dots \triangleleft N_s = T_0 \triangleleft T_1 \triangleleft \dots \triangleleft T_r = H$ alt normal serisi elde edilir. Bu serinin her bölüntüsü ya $\frac{N_{i+1}}{N_i}$ ya da $\frac{T_{i+1}}{T_i}$ olduğundan bu bölüntüler abeldir. Dolayısıyla H çözülebilirdir. $\square$

2.5.9. Tanım H bir grup $a, b \in H$ olsun.

(i) $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ elemanına a ile b nin komütatörü denir.

(ii) $[H, H] = \langle [a, b]: a, b \in H \rangle$ grubuna H nin komütatör altgrubu denir ve H' ile gösterilir (Asar ve diğerleri, 2010).

2.5.10. Teorem H bir grup olsun. Aşağıdakiler sağlanır.

(i) $H' \triangleleft H$ dir.

(ii) $\frac{H}{H'}$ abeldir (Asar ve diğerleri, 2010).

Kanıt. (i) $[a, b] \in H'$ ve $h \in H$ olsun.

$$\begin{aligned}
h^{-1}[a, b]h &= h^{-1}(a^{-1}b^{-1}ab)h = h^{-1}a^{-1}eb^{-1}eae bh \\
&= (h^{-1}a^{-1}h)(h^{-1}b^{-1}h)(h^{-1}ah)(h^{-1}bh) \\
&= (h^{-1}ah)^{-1}(h^{-1}bh)^{-1}(h^{-1}ah)(h^{-1}bh) \\
&= [h^{-1}ah, h^{-1}bh] \in H'
\end{aligned} \tag{10}$$

olduğundan $h^{-1}[a, b]h \in H'$ ve böylece $H' \triangleleft H$ dir.

(ii) $aH', bH' \in \frac{H}{H'}$ olsun. O halde $[b, a] \in H'$ olduğundan $aH' bH' = abH' = ab(b^{-1}a^{-1}ba)H' = baH' = bH' aH'$ eşitliği sağlanır. Böylece $\frac{H}{H'}$ abeldir. $\square$

2.5.11. Tanım H bir grup olsun. Tümevarım yöntemiyle her $k \geq 0$ için H nin aşağıdaki altgrupları tanımlansın.

$H^{(0)} = H$ ve her $k \geq 0$ için $H^{(k+1)} = (H^{(k)})'$ olsun. Buradan H nin altgruplarının $H = H^{(0)} \geq H^{(1)} \geq \dots \geq H^{(k)} \geq H^{(k+1)} \dots$ azalan zinciri elde edilir. Buna H nin komütatör zinciri ve her $k \geq 0$ için $H^{(k)}$ ya H nin k -yıncı komütatör altgrubu denir.

Özel olarak $H^{(1)} = H'$ dir. Kolayca görüldüğü gibi $H^{(k)} \triangleleft H$ ve $\frac{H^{(k)}}{H^{(k+1)}}$ abeldir. Çoğunlukla $H^{(1)} = H', H^{(2)} = H''$ ve $H^{(3)} = H'''$ ile gösterilir. Eğer bir grubun komütatör zinciri $\{e\}$ ye ulaşırsa o zaman bu zincire o grubun komütatör serisi denir (Asar ve diğerleri, 2010).

2.5.12. Teorem H bir grup olsun. H nin çözülebilir olması için gerek ve yeter şart $H^{(n)} = \{e\}$ olacak biçimde bir n doğal sayısının olmasıdır (Asar ve diğerleri, 2010).

Kanıt. H çözülebilir olsun. Bu takdirde H nin bir $\{e\} = T_0 \triangleleft T_1 \triangleleft \dots \triangleleft T_n = H$ alt normal serisi vardır. Burada her $0 \leq k < n$ için $\frac{T_{k+1}}{T_k}$ abel olduğu açıktır. k üzerine tümevarımla her $0 \leq k \leq n$ için $H^{(k)} \leq T_{n-k}$ olduğunu göstermek yeterlidir. $k = 0$ için $H^{(0)} = H = T_n$ dir. Şimdi $k \geq 0$ için iddia doğru olsun; yani $H^{(k)} \leq T_{n-k}$ olsun. $H^{(k+1)} = [H^{(k)}, H^{(k)}] \leq [T_{n-k}, T_{n-k}] = (T_{n-k})' \leq T_{n-k-1}$ iken $H^{(k+1)} \leq T_{n-(k+1)}$ sağlansın. Şimdi $k = n$ için $H^{(n)} \leq T_{n-n} = T_0 = \{e\}$ olduğundan $H^{(n)} = \{e\}$ dir. Tersine $H^{(n)} = \{e\}$ olsun. $\{e\} = H^{(n)} \triangleleft H^{(n-1)} \triangleleft \dots \triangleleft H^{(0)} = H$, H nin bir normal serisidir. Ayrıca

her $0 \leq k < n$ için $H^{(k+1)} = [H^{(k)}, H^{(k)}] = (H^{(k)})'$ olduğundan bir önceki teoremden $\frac{H^{(k)}}{H^{(k+1)}} = \frac{H^{(k)}}{(H^{(k)})'}$ abeldir. Dolayısıyla H çözülebilirdir. $\square$

2.5.13. Tanım H bir çözülebilir grup olsun. $H^{(n)} = \{e\}$ şartını sağlayan n doğal sayılarının en küçüğüne H nin çözülebilir (komütatör) uzunluğu denir. Böylece $H = \{e\}$ ise çözülebilirlik uzunluğu 0 ve $H \neq \{e\}$ abel ise çözülebilirlik uzunluğu 1 dir. H abel ise $\forall a, b \in H$ için $ab = ba$ eşitliğinden $a^{-1}b^{-1}ab = e$ sağlanır. $[a, b] = e$ iken $H' = e$ olup $H^{(1)} = e = 1$ dir (Asar ve diğerleri, 2010).

2.5.14. Teorem p, q asal sayılar $m \geq 0$ bir tamsayı olsun. O zaman mertebesi p^m ya da $p^m q$ olan bir grup çözülebilirdir (Asar ve diğerleri, 2010).

Kanıt. (i) H bir grup ve $|H| = p^m$ olsun. m üzerine tümevarım uygulayalım. $m = 0$ için iddia doğrudur. Öyleyse $m > 0$ olsun. O zaman $Z(H) \neq \{e\}$ olduğundan $|\frac{H}{Z(H)}| < |H|$ dir. Şimdi $Z(H)$ abel ve tümevarımdan dolayı $\frac{H}{Z(H)}$ çözülebilir olduğundan Teorem 2.5.8 den H çözülebilirdir.

(ii) H bir grup ve $|H| = p^m q$ olsun. m üzerine tümevarım uygulayalım. $m = 0$ için H devirli olduğundan çözülebilirdir. Öyleyse $m > 0$ ve iddia mertebesi $p^k q < p^m q$ olan gruplar için doğru olsun. (i) den dolayı $p \neq q$ alınabilir. Eğer $n_p = 1$ ise H nin bir Sylow p -altgrubu normal olacağından (i) ve Teorem 2.5.8 den dolayı H çözülebilirdir. Öyleyse $n_p > 1$ olsun. Teorem 2.3.12 (iii) den $n_p |p^m q$ ve $n_p \equiv 1 \pmod{p}$ olduğundan $n_p = q$ dur. H nin birbirinden farklı öyle iki Sylow p -altgrubu P_1, P_2 vardır ki, $D = P_1 \cap P_2$ nin mertebesi maksimumdur. $D = \{e\}$ olsun. H nin herhangi iki Sylow p -altgrubunun arakesiti $\{e\}$ olduğundan H nin mertebesi p nin pozitif kuvveti olan elemanlarının sayısı $q(p^m - 1) = qp^m - q$ dur. Bu durumda $|H| = p^m q$ olduğundan $n_q = 1$ ve H nin bir Sylow q -altgrubu normal olur. H nin tek türlü biçimde belirli olan çözülebilir altgrubuna N diyelim. $|N| = q$ asal olduğundan devirlidir. Devirli olan her grup çözülebilir olduğundan N çözülebilirdir. Diğer taraftan $|\frac{H}{N}| = \frac{p^m q}{q} = p^m$ olup (i) şikkından çözülebilirdir. Teorem 2.5.8 gereğince çözülebilirdir. $D \neq \{e\}$ olsun. $|D| = p^k$ olacak şekilde $k \geq 1$ tamsayısı vardır. $D \triangleleft H$ olsun. $|\frac{H}{D}| = \frac{|H|}{|D|} = \frac{p^m q}{p^k} = p^{m-k} q < |H|$ olduğundan tümevarım kabulünden

$\frac{H}{D}$ çözülebilirdir. Ayrıca (i) den dolayı D çözülebilir olduğundan Teorem 2.5.8 den dolayı H çözülebilirdir. Şimdi D, H de normal olmasın. $N = N_H(D)$ ve $i = 1, 2$ olmak üzere $T_i = N_{P_i}(D)$ olsun Sonuç 2.3.9 dan dolayı $D \neq T_i$ dir. $\langle T_1, T_2 \rangle \leq N$ olduğu açıktır. $\langle T_1, T_2 \rangle = \langle N_{P_1}(D), N_{P_2}(D) \rangle \leq N_H(D) = N$.

Eğer N bir p -grup olsa H nin bir Sylow p -altgrubu P tarafından içerilir ve $P \neq P_1$ dir. Fakat $D < T_1 \leq P \cap P_1$ olduğundan bir çelişki elde edilir. Dolayısıyla N bir p -grup değildir. $|N| \mid |H|$ olduğundan $q \mid |N|$ olmalıdır. N nin bir Sylow q -altgrubu Q olsun.

$$|P_1 Q| = \frac{|P_1| |Q|}{|P_1 \cap Q|} = \frac{p^m q}{1} = p^m q = |H| \quad (11)$$

olduğundan $P_1 Q = H$ dir. Benzer şekilde $P_2 Q = H$ dir. $N < H$ olduğundan $hN \in \frac{H}{N}$ vardır. $h = ac = bd$ olacak şekilde $a \in P_1, b \in P_2, c, d \in Q$ vardır. Şimdi

$$\begin{aligned} h^{-1} D h &= (ac)^{-1} D (ac) \\ &= (c^{-1} a^{-1}) D (ac) \\ &= c^{-1} (a^{-1} D a) c \\ &= a^{-1} D a \leq P_1 \end{aligned} \quad (12)$$

ve benzer şekilde $h^{-1} D h \leq P_2$ olduğundan $\langle D, h^{-1} D h \rangle \leq P_1 \cap P_2 = D$ olur ki, $h^{-1} D h \neq D$ olduğundan bu bir çelişkidir. $\square$

2.5.15. Tanım H bir grup olsun. Tümevarım yöntemiyle her $k \geq 0$ için H nin $Z_k(H)$ altgrubu: $Z_0(H) = \{e\}$ ve her $k \geq 0$ için $Z_{k+1}(H), Z_k(H)$ yi içeren ve

$$\frac{Z_{k+1}(H)}{Z_k(H)} = Z\left(\frac{H}{Z_k(H)}\right) \quad (13)$$

eşitliğini sağlayan bir altgrup olsun. $Z_{k+1}(H), Z(\frac{H}{Z_k(H)})$ nin doğal homomorfizmaya göre H içindeki ters görüntüsüdür ve $Z_k(H)$ yi içerir. Böylece H nin altgruplarının $\{e\} = Z_0(H) \leq Z_1(H) \leq Z_2(H) \leq \dots$ artan zinciri elde edilir. Buna H nin yukarı merkez

zinciri ve $Z_k(H)$ ye H nin k -yıncı merkezi denir. Özel olarak, $Z_1(H) = Z(H)$, H nin merkezidir. Bir H grubunun yukarı merkez zinciri H ye ulaşırsa bu zincire H nin yukarı merkez serisi denir. Yukarı merkez serisi sonlu olan gruplar çözülebilir grupların nilpotent gruplar denilen ve sonlu p -gruplarını da içine alan çok önemli bir alt sınıfını oluşturmaktadır (Asar ve diğerleri, 2010).

2.5.16. Teorem Her $k \geq 0$ için $Z_k(H) \triangleleft H$ dir (Asar ve diğerleri, 2010).

Kanıt. k üzerine tümevarım uygulayabiliriz. $k = 0$ için $Z_0(H) = \{e\} \triangleleft H$ dir. Şimdi $k \geq 0$ için iddia doğru olsun. $k + 1$ için doğruluğunu gösterelim. $y \in Z_{k+1}(H)$ ve $h \in H$ olsun. Buradan $yZ_k(H) \in Z(\frac{H}{Z_k(H)})$ için $(hZ_k(H))^{-1}(yZ_k(H))(hZ_k(H)) = yZ_k(H)$ bulunur. Böylece $(h^{-1}yh)Z_k(H) = yZ_k(H)$ elde edilir. Dolayısıyla $h^{-1}yh = yt$ olacak biçimde $t \in Z_k(H)$ vardır. Üstelik $Z_k(H) \leq Z_{k+1}(H)$ olduğundan $h^{-1}yh \in Z_{k+1}(H)$ dir. Sonuç olarak $Z_{k+1}(H) \triangleleft H$ dir. $\square$

2.5.17. Tanım H bir grup olsun. Eğer $n \geq 0$ için $Z_n(H) = H$ ise H ye bir nilpotent grup denir. Bu eşitliği sağlayan n sayılarının en küçüğüne H nin nilpotentlik sınıfı denir (Asar ve diğerleri, 2010).

2.5.18. Uyarı Her abel grup nilpotenttir. Ayrıca her nilpotent grup çözülebilirdir. Gerçekten H nilpotent ise bir $n \geq 0$ için $\{e\} = Z_0(H) \triangleleft Z_1(H) \triangleleft \dots \triangleleft Z_n(H) = H$ ve her $0 \leq i < n$ için $\frac{Z_{i+1}(H)}{Z_i(H)}$ abel olduğundan H çözülebilirdir. Bunun karşısı doğru değildir; çünkü S_3 çözülebilirdir fakat $Z(S_3) = \{(1)\}$ olduğundan nilpotent değildir. Tanımdan görüldüğü gibi, birim grubun nilpotentlik sınıfı 0 ve birimden farklı bir abel grubun nilpotentlik sınıfı 1 dir (Asar ve diğerleri, 2010).

2.5.19. Teorem H , mertebesi p^n olan bir p -grubu olsun. O zaman H nilpotenttir. Eğer $n \geq 2$ ise H nin nilpotentlik sınıfı en çok $n - 1$ dir (Asar ve diğerleri, 2010).

Kanıt. Önce H nin nilpotent olduğunu gösterelim. Eğer $n = 0$ ise $H = \{e\}$ nilpotenttir. Öyleyse $n \geq 1$ olsun. Kabul edelim ki bir $k \geq 1$ için $Z_k(H) < H$ olsun. H p -grup olduğundan $Z(H) \neq \{e\}$ dir. Böylece $|\frac{Z(H)}{Z_k(H)}| > 1$ olmalıdır. Buradan $|\frac{Z(H)}{Z_k(H)}| \geq p$ dir. Bu

ise, $\left| \frac{Z_{k+1}(H)}{Z_k(H)} \right| \geq p$ iken $|Z_{k+1}(H)| > |Z_k(H)|$ olmasını gerektirir. Benzer şekilde devam edilerek $|H| = p^n$ iken bir $c \leq n$ için $Z_c(H) = H$ olduğu ve böylece H nin nilpotent olduğu görülür. Şimdi $n \geq 2$ olsun. Mümkünse H nin nilpotentlik sınıfı n olsun. O zaman her $1 \leq k \leq n$ için $|Z_k(H)| = p^k$ olmalıdır. Özel olarak, $|Z_{n-2}(H)| = p^{n-2}$ olur. Bu durumda $\left| \frac{H}{Z_{n-2}(H)} \right| = p^2$ bulunur. p^2 mertebeli gruplar abel olduğundan dolayı $\frac{H}{Z_{n-2}(H)}$ abeldir ve böylece $Z_{n-1}(H) = H$ olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla H nin nilpotentlik sınıfı $n - 1$ den küçük veya eşittir. $\square$

2.5.20. Teorem H bir sonlu grup ve T ile K , H nin normal altgrupları olmak üzere $H = TK$ olsun. Eğer T ve K nilpotent ise H nilpotenttir (Asar ve diğerleri, 2010).

Kanıt. T ve K nin nilpotentlik sınıfları sırasıyla m ve n olsun. $\{e\} = Z_0(T) \triangleleft Z_1(T) \triangleleft \dots \triangleleft Z_m(T) = T$, $\{e\} = Z_0(K) \triangleleft Z_1(K) \triangleleft \dots \triangleleft Z_n(K) = K$ dır. Genelliği bozmadan $m \leq n$ alınabilir. Şimdi her $i \geq 0$ için $T_i(H) = Z_i(T)Z_i(K) = Z_i(T) \times Z_i(K)$ olsun. Burada $i \geq m$ için $T_i(H) = Z_m(T)Z_i(K)$ dır. $Z_i(T)$, $Z_i(K)$ nin H nin i . yukarı merkez terimi olduğunu gösterelim. $i = 0$ için iddia açıktır. $i > 0$ için iddia doğru olsun. Şimdi iddianın $i + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. $[T, K] = \{e\}$ olduğundan ve $K \triangleleft H$, $T \triangleleft H$ ve $T \cap K = \{e\}$ ise her $t \in T$ ve $k \in K$ için $tk = kt$ olduğundan $[Z_{i+1}(T), TK] = [Z_{i+1}(T), T] \leq Z_i(T) \leq Z_i(H)$ bulunur. Benzer biçimde $[Z_{i+1}(K), TK] \leq Z_i(H)$ olup $T_{i+1}(H) \leq Z_{i+1}(H)$ dir. Şimdi $z \in Z_{i+1}(H)$ olsun. $z = tk$ olacak biçimde $t \in T$ ve $k \in K$ vardır. $x \in T$ olsun. $[t, x] = [z, x] \in Z_i(H) \cap T = (Z_i(T) Z_i(K)) \cap T = Z_i(T) Z_i(K \cap T) = Z_i(T)$ eşitliğinden $[t, x] \in Z_i(T)$ bulunur. Bu ise $t \in Z_{i+1}(T)$ olduğunu gösterir. Benzer biçimde $k \in Z_{i+1}(K)$ dır. Dolayısıyla $z = tk \in T_{i+1}(H)$ ve buradan $Z_{i+1}(H) \leq T_{i+1}(H)$ dir. Böylece $Z_{i+1}(H) = T_{i+1}(H)$ olduğundan iddia gerçekleşir. Sonuç olarak $i = n$ için $Z_n(H) = T_n(H) = Z_n(T)Z_n(K) = TK = H$ olduğundan H nilpotenttir. $\square$

2.5.21. Teorem H bir sonlu grup olsun. Aşağıdakiler denktir.

(i) H nilpotenttir.

(ii) T, H nin bir öz normal altgrubu ise $T < N_H(T)$ dır.

(iii) H Sylow p -altgruplarının direkt çarpımına izomorftur (Asar ve diğerleri, 2010).

Kanıt. (i) $\Rightarrow$ (ii) T, H nin bir öz normal altgrubu olsun. H nilpotent olduğundan öyle bir $n \geq 0$ tamsayısı için $\{e\} = Z_0(H) \triangleleft Z_1(H) \triangleleft \dots \triangleleft Z_n(H) = H$ dir. $T \neq H$ olduğundan öyle bir $0 \leq k < n$ vardır ki, $Z_k(H) \leq T$ iken $Z_{k+1}(H) \not\leq T$ dir. $h \in Z_{k+1}(H) \setminus T$ ve $t \in T$ iken $hZ_k(H) \in \frac{Z_{k+1}(H)}{Z_k(H)} = Z(\frac{H}{Z_k(H)})$ olduğundan $(hZ_k(H))^{-1}(tZ_k(H))(hZ_k(H)) = tZ_k(H)$ ve buradan $(h^{-1}th)Z_k(H) = tZ_k(H)$ sağlanır. Dolayısıyla $h^{-1}th = tz$ olacak biçimde $z \in Z_k(H)$ vardır. Ayrıca $Z_k(H) \leq T$ olduğundan $h^{-1}th \in T$ dir. Böylece $h^{-1}Th \leq T$ olur. Ayrıca T sonlu olduğundan $h^{-1}Th = T$ ve buradan $h \in N_H(T)$ dir. Üstelik $h \notin T$ için $T < N_H(T)$ dir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) P, H nin bir Sylow p -altgrubu olsun. P nin H nin normal altgrubu olduğunu gösterelim. $K = N_H(P)$ olsun. Böylece $P \triangleleft K$ dir. Eğer $K < H$ ise kabul gereğince $N_H(K) > K$ olur ki bu durum $N_H(N_H(P)) = N_H(P)$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $K = H$ ve $P \triangleleft H$ dir. H sonlu olduğundan $p_1, p_2, \dots, p_t$ birbirinden farklı asal sayılar ve $s_1, s_2, \dots, s_t$ pozitif tamsayılar olmak üzere $|H| = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_t^{s_t}$ dir. Her $1 \leq i \leq t$ için H nin Sylow p_i -altgrubu P_i olsun. $|P_i| = p_i^{s_i}$ dir. İlk olarak $H = P_1 P_2 \dots P_t$ olduğunu gösterelim. $T = P_1 P_2 \dots P_t$ diyelim. Her $1 \leq i \leq t$ için $P_i \triangleleft H$ olduğundan T, H nin bir normal alt grubudur. Her $1 \leq i \leq t$ için $|P_i| = p_i^{s_i}$ olup T, H nin bir altgrubu olduğundan T nin mertebesi H nin mertebesini böler dolayısıyla $p_i^{s_i} \mid |T|$ dir. Ayrıca $(p_1^{s_1}, p_2^{s_2}, \dots, p_t^{s_t}) = 1$ ve $|H| = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_t^{s_t}$ olduğundan $T = H$ dir. $1 \leq i \leq t$ olan her $i \in \mathbb{Z}^+$ için $P_i \cap (P_1 P_2 \dots P_{i-1} \dots P_t) = \{e\}$ olduğunu gösterelim. $T = P_1 P_2 \dots P_{i-1} \dots P_{i+1} \dots P_t$ olsun. $T \triangleleft H$ ve $H = TP_i$ dir. $p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \dots \cdot p_t^{s_t} \mid |T|$ dir. Şimdi $|H| = |TP_i| = \frac{|T||P_i|}{|T \cap P_i|} \leq (p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \dots \cdot p_t^{s_t}) p_i^{s_i} \frac{1}{|T \cap P_i|} = \frac{|H|}{|T \cap P_i|}$ olduğundan $|T \cap P_i| = 1$ dir. Böylece $H \cong P_1 P_2 \dots P_t$ dir.

(iii) $\Rightarrow$ (i) $P_1, P_2, \dots, P_t$ H nin birbirinden farklı Sylow p -altgrupları olmak üzere $H \cong P_1 \cdot P_2 \dots P_t$ olsun. Bu takdirde $H = P_1 P_2 \dots P_t$ bir iç direkt çarpımdır. t üzerine tümevarım uygulanırsa $t = 1$ için $H = P_1$ olduğundan Teorem 2.5.19 dan dolayı nilpotenttir. Şimdi ise $t > 1$ ve $K = P_2 \dots P_t$ olsun. O zaman $H = P_1 K$ dir. Ayrıca P_1 nilpotent ve tümevarım hipotezinden dolayı K nilpotent olduğundan Teorem 2.5.20 gereğince H nilpotenttir. Böylece tümevarım yoluyla ispat tamamlanır. $\square$

2.5.22. Önerme H basit bir grup olsun. H nin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul H nin mertebesinin bir asal sayı olmasıdır (Asar ve diğerleri, 2010).

Kanıt. $(\Rightarrow)$ H nin mertebesi bir asal sayı ise H basittir. Tersine H basit ve çözülebilir olsun. $H \neq \{e\}$ ve H nin $\{e\}$ den başka öz normal altgrubu yoktur. H çözülebilir olduğundan $H' < H$ dir. Ayrıca $H' \triangleleft H$ olduğundan $H' = \{e\}$ ve H abeldir. Dolayısıyla $|H| = p$ olmalıdır.

$(\Leftarrow)$ H nin mertebesi asal olsun. $|H| = p$ olduğundan H çözülebilirdir. □

2.5.23. Önerme H ve T çözülebilir gruplar olsun. Bu takdirde HT de çözülebilirdir (Asar ve diğerleri, 2010).

Kanıt. $W = HT$ olsun. T ve $\frac{W}{T} = \frac{HT}{T} \cong \frac{H}{H \cap T} \cong \frac{H}{\{e\}} = H$ çözülebilirken Teorem 2.5.20 den W çözülebilirdir. □

2.5.24. Önerme H sonlu nilpotent grubunun her öz altgrubu alt normaldir (Asar ve diğerleri, 2010).

Kanıt. H nilpotent ve $T < H$ olsun. $N_1 = N_H(T)$ olarak adlandırılırsa, $T \triangleleft N_1$ ve $T < N_1$ dir. Eğer $N_1 < H$ ise $N_2 = N_H(N_1)$ için $N_1 \triangleleft N_2$ bulunur. Dolayısıyla $T = N_0 \triangleleft N_1 \triangleleft N_2$ olur. Bu şekilde devam edilirse H sonlu olduğundan, öyle bir $k \geq 1$ tamsayısı ve her $1 \leq i \leq k$ için $N_1 = N_H(N_{i-1}), N_k < H$ iken $N_H(N_k) = H$ dir. Sonuç olarak $T = N_0 \triangleleft N_1 \triangleleft \dots \triangleleft N_k \triangleleft H$ olduğundan T, H de alt normal altgruptur. □

2.5.25. Tanım H grubunun $H = TK$ ve $T \cap K = \{e\}$ koşulunu sağlayan T ve K altgruplarına birbirlerinin tamlayanı adı verilir (Guo ve Lu, 2012).

2.5.26. Tanım H bir sonlu grup olsun. $T \leq H$ için $H = TK$ olacak şekilde H nin bir K altgrubu varsa, H de tümlenmiş altgrup denir. Bu durumda K nin H de T nin tümleyeni denir (Ballester-Bolínches ve diğerleri, 1998).

2.5.27. Tanım H bir sonlu grup olsun. H nin T alt grubunun $H = TK$ ve $T \cap K \leq T_H$ olacak şekilde H nin bir K alt grubu varsa T ye H de C –tümlemiş denir. Bu durumda, K ya H içinde T nin bir C –tümleyeni denir (Ballester-Bolínches ve diğerleri, 1998).

2.5.28. Tanım $T \leq H$ olmak üzere H nin, $H = TK$ ve T, K nin bütün Sylow alt grupları ile permüte edilebilirse T ye H de SS -quasinormal adı verilir. Bir başka deyişle $H = TK$ için her $P \leq K$ Sylow alt grubu için $PT = TP$ koşulunu sağlayan bir K alt grubu varsa T ye H de SS -quasinormal denir (Guo ve Lu, 2012).

2.5.29. Tanım H sonlu bir grup olsun. H nin bir Sylow p -alt grubunun tamlayanına H nin p -tamlayanı adı verilir. H grubunun bir p -tamlayanına H nin Hall alt grubu adı verilir. Tanım gereğince H nin bir Hall alt grubunun bir p -tamlayanı olması için gerek ve yeter koşul $[H:T]$ nin p asalının bir kuvveti şeklinde olması ve $p \nmid |T|$ olmasıdır (Rose, 1978).

2.5.30. Tanım $O^p(H)$, H nin en küçük normal p -faktör grubudur. Yani $\frac{H}{O^p(H)}$ p -gruptur ve bu koşulu sağlayan en küçük asal bölüm grubudur (Rose, 1978).

2.5.31. Tanım H abel grup olsun. Her $a \in H$ için $a^p = e$ olacak şekilde p asal tamsayısı mevcutsa H ye elementer abel grup adı verilir (Rose, 1978).

2.5.32. Örnek K_4 klein 4-lü grup elementer abel gruptur.

2.6. Süper Çözülebilir Grup

2.6.1. Tanım Bir grup, normal bir devirli seriye, yani bölüntüleri devirli olan bir normal seriye sahipse bu gruba süper çözülebilir grup denir. Süper çözülebilir gruplar çözülebilirdir. Bir tanesi dışında normal devirli alt grubu olmayan A_4 grubu, süper çözülebilir gruplara bir örnektir (Robinson, 1991).

2.6.2. Örnek Normal devirli alt grubu olmayan A_4 grubu, süper çözülebilir gruptur (Robinson, 1991).

2.6.3. Teorem Süper çözülebilir bir grubun esas bölüntüsünün derecesi asaldır ve maksimal bir alt gruba göre asal indekse sahiptir (Robinson, 1991).

Kanıt. N süper çözülebilir bir H grubunun minimal normal altgrubu olsun. $\{e\} = H_0 < H_1 < \dots < H_n = H$ de normal bir devirli seri olsun. i , $N \cap H_i \neq \{e\}$ koşulunu sağlayan en küçük tamsayı ise N, H nin minimal normal altgrubu olduğundan $N = N \cap H_i \triangleleft H$ dir. Buradan $N \leq H_i$ için $N \cap H_{i-1} = \{e\}$ olup 2. İzomorfizma teoreminden $N \cong \frac{NH_{i-1}}{H_{i-1}} \leq \frac{H_i}{H_{i-1}}$ olur. Dolayısıyla N asal mertebeli devirlidir. $\square$

3. MATERİYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde bulgular ve tartışma kısmında faydalandığımız birtakım tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

3.1. Hipergruplar, Güçlü Hipergrup Homomorfizmaları ve Kanonik Hipergruplar

3.1.1. Tanım $H \neq \emptyset$ bir küme ve $P^*(H)$, H nin boştan farklı tüm alt kümelerinin ailesi olsun. $\circ: H \times H \rightarrow P^*(H)$ bir fonksiyon ise $\circ$ ye H üzerinde bir hiperişlem ve $(H, \circ)$ ikilisine ise hipergrupoid adı verilir (Davvaz ve Leoreanu-Fotea, 2022).

3.1.2. Tanım $(H, \circ)$ bir hipergrupoid olsun. Bu takdirde H nin boştan farklı her X, Y alt kümesi için $X \circ Y = \bigcup_{y \in Y} X \circ y$ biçimindedir. Bu yüzden her $a \in H$ için $\{a\} \circ X$ ve $X \circ \{a\}$ yerine kısaca $a \circ X$ ve $X \circ a$ yazılışları kullanılır (Davvaz ve Leoreanu-Fotea, 2022).

3.1.3. Tanım $(H, \circ)$ bir hipergrupoid olsun. Her $a, b, c \in H$ için $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ eşitliği sağlanıyorsa, kısaca $\circ, H$ üzerinde birleşmeli ise $(H, \circ)$ hipergrupoidine yarı hipergrup denir (Davvaz ve Leoreanu-Fotea, 2022).

3.1.4. Tanım $(H, \circ)$ bir hipergrupoid olsun. Her $x \in H$ için $x \circ H = H \circ x = H$ eşitliği sağlanıyorsa $(H, \circ)$ hipergrupoidine quasihipergrup denir (Davvaz ve Leoreanu-Fotea, 2022).

3.1.5. Tanım $(H, \circ)$ hipergrupoidi hem yarı hipergrup hem de quasihipergrup ise $(H, \circ)$ ye hipergrup adı verilir (Davvaz ve Leoreanu-Fotea, 2022).

3.1.6. Tanım $(H, \circ)$ hipergrubunun boştan farklı bir S alt kümesi verilsin. S, H deki hiperişleme göre bizzat bir hipergrup yapısına sahipse S ye H nin althipergrubu denir ve $S \leq H$ yazılışı ile gösterilir. $S \leq H$ ve $S \neq H$ ise S ye H nin öz althipergrubu denir ve $S < H$ ile gösterilir. $S \leq H$ olması için gerek ve yeter koşul her $a \in S$ için $a \circ S = S \circ a = S$ olmasıdır (Davvaz ve Leoreanu-Fotea, 2022).

3.1.7. Tanım $(H_1, \circ)$ ve $(H_2, *)$ iki hipergrup olsun. $f: H_1 \rightarrow H_2$ bir fonksiyon olsun.

(i) H_1 in tüm x, y elemanları için $f(x \circ y) \subseteq f(x) * f(y)$ sağlanıyorsa f ye hipergrup homomorfizması adı verilir.

(ii) H_1 in x, y elemanları için $f(x \circ y) = f(x) * f(y)$ ise f ye güçlü hipergrup homomorfizması adı verilir.

(iii) Güçlü hipergrup homomorfizması birebir ve örten ise güçlü hipergrup izomorfizması denir. Aralarında güçlü hipergrup izomorfizması olan H_1 ve H_2 hipergrupları için $H_1 \cong H_2$ gösterimi kullanılır (Davvaz ve Leoreanu-Fotea, 2022).

3.1.8. Teorem $(H_1, \circ)$ ve $(H_2, *)$ iki hipergrup ve $f: H_1 \rightarrow H_2$ bir güçlü hipergrup homomorfizması olsun. O zaman $Gör(f)$, H_2 nin bir althipergrupudur (Davvaz ve Leoreanu-Fotea, 2022).

3.1.9. Önerme H_1, H_2 hipergruplarının birim elemanları sırasıyla e_1 ve e_2 olsun. $\psi: H_1 \rightarrow H_2$ güçlü hipergrup homomorfizması ise $\psi(e_1) = e_2$ dir (Talaee, 2010).

3.1.10. Önerme H_1, H_2 hipergrupları için $\psi: H_1 \rightarrow H_2$ bir güçlü hipergrup homomorfizması ve $H' \leq H_1$ olsun. Bu takdirde;

(i) $H' \subseteq çek(\psi)$ ise her $h \in H_1$ için $\varphi(h + H') = \psi(h)$ kuralıyla tanımlı $\varphi: H_1 / H' \rightarrow H_2$ güçlü homomorfizması vardır.

(ii) ψ örten ise φ örtendir.

(iii) $H' = çek(\psi)$ ise φ birebirdir.

(iv) ψ örten ve $H' = çek(\psi)$ ise, o zaman φ bir güçlü hipergrup izomorfizmasıdır (Talaee, 2010).

3.1.11. Örnek $(H, \cdot)$ bir grup ve $\langle x, y \rangle$, H nin $x, y \in H$ elemanları tarafından üretilen altgrubu olsun. $\forall x, y \in H$ için $x \circ y = \langle x, y \rangle$ biçiminde tanımlı $\circ: H \times H \rightarrow P^*(H)$ hiperişlemine göre $(T, \circ)$ bir hipergruptur (Davvaz ve Leoreanu-Fotea, 2022).

3.1.12. *Örnek* $(H, \cdot)$ bir grup ve $T \trianglelefteq H$ olsun. Her $x, y \in H$ için $x \circ y = xyT$ ile tanımlı $\circ: T \times T \rightarrow P^*(T)$ hiperişlemine göre $(H, \circ)$ bir hipergruptur (Davvaz ve Leoreanu-Fotea, 2022).

3.1.13. *Örnek* $(H, +)$ bir abel grup, $\sim H$ üzerinde bir denklik bağıntısı olmak üzere $H|_{\sim}$ bölüm kümesindeki denklik sınıfları $\bar{x} = \{x, -x\}$ biçiminde olsun. Her $\bar{x}, \bar{y} \in H|_{\sim}$ için $\bar{x} \circ \bar{y} = \{\overline{x+y}, \overline{x-y}\}$ olarak tanımlı $\circ$ hiperişlemine göre $H|_{\sim}$ bir hipergruptur (Davvaz ve Leoreanu-Fotea, 2022).

3.1.14. Tanım H bir hipergrup ve $\cdot$ hiperişlem olsun. Her $A, B \subseteq H$ için $A \cdot B = \bigcup_{(a,b) \in A \times B} a \cdot b$ olarak tanımlanır. Kısalık bakımından $\{a\}$, $A \cdot \{b\}$ ve $\{a\} \cdot B$ sırasıyla a , $A \cdot b$ ve $a \cdot B$ ile gösterilir. Ayrıca, $a, b \in H$ için $a \cdot b$ yerine ab kullanılır (Shojaei ve Ameri, 2017).

3.1.15. Tanım $e, (H, +)$ yarı hipergrubunun her $x \in H$ için $e + x = x$ koşulunu sağlayan bir elemanı olsun. Bu takdirde e, H nin sol birim elemanı olarak adlandırılır. Benzer şekilde, sağ birim eleman da tanımlanabilir. $(H, +)$ yarı hipergrubunun bir e elemanı, sol ve sağ birim elemanı ise birim eleman olarak tanımlanır. $e, (H, +)$ hipergrubunun birim elemanı ve $x \in H$ olsun. $e \in (x + x') \cap (x' + x)$ koşulunu sağlayan $x' \in H$ elemanına x in H deki tersi denir (Shojaei ve Ameri, 2017).

Birim elemana sahip bir yarı hipergrup hipermonoid olarak adlandırılır.

3.1.16. Tanım H hipergrup ve T, H nin bir öz althipergrubu olsun. $T \subset T' \leq H$ için $T' = H$ oluyorsa T althipergrubuna H hipergrubunun bir maksimal althipergrubu denir (Davvaz ve Leoreanu-Fotea, 2022).

3.1.17. Tanım Boştan farklı bir H kümesi $+$ hiperişlemi ile birlikte aşağıdaki aksiyomları gerçekleştiriyor ise $(H, +)$ ikilisine kanonik hipergrup denir (Davvaz ve Leoreanu-Fotea, 2007).

(i) $(H, +)$ bir yarı hipergruptur, yani $H, +$ hiperişlemine göre birleşme özelliğine sahiptir: her $x, y, z \in H$ için $(x + y) + z = x + (y + z)$ eşitliği sağlanır.

(ii) $H, +$ hiperişlemine göre değişme özelliğine sahiptir: her $x, y \in H$ için $x + y = y + x$ dir.

(iii) H nin e birim elemanı mevcuttur: her $x \in H$ için $e + x = x + e = x$ olacak şekilde tek bir e vardır.

(iv) $+$ hiperişlemine göre H deki her elemanın tersi vardır ve tektir: her $x \in H$ için, $e \in x + (-x)$ olacak şekilde $-x \in H$ mevcut olup $-x$ elemanına x elemanının tersi denir ve bu eleman tektürlü biçimde belirli olup $e \in x - x$ ile gösterilir.

(v) $+$ hiperişlemine göre tersinirlik özelliği sağlanır: her $x, y, z \in H$ için $z \in x + y$ iken $y \in -x + z$ ve $x \in z - y$ dir.

Bundan sonra $(H, +)$ yerine kısaca H yazacağız.

3.1.18. Tanım $(H, +)$ kanonik hipergrup ve N, H nin althipergrubu olsun. $H/N = \{x + N \mid x \in H\}$ kümesi her $x + N, y + N \in H/N$ için $(x + N) + (y + N) = \{t + N \mid t \in x + y\}$ işlemine göre hipergrup olup bu hipergruba H nin N ye göre bölüm hipergrubu denir (Davvaz ve Leoreanu-Fotea, 2022).

3.1.19. Tanım H hipergrup ve $N \leq H$ olsun. N nin H hipergrubundaki sol yan sınıflarının oluşturduğu kümenin kardinalitesi, sağ yan sınıflarının oluşturduğu kümenin kardinalitesine eşit ise N nin H hipergrubundaki indeksi denir ve $[H:N]$ ile gösterilir (Zhan ve diğerleri, 2011).

3.1.20. Tanım $x_{l,p}(H)$ ile H hipergrubundaki sol mertebeleri p asalının kuvveti olan tüm elemanlarının kümesi gösterilsin. Burada her $x \in H$ elemanının sol mertebesi

$$\begin{aligned} 0_l(x) &= \min \{0_l(x, x'') \mid e_l \in x'' \cdot x\} \\ &= \min \{\min \{s > 0 \mid \exists k, m \in \mathbb{N} : e_l \in x^s \cdot (x''^m \cdot x^m)^k \cap (x''^m \cdot x^m)^k \cdot x^s \mid e_p \in x'' \cdot x\} e_p \in x'' \cdot x\} \end{aligned} \quad (14)$$

biçiminde tanımlanır. H nin $x_{l,p}(H)$ nin alt kümesi olan her althipergrubuna sol genelleştirilmiş p -althipergrubu denir ve kısaca lgp -althipergrup olarak gösterilir. H nin tüm lgp -althipergruplarının kümesi $M_{l,g,p}(H)$ yazılışıyla gösterilir. $M_{l,g,p}(H)$ nin maksimal elemanlarına H nin sol genelleştirilmiş p -Sylow althipergrupları veya kısaca lgp -Sylow althipergrupları denir. H nin lgp -althipergruplarının mertebesi p nin kuvveti olup H nin mertebesini bölerse bu althipergruplara H nin sol p -althipergrubu veya lp -althipergrubu denir. H nin tüm lgp -Sylow althipergruplarının kümesi $S_{l,g,p}(H)$ yazılışıyla gösterilir. H nin tüm lp -althipergruplarının kümesi $M_{l,p}(H)$ olsun. $M_{l,p}(H)$ nin maksimal elemanlarına H nin sol p -Sylow althipergrupları veya lp -Sylow althipergrupları denir. $S_{l,p}(H)$ ile H nin lp -Sylow althipergruplarının kümesi gösterilir. Benzer şekilde sol yerine sağ birim alınarak $x_{r,p}(H)$, $M_{r,g,p}(H)$, $S_{r,g,p}(H)$ ve $S_{r,p}(H)$ tanımlanabilir. H hipergrubunda sağ mertebeleri p asalının kuvveti olan tüm elemanlarının kümesi $x_{r,p}(H)$ olsun. H nin lgp -Sylow ve rgp -Sylow olan althipergruplarına gp -Sylow althipergrupları denir. H nin lp - ve rp -althipergruplarına p -althipergrupları denir. H nin lp -Sylow ve rp -Sylow althipergruplarına ise p -Sylow althipergrubu denir (Jantani ve diğerleri, 2017).

3.1.21. Tanım H nin boştan farklı F alt kümesi verildiğinde her $x, y \in F$ elemanı için $x \cdot y \subseteq F$ oluyorsa F ye H nin kapalı alt kümesi denir (Vasil'ev ve Zieschang, 2022).

3.1.22. Tanım $(H, \cdot)$ hipergrubu verilsin. D ve E , H nin kapalı kümeleri olsun. Her $d \in D$ için $E \cdot d \subseteq d \cdot E$ oluyorsa D, E yi normaller denir. Eğer H , H deki kapalı bir alt küme F yi normallerse F ye H de normaldir denir (Vasil'ev ve Zieschang, 2022).

3.1.23. Tanım H nin D ve E kapalı alt kümeleri verilsin. Eğer $x^{-1} D x = E$ eşitliğini sağlayan $x \in H$ varsa D ve E ye H de eşleniktir denir (Vasil'ev ve Zieschang, 2022).

3.1.24. Tanım H nin D kapalı alt kümesi verilsin. $D \subseteq E$ olan her bir $x \in E$ için $x^{-1} D x \subseteq D$ oluyorsa D ye E de güçlü normal alt küme denir. Eğer E bir hipergrup ve $D \leq E$ bir güçlü normal alt küme oluyorsa D ye E nin güçlü normal althipergrubu denir (Vasil'ev ve Zieschang, 2022).

3.1.25. Tanım H hipergrubunun $H_0 = e$, $H_n = H$ olan kapalı $H_0, H_1, \dots, H_n$ althipergrupları olmak üzere $i \in 1, 2, \dots, n$ olan her i için H_{i-1}, H_i de güçlü normal oluyorsa

ve $[H_i : H_{i-1}]$ indeksi asal oluyorsa H ye çözülebilir hipergrup denir (Vasil'ev ve Zieschang, 2022).

3.1.26. *Örnek* $H = S_4$ simetrik grubunun $H' = A_4$ alterne altgrubu için $H'' = K_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ dir.

$$\tau_2^*(e) = \{e, (13)(24), (12)(34), (14)(23)\}; \quad (15)$$

$$\tau_2^*(12) = (12)\tau_2^*(e);$$

$$\tau_2^*(13) = (13)\tau_2^*(e);$$

$$\tau_2^*(23) = (23)\tau_2^*(e);$$

$$\tau_2^*(123) = (123)\tau_2^*(e);$$

$$\tau_2^*(124) = (124)\tau_2^*(e).$$

Bu nedenle $H/\tau_2^* \cong S_3$ uzunluğu 2 olan çözülebilir hipergruptur (Davvaz ve Leoreanu-Fotea, 2022).

3.2. Kanonik Hipergrupların Bölüm Hipergrupları

Bu kısımda kanonik hipergrupların althipergruplarına göre bölüm hipergruplarının yapısı incelenecektir. H bir hipergrup ve $N \leq H$ olsun. $x + N \in H/N$ kısaca $\bar{x}$ ile gösterilecektir.

3.2.1. Lemma H kanonik hipergrup ve N, H nin althipergrubu olmak üzere $\bar{x}$ ve $\bar{x}' \in H/N$ olsun. $\bar{x} \cap \bar{x}' \neq \emptyset$ ise $\bar{x} = \bar{x}'$ dir (Shojaei ve Ameri, 2017).

Kanıt. Hipotez gereğince, $t \in \bar{x} \cap \bar{x}'$ için öyle $n', n'' \in N$ elemanları vardır ki $t \in x + n'$ ve $t \in x' + n''$ yazılır. Buradan $x' \in t - n''$ olup $x' \in t - n'' \subseteq x + n' - n'' \subseteq x + N$ bulunur. Böylece $x' + N \subseteq x + N$ kapsamından $\bar{x} \subseteq \bar{x}'$ elde edilir. Benzer şekilde, $\bar{x}' \subseteq \bar{x}$ kapsamı da sağlanır. Sonuç olarak $\bar{x} = \bar{x}'$ dir. $\square$

$(H, +)$ kanonik hipergrup iken $(H/N, +)$ hipergrubunun kanonik bir hipergrup olduğunu kanıtlayalım.

3.2.2. Önerme H kanonik hipergrubu ve $N \leq H$ verilsin. Bu takdirde $(H/N, +)$ bir kanonik hipergruptur (Shojaei ve Ameri, 2017).

Kanıt. İlk olarak $+$ hiperişleminin iyi tanımlı olduğunu göstereceğiz, yani eğer $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ ve $\bar{y}_1 = \bar{y}_2$ ise, o zaman $\bar{x}_1 + \bar{y}_1 = \bar{x}_2 + \bar{y}_2$ eşitliğinin sağlanıp sağlanmadığını göstereceğiz. $\bar{z} \in \bar{x}_1 + \bar{y}_1$ olsun. O zaman öyle bir $t \in x_1 + y_1$ için $\bar{z} = \bar{t}$ veya $z + N = t + N$ dir. Yani öyle bir $n \in N$ için $z \in t + n$ bulunur. Böylece $z \in t + n \subseteq x_1 + y_1 + n$ olur. Diğer taraftan $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ ve $\bar{y}_1 = \bar{y}_2$ iken $n_1, n_2 \in N$ elemanları için $x_1 \in x_2 + n_1$ ve $y_1 \in y_2 + n_2$ olur. Böylece $z \in x_1 + y_1 + n \subseteq x_2 + y_2 + n_1 + n_2 + n$ kapsaması bulunur. Yani $z \in t' + n_3$ için öyle bir $n_3 \in N$ için $z \in t' \cap \bar{z}$ dir. Dolayısıyla Lemma 3.2.1 den, $\bar{z} = \bar{t}' \in \bar{x}_2 + \bar{y}_2$ sağlanır. Böylece $\bar{x}_1 + \bar{y}_1 \subseteq \bar{x}_2 + \bar{y}_2$ kapsaması bulunur. Benzer şekilde, $\bar{x}_2 + \bar{y}_2 \subseteq \bar{x}_1 + \bar{y}_1$ kapsaması elde edilir. Sonuç olarak, $\bar{x}_1 + \bar{y}_1 = \bar{x}_2 + \bar{y}_2$ eşitliği sağlanır.

Birleşim Özelliği:

$$\begin{aligned}
 (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} &= \left(\bigcup_{w \in x+y} \bar{w} \right) + \bar{z} = \left(\bigcup_{w \in x+y} (\bar{w} + \bar{z}) \right) = \bigcup_{w \in x+y, t \in w+z} \{\bar{t}\} \quad (16) \\
 &= \bigcup_{w \in (x+y)+z} \{\bar{t}\} = \bigcup_{w \in x+(y+z)} \{\bar{t}\} = \bigcup_{v \in y+z, u \in x+v} \{\bar{t}\} \\
 &= \bigcup_{v \in y+z} (\bar{x} + \bar{v}) = \bar{x} + \left(\bigcup_{v \in y+z} \{\bar{v}\} \right) = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})
 \end{aligned}$$

Değişme Özelliği: Açıkça, $\bar{x} + \bar{y} = \{\bar{t} \mid t \in x + y\} = \{\bar{t} \mid t \in y + x\} = \bar{y} + \bar{x}$ bulunur.

Birim elemanın varlığı: e, H nin birim elemanı olmak üzere $\bar{e} = N$, $(H/N, +)$ nin birim elemanıdır. Burada $\bar{e} + \bar{x} = \{\bar{t} \mid t \in e + x\} = \{\bar{t} \mid t \in \{x\}\} = \{\bar{x}\}$ olup $\bar{x} + \bar{e} = \{\bar{x}\}$ eşitliği yazılır.

Her elemanın tersinin varlığı: $\bar{x}$ nin bir tersi vardır ve $\overline{-x}$ dir. $e \in x - x$ olduğundan $\bar{e} \in \bar{x} + (\overline{-x}) = \{\bar{t} \mid t \in x + (-x)\} = \{\bar{t} \mid t \in x - x\}$ elde edilir. Ayrıca $\bar{e} \in (\overline{-x}) + \bar{x}$ olduğu açıktır. Yani $\overline{-x}$, $\bar{x}$ in tersidir. Tersinin tekliğini göstermek için $\bar{y} \in H/N$ olsun, öyle bir $\bar{e} \in \bar{x} + \bar{y}$ olsun. O zaman $\bar{e} \in \{\bar{t} \mid t \in x + y\} = \{\bar{t} \mid t \in x + y\}$. O zaman $\bar{e} = \bar{z}$ veya

$N = z + N$ olacak şekilde $z \in x + y$ vardır. Yani öyle bir $n \in N$ için $z = n$ olur. $(H, +)$ nın tersinirlik aksiyomunu sağlaması gereğince $y \in -x + n \subseteq -x + N$ kapsamı elde edilir. Dolayısıyla $y \in -x + N$ olur. Burada $y \in \bar{y} \cap \overline{-x}$ olduğundan, Lemma 3.2.1 den $\bar{y} = \overline{-x}$ elde edilir. Böylece $\bar{e}$ ve $\overline{-x}$ ifadeleri kısaca $e + N$ ve $\overline{-x}$ (tersi) olarak kullanılabilir. Sonuç olarak H/N üzerinde $-$ hiper işleminden bahsedebilir ve $\bar{x} + (-\bar{y})$ yerine $\bar{x} - \bar{y}$ kullanılır.

Tersinirlik Özelliği: $\bar{x} \in \bar{y} + \bar{z}$ iken öyle bir $t \in y + z$ elemanı için $\bar{x} = \bar{t}$ dir. $y \in t - z$, $\bar{x} = \bar{t}$ iken $\bar{y} \in \bar{t} - \bar{z}$ olup $\bar{x} = \bar{t}$ bulunur. Yani $\bar{y} \in \bar{x} + (-\bar{z})$ biçimindedir. Dolayısıyla $(H/N, +)$ kanonik bir hipergruptur. $\square$

Aşağıdaki önermede H/N üzerinde, $\oplus$ hiperişlemi farklı bir metotla verilecektir.

3.2.3. Önerme H kanonik hipergrubu ve $N \leq H$ olsun. H/N üzerinde $\oplus$ hiperişlemi $+$ yardımıyla aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$\bar{x} \oplus \bar{y} := \{\bar{t} \mid t \in \bar{x} + \bar{y}\}$ (Shojaei ve Ameri, 2017).

Kanıt. $A = \{t + N \mid t \in x + y\}$ ve $B = \{t + N \mid t \in (x + N) \oplus (y + N)\}$ olsun. $A = B$ olduğunu göstereceğiz. $t + N \in A$ olsun. O zaman, $t \in x + y \subseteq (x + N) \oplus (y + N)$ olur ve $t + N \in B$ olduğunu göstermektedir. Bu yüzden $A \subseteq B$ dir. Tersine, $t + N \in B$ olduğunu kabul edelim. O halde öyle bir $t \in p + n$ için $p \in x + y$ ve $n \in N + N \subseteq N$ olur. Burada $t \in \bar{t} \cap \bar{p}$ olduğu açıktır. Dolayısıyla Lemma 3.2.1 ile $\bar{t} = \bar{p}$ olur. Diğer taraftan, $p \in x + y$ olması $\bar{p} \in A$ olmasını gerektirir. Yani $\bar{t} \in A$ elde edilir. Sonuç olarak, $B \subseteq A$ olup $A = B$ bulunur. $\square$

3.2.4. Lemma Herhangi bir A kanonik hipergrubunda her $x, y \in A$ için $x = y$ olması için gerek ve yeter koşul $0_A \in x - y$ olmasıdır (Shojaei ve Ameri, 2017).

Kanıt. $x = y \in A$ olsun. Bu takdirde $0_A \in y - y = x - y$ olur. Tersine, $0_A \in x - y = x + (-y)$ olduğunu kabul edelim. Buradan $0_A \in (-y) + x$ yazılır. Diğer taraftan, $0_A \in y + (-y) = (-y) + y$ olduğu açıktır. Yani x ve y nin herbiri $-y$ elemanının tersidir. $-y$ elemanının tek türlülüğü gereğince, $x = y$ bulunur. $\square$

3.2.5. Uyarı Tersinirlik aksiyomu ile $0_A \in x - y$ olması $\bar{x} = \bar{y}$ olmasını gerektirir. Eğer H/N için Lemma 3.2.4 ü uygularsak, o zaman

$$\begin{aligned}
 \bar{x} = \bar{y} &\Rightarrow N = 0_{H/N} \in \bar{x} - \bar{y} = \bar{x} + \overline{-y} \\
 &\Rightarrow t \in x - y, 0_{H/N} = N = \bar{t} \\
 &\Rightarrow t \in x - y, N = t + N \\
 &\Rightarrow t \in x - y, t \in N \\
 &\Rightarrow t \in (x - y) \cap N \neq \emptyset
 \end{aligned} \tag{17}$$

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
 t \in (x - y) \cap N \neq \emptyset &\Rightarrow t \in x + (-y), \quad t \in N \\
 &\Rightarrow t + N \in \bar{x} + (\overline{-y}) = \bar{x} - \bar{y}, \quad t \in N \\
 &\Rightarrow 0_{H/N} = N = t + N \in \bar{x} - \bar{y}
 \end{aligned} \tag{18}$$

bulunur. Dolayısıyla Lemma 3.2.4 den $\bar{x} = \bar{y}$ olur.

3.2.6. Önerme Eğer $\bar{x} = \bar{y}$ olması için gerek ve yeter koşul $(x - y) \cap N \neq \emptyset$ olmasıdır (Shojaei ve Ameri, 2017).

3.2.7. Önerme H kanonik hipergrup ve $N \leq H$ olsun. Bu takdirde $x, y \in H$ olmak üzere $\{N\} = \bar{x} - \bar{y}$ olması için gerek ve yeter koşul $x - y \subseteq N$ olmasıdır (Shojaei ve Ameri, 2017).

Kanıt.

$$\begin{aligned}
 \{N\} = \bar{x} - \bar{y} &\Leftrightarrow \{N\} = \bar{x} + \overline{-y} = \{t + N \mid t \in x + (-y)\} \\
 &\Leftrightarrow N = t + N, \quad \forall t \in x - y \\
 &\Leftrightarrow \forall n \in N, \forall t \in x - y : t + n \subseteq N \\
 &\Leftrightarrow t = t + 0_N \subseteq N, \quad \forall t \in x - y
 \end{aligned} \tag{19}$$

$$\Leftrightarrow x - y \subseteq N$$

□

3.2.8. Önerme H kanonik hipergrup ve $N \leq H$ olsun. Bu takdirde $\bar{x} \oplus \bar{y} = N$ olması için gerek ve yeter koşul $x + y \subseteq N$ olmasıdır. Yani, $(x + N) + (y + N) = N \Leftrightarrow x + y \subseteq N$ dır (Shojaei ve Ameri, 2017).

Kanıt. $N + N = N$, olduğundan $(x + N) \oplus (y + N) = N \Rightarrow x + y + N = N$ elde edilir. Yani her $t \in x + y$ için, $t + N \subseteq N$ vardır. Böylece $t \in x + y$ için ve her $n \in N$ için, $t + n \subseteq N$ bulunur. Özellikle $t = t + e \subseteq N$ ve sonuç olarak, $x + y \subseteq N$ bulunur. Tersine, varsayalım ki $x + y \subseteq N$ olsun. O halde her $t \in x + y$ için $t + N = N$ dir. Böylece $x + y + N = N$ elde edilir. $N + N = N$ olduğundan $N = x + y + N = x + y + N + N = (x + N) \oplus (y + N)$ istenilen elde edilir. □

3.3. Sonlu Grupların SS-Tümlenmiş Altgrupları ve Özellikleri

Bu kısımda öncelikle sonlu grupların SS-tümlenmiş altgrup kavramı tanıtılarak birtakım özellikleri verilecektir.

3.3.1. Tanım H bir grup ve $T \leq H$ olsun. H nin $H = TK$ ve $T \cap K$, K da S -quasinormal olacak şekilde bir K altgrubu varsa T ye H de SS-tümlenmiş denir. Bu durumda K ya T nin H deki bir SS-tümleyeni denir (Guo ve Lu, 2012).

H nin bir C -tümlenmiş altgrubu H de SS-tümlenmiştir: T, C -tümlenmiş ise bir $K_1 \leq H$ için $H = TK_1$ ve $T \cap K_1 = T_H$ dir. H nin T_H özü H nin T tarafından içerilen en büyük normal altgrubu olduğundan $T_H \triangleleft H$ dir. O halde $(T \cap K_1)P = (T_H)P = P(T_H) = P(T \cap K_1)$ sağlanır. K_1, T nin SS-tümleyenidir.

T, H nin bir S -quasinormal altgrubu ise H nin $H = TK$ eşitliğini sağlayan ve T, K nin bütün P Sylow altgrupları ile permüte olan bir K altgrubu mevcuttur. O zaman $TP = PT$ olduğundan Modüler kuraldan $(T \cap K)P = P(T \cap K)$ olur. Bu ise T nin H de SS-tümlenmiş olması gerektiği anlamına gelir.

Her S -quasinormal altgrup C -tümlemiş olmayabilir ve C -tümlemiş altgrup da S -quasinormal olmayabilir.

Bir grubun SS -tümlemiş altgrubunun C -tümlemiş ya da S -quasinormal olmayabileceği (Guo ve Lu, 2012) deki *Örnek 2.3* de ispatlanmıştır. Böylece bir grubun SS -tümlemiş altgruplar sınıfı aynı grubun hem C -tümlemiş altgruplar sınıfını hem de S -quasinormal altgruplar sınıfını öz olarak içerir.

3.3.2. *Örnek (1)* $H = S_4$ ve $T = \langle (34) \rangle$ olsun. O zaman $H = TA_4$ ve $T \cap A_4 = \{e\}$ olduğundan H de C -tümlemiştir. Fakat A_4 ün $P = \langle (123) \rangle$ Sylow 3-altgrubu için $TP \neq PT$ olduğundan S -quasinormal değildir.

(2) $P = \langle x, y \mid x^{16} = y^4 = e, x^y = x^3 \rangle$ olsun. O zaman $\Phi(P) = \langle x^2, y^2 \rangle = \langle x^2 \rangle \times \langle y^2 \rangle$ ve burada $\langle x, y^2 \rangle$ ve $\langle x^2, y \rangle$, P nin maksimal altgrupları olup bu altgrupların arakesitleri $\langle x^2, y^2 \rangle$ alt grubudur. $T = \langle y^2 \rangle$, P de S -quasinormaldır. P nin bütün altgrupları ile permüte edilebilir. Böylece T , S - quasinormaldır. Ancak P nin $T \cap K \not\leq T_P$ olacak şekilde bir altgrubu mevcut olmadığından T, P de C -tümlemiş değildir (Guo ve Lu, 2012).

3.3.3. *Örnek Örnek 3.3.2* de verilen P grubu için $H = S_4 \times P$ olsun. $T = C_2 \times P_1$, $C_2 = \langle (34) \rangle$ ve $P_1 = \langle y^2 \rangle$ ve $K = A_4 \times P$ olsun. Bu durumda $H = S_4 \times P = TK$ ve $T \cap K \cong P_1$ olduğundan $T \cap K$, K da S -quasinormaldır. Böylece T, H de SS -tümlemiştir. Fakat T , C -tümlemiş ya da S -quasinormal değildir (Guo ve Lu, 2012).

Şimdi SS -tümlemiş altgrupların bazı temel özelliklerini verelim.

3.3.4. Lemma H bir grup ve T, H nin SS -tümlemiş altgrubu olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır.

(i) M, H nin bir altgrubu ve $T \leq M$ ise o zaman T, M de SS -tümlemiştir.

(ii) $N \triangleleft H$ ve $N \leq T$ ise o zaman $\frac{T}{N}$, $\frac{H}{N}$ de SS -tümlemiştir.

(iii) π asalların bir kümesi ve $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$ olmak üzere eğer T, H nin bir π -altgrubu ve N, H nin bir π' -alt grubu ise o zaman $\frac{TN}{N}, \frac{H}{N}$ de SS -tümlenmiştir.

(iv) L, H nin bir altgrubu ve $T \leq \Phi(L)$ ise o zaman T, H de S -quasinormaldır (Guo ve Lu, 2012).

Kanıt. (i) Hipotezden $H = TK$ ve $T \cap K, K$ da S –quasinormal olacak şekilde $K \leq H$ vardır. $K_1 = M \cap K$ olsun. O zaman $H = TK$ eşitliğinden $M = H \cap M = (TK) \cap M = T(K \cap M) = TK_1$ bulunur. $T \cap K_1 = T \cap M \cap K = T \cap K$ olduğundan hipotez gereğince $T \cap K_1, K_1$ de S –quasinormaldır. $Q < M \cap K$ olmak üzere $Q(T \cap K_1) = Q(T \cap K) = (T \cap K)Q$ olduğunu göstermeliyiz. $Q = P \cap (M \cap K)$ olacak şekilde $P < K$ vardır ve hipotezden $(T \cap K)P = P(T \cap K)$ sağlanır. O halde;

$$\begin{aligned} Q(T \cap K_1) &= QT \cap K_1 = (P \cap (M \cap K))T \cap K_1 = (P \cap M)T \cap K_1 \\ &= PT \cap M \cap K_1 = PT \cap M \cap K = M \cap (PT \cap K) = M \cap (P(T \cap K)) \\ &= M \cap (T \cap K)P = M \cap (TP \cap K) = (M \cap TP) \cap K = TP \cap M \cap K_1 \\ &= T(P \cap M) \cap K_1 = T(P \cap (M \cap K)) \cap K_1 = TQ \cap K_1 = (T \cap K_1)Q \end{aligned} \quad (20)$$

olup T, M de SS -tümlenmiştir.

(ii) $H = TK$ olduğundan $\frac{H}{N} = \frac{T}{N} \frac{KN}{N}$ sağlanır. Modüler kuraldan $\frac{T}{N} \cap \frac{KN}{N} = \frac{T \cap KN}{N} = \frac{(T \cap K)N}{N} = \frac{N(T \cap K)}{N}$ dir. Herhangi bir p asalı için K_p, K nin Sylow p -altgrubu olmak üzere $\frac{KN}{N}$ nin herhangi bir Sylow p - altgrubu $\frac{K_p N}{N}$ formundadır. Böylece $(T \cap K)K_p, H$ nin bir altgrubu olduğundan $\left(\frac{T}{N} \cap \frac{KN}{N}\right) \left(\frac{K_p N}{N}\right) = \frac{(T \cap K)K_p N}{N}, \frac{H}{N}$ nin bir alt grubudur. Buradan (1) den $\frac{T}{N} \cap \frac{KN}{N}, \frac{KN}{N}$ de S -tümlenmiştir. Yani, $\left(\frac{T}{N} \cap \frac{KN}{N}\right) \frac{K_p N}{N} = \frac{K_p N}{N} \left(\frac{T}{N} \cap \frac{KN}{N}\right)$ eşitliği sağlanır. Böylece $\frac{T}{N}, \frac{H}{N}$ de SS -tümlenmiştir.

(iii) T bir π -altgrup ve N bir π' -altgrup olduğundan $(|N|, |T|) = 1$ ve $N \cap T = \{e\}$ ve $N \not\leq T$ olamayacağından $N \leq K$ olmalıdır. Böylece Modüler kuraldan $NT \cap K = N(T \cap K)$ dır. $H = TK$ iken $H = NTK = (NT)K$ elde edilir. Ayrıca her $P < K$ için $(NT \cap K)P = (N(T \cap K))P = N(P(T \cap K))$ ve $N \triangleleft H$ olduğundan $N(P(T \cap K)) = P(N(T \cap K)) =$

$P(NT \cap K)$ bulunur. O halde $NT \cap K$, H de S -quasinormal olup NT , H de SS -tümlenmiştir.

(ii) gereğince $\frac{TN}{N}, \frac{H}{N}$ de SS -tümlenmiştir.

(iv) $\Phi(L) \neq L$ nin Frattini altgrubu olup ve L nin maksimal altgruplarının arakesitidir, ayrıca L nin bütün üreteç olmayan elemanlarının kümesidir. Yani $L = \langle x, a \rangle$ iken $L = \langle X \rangle$ dir. $T \leq \Phi(L) \Rightarrow T \leq L \Rightarrow H = TK \Rightarrow L = L \cap H = L \cap TK = T(L \cap K) = \langle T, L \cap K \rangle = L \cap K \Rightarrow L \leq K \Rightarrow T \leq L \leq K$ olduğundan $T \leq K \Rightarrow H = TK = K$ olur. Böylece $T \cap K$, K de S -quasinormal olduğundan $T \cap K = T$, $K = H$ olup T, H de S -quasinormaldır. $\square$

Aşağıdaki lemmalar verilen bir H grubunun S -quasinormal altgruplarının bilinen sonuçlarıdır.

3.3.5. Lemma H bir grup ve $T \leq H$ olsun. Eğer T, H de S -quasinormal ise o zaman T, H de alt normaldir (Guo ve Lu, 2012).

Kanıt. Kabul edelim ki iddia doğru olmasın, yani bir H grubunda $T \leq H$ S -quasinormal iken T alt normal olmasın. Bu koşulu sağlayan grupların en küçük mertebeli olanı H grubu olsun. $N = N_H(T) = \{h^{-1}Th \mid h \in H\}$ alalım. $T \leq N$ ve $N \triangleleft H$ dir. Eğer N, H nin öz normal altgrubu ise o zaman T, N de S -quasinormal ve H nin minimalliğinden T, N de alt normaldir ve $N \triangleleft H$ olduğundan $T \triangleleft \dots \triangleleft H$ olur. O halde $N = H = N_H(T)$ olmalıdır. M, T yi içeren bir maksimal altgrup olsun. $N_H(T) = H$ olduğundan öyle bir $N_X(M)$ vardır ki $T, N_X(M)$ de içerilmez. Böylece $T N_X(M) = H$ ve $M N_X(M) = H$ çelişkisi elde edilir. $\square$

3.3.6. Lemma Bir p asalı için T, H nin bir p -altgrubu olsun. O zaman T nin H de S -quasinormal olması için gerek ve yeter koşul $O^p(H) \leq N_H(T)$ olmasıdır (Guo ve Lu, 2012).

Kanıt. Önce T, p -altgrubu H de S -quasinormal olsun. O zaman H nin her bir Sylow p -altgrubu P için $TP = PT$ ve T bir p -altgrup olduğundan $TP = PT = P$ dir. Böylece $T \subseteq O^p(H)$ ($O^p(H)$ ise H nin en küçük normal p -alt grubudur. T, p -altgrup olduğuna göre $T \subseteq O^p(H)$) ve Lemma 3.3.5 den H de alt normaldir. Bundan başka bir $q \neq p$ için Q Sylow p -altgrubu ise o zaman T, S -quasinormal olduğundan $QT = TQ$ sağlanır. p', p den farklı olan asal olmak üzere p' mertebeli bir eleman ya da altgrup bir Q Sylow p' -altgrubu

tarafından içerilir. Böylece $h \in O^p(H)$ iken $\langle h \rangle \leq Q$ ve Q, p' mertebeli devirli grupların çarpımı olduğundan $QT = TQ$ sağlanır. Buradan $\langle h \rangle T = T \langle h \rangle$ olup $h \in N_H(T) = \{h \in H \mid hT = Th\}$ bulunur.

Tersine $N_H(T) \supseteq O^p(H)$ ise o zaman $T \subseteq O^p(H)$ dir. Sonuç olarak T, H de alt normaldir ve $q \neq p$ için H nin her bir Sylow q -altgrubu tarafından normallenir. $\square$

3.3.7. Lemma A, H nin bir alt normal altgrubu ve B, H nin bir minimal normal altgrubu olsun. O zaman $B \leq N_H(A)$ dir (Guo ve Lu, 2012).

Kanıt. $A = U_r \trianglelefteq \dots \trianglelefteq U_1 \trianglelefteq H$ ve B, H nin minimal normal altgrubu olsun. r üzerine tümevarım uygulanırsa; $r = 1$ için $A \trianglelefteq H$ iken $N_H(A) = H$ olup $B \leq H = N_H(A)$ sağlanır. İddia serinin uzunluğunun r den küçük olması durumunda sağlansın. B minimal olduğundan ya $B \cap U_1 = \{e\}$ dir ya da $B \cap U_1 = B$ olmalıdır. $B \cap U_1 = \{e\}$ ise $\forall b \in B$ ve $\forall u_1 \in U_1$ için $bu_1 = u_1b$ olup $b \in C_H(U_1)$ bulunur. Dolayısıyla $B \leq C_H(U_1)$ ve $A \leq U_1$ olduğundan $B \leq C_H(A) \leq N_H(A)$ dir. $B \cap U_1 = B$ iken $B \leq U_1$ dir. (Doerk ve Hawkes, 1992) deki 15.2 gereğince N sonlu bir H grubunun minimal altgrubu ve $N \leq M \trianglelefteq H$ iken N, M nin minimal normal altgruplarının bir direkt çarpımıdır. Burada $N = B, H = H, M = U_1$ alınırsa B, U_1 in minimal normal altgruplarının bir direkt çarpımı olur. Yani $B = N_1 N_2 \dots N_k, N_i, U_1$ in minimal altgruplarıdır. Hipotezden iddia $< r$ için doğru olduğundan her bir $N_i \leq N_H(A)$ dir. O halde $N_1 N_2 \dots N_k \leq N_H(A)$ iken $B \leq N_H(A)$ olur. $\square$

3.4. Bir Grubun SS-Tümlemiş Altgrupları

H bir sonlu grup olmak üzere H nin her altgrubu SS-tümlemiş ise H ye SS-tümlemiş denir. Bu kısımda SS-tümlemiş altgrupları kullanılarak grupların çözülebilirliği incelenecek daha sonra SS-tümlemiş gruplar karakterize edilecektir.

3.4.1. Lemma (Schur, Zassenhaus) H sonlu bir grup olsun. H nin $|T| = n, [H:T] = m$ ve $ebob(n, m) = 1$ olacak şekilde bir T normal altgrubu için H , mertebesi m olan altgrupları kapsar ve bunlardan herhangi ikisi birbiriyle eşleniktir (Robinson, 1991).

3.4.2. Teorem H bir grup olsun. H nin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul H nin her Sylow altgrubunun H de SS-tümlemiş olmasıdır (Guo ve Lu, 2012).

Kanıt. Eğer H çözülebilir ise o zaman H nin bütün Sylow altgrupları H de tamlanmıştır. Böylece H de SS -tümlenmiştir.

Tersine H nin her P Sylow altgrubu H de SS -tümlenmiş olsun. Tanımdan $H = PK$ ve $P \cap K$, K de S -quasinormal olacak şekilde bir $K \leq H$ vardır. Lemma 3.3.5 de $P \cap K$, K da alt normaldir. $P \cap K$, K nin Sylow altgrubu olduğundan hem de alt normal olmasından $P \cap K \triangleleft K_1 \triangleleft K_2 \triangleleft \dots \triangleleft K$ alt normal serisi vardır. $P \cap K, K$ nin Sylow altgrubu olduğundan her bir K_i nin de Sylow altgrubudur. Özel olarak $P \cap K$, K_2 nin de Sylow altgrubudur. $P \cap K$ nin K_2 de normal olduğunu göstermek yeterlidir. $P \cap K \triangleleft K_1$ ve $P \cap K$, K_1 de Sylow olduğundan $P \cap K$, K_1 in tek Sylow altgrubudur. Şimdi $P \cap K$ nin K_2 nin de tek Sylow altgrubu olduğunu gösterelim. Q , K_2 nin başka bir Sylow altgrubu olsun. Yine Sylow teoreminden $Q = x^{-1}(P \cap K)x$ olacak şekilde $x \in K_2$ vardır. Eğer $x \in K_1$ ise $P \cap K \triangleleft K_1$ olduğundan $Q = x^{-1}(P \cap K)x = P \cap K$ olup $Q = P \cap K$ bulunur. Eğer $x \notin K_1$ ise $P \cap K \triangleleft K_1$ olup $x^{-1}(P \cap K)x \triangleleft x^{-1}K_1x = K_1$ bulunur.

Q da K_1 in Sylow altgrubu olduğundan K_1 de tek bir tane Sylow altgrubu olduğundan $P \cap K$, $P \cap K = Q$ dur. Yani K_2 nin de tek bir Sylow altgrubu $P \cap K$ dır. O halde $P \cap K \triangleleft K_2$ dir. Seri üzerinde bu şekilde devam edilerek $P \cap K \triangleleft K$ olur. Buradan Schur-Zassenhaus Teoremi uygulanırsa $P \cap K \triangleleft K$ ve $P \cap K$ Sylow q -altgrubu olduğundan $\left(|P \cap K|, \left|\frac{K}{P \cap K}\right|\right) = 1$ olup $K = (P \cap K)K_{p'}$, olacak şekilde K nin bir $K_{p'}$ Hall altgrubu vardır. Ayrıca $K_{p'}$ tamlayan olduğundan $(P \cap K) \cap K_{p'} = P \cap K \cap K_{p'} = P \cap K_{p'} = \{e\}$ olur. O halde $H = PK = P((P \cap K)K_{p'}) = P(P \cap K)K_{p'} = PK_{p'}$ ve böylece H nin her P Sylow altgrubu H de tamlanmış olduğundan H çözülebilirdir. $\square$

Teorem 3.4.2 deki argümanlar ile sıradaki sonucu elde ederiz.

3.4.3. Sonuç H bir grup ve T, H nin bir Hall altgrubu olsun. O zaman T nin H de tamlanmış olması için gerek ve yeter koşul T nin H de SS -tümlenmiş olmasıdır (Guo ve Lu, 2012).

Kanıt. Schur-Zassenhaus teoremi gereğince her bir Hall altgrubunun H de tamlayanı vardır ve böylece T, H de SS -tümlenmiştir.

Tersine H nin bir Hall altgrubu T, H de SS -tümlenmiş olsun. $H = TK$ ve $T \cap K, K$ de S -quasinormal olacak şekilde $K \leq H$ vardır. Lemma 3.1.5 den $T \cap K, K$ de alt normaldir. Bundan başka $T \cap K, K$ nin altgrubudur. Böylece $T \cap K, K$ de hem alt normal ve hem de Hall altgrup olduğundan $T \cap K, K$ de normaldir. $T \cap K \triangleleft K_1 \triangleleft K_2 \triangleleft \dots \triangleleft K$ T nin alt normal serisi ise $T \cap K, K_1$ de normal Hall altgruptur ve böylece $T \cap K, K_1$ de karakteristik altgruptur. $K_1 \triangleleft K_2$ olduğundan $T \cap K \triangleleft K_2$ olur. Bu şekilde devam edilerek $T \cap K \triangleleft K$ elde edilir. Schur-Zassenhaus Teoremi uygulanırsa $T \cap K \triangleleft K$ ve $T \cap K$ Sylow q -altgrubu olduğundan $(|T \cap K|, \left| \frac{K}{T \cap K} \right|) = 1$ olup $K = (T \cap K)K_{p'}$ olacak şekilde K nin bir $K_{p'}$ Hall altgrubu vardır. Ayrıca $K_{p'}$ tamlayan olduğundan $(T \cap K) \cap K_{p'} = T \cap K \cap K_{p'} = T \cap K_{p'} = 1$ olur. O halde $H = TK = T((T \cap K)K_{p'}) = T(T \cap K)K_{p'} = TK_{p'}$ ve böylece H nin her T Hall-altgrubu H de tamlanmıştır. $\square$

Tüm maksimal altgrupların SS -tümlenmiş olması gerekmez. Örneğin $GL(2, \mathbb{Z}_7)$ genel doğrusal grubu her maksimal altgrubu tamlanmış olan abel olmayan basit bir grup olduğundan SS -tümlenmiştir.

3.4.4. Teorem H bir grup olsun. H nin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul H nin her maksimal altgrubunun H de alt normal olan bir SS -tümleyeninin olmasıdır (Guo ve Lu, 2012).

Kanıt. H çözülebilir grup ve T, H nin maksimal altgrubu olsun. T nin H de alt normal bir SS -tümleyeni olduğunu göstermeliyiz. $|H|$ üzerine tümevarımla $|H| = 1$ ise iddia açıktır. İddia mertebesi $|H|$ sinden küçük olan gruplar için doğru olsun. Şimdi $T_H \neq \{e\}$ olsun. Buradan $T_H \triangleleft H$ ve $T_H \triangleleft T$ bulunur. $|\frac{H}{T_H}| < |H|$ olduğundan ve $\frac{T}{T_H}, \frac{H}{T_H}$ nin maksimalidir. Hipotezden $\frac{T}{T_H}$ nin $\frac{H}{T_H}$ de bir $\frac{K}{T_H}$ SS -tümleyeni vardır ve $\frac{K}{T_H}, \frac{H}{T_H}$ de alt normaldir. Yani $\frac{K}{T_H} \triangleleft \frac{K_1}{T_H} \triangleleft \dots \triangleleft \frac{H}{T_H}$ alt normal serisi vardır. Bu serinin T_H ile genişlemesinden $K \triangleleft \dots \triangleleft H$ olur. $T_H = \{e\}$ olsun. N, H nin minimal normal altgrubu ve $N \not\leq T$ olduğundan $H = TN$ ve $T \cap N \leq T_H = \{e\}$ olup N, T nin tamlayanı ve SS -tümleyenidir. $N \triangleleft H$ alt normaldir.

Tersine kabul edelim ki iddia doğru olmasın ve H bu iddiayı sağlamayan en küçük mertebeli grup olsun. T, H nin maksimal altgrubu için $H = TK$ ve $T \cap K, K$ da S -quasinormal olacak şekilde K alt normal altgrubu bulunsun. H abel olmayan basit grup ise o zaman $T \neq H$

olduğundan $K = H$ dir. Lemma 3.3.5 den T, H de alt normal altgrup olur. Buradan $T = \{e\}$ olmalıdır. Bu ise H nin p asal mertebeye sahip devirli grup olmasını gerektirir. Böylece H çözülebilirdir. Bu ise bir çelişkidir. Şimdi H basit olmasın ve N, H nin bir minimal normal altgrubu olsun. Tümevarım kabulünden $\frac{H}{N}$ için iddia doğrudur. H nin minimallüğinden $\frac{H}{N}$ çözülebilirdir. Bundan başka N nin, H nin tek minimal normal altgrup olduğunu ve N nin $\Phi(H)$ tarafından içerilmediğini varsayılabilir. O zaman, bu durumda H nin $M_H = \{e\}$ olan bir M maksimal alınabilir. Hipotezden H nin bir K alt normal altgrubu için $H = MK$ ve $M \cap K, K$ da S -quasinormaldır. K, H de alt normal olduğundan Lemma 3.3.5 den $M \cap K, H$ de alt normaldir. Eğer $M \cap K \neq \{e\}$ ise o zaman $M \cap K$ tarafından içerilen H nin bir L minimal alt normal altgrubunu alabiliriz. $L \cap N \trianglelefteq L$ olduğundan ve L minimal alt normal olduğundan $L \cap N = \{e\}$ ya da $L \cap N = L$ iken $L \leq N$ olur. Lemma 3.3.7 den N, L yi normaller. Eğer $L \cap N = \{e\}$ ise o zaman $NL = N \times L$ ve $L \leq C_H(N) = \{e\}$ ve buradan $L = \{e\}$ olur. Eğer $L \cap N = L$ yani $L \leq N$ ise o zaman $M \cap K = \{e\}$ bulunur. Benzer bir yolla H nin bütün minimal alt normal altgruplarının N tarafından içerildiğini gösterilebilir. Her bir N_i belirli bir abel olmayan basit gruba izomorf olmak üzere $N = N_1 N_2 \dots N_r$ olsun. O zaman kolayca $N_1, N_2, \dots, N_r$ nin, H nin bütün minimal alt normal altgrupları ile çakıştığı görülebilir. Genelliği bozmadan $N_1 \leq K$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde öyle bir p asalı için $p, [H:M] = |K|$ yı böler. Böylece H nin bir çözülebilir normal altgrubu mevcuttur. N tek minimal normal olarak bu normal altgrup tarafından içerildiğinden N de çözülebilirdir. $\frac{H}{N}$ ve N çözülebilir olduğundan H çözülebilir olur ki bu ise çelişkidir. O halde kabul yanlış olup ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 3.4.4 ün bir direkt sonucu olarak sıradaki sonuç elde edilir.

3.4.5. *Sonuç* Bir H grubunun çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul H nin her M maksimal altgrubu için H nin $H = MK$ ve $M \cap K \leq M_H$ olacak şekilde bir K alt normal altgrubunun bulunmasıdır (Guo ve Lu, 2012).

3.4.6. Uyarı: Eğer bir H grubu çözülebilir değilse H de SS -tümlemiş olan çözülebilir maksimal bir altgrup bulunmayabilir. Örneğin $A_5 = \langle A_4, (1234) \rangle$ ve $A_4 \cap \langle (1234) \rangle = \{e\}$ olduğundan A_4, A_5 in SS -tümlemiş altgrubuna izomorftur. A_5 çözülebilir değildir fakat A_5 in A_4 e izomorf olan altgrubu maksimal çözülebilir olma koşulunu sağlar.

H grubunun çözülebilir olması durumunda grupta çözülebilir maksimal altgrubun varlığı sıradaki teoremden ispatlanmıştır.

3.4.7. Teorem H bir grup olsun. H nin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul H nin, H de normal olan bir K SS -tümleyenine sahip bir T çözülebilir maksimal altgrubunun olmasıdır (Guo ve Lu, 2012).

Kanıt. Eğer H çözülebilir grup ise *Sonuç* 3.4.5 den H nin bir T maksimal normal altgrubu için $H = KT$ ve $T \cap K \leq T_K$ olacak şekilde K altnormal altgrubu vardır. Her C -tümleyen SS -tümleyen olduğundan K , T nin H deki SS -tümleyenidir.

Tersine H çözülebilir değilken H nin H de normal olan bir K SS -tümleyenine sahip bir T çözülebilir maksimal altgrubunun olduğunu kabul edelim. O zaman H bu iddiayı sağlamayan en küçük mertebeli grup olsun. Eğer $T_H \neq \{e\}$ ise o zaman $\frac{T}{T_H} \frac{H}{T_H}$ nin bir çözülebilir maksimal altgrubudur ve $\frac{KT_H}{T_H}, \frac{T}{T_H}$ nin $\frac{H}{T_H}$ deki bir normal SS -tümleyenidir. H nin seçiminden $\frac{H}{T_H}$ çözülebilirdir ve böylece H çözülebilir olur, bu ise çelişkidir. O zaman $T_H = \{e\}$ olmalıdır.

N, H nin bir minimal normal altgrubu olsun ve $C = C_H(N) = \{h \in H \mid \forall n \in N, hn = nh\}$ olsun. (Doerk ve Hawkes, 1992) makalesindeki A, 17.2 gereğince N ye H nin tek minimal normal altgrubudur ve $C \leq N$ dir ya da H nin tam olarak iki tane N ve R minimal normal altgrubu vardır öyle ki $N \cong R$ abel değildir ve $R = C_H(N) = C$, $R \cap T = N \cap T = \{e\}$ dir. Hipotezden $T \cap K, K$ de S -quasinormal olduğundan Lemma 3.3.5 den $T \cap K, K$ de altnormaldir. Buradan $T \cap K, H$ de alt normaldir. Şimdi $T \cap K \neq \{e\}$ ve L, H nin $T \cap K$ tarafından içerilen minimal alt normal altgrubu olsun. Eğer $L \leq N$ ise o zaman $L^H = L^{NT} = L^T \leq T_H = \{e\}$ olup çelişki elde edilir. O halde $L \not\leq N$ dir ve benzer şekilde $L \not\leq R$ dir. O halde $N \cap L = \{e\} = R \cap L$ olmalıdır. Diğer taraftan Lemma 3.3.7 den $NL = N \times L$ ve böylece $L \leq C$ ve $C \leq N$ olduğundan $L \leq N$ ya da $C = R$ ile çelişir. Böylece $T \cap K = \{e\}$ olmalıdır. O halde $\frac{H}{K} \cong T$ ve K, H nin minimal normal altgrubudur. Şimdi kabul edelim ki A, T nin bir minimal normal altgrubu olsun. O zaman $A, p \in \pi(T)$ için elementer abel p -gruptur. $C_K(A)$ hem T hem de K tarafından normallendiğinden $C_K(A), T$ tarafından normallenir. Yani $T \leq N_H(C_K(A))$ dir. $C_K(A)$ hem T hem de K

tarafından normallendiğinden ve $H = [K]T$ olduğundan $C_K(A)$, H tarafından normallenir yani $C_K(A) \triangleleft H$ dır. Ayrıca $C_K(A) \leq K$ olduğundan $C_K(A) \triangleleft K$ dır. K, H nin minimal normal altgrubu olduğundan $C_K(A) = K$ yada $C_K(A) = \{e\}$ olmalıdır. Eğer $C_K(A) = K$ ise $\forall a \in A$ ve $\forall k \in K$ için $ka = ak$ olup $k \in N_H(A)$ elde edilir. Buradan $K \leq N_H(A)$ olup $A \triangleleft K$ ve $A \triangleleft T$ bulunur. Böylece $A \triangleleft H$ olur.

$A \leq T$ olduğundan ve A, H de normal olduğundan A, H nin T tarafından içerilen normalidir. En geniş T_H olduğuna göre $A \leq T_H$ olup bu ise $T_H = \{e\}$ olmasıyla çelişir. O halde $C_K(A) = \{e\}$ olmalıdır. (Gorenstein, 1968) deki Teorem 2.2 ve Teorem 2.3. gereğince K bir p' -grup olup K , her $q \in \pi(K)$ asalı için bir tek A invaryant Sylow q -altgrubu olan Q yu içerir. Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $(Q^t)^A = (Q^A)^t = Q^t$ olup A invaryant altgrup olduğundan Sylow q -altgruptur ve böylece $Q = Q^t$ dır. Sonuç olarak $[Q]T = H = [K]T$ ve $K = Q$ bir p -gruptur. O halde H çözülebilir grup olur bu ise çelişkidir. İstenen görülür $\square$

Şimdi SS –tümlenmiş grupları karakterize edelim.

3.4.8. Teorem H bir grup olsun. O zaman aşağıdakiler denktir.

(i) H bir SS -tümlenmiş gruptur.

(ii) H süper çözülebilirdir, $\frac{H}{\Phi(H)}$ nin her Sylow altgrubu elementer abeldir ve $\Phi(H)$ nin her altgrubu H de S -quasinormaldır.

(iii) $\frac{H}{\Phi(H)}$ nin her altgrubu tamlanmıştır ve $\Phi(H)$ nin her altgrubu H de S -quasinormaldır (Guo ve Lu, 2012).

Kanıt. (i) $\Rightarrow$ (ii) Öncelikle, H nin süper çözülebilir olduğunu gösterelim. Hipotezden ve Teorem 3.4.2 den H çözülebilirdir. N, H nin bir minimal normal altgrubu olmak üzere N bir p asalı için elementer abel p -gruptur. Lemma 3.3.4 (ii) den $\frac{H}{N}$ SS -tümlenmiştir. Burada mertebesi H nin mertebesinden küçük olanlar için iddianın doğru olduğu tümevarım ile görülebilir. O halde tümevarımla $\frac{H}{N}$ süper çözülebilirdir. Buradan H nin süper çözülebilir olduğunu göstermek için $N = \langle x \rangle$ devirli olduğunu göstermek yeterlidir.

P, H nin bir Sylow p -altgrubu ve $x \in N \cap Z(P)$ için $|x| = p$ olsun. Burada K elementer abel olduğu için K nin tüm Sylow altgrupları ile $\langle x \rangle \cap K \leq K$ ile değişmelidir. Böylece $\langle x \rangle K = H$ ve $\langle x \rangle \cap K, K$ da S -quasinormal olacak şekilde $K \leq H$ vardır. $\langle x \rangle \cap K, K$ nin p' -Sylow altgrupları ile de değişmeli olduğundan $\langle x \rangle \cap K, K$ nin bütün p' mertebeli elemanları tarafından normallenir. Ayrıca $\langle x \rangle \leq Z(P)$ olduğundan P tarafından merkezlenip $\langle x \rangle \cap K, H$ nin normal altgrubu olur. N minimal olduğundan $\langle x \rangle \cap K = \{e\}$ ya da $(\langle x \rangle \cap K = N)$ iken $N \leq K$ olmalıdır. $\langle x \rangle \cap K = \{e\}$ ise $N = \langle x \rangle$ olur. $N \leq K$ ise o zaman $\langle x \rangle = \langle x \rangle \cap K \leq N$ için $N = \langle x \rangle$ bulunur. N elementer abel p -grup olduğundan her karakteristik altgrubu ya $\{e\}$ ya da N ye eşittir. $\langle x \rangle$ karakteristik basit olduğundan $N = \langle x \rangle$ bulunur.

Şimdi P, H nin Sylow p -altgrubu ve $T, \Phi(P)$ nin bir altgrubu olsun. O zaman, Lemma 3.3.4 (iv) den T, H de S -quasinormaldır. Lemma 3.3.6 dan $\Phi(P), H$ de normaldir. Lemmadaki T yerine $\Phi(P)$ alınırsa $O^P(H) \leq N_H(\Phi(P))$ yani p' elemanlarının birleşiminin ürettiği grup $\Phi(P)$ yi normaller. $\Phi(P), P$ de normal olduğundan p elemanları tarafından normallenir. Böylece $\Phi(P) \leq \Phi(H)$ ve buradan $\frac{H}{\Phi(H)}$ nin her Sylow altgrubu elementer abeldir. $\Phi(H)$ nin her alt grubunun H de S -quasinormal oluşu Lemma 3.3.4 (iv) den doğrudan gelir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sonlu mertebeli bir grubun tamlanmış olmasına denk koşul (Hall, 1937) deki Teorem 2 gereğince grubun Sylow altgruplarının elementer abel ve esas bölüntülerinin süper çözülebilir olması biçiminde verildiğinden H tamlanmışır.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Kabul edelim ki $\frac{H}{\Phi(H)}$ nin her altgrubu tamlanmış olsun ve $\Phi(H)$ nin her altgrubu H de S -quasinormal olsun. T, H nin altgrubu olsun. O zaman $\frac{T\Phi(H)}{\Phi(H)} \frac{K}{\Phi(H)} = \frac{H}{\Phi(H)}$ ve $\frac{T\Phi(H)}{\Phi(H)} \cap \frac{K}{\Phi(H)} = \frac{(T \cap K)\Phi(H)}{\Phi(H)} = \{e\}$ olacak şekilde $\frac{H}{\Phi(H)}$ nin $\frac{K}{\Phi(H)}$ altgrubu mevcuttur. Bu eşitliklerde $TK = H$ ve $T \cap K \leq \Phi(H)$ olur. Böylece $T \cap K, H$ de S -quasinormaldır. Tanımdan T, H de SS -tümlenmiştir ve H bir SS -tümlenmiş gruptur. $\square$

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde sonlu gruplarda çalışılan SS-tümlenmiş altgrup kavramını sonlu kanonik hipergruplara taşıyarak, hiperyapı özelliklerini çözülebilir hipergruplardan faydalanarak çözümlenmiştir. Çalışmamızda her hipergrup sonlu kanonik hipergrup olarak çalışılmıştır.

4.1. Tanım (i) H hipergrup ve $K \leq H$ olsun. $H = KT$ ve $K \cap T = \{e\}$ olacak şekilde $T \leq H$ varsa K ya H de tamlanmış althipergrup denir.

(ii) H hipergrup ve $K \leq H$ olsun. $H = KT$ ve $K \cap T, T$ nin tüm P Sylow althipergrupları tarafından permüte edilebiliyorsa, yani $P(K \cap T) = (K \cap T)P$ oluyorsa T ye K nin H da SS-tümleyeni ve K ya H nin SS-tümlenmiş althipergrubu denir.

(iii) π asal sayılarının bir kümesi olsun. H hipergrubundaki bir x elemanı için $|x|$ si π kümesindeki her bir asala bölünebiliyorsa bu x elemanına π -eleman denir. p bir asal tamsayı olmak üzere p -eleman tanımı da benzer biçimde verilebilir. Eğer H hipergrubunun mertebesi π kümesindeki asal sayılara bölünebiliyorsa H ye π -hipergrup denir.

4.2. Örnek $\mathbb{Z}_6$ çözülebilir hipergrubunun $H = \langle \bar{2} \rangle$ althipergrubu verilsin. $K = \langle \bar{3} \rangle$ althipergrubu $\mathbb{Z}_6 = H + K$ eşitliği sağlanır. $\mathbb{Z}_6$ nin 2-Sylow ve 3-Sylow althipergrupları sırasıyla $K, \langle \bar{5} \rangle$ ve H dır. $H \cap K = \langle \bar{0} \rangle$ olup $K + \langle \bar{0} \rangle = \langle \bar{0} \rangle + K$ ve $\langle \bar{5} \rangle + \langle \bar{0} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{0} \rangle + \langle \bar{5} \rangle$ ve $H + \langle \bar{0} \rangle = \langle \bar{0} \rangle + H$ dır. Bu şekilde $\mathbb{Z}_6$ nin H althipergrubu SS-tümlenmiştir.

4.3. Önerme H hipergrubunun SS-tümlenmiş olan K althipergrubu verilsin. L, H nin $K \leq L$ olan althipergrubu ise K, L de SS-tümlenmiştir.

Kanıt. Hipotez gereğince $H = KT$ ve H nin tüm P Sylow althipergrupları için $P(K \cap T) = (K \cap T)P$ eşitliği sağlanır. $K \leq L$ olduğundan $L = L \cap H = L \cap (KT) = K(L \cap T)$ eşitliği sağlanır. $L \cap T = T'$ olsun. Buradan $L = KT'$ bulunur. $K \cap T' = K \cap (L \cap T) = K \cap T$ olduğundan K, L nin SS-tümlenmiş althipergrubudur. Böylece istenilen elde edilir. $\square$

4.4. Lemma H hipergrubunun SS-tümlenmiş olan K althipergrubu verilsin. N, H nin $N \leq K$ olan güçlü normal althipergrubu ise $K/N, H/N$ nin SS-tümlenmiş althipergrubudur.

Kanıt. K, H nin SS -tümlenmiş althipergrubu olsun. Bu durumda $H = KT$ ve H nin tüm P Sylow althipergrupları için $P(K \cap T) = (K \cap T)P$ dir. $H = KT$ ve $N \leq K$ iken $\frac{H}{N} = \frac{K}{N} \cdot \frac{TN}{N}$ eşitliği sağlanır. $\frac{K}{N} \cap \frac{TN}{N} = \frac{(K \cap T)N}{N}$ dir. H nin keyfi bir p asal sayısına karşılık gelen p -Sylow althipergrubu L_p ise; her $l \in L$ için $\pi(l) = lN$ kuralı ile verilen $\pi: L \rightarrow \frac{LN}{N}$ güçlü kanonik homomorfizması kullanılarak $\frac{H}{N}$ nin p -Sylow althiper grubunun $\frac{L_p N}{N}$ olduğu açıktır. Ayrıca $\frac{L_p N}{N} \cdot \frac{(K \cap T)N}{N} = \frac{L_p (K \cap T)N}{N} = \frac{(K \cap T)N}{N} \cdot \frac{L_p N}{N}$ eşitliği sağlanır. Böylece $\frac{K}{N}, \frac{H}{N}$ nin SS -tümlenmiş althiper grubudur. $\square$

4.5. Teorem π asalların kümesi ve $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$ olmak üzere H bir hipergrup ve K, H nin SS -tümlenmiş althipergrubu olsun. K, H nin π -althipergrubu ve N, H nin π' -althipergrubu ise $KN/N, H/N$ nin SS -tümlenmiş althiper grubudur.

Kanıt. Hipotez gereğince $(|N|, |K|) = 1$ dir. Buradan $N \cap K = \{e\}$ olup $N \not\leq K$ dir. $H = KT$ ve H nin tüm P Sylow althipergrupları için $P(K \cap T) = (K \cap T)P$ dir. $H = KT$ iken $H = NKT = (NK)T$ elde edilir. Her $P < T$ için $(NK \cap T)P = (N(K \cap T))P = N(P(K \cap T))$ ve N, H nin güçlü normal althipergrubu olduğundan $N(P(K \cap T)) = P(N(H \cap T)) = P(NK \cap T)$ bulunur. Böylece NK, H nin SS -tümlenmiş althiper grubudur. Lemma 4.4 den $\frac{NK}{N}, \frac{H}{N}$ de SS -tümlenmiştir. Dolayısıyla istenilen elde edilir. $\square$

4.6. *Sonuç* H bir hipergrup ve K, H da SS -tümlenmiş althipergrup olsun. $\Phi(L), H$ nin tüm maksimal althipergruplarının arakesiti olsun. $K \leq \Phi(L)$ ise K nin tüm P Sylow althipergrupları için $KP = PK$ dır.

Kanıt. $\Phi(L) \neq L$ ve $K \leq \Phi(L)$ iken $K \leq L$ sağlanır. Hipotez gereğince $H = KT$ ve T nin tüm P Sylow althipergrupları için $(K \cap T)P = P(K \cap T)$ dir. Buradan $L = L \cap H = L \cap KT = K(L \cap T) = \langle K, L \cap T \rangle = L \cap T$ bulunur. Buradan $L \leq T$ olup $K \leq L \leq T$ elde edilir. $K \leq T$ iken $H = KT = T$ dir. $K \cap T = K, T = KT = H$ daki her P Sylow althipergrubu için $KP = PK$ eşitliği elde edilir. $\square$

4.7. Tanım H hipergrup ve $K \leq H$ althipergrup olsun. K dan H ye uzanan güçlü normal althipergrupların sonlu bir zinciri mevcutsa K althipergrubuna H nin güçlü alt normal althipergrubu denir.

4.8. Lemma H hipergrup ve $K \leq H$ olsun. Eğer H nin tüm P Sylow althipergrupları için $KP = PK$ ise K, H nin güçlü alt normal althipergrubudur.

Kanıt. Kabul edelim ki iddia doğru olmasın. Buradan $K \leq H$ ve H nin tüm P Sylow althipergrupları için $KP = PK$ iken K güçlü alt normal olmasın. Bu şartı sağlayan hipergrupların en küçük mertebeli olan H hipergrubu olsun. $N = N_H(K) = \{h^{-1}Kh = K \mid h \in H\}$ için $K \leq N$ ve N, H nin güçlü normal althipergrubudur. Eğer N, H nin öz güçlü normal althipergrubu ise K, N deki her althipergrupla çarpımsal olarak değişmelidir. H nin minimalliği gereğince K, N de güçlü alt normal althipergruptur. N, H nin güçlü normal althipergrubu olduğundan $K \leq \dots \leq H$ güçlü normal althipergruplarının zinciri için $N = N_H(K) = H$ olmalıdır. Bu ise K nin H de güçlü alt normal olması ile çelişir. Kabulümüz yanlış olup istenilen elde edilir. $\square$

4.9. Lemma K, H nin güçlü alt normal althipergrubu ve T, H nin bir minimal güçlü normal althipergrubu ise $T < N_H(K)$ dır.

Kanıt. $K = K_r \leq \dots \leq K_1 \leq H$ ve T, H nin minimal güçlü normal althipergrubu olsun. r üzerine tümevarım uygulayalım. $r = 1$ için K, H nin güçlü normal althipergrubu ise $N_H(K) = H$ olup $T \leq H = N_H(K)$ eşitliği elde edilir. Kabulümüz mertebesi r den küçük olan her hipergrup için sağlansın. T minimal olduğundan $T \cap K_1 = \{e\}$ veya $T \cap K_1 = T$ dir. Eğer $T \cap K_1 = \{e\}$ ise her $t \in T$ ve her $k_1 \in K_1$ için $tk_1 = k_1t$ olup $t \in C_H(K_1)$ bulunur. Böylece $T \leq C_H(K_1)$ ve $K \leq K_1$ olduğundan $T \leq C_H(K) \leq N_H(K)$ dır. $T \cap K_1 = T$ ise $T \leq K_1$ olup H nin bir N minimal alt normal althipergrubu ve H nin bir güçlü normal M althipergrubu için N, M nin minimal normal althipergruplarının çarpımıdır. Böylece $N = T, H = H$ ve $N = K_1$ alınarak N nin K_1 in minimal güçlü normal althipergruplarının bir çarpımı olduğu görülür. $N = N_1 \dots N_k$ ve N_i ler K_1 de minimal althipergrupları mevcuttur. Tümevarım kabulünden $N_i \leq N_H(K)$ olup $T = N \leq N_H(K)$ bulunur ve istenilen elde edilir. $\square$

4.10. Teorem H hipergrubunun çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul H hipergrubunun her maksimal althipergrubunun H de güçlü alt normal olan bir SS -tümleyeninin olmasıdır.

Kanıt. H çözülebilir hipergrup ve K, H nin maksimal althipergrubu olsun. K nin H de güçlü alt normal bir SS -tümleyeni olduğunu göstermeliyiz. $|H|$ üzerine tümevarım uygulayalım. $|H| = 1$ ise iddia açıktır. Mertebesi $|H|$ den küçük olan hipergruplar için iddia doğru olsun. $K_H \neq \{e\}$ olsun. K_H, K nin güçlü normal althipergrubu olup K_H, H de güçlü normaldir. Böylelikle $\left|\frac{H}{K_H}\right| < |H|$ için $\frac{K}{K_H}, \frac{H}{K_H}$ nin maksimal althipergrubu ve hipotezden $\frac{K}{K_H}$ nin $\frac{H}{K_H}$ de bir $\frac{T}{K_H}$ SS -tümleyeni vardır. $\frac{T}{K_H}, \frac{H}{K_H}$ de güçlü alt normaldir. Burada $\frac{T}{K_H} \leq \frac{T_1}{K_H} \leq \dots \leq \frac{H}{K_H}$ güçlü alt normal serisi vardır. Bu serinin K_H ile genişlemesinden $T \leq \dots \leq H$ güçlü alt normal serisi bulunur. $K_H = \{e\}$ olsun. N, H nin minimal normal althipergrubu için $N \not\leq H$ iken $H = KN$, $K \cap N \leq K_H = \{e\}$ olup N, H nin tamlanmış althipergrubudur. Dolayısıyla N, K nin SS -tümleyenidir. Böylece $N \leq H$ güçlü alt normaldir.

Tersine kabulümüz doğru olmasın. H kabulümüzü sağlamayan en küçük mertebeli althipergrup olsun. K, H nin maksimal althipergrubu olmak üzere $H = KT$ ve T nin her P Sylow althipergrubu için $P(K \cap T) = (K \cap T)P$ olan H nin T güçlü alt normal althipergrubu verilsin. Eğer H abel olmayan basit bir hipergrup ise $K \neq H$ olduğundan $T = H$ dır. Lemma 4.8 den K, H de güçlü alt normal althipergruptur. Böylece $K = \{e\}$ olmalıdır. Bu ise H nin p asal mertebeli devirli sonlu hipergrup olması nedeniyle çözülebilir hipergrup olması anlamına gelir ve bir çelişkidir. Şimdi H basit olmasın. N, H nin bir minimal güçlü normal althipergrubu olsun. Hipotezden $\frac{H}{N}$ için iddia doğrudur. H nin minimallüğünden $\frac{H}{N}$ çözülebilirdir. N, H nin tek minimal güçlü normal althipergrubu olduğu ve $\Phi(H)$ da içerilmediği görülür. Buradan H nin $M_H = \{e\}$ olan bir M maksimal althipergrubu mevcuttur. Hipotez gereğince H nin bir T güçlü alt normal althipergrubu için $H = MT$ ve T nin her P' Sylow althipergrubu için $P'(M \cap T) = (M \cap T)P'$ dür. T, H de güçlü alt normal althipergrup olduğundan Lemma 4.8 den $M \cap T, H$ da güçlü alt normaldir. Şayet $M \cap T \neq \{e\}$ ise L yi $M \cap T$ tarafından içerilen H nin bir minimal güçlü alt normal althipergrubu olarak alabiliriz. $L \cap N, L$ nin güçlü normal althipergrubu ve L minimal güçlü alt normal althipergrup olduğu için $L \cap N = \{e\}$ yada $L \cap N = L$ dir. Böylece $L \leq N$ bulunur. Lemma 4.9 dan N, L yi normaller. Eğer $L \cap N = \{e\}$ ise $NL = N \times L$ olup $L \leq C_H(N) = \{e\}$ dir. Buradan $L = \{e\}$ bulunur. Eğer $L \leq N$ ise $M \cap T = \{e\}$ bulunur.

Böylece benzer kanıt yöntemi kullanılarak H nin tüm minimal güçlü alt normal althipergruplarının N tarafından içerildiği gösterilebilir. Her biri abel olmayan basit hipergruplara izomorf olan N_i ler için $N = N_1 N_2 \dots N_r$ olsun. N_i lerin K nin tüm minimal güçlü alt normal althipergrupları ile çakıştığı görülür. Bütünlüğünü bozmadan $N_1 \leq K$ alalım. Öyle bir p asalı için $p \mid [H:M] = |T|$ dir. Bundan dolayı H nin çözülebilir güçlü normal althipergrubu vardır. N tek minimal güçlü normal olarak bu güçlü normal althipergrup tarafından içerildiğinden N çözülebilirdir. $\frac{H}{N}$ ve N çözülebilir olduğundan (Vasil'ev ve Zieschang, 2022) deki Lemma 7.3 den H çözülebilir olur ki bu ise çelişkidir. O halde kabulümüz yanlış olup istenen elde edilir. $\square$

4.11. *Sonuç* H hiper grubunun çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul H nin herhangi bir M maksimal althipergrubu için H nin $H = MT$ ve $M \cap T \leq M_H$ olan bir T güçlü alt normal althiper grubunun olmasıdır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, (Guo ve Lu, 2012) makalesinde çalışılan sonlu gruplarda SS -tümlenmiş altgrup kavramından yola çıkılarak bu kavramın hipergrup teorideki önemli özelliklerine yer verilmiştir. Böylece SS -tümlenmiş althipergrupların hipergruplarda çözülebilirlik kavramıyla sınıflandırılmasında kullanıldığı gösterilmiştir. (Davvaz ve Leoreanu-Fotea, 2007) kaynağından faydalanarak sonlu kanonik hipergrupların SS -tümlenmiş althipergrupları tanımlanarak hiperyapı özellikleri Sylow althipergruplar yardımıyla çalışılmıştır. Ayrıca sonlu kanonik hipergrup sınıfının çözülebilir hipergruplar ile bağıntısına yer verilmiştir.

KAYNAKLAR

- Ameri, R., Amiri-Bideshki, M., Saeid, A. B. and Hoskova-Mayerova, S. (2016). Prime filters of hyperlattices, *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta Seria Matematica*, 24(2), 15-26.
- Ameri, R., Amiri-Bideshki, M., Hoskova-Mayerova, S. and Saeid, A. B. (2017). Distributive and Dual Distributive Elements in Hyperlattices, *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, Seria Matematica*, 25(3), 25-36.
- Ameri, R., Kordi, A. and Hoskova-Mayerova, S. (2017). Multiplicative hyperring of fractions and coprime hyperideals, *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, Seria Matematica*, 25(1), 5-23.
- Asaad, M. and Shaalan, A. (1989). On supersolvability of finite groups, *Archiv der Mathematik*, 53, 318-326.
- Asaad, M. (1998). On maximal subgroups of Sylow subgroups of finite groups, *Communications in Algebra*, 26 3647-3652.
- Asar, A. O., Arıkan, A. ve Arıkan, A. (2022). *Cebir*, Palme yayınları, ISBN: 978-605-282-841-0.
- Baer, R. (1957). Classes of finite groups and their properties, *Illinois Journal of Mathematics* 1,115-187.
- Ballester-Bolinches, A. and Perez-Ramos, M. D. (1996). A question of R. Maier concerning formations, *Journal of Algebra*, 182 738-747.
- Ballester-Bolinches, A. and Guo, X. (1999). On complemented subgroups of finite groups, *Archiv der Mathematik*. 72 161-166.
- Ballester Bolinches, A. Wang, Y. and Xiuyun, G. (2000). C-supplemented subgroups of finite groups, *Glasgow Mathematical Journal*, 42(3) 383-389.
- Ballester-Bolinches, A. Wang, Y. and Guo, X. (2000). C-supplemented subgroups of finite groups, *Glasgow Mathematical Journal*, 42, 383-389.
- Ballester-Bolinches, A., Cosey, J. and Pedraza-Aguilera, M.C. (2001). On products of finite supersoluble groups, *Communications in Algebra*, 29 3145-3152.
- Chvalina, J., Hoskova-Mayerova, S. and Deghan Nezhad, A. (2013). General actions of hypergroups and some applications, *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, Seria Matematica*, 21(1), 59-82.

- Chvalina, J. and Hoskova-Mayerova, S. (2014). On certain proximities and preorderings on the transposition hypergroups of linear first-order partial differential operators, *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, Seria Matematica*, 22(1), 85-103.
- Corsini, P. (1993). *Prolegomena of Hypergroup Theory*, Second edition, Aviani editore, Tricestino.
- Corsini, P. and Leoreanu, V. (2003). *Applications of Hyperstructures Theory*. Advanced in Mathematics, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht.
- Cristea, I. and Hoskova-Mayerova, S. (2009). Fuzzy topological hypergroupoids, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 6(4), 11-19.
- Davvaz, B. and Leoreanu-Fotea, V. (2007). *Hyperring Theory and Applications*. International Academic Press, USA.
- Davvaz, B. (2013). Polygroup Theory and Related Systems, *World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.*, Hackensack, NJ.
- Davvaz, B. and Leoreanu-Fotea, V. (2022). Hypergroup Theory, *World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.*, ISBN 978-981-124-938-9.
- Doerk, K. and Hawkes, T. (1992). Finite soluble groups, *Walter de Gruyter*, Berlin., ISBN 3-11-012892-6.
- Freni, D. (1991). Une note sur le cur d'un hypergroupe et sur la cloture transitive $\beta^* \circ \beta$, *Rivista di Matematica Pura Application*, 8, 153-156.
- Freni, D. (2002). A new characterization of the derived hypergroup via strongly regular equivalences, *Communications in Algebra* 30, 3977-3989.
- Freni, D. (2004). Strongly transitive geometric spaces: applications to hypergroups and semigroups theory, *Communications in Algebra* 32, 969-988.
- Gorenstein, D. (1968). *Finite groups.*, Harper & Row, New York., ISBN 0-8284-0301-5.
- Guo, X. and Lu J. (2012). On SS-supplemented Subgroups of Finite Groups and Their Properties, *Glasgow Mathematical Journal*, 54, 481-491.
- Hall, P. (1937). Complemented groups, *Journal of the London Mathematical Society.*, 12, 201-204.

- Hoskova-Mayerova, S. (2012). *Topological hypergroupoids*, Computers and Mathematics with Applications, 64(9), 2845-2849.
- Hungerford, T.W. (2000). *Algebra*, Mathematics Subject Classification, 0- 387- 90518- 9.
- Isaacs, I.M. (1994). *Algebra: A Graduate Course*. Brooks/Cloe. ISBN: 0- 534- 19002- 2.
- Ito, N. (1955). Über das Produkt von zwei abelschen Gruppen, *Mathematische Zeitschrift*, 62 400-401.
- Jantani, F. Jafarpour, M. Mousavi and S. Sh. Leoreonu, V. (2017). On order of elements in hypergroups and p-Sylow subhypergroups, *Communications in Algebra*, 45, 12, 5092-5102.
- Kegel, O. H. (1961). Produkt nilpotenter Gruppen, *Archiv der Mathematik*. 12 90-93.
- Kegel, O. H. (1962). Sylow-Gruppen and Subnormalteiler endlicher Gruppen, *Mathematische Zeitschrift*. 78 205-221.
- Koskas, M. (1970). Groupoides, demi-hypergroupes et hypergroupes, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. 49, 155-192.
- Li, S. Shen., Z. Liu, J. and Liu, X. (2008). The influence of SS_quasinormality of some subgroups on the structure of finite groups, *Journal of Algebra*, 319, 4275-4287.
- Maier, R. (1992). A completeness property of certain formations, *Bulletin of the London Mathematical Society*, 24 540-544.
- Marty, F. (1934). Sur une generalization de la notion de groupe, *8th Congress Mathematicians Scandenaves, Stockholm*, 45-49.
- Nişancı Türkmen, B. ve Türkmen, E. (2021). *Grup Teorisi-I*, Amasya Üniversitesi Yayınları, No:1, ISBN:978-605-80546-6.
- Robinson, D.J.S. (1991). *A Course in the Theory of Groups*, Urbana-Champaign, IL 61801 USA. ISBN:978-1-4612-6443-9.
- Rose, J.S. (1978). *A Course on Group Theory*, Cambridge University Press, ISBN: 0 521 21 409 2.
- Saeid, A. B. Flaut, C. Hoskova-Mayerova, S. Afshar, M. Cristea, R. L. and Rafsanjani Kuchaki, M. (2018). Some connections between BCK-algebras and n-ary block codes. *Soft Computing*, 22, 41–46.

- Shojaei, H. and Ameri, R. (2015). *On hypergroups with trivial fundamental group*, 46th Annual Iranian Mathematics Conference (AIMC46), 25-28 August 2015, Yazd University, Yazd, Iran, 238-241.
- Shojaei, H. and Ameri, R. (2016). Some results on categories of Krasner Hypermodules, *Journal of Fundamental and Applied Sciences*, 8(3S), 2298-2306.
- Suprunenko, D.A. (1976). *Matrix groups*, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, Theorem II.9.4.
- Vasil'ev, A. and Zieschang, P.H. (2022). Solvable hypergroups and a generalization of Hall's theorems on solvable groups to assoriation schemes, *Journal of Algebra*, 594, 733-750.
- Velrajan, M. and Arjunan, A. (2010). Note on isomorphism theorems of hyperrings, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*., Article ID 376985.
- Vougiouklis, T. (1994). *Hyperstructures and their Representations*, Hadronic Press, Inc., Palm Harber, USA.
- Zhan, J., Mousavi, S.Sh. and Jafarpour, M. (2011). *On hyperactions of hypergroups*, Scientific Bulletin-University Politehnica of Bucharest., Series A, Vol. 73, Iss. 1, ISSN 1223-7027.
- Wielandt, H. (1958). Über den normalisator der subnormalen untergruppen, *Mathematische Zeitschrift*. 69 463-465.
- Wielandt, H. (1958). Über Produkte von nilpotenten gruppen, *Illinois Journal of Mathematics*, 2 611-618.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Sena CAM
Yabancı Dili : İngilizce, Almanca

Eğitim Durumu

Lise : Çorum Atatürk Anadolu Lisesi – Çorum Merkez Ada Temel Lisesi
Lisans : Amasya Üniversitesi, Fen – Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü