

38814

SONLU KARMA DAĞILIM MODELLERİ
(SÜREKLİ TİP - TEK DEĞİŞKENLİ)

HAMZA EROL

038814

Ç.Ü.
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

ADANA
NİSAN 1995

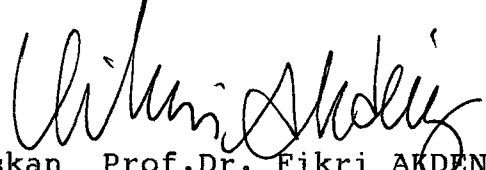
Bu alışma proje olarak, Çukurova Üniversitesi Araştırma Fonu tarafından desteklenmiştir.

Proje Yöneticisi: Prof.Dr. Fikri AKDENİZ

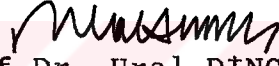
Proje No : FBE - 94 / 100

ukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Mdrlgne,

Bu alışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında
DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.



Başkan Prof.Dr. Fikri AKDENİZ



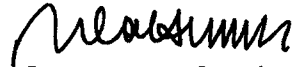
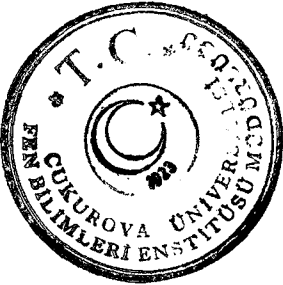
ye Prof.Dr. Ural DİNÇ



ye Prof.Dr. Ömer GEBİZLİOĞLU

Kod No : 300

Yukarıdaki imzaların adı geçen ğretim üyelerine ait
olduğunu onaylarım.



Prof.Dr. Ural DİNÇ

Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

KONU	SAYFA NO
TABLO LİSTESİ	VI
ŞEKİL LİSTESİ	IX
ÖZ	XII
ABSTRACT	XIII
GİRİŞ	XIV
1. BÖLÜM	1
SONLU KARMA DAĞILIM MODELİNİN TANIMI-SONLU KARMA DAĞILIM MODELLERİYLE İLGİLİ ÇALIŞILAN İSTATİSTİKSEL PROBLEMLERİN BAŞLICALARI VE BU PROBLEMLERE YAKLAŞIMLAR	
1.1. Sonlu Karma Dağılım Modelinin Tanımı	1
1.2. Sonlu Karma Dağılım Modelleriyle İlgili Çalışılan İstatistiksel Problemler Ve Bu Problemlere Yaklaşımlar ...	3
1.2.1. Örneklem Formunun Belirlenmesi	3
1.2.2. Bileşen Sayısının Belirlenmesi	8
1.2.3. Sonlu Karma Dağılım Modelindeki Parametrelerin Tahmini	14
2. BÖLÜM	50
SONLU KARMA DAĞILIM MODELLERİNİN UYGULAMALARI VE UYGULAMA ALANLAR	
2.1. Sonlu Karma Dağılım Modellerinin Uygulamaları ve Alanları	50

3. BÖLÜM	58
ÜÇ BİLEŞENLİ ÜSTEL DAĞILIMIN BİR KARMASINDAKİ PARAMETRELERİN TAHMINİ VE ATMOSFERİK KOROZYON SİSTEMLERİNDEKİ METALLERİN KOROZYON HIZLARININ MODELLENMESİ VE İZLENMESİ	
3.1. Korozyon Probleminin Tanımı Ve Üç Bileşenli Karma Dağılım Modelinin Kurulması	58
3.2. Üç Bileşenli Üstel Karma Dağılım Modelindeki Parametrelerin Tahmini	63
3.2.1. μ_1 , μ_2 ve μ_3 Parametrelerinin Tahmini	67
3.2.2. p_1 ve p_2 ($p_3=1-p_1-p_2$) Parametrelerinin Tahmini	70
3.3. Karma Dağılım Modelinin Atmosferik Korozyon Verilerine Bir Uygulaması Ve Ağırlık Kaybı Ölçümlerine Göre Hesaplanmış Ortalama Korozyon Hız Değerlerinin Karma Dağılım Modelleri Kullanılarak Modellenmesi Ve Korozyon Hızının İzlenmesi .	74
3.4. Atmosferik Korozyon Sistemlerindeki Metallerin Ağırlık Kaybı Ölçümleriyle Hesaplanmış Ortalama Korozyon Hız Değerlerine Göre Karma Dağılım Modelleri Kullanılarak Modellenmesinin Sonuçları	83

4. BÖLÜM	95
ÜÇ BİLEŞENLİ NORMAL KARMA DAĞILIMIN BİR KARMASINDAKİ PARAMETRELERİN TAHMİNİ VE BİR BÖLGEDE BULUNAN ALANLARIN ÜÇ DEĞİŞİK SPEKTRAL BANT ÜZERİNDEN ALINAN SPEKTRAL PARLAKLIK DEĞERLERİNE GÖRE MODELLENMESİ	
4.1. Uzaktan Algılama Probleminin Tanımı Ve Üç Bileşenli Karma Dağılım Modelinin Kurulması	95
4.2. Üç Bileşenli Normal Karma Dağılım Modelindeki Parametrelerin Tahmini	100
4.2.1. Denklem Sisteminin Oluşturulması	100
4.2.2. Newton-Raphson İterasyon Yöntemi İçin Uygun Başlangıç Değerlerinin Hesaplanması	105
4.2.3. Newton-Raphson İterasyon Yönteminin Uygulanması	108
4.3. Karma Dağılım Modelinin Uzaktan Algılama Verilerine Bir Uygulaması Ve Bir Bölgedeki Alanların Üç Değişik Spektral Bant Üzerinden Alınan Spektral Parlaklık Değerlerine Göre Karma Dağılım Modelleri Kullanılarak Modellenmesi	111
4.4. Bir Bölgedeki Alanların Üç Değişik Spektral Bant Üzerinden Alınan Spektral Parlaklık Değerlerine Göre Karma Dağılım Modelleri Kullanılarak Modellenmesinin Sonuçları	118

5. BÖLÜM	131
GRUPLANDIRILMIŞ VERİLERİN k BİLEŞENLİ NORMAL DAĞILIMLARININ BİR KARMASINDAKİ PARAMETRELERİN MAKSİMUM LIKELIHOOD YÖNTEMİYLE TAHMİN EDİLMESİ İÇİN BİR ALGORİTMA	
5.1. Gruplandırılmış Verilerin k Bileşenli Normal Dağılımlarının Bir Karmasındaki Parametrelerin Tahmini Probleminin Tanımı	131
5.2. k Bileşenli Normal Karma Dağılım Modeli	137
5.3. k Bileşenli Normal Karma Dağılım Modeli İçin Loglikelihood Fonksiyonunun Oluşturulması	138
5.4. k Bileşenli Normal Karma Dağılım Modeli İçin Loglikelihood Denklemlerinin Oluşturulması	140
5.5. k Bileşenli Normal Karma Dağılım Modeli İçin Oluşturulan Loglikelihood Denklemlerine Standart Newton-Raphson Algoritmasını Uygulamak İçin Uygun Başlangıç Değerlerinin Seçimi	142
5.6. k Bileşenli Normal Karma Dağılım Modeli İçin Oluşturulan Loglikelihood Denklemlerine Standart Newton-Raphson Algoritmasının Uygulanması	143
5.7. $H(Y)^{-1}$ Matrisinin Alt Blok Matris Elemanlarının $H(Y)$ Matrisinin Alt Blok Elemanları Cinsinden Hesaplanması Ve Standart Newton-Raphson Algoritmasının Parçalanmış Matrisler Cinsinden İfade Edilmesi	149

5.8. Gruplandırılmış Verilerin k Bileşenli Normal Dağılımlarının Bir Karmasındaki Parametrelerin Maksimum Likelihood Yöntemiyle Birlikte Standart Newton-Raphson Algoritmasıyla Tahmin Edilmesinin Sonuçları	162
---	-----

SONUÇLAR VE ÖNERİLER	167
----------------------------	-----

ÖZET	XV
SUMMARY	XIX
KAYNAKLAR	XXII
TEŞEKKÜR	XXXVII
ÖZGEÇMİŞ	XXXVIII

TABLO LİSTESİ

<u>TABLO</u>	<u>SAYFA NO</u>
Tablo 1. Sürekli tip örneklem uzayları için bazı uzaklık ölçümleri	39
Tablo 2. Bayes analizinde verilenler ve çıktıları	45
Tablo 3. Zooloji alanındaki uygulamaların başlıcaları	51
Tablo 4. Tıp alanındaki uygulamaların başlıcaları	52
Tablo 5. Palaeontoloji alanındaki uygulamaların başlıcaları .	52
Tablo 6. Mikro biyoloji alanındaki uygulamaların başlıcaları	53
Tablo 7. Botanik alanındaki uygulamaların başlıcaları	53
Tablo 8. Su ürünleri alanındaki uygulamaların başlıcaları ...	54
Tablo 9. Kalite kontrol alanındaki uygulamaların başlıcaları	55
Tablo 10. Ziraat alanındaki uygulamaların başlıcaları	55
Tablo 11. Jeoloji alanındaki uygulamaların başlıcaları	56
Tablo 12. Ekonomi alanındaki uygulamaların başlıcaları	56
Tablo 13. Psikoloji alanındaki uygulamaların başlıcaları	57
Tablo 14. Diğer alanlardaki uygulamaların başlıcaları	57
Tablo 15. %70 ile %100 arasında değişen nemlilik oranlarında SO ₂ içeren atmosferdeki galvanizlenmiş demir için ortalama korozyon hız değerleri	76
Tablo 16. %70 ile %100 arasında değişen nemlilik oranlarında NH ₃ içeren atmosferdeki galvanizlenmiş demir için ortalama korozyon hız değerleri	76
Tablo 17. %70 nemlilik oranlarında SO ₂ içeren atmosferdeki galvanizlenmiş demir için ortalama korozyon hız değerlerine göre elde edilen parametre tahminleri .	77

TABLO

SAYFA NO

Tablo 18. %80 nemlilik oranlarında SO_2 içeren atmosferdeki galvanizlenmiş demir için ortalama korozyon hız değerlerine göre elde edilen parametre tahminleri .	77
Tablo 19. %90 nemlilik oranlarında SO_2 içeren atmosferdeki galvanizlenmiş demir için ortalama korozyon hız değerlerine göre elde edilen parametre tahminleri .	77
Tablo 20. %100 nemlilik oranlarında SO_2 içeren atmosferdeki galvanizlenmiş demir için ortalama korozyon hız değerlerine göre elde edilen parametre tahminleri .	78
Tablo 21. %70 nemlilik oranlarında NH_3 içeren atmosferdeki galvanizlenmiş demir için ortalama korozyon hız değerlerine göre elde edilen parametre tahminleri .	78
Tablo 22. %80 nemlilik oranlarında NH_3 içeren atmosferdeki galvanizlenmiş demir için ortalama korozyon hız değerlerine göre elde edilen parametre tahminleri .	78
Tablo 23. %90 nemlilik oranlarında NH_3 içeren atmosferdeki galvanizlenmiş demir için ortalama korozyon hız değerlerine göre elde edilen parametre tahminleri .	78
Tablo 24. %100 nemlilik oranlarında NH_3 içeren atmosferdeki galvanizlenmiş demir için ortalama korozyon hız değerlerine göre elde edilen parametre tahminleri .	79
Tablo 25. A_1 alanı için uzaktan algılama verileri	112
Tablo 26. A_2 alanı için uzaktan algılama verileri	112
Tablo 27. A_3 alanı için uzaktan algılama verileri	113

TABLOSAYFA NO

Tablo 28. A_1 alanı için Newton-Raphson iterasyon yönteminin başlangıç değerleri	114
Tablo 29. A_1 alanı için Newton-Raphson iterasyon yönteminin sonuç değerleri ve parametre tahminleri	115
Tablo 30. A_2 alanı için Newton-Raphson iterasyon yönteminin başlangıç değerleri	115
Tablo 31. A_2 alanı için Newton-Raphson iterasyon yönteminin sonuç değerleri ve parametre tahminleri	116
Tablo 32. A_3 alanı için Newton-Raphson iterasyon yönteminin başlangıç değerleri	116
Tablo 33. A_3 alanı için Newton-Raphson iterasyon yönteminin sonuç değerleri ve parametre tahminleri	117
Tablo 34. IBM/PC AT (486 DX) tipindeki bilgisayarlarda aynı anda aktif hafızada kullanılabilecek matris sayıları ve matris boyutları	147

ŞEKİL LİSTESİ

ŞEKİL	SAYFA NO
Şekil 1. Korozyon hızı modeli için geliştirilen bilgisayar programının algoritması	73
Şekil 2. %70 ile %100 arasında değişen nemlilik oranlarında SO_2 içeren atmosferdeki galvanizlenmiş demirin [0,50] aralığında ortalama korozyon hız değerleri için karma dağılım modelleri ya da olasılık yoğunluk fonksiyonları	80
Şekil 3. %70 ile %100 arasında değişen nemlilik oranlarında SO_2 içeren atmosferdeki galvanizlenmiş demirin [30,120] aralığında ortalama korozyon hız değerleri için karma dağılım modelleri ya da olasılık yoğunluk fonksiyonları	80
Şekil 4. %70 ile %100 arasında değişen nemlilik oranlarında SO_2 içeren atmosferdeki galvanizlenmiş demirin [100,240] aralığında ortalama korozyon hız değerleri için karma dağılım modelleri ya da olasılık yoğunluk fonksiyonları	81
Şekil 5. %70 ile %100 arasında değişen nemlilik oranlarında NH_3 içeren atmosferdeki galvanizlenmiş demirin [0,50] aralığında ortalama korozyon hız değerleri için karma dağılım modelleri ya da olasılık yoğunluk fonksiyonları	81

ŞEKİLSAYFA NO

- Şekil 6. %70 ile %100 arasında değişen nemlilik oranlarında NH_3 içeren atmosferdeki galvanizlenmiş demirin [30,120] aralığında ortalama korozyon hız değerleri için karma dağılım modelleri ya da olasılık yoğunluk fonksiyonları 82
- Şekil 7. %70 ile %100 arasında değişen nemlilik oranlarında NH_3 içeren atmosferdeki galvanizlenmiş demirin [100,240] aralığında ortalama korozyon hız değerleri için karma dağılım modelleri ya da olasılık yoğunluk fonksiyonları 82
- Şekil 8. %70 nemlilik oranlarında NH_3 içeren atmosferdeki galvanizlenmiş demirin [0,100] aralığında ortalama korozyon hız değerleri için karma dağılım modeli ya da olasılık yoğunluk fonksiyonu 85
- Şekil 9. %70 nemlilik oranlarında NH_3 içeren atmosferdeki galvanizlenmiş demirin [80,150] aralığında ortalama korozyon hız değerleri için karma dağılım modeli ya da olasılık yoğunluk fonksiyonu 86
- Şekil 10. %70 nemlilik oranlarında NH_3 içeren atmosferdeki galvanizlenmiş demirin [130,250] aralığında ortalama korozyon hız değerleri için karma dağılım modeli ya da olasılık yoğunluk fonksiyonu 86

ŞEKİLSAYFA NO

- Şekil 11. %70 nemlilik oranlarında NH_3 içeren atmosferdeki galvanizlenmiş demirin [200,400] aralığında ortalama korozyon hız değerleri için karma dağılım modeli ya da olasılık yoğunluk fonksiyonu 87
- Şekil 12. %70 nemlilik oranlarında NH_3 içeren atmosferdeki galvanizlenmiş demirin [1800,2500] aralığında ortalama korozyon hız değerleri için karma dağılım modeli ya da olasılık yoğunluk fonksiyonu 87
- Şekil 13. %70 nemlilik oranlarında NH_3 içeren atmosferdeki galvanizlenmiş demirin [3000,5000] aralığında ortalama korozyon hız değerleri için karma dağılım modeli ya da olasılık yoğunluk fonksiyonu 88
- Şekil 14. A_1 alanı için karma dağılım modelinin bileşenleri . 121
- Şekil 15. A_1 alanı için karma dağılım modeli 121
- Şekil 16. A_2 alanı için karma dağılım modelinin bileşenleri . 122
- Şekil 17. A_2 alanı için karma dağılım modeli 122
- Şekil 18. A_3 alanı için karma dağılım modelinin bileşenleri . 123
- Şekil 19. A_3 alanı için karma dağılım modeli 123
- Şekil 20. Standart Newton-Raphson yönteminin parçalanmış matrisler cinsinden ifadesinin bilgisayarda akış diagramı 161

ÖZ

Sonlu karma dağılım modellerinde ilgilenilen ve çalışılan problemler üç ana grupta ele alınır. Bu problemler: sonlu karma dağılım modelleri için örneklem formunun belirlenmesi, sonlu karma dağılım modellerindeki bileşen sayısının belirlenmesi ve sonlu karma dağılım modellerindeki parametrelerin tahminidir.

Bu çalışmanın amacı: sonlu karma dağılım modeli için örneklem formunun bilindiği ve sonlu karma dağılım modelindeki bileşen sayısının belirli olduğu durumlarda sonlu karma dağılım modelindeki parametreleri tahmin etmek; kimyasal, fiziksel ve biyolojik problemler için sonlu karma dağılım modellerinin uygulama alanlarını araştırmaktır.

ABSTRACT

There are three main types of problems interested and studied in finite mixture distribution models. These includes: determining the sample form for finite mixture distribution models, determining the number of components in finite mixture distribution models and estimating the parameters in finite mixture distribution models.

The purpose of this work is estimating the parameters in finite mixture distribution model, finding application areas of finite mixture distribution models for chemical, physical and biological problems when the sample form of finite mixture distribution model is known and the number of components in finite distribution model is fixed.

GİRİŞ

Tek değişkenli dağılım modelleri genellikle yerleşim ya da konum, yayılım ve şekil parametrelili olmak üzere içerisinde altgrup bulunmayan kitleden alınan ve kitleyi temsil eden verilere ya da örnekleme bir rastgele değişkene bağlı olarak olasılık yoğunluk fonksiyonları uydurmak için yaygın olarak kullanılan dağılım modelleridir. Bu durumda, kitlede altgrup bulunmadığından bir karma dağılım modeli probleminden söz edilemez.

Tek değişkenli sonlu karma dağılım modelleri ise herbir altgrubunun kendi yerleşke ya da konum, yayılım ve şekil parametrelerine (olasılık yoğunluk fonksiyonlarına) sahip olmak üzere içerisinde sonlu sayıda (en az iki) altgrup bulunan kitleden alınan ve kitleyi temsil eden verilere ya da örnekleme bir rastgele değişkene bağlı olarak olasılık yoğunluk fonksiyonları uydurmak için birçok alanda kullanılan dağılım modelleridir. Diğer bir ifadeyle sonlu karma dağılım modelleri, herbirinin belirli bir karma oranı ile sonlu sayıdaki olasılık yoğunluk fonksiyonlarının bir toplamı olarak ifade edilebilen dağılım modelleridir.

1. BÖLÜM

SONLU KARMA DAĞILIM MODELİNİN TANIMI - SONLU KARMA DAĞILIM MODELLERİYLE İLGİLİ ÇALIŞILAN İSTATİSTİKSEL PROBLEMLERİN BAŞLICALARI VE BU PROBLEMLERE YAKLAŞIMLAR

1.1. Sonlu Karma Dağılım Modelinin Tanımı

Tanım 1.1.1: X bir rastgele değişken olmak üzere bir X örneklem uzayından değerler alsın. X rastgele değişkeninin dağılımı; $X \in X$ olmak üzere,

$$f(x) = p_1 f_1(x) + \dots + p_k f_k(x) \quad (1.1.1)$$

şeklindeki bir olasılık yoğunluk fonksiyonuyla tanımlanır.

Burada $i=1, \dots, k$ olmak üzere,

i- $f_i(x) \geq 0$

ii- $\int_X f_i(x) dx = 1$

iii- $0 \leq p_i \leq 1, p_1 + \dots + p_k = 1$

dir.

Bu durumdaki X rastgele değişkenine (1.1.1) ile tanımlı $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlu bir sonlu karma dağılım modeline sahiptir denir.

Ayrıca, $p_1, \dots, p_k$ parametrelerine karma oranları ve $f_1(x), \dots, f_k(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarına da karma dağılım modelinin bileşen yoğunlukları denir.

Birçok durumda $f_1(x), \dots, f_k(x)$ belirtilmiş parametrik şekillere sahiptir ve (1.1.1) 'deki eşitliğin,

$$f(x) = p_1 f_1(x; \theta_1) + \dots + p_k f_k(x; \theta_k) \quad (1.1.2)$$

şeklinde gösterimi de vardır.

Burada $i=1, \dots, k$ olmak üzere θ_i , $f_i(x)$ 'de bulunan parametreleri göstermektedir.

Sonlu karma dağılım modelinde $i=1, \dots, k$ için tüm karma oranları parametrelerinin topluluğunu $p=(p_1, \dots, p_k)$ ' , bileşen yoğunluklarında bulunan tüm parametrelerin topluluğunu $\theta=(\theta_1, \dots, \theta_k)$ ' ve sonlu karma dağılım modelinde bulunan tüm farklı parametrelerin topluluğunun tamamını da $\Phi=(p, \theta)$ ' ile gösterelim. Burada Ω bir parametre uzayı olmak üzere $\Phi \in \Omega$ dır.

(1.1.2) 'deki ifadede bulunan bileşen yoğunluklarının tamamının da aynı parametrik ailenin elemanı olması gerekmez. Bununla birlikte birçok uygulamada bileşen yoğunluklarının tamamı aynı parametrik ailenin elemanıdır.

Bu durumda sonlu karma dağılım modelinin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x; \Phi) = \sum_{i=1}^k p_i f_i(x; \theta_i) \quad (1.1.3)$$

şeklindedir.

(1.1.3) 'de k belirli (fixed) olmak üzere karma dağılım modelindeki bileşen sayısını göstermektedir.

1.2. Sonlu Karma Dağılım Modelleriyle İlgili Çalışılan İstatistiksel Problemler Ve Bu Problemlere Yaklaşımlar

1.2.1. Örneklem Formunun Belirlenmesi

Sonlu karma dağılım modelleriyle ilgili birçok uygulamada verilerin istatistiksel analizi yapılırken ve verilere modeller uydurulurken ilk belirlenmesi gereken, örneklem formudur.

Uygulamalarda, sonlu karma dağılım modellerinde çok sık karşılaşılan örneklem formları ve bunlara karşılık gelen likelihood veya log-likelihood fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

Render ve Walker (1984), uygulamalarda çok sık karşılaşılan örneklem formlarını dört gruba ayırmıştır. Buna göre:

1. tip örneklem: $x_1, \dots, x_n$; (1.1.3) 'deki sonlu karma dağılım modelinden alınmış n hacimlik, düzenlenmemiş birbirinden bağımsız gözlemler olsun. $j=1, \dots, n$ için her bir x_j 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x; \Phi)$ 'dir. Yani 1. tip örneklem, $f(x; \Phi)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlu rastgele değişkenlerin bir kümesidir. Bu durumda $S_1 = \{x_j\}_{j=1, \dots, n}$ 'dir.

Bu örneklem formu için log-likelihood fonksiyonu,

$$L_1(\Phi) = \sum_{j=1}^n \log f(x_j; \Phi) \quad (1.2.1)$$

şeklindedir.

2. tip örneklem: $j_1, \dots, j_m$ negatif olmayan tamsayılar olsun. Sonlu karma dağılım modelinde gerçekte m tane bileşen bulunsun. $i=1, \dots, m$ olmak üzere, $\{y_{ik}\}_{k=1, \dots, j_i}$, i . bileşen için

birbirinden bağımsız gözlemler olsun. $i=1, \dots, m$ ve $k=1, \dots, j_i$ için her bir y_{i_k} 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_i(y_{i_k}; \theta_i)$ 'dir.

Yani 2. tip örneklem, $f_i(y_{i_k}; \theta_i)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlu

rastgele değişkenlerin bir kümesidir. Bu durumda

$$S_2 = \bigcup_{i=1}^m \{y_{i_k} \mid k=1, \dots, j_i\} \quad \text{'dir.}$$

Bu örneklem formu için log-likelihood fonksiyonu,

$$L_2(\Phi) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{j_i} \log f_i(y_{i_k}; \theta_i) \quad (1.2.2)$$

şeklindedir.

2. tip örneklemde j_i 'ler karma oranları hakkında bilgi içermezler.

3. tip örneklem: (1.1.3)'teki sonlu karma dağılım modelinden K tane birbirinden bağımsız gözlemler alınmış olsun. Bu gözlemler daha sonra düzenlensin. Bu düzenlemede $i=1, \dots, m$

olmak üzere $K = \sum_{i=1}^m K_i$ olacak şekilde $\{z_{i_k} \mid k=1, \dots, K_i\}$, i . bileşen

için birbirinden bağımsız gözlemleri gösterebilir. Bu durumda

$$S_3 = \bigcup_{i=1}^m \{z_{i_k} \mid k=1, \dots, K_i\} \quad \text{'dir.}$$

Bu örneklem formu için log-likelihood fonksiyonu,

$$L_3(\Phi) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{K_i} \log \{p_i f_i(z_{i_k}; \theta_i)\} + \log \frac{K!}{K_1! \dots K_m!} \quad (1.2.3)$$

şeklindedir.

3. tip örnekleme K_i 'ler karma oranları hakkında bilgi içerirler ama bileşen yoğunluklarındaki parametreler hakkında bilgi içermezler.

4. tip örneklem: (1.1.3) 'deki sonlu karma dağılımdan M tane birbirinden bağımsız düzenlenmemiş gözlemler alınmış olsun. Daha sonra gözlemlerin bir kısmı düzenlensin, bir kısmı da düzenlenmeden bırakılsın. Düzenleme yapılan kısımda $i=1, \dots, m$ olmak üzere $\{w_{i_k}\}_{k=1, \dots, M_i}$, i . bileşen için birbirinden

bağımsız gözlemleri göstermektedir. $\{w_{0_k}\}_{k=1, \dots, M_0}$ 'da

düzenlenmemiş olarak bırakılan birbirinden bağımsız gözlemleri

göstermektedir. Bu durumda $S_4 = \bigcup_{i=0}^m \{w_{i_k}\}_{k=1, \dots, M_i}$ 'dir.

Bu örneklem formu için log-likelihood fonksiyonu,

$$L_4(\Phi) = \sum_{k=1}^{M_0} \log f(w_{0_k}; \Phi) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{M_i} \log \{p_i f_i(w_{i_k}; \theta_i)\} + \log \frac{M!}{M_0! \dots M_m!} \quad (1.2.4)$$

şeklindedir.

4. tip örnekleme M_i 'ler karma oranları ve bileşen yoğunluklarındaki parametreler hakkında bilgi içerirler.

1. tip düzenlenmemiş örneklem S_1 , literatürün tamamına yakınında sonlu karma dağılım modelleri üzerinde ele alınan bir örneklem çeşitidir.

2. tip ve 3. tip örnekleme sırasıyla karşılık gelen S_2 ve S_3 tamamıyla düzenlenmiş örneklemelerdir. Aralarındaki en önemli niteliksel fark; 2. tip örneklem S_2 'deki j_i sayılarının içermemesine karşın, 3. tip örneklem S_3 'deki K_i sayılarının

karma oranları hakkında bilgi içermesidir. Yani eğer karma oranlarının tahminiyle ilgileniliyorsa S_2 örnekleme, diğer tipteki örneklemeleri içeren büyük bir örneklemin bir alt kümesi olarak kullanışlıdır.

Hosmer (1973-a), iki tek değişkenli olasılık yoğunluk fonksiyonunun karma dağılım modelleri için S_1 , S_1US_2 ve S_1US_3 formundaki örneklemeleri ele aldı. Bundan önce Tan ve Chang (1972-a), Hosmer 'in S_1US_2 formundaki örneklemine çok benzer bir örnekleme kullanarak genetik değişimi açıklamada karma dağılım modellerinin uygulamasını içeren bir problemi çalıştı. Dick ve Bowden (1973), $m=2$ ve $j_2=0$ olan S_1US_2 formundaki bir örnekleme kullandı. Hosmer ve Dick (1977), 1. tip, 2. tip, 3. tip ve bunların bileşimleri için Fisher informasyon matrislerini hesapladılar.

4. tip örneklem S_4 , kontrollü (censored) örnekleme içeren bir karma dağılım modeli problemiyle ilgilidir. 3. tip örneklem S_3 'ün K_1 sayılarının karma oranları hakkında bilgi içermesindeki gibi S_4 'ün M_1 sayıları da karma oranları hakkında bilgi içerir. K_1 sayılarının içermemesine rağmen, M_1 sayıları aynı zamanda bileşen yoğunluklarındaki parametreler hakkında da bilgi içerir.

Mendenhall ve Harder (1958), 4. tip örneklemin nasıl ortaya çıktığını gösteren ilginç aynı zaman da bilgilendirici bir örneği, yaşam testi alanında incelediler.

Titterington ve ark. (1985, s.3) 'da örneklem formlarını ve karşılık gelen likelihood fonksiyonlarını ele aldılar. Buna göre:

1. tip örneklem: Bu tip bir örneklem; birbirinden bağımsız n hacimlik $x_1, \dots, x_n$ rastgele gözlemlerinden oluşur. Yani örneklem,

$\{x_1, \dots, x_n\}$ formundadır. Burada X rastgele değişkeninin dağılımı, (1.1.3) 'deki sonlu karma dağılım modelinin olasılık yoğunluk fonksiyonuyla tanımlanır.

Bu örneklem formu için likelihood fonksiyonu,

$$l_0(\Phi) = \prod_{j=1}^n f(x_j; \Phi) = \prod_{j=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^k p_i f_i(x_j; \theta_i) \right\} \quad (1.2.5)$$

şeklindedir.

2. tip örneklem: Sonlu karma dağılım modellerinin bazı direk uygulamalarında, karma dağılım modelinden alınmış $\{x_1, \dots, x_m\}$ rastgele örnekleme ek olarak, bu rastgele örneklemin alt kategorilerinde bulunan her bir eleman hakkında da bilgi vardır. Alt kategorilerin herbiri kendi başına bağımsız gözlemlerden oluşan rastgele örneklemelerdir. Yani örneklem, $\{x_{jh} : j=1, \dots, k ; h=1, \dots, n_j\}$ formundadır. Burada n_j 'lerden en az biri sıfırdan farklı olmalıdır.

Bu tip örneklem için, gözlemler kategorilere ayrılrsa da ayrılmasa da örneklem formu için likelihood fonksiyonu,

$$l_1(\Phi) = l_0(\Phi) \prod_{j=1}^k \prod_{h=1}^{n_j} f_j(x_{jh}; \theta_j) \quad (1.2.6)$$

şeklindedir.

3. tip örneklem: 2. tip örneklemedekilere ek olarak kategorilere ayrılmış bağımsız gözlemlerin her bir kategorisi için $p_1, \dots, p_k$ oranları da bilinsin.

Bu örneklem formu için likelihood fonksiyonu,

$$l_2(\Phi) = l_1(\Phi) \prod_{j=1}^k p_j^{n_j} \quad (1.2.7)$$

şeklindedir.

Her iki çalışmada da örneklem formlarının bu şekilde belirlenmesi, herhangi bir özel uygulama için çok önemlidir.

1.2.2. Bileşen Sayısının Belirlenmesi

Sonlu karma dağılım modelleriyle ilgili uygulamalarda, verilere modeller uydurulurken belirlenmesi gerekenlerden bir diğeri ise bileşen sayısıdır.

Sonlu karma dağılım modellerinde bileşen sayısının belirli olmadığı durumlarda, bileşen sayısını belirleme problemi çok önemli fakat aynı zamanda çok zor bir problemdir.

Karma dağılım modellerindeki bileşen sayısını belirlemek için bazı kriterler geliştirilmiş ve hipotez testleri oluşturulmuştur.

Bu kriterlerden en önemlileri: Bezdek (1981) tarafından geliştirilen parçalanmış katsayı kriteri (Partitioned Coefficient - PC), Bozdoğan (1983) tarafından geliştirilen Akaike 'nin bilgi kriteri (Akaike's Information Criterion - AIC) ve Windham ve Cutler (1992) 'in geliştirdikleri minimum bilgi oran tahmini ve geçerli hale getirme kriteri (Minimum Information Ratio Estimation and Validation - MIREV) dir.

1. Parçalanmış katsayı kriteri:

(1.2.1) 'deki log-likelihood fonksiyon,

$$L(\Phi) = L_1(\Phi) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n a_{ij} (l_{ij} - \log a_{ij}) \quad (1.2.8)$$

şeklinde de yazılabilir.

Burada,

$$l_{ij} = l_i(x_j; \theta_i) = \log\{p_i f_i(x_j; \theta_i)\} \quad i=1, \dots, k \quad ; \quad j=1, \dots, n$$

ve (1.2.9)

$$a_{ij} = a_i(x_j; \theta_i) = \frac{p_i f_i(x_j; \theta_i)}{\sum_{i=1}^k p_i f_i(x_j; \theta_i)} \quad j=1, \dots, n$$

dir.

a_{ij} katsayıları, altkitlelerin (bileşenlerin) üyeliğinin posterior olasılıklarıdır. Ayrıca a_{ij} 'ler, yığılım miktarının birçok ölçümü için temel teşkil ederler.

Bezdek (1981), parçalanmış katsayı kriterini,

$$PC = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \quad (1.2.10)$$

olarak tanımlamıştır.

Maksimum PC, en iyi çözümü verir.

2. Akaike 'nin bilgi kriteri:

$L_1(\Phi)$, (1.2.1) 'deki gibi olmak üzere $L(\Phi) = L_1(\Phi)$ alınsın.

Bozdoğan (1983), Akaike 'nin bilgi kriterini,

$$AIC = -2cL(\hat{\Phi}) + 3n_p \quad (1.2.11)$$

olarak tanımlamıştır.

Burada

n_p : tahmin edilecek parametrelerin sayısını

n : örneklem hacmini

d : her bir bileşeni tanımlayan parametrelerin sayısını

K : incelenen bileşenlerin en büyük sayısını, numarasını

$c = (1/n)(n-1-d-K/2)$ değerini

göstermektedir.

Buna göre $\hat{\Phi}$, $L(\hat{\Phi})$ 'de K bileşen için tahmin edilen parametre değeridir.

Minimum AIC, en iyi çözümü verir.

3. Minimum bilgi oran tahmini ve geçerli hale getirme kriteri:

Bu kriter için (1.2.1) ve (1.2.2) 'deki gibi iki log-likelihood fonksiyon kullanılır.

(1.2.1) 'deki log-likelihood fonksiyonu için Fisher bilgi matrisi,

$$F = -E(L_1''(\Phi)) \quad (1.2.12)$$

şeklindedir.

Bu matris örneklemin altkitlelerinin üyeleri bilinmeksizin, örneklemden Φ hakkında maksimum miktarda bilgiyi ölçer. Eğer örneklemin altkitlelerinin üyeleri bilinseydi, sınıflandırılmış örneklem için Fisher bilgi matrisi elde edilebilecekti.

(1.2.2) 'deki log-likelihood fonksiyonu için Fisher bilgi matrisi de,

$$F_0 = -E(L_2''(\Phi)) \quad (1.2.13)$$

şeklindedir.

Bu matris de örneklemin altkitlelerinin üyeleri bilindiğinde, örneklemden Φ hakkında maksimum miktarda bilgiyi ölçer.

Bu durumda ise bilgi oran matrisi,

$$F_0^{-1}F \quad (1.2.14)$$

olarak tanımlanır.

Informasyon oran matrisi, altkitlelerin üyeleri bilinmeksizin Φ hakkında bilginin oranını ölçer. Informasyon oran matrisi aynı zamanda karma dağılım modellerinin analizinde, bileşen yoğunluklarını birbirinden ayırmada kullanılır.

(1.2.14) 'deki informasyon oran matrisinin en küçük özdeğerinin değeri (magnitude of the smallest eigenvalue - MIR), karma modeldeki bileşenlerin sayısının iyi bir göstergesidir.

MIR, EM algoritması (Dempster ve ark., 1977) kullanıldığında çok kolay tahmin edilebilir. Sundberg (1976) ve Louis (1982), EM algoritmasının yakınsama hızının $I - F_e^{-1}F$ 'nin en büyük özdeğerine eşit olduğunu gösterdiler. Böylece $MIR = 1 - \{EM \text{ algoritmasının yakınsama hızı}\}$ 'dır.

EM algoritmasının yakınsama hızı, algoritmanın ardışık iterasyon değerleri arasındaki uzaklıkların oranlarından tahmin edilir. $\{\Phi_v\}$, EM algoritmasındaki parametre tahminlerinin bir dizisi olsun. Bu durumda $1.0 - \frac{|\Phi_{v+1} - \Phi_v|}{|\Phi_v - \Phi_{v-1}|}$ değeri MIR 'e yakınsar. $|\cdot|$, Öklid uzayında herhangi bir uygun normdur.

MIREV kriteriyle bileşen sayısını belirlemek için aşağıdaki işlemler yapılır:

I. Tahmin adımı:

- (a) $2 \leq k_1 \leq k_2$ olacak şekilde k_1 ve k_2 'yi seç.
- (b) $k_1 \leq k \leq k_2$ olan her bir k için karma modelin k bileşenli olduğunu varsayarak MIR_k 'yı hesapla.

(c) Bileşen sayısını $\hat{k}$ olarak tahmin et. $\hat{k}$, MIR_k 'nın değerini en büyük yapacak şekilde k değeridir.

II. Geçerli hale getirme adımı:

(a) $m=1, \dots, M$ için orjinal veriden bir bootstrap örneklem (Mclachlan ve Basford 1988, s.25) elde et. $\tilde{k}_m$ 'yı tahmin adımıda hesapla.

(b) $k=\tilde{k}$ 'da, $\hat{p} = \frac{\tilde{k}_m \text{ 'nın } \tilde{k} \text{ 'ya eşit olmalarının sayısı}}{M}$ ile

maksimum $MIR_{\tilde{k}}$ 'nın olduğu olasılığı tahmin et. Elde edilen bu değeri $\tilde{k}$ 'da bir güven ölçümü olarak kullan.

MIR , veri için bileşen yoğunluklarını ayırmanın bir kriteridir. MIR , 0 ile 1 arasında değerler alır. MIR büyük olduğunda iyi bir yığılım yapılmış, MIR küçük olduğunda ise iyi olmayan bir yığılım yapılmış demektir.

$MIREV$ işleminin tahmin adımı, MIR 'i maksimum yapmak için bileşenlerin sayısını seçer. Geçerli hale getirme adımı ise tahmin adımı ile seçilen bileşenlerin sayısının güvenilirliğinin bir ölçümünü sağlar. Böyle bir ölçüm, tahmin adımıyla bulunan bileşenlerin sayısında MIR 'in maksimumu yakaladığı olasılıktır.

Bu olasılık bootstrapping (MacLachlan, 1987) ile tahmin edilir. Güvenirlik açısından daha çok bilgi isteniyorsa, bileşenlerin sayısının bootstrap dağılımına bakılır. Bu dağılım, tahmin adımıda bulunan bileşenlerin sayısına alternatifler de önerebilir. Bileşen sayısının belirlenmesinde "en iyi çözüm" için, değerlere karşılık bileşen sayısının grafiği çizildiğinde ortaya çıkan şekildeki 'dizlerin' ya da 'dirseklerin' sayısına bakılır.

4. Karma dağılım modelindeki bileşen sayısının belirlenmesi için hipotez testleri:

PC, AIC ve MIREV kriterlerine ek olarak, karma dağılım modelindeki bileşen sayısını belirlemek için hipotez testleri de önerilmiştir. Hipotez testleri genelde modellerin karşılaştırılmasında kullanılır.

Wolfe (1970),

$$-2\ln(l_1/l_2) \sim \chi^2_a \quad (1.2.15)$$

istatistiğini kullanarak bir likelihood-oran testi oluşturdu.

(1.2.15) 'deki likelihood-oran istatistiği yaklaşık olarak, d serbestlik dereceli kıkare dağılımına sahiptir.

(1.2.15) 'deki l_1 ve l_2 , iki farklı modelin likelihoodlarıdır. Kıkare dağılımının d serbestlik derecesi, iki farklı modeldeki bağımsız parametrelerin sayılarının farkına eşittir.

Likelihood-oran istatistiği sadece modellerin karşılaştırılmasında kullanılır. Bununla birlikte likelihood-oran istatistiği bir modelin verilere ne kadar iyi uyduğu hakkında bilgi vermez.

Bu nedenle herbir model için Kolmogorov-Smirnov en iyi uyum testi uygulanır. En iyi uyum testi; modelden elde edilen teorik birikimli frekans dağılımı ile verilerin gözlenen birikimli frekans dağılımını karşılaştırır. Kolmogorov-Smirnov istatistiğiyle ilgili önem düzeyi p değeri hesaplanır. Bu test için bir küçük p değeri, deneysel ve teorik dağılımlar arasındaki

önemli farkı gösterir. Bu önemli fark, modelin veriye iyi uyduğu hipotezini reddetmeye neden olur.

Bogardus ve ark., (1989), bu tip bir yöntemle karma dağılım modelindeki bileşen sayısının belirlendiğini gösteren ve örnek oluşturabilecek bir çalışma yapmışlardır.

1.2.3. Sonlu Karma Dağılım Modelindeki Parametrelerin Tahmini

Sonlu karma dağılım modelindeki bileşen sayısı, k belirli olsun.

(1.1.3) 'deki sonlu karma dağılım modelinde, $i=1, \dots, k$ için tüm karma oranları parametrelerinin topluluğu p , bileşen yoğunluklarında bulunan tüm parametrelerin topluluğu θ ve sonlu karma dağılım modelinde bulunan tüm farklı parametrelerin topluluğunun tamamı da Φ ile gösterilmiştir.

Sonlu karma dağılım modelinde bulunan parametreler: $p_1, \dots, p_k$ karma oranları ve $\theta_1, \dots, \theta_k$ bileşen yoğunluklarındaki parametrelerdir. Bu parametreler vektör formunda $p=(p_1, \dots, p_k)'$ ve $\theta=(\theta_1, \dots, \theta_k)'$ olmak üzere,

$$\Phi=(p, \theta)' \quad (1.2.16)$$

ile gösterilir.

(1.1.3) 'deki sonlu karma dağılım modelinde:

(i) θ bileşen yoğunluğundaki parametreler bilindiği halde, p karma oranları parametreleri bilinmeyebilir.

(ii) p karma oranları parametreleri bilindiği halde, θ bileşen yoğunluğundaki parametreler bilinmeyebilir.

(iii) p karma oranları parametreleri ve θ bileşen yoğunluğundaki parametrelerinin her ikisi de bilinmeyebilir.

Sonlu karma dağılım modelindeki parametreleri, yukarıdaki üç durum için de tahmin etmek amacıyla değişik tahmin yöntemleri uygulanır. Bu tahmin yöntemleri:

1. Momentler yöntemi
2. Maksimum likelihood yöntemi
3. Minimum uzaklık (mesafe) tahmin yöntemleri
4. Bayes yöntemi
1. Momentler yöntemi:

Momentler yönteminde beklenen değerler, örneklem momentlerine eşitlenir ve sonlu karma dağılım modelinin olasılık yoğunluk fonksiyonundaki parametreler cinsinden bir denklem sistemi elde edilir. Elde edilen bu denklem sistemi genelde lineer değildir ve çözümü momentler tahminini verir.

Momentler yöntemini sonlu karma dağılım modellerinde ilk defa Pearson (1894) kullandı. Pearson çalışmasında, iki tek değişkenli ($k=2$) normal dağılımın karmasındaki parametreleri momentler yöntemini kullanarak tahmin etti. Daha sonra Rao (1952), karma dağılım modelindeki normal bileşenlerin varyanslarını eşit alarak, çözümü basitleştirdi. Robertson ve Fryer (1970), Fryer ve Robertson (1972), Tan ve Chang (1972-b) ve Quandt ve Ramsey (1978), tek değişkenli iki bileşenli karma dağılım modelleri için moment tahminlerinin istatistiksel özelliklerini incelediler. Momentler yönteminin performansını diğer tahmin yöntemleriyle karşılaştırdılar.

Momentler yöntemi, maksimum likelihood yöntemiyle karşılaştırıldığında: (Everitt ve Hand 1981, s.18)

1) Maksimum likelihood yönteminde, likelihood fonksiyon sınırsız (unbounded) olabilir ve singulariteler oluşabilir. Buna karşın momentler yönteminde singulariteler oluşmaz.

2) Momentler yöntemi uygulandığında birden fazla çözüm elde edilebilir. Maksimum likelihood yönteminde, likelihood fonksiyonun durağan (stationary) değerleri hesaplandığında da birden fazla çözüm ortaya çıkabilir.

3) Genellikle momentler yönteminin etkinliği, maksimum likelihood yönteminin etkinliğiyle karşılaştırıldığında genellikle moment tahminler, maksimum likelihood tahminlere göre yetersizdir. Tallis ve Light (1968) moment tahminlerinin etkinliğinin arttırılması için bir yöntem geliştirdiler.

Pollard (1934), üç tek değişkenli normal dağılımın bir karması için moment tahminlerini elde etti. Gumbel (1939) ve Rider (1961), karma oranlarını biliniyor kabul ederek iki tek değişkenli, tek parametrelili üstel dağılımın bir karmasındaki ortalamalar için moment tahminlerini hesapladılar. Weibull dağılımlarının karmaları için moment tahminler Rider (1962) tarafından gösterildi. İki gama dağılımının karmaları için moment tahminler John (1970) tarafından hesaplandı. Tallis ve Light (1968), iki tek parametrelili üstel yoğunluğunun karmaları durumunda, kesirsel momentlerin (fractional moments) (Everitt ve Hand 1981, s.19) avantajlarını açıkladı. Bunu sonra Kabir (1968), daha da geliştirdi.

Çok kullanılan sürekli tip tek değişkenli dağılımların: Normal, Lognormal, Gama, Üstel ve Weibull, k bileşenli karma modellerinde karma oranlarının ve bileşenlerindeki

parametrelerinin bilinmediği durumunda parametreleri momentler yöntemiyle tahmin etmek için hesaplama algoritmaları aşağıdaki gibi oluşturulur.

Hesaplama algoritmalarını oluşturmak için Normal, Lognormal, Gama, Üstel ve Weibull dağılımlarının k bileşenli karma modelleri için moment çıkaran fonksiyonlarına veya sıfır ya da ortalama etrafındaki r. momentlerine gereksinim vardır.

(a) Normal dağılımın karmaları için:

Normal dağılımların k bileşenli karma modelleri için (1.1.3) 'deki $f_i(x; \theta_i)$; $\theta_i = (\mu_i, \sigma_i)$ olmak üzere,

$$f_i(x; \mu_i, \sigma_i) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \sigma_i} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{x - \mu_i}{\sigma_i} \right]^2 \right\} \quad (1.2.17)$$

$$-\infty < x < +\infty, \quad -\infty < \mu_i < +\infty, \quad \sigma_i > 0$$

şeklindedir.

Yani herbir bileşen yoğunluğunda 2 tane parametre vardır. Buna herbir bileşen için karma oranı parametresi de eklendiğinde, (1.1.3) 'de tahmin edilmesi gereken $3k-1$ tane parametre vardır.

(1.2.17) 'deki tipteki herbir bileşen yoğunluğu için moment çıkaran fonksiyon $i=1, \dots, k$ için,

$$M_{(i)}(t) = \exp\left\{ \mu_i t + \frac{1}{2} \sigma_i^2 t^2 \right\} \quad -\infty < \mu_i < +\infty, \quad \sigma_i > 0 \quad (1.2.18)$$

şeklindedir. (Patil ve ark. 1984, s.102)

Teorem 1.2.1: Bileşenleri (1.2.17) 'deki gibi olan (1.1.3) 'deki k bileşenli sonlu karma dağılımın moment çıkaran fonksiyonu,

$$M(t) = \sum_{i=1}^k p_i \exp\left\{ \mu_i t + \frac{1}{2} \sigma_i^2 t^2 \right\} \quad -\infty < \mu_i < +\infty, \quad \sigma_i > 0 \quad (1.2.19)$$

dır.

$$\mu_r' = E(x^r) = M^{(r)}(t) \big|_{t=0} \quad (1.2.20)$$

bağıntısı kullanılarak sıfır etrafındaki r. momentler hesaplanır.

(1.2.20) 'de $M^{(r)}(t) \big|_{t=0}$, (1.2.19) 'daki $M(t)$ 'nin r. türevinin $t=0$ 'daki değeridir.

Sıfır etrafındaki r. momentler hesaplandıktan sonra, (Hasting ve Peacock 1975, s.14) 'de verilen,

$$\mu_r = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \mu_{r-j}' (-\mu_1')^j \quad (1.2.21)$$

$$\mu_0 = \mu_0' = 1$$

bağıntısı kullanılarak ortalama etrafındaki r. momentler hesaplanır.

1. tip örneklem formu için ortalama etrafındaki r. örneklem momentleri de,

$$m_r = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - m_1)^r \quad r=2, \dots$$

ve

$$m_1 = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$$

(1.2.22)

bağıntısıyla hesaplanır. Daha sonra da,

$$\mu_r = m_r \quad r=1, \dots, 3k-1 \quad (1.2.23)$$

lineer olmayan denklem sisteminin (1.1.3) 'deki parametreler için çözümü elde edilir. Bu çözüm, sonlu karma dağılım modelindeki parametrelerin momentler tahminini verir.

(b) Lognormal dağılımın karmaları için:

Lognormal dağılımların k bileşenli karma modelleri için (1.1.3) 'deki $f_1(x; \theta_1)$; $\theta_1 = (\mu_1, \sigma_1)$ ' olmak üzere,

$$f_{\pm}(x; \mu_{\pm}, \sigma_{\pm}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} \sigma_{\pm}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{\log x - \mu_{\pm}}{\sigma_{\pm}} \right]^2 \right\} \quad (1.2.24)$$

$$x > 0, \quad -\infty < \mu_{\pm} < +\infty, \quad \sigma_{\pm} > 0$$

şeklindedir.

Yani her bir bileşen yoğunluğunda 2 tane parametre vardır. Buna her bir bileşen için karma oranı parametresi de eklendiğinde, (1.1.3) 'de tahmin edilmesi gereken $3k-1$ tane parametre vardır.

(1.2.24) 'deki tipteki her bir bileşen yoğunluğu için sıfır etrafındaki r . momenti $i=1, \dots, k$ için,

$$\mu_{(\pm),r}' = \exp\left\{ \mu_{\pm} r + \frac{1}{2} \sigma_{\pm}^2 r^2 \right\} \quad -\infty < \mu_{\pm} < +\infty, \quad \sigma_{\pm} > 0 \quad (1.2.25)$$

şeklindedir. (Patil ve ark. 1984, s.98)

Teorem 1.2.2: Bileşenleri (1.2.24) 'deki gibi olan (1.1.3) 'deki k bileşenli sonlu karma dağılımın sıfır etrafındaki r . momenti,

$$\mu_r' = \sum_{i=1}^k p_i \exp\left\{ \mu_i r + \frac{1}{2} \sigma_i^2 r^2 \right\} \quad -\infty < \mu_i < +\infty, \quad \sigma_i > 0 \quad (1.2.26)$$

dir.

(1.2.21) 'de verilen bağıntıyla (1.2.26) 'daki kullanılarak ortalama etrafındaki r . momentler hesaplanır.

1. tip örneklem formu için ortalama etrafındaki r . örneklem momentleri de (1.2.22) 'deki bağıntı kullanılarak elde edilir.

Daha sonra da (1.2.23) 'deki lineer olmayan denklem sisteminin (1.1.3) 'deki parametreler için çözümü elde edilir. Bu çözüm, sonlu karma dağılım modelindeki parametrelerin momentler tahminini verir.

(c) Gama dağılımının karmaları için:

Gama dağılımlarının k bileşenli karma modelleri için (1.1.3)

'deki $f_i(x; \theta_i)$; $\theta_i = (\beta_i, \tau_i)$ ' olmak üzere,

$$f_i(x; \beta_i, \tau_i) = \frac{x^{\tau_i-1} \exp(-\frac{x}{\beta_i})}{\beta_i^{\tau_i} \Gamma(\tau_i)} \quad x > 0, \beta_i > 0, \tau_i > 0 \quad (1.2.27)$$

şeklindedir.

Yani herbir bileşen yoğunluğunda 2 tane parametre vardır. Buna herbir bileşen için karma oranı parametresi de eklendiğinde, (1.1.3) 'de tahmin edilmesi gereken $3k-1$ tane parametre vardır.

(1.2.27) 'deki tipteki herbir bileşen yoğunluğu için sıfır etrafındaki r. momenti $i=1, \dots, k$ için,

$$\mu_{(i),r} = \beta_i^r \frac{\Gamma(r+\tau_i)}{\Gamma(\tau_i)} \quad \beta_i > 0, \tau_i > 0 \quad (1.2.28)$$

şeklindedir. (Patil ve ark. 1984, s.64)

Teorem 1.2.3: Bileşenleri (1.2.27) 'deki gibi olan (1.1.3) 'deki k bileşenli sonlu karma dağılımın sıfır etrafındaki r. momenti,

$$\mu_r = \sum_{i=1}^k p_i \beta_i^r \frac{\Gamma(r+\tau_i)}{\Gamma(\tau_i)} \quad \beta_i > 0, \tau_i > 0 \quad (1.2.29)$$

dir.

(1.2.21) 'de verilen bağıntıyla (1.2.29) 'daki kullanılarak ortalama etrafındaki r. momentler hesaplanır.

1. tip örneklem formu için ortalama etrafındaki r. örneklem momentleri de (1.2.22) 'deki bağıntı kullanılarak elde edilir.

Daha sonra da (1.2.23) 'deki lineer olmayan denklem sisteminin (1.1.3) 'deki parametreler için çözümü elde edilir. Bu çözüm, sonlu karma dağılım modelindeki parametrelerin momentler tahminini verir.

(d) Üstel dağılımın karmaları için:

Üstel dağılımların k bileşenli karma modelleri için (1.1.3) 'deki $f_i(x; \theta_i)$; $\theta_i = (\alpha_i, \beta_i)$ ' olmak üzere,

$$f_i(x; \alpha_i, \beta_i) = \frac{1}{\beta_i} \exp\left\{-\frac{(x-\alpha_i)}{\beta_i}\right\} \quad x > \alpha_i, \beta_i > 0 \quad (1.2.30)$$

şeklindedir.

Yani her bir bileşen yoğunluğunda 2 tane parametre vardır. Buna her bir bileşen için karma oranı parametresi de eklendiğinde, (1.1.3) 'de tahmin edilmesi gereken $3k-1$ tane parametre vardır.

(1.2.30) 'daki tipteki her bir bileşen yoğunluğu için moment çıkaran fonksiyon da $i=1, \dots, k$ için,

$$M_{(i)}(t) = \frac{\exp(\alpha_i t)}{(1-\beta_i t)} \quad \beta_i > 0 \quad (1.2.31)$$

şeklindedir. (Patil ve ark. 1984, s.44)

Teorem 1.2.4: Bileşenleri (1.2.30) 'daki gibi olan (1.1.3) 'deki k bileşenli sonlu karma dağılımın moment çıkaran fonksiyonu,

$$M(t) = \sum_{i=1}^k p_i \frac{\exp(\alpha_i t)}{(1-\beta_i t)} \quad \beta_i > 0 \quad (1.2.32)$$

dir.

(1.2.20) 'deki bağıntıyla (1.2.32) 'deki kullanılarak sıfır etrafındaki r. momentler hesaplanır.

Sonra da elde edilen sıfır etrafındaki r. momentler (1.2.21) 'deki bağıntıda kullanılarak ortalama etrafındaki r. momentler hesaplanır.

1. tip örneklem formu için ortalama etrafındaki r. örneklem momentleri de (1.2.22) 'deki bağıntı kullanılarak elde edilir.

Daha sonra da (1.2.23) 'deki lineer olmayan denklem sisteminin (1.1.3) 'deki parametreler için çözümü elde edilir. Bu çözüm, sonlu karma dağılım modelindeki parametrelerin momentler tahminini verir.

(e) Weibull dağılımın karmaları için:

Weibull dağılımların k bileşenli karma modelleri için (1.1.3) 'deki $f_i(x; \theta_i)$; $\theta_i = (\beta_i, \tau_i)$ olmak üzere,

$$f_i(x; \beta_i, \tau_i) = \frac{\tau_i x^{\tau_i - 1}}{\beta_i^{\tau_i}} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\beta_i}\right)^{\tau_i}\right\} \quad (1.2.33)$$

$$x > 0, \beta_i > 0, \tau_i > 0$$

şeklindedir.

Yani her bir bileşen yoğunluğunda 2 tane parametre vardır. Buna her bir bileşen için karma oranı parametresi de eklendiğinde, (1.1.3) 'de tahmin edilmesi gereken $3k-1$ tane parametre vardır.

(1.2.33) 'deki tipteki her bir bileşen yoğunluğu için sıfır etrafındaki r. momenti $i=1, \dots, k$ için,

$$\mu_{(i),r} = \beta_i^r \Gamma\left[\frac{r+\tau_i}{\tau_i}\right] \quad (1.2.34)$$

$$\beta_i > 0, \tau_i > 0$$

şeklindedir. (Patil ve ark. 1984, s.131)

Teorem 1.2.5: Bileşenleri (1.2.33) 'deki gibi olan (1.1.3) 'deki k bileşenli sonlu karma dağılımın sıfır etrafındaki r. momenti,

$$\mu_r' = \sum_{i=1}^k p_i \beta_i r \Gamma \left[\frac{r + \tau_i}{\tau_i} \right] \quad (1.2.35)$$

$$\beta_i > 0, \tau_i > 0$$

dir.

(1.2.21) 'de verilen bağıntıyla (1.2.35) 'deki kullanılarak ortalama etrafındaki r. momentler hesaplanır.

1. tip örneklem formu için ortalama etrafındaki r. örneklem momentleri de (1.2.22) 'deki bağıntı kullanılarak elde edilir.

Daha sonra da (1.2.23) 'deki lineer olmayan denklem sisteminin (1.1.3) 'deki parametreler için çözümü elde edilir. Bu çözüm, sonlu karma dağılım modelindeki parametrelerin momentler tahminini verir.

2. Maksimum likelihood yöntemi:

Gözlemlerin bir örneklemeyle ilgili maksimum likelihood tahmin, örneklemin likelihood fonksiyonu olarak adlandırılan fonksiyonu maksimum yapan değerlerdir.

Hasselblad (1966), tek değişkenli normal yoğunlukların herhangi bir sayısının karması için maksimum likelihood tahminleri hesapladı. Aynı sonuçlar bu çalışmadan bağımsız olarak Behboodian (1970) tarafından elde edildi. Tan ve Chang (1972-b), ortak varyanslı iki tek değişkenli normal yoğunluğun bir karması için moment ve maksimum likelihood tahminleri karşılaştırdı. Hosmer (1973-b), bileşen yoğunlukları birbirinden iyi

ayrılmadığında ve örneklem hacmi küçük olduğunda iki tek değişkenli normal dağılımın bir karması için maksimum likelihood tahminlerinin bir Monte Carlo çalışmasını gerçekleştirdi. Hosmer (1973-a) aynı zamanda iki tek değişkenli normal yoğunlukların bir karması için üç değişik örneklem formundan elde edilen maksimum likelihood tahminleri karşılaştırdı. Karşılaştırdığı örneklem formundan birincisi bilinen düzenlenmemiş bağımsız gözlemlerden oluşan örneklem formu, ikincisi düzenlenmemiş ve düzenlenmiş bağımsız gözlemlerden oluşan örneklem formu ve sonuncusu da düzenlenmiş bağımsız gözlemlerin karma oranları hakkında bilgi içerip içermediği örneklem formudur. Bu şekilde düzenlenmiş örneklem formları Tan ve Chang (1972-a) ve Dick ve Bowden (1973) tarafında da çalışılmıştır.

Sonlu karma dağılım modelindeki parametreleri tahmin etmek için maksimum likelihood yöntemi uygulandığında kullanılan iki tip algoritma vardır (Render ve Walker, 1984), (Titterington ve ark. 1985, s.88).

1. Tip algoritma:

(a) Standart Newton-Raphson algoritması (Buchanan ve Turner 1992, s.374)

(b) Düzenlenmiş (modified) Newton-Raphson algoritması (Buchanan ve Turner 1992, s.375)

(c) Yarı (quasi) Newton algoritmaları (Borja, 1991), (Buchanan ve Turner 1992, s.389)

(d) Scoring yöntemi algoritması (Titterington ve ark. 1985, s.88)

2. Tip algoritma:

EM (Expectation & Minimization) algoritması (Dempster ve ark., 1977), (Leytham, 1984), (Mclachlan ve Jones, 1988), (Jones ve Maclachlan, 1990)

(1.1.3) 'deki sonlu karma dağılım modelinden alınmış birbirinden bağımsız gözlemler, yani bölüm 1.2.1 'de açıklanan örneklem formlarından herhangi biri, için log-likelihood fonksiyonu $L(\Phi)$ olarak alalım.

$$D_{\bullet} L(\Phi) = g(\Phi) \quad (1.2.36)$$

$$D_{\bullet}^2 L(\Phi) = H(\Phi) \quad (1.2.37)$$

$$\begin{aligned} I(\Phi) &= - \frac{1}{n} E[g(\Phi)g(\Phi)'] \\ &= - \frac{1}{n} E[H(\Phi)] \end{aligned} \quad (1.2.38)$$

olsun.

$D_{\bullet}$ ve $D_{\bullet}^2$; $L(\Phi)$ log-likelihood fonksiyonunun Φ 'ye göre sırasıyla birinci ve ikinci türevlerini göstermektedir.

(1.3.37) 'deki $H(\Phi)$ matrisine sayısal (nümerik) analizde Hessian matrisi (Render ve Walker, 1984), istatistikte ise sonlu karma dağılım modeli için bilgi matrisi (Mclachlan ve Basford 1988, s.19) denilmektedir.

(1.2.38) 'deki $I(\Phi)$ matrisine ise Fisher 'in bilgi matrisi denilmektedir (Titterington ve ark. 1985, s.42)

m iterasyon sayısını göstermek üzere, 1. tip algoritmalar için iterasyon adımları aşağıdaki gibidir:

(a) Standart Newton-Raphson algoritması için iterasyon adımları,

$$\Phi^{(m+1)} = \Phi^{(m)} - H(\Phi^{(m)})^{-1}g(\Phi^{(m)}) \quad m=0,1,2,\dots \quad (1.2.39)$$

şeklindedir.

(b) Düzenlenmiş (modified) Newton-Raphson algoritması için iterasyon adımları,

$$\Phi^{(m+1)} = \Phi^{(m)} - \alpha_m H(\Phi^{(m)})^{-1}g(\Phi^{(m)}) \quad m=0,1,2,\dots \quad (1.2.40)$$

şeklindedir.

(c) Yarı (quasi) Newton algoritmaları için iterasyon adımları,

$$\Phi^{(m+1)} = \Phi^{(m)} - B^{-1}g(\Phi^{(m)}) \quad m=0,1,2,\dots \quad (1.2.41)$$

şeklindedir.

Burada $B \approx H(\Phi^{(m)})$ 'dir. Herbir iterasyonda B 'nin bir secant güncellemesi (secant update) yapılır (Dennis ve Moré, 1977), (Dennis ve Schnabel, 1983).

(d) Scoring yöntemi algoritması için iterasyon adımları,

$$\Phi^{(m+1)} = \Phi^{(m)} + \alpha_m I(\Phi^{(m)})^{-1}g(\Phi^{(m)}) \quad m=0,1,2,\dots \quad (1.2.42)$$

şeklindedir.

Yukarıdaki iterasyon adımlarının bazılarında bulunan α_m , negatif olmayan bir sabittir ve adım uzunluğunu gösterir. α_m , iterasyonun her adımında hesaplanır.

2. tip algoritma olan EM algoritması, Dempster ve ark.(1977) tarafından genel amaçlar için geliştirilmiş ve son yıllarda birçok alanda sık kullanılan bir algoritmadır. Rende ve Walker (1984), sonlu karma dağılım modellerindeki parametreleri tahmin problemi için EM algoritmasını oluşturdular ve önemli özelliklerini incelediler. Buna göre:

EM algoritmasında X ve Y gibi iki tane uzay vardır. Burada X, incomplete verinin ve Y 'de complete verinin uzayıdır. Ayrıca

Y uzayından X uzayına bir $y \longrightarrow x(y)$ fonksiyonu vardır. Incomplete veri gözlenebilir veridir. Complete veri direk olarak gözlenemez.

EM algoritması, beklenti adımı veya E adımı ve maksimum yapma adımı veya M adımı olmak üzere iki adımı kapsar.

$h(y;\Phi)$, Y üzerinde tanımlanmış olasılık yoğunluk fonksiyonlarının bir parametrik ailesinin üyesi olsun.

$g(x;\Phi)$ 'de X üzerinde tanımlanmış bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olsun.

Complete veri, incomplete veriyle,

$$g(x;\Phi) = \int_{Y(x)} h(y;\Phi) dy \quad \Phi \in \Omega \quad (1.2.43)$$

bağıntısıyla ilgili olsun.

EM algoritmasının amacı, bir $x \in X$ verildiğinde $h(y;\Phi)$ ve $g(x;\Phi)$ arasındaki (1.2.43) 'deki bağıntıyı kullanarak Φ üzerinde, $L(\Phi) = \log\{g(x;\Phi)\}$ incomplete veri log-likelihood fonksiyonunu maksimum yapan Φ 'yi bulmaktır.

$x \in X$ için $Y(x) = \{y \in Y : x = x(y)\}$ alınsın. $Y(x)$ üzerindeki $k(y|x, \Phi)$

koşullu yoğunluğu, $k(y|x, \Phi) = \frac{h(y;\Phi)}{g(x;\Phi)}$ ile verilir.

$\Phi = \Phi^*$ verildiğinde, $\log\{k(y|x, \Phi)\}$ 'nin koşullu beklenen değeri hesaplandığında,

$$L(\Phi) = Q(\Phi | \Phi^*) - H(\Phi | \Phi^*) \quad (1.2.44)$$

elde edilir. Φ^* , Φ 'nun bir uygun herhangi bir tahminidir.

Burada,

$$Q(\Phi | \Phi^*) = E(\log\{h(y;\Phi)\} | x, \Phi^*) = \int \log\{h(y;\Phi)\} k(y|x, \Phi^*) dy \quad (1.2.45)$$

$$H(\Phi|\Phi^0) = E(\log\{k(y|x, \Phi)\} | x, \Phi^0) = \int \log\{k(y|x, \Phi)\} k(y|x, \Phi^0) dy \quad (1.2.46)$$

ve

$$L(\Phi) = E(\log\{g(x; \Phi)\} | x, \Phi^0) = \log\{g(x; \Phi)\}$$

dir.

Buna göre EM algoritmasının:

1. E adımı: $Q(\Phi|\Phi^0)$ 'yi belirle.
2. M adımı: $Q(\Phi|\Phi^0)$ 'yi maksimum yapan Φ^+ değerini hesapla.

Burada Φ^0 , Φ parametresinin halihazırdaki adımdaki, Φ^+ da; Φ parametresinin bir sonraki adımdaki değerini göstermektedir.

Örneklem formu, bölüm 1.2.1 'deki 1. tip örneklem formu olsun. Yani $S_1 = \{x_j\}_{j=1, \dots, n}$ olsun. S_1 'i incomplete verinin örnekleme olarak ele alalım.

S_1 'in complete verisinin gözlemleri de $y_j = (x_j, i_j)$ şeklinde olsun. $j=1, \dots, n$ için x_j 'ler bilinmektedir. i_j 'ler ise 1 ile k arasında ($1 \leq i_j \leq k$) bir tamsayı olmak üzere bilinen verinin hangi bileşene ait olduğunu göstermektedir.

Φ için örneklem değişkenleri, $x = (x_1, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, \dots, y_n)$ olsun. x ve y 'ye sırasıyla karşılık gelen olasılık fonksiyonları

$$g(x; \Phi) = \prod_{j=1}^n f(x_j; \Phi) \text{ ve } h(y; \Phi) = \prod_{j=1}^n p_{i_j} f(x_j; \Phi_{i_j}) \text{ dır.}$$

Bu durumda $\Phi^0 = (p^0, \theta^0)$ için $k(y|x, \Phi^0)$ koşullu yoğunluğu,

$$k(y|x, \Phi^0) = \prod_{j=1}^n \frac{p_{i_j}^0 f(x_j; \theta^0)}{f(x_j; \Phi^0)} \quad i=1, \dots, k \quad (1.2.47)$$

ile verilir.

1. tip örneklem formu için $Q_1(\Phi|\Phi^0)$ ile gösterilen (1.2.45) 'deki $Q(\Phi|\Phi^0)$ fonksiyonu,

$$Q_1(\Phi|\Phi^e) = \sum_{i=1}^k \left[\sum_{j=1}^n \frac{p_i = f_i(x_j|\theta_i^e)}{f(x_j;\Phi^e)} \right] \log\{p_i\} \\ + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \log\{f_i(x_j|\theta_i^e)\} \frac{p_i = f_i(x_j|\theta_i^e)}{f(x_j;\Phi^e)} \quad (1.2.48)$$

olarak belirlenir.

S_2 , S_3 ve S_4 örneklem formları için $Q_2(\Phi|\Phi^e)$, $Q_3(\Phi|\Phi^e)$ ve $Q_4(\Phi|\Phi^e)$ fonksiyonları da sırasıyla,

$$Q_2(\Phi|\Phi^e) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{j_i} \log\{f_i(y_{i_k}|\theta_i^e)\} \quad (1.2.49)$$

$$Q_3(\Phi|\Phi^e) = \sum_{i=1}^m K_i \log\{p_i\} + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{K_i} \log\{f_i(z_{i_k}|\theta_i^e)\} \quad (1.2.50)$$

$$Q_4(\Phi|\Phi^e) = \sum_{i=1}^m \left[M_i + \sum_{k=1}^{M_i} \frac{p_i = f_i(w_{0_k}|\theta_i^e)}{f(w_{0_k}|\Phi^e)} \right] \log\{p_i\} \\ + \sum_{i=1}^m \left[\sum_{k=1}^{M_i} \log\{f_i(w_{i_k}|\theta_i^e)\} + \sum_{k=1}^{M_i} \log\{f_i(w_{0_k}|\theta_i^e)\} \frac{p_i = f_i(w_{0_k}|\theta_i^e)}{f(w_{0_k}|\Phi^e)} \right] \quad (1.2.51)$$

olarak belirlenir.

Örneğin örneklem formu $S=S_1US_2US_3$ şeklindeyse, S için E adımının uygun $Q(\Phi|\Phi^e)$ fonksiyonu, $Q(\Phi|\Phi^e)=Q_1(\Phi|\Phi^e)+Q_2(\Phi|\Phi^e)+Q_3(\Phi|\Phi^e)$ olur.

EM algoritmasının E adımı için uygun bir $Q(\Phi|\Phi^e)$ fonksiyonu belirledikten sonra M adımında, yani maksimum yapma probleminde iki özel durum vardır. Bu (1.2.48), (1.2.49), (1.2.50) ve (1.2.51) 'den açıkça görülebilir.

İki özel durumun birincisi sadece $p_1, \dots, p_k$ oranlarını, ikincisi de $\theta_1, \dots, \theta_k$ parametrelerini kapsar.

$i \neq 2$ için her bir $Q_i(\Phi | \Phi^c)$ fonksiyonunda $\log\{p_1\}, \dots, \log\{p_k\}$ bulunduğundan eğer örneklem kesinlikle 2. tip formda değilse birinci özel durum için maksimum yapma probleminin tek bir çözümü vardır. Bu çözüm kolayca ve açık olarak $f_i(x; \theta_i)$ bileşen yoğunluklarının fonksiyonel formlarıyla belirlenir.

Eğer $\theta_1, \dots, \theta_k$ karşılıklı olarak birbirinden bağımsız değişkenlerse ikinci özel durum için maksimum yapma problemi k bileşen problemine ayrılır. $i=1, \dots, k$ için her bir bileşen sadece θ_i parametresini kapsar. Karma oranları için bileşen problemi ve maksimum yapma probleminin her ikisi de kendi başlarına ilginç bir özelliğe sahiptirler. Bu özelliğe göre her iki problemde de örneklem gözlemleri uygun bileşen kitlelerine düştüğünden, halihazırdaki yaklaşık maksimum likelihood Φ^* verildiğinde her iki problemde posterior olasılıklar ile logaritma ağırlıklarının toplamalarını içeren "ağırlıklı" ("weighted") maksimum likelihood tahmin problemleri olarak kabul edilmektedir.

Bu açıklamaları göstermek için $S_1 = \{x_j\}_{j=1, \dots, n}$, 1. tip örneklem formunu alalım. $\theta_1, \dots, \theta_k$ 'lar karşılıklı olarak birbirinden bağımsız değişkenler olsun. (1.2.1) ile verilen $L_1(\Phi)$ log-likelihood fonksiyonunu halihazırda maksimum yapan yaklaşık değer $\Phi^c = (p_1^c, \dots, p_k^c, \theta_1^c, \dots, \theta_k^c)$ ise, EM algoritmasının M adımıyla kararlaştırılmış bir sonraki yaklaşık maksimum yapan $\Phi^+ = (p_1^+, \dots, p_k^+, \theta_1^+, \dots, \theta_k^+)$ değeri, $i=1, \dots, k$ için,

$$p_i^+ = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{p_i^c f_i(x_j; \theta_i^c)}{f(x_j; \Phi^c)} \quad (1.2.52)$$

ve

$$\theta_i \leftarrow \epsilon \arg \max_{\theta_i \in \Phi_i} \left\{ \sum_{j=1}^n \log f_i(x_j; \theta_i) \right\} \frac{p_i^{\circ} f_i(x_j; \theta_i^{\circ})}{f(x_j; \Phi^{\circ})} \quad (1.2.53)$$

dir.

Burada herbir $\frac{p_i^{\circ} f_i(x_j; \theta_i^{\circ})}{f(x_j; \Phi^{\circ})}$ ağırlığı, halihazırda yaklaşık maksimum likelihood tahmini Φ° verildiğinde x_j 'nin i . bileşen kitlesinde olmasının posterior olasılığıdır.

Leytham (1984), iki bileşenli normal dağılımın bir karmasındaki parametreleri maksimum likelihood yöntemiyle birlikte EM algoritmasını kullanarak tahmin etmiştir. Kullanılan örneklem, 1. tip örneklem formundadır. Leytham çalışmasında (1.1.3) 'deki sonlu karma dağılım modelinde $k=2$ ve $i=1,2$ için $f_i(x_j; \theta_i)$ 'yi (1.2.17) 'deki gibi almıştır. Buna göre $\Phi^{(v)} = (p_1^{(v)}, \mu_1^{(v)}, \mu_2^{(v)}, \sigma_1^{(v)}, \sigma_2^{(v)})$, v . iterasyondaki parametre tahminlerini ve $\Phi^{(0)}$ 'da parametreler için başlangıç tahminlerini göstermek üzere v . iterasyondaki ağırlıklar,

$$w_{ij}^{(v)} = \frac{p_i^{(v)} f_i(x_j; \theta_i^{(v)})}{\sum_{i=1}^2 p_i^{(v)} f_i(x_j; \theta_i^{(v)})} \quad i=1,2 \quad j=1, \dots, n \quad (1.2.54)$$

dır. $(v+1)$. iterasyondaki parametre tahminleri ise,

$$p_i^{(v+1)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n w_{ij}^{(v)} \quad i=1,2 \quad (1.2.55)$$

$$\mu_i^{(v+1)} = \frac{\sum_{j=1}^n w_{ij}^{(v)} x_j}{\sum_{j=1}^n w_{ij}^{(v)}} \quad i=1,2 \quad (1.2.56)$$

$$\sigma_{\pm}^{(v+1)} = \left[\frac{\sum_{j=1}^n w^{(v)}(x_j - \mu_{\pm}^{(v)})^2}{\sum_{j=1}^n w^{(v)}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad i=1,2 \quad (1.2.57)$$

dir.

Mclachlan ve Jones (1988), EM algoritmasını kullanarak gruplandırılmış (grouped) ve kesilmiş (truncated) verilere sonlu karma dağılım modelleri uydurmanın yolunu vermişlerdir. Özel olarak da normal dağılımların sonlu karma modelleri için parametre tahminlerini elde etmişlerdir. Jones ve Mclachlan (1990) gruplandırılmış ve kesilmiş veriler için sonlu karma dağılım modelindeki parametreleri maksimum likelihood yöntemiyle tahmin etmişlerdir.

Sonlu karma dağılım modelindeki parametreleri tahmin etmek için maksimum likelihood yöntemi uygulandığında kullanılan iki tip algoritma Render ve Walker (1984) ve Titterington ve ark. (1985, s.88) tarafından birbirleriyle karşılaştırılmıştır. Ayrıca ikinci tip algoritmanın tüm özellikleri Dempster ve ark. (1977) ve Wu (1983) tarafından incelenmiştir. Buna göre:

(a) 2. tip algoritma yani EM algoritması, uygulaması kolay bir algoritmadır.

(b) 1. tip algoritmalar daha karmaşıktır. Matrislerin terslerinin, buna ek olarak da Scoring yönteminde $I(\theta)$ 'nin elde edilmesi için integralin hesaplanması gerekir.

(c) 1. tip algoritmalarda, örneğin Standart Newton-Raphson algoritmasında yakınsama karesel olup çok hızlıdır. Buna karşın

2. tip algoritmada yani EM algoritmasında yakınsama doğrusal olup, bazen oldukça yavaş olabilmektedir.

(d) 1. tip algoritmalar bir yerel maksimuma yakınsar. Bunun için 1. tip algoritmalarda parametreler için başlangıç değerleri çok önemlidir. 2. tip algoritma ise bir genel maksimuma yakınsar.

3. Dağılım fonksiyonlarına dayalı minimum uzaklık tahmin yöntemleri:

Tanım 1.2.1: X bir rastgele değişken olmak üzere bir X örneklem uzayından değerler alsın. $X \in X$ olmak üzere X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu (1.1.3) 'deki gibi olsun. Bu durumda X rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu,

$$F(x; \Phi) = \int_0^x f(s; \Phi) ds \quad (1.2.58)$$

dir.

$$\begin{aligned} F(x; \Phi) &= \int_0^x \sum_{i=1}^k p_i f_i(s; \theta_i) ds \\ &= \sum_{i=1}^k p_i \int_0^x f_i(s; \theta_i) ds \\ &= \sum_{i=1}^k p_i F_i(x; \theta_i) \end{aligned} \quad (1.2.59)$$

(1.2.59) 'da $i=1, \dots, k$ için $F_i(x; \theta_i) = \int_0^x f_i(s; \theta_i) ds$ olmak üzere

i . bileşene karşılık gelen dağılım fonksiyonunu göstermektedir.

Dağılım fonksiyonlarına dayalı minimum uzaklık tahmin yöntemlerinde, sonlu karma dağılım modelindeki parametreleri tahmin etmek için sonlu karma dağılım modellerinin dağılım fonksiyonlarına gereksinim vardır.

Çok kullanılan sürekli tip tek değişkenli dağılımların: Normal, Lognormal, Gama, Üstel ve Weibull; k bileşenli karma modelleri için dağılım fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

(a) Normal dağılımın karmaları için:

Normal dağılımların k bileşenli karma modelleri için (1.1.3)'deki $f_i(x; \theta_i)$; $\theta_i = (\mu_i, \sigma_i)$, (1.2.17) 'deki gibi olmak üzere karşılık gelen dağılım fonksiyonu $i=1, \dots, k$ için,

$$F_i(x; \mu_i, \sigma_i) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \sigma_i} \int_{-\infty}^x \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{s-\mu_i}{\sigma_i} \right]^2 \right\} ds \quad (1.2.60)$$

$$-\infty < x < +\infty, \quad -\infty < \mu_i < +\infty, \quad \sigma_i > 0$$

şeklindedir.

(1.2.60) 'da,

$$I_1 = \int_{-\infty}^x \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{s-\mu_i}{\sigma_i} \right]^2 \right\} ds \quad i=1, \dots, k \quad (1.2.61)$$

olsun.

(1.2.61) 'deki integralde, $u = (s-\mu_i)/\sigma_i$ dönüşümü uygulandığında,

$$I_2 = \int_{-\infty}^{(s-\mu_i)/\sigma_i} \exp\left\{ -\frac{1}{2} u^2 \right\} \sigma_i du \quad i=1, \dots, k \quad (1.2.62)$$

elde edilir.

Sonuç olarak (1.2.60) 'daki $i=1, \dots, k$ için $F_i(x; \mu_i, \sigma_i)$ dağılım fonksiyonu,

$$F_i(x; \mu_i, \sigma_i) = \int_{-\infty}^{(s-\mu_i)/\sigma_i} \exp\left\{ -\frac{1}{2} u^2 \right\} \sigma_i du \quad i=1, \dots, k \quad (1.2.63)$$

şeklindedir.

Teorem 1.2.6: Bileşenlerinin dağılım fonksiyonu (1.2.63) 'deki gibi olan (1.1.3) 'deki k bileşenli sonlu karma dağılımın (1.2.59) 'daki dağılım fonksiyonu,

$$F(x; \mu_i, \sigma_i) = \frac{1}{(2\pi)^k} \sum_{i=1}^k p_i \int_{-\infty}^{(x-\mu_i)/\sigma_i} \exp\left\{-\frac{1}{2} u^2\right\} du \quad (1.2.64)$$

$$-\infty < x < +\infty, \quad -\infty < \mu_i < +\infty, \quad \sigma_i > 0$$

dur.

(b) Lognormal dağılımın karmaları için:

Lognormal dağılımların k bileşenli karma modelleri için (1.1.3) 'deki $f_i(x; \theta_i)$; $\theta_i = (\mu_i, \sigma_i)$, (1.2.24) 'deki gibi olmak üzere karşılık gelen dağılım fonksiyonu $i=1, \dots, k$ için,

$$F_i(x; \mu_i, \sigma_i) = \frac{1}{(2\pi)^k \sigma_i} \int_0^x \frac{1}{s} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\frac{\log s - \mu_i}{\sigma_i} \right]^2\right\} ds \quad (1.2.65)$$

$$x > 0, \quad -\infty < \mu_i < +\infty, \quad \sigma_i > 0$$

şeklindedir.

(1.2.65) 'de,

$$I_1 = \int_0^x \frac{1}{s} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\frac{\log s - \mu_i}{\sigma_i} \right]^2\right\} ds \quad i=1, \dots, k \quad (1.2.66)$$

olsun.

(1.2.66) 'daki integralde, $u = (\log s - \mu_i)/\sigma_i$ dönüşümü uygulandığında,

$$I_2 = \int_{-\infty}^{(\log x - \mu_i)/\sigma_i} \exp\left\{-\frac{1}{2} u^2\right\} \sigma_i du \quad i=1, \dots, k \quad (1.2.67)$$

elde edilir.

Sonuç olarak (1.2.65) 'deki $i=1, \dots, k$ için $F_i(x; \mu_i, \sigma_i)$ dağılım fonksiyonu,

$$F_i(x; \mu_i, \sigma_i) = \int_{-\infty}^{(\log x - \mu_i)/\sigma_i} \exp\left\{-\frac{1}{2} u^2\right\} \sigma_i du \quad i=1, \dots, k \quad (1.2.68)$$

şeklindedir.

Teorem 1.2.7: Bileşenlerinin dağılım fonksiyonu (1.2.68) 'deki gibi olan (1.1.3) 'deki k bileşenli sonlu karma dağılımın (1.2.59) 'daki dağılım fonksiyonu,

$$F(x; \mu_i, \sigma_i) = \frac{1}{(2\pi)^k} \sum_{i=1}^k p_i \int_{-\infty}^{(\log x - \mu_i)/\sigma_i} \exp\left\{-\frac{1}{2} u^2\right\} du \quad (1.2.69)$$

$x > 0, -\infty < \mu_i < +\infty, \sigma_i > 0$

dur.

(c) Gama dağılımının karmaları için:

Gama dağılımlarının k bileşenli karma modelleri için (1.1.3) 'deki $f_i(x; \theta_i); \theta_i = (\beta_i, \tau_i)$, (1.2.27) 'deki gibi olmak üzere karşılık gelen dağılım fonksiyonu $i=1, \dots, k$ için,

$$F_i(x; \beta_i, \tau_i) = 1 - \frac{\Gamma(\tau_i; \frac{x}{\beta_i})}{\Gamma(\tau_i)} \quad (1.2.70)$$

$x > 0, \tau_i > 0, \beta_i > 0$

şeklindedir.

(1.2.70) 'de,

$$\Gamma(\tau_i) = \int_0^{+\infty} s^{\tau_i-1} \exp\{-s\} ds \quad (1.2.71)$$

ve

$$\Gamma(\tau_i; \frac{x}{\beta_i}) = \int_{x/\beta_i}^{+\infty} s^{\tau_i-1} \exp\{-s\} ds \quad (1.2.72)$$

dir.

Teorem 1.2.8: Bileşenlerinin dağılım fonksiyonu (1.2.70) 'deki gibi olan (1.1.3) 'deki k bileşenli sonlu karma dağılımının (1.2.59) 'daki dağılım fonksiyonu,

$$F(x; \beta_i, \tau_i) = \sum_{i=1}^k p_i \left[1 - \frac{\Gamma(\tau_i; \frac{x}{\beta_i})}{\Gamma(\tau_i)} \right] \quad (1.2.73)$$

$$x > 0, \beta_i > 0, \tau_i > 0$$

dur.

(d) Üstel dağılımın karmaları için:

Üstel dağılımlarının k bileşenli karma modelleri için (1.1.3) 'deki $f_i(x; \theta_i)$; $\theta_i = (\alpha_i, \beta_i)$, (1.2.30) 'daki gibi olmak üzere karşılık gelen dağılım fonksiyonu $i=1, \dots, k$ için,

$$F_i(x; \alpha_i, \beta_i) = 1 - \exp\left\{-\frac{x-\alpha_i}{\beta_i}\right\} \quad (1.2.74)$$

$$x > \alpha_i, \beta_i > 0$$

şeklindedir.

Teorem 1.2.9: Bileşenlerinin dağılım fonksiyonu (1.2.74) 'deki gibi olan (1.1.3) 'deki k bileşenli sonlu karma dağılımının (1.2.59) 'daki dağılım fonksiyonu,

$$F(x; \alpha_i, \beta_i) = \sum_{i=1}^k p_i \left[1 - \exp\left\{-\frac{x-\alpha_i}{\beta_i}\right\} \right] \quad (1.2.75)$$

$$x > \alpha_i, \beta_i > 0$$

dır.

(e) Weibull dağılımının karmaları için:

Weibull dağılımların k bileşenli karma modelleri için (1.1.3) 'deki $f_i(x; \theta_i)$; $\theta_i = (\beta_i, \tau_i)$ ', (1.2.33) 'daki gibi olmak üzere karşılık gelen dağılım fonksiyonu $i=1, \dots, k$ için,

$$F_i(x; \beta_i, \tau_i) = 1 - \exp\left\{- \left[\frac{x}{\beta_i} \right]^{\tau_i}\right\} \quad (1.2.76)$$

$$x > 0, \beta_i > 0, \tau_i > 0$$

şeklindedir.

Teorem 1.2.10: Bileşenlerinin dağılım fonksiyonu (1.2.76) 'daki gibi olan (1.1.3) 'deki k bileşenli sonlu karma dağılımın (1.2.59) 'daki dağılım fonksiyonu,

$$F(x; \beta_i, \tau_i) = \sum_{i=1}^k p_i \left[1 - \exp\left\{- \left[\frac{x}{\beta_i} \right]^{\tau_i}\right\} \right] \quad (1.2.77)$$

$$x > 0, \beta_i > 0, \tau_i > 0$$

dır.

(1.2.58) 'deki $F(x; \Phi)$, bilinmeyen Φ parametreleriyle ilgilenilen sonlu karma dağılımın dağılım fonksiyonu ve $F_n(x)$ de $x_1, \dots, x_n$ olmak üzere, n bağımsız gözlemden oluşan bir örneklemden elde edilen dağılım fonksiyonu olsun.

F ve G iki dağılım fonksiyonu olmak üzere bu iki dağılım fonksiyonu arasındaki uzaklığın bir ölçümü,

$$\delta(G, F) \quad (1.2.78)$$

ile tanımlansın.

(Titterington ve ark. 1985, s.116) 'da tanımlanan bazı uzaklık ölçümleri aşağıdaki gibidir.

Tablo 1. Sürekli tip örneklem uzayları için bazı uzaklık ölçümleri.

Dağılım fonksiyonları ile L_2 -norm uzaklığı	$\delta_{LA}(F,G)$	$\int [F(x)-G(x)]^2 dx$
Yoğunluk fonksiyonları ile L_2 -norm uzaklığı	$\delta_{LB}(F,G)$	$\int [f(x)-g(x)]^2 dx$
Dağılım fonksiyonları ile Ağırlıklı L_2 -normlar uzaklığı	$\delta_{WLA}(F,G)$	$\int [F(x)-G(x)]^2 w(x) dx$
Yoğunluk fonksiyonları ile Ağırlıklı L_2 -normlar uzaklığı	$\delta_{WLB}(F,G)$	$\int [f(x)-g(x)]^2 w(x) dx$
Dağılım fonksiyonları ile Ortalaması alınmış L_2 -normlar uzaklığı	$\delta_{ALA}(F,G)$	$\int [F(x)-G(x)]^2 dF(x)$
Yoğunluk fonksiyonları ile Ortalaması alınmış L_2 -normlar uzaklığı	$\delta_{ALB}(F,G)$	$\int [f(x)-g(x)]^2 dF(x)$
Kikare uzaklığı	$\delta_C(F,G)$	$\int [f(x)-g(x)]^2 / f(x) dx$
Düzenlenmiş Kikare uzaklığı	$\delta_{MC}(F,G)$	$\int [f(x)-g(x)]^2 / g(x) dx$
Sup-norm uzaklığı	$\delta_S(F,G)$	$\sup_x F(x)-G(x) $
Wolfowitz uzaklığı	$\delta_W(F,G)$	$\int [F(x)-G(x)] dx$
Hellinger uzaklığı	$\delta_H(F,G)$	$\int [\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}]^2 dx$
Levy uzaklığı	$\delta_L(F,G)$	$\inf\{\epsilon: F(x-\epsilon)-\epsilon \leq G(x) \leq F(x+\epsilon)+\epsilon$
Kullback-Leibler uzaklığı	$\delta_{KL}(F,G)$	$\int \log \left\{ \frac{dF(x)}{dG(x)} \right\} dF(x)$

$\hat{\Phi}$ için bir $\hat{\Phi}$ minimum uzaklık tahmin edicisi,

$$\delta[F_n(x), F(x; \hat{\Phi})] \quad (1.2.79)$$

'yi minimum yapan $\hat{\Phi}$ 'nin bir değeridir.

Bölüm 1.2.3 'de ele alınan maksimum likelihood tahminler, uzaklık ölçüm yaklaşımının özel bir durumu olarak elde edilebilir.

Tablo 1 'deki uzaklık ölçümleri üzerinde açıklanması gereken bazı noktalar (Titterington ve ark. 1985, s.115):

(a) Ölçümlerin bazılarının metrik olmasına rağmen, KL, L, C, MC ve ALA ölçümleri metrik değildir.

(b) Ölçümlerin bazıları diğerinin özel durumu olabilir. Örneğin δ_C , δ_{WL} 'nin özel bir durumudur.

$$(c) \delta_C(F, G) = \delta_{MC}(G, F)$$

(d) $\delta_{KL}\{F_n(x), F(x; \hat{\Phi})\}$, maksimum likelihood kriterine denktir.

(e) "ağırlıklı" ölçümlerde, negatif olmayan $w(x)$ ağırlık fonksiyonları kullanılır.

(f) Sürekli tip örneklem uzaylarıyla ilgili örneklerde olasılık yoğunluk fonksiyonuna dayalı ölçümler, $F_n(x)$ 'in türevlenebilir özelliğinin olmamasından dolayı geçersiz olabilir.

Uzaklık ölçümünün seçimi bazı durumlarda çok önemli olabilir. δ_{KL} , maksimum likelihood ile bağıntısı nedeniyle tercih edilebilir. Uç noktalarda işlemlerin iyi yapılması önemliyse δ_C ve δ_{MC} kullanılabilir. Küçük örneklem davranışları uygulamadan uygulamaya geçeceğinden işlemsel olarak uygulanabilirliği önemli bir soru olabilir. bu durumda ise δ_L kullanılabilir.

Choi ve Bulgren (1968), bileşenlerindeki parametrelerinin yani, $i=1, \dots, k$ için θ_i parametrelerinin bilindiği sonlu karma dağılım modellerindeki karma oranlarını tahmin etmek için karesel uzaklığa dayalı bir uzaklık ölçümü geliştirdiler (Titterington ve ark. 1985, s.117). Buna göre,

$$\begin{aligned} \delta_{ALA}[F_n(x), F(x; \Phi)] &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[F(x_i; \Phi) - \frac{i}{n} \right]^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^k p_j F_j(x_i) - \frac{i}{n} \right]^2 \end{aligned} \quad (1.2.80)$$

dır.

(1.2.80) 'deki ifadeyi yazmanın iki genel yolu vardır.

Bunlar,

$$(a) \frac{1}{n} (Bp-d)'V(Bp-d) \quad (1.2.81)$$

Burada genelliği bozmaksızın $x_1' \leq \dots \leq x_n'$ olsun.

$$B_{ij} = F_j(x_i) \quad i=1, \dots, n \quad j=1, \dots, k$$

V , özel olarak birim matris

ve

$$d_i = i/n \quad i=1, \dots, n$$

alınsın.

$$(b) \frac{1}{n} (p'Ap - 2p'b + c) \quad (1.2.82)$$

Burada $A=B'VB$, $b=B'Vd$ ve $c=d'Vd$

dir.

A matrisi pozitif definittir (Hardy ve ark. 1952, s.16). Bu durumda $\Phi=p'$ parametresinin tahmini,

$$\tilde{p} = A^{-1}b \quad (1.2.83)$$

olarak elde edilir.

$$\text{Sonuçtaki } F(x; \tilde{\Phi}) = \sum_{i=1}^k \tilde{p}_i F_i(x) \quad , \quad x \in X; \text{ fonksiyonu, } F(x; \tilde{\Phi})$$

fonksiyonuna (tutarlı, $n \longrightarrow \infty$) bir yaklaşımda bulunmak için

düzgünlük koşullarını zorunlu tutacaktır. $F(x; \tilde{\Phi})$, verilen

herhangi bir örneklem için kendi başına bir dağılım

fonksiyonu olmayabilirde. $F(x; \tilde{\Phi})$ 'in bir dağılım fonksiyonu

olduğunu garantilemek için,

$$p_1 + \dots + p_k = 1 \text{ ve } p_1 \geq 0, \dots, p_k \geq 0 \quad (1.2.84)$$

kısıtlamaları altında (1.2.81) 'deki ifadeyi minimum yapmak

gerekir. Bu bir karesel programlama problemini gösterir ve çözümü

için simpleks algoritmaları vardır (Walsh, 1975).

(1.2.84) 'deki kısıtlamalar üzerinde ısrar edilirken negatif

p_i 'lerin uzlaşma (compromise) ve risk olasılıkları hesaplanırsa

çözüm açık olarak,

$$\tilde{p} = A^{-1}b + \frac{A^{-1}1(1-1'A^{-1}b)}{1'A^{-1}1} \quad (1.2.85)$$

şeklinde tekrar yazılabilir (Titterington ve ark. 1985, s.118).

Burada 1 , birlerin bir vektörüdür. (1.2.84) 'deki

kısıtlamalar bir Lagrange çarpanı kullanılarak dahil edilir. Bu

çözüm bir kısıtlanmış minimum göstermez (Fletcher, 1971),

(Macdonald, 1975) ve (Macdonald ve Pitcher, 1979).

Alternatif olarak p_k , (1.2.84) 'den elde edilebilir. Elde edilen $(p_1, \dots, p_{k-1}) = \bar{\theta}$ 'nin karesel fonksiyonu, daha fazla kısıtlama koymaksızın,

$$\bar{\theta} = A^*{}^{-1} b^* \quad (1.2.86)$$

olarak minimum yapılır.

Burada

$$(A^*)_{jl} = \sum_{i=1}^n [F_j(x_i) - F_k(x_i)][F_l(x_i) - F_k(x_i)] \quad j, l = 1, \dots, k-1$$

$$b^*_j = \sum_{i=1}^n [F_j(x_i) - F_k(x_i)] \left[\frac{1}{n} - F_k(x_i) \right] \quad i = 1, \dots, k-1$$

dir.

(1.2.86) 'daki çözüm, (1.2.85) 'dekine denktir.

Diğer birkaç uzaklık ölçümü de benzer karesel kriteri verir.

Örneğin $\delta_{WLB}(F_n(x), F(x; \Phi))$,

$$\delta_{WLB}(F_n(x), F(x; \Phi)) = \int \frac{[dF_n(x) - dF(x; \Phi)]^2}{dH(x)} dx \quad (1.2.87)$$

şeklinde yazılabilir (Bartlett ve Macdonald, 1968).

Buna karşın (Macdonald, 1975) tarafından da ortaya konduğu gibi eğer $H(x)$ türevlenebilirse (1.2.87) 'deki eşitliğin sağ

tarafı sonsuzdur. Formal minimum yapma işlemi, $\bar{\Phi}$ 'nin,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w(x_i) \frac{df(x_i; \Phi)}{d\Phi} = \int w(x) \frac{df(x; \Phi)}{d\Phi} dx \quad (1.2.88)$$

vektör eşitliğini sağladığını söyler.

Burada

$$w(x) = \left[\frac{dH(x)}{dx} \right]^{-1}$$

dir.

Yukarıdaki örnekte $\Phi = \eta$ ile tüm x için

$$\frac{\partial f(x; \eta)}{\partial \eta_i} = f_j(x) - f_k(x) \quad i=1, \dots, k-1$$

dır.

(1.2.88) 'deki eşitlikler,

$$T = J\eta + R \quad (1.2.89)$$

şeklinde yazılabilir.

Burada

$$T_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w(x_i) [f_j(x_i) - f_k(x_i)] \quad i=1, \dots, k-1$$

$$J_{j,l} = \int [f_j(x) - f_k(x)] [f_l(x) - f_k(x)] w(x) dx \quad j, l=1, \dots, k-1$$

ve

$$R_j = \int [f_j(x) - f_k(x)] f_k(x) w(x) dx \quad i=1, \dots, k-1$$

Yani,

$$\tilde{\eta} = J^{-1}(T - R) \quad (1.2.90)$$

dir.

Şimdi de hem karma oranlarının hem de bileşenlerindeki parametrelerin bilinmediği sonlu karma dağılım modellerindeki parametreleri tahmin etmek için kullanılan uzaklığa dayalı yöntemleri ele alalım (Titterington ve ark. 1985, s.121).

Bu durumdaki yoğunluklar, bilinmeyen parametrelerde lineer değildir ve sayısal optimizasyonu kullanmak gerekir. Lineer olmayan denklemleri çözmek için genellikle Newton-Raphson yöntemi

veya scoring yöntemi kullanılır. $\delta_{KL}(F_n(x), F(x; \Phi))$ durumu, maksimum likelihood tahmini verir.

$$D\delta(\Phi) = \frac{\partial}{\partial \Phi} \delta(F_n(x), F(x; \Phi)) \quad (1.2.91)$$

yazılsın ve $D^2\delta(\Phi)$ de ikinci türevlerin matrisini göstereyin. Bu durumda $\Phi^{(0)}$ başlangıç yaklaşımında bulunulduğunda $\{\Phi^{(m)}\}$ dizisi,

$$\Phi^{(m+1)} = \Phi^{(m)} - \alpha_m [D^2\delta(\Phi^{(m)})]^{-1} D\delta(\Phi^{(m)}) \quad m=0,1,\dots \quad (1.2.92)$$

'ye göre oluşturulur.

Burada α_m , tüm m 'ler için $\alpha_m=1$ olarak da alınabilir.

Scoring yöntemiyle benzetme yapmak gerekirse $\Phi = \Phi^{(m)}$ koşuluyla ikinci türevlerin matrisi, bu matrisin beklenen değeriyle yer değiştirilir.

4. Bayes yöntemi:

Bayes analizinin genel formu aşağıdaki gibidir:

Kesin nedenler $C_1, \dots, C_n$; $\Pr(C^*)$ prior olasılıklarına sahiptir. Bu nedenler, kesinlik ile değil fakat $\Pr(E|C^*)$ koşullu olasılıklarıyla bir E etkisi üretirler.

Sonunda da üzerinde etki gözlenen bir nedenin $\Pr(C^*|E)$ posterior olasılığı hesaplanır.

Tablo 2. Bayes analizinde verilenler ve çıktıları.

Verilen (prior olasılıklar)	Mantıksal olarak çıkarılan sonuç (posterior olasılıklar)
$\Pr(C^*)$	$\Pr(C^* E)$
$\Pr(E C^*)$	

Burada C^* ; $C_1, \dots, C_n$ 'den herhangi birini,

$$\Pr(E|C^*) \quad (1.2.93)$$

de C^* verildiğinde E 'nin koşullu dağılımını göstermektedir.

$C_1, \dots, C_n$ için posterior olasılıklar:

$$\begin{aligned} \Pr(C_1) \times \Pr(E|C_1) &= \Pr(E \cap C_1) \\ \Pr(C_2) \times \Pr(E|C_2) &= \Pr(E \cap C_2) \\ &\vdots \\ \Pr(C_n) \times \Pr(E|C_n) &= \Pr(E \cap C_n) \end{aligned} \quad (1.2.94)$$

$$\text{Toplam, } \Pr(E) = \sum_{j=1}^n \Pr(E \cap C_j)$$

şeklinde hesaplanır.

Bu durumda,

$$\Pr(C^*|E) = \frac{\Pr(E \cap C^*)}{\Pr(E)} \quad (1.2.95)$$

olarak elde edilir.

Bir bilinmeyen Φ parametre vektörünü içeren bir model verildiğinde, Bayesci sonuç çıkarma yukarıda açıklanan şekliyle tanımlanır.

$L(\Phi)$, verilen $x=(x_1, \dots, x_n)$ örnekleminin Φ parametreleri için likelihood fonksiyonunu gösterebilir. Bayes teoremi $f(\Phi)$ yoğunluğuyla ifade edilen x gözlemlerine Φ prior hakkındaki kanaatları, $f(\Phi|x)$ ile gösterilen x gözlemlerine Φ posterior hakkında kanaatlara güncelleştiren mekanizmayı sağlar (Titterton ve ark. 1985, s.106).

Burada,

$$f(\Phi|x) = \frac{L(\Phi)f(\Phi)}{\int L(\Phi)f(\Phi)d\Phi} \quad (1.2.96)$$

dır. Buna göre:

(1.2.96) 'daki $L(\Phi)$, karma dağılım modelindeki bileşen parametrelerinin bazıları bilindiğinde belirli düzenlemeler yapılarak (1.2.1), (1.2.2), (1.2.3), (1.2.4), (1.2.5), (1.2.6) ve (1.2.7) 'deki log-likelihood fonksiyonlarından herhangi birinin formunda olabilir.

Genel olarak, $f(\Phi)$ 'nin ayrıntıları hakkında söylenebilecekler çok azdır. Çünkü Bayesci felsefi çerçevede (1.2.96), özel uygulamalarda gerçek veya potansiyel priorların posterior kanaatlara dönüşümlerinin araştırılması için bir araçtır, vasıtaadır.

Bununla birlikte $L(\Phi)$ bir sonlu karma dağılım modelinden elde edildiğinde örneğin $L(\Phi)$ bir üstel aile modeline (Dempster ve ark., 1977) karşılık geldiğinde ve $f(\Phi)$ birbirinin yerine geçebilen (conjugate) aileye karşılık gelenin bir üyesi seçildiğinde, (1.2.96) 'nın basit bir analitik ele alınış tarzı mümkün değildir.

Buradan sonlu karma dağılımlar için Bayes örnekleme çalışmasının, eğer Φ bir veya iki bilinmeyen parametre grubundan oluşmazsa tamamıyla doğru olmayacağı sonucu çıkarılır.

İkinci durumda, yani Φ 'nin iki bilinmeyen parametre grubu içerdiği durumda, ortak veya marjinal posterior yoğunlukların sonuçları; noktaların uygun gridleri üzerinde $f(\Phi|x)$ 'i basit olarak hesaplama yoluyla çok az işlemle, (1.2.96) 'dan kolayca elde edilebilir.

Φ 'nin üç ya da daha fazla parametre grubu içerdiği durumlarda çok katlı sayısal integrallerin hesaplanması problemiyle karşılaşılır. Bu problemin genel olarak bir çalışması

Naylor ve Smith (1982) ve Smith ve ark. (1985) tarafından yapılmıştır.

(1.1.1) 'deki sonlu karma dağılım modelinde sadece karma oranları p bilinsin ve p parametresinin dağılımı bir Dirichlet prior dağılımı olsun.

p parametresinin dağılımı,

$$\prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i-1}, \quad \alpha_i > 0 \quad (1.2.97)$$

ile orantılı bir yoğunluğa sahiptir.

Eğer veri (1.1.1) 'den alınmış n tane bağımsız $x_1, \dots, x_n$ gözlemlerinden oluşuyorsa,

$$L(\Phi) = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^k p_i f(x_j) \right] \quad (1.2.98)$$

$$= \sum_{r_1+\dots+r_k=n} c(x; r_1, \dots, r_k) \prod_{i=1}^k p_i^{r_i} \quad (1.2.99)$$

dır.

Burada $c(x; r_1, \dots, r_k)$, $\{f_i(x_j), i=1, \dots, k ; j=1, \dots, n\}$ 'nin kolayca belirlenebilir bir fonksiyonudur.

p için posterior yoğunluğun (1.2.97) ve (1.2.99) 'un çarpımıyla orantılı olduğundan $f(p|x)$, k^n Dirichlet yoğunluklarının bir karmasının formuna sahiptir.

$f(p|x)$ 'in k^n Dirichlet yoğunluklarının bir karmasının formuna sahip olması, mümkün k 'kaynak dağılımlar' ile n tane her bir gözlemin bir özel belirlenmesi varsayımıyla (1.2.97) 'den elde edilebilir mümkün k^n posterior yoğunluklara karşılık gelir.

$J_1, \dots, J_{k^n}$ mümkün belirlemeleri gösteriyorsa,

$$f(p|x) = \sum_{s=1}^{k^n} f(p|x, J_s) f(J_s|x) \quad (1.2.100)$$

dir.

Böylece posterior karmadaki ağırlıklar, 'kaynaklar' ile gözlemlerin belirlenmesinin oransal olasılığını yansıtır.

Bayesci yaklaşımlar üzerinde yakın zamanlarda bazı çalışmalar yapılmıştır. Rajagopalan ve Loganathan (1991), sonlu karma dağılım modellerinde bileşen yoğunlukları bilindiğinde karma oranlarının Bayes tahminlerini elde ettiler. Daha sonra yine Loganathan ve Rajagopalan (1993), sonlu karma dağılımların karmasındaki karma oranlarını, bileşen yoğunlukları bilindiğinde Bayes yöntemiyle tahmin etmişlerdir.

2. BÖLÜM

SONLU KARMA DAĞILIM MODELLERİNİN UYGULAMALARI VE UYGULAMA ALANLARI

2.1. Sonlu Karma Dağılım Modellerinin Uygulamaları ve Alanları

Sonlu karma dağılım modellerinin zooloji, tıp, palaeontoloji, mikro biyoloji, botanik, su ürünleri, kalite kontrol, ziraat, jeoloji, ekonomi, psikoloji ve diğer uygulama alanları olmak üzere çok değişik uygulama alanları vardır (Titterington ve ark. 1985, s.16).

Sonlu karma dağılım modellerinin direk uygulamalarının başlıcaları aşağıda tablolar halinde verilmiştir.

Tablolarda kullanılan kısaltmaların anlamları:

Mevcut ise verinin formu:

D - Sayısal veri

H - Histogram

C - Verinin eğrisi

R - Referans verilen

Uygulamada model uydurma işlemi:

GR - Grafiksel yöntem

MM - Momentler yöntemi

ML - Maksimum likelihood yöntemi

MD - Minimum uzaklık yöntemi

B - Bayes yöntemi

FD - Fonksiyon ayrıştırma yöntemi

CA - Yığılım analizi yöntemi

CF - Eğri uydurma yöntemi (En küçük kareler yöntemi)

Tablo 3. Zooloji alanındaki uygulamaların başlıcaları

Uygulama	Karma tipi	Verinin formu	Tahmin yöntemi	Referans
Karides diş uzunlukları(cinsiyete göre)	Normal	D	MM	Pearson (1894)
Yengeç alın hacimleri	Normal	D	MM	Pearson (1894)
Tripanazoma uzunlukları (türlerine göre)	Normal	D	MM	Pearson (1914)
Kapepod uzunlukları (cinsiyete göre)	Normal	H	GR	Harding (1949)
Plankton frekansları	Normal	D	GR	Cassie (1962)
Lamprey uzunlukları	Normal	H	FD	Taylor (1965)
Yumurta geçitindeki tane hacimleri	Normal	H	ML	Covey ve Crump (1970)
Karides diş uzunlukları(cinsiyete göre)	Normal	R	Değişik	Clark (1976)
Tripanazoma uzunlukları (türlerine göre)	Normal	R	Değişik	Clark (1976)
Yengeç alın hacimleri	Normal	R	Değişik	Clark (1976)
Tripanazoma uzunlukları (türlerine göre)	Normal	D	GR	Fowlkes (1979)
Kuş uçuş hızları (grupların)	-	H	CA	Larkin (1979)
Tripanazoma uzunlukları (türlerine göre)	Normal	D	ML	Everitt ve Hand (1981)

Tablo 4. Tıp alanındaki uygulamaların başlıcaları.

Uygulama	Karma tipi	Verinin formu	Tahmin yöntemi	Referans
Kan basıncı	Normal	H	ML	Clark ve ark. (1968)
DNA	Normal	D	FD	Gregor (1969)
Kan glikoz düzeyleri	Normal	H	GR , ML	Rushforth ve ark. (1971)
Gebe kalma zamanları	Üstel	D	ML	Suchindran ve Lachenbruch (1974)
Arterit'in başlama yaşı	Gama	R	MM	Masuyama (1977)
Böbrekte bulunan ksenon düzeyleri	Üstel	-	FD	Sandor ve ark. (1978)
Diş basınç kuvvetleri	Normal	D	MM	Marks ve Rao (1979)
Plazma düzeyleri (iki kitlenin)	Normal	H	ML	Raper ve ark. (1982)

Tablo 5. Palaeontoloji alanındaki uygulamaların başlıcaları

Uygulama	Karma tipi	Verinin formu	Tahmin yöntemi	Referans
Antik mısırlıların çene kemiği hacimleri (cinsiyete göre)	Normal	D	MM	Martin (1936)
Foraminifer çapı (tiplerine göre)	Normal	H	MM	Ghose (1970)
Foraminifer çapı (tiplerine göre)	Normal	R	Değişik	Clark (1976)

Tablo 6. Mikro biyoloji alanındaki uygulamaların başlıcaları

Uygulama	Karma tipi	Verinin formu	Tahmin yöntemi	Referans
Protein yoğunlukları	Normal	C	FD	Tiselius ve Kabat (1939)
Protein yoğunlukları	Normal	C	FD	Berry ve Chanutin (1955)
Gaz kromatogramları	Normal	-	FG , GR	Smith ve Bartlet (1961)
Protein yoğunlukları	Normal	C	FD	Wild (1965)
Absorpsiyon spektrumu	Normal	C	FD	Fraser ve Suzuki (1966)

Tablo 7. Botanik alanındaki uygulamaların başlıcaları

Uygulama	Karma tipi	Verinin formu	Tahmin yöntemi	Referans
Bitki boyları (yükseklikleri)	Normal	D	MM , ML	Rao (1948)
Bitki boyları (yükseklikleri)	Normal	D	GR	Tanaka (1962)
Bitki çiftlerinde yükseklik farkları (Darwin verisi)	Normal	D	Bayes	Box ve Tiao (1968)
Çiçeklenme zamanları (bitki türlerine göre)	Normal	D	MM , ML	Tan ve Chang (1972)
Çiçek tozu (polen) taneleri	Normal	D	GR , FD	Usinger (1975)
Bitki çiftlerinde yükseklik farkları (Darwin verisi)	Normal	D	ML	Aitkin ve Wilson (1980)

Tablo 8. Su ürünleri alanındaki uygulamaların başlıcaları

Uygulama	Karma tipi	Verinin formu	Tahmin yöntemi	Referans
Ringa uzunlukları (yumurta dökmesine göre)	Normal	-	GR	Buchanan ve ark. (1928)
Ringa uzunlukları (yumurta dökmesine göre)	Normal	H	GR	Harding (1949)
Levrek uzunlukları (yaşa göre)	Normal	D	GR	Cassie (1954)
Sinarit çatal uzunlukları (yaşa göre)	Normal	D	GR	Tanaka (1962)
Sinarit çatal uzunlukları (yaşa göre)	Normal	D	GR	Bhattacharya (1967)
Turna balığı uzunlukları (yaşa göre)	Normal	-	MD , ML	Macdonald (1971)
Çelikbaş alabalık	Normal	H	GR	Everett (1973)
Alabalık uzunlukları	Normal	-	MM , ML	Dick ve Bowden (1973)
Halibut uzunlukları (cinsiyete göre)	Normal	H	ML	Hosmer (1973)
Halibut uzunlukları (iki yaş grubuna ve cinsiyete göre)	Regresyon	-	ML	Hosmer (1974)
Golyan balığı uzunlukları	Normal	D	ML , MD	Macdonald (1975)
Turna balığı uzunlukları (yaşa göre)	Normal	D	Değişik	Macdonald (1975)
Sinarit çatal uzunlukları (yaşa göre)	Normal	R	Değişik	Clark (1976)
Halibut uzunlukları (cinsiyete göre)	Normal	R	Değişik	Murray ve Titterington (1978)
Turna balığı uzunlukları (yaşa göre)	Normal	H	MD	Macdonald ve Pitcher (1979)

Tablo 9. Kalite kontrol alanındaki uygulamaların başlıcaları

Uygulama	Karma tipi	Verinin formu	Tahmin yöntemi	Referans
Servis otobüsü bozulma zamanları	Normal Üstel	H	-	Davis (1952)
Valf kullanma süresi (tiplerine göre)	Üstel (kesilmiş)	D	-	Davis (1952)
Verici-alıcı kullanım süreleri	Üstel (kesilmiş)	D	ML	Mendenhall ve Harder (1958)
Elektron tüpleri	Weibull	D	GR	Kao (1959)
Laser kullanım süreleri	Normal	R	GR	Fowlkes (1979)
Telefon konuşma uzunlukları	Lognormal	D	GR	Fowlkes (1979)
Valf kullanma süresi (tiplerine göre)	Üstel (kesilmiş)	D	ML	Everitt ve Hand (1981)
Güvenirlilik	Weibull Üstel	-	ML	Mandelbaum ve Harris (1982)

Tablo 10. Zıraat alanındaki uygulamaların başlıcaları

Uygulama	Karma tipi	Verinin formu	Tahmin yöntemi	Referans
Mısır türleri	Normal	D	MM , ML	Tan ve Chang (1972)
Ürün yoğunlukları	Bilinen bileşenler	-	ML	Peters ve Coberly (1976)
Arpa ürün miktarları	Faktoriyal model	D	Bayes, CA	Binder (1978)

Tablo 11. Jeoloji alanındaki uygulamaların başlıcaları

Uygulama	Karma tipi	Verinin formu	Tahmin yöntemi	Referans
Kömür tozu verileri	Normal	D	GR	Hald (1952)
Kum tanesi hacimleri	Normal	D	GR	Tanner (1959)
Kömür tozu verileri	Normal	D	ML	Hasselblad(1966)
Metal yoğunlukları	Lognormal	C	GR	Lepeltier (1969)
Kum tepeciklerinin yığılımları	Normal	-	FD	Folk (1971)
Işığın yansımaları(kömür tiplerine göre)	Normal	H	MD	Mundry (1972)
Kum tanesi hacimleri	Normal	C	FD	Van Andel (1973)
Kum tane yapısı	Normal	-	MD	Clark (1976)
Kömür tozu verileri	Normal	R	Değişik	Clark (1976)
Kalay metalinin analizi	Normal	D	MM	Clark (1977)
Kömür tozu verileri	Normal	D	MM	Everitt ve Hand (1981)

Tablo 12. Ekonomi alanındaki uygulamaların başlıcaları

Uygulama	Karma tipi	Verinin formu	Tahmin yöntemi	Referans
Konut (iskan) regresyonları	Regresyon	-	ML	Quandt (1972)
Ücret regresyonları	Regresyon	-	MD	Quandt ve Ramsey (1978)

Tablo 13. Psikoloji alanındaki uygulamaların başlıcaları

Uygulama	Karma tipi	Verinin formu	Tahmin yöntemi	Referans
Yanıtlama (tepki) zamanları	Lognormal	D	-	Broadbent (1966)

Tablo 14. Diğer alanındaki uygulamaların başlıcaları

Uygulama	Karma tipi	Verinin formu	Tahmin yöntemi	Referans
Akşam sıcaklıkları (iki mevsime göre)	Normal	D	MM	Charlier ve Wicksell (1924)
Serpinti yoğunlukları	Normal (kesilmiş)	-	MD	Wilkins (1961)
Hypsometrik eğriler	Normal	D	GR	Tanner (1962)
Yeryüzü ölçümleri	Normal	H	MM	Gridgeman (1970)
Trafikte kayıp zamanlar	Üstel	D	MM , ML	Ashton (1971)
Yığındaki kayıp veriler	Regresyon	R	ML	Aitkin ve ark. 1980)
Çökelmeler	Normal	-	ML	Leytham (1984)
Uzaktan algılama	Normal	D	MM	Erol ve Akdeniz (1995)

3. BÖLÜM

ÜÇ BİLEŞENLİ ÜSTEL DAĞILIMIN BİR KARMA SİSTEMİNDEKİ PARAMETRELERİN TAHMINİ VE ATMOSFERİK KOROZYON SİSTEMLERİNDEKİ METALLERİN KOROZYON HIZLARININ MODELLENMESİ VE İZLENMESİ

3.1. Korozyon Probleminin Tanımı Ve Üç Bileşenli Karma Dağılım Modelinin Kurulması

Metallerin korozyon sistemlerindeki korozyon hızlarının belirlenmesi problemi ve korozyon sistemlerinde bulunan korozyonu önleyici maddelerin (inhibitörlerin) korozyon hızını düşürmedeki etkinliklerinin incelenmesi problemi, korozyon biliminde ya da fiziko kimyada üzerinde çok çalışılan önemli problemlerdir. Öyleki bu problemler için Science Citation Index bilimsel yayınlar aktarım kataloğunda "corrosion" ve "rate" anahtar kelimelerine göre 1980-1994 zaman aralığında bu konuda yer alan bilimsel çalışmaların sayısı yaklaşık olarak 230 dur.

Bir korozyon sistemi, metalin korozyona maruz kaldığı atmosferik ya da sulu tipte olmak üzere herhangi bir korozif ortamdır.

Korozyon sistemindeki bir metalin korozyon davranışı ya da korozyon hızı, bir "korozyon olayı" olarak tanımlansın.

Bir metalin korozyon sistemindeki korozyon davranışının ya da korozyon hızının modellenmesi veya izlenmesi, matematiksel

açısından birçok kere ele alınmıştır. Ryan ve ark.(1987), bir eksen etrafında dönen gözenekli bir levhanın başlangıç korozyon hızı için bir matematiksel model kurmuşlardır. Korozyonu önleyici madde (inhibitör) testinde ve korozyon hızının izlenmesinde polarizasyon direncinin belirlenmesi için sayısal yöntemler Rocchini(1988) tarafından verilmiştir. Rocchini (1993) diğer bir çalışmada; metallerin korozyon hızlarının hesaplanması için bir sayısal yöntem oluşturmuştur. Reiber ve ark.(1987), ağırlık kaybı ölçümlerine dayalı korozyon hız değerlerini elde etmek için bir yöntem geliştirmişlerdir.

Bu bölümün amacı; atmosferik korozyon sistemindeki bir metalin korozyon hızı davranışı için ağırlık kaybı ölçümlerine göre hesaplanmış ortalama korozyon hız değerlerine dayalı bir istatistiksel model oluşturmaktır.

Atmosferik korozyon sistemindeki bir metalin ağırlık kaybı ölçümlerine göre hesaplanmış ortalama korozyon hız değerleri, metalin yüzeyinde oluşan korozyon ürünleri nedeniyle zamana göre azalandır (Dehri ve ark., 1994). Diğer bir ifadeyle, atmosferik korozyon sisteminde korozyona maruz kalan metalin yüzeyinde oluşan korozyon ürünleri nedeniyle ağırlık kaybı ölçümlerine göre hesaplanmış ortalama korozyon hız değerleri negatif üstel olarak azalır.

Negatif üstel dağılım veya negatif üstel olasılık yoğunluk fonksiyonu; yaşam testi ve güvenilirlik alanlarında, zamana karşı dayanma süreleri için kullanılan bir istatistiksel modeldir (Hahn ve Shapiro 1967, s.105).

"Atmosferik korozyon sistemindeki bir metalin, ağırlık kaybı ölçümlerine göre hesaplanmış ortalama korozyon hız değerlerinin istatistiksel davranışı veya ortalama korozyon hız değerleri için istatistiksel fonksiyon nedir?" sorusunu cevaplamak amacıyla korozyon bilimi alanında "Üç üstel dağılımın bir karması veya karma dağılım modeli" kavramı oluşturulmuştur.

Bu amaçla, ağırlık kaybı yöntemiyle korozyon hızının belirlendiği durumlarda; ortalama korozyon hız değerleri için üç bileşenli bir karma dağılım modeli kurulmuştur. Karma dağılım modelinin üç bileşenli olmasının nedeni; "korozyon olayının" üç safhada incelenmesinden dolayıdır. Bu safhalar:

1) Metalin yüzeyinin tamamıyla açık ya da temiz olarak korozyon ortamına bırakıldığı andan itibaren, metalin yüzeyinin yarı kapalı duruma geçtiği ana kadar geçen süreç.

2) Metalin yüzeyinin yarı kapalı duruma geçtiği andan itibaren, metalin yüzeyinin tamamıyla kapalı duruma geçtiği ana kadar geçen süreç.

3) Metalin yüzeyinin tamamıyla kapalı duruma geçtiği andan itibaren, metalin yüzeyinin "doymasına" kadar geçen süreç.

Metalin yüzeyi tamamıyla kapalı durumda iken de "korozyon olayı" sürmektedir. Metalin yüzeyinin "doyması" noktasında ya da anında korozyon 'yok' denecek kadar azdır.

Üç bileşenli karma dağılım modelinin her bir bileşeni, tek parametrelili üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu şeklindedir.

Üç bileşenli üstel dağılımın bir karmasının olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x;p_1,p_2,p_3,\mu_1,\mu_2,\mu_3) = \sum_{i=1}^3 p_i f_i(x;\mu_i) \quad 0 < x < +\infty \quad (3.1.1)$$

$$0 < p_1, p_2, p_3 < 1, \quad \mu_1, \mu_2, \mu_3 > 0$$

dir.

Burada $i=1,2,3$ için p_i 'ler $\sum_{i=1}^3 p_i = 1$ olmak üzere karma

oranlarıdır ve $f_i(x;\mu_i)$ 'ler

$$f_i(x;\mu_i) = \frac{1}{\mu_i} \exp\left(-\frac{x}{\mu_i}\right) \quad 0 < x < +\infty$$

$$\mu_i > 0$$

şeklinde, yani $\alpha_i=0$ özel durumu için (1.2.30) 'daki gibi olmak üzere, karma dağılım modelinin bileşenleridir.

(3.1.1) 'de X , ağırlık kaybı ölçümlerine göre hesaplanmış ortalama korozyon hız değerlerini gösteren rastgele bir değişken ve $f(x)$ 'de korozyon sistemindeki bir metalin ağırlık kaybı ölçümlerine göre hesaplanmış ortalama korozyon hız değerleri için üç bileşenli karma dağılım modeli veya olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

(3.1.1) 'deki olasılık yoğunluk fonksiyonu, herbirinin bir karma oranı ile üç üstel dağılımın bir toplamıdır.

$i=1,2,3$ için p_i 'ler karma dağılım modelindeki herbir bileşenin modele katkı oranını göstermektedir. $1/\mu_i$ 'ler ise herbir safhada, korozyon sistemindeki metalin korozyon hızını belirleyici faktörlerdir.

$$\text{Korozyon hızı} = \frac{\Delta_m}{\text{Zaman} \cdot \text{Yüzey alanı}} \quad (3.1.2)$$

bağıntısıyla hesaplanır.

Burada korozyon hızının birimi $\text{mdd} (\text{mg}/(\text{dm}^2 \cdot \text{saat}))$; Δm , metalin kütlesindeki değişimi (ağırlık kaybını) göstermek üzere birimi mg (miligram); Zaman, alınan ölçümlere bağlı olmak üzere birimi saat veya gün; Yüzey alanı A 'nın birimi dm^2 (desimetre kare) dir.

(3.1.1) 'deki karma dağılım modelinde üç bileşen vardır. Herbir bileşen kendi başına bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere "korozyon olayındaki" bir safhaya karşılık gelmektedir. Bu anlamda karma dağılım modelinde en küçük μ_1 değerine sahip bileşen birinci safhaya karşılık gelen bileşen, en büyük μ_3 değerine sahip bileşen üçüncü safhaya karşılık gelen bileşen ve diğeri de ikinci safhaya karşılık gelen bileşen olarak alınmaktadır. Diğer bir ifadeyle, modeldeki bileşenler $0 < \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < +\infty$ olacak şekilde; $i=1,2,3$ için μ_i değerine göre düzenlenmiştir.

(3.1.1) 'de bulunan modelin bileşenleri; yani $f_1(x)$, $f_2(x)$ ve $f_3(x)$ sırasıyla metalin yüzeyinin tamamıyla açık, yarı kapalı ve tamamıyla kapalı olduğu durumları göstermektedir. Ayrıca $1/\mu_1$, $1/\mu_2$ ve $1/\mu_3$ sırasıyla $f_1(x)$, $f_2(x)$ ve $f_3(x)$ bileşenlerinin korozyon hız faktörleridir. Yani $1/\mu_1$, $1/\mu_2$ ve $1/\mu_3$ sırasıyla metalin yüzeyinin tamamıyla açık, yarı kapalı ve tamamıyla kapalı olduğu durumlardaki korozyon hızını belirleyici faktör parametreleridir.

3.2. Üç Bileşenli Üstel Karma Dağılım Modelindeki Parametrelerin Tahmini

Üç bileşenli üstel karma dağılım modelindeki, yani (3.1.1) 'deki olasılık yoğunluk fonksiyonundaki parametreleri tahmin etmek için bölüm 1.2.3 'de açıklanan momentler yöntemi kullanılacaktır. Momentler yöntemi istatistikte kullanılan bir parametre tahmin yöntemidir.

Momentler yönteminde, beklenen değerler örneklem momentlerine eşitlenir ve (3.1.1) 'deki olasılık yoğunluk fonksiyonunda bulunan parametreler cinsinden bir denklem sistemi elde edilir. Elde edilen denklem sistemi genelde lineer değildir.

Üç bileşenli üstel karma dağılım modelinin merkez yada sıfır etrafındaki r . momenti,

$$\mu'_r = E(x^r) = \int_0^{\infty} x^r f(x; p_1, p_2, p_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3) dx \quad (3.2.1)$$

bağıntısıyla hesaplanır.

$$\begin{aligned} \mu'_r &= \int_0^{\infty} x^r \sum_{i=1}^3 p_i \frac{1}{\mu_i} \exp\left(-\frac{1}{\mu_i} x\right) dx \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{p_i}{\mu_i} \int_0^{\infty} x^r \exp\left(-\frac{1}{\mu_i} x\right) dx \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

$i=1,2,3$ için

$$I_i = \int_0^{\infty} x^r \exp\left(-\frac{1}{\mu_i} x\right) dx \quad (3.2.3)$$

olsun.

(3.2.3) 'deki integralde $u=(1/\mu_1)x$ dönüşümü uygulandığında integral,

$$I_1 = \mu_1^{r+1} \int_0^{\infty} u^r \exp(-u) du \quad (3.2.4)$$

şeklinde tekrar yazılabilir.

(3.2.4) 'de

$$\Gamma(r+1) = \int_0^{\infty} u^r \exp(-u) du \quad (3.2.5)$$

dir. Bu durumda (3.2.3) 'deki integralin sonucu,

$$I_1 = \mu_1^{r+1} \Gamma(r+1) \quad (3.2.6)$$

bulunur.

Sonuç olarak (3.2.2) 'deki merkez ya da sıfır etrafındaki r . moment,

$$\mu'_r = \sum_{i=1}^3 p_i \mu_i^r \Gamma(r+1) \quad (3.2.7)$$

olarak elde edilir.

(3.1.1) 'de tahmin edilecek toplam $2*3-1=5$ tane parametre vardır. Bu nedenle merkez ya da sıfır etrafındaki linci, 2inci, ... ve 5inci momentlerin hesaplanması gerekir.

(3.2.7) 'deki bağıntı kullanılarak, merkez ya da sıfır etrafındaki linci, 2inci, ... ve 5inci momentler,

$$\begin{aligned} \mu'_1 &= [p_1 \mu_1^1 + p_2 \mu_2^1 + p_3 \mu_3^1] 1 \\ \mu'_2 &= [p_1 \mu_1^2 + p_2 \mu_2^2 + p_3 \mu_3^2] 2 \\ \mu'_3 &= [p_1 \mu_1^3 + p_2 \mu_2^3 + p_3 \mu_3^3] 6 \\ \mu'_4 &= [p_1 \mu_1^4 + p_2 \mu_2^4 + p_3 \mu_3^4] 24 \\ \mu'_5 &= [p_1 \mu_1^5 + p_2 \mu_2^5 + p_3 \mu_3^5] 120 \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

olarak hesaplanır.

Merkez ya da sıfır etrafındaki linci, 2inci, ... ve 5inci momentler (3.2.8) 'deki gibi elde edildikten sonra sırasıyla, merkez ya da sıfır etrafındaki linci, 2inci, ... ve 5inci örneklem momentlerine eşitlendiğinde,

$$\begin{aligned}
 [p_1\mu_1^1 + p_2\mu_2^1 + p_3\mu_3^1] 1 &= m'_1 \\
 [p_1\mu_1^2 + p_2\mu_2^2 + p_3\mu_3^2] 2 &= m'_2 \\
 [p_1\mu_1^3 + p_2\mu_2^3 + p_3\mu_3^3] 6 &= m'_3 \\
 [p_1\mu_1^4 + p_2\mu_2^4 + p_3\mu_3^4] 24 &= m'_4 \\
 [p_1\mu_1^5 + p_2\mu_2^5 + p_3\mu_3^5] 120 &= m'_5
 \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

elde edilir. Burada n, örneklem hacmi olmak üzere,

$$m'_r = \sum_{i=1}^n x_i^r ; \quad r=1, \dots, 5 \text{ dir.}$$

(3.2.9) 'daki eşitliklere karma oranları üzerindeki,

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1 \tag{3.2.10}$$

kısıtlaması da eklendiğinde,

$$\begin{aligned}
 p_1 + p_2 + p_3 &= 1 \\
 p_1\mu_1^1 + p_2\mu_2^1 + p_3\mu_3^1 &= m'_1 \\
 p_1\mu_1^2 + p_2\mu_2^2 + p_3\mu_3^2 &= m'_2/2 \\
 p_1\mu_1^3 + p_2\mu_2^3 + p_3\mu_3^3 &= m'_3/6 \\
 p_1\mu_1^4 + p_2\mu_2^4 + p_3\mu_3^4 &= m'_4/24 \\
 p_1\mu_1^5 + p_2\mu_2^5 + p_3\mu_3^5 &= m'_5/120
 \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

lineer olmayan denklem sistemi elde edilir.

$A_0=1$, $A_1=m'_1$, $A_2=m'_2/2$, $A_3=m'_3/6$, $A_4=m'_4/24$ ve $A_5=m'_5/120$ alındığında, (3.2.11) 'deki lineer olmayan denklem sistemi,

$$p_1 + p_2 + p_3 = A_0 \quad (3.2.12)$$

$$p_1\mu_1^1 + p_2\mu_2^1 + p_3\mu_3^1 = A_1 \quad (3.2.13)$$

$$p_1\mu_1^2 + p_2\mu_2^2 + p_3\mu_3^2 = A_2 \quad (3.2.14)$$

$$p_1\mu_1^3 + p_2\mu_2^3 + p_3\mu_3^3 = A_3 \quad (3.2.15)$$

$$p_1\mu_1^4 + p_2\mu_2^4 + p_3\mu_3^4 = A_4 \quad (3.2.16)$$

$$p_1\mu_1^5 + p_2\mu_2^5 + p_3\mu_3^5 = A_5 \quad (3.2.17)$$

şeklinde yazılabilir.

(3.2.12)-(3.2.17) 'deki denklem sistemi, (3.1.1) 'deki olasılık yoğunluk fonksiyonundaki parametreler cinsinden ifade edilmiştir.

(3.2.12)-(3.2.17) 'deki denklem sistemi birinci olarak; (3.1.1) 'deki olasılık yoğunluk fonksiyonun bileşenlerinde bulunan parametreleri, yani μ_1 , μ_2 ve μ_3 parametrelerini tahmin etmek amacıyla kullanılır. Bu amaç için önce Prony 'nun yöntemi (Hildebrand 1956, s.378) (3.2.12)-(3.2.17) 'deki denklem sistemine uyarlanarak üçüncü dereceden bir cebirsel denklem elde edilir. Daha sonra elde edilen üçüncü dereceden cebirsel denklemin kökleri, Bairstow 'un sayısal olarak kök bulma yöntemi (Johnson ve Riess 1982, s.181) kullanılarak hesaplanır. Üçüncü

dereceden cebirsel denklemin kökleri: $\tilde{\mu}_1$, $\tilde{\mu}_2$ ve $\tilde{\mu}_3$ sırasıyla μ_1 , μ_2 ve μ_3 parametreleri için tahminlerdir. İkinci olarak, (3.1.1) 'deki olasılık yoğunluk fonksiyonunda bulunan karma oranları, yani p_1 ve p_2 ($p_3=1-p_1-p_2$) parametreleri; μ_1 , μ_2 ve μ_3 parametrelerinin sırasıyla $\tilde{\mu}_1$, $\tilde{\mu}_2$ ve $\tilde{\mu}_3$ tahminleri de kullanılarak en küçük kareler yöntemiyle (Herstein ve Winter 1989, s.434) hesaplanır. Böylece de (3.1.1) 'de bulunan tüm

parametreler tahmin edilmiş olur. Bu amaç için çalışmamızda bir bilgisayar programı geliştirilmiştir.

3.2.1. μ_1 , μ_2 ve μ_3 Parametrelerinin Tahmini

μ_1 , μ_2 ve μ_3 parametrelerinin tahmininde kullanılacak olan üçüncü dereceden cebirsel denklemi elde etmek için (3.2.12)-(3.2.17) 'deki lineer olmayan denklem denklem sistemine önce Prony 'nun yöntemi uyarlanır. Bunun için α_1 , α_2 ve α_3 ;

$$\mu^3 + \alpha_1\mu^2 + \alpha_2\mu + \alpha_3 = 0 \quad (3.2.18)$$

üçüncü dereceden cebirsel denklemin pozitif kökleri μ_1 , μ_2 ve μ_3 olacak şekilde seçilir. Yani

$$\mu_1^3 + \alpha_1\mu_1^2 + \alpha_2\mu_1 + \alpha_3 = 0 \quad (3.2.19)$$

$$\mu_2^3 + \alpha_1\mu_2^2 + \alpha_2\mu_2 + \alpha_3 = 0 \quad (3.2.20)$$

$$\mu_3^3 + \alpha_1\mu_3^2 + \alpha_2\mu_3 + \alpha_3 = 0 \quad (3.2.21)$$

dir.

Üçüncü dereceden cebirsel denklem için α_1 , α_2 ve α_3 katsayılarının belirlenmesi:

Birinci olarak, (3.2.12), (3.2.13), (3.2.14) ve (3.2.15) 'deki eşitliklerin her iki tarafı sırasıyla α_3 , α_2 , α_1 ve 1 ile çarpılır ve bunlar daha sonra taraf tarafa toplanır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \alpha_3 A_0 + \alpha_2 A_1 + \alpha_1 A_2 + A_3 &= p_1(\mu_1^3 + \alpha_1\mu_1^2 + \alpha_2\mu_1 + \alpha_3) \\ &+ p_2(\mu_2^3 + \alpha_1\mu_2^2 + \alpha_2\mu_2 + \alpha_3) + p_3(\mu_3^3 + \alpha_1\mu_3^2 + \alpha_2\mu_3 + \alpha_3) \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

elde edilir.

İkinci olarak, (3.2.13), (3.2.14), (3.2.15) ve (3.2.16) 'daki eşitliklerin her iki tarafı sırasıyla α_3 , α_2 , α_1 ve 1 ile çarpılır ve bunlar daha sonra taraf tarafa toplanır. Bu durumda,

$$\alpha_3 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_1 A_3 + A_4 = p_1(\mu_1^4 + \alpha_1 \mu_1^3 + \alpha_2 \mu_1^2 + \alpha_3 \mu_1) \\ + p_2(\mu_2^4 + \alpha_1 \mu_2^3 + \alpha_2 \mu_2^2 + \alpha_3 \mu_2) + p_3(\mu_3^4 + \alpha_1 \mu_3^3 + \alpha_2 \mu_3^2 + \alpha_3 \mu_3) \quad (3.2.23)$$

elde edilir.

Üçüncü olarak, (3.2.14), (3.2.15), (3.2.16) ve (3.2.17) 'deki eşitliklerin her iki tarafı sırasıyla α_3 , α_2 , α_1 ve 1 ile çarpılır ve bunlar daha sonra taraf tarafa toplanır. Bu durumda,

$$\alpha_3 A_2 + \alpha_2 A_3 + \alpha_1 A_4 + A_5 = p_1(\mu_1^5 + \alpha_1 \mu_1^4 + \alpha_2 \mu_1^3 + \alpha_3 \mu_1^2) \\ + p_2(\mu_2^5 + \alpha_1 \mu_2^4 + \alpha_2 \mu_2^3 + \alpha_3 \mu_2^2) + p_3(\mu_3^5 + \alpha_1 \mu_3^4 + \alpha_2 \mu_3^3 + \alpha_3 \mu_3^2) \quad (3.2.24)$$

elde edilir.

(3.2.19), (3.2.20) ve (3.2.21) 'deki eşitlikler de kullanılarak (3.2.22), (3.2.23) ve (3.2.24) 'deki eşitlikler,

$$\begin{aligned} A_2 \alpha_1 + A_1 \alpha_2 + A_0 \alpha_3 &= -A_3 \\ A_3 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 + A_1 \alpha_3 &= -A_4 \\ A_4 \alpha_1 + A_3 \alpha_2 + A_2 \alpha_3 &= -A_5 \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

şeklinde yazılabilir.

(3.2.25) 'deki denklem sistemi α_1 , α_2 ve α_3 bilinmeyenlerinde lineer olduğundan matris formunda,

$$\begin{bmatrix} A_2 & A_1 & A_0 \\ A_3 & A_2 & A_1 \\ A_4 & A_3 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_3 \\ -A_4 \\ -A_5 \end{bmatrix} \quad (3.2.26)$$

şeklinde tekrar yazılabilir.

(3.2.26) 'da 3X3 tipindeki katsayı matrisi A olsun. 3X1 tipindeki bilinmeyenlerin vektörü $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)'$ ve eşitliğin sağ tarafındaki homojen olmayan 3X1 tipindeki bilinmeyenlerin vektörü, $b = (-A_3, -A_4, -A_5)'$ alınsın. Bu durumda (3.2.26) 'daki lineer denklem sisteminin matris formu,

$$A\alpha = b \quad (3.2.27)$$

dir.

(3.2.18) 'deki üçüncü dereceden cebirsel denklemin katsayılarını belirlemek için (3.2.27) 'de matris formundaki lineer denklem sisteminin bilinmeyen α için çözülmesi gerekir.

Bir lineer (özellikle, üç bilinmeyenli üç denklemin bulunduğu) denklem sistemi için çözüm yöntemi olan Cramer 'in kuralı (Herstein ve Winter 1989, s.243), (3.2.26) 'daki matris formundaki sisteme uygulandığında α_1 , α_2 ve α_3 için çözümler açık olarak verilebilir.

(3.2.27) 'deki katsayı matrisinin determinantı,

$$D=\text{determinant}(A)=(A_2^3+A_1^2A_4+A_0A_3^2)-(2A_1A_2A_3+A_0A_2A_4) \quad (3.2.28)$$

dir.

(3.2.25) 'deki lineer denklem sisteminin (tek bir) çözümünün olması için katsayı matrisi A 'nın determinantının sıfırdan farklı olması gerekir.

Eğer $D \neq 0$ ise α_1 , α_2 ve α_3 için açık çözümler sırasıyla,

$$\alpha_1=[(A_1A_3^2+A_1A_2A_4+A_0A_2A_5)-(A_2^2A_3+A_1^2A_5+A_0A_3A_4)]/D \quad (3.2.29)$$

$$\alpha_2=[(A_2A_3^2+A_1A_2A_5+A_0A_4^2)-(A_2^2A_4+A_1A_3A_4+A_0A_3A_5)]/D \quad (3.2.30)$$

$$\alpha_3=[(A_2A_3A_4+A_1A_3A_5+A_2A_3A_4)-(A_2^2A_5+A_1A_4^2+A_0^3)]/D \quad (3.2.31)$$

dir.

(3.2.18) 'deki üçüncü dereceden cebirsel denklemin katsayıları α_1 , α_2 ve α_3 sırasıyla (3.2.29), (3.2.30) ve (3.2.31) 'deki bağıntılar kullanılarak hesaplanır.

(3.2.18) 'deki üçüncü dereceden cebirsel denklemin katsayıları belirlendikten sonra üçüncü dereceden katsayıları bilinen bir monik (üçüncü dereceden terimin katsayısının 1 olduğu durum) polinom elde edilir. μ_1 , μ_2 ve μ_3 parametrelerinin

tahminlerini bulmak için bu monik polinomun köklerinin hesaplanması gerekir.

Monik polinomun köklerini sayısal olarak hesaplamak için Bairstow 'un yöntemi (Johnson ve Riess 1982, s.181) kullanılabilir. Bairstow 'un yönteminin kullanılmasıyla üçüncü dereceden monik polinomun ikinci dereceden bir faktörü (çarpanı) bulunur. Böylece üçüncü dereceden monik polinom, birinci dereceden ve ikinci dereceden iki terimin çarpımı olarak yazılır. Daha sonra ikinci dereceden terimin faktörleri de diskriminant yöntemi (Kaplan 1981, s.5) kullanılarak bulunur. Sonuçta üçüncü dereceden monik polinomun tüm faktörleri dolayısıyla tüm kökleri bulunmuş olur.

$\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 > 0$ ve $\alpha_3 < 0$ olduğunda (3.2.18) 'deki üçüncü dereceden monik polinomun üç tane farklı pozitif gerçel kökü vardır. Bu kökler μ_1^* , μ_2^* ve μ_3^* olsun. Bu durumda $\bar{\mu}_1 = \min\{\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*\}$, $\bar{\mu}_3 = \max\{\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*\}$ ve diğer kökte, $\bar{\mu}_2$ olarak alınır.

Burada $\bar{\mu}_1$, $\bar{\mu}_2$ ve $\bar{\mu}_3$ sırasıyla μ_1 , μ_2 ve μ_3 parametreleri için tahmin edilmiş değerlerdir.

3.2.2. p_1 ve p_2 ($p_3=1-p_1-p_2$) Parametrelerinin Tahmini

μ_1 , μ_2 ve μ_3 parametreleri sırasıyla $\bar{\mu}_1$, $\bar{\mu}_2$ ve $\bar{\mu}_3$ olarak bölüm 3.2.1 'de açıklanan yöntemle tahmin edilir.

(3.2.10) 'dan,

$$p_3 = 1 - p_1 - p_2 \quad (3.2.32)$$

dir.

(3.2.13)-(3.2.17) 'deki eşitliklerde $p_3=1-p_1-p_2$ alındığında,

$$(\mu_1^1 - \mu_3^1)p_1 + (\mu_2^1 - \mu_3^1)p_2 = A_1 - \mu_3^1 \quad (3.2.33)$$

$$(\mu_1^2 - \mu_3^2)p_1 + (\mu_2^2 - \mu_3^2)p_2 = A_2 - \mu_3^2 \quad (3.2.34)$$

$$(\mu_1^3 - \mu_3^3)p_1 + (\mu_2^3 - \mu_3^3)p_2 = A_3 - \mu_3^3 \quad (3.2.35)$$

$$(\mu_1^4 - \mu_3^4)p_1 + (\mu_2^4 - \mu_3^4)p_2 = A_4 - \mu_3^4 \quad (3.2.36)$$

$$(\mu_1^5 - \mu_3^5)p_1 + (\mu_2^5 - \mu_3^5)p_2 = A_5 - \mu_3^5 \quad (3.2.37)$$

elde edilir.

(3.2.33)-(3.2.37) 'de μ_1 , μ_2 ve μ_3 parametrelerinin yerine

sırasıyla bunların tahminleri olan $\hat{\mu}_1$, $\hat{\mu}_2$ ve $\hat{\mu}_3$ değerleri alınsın. $A_1^* = A_1 - \mu_3^1$, $A_2^* = A_2 - \mu_3^2$, $A_3^* = A_3 - \mu_3^3$, $A_4^* = A_4 - \mu_3^4$ ve $A_5^* = A_5 - \mu_3^5$ olsun. Bu durumda (3.2.33)-(3.2.37) 'deki eşitlikler; p_1 ve p_2 bilinmeyenlerine göre lineer olduğundan,

$$\begin{bmatrix} (\hat{\mu}_1^1 - \hat{\mu}_3^1) & (\hat{\mu}_2^1 - \hat{\mu}_3^1) \\ (\hat{\mu}_1^2 - \hat{\mu}_3^2) & (\hat{\mu}_2^2 - \hat{\mu}_3^2) \\ (\hat{\mu}_1^3 - \hat{\mu}_3^3) & (\hat{\mu}_2^3 - \hat{\mu}_3^3) \\ (\hat{\mu}_1^4 - \hat{\mu}_3^4) & (\hat{\mu}_2^4 - \hat{\mu}_3^4) \\ (\hat{\mu}_1^5 - \hat{\mu}_3^5) & (\hat{\mu}_2^5 - \hat{\mu}_3^5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^* \\ A_2^* \\ A_3^* \\ A_4^* \\ A_5^* \end{bmatrix} \quad (3.2.38)$$

şeklinde matris formunda bir lineer denklem sistemi elde edilir.

(3.2.38) 'de 5×2 tipindeki katsayı matrisi X olsun. 2×1 tipindeki bilinmeyenlerin vektörü $p = (p_1, p_2)'$ ve 5×1 tipindeki bilinenlerin vektörü $c = (A_1^*, A_2^*, A_3^*, A_4^*, A_5^*)'$ alınsın. Bu durumda da (3.2.38) 'deki lineer denklem sisteminin matris formu,

$$Xp = c \quad (3.2.39)$$

dir.

(3.2.39) 'da matris formunda bulunan lineer denklem sistemine karşılık gelen normal denklemlerin matris formu,

$$X'Xp=X'c \quad (3.2.40)$$

dir.

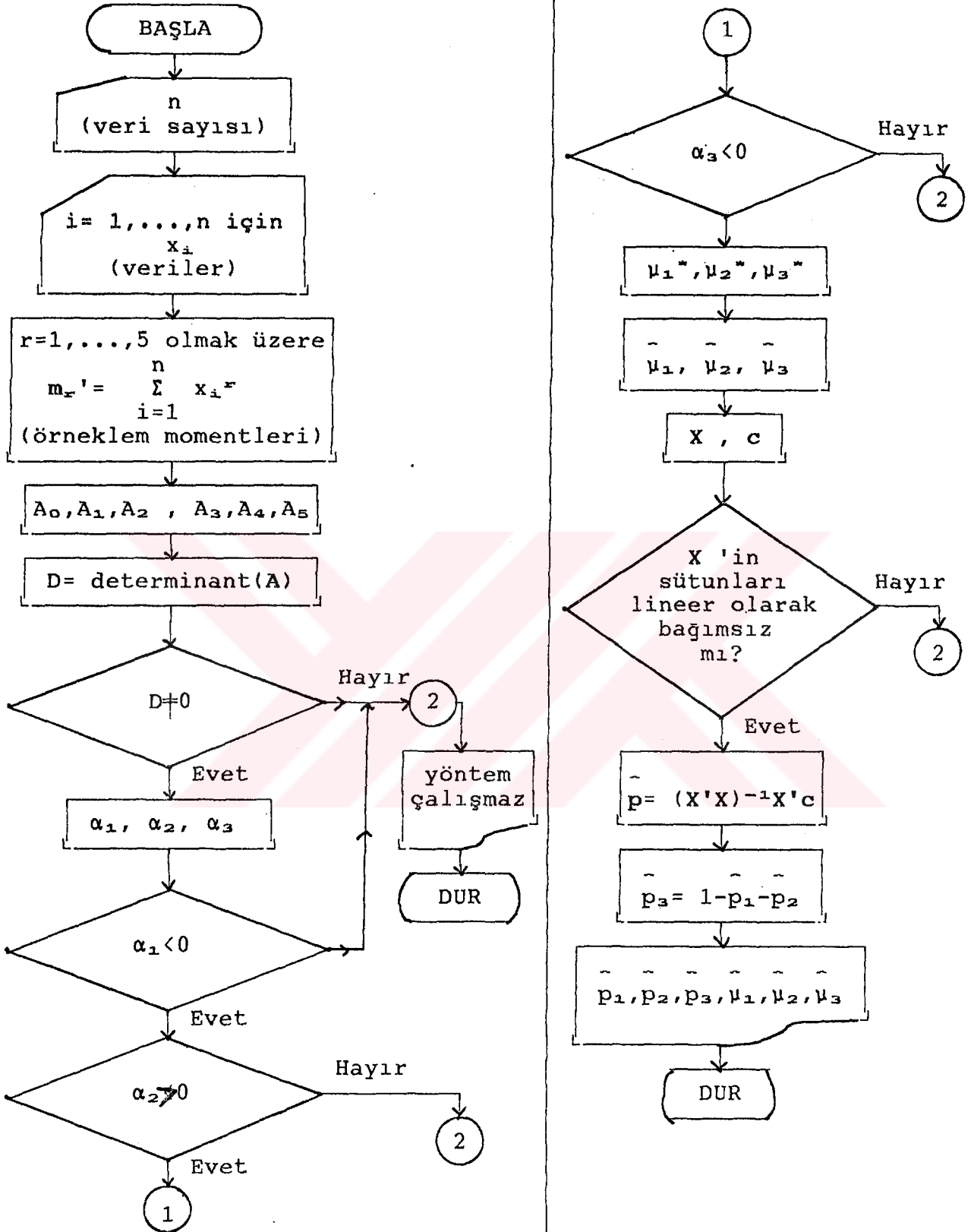
(3.2.39) 'daki katsayı matrisi X 'in sütunları lineer olarak birbirlerinden bağımsız olduklarından (Herstein ve Winter 1989, s.447) 'de verilen teorem 12.3.2 'ye göre (3.2.40) 'daki $X'X$ 'in tersi vardır. Buna göre (3.2.39) 'da matris formunda bulunan lineer denklem sistemi, en küçük kareler yöntemi (Herstein ve Winter 1989, s.447) kullanılarak p için çözüldüğünde,

$$p=(X'X)^{-1}X'c \quad (3.2.41)$$

elde edilir.

Burada $X'X$ 'in tersinin hesaplanmasında doğrudan tersini alma yöntemi uygulanmıştır (Carnahan ve ark. 1969, s.290).

Çalışmamızda (3.1.1) 'deki parametreleri tahmin etmek amacıyla tüm yukarıdaki işlemleri yapan bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Geliştirilen bilgisayar programının algoritması aşağıdaki gibidir.



Şekil 1. Korozyon hızı modeli için geliştirilen bilgisayar programının algoritması.

3.3. Karma Dağılım Modelinin Atmosferik Korozyon Verilerine Bir Uygulaması Ve Ağırlık Kaybı Ölçümlerine Göre Hesaplanmış Ortalama Korozyon Hız Değerlerinin Karma Dağılım Modelleri Kullanılarak Modellenmesi ve Korozyon Hızının İzlenmesi

Atmosferik korozyon sistemindeki bir metalin, ağırlık kaybı ölçümlerine göre hesaplanmış ortalama korozyon hız değerlerinin modellenmesinin veya bir "korozyon olayına" üç üstel dağılımın bir karma modelinin uyarlanması; kimyasal boyutu, istatistiksel boyutu, matematiksel boyutu ve bilgisayarda programlanması boyutu gibi değişik boyutları vardır.

Bu bölümde tüm bu boyutlar birlikte incelenmiştir, yani biri diğerinden ayrı tutulmamıştır. Bu amaçla, kimyasal boyutu olarak yakın zamanda (Dehri ve ark., 1994) tarafından iyi çalışılmış bir "korozyon olayı" alınmıştır. Bunun için atmosferik korozyon sistemindeki bir metalin ağırlık kaybı ölçümlerine göre hesaplanmış ortalama korozyon hız değerlerinin modellenmesi, DEHİR-YAZICI-ERBİL-GALİP verisi[†] üzerinde açıklanacaktır. Dehri ve arkadaşlarının çalıştığı "korozyon olayı", %70 ile %100 arasında değişen nemlilik oranlarında galvanizlenmiş (yüzeyi bakır ya da çinko ile kaplanmış) demirin atmosferik korozyonu üzerinde SO₂ ve NH₃ 'ün etkileridir. DEHİR-YAZICI-ERBİL-GALİP verisinin bu bölümde uygulama için kullanılmasının iki önemli nedeni veya amacı: ortalama korozyon hız değerleri, ağırlık kaybı

[†] Dehri ve ark. (1994) izniyle.

ölçümlerine dayanmaktadır ve kimyasal boyutu yakın zamanda iyi gelişilmiştir.

Bu bölümde önerilen ağırlık kaybı ölçümlerine göre hesaplanmış ortalama korozyon hız değerlerinin modellenmesi, herhangi bir korozyon sisteminde bulunan herhangi bir metal için de geçerlidir.

Karma dağılım modeli kullanılarak, ağırlık kaybı ölçümlerine göre hesaplanmış ortalama korozyon hız değerlerinin modellenmesinin bir uygulaması, DEHİRİ-YAZICI-ERBİL-GALİP verisi üzerinde yapılmıştır. Uygulamada atmosferik korozyon sistemi, %70 ile %100 arasında değişen nemlilik oranlarında SO_2 ve NH_3 içeren atmosfer ve korozyon sistemindeki metal de galvanizlenmiş demirdir.

Galvanizlenmiş demirin, %70 ile %100 arasında değişen nemlilik oranlarında SO_2 ve NH_3 içeren atmosferdeki ağırlık kaybı ölçümlerine göre hesaplanmış ortalama korozyon hız değerleri, üç üstel dağılımın bir karması kullanılarak modellenmiştir. (3.1.1) 'deki karma dağılım modelinin parametreleri bölüm 3.2 'de açıklanan yöntem kullanılarak hazırladığımız bilgisayar programı yardımıyla tahmin edilmiştir.

Herbir atmosferik korozyon sistemindeki metal için ağırlık kaybı ölçümlerine göre hesaplanmış ortalama korozyon hız değerleri mdd ($mg/(dm^2.saat)$) biriminde, aşağıda tablolar halinde verilmiştir.

Tablo 15. %70 ile %100 arasında değişen nemlilik oranlarında SO_2 içeren atmosferdeki galvanizlenmiş demir için ortalama korozyon hız değerleri.

Nem Oranı Zaman	%70	%80	%90	%100
04üncü	31.43	160.70	263.00	420.00
08inci	28.00	125.10	194.00	279.00
24üncü	26.87	47.62	115.00	125.00
30uncu	23.40	42.90	82.00	120.00
48inci	16.10	27.40	46.50	138.00
56ıncı	16.00	28.00	39.00	188.00
72inci	13.60	35.00	33.00	167.00

Tablo 16. %70 ile %100 arasında değişen nemlilik oranlarında NH_3 içeren atmosferdeki galvanizlenmiş demir için ortalama korozyon hız değerleri.

Nem Oranı Zaman	%70	%80	%90	%100
04üncü	162.00	162.00	204.00	178.00
08inci	105.00	154.00	114.00	178.00
24üncü	35.00	58.40	63.00	67.00
30uncu	20.00	33.00	57.00	60.00
48inci	28.00	33.00	39.00	30.00
56ıncı	11.00	28.00	38.00	38.00
72inci	13.00	25.00	32.00	42.00

Tablo 15 ve tablo 16 'daki ortalama korozyon hız değerleri için bilgisayar çıktıları aşağıda tablolar halinde verilmiştir.

Tablo 17. %70 nemlilik oranında SO_2 içeren atmosferdeki galvanizlenmiş demir için ortalama korozyon hız değerlerine göre elde edilen parametre tahminleri

$\bar{\mu}_1 =$ 9.825020	$\bar{\mu}_2 =$ 58.634436	$\bar{\mu}_3 =$ 174.679541
$\bar{p}_1 =$ 0.762035	$\bar{p}_2 =$ 0.231414	$\bar{p}_3 =$ 0.006549

Tablo 18. %80 nemlilik oranında SO_2 içeren atmosferdeki galvanizlenmiş demir için ortalama korozyon hız değerlerine göre elde edilen parametre tahminleri

$\bar{\mu}_1 =$ 32.067506	$\bar{\mu}_2 =$ 282.195488	$\bar{\mu}_3 =$ 907.387287
$\bar{p}_1 =$ 0.870359	$\bar{p}_2 =$ 0.126154	$\bar{p}_3 =$ 0.003486

Tablo 19. %90 nemlilik oranında SO_2 içeren atmosferdeki galvanizlenmiş demir için ortalama korozyon hız değerlerine göre elde edilen parametre tahminleri

$\bar{\mu}_1 =$ 50.993065	$\bar{\mu}_2 =$ 454.440130	$\bar{\mu}_3 =$ 1479.421678
$\bar{p}_1 =$ 0.861488	$\bar{p}_2 =$ 0.135113	$\bar{p}_3 =$ 0.003397

Tablo 20. %100 nemlilik oranında SO_2 içeren atmosferdeki galvanizlenmiş demir için ortalama korozyon hız değerlerine göre elde edilen parametre tahminleri

$\hat{\mu}_1 = 101.339894$	$\hat{\mu}_2 = 690.397680$	$\hat{\mu}_3 = 2357.218298$
$\hat{p}_1 = 0.832688$	$\hat{p}_2 = 0.164077$	$\hat{p}_3 = 0.003233$

Tablo 21. %70 nemlilik oranında NH_3 içeren atmosferdeki galvanizlenmiş demir için ortalama korozyon hız değerlerine göre elde edilen parametre tahminleri

$\hat{\mu}_1 = 23.835348$	$\hat{\mu}_2 = 287.808913$	$\hat{\mu}_3 = 926.838629$
$\hat{p}_1 = 0.894726$	$\hat{p}_2 = 0.102451$	$\hat{p}_3 = 0.002822$

Tablo 22. %80 nemlilik oranında NH_3 içeren atmosferdeki galvanizlenmiş demir için ortalama korozyon hız değerlerine göre elde edilen parametre tahminleri

$\hat{\mu}_1 = 32.390360$	$\hat{\mu}_2 = 305.126148$	$\hat{\mu}_3 = 947.854145$
$\hat{p}_1 = 0.869800$	$\hat{p}_2 = 0.126177$	$\hat{p}_3 = 0.004022$

Tablo 23. %90 nemlilik oranında NH_3 içeren atmosferdeki galvanizlenmiş demir için ortalama korozyon hız değerlerine göre elde edilen parametre tahminleri

$\hat{\mu}_1 = 39.434479$	$\hat{\mu}_2 = 341.322890$	$\hat{\mu}_3 = 1169.364757$
$\hat{p}_1 = 0.879142$	$\hat{p}_2 = 0.118172$	$\hat{p}_3 = 0.002684$

Tablo 24. %100 nemlilik oranında NH_3 içeren atmosferdeki galvanizlenmiş demir için ortalama korozyon hız değerlerine göre elde edilen parametre tahminleri

$\hat{\mu}_1 = 39.664736$	$\hat{\mu}_2 = 336.680112$	$\hat{\mu}_3 = 1061.465433$
$\hat{p}_1 = 0.858416$	$\hat{p}_2 = 0.137447$	$\hat{p}_3 = 0.004135$

Yukarıdaki tablolarda birinci satırda, (3.1.1) 'deki karma dağılım modelinde ya da olasılık yoğunluk fonksiyonunda bileşenlerdeki parametreler için tahmin edilmiş değerler; ikinci satırda ise (3.1.1) 'deki karma dağılım modelindeki ya da olasılık yoğunluk fonksiyonundaki karma oranları için tahmin edilmiş değerler bulunmaktadır.

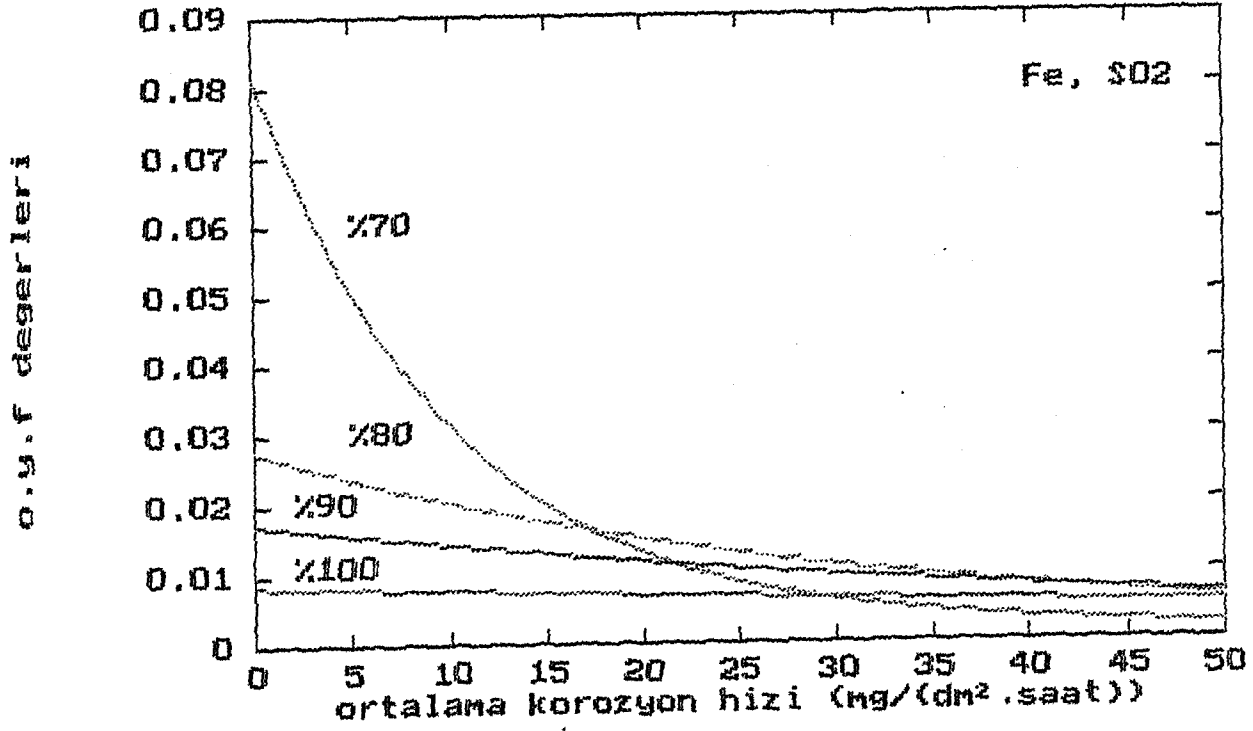
Örneğin, tablo 17 'deki sonuçlara göre üç bileşenli karma dağılım modelinin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{0.762035}{9.825020} \exp\left(-\frac{x}{9.825020}\right) + \frac{0.231414}{58.634436} \exp\left(-\frac{x}{58.634436}\right) + \frac{0.006549}{174.679541} \exp\left(-\frac{x}{174.679541}\right) \quad 0 \leq x < +\infty \quad (3.3.1)$$

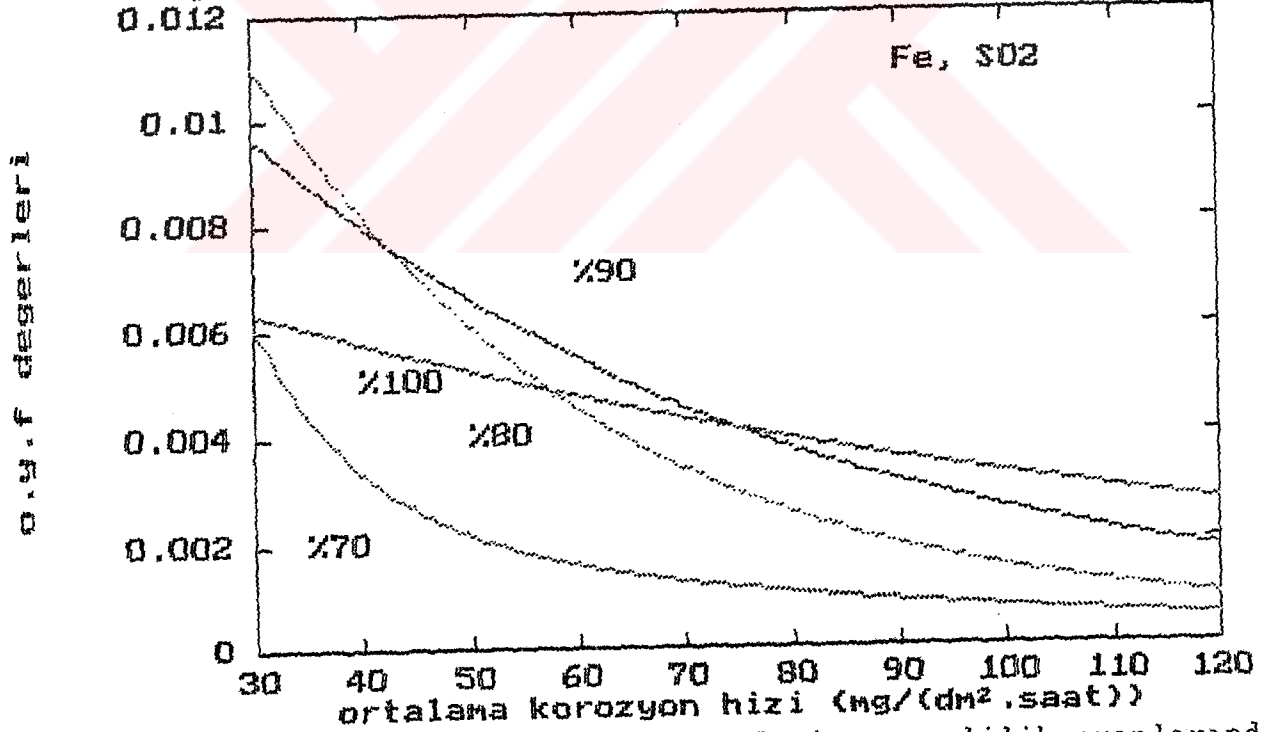
dir.

(3.3.1) 'deki olasılık yoğunluk fonksiyonu, %70 nemlilik oranında SO_2 içeren atmosferik korozyon sistemindeki galvanizlenmiş demirin ağırlık kaybı ölçümlerine göre hesaplanmış ortalama korozyon hız değerleri için karma dağılım modelidir.

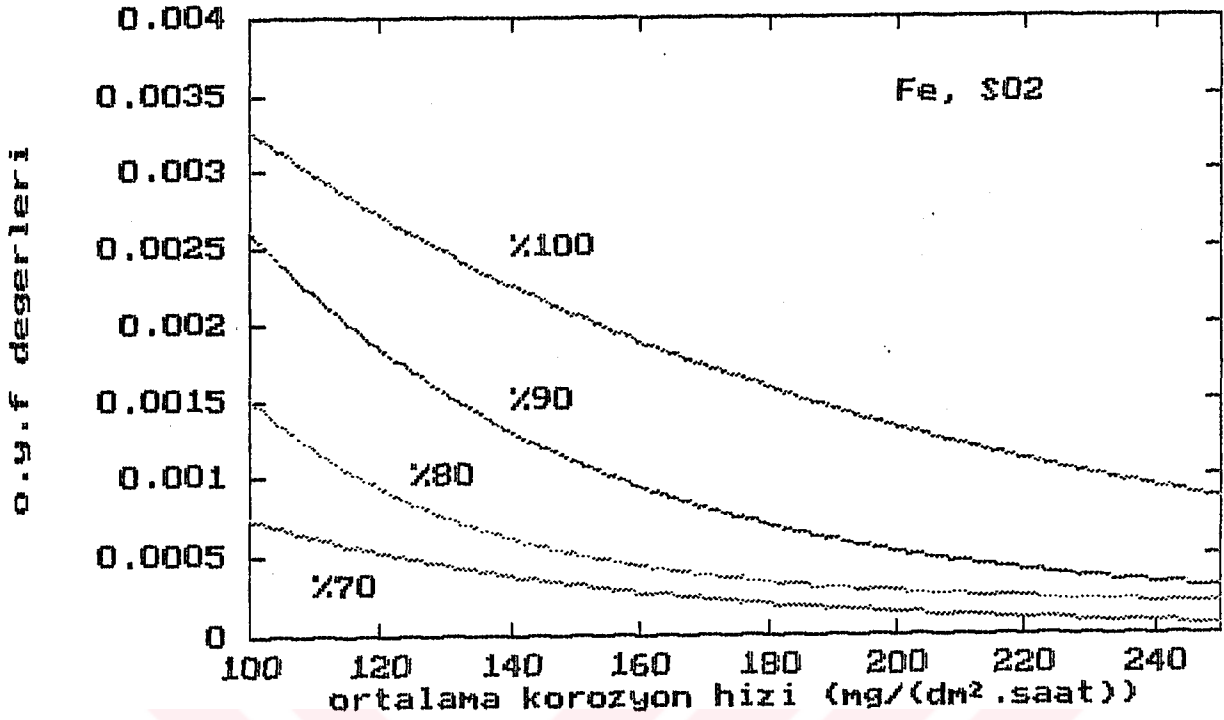
Tablo 17-tablo 24 'deki bilgisayar çıktılarındaki tahmin edilmiş parametre değerlerine göre karma dağılım modellerinin grafikleri aşağıda gösterilmiştir.



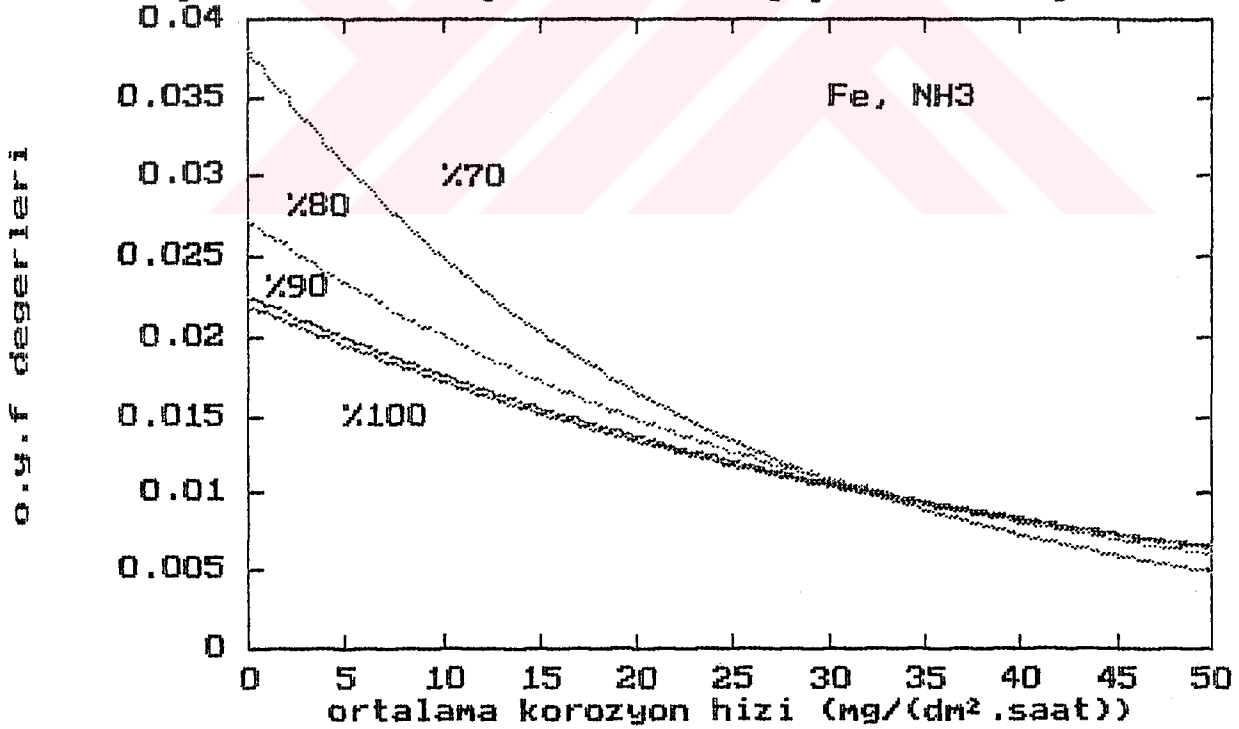
Şekil 2. %70 ile %100 arasında değişen nemlilik oranlarında SO₂ içeren atmosferik korozyon sistemindeki galvanizlenmiş demirin [0,50] aralığında ortalama korozyon hız değerleri için karma dağılım modelleri ya da olasılık yoğunluk fonksiyonları.



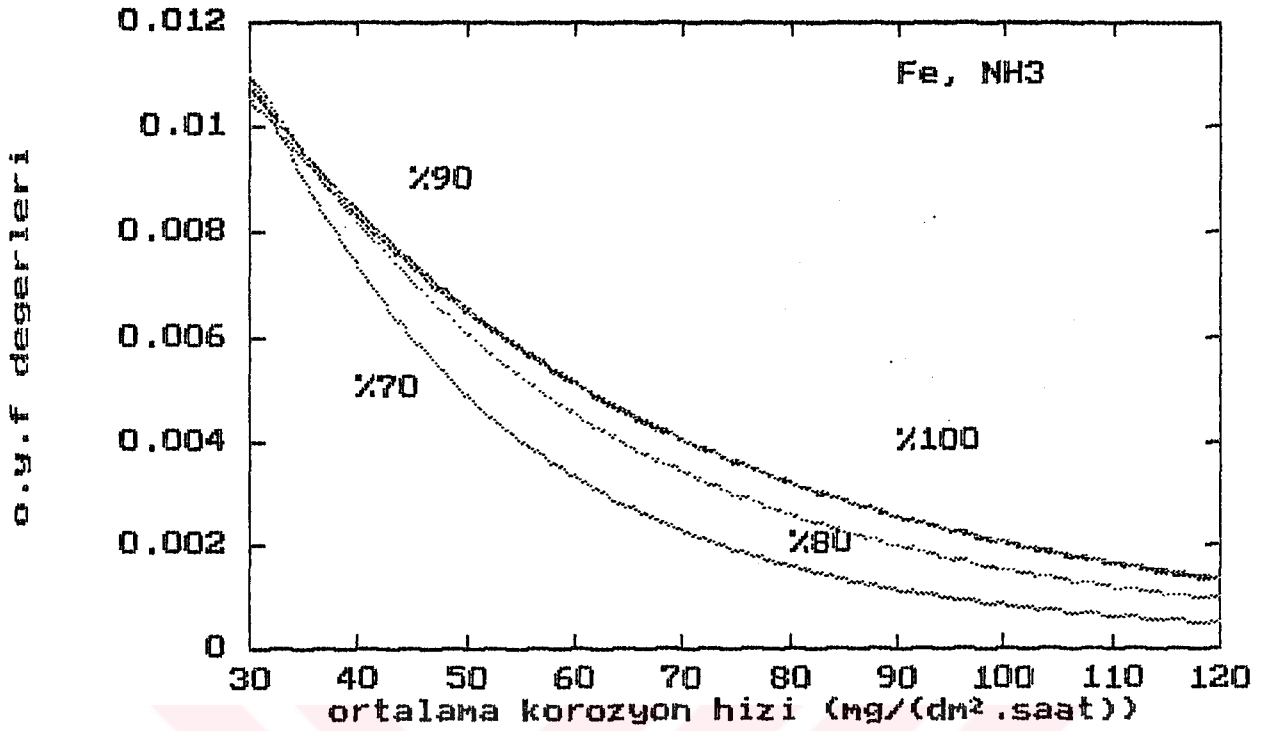
Şekil 3. %70 ile %100 arasında değişen nemlilik oranlarında SO₂ içeren atmosferik korozyon sistemindeki galvanizlenmiş demirin [30,120] aralığında ortalama korozyon hız değerleri için karma dağılım modelleri ya da olasılık yoğunluk fonksiyonları.



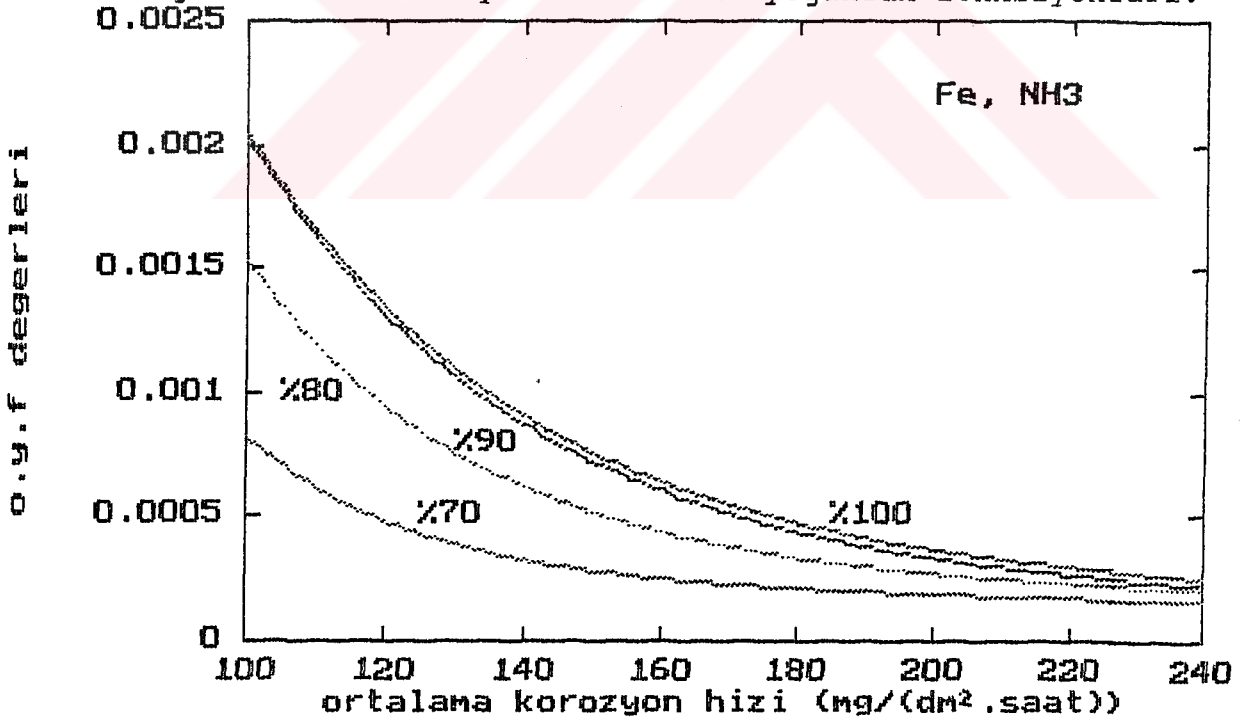
Şekil 4. %70 ile %100 arasında değişen nemlilik oranlarında SO₂ içeren atmosferik korozyon sistemindeki galvanizlenmiş demirin [100,240] aralığında ortalama korozyon hız değerleri için karma dağılım modelleri ya da olasılık yoğunluk fonksiyonları.



Şekil 5. %70 ile %100 arasında değişen nemlilik oranlarında NH₃ içeren atmosferik korozyon sistemindeki galvanizlenmiş demirin [0,50] aralığında ortalama korozyon hız değerleri için karma dağılım modelleri ya da olasılık yoğunluk fonksiyonları.



Şekil 6. %70 ile %100 arasında değişen nemlilik oranlarında NH_3 içeren atmosferik korozyon sistemindeki galvanizlenmiş demirin [30,120] aralığında ortalama korozyon hız değerleri için karma dağılım modelleri ya da olasılık yoğunluk fonksiyonları.



Şekil 7. %70 ile %100 arasında değişen nemlilik oranlarında NH_3 içeren atmosferik korozyon sistemindeki galvanizlenmiş demirin [100,240] aralığında ortalama korozyon hız değerleri için karma dağılım modelleri ya da olasılık yoğunluk fonksiyonları.

3.4. Atmosferik Korozyon Sistemlerindeki Metallerin Ağırlık Kaybı Ölçümleriyle Hesaplanmış Ortalama Korozyon Hız Değerlerine Göre Karma Dağılım Modelleri Kullanılarak Modellenmesinin Sonuçları

Bir metal için "korozyon olayı", metalin yüzeyinin tamamıyla açık (temiz) olarak korozif ortama (atmosferik korozyon sistemine) bırakıldığı andan itibaren başlar ve zaman içerisinde metalin yüzeyinin tamamıyla kapanmasına, "doymasına" kadar devam eder.

Metalin yüzeyinin "doyması" için geçen sürecin uzunluğu, diğer bir ifadeyle atmosferik korozyon sistemindeki metalin korozyon hızı; metalin bırakıldığı atmosferik korozyon sisteminde, metal ile atmosferik korozyon sisteminin etkileşmesiyle oluşan korozyon ürünlerinin miktarına bağlıdır.

Metalin yüzeyi üzerinde oluşan korozyon ürün miktarı çok fazla olduğunda yüzey çok hızlı kapanacağından; metalin yüzeyinin "doyması" için geçen süreç çok kısa olur. Metalin yüzeyi üzerinde oluşan korozyon ürün miktarı az olduğunda yüzey yavaş kapanacağından; metalin yüzeyinin "doyması" için geçen süreç uzun olur. Metalin yüzeyi üzerinde oluşan korozyon ürün miktarı çok az olduğunda yüzey çok yavaş kapanacağından; metalin yüzeyinin "doyması" için geçen süreç çok uzun olur.

Atmosferik korozyon sistemindeki bir metal için "korozyon olayının" başlangıçtan itibaren yani metalin yüzeyinin tamamıyla açık olarak atmosferik korozyon sistemine bırakıldığı andan, itibaren; "korozyon olayının" bitinceye kadar yani metalin yüzeyinin "doymasına" kadar geçen süreç içerisinde, metalin

korozyon hızının belirlenmesi ve izlenmesi bir "korozyon olayında" oldukça zordur; hatta mümkün değildir.

Bir "korozyon olayı" için laboratuvar koşullarında ya da çalışmalarında; metalin sadece kısıtlı veya sınırlı miktarda ortalama korozyon hız değerleri gözlenebilir (şekil 8). Ortalama korozyon hız değerlerinden oluşan gözlemler veya ölçümler sadece ilk ve son veri noktaları arasındaki bilgileri içerir. Hatta bazen ölçümler için kullanılan cihazlar yeterince hassas olmayabilir. Ayrıca, "atmosferik korozyon sistemine yüzeyi tamamıyla açık olarak bırakılan metalin; korozyon sistemine bırakıldığı andan, ilk veri değerinin alınması anına kadar geçen zaman içerisindeki (süreçteki) korozyon hızı nedir?", veya "atmosferik korozyon sistemine bırakılan bir metalin yüzeyi ne zaman tamamıyla kapanacak ya da doyacak?" gibi cevaplanması gereken sorularda vardır.

Bir "korozyon olayı" için tüm sonuçlar ya da yorumlar, ortalama korozyon hız değerlerinin çok küçük bir aralığına bakılarak ampirik olarak yapılmaktadır. Bu nedenle "korozyon olayı" için daha fazla kanıt gerek vardır. Atmosferik korozyon sistemindeki bir metalin ağırlık kaybı ölçümlerine göre alınmış ortalama korozyon hız değerlerinin üç üstel dağılımın bir karması kullanılarak modellenmesi bu kanıtı sağlar.

Bu bölümde önerilen korozyon hızı modellemesi ve korozyon hızı izlenmesi, %70 nemlilik oranında NH_3 içeren korozyon sistemindeki galvanizlenmiş demir metali için gösterilecektir.

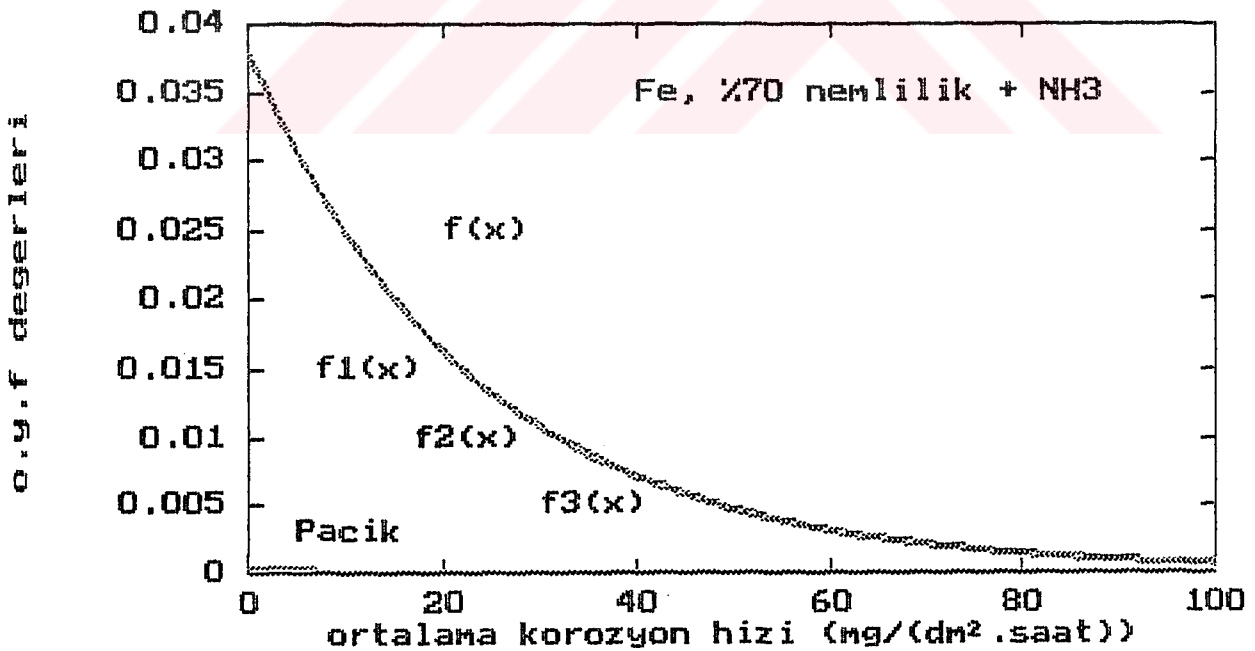
Tablo 21 'deki sonuçlara göre ortalama korozyon hız değerleri için karma dağılım modeli,

$$f(x) = \frac{0.894726}{23.835348} \exp\left(-\frac{x}{23.835348}\right) + \frac{0.102451}{287.808913} \exp\left(-\frac{x}{287.808913}\right) + \frac{0.002822}{926.838629} \exp\left(-\frac{x}{926.838629}\right) \quad 0 \leq x < +\infty \quad (3.4.1)$$

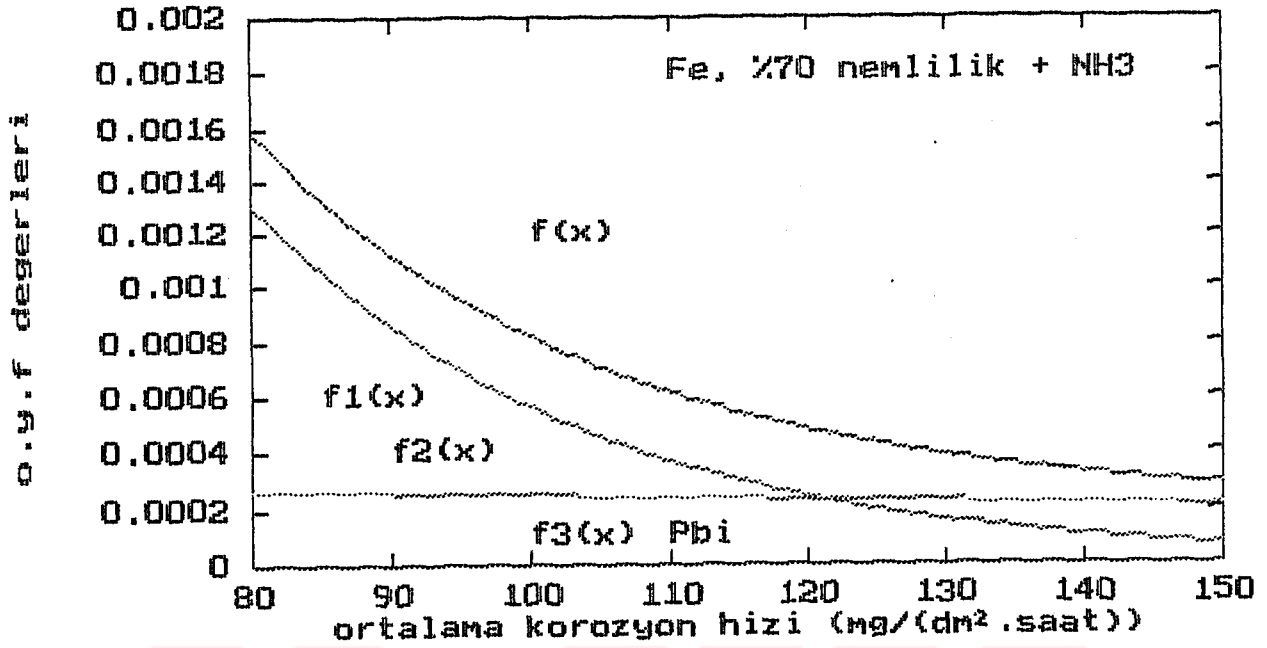
dir.

(3.4.1) 'deki olasılık yoğunluk fonksiyonu, %70 nemlilik oranında NH_3 içeren atmosferik korozyon sisteminde galvanizlenmiş demirin ortalama korozyon hız değerleri için karma dağılım modelidir.

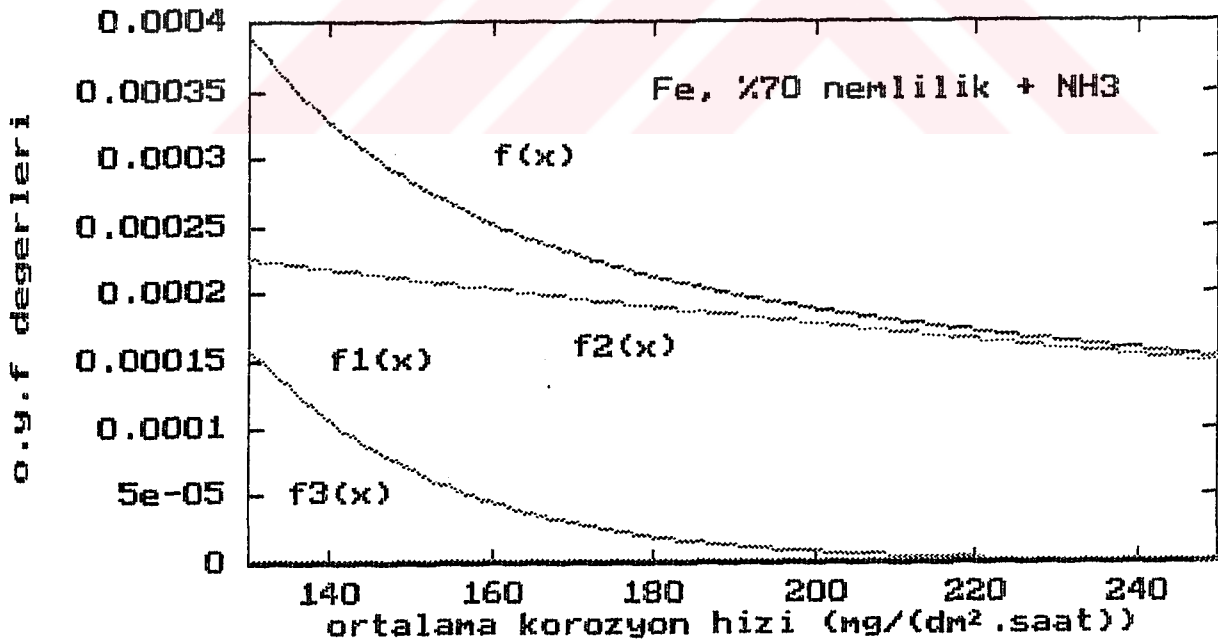
Tablo 21 'deki bilgisayar çıktılarındaki tahmin edilmiş parametre değerlerine göre olasılık yoğunluk fonksiyonunun ya da karma dağılım modelinin grafikleri aşağıda gösterilmiştir.



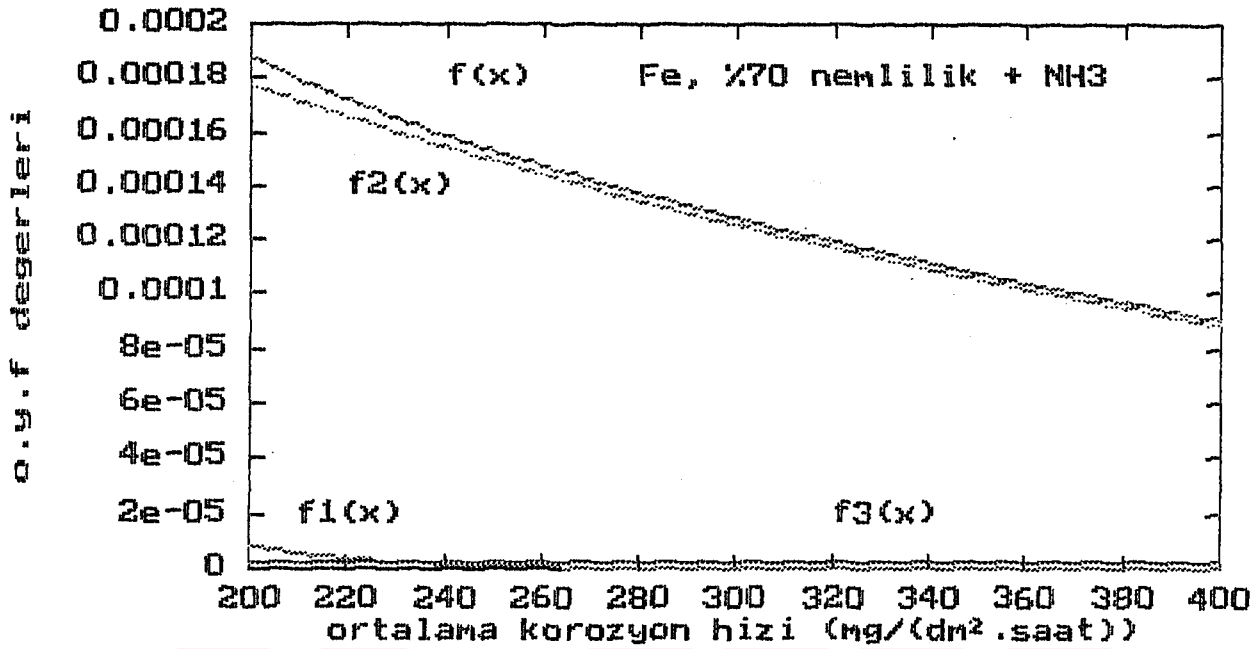
Şekil 8. %70 nemlilik oranında NH_3 içeren atmosferik korozyon sistemindeki galvanizlenmiş demirin $[0,100]$ aralığında ortalama korozyon hız değerleri için karma dağılım modeli ya da olasılık yoğunluk fonksiyonu (o.y.f.).



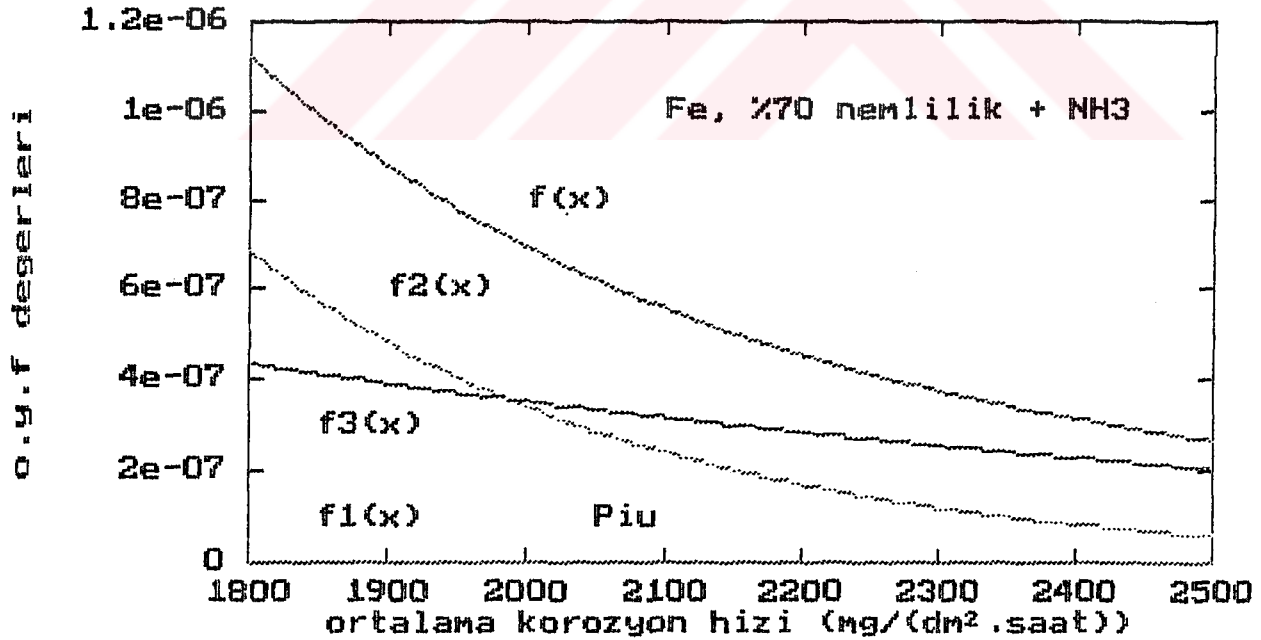
Şekil 9. %70 nemlilik oranında NH_3 içeren atmosferik korozyon sistemindeki galvanizlenmiş demirin [80,150] aralığında ortalama korozyon hız değerleri için karma dağılım modeli ya da olasılık yoğunluk fonksiyonu (o.y.f).



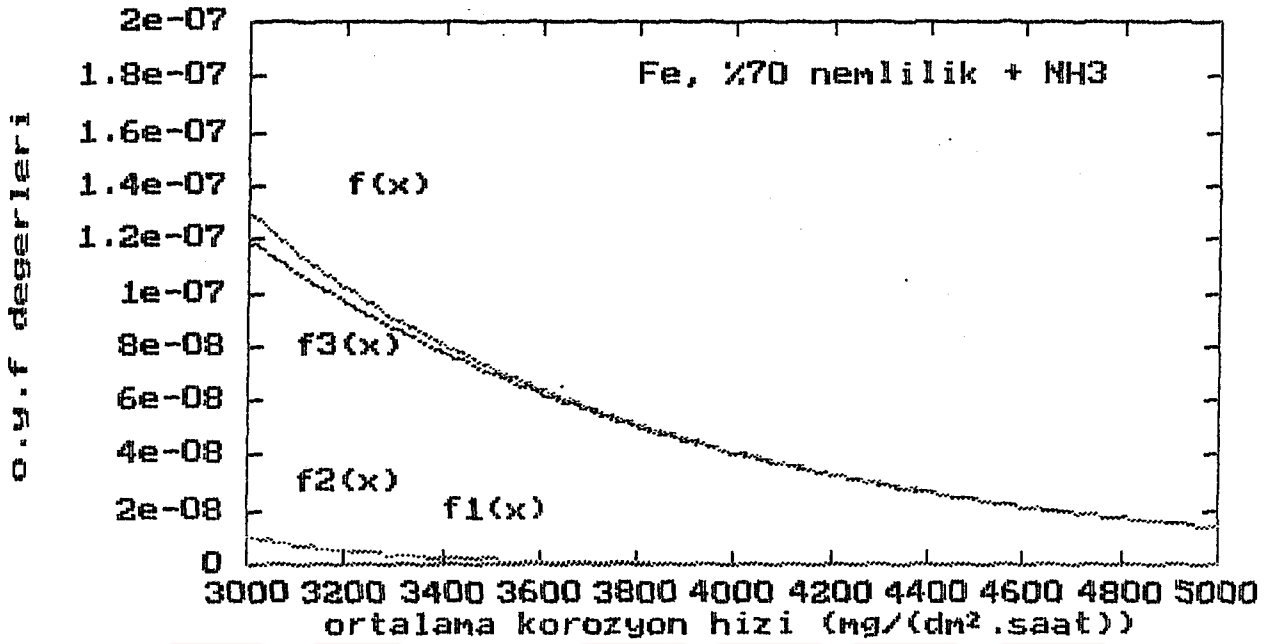
Şekil 10. %70 nemlilik oranında NH_3 içeren atmosferik korozyon sistemindeki galvanizlenmiş demirin [130,250] aralığında ortalama korozyon hız değerleri için karma dağılım modeli ya da olasılık yoğunluk fonksiyonu (o.y.f).



Şekil 11. %70 nemlilik oranında NH₃ içeren atmosferik korozyon sistemindeki galvanizlenmiş demirin [200,400] aralığında ortalama korozyon hız değerleri için karma dağılım modeli ya da olasılık yoğunluk fonksiyonu (o.y.f).



Şekil 12. %70 nemlilik oranında NH₃ içeren atmosferik korozyon sistemindeki galvanizlenmiş demirin [1800,2500] aralığında ortalama korozyon hız değerleri için karma dağılım modeli ya da olasılık yoğunluk fonksiyonu (o.y.f).



Şekil 13. %70 nemlilik oranında NH₃ içeren atmosferik korozyon sistemindeki galvanizlenmiş demirin [3000,5000] aralığında ortalama korozyon hız degerleri için karma dağılım modeli ya da olasılık yoğunluk fonksiyonu (o.y.f.).

Atmosferik korozyon sistemindeki bir metalin ağırlık kaybı ölçümlerine göre hesaplanmış ortalama korozyon hız degerlerine dayalı korozyon hızı modellemesi ve korozyon hızı izlenmesi için bir "korozyon olayı" üç safhaya bölünmüştür. Birinci safha, sıfıra çok yakın olan $P_{a\text{çık}}$ noktasında (şekil 8) başlar ve P_{b1} noktasında biter. İkinci safha, P_{b1} noktasında (şekil 9) başlar ve P_{i1} noktasında biter. Üçüncü safha, P_{i1} noktasında (şekil 12) başlar ve $P_{a\text{oyma}}$ noktasında biter.

Atmosferik korozyon sistemine bırakılmadan önce, galvanizlenmiş demirin yüzeyi tamamıyla açıktır. Galvanizlenmiş demir; %70 nemlilik oranında NH₃ içeren atmosferik korozyon sistemine bırakıldığında, yüzeyi çok hızlı bir şekilde korozyona maruz kalır (şekil 8). Bunun nedeni, demirin yüzeyi üzerinde

korozyonu önlemesi için kullanılan galvanizin (bakır ya da çinko) çok etkili olmamasıdır veya galvanizin korozif ortamdan çok etkilenmesidir. Bununla birlikte yüzeyde oluşmaya başlayan korozyon ürünleri nedeniyle korozyon hızı azalır. Bu safhada karma dağılım modelinde, galvanizlenmiş demirin yüzeyinin tamamıyla açık olduğu durumu temsil eden bileşen; yani $f_1(x)$ baskındır, etkilidir. Diğer bir ifadeyle $f_1(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunun değerleri yüksektir (şekil 8 ve şekil 9). Bu safhada, bu bileşenin modele katkı oranı da yüksektir.

P_{b1} noktasında (şekil 9), galvanizlenmiş demirin yüzeyi tamamıyla açık durumdan yarı kapalı duruma geçer. P_{b1} noktasından sonra, $f_1(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunun değerleri belirlenen bir noktaya kadar azalmaya devam ettiği kabul edilir (şekil 9, şekil 10 ve şekil 11). $\epsilon_1 > 0$ istenildiği kadar küçük seçilmek üzere belirlenen bu noktada, $f_1(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunun değeri ϵ_1 'den daha küçüktür veya ϵ_1 'e eşittir.

Daha sonra galvanizlenmiş demirin yüzeyinde oluşan korozyon ürünü miktarı artar ve korozyon hızı düşmeye devam eder. Bu nedenle galvanizlenmiş demirin yüzeyi yarı kapalıdır. Bu safhada karma dağılım modelinde, galvanizlenmiş demirin yüzeyinin yarı kapalı olduğu durumu temsil eden bileşen yani $f_2(x)$ baskındır, etkilidir. Diğer bir ifadeyle $f_2(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunun değerleri yüksektir (şekil 9, şekil 10, şekil 11 ve şekil 12). Bu safhada, bu bileşenin modele katkı oranı da yüksektir.

İkinci safha, P_{b1} noktasında (şekil 9) başlar ve P_{1u} noktasında (şekil 12) biter. P_{1u} noktasında, galvanizlenmiş

demirin yüzeyi yarı kapalı durumdan tamamıyla kapalı duruma geçer. P_{1u} noktasından sonra, $f_2(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunun değerleri belirlenen bir noktaya kadar azalmaya devam ettiği kabul edilir (şekil 12 ve şekil 13). $\epsilon_2 > 0$ istenildiği kadar küçük seçilmek üzere belirlenen bu noktada, $f_2(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunun değeri ϵ_2 'den daha küçüktür veya ϵ_2 'ye eşittir.

Bununla birlikte, $f_3(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu da, ki bu olasılık yoğunluk fonksiyonu ya da bileşen karma dağılım modelinde galvanizlenmiş demirin yüzeyinin tamamıyla kapalı olduğu durumu temsil etmektedir, belirlenen bir noktaya kadar devam ettiği kabul edilir (şekil 12 ve şekil 13). $\epsilon_3 > 0$ istenildiği kadar küçük seçilmek üzere, belirlenen bu noktada $f_3(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunun değeri ϵ_3 'den daha küçüktür veya ϵ_3 'e eşittir.

Zamanın daha da ilerlemesiyle, galvanizlenmiş demirin yüzeyinde oluşan korozyon ürünleri nedeniyle galvanizlenmiş demirin yüzeyi tamamıyla kapalı hale gelir ve korozyon hızı düşmeye devam eder. Bu safhada karma dağılım modelinde, galvanizlenmiş demirin yüzeyinin tamamıyla kapalı olduğu durumu temsil eden bileşen yani $f_3(x)$ baskındır, etkilidir. Diğer bir ifadeyle $f_3(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunun değerleri yüksektir (şekil 12 ve şekil 13). Bu safhada, bu bileşenin modele katkı oranı da yüksektir. Üçüncü safha, P_{1u} noktasında (şekil 12) başlar ve P_{2oyma} noktasında biter.

Galvanizlenmiş demirin yüzeyinin birinci safhadan ikinci safhaya değişme noktasında yani P_{2i} noktasında (şekil 9), $f_1(x)$

ve $f_2(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının değerleri eşittir. Aynı şekilde galvanizlenmiş demirin yzeyinin ikinci safhadan üçüncü safhaya değişme noktasında yani P_{14} noktasında (şekil 12), $f_2(x)$ ve $f_3(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının değerleri eşittir.

Atmosferik korozyon sistemindeki bir metalin, ağırlık kaybı ölçümlerine göre hesaplanmış ortalama korozyon hız değerleri için karma dağılım modelindeki ya da olasılık yoğunluk fonksiyonundaki bileşenler yani $f_1(x)$, $f_2(x)$ ve $f_3(x)$, o metalin ortalama korozyon hız değerleri için olasılık yoğunluk fonksiyonuna ya da karma dağılım modeline yani $f(x)$ 'e asimtotiktir.

Atmosferik korozyon sistemindeki bir metalin, ağırlık kaybı ölçümlerine göre hesaplanmış ortalama korozyon hız değerleri için karma dağılım modelinin ya da olasılık yoğunluk fonksiyonunun yani $f(x)$ 'in ve bileşenlerinin yani $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ 'in değerleri sıfıra çok yakın olabilir ama hiçbir zaman sıfır olmaz. Diğer bir ifadeyle; $f(x)$ ve $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ yatay eksene yada korozyon hızı eksenine asimtotiktir.

P_{aoyma} noktasında, ortalama korozyon hız değerleri için $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunun değeri, $\epsilon_4 > 0$ istenildiği kadar küçük seçilmek üzere, ϵ_4 'den daha küçüktür veya ϵ_4 'e eşittir. P_{aoyma} noktasında, $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunun değeri sıfıra çok yakındır.

(3.1.1) 'deki gibi olan olasılık yoğunluk fonksiyonlarının ya da karma dağılım modellerinin kullanılmasıyla atmosferik korozyon sistemindeki bir metalin, korozyon davranışının yorumu çok kolaydır.

Örneğin bir yorum: "%70 ile %100 arasında değişen nemlilik oranlarında SO_2 içeren atmosferik korozyon sistemindeki galvanizlenmiş demirin korozyon hızları, nemlilik oranlarına göre birbirinden ayırt edilebilecek derecede ya da farklı bir şekilde azalandır. Korozyon hızları nemlilik oranına bağlıdır. Diğer bir ifadeyle %70 nemlilik oranında korozyon en az, %100 nemlilik oranında korozyon en fazla olmaktadır (şekil 4). Buna karşın %70 ile %100 arasında değişen nemlilik oranlarında NH_3 içeren atmosferik korozyon sistemindeki galvanizlenmiş demirin korozyon hızları, nemlilik oranlarına göre birbirinden ayırt edilemeyecek derecede azalandır veya hemen hemen aynıdır ya da fazla değişmemektedir. Korozyon hızları nemlilik oranına bağlı değildir (şekil 7)." şeklinde olabilir.

Örneğin ikinci bir yorum: "%70 nemlilik oranında NH_3 içeren atmosferik korozyon sistemindeki galvanizlenmiş demirin yüzeyinin yarı kapalı durumda olma safhası oldukça uzun sürmektedir (şekil 9, şekil 10, şekil 11, şekil 12 ve şekil 13). Bunun da iki nedeni olabilir. Birincisi; galvanizlenmiş demirin yüzeyinde oluşan korozyon ürünlerinin korozyon hızını düşürecek şekilde yeterince oluşmamasıdır. İkincisi; korozyon sisteminde bulunan NH_3 'ün korozyon hızı üzerinde etkisinin fazla olmasıdır." şeklinde olabilir. Bu tür yorumlar ayrıntılı olarak, daha da arttırılabilir.

Üç üstel dağılımın bir karması, atmosferik korozyon sistemindeki bir metalin ağırlık kaybı ölçümlerine göre hesaplanmış ortalama korozyon hız değerleri için korozyon hız davranışı ya da fonksiyonu için bir istatistiksel model olarak

kullanılabilir. Aynı zamanda üç üstel dağılımın bir karması, atmosferik korozyon sistemindeki bir metalin ağırlık kaybı ölçümlerine göre alınmış ortalama korozyon hız değerleri için korozyon hızının izlenmesinde de kullanılabilir.

Böyle bir korozyon hızı modellenmesi ve korozyon hızı izlenmesiyle:

i) Korozyon sistemindeki bir metalin, laboratuvar çalışmalarında gözlenemeyen, başlangıç korozyon hızı davranışı belirlenebilir ve izlenebilir.

ii) Bir metalin korozyon sistemine bırakıldığı andan itibaren ilk veri değerinin alınmasına kadar geçen süreç içerisindeki, laboratuvar çalışmalarında gözlenemeyen, korozyon hızı davranışı belirlenebilir ve izlenebilir.

iii) Bir metalin korozyon sistemine bırakıldığı andan itibaren ilk veri değeri ile son veri değeri arasındaki korozyon hızı davranışı belirlenebilir ve izlenebilir.

iv) Bir metal için alınan son veri değerinden sonraki, laboratuvar çalışmalarında gözlenemeyen, korozyon hızı davranışı belirlenebilir ve izlenebilir.

v) Bir metalin laboratuvar çalışmalarında gözlenemeyen yüzeyinin "doyma" noktası belirlenebilir ve izlenebilir.

vi) Korozyon sistemindeki metalin korozyon hızı davranışı hakkında daha kolay kararlar, kanıtlarıyla verilebilir.

vii) Çıkarılan sonuçlar ilk veri değeri ile son veri değerini kapsayan aralığın dışındaki aralık için de geçerli olabilecektir.

viii) Deneysel verilerin dışında istenildiği kadar veri oluşturulabilecektir.

ix) Metalin yüzeyinin ne zaman yarı kapalı ve tamamıyla kapalı olduğu hakkında bilgi edinilebilecektir. Aynı zamanda bu safhaların ne kadar sürdüğü belirlenebilecektir.

Bölüm 3.2 'de önerilen yöntem; parametrelerinin üzerinde hiçbir kısıtlama koymaksızın üç bileşenli üstel dağılımın bir karması için momentler yöntemini kullanarak parametreleri tahmin etme ve bileşenlerine ayırma problemine sayısal olarak oldukça iyi sonuçlar vermektedir.

Üç üstel dağılımın bir karması; korozyon sistemindeki bir metalin, ağırlık kaybı ölçümlerine göre hesaplanmış ortalama korozyon hız değerleri için bir istatistiksel model olarak kullanılabilir. Böyle bir modellemeyle, korozyon sistemindeki bir metalin korozyon hızı davranışı belirlenebilir ve korozyon hızı davranışı izlenebilir.

4. BÖLÜM

ÜÇ BİLEŞENLİ NORMAL DAĞILIMIN BİR KARMASINDAKİ PARAMETRELERİN TAHMİNİ VE BİR BÖLGEDE BULUNAN ALANLARIN ÜÇ DEĞİŞİK SPEKTRAL BANT ÜZERİNDEN ALINAN SPEKTRAL PARLAKLIK DEĞERLERİNE GÖRE MODELLENMESİ

4.1. Uzaktan Algılama Probleminin Tanımı ve Üç Bileşenli Karma Dağılım Modelinin Kurulması

Uzaktan algılamada, bir bölgede bulunan alanların herbiri bir "sınıf" olarak tanımlansın. Bir "sınıf" için bir spektral bant üzerinden alınan (yani bir boyutlu) spektral parlaklık (piksel) değerlerinin dağılımı (tek tepeli) normaldir (Richards 1986, s.262). Bu tek spektral bant ile tek değişkenli durumdur. Böyle bir durumun gösterimi Gong ve Howarth (1990) tarafından, 'yeryüzü alanlarının sınıflandırma işlemlerinin hesaplanması için bir grafiksel yaklaşım' başlıklı çalışmada yapılmıştır. Bir "sınıf" için spektral parlaklık (piksel) değerleri, bir spektral bant üzerinden alınmış ise o "sınıf" için olasılık yoğunluk fonksiyonu (tek tepeli) normal dağılımdır. Yani sadece tek bileşen vardır. Bununla birlikte bir "sınıf" için spektral parlaklık (piksel) değerleri, (en az) üç değişik spektral bant üzerinden alınmış ise o "sınıf" için olasılık yoğunluk fonksiyonu ya da karma dağılım modeli, üç normal dağılımın bir karmasıdır.

Yani herbirinin bir karma oranı ile üç normal dağılımın bir toplamıdır.

Üç normal dağılımın bir karması için olasılık yoğunluk fonksiyonu tek tepeli, iki tepeli ya da üç tepeli olabilir. Karma dağılım modelinde üç tane bileşen vardır. Herbir bileşen bir spektral banta karşılık gelmektedir. Karma dağılım modelindeki herbir karma oranı, karşılık gelen bileşenin modele katkı oranını göstermektedir. Bu (en az) üç değişik spektral bant ile tek değişkenli durumdur. Çoğu uygulamada bu durumu tek bileşenli (tek tepeli) bir normal dağılım ile ifade etmek mümkün değildir.

Uzaktan algılamada; üç normal dağılımın bir karması yani (en az) üç değişik spektral bant ile tek değişkenli durum kullanılarak bir bölgede bulunan bir alanı ("sınıfı") karakterize etmek, tek bileşenli bir normal dağılım yani sadece bir spektral bant ile tek değişkenli durum kullanılarak karakterize etmekten daha iyidir. Bir bölgede bulunan alanların (en az) üç değişik spektral bant üzerinden, spektral parlaklık (piksel) değerlerine göre alınan uzaktan algılama verileri kullanılarak (renkli görüntü resmi yardımıyla) oluşturulan karma dağılım modelleri, bilinen uzaktan algılama çoklu-spektral sınıflandırma yöntemlerinden ya da diğer kullanımlardan çok daha kullanışlı olabilir.

Uzaktan algılama verilerinin karma dağılım modelleriyle birlikte kullanılmasının bir çalışması Odell ve Basu (1976) tarafından yapıldı. Odell ve Basu, çalışmalarında değişik oran tahmin yöntemlerini ele aldılar, bu yöntemleri birbirleriyle karşılaştırdılar ve tüm yöntemleri normal dağılımların

karmalarıyla sınırlayarak 'istatistiksel olarak denk bloklar' kavramına dayalı bir yöntem önerdiler. Glaz (1988), 1976 ile 1985 yılları arasında Rusya uzaktan algılama literatüründe adı geçen ve uzaktan algılama verilerinin analizi için kullanılan istatistiksel yöntemleri inceledi.

Uzaktan algılama verilerinden yeryüzü alanları hakkında bilgi elde etmek için çok yaygın kullanılan yöntemler; çoklu-spektral yöntemler ve görüntü sınıflandırma yöntemleridir. Gong ve Howarth (1990), yeryüzü alanlarını sınıflandırma işlemlerinin hesaplanması için bir grafiksel tekniği geliştirdiler. Gong ve Howarth 'ın çalışması, yeryüzü alanlarının her bir sınıfı için çok değişkenli normallik varsayımına dayanmaktadır. Kondratyev ve ark. (1993), spektral parlaklık katsayısı (Spectral Brightness Coefficients-SBC) ve spektral beyazlık derecesi (Spectral Albedo-SA) verilerini kullanarak ve bu verilerin istatistiksel analizini yaptılar ve U.S.S.R toprakları için spektral parlaklık katsayılarının haritalarını oluşturdular. NOAA/AVHRR görüntülerinde yanmış alanların yeniden bitkilenmesinin spektral özellikleri Pereira ve Setzer (1993) tarafından çalışılmıştır. Settle ve Drake (1993), bir karma pikselde yeryüzü alan bileşenlerinin relatif oranlarını incelemişlerdir.

Üç bileşenli normal dağılımın bir karması Bogardus ve ark. (1989) tarafından; Arizona 'da Gila nehri civarında yaşayan insanların kanlarındaki şeker oranını kontrol eden insülin hormonunun dağılımının modellenmesinde kullanılmıştır. Bogardus ve arkadaşlarının modellenmesinde her bir bileşenin ortak varyansa sahip olduğu varsayılarak parametreler MAXLIK bilgisayar programı

(Kaplan ve Elston, 1977) kullanılarak maksimum likelihood yöntemiyle tahmin edilmiştir. Karma dağılım modellerinin analizi için kullanılan diğer bir bilgisayar programı MIX 3.1 (Ichthus Data Systems, 1993) dir. MIX 3.1 bilgisayar programı ilk defa balık uzunluklarının frekans dağılımlarının analizi için geliştirilmiştir (Macdonald ve Pitcher, 1979). MIX 3.1 bilgisayar programı, maksimum likelihood yöntemini kullanarak gruplandırılmış verilere karma dağılım modelleri uydurabilmektedir.

Bu bölümde üç normal dağılımın bir karması, uzaktan algılamada; bir bölgede bulunan ve "sınıf" olarak tanımlanan bir alanın (en az) üç değişik spektral bant üzerinden alınan spektral parlaklık (piksel) değerleri için bir istatistiksel model olarak önerilmiştir. Gruplandırılmış veriler için üç bileşenli normal dağılımın bir karmasındaki parametreler, üzerlerinde hiçbir kısıtlama konmaksızın momentler yöntemi kullanılarak elde edilmiştir.

Üç bileşenli normal dağılımın bir karmasının olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x; \mu_1, \mu_2, \mu_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, p_1, p_2, p_3) = \sum_{i=1}^3 p_i f_i(x; \mu_i, \sigma_i) \quad (4.1.1)$$

$$-\infty < x < +\infty, 0 < p_1, p_2, p_3 < 1, -\infty < \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < +\infty, 0 < \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$$

dir.

Burada $i=1, 2, 3$ için p_i 'ler, $\sum_{i=1}^3 p_i = 1$ olmak üzere karma

oranlarıdır ve $f_i(x; \mu_i, \sigma_i)$ 'ler (1.2.17) 'deki gibi olmak üzere, karma dağılım modelinin bileşenleridir.

(4.1.1) 'de X bir rastgele değişken olmak üzere; uzaktan algılamada bir bölgede bulunan bir alan ("sınıf") için (en az) üç değişik spektral bant üzerinden alınan, spektral parlaklık (piksel) değerlerini ve $f(x)$ 'de; bir bölgede bulunan bir alan ("sınıf") için (en az) üç değişik spektral bant üzerinden alınan spektral parlaklık (piksel) değerleri için karma dağılım modelini ya da olasılık yoğunluk fonksiyonunu göstermektedir. $i=1,2,3$ için μ_i ve σ_i , (4.1.1) 'deki üç bileşenli karma dağılım modelinde ya da olasılık yoğunluk fonksiyonunda karşılık gelen bileşenin (herbir spektral bantın) sırasıyla konum ve yayılım parametreleridir.

Uzaktan algılamada sınıflandırma genel olarak nesnelerin farklı spektral parlaklıklarına (yansımalarına) dayandırılır. Bu nedenle bir alan ("sınıf") için (en az) üç değişik spektral bant üzerinden spektral parlaklık (piksel) değerleri alınır.

(4.1.1) 'deki karma dağılım modelinde üç bileşen vardır. Herbir bileşen kendi başına bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere herbiri, bir spektral banta karşılık gelmektedir. Yani (en az) üç değişik spektral bant üzerinden alınan örneklemin herbir altgrubu, bir spektral bant üzerinden alınan spektral parlaklık (piksel) değerlerinden oluşur. Bu anlamda karma dağılım modelinde en küçük ortalamaya sahip bant birinci bileşen, en büyük ortalamaya sahip bant üçüncü bileşen ve diğeri de ikinci bileşen olarak alınmaktadır. Diğer bir ifadeyle, modeldeki bileşenler ortalamalarına göre $-\infty < \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < +\infty$ olacak şekilde düzenlenmiştir.

4.2. Üç Bileşenli Normal Karma Dağılım Modelindeki Parametrelerin Tahmini

Üç bileşenli normal dağılımın karmasındaki yani (4.1.1) 'deki olasılık yoğunluk fonksiyonundaki parametreleri tahmin etmek için bölüm 1.2.3 'de açıklanan momentler yöntemi kullanılacaktır. Momentler yöntemi, istatistikte kullanılan bir parametre tahmin yöntemidir.

(4.1.1) 'deki olasılık yoğunluk fonksiyonundaki parametreleri tahmin işlemi üç adımda gerçekleşir. Birinci adımda, beklenen değerler örneklem momentlerine eşitlenerek bir denklem sistemi elde edilir. Elde edilen denklem sistemi genelde lineer değildir. İkinci adımda, birinci adımda elde edilen denklem sisteminin iterasyonla çözümü için gerekli olan uygun başlangıç değerleri hesaplanır. Üçüncü adımda ise ikinci adımda bulunan başlangıç değerleride kullanılarak birinci adımda oluşturulan denklem sisteminin çözümünü bulmak için Newton-Raphson iterasyon yöntemi uygulanır.

4.2.1. Denklem Sisteminin Oluşturulması

(4.1.1) 'deki olasılık yoğunluk fonksiyonunun moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_x(t) = \sum_{i=1}^3 p_i \exp\left\{ \mu_i t + \frac{1}{2} \sigma_i^2 t^2 \right\} \quad (4.2.1)$$

$$-\infty < \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < +\infty, \quad 0 < \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$$

dir.

(4.1.1) 'de tahmin edilecek toplam $3*3-1=8$ tane parametre vardır. Bu nedenle önce merkez etrafındaki linci, 2inci,..., 8inci momentlerin hesaplanması gerekir.

(4.2.1) 'deki moment çıkaran fonksiyon, $k=3$ için (1.2.19) 'daki moment çıkaran fonksiyonun şeklidir.

(4.2.1) 'deki moment çıkaran fonksiyon, (1.2.20) 'deki bağıntıyla kullanıldığında merkez ya da sıfır etrafındaki linci, 2inci, ... ve 8inci momentler:

$$\mu'_1 = E(x^1) = \sum_{i=1}^3 p_i \mu_i$$

$$\mu'_2 = E(x^2) = \sum_{i=1}^3 p_i (\mu_i^2 + \sigma_i^2)$$

$$\mu'_3 = E(x^3) = \sum_{i=1}^3 p_i (\mu_i^3 + 3\sigma_i^2 \mu_i)$$

$$\mu'_4 = E(x^4) = \sum_{i=1}^3 p_i (\mu_i^4 + 6\sigma_i^2 \mu_i^2 + 3\sigma_i^4)$$

$$\mu'_5 = E(x^5) = \sum_{i=1}^3 p_i (\mu_i^5 + 10\sigma_i^2 \mu_i^3 + 15\sigma_i^4 \mu_i) \quad (4.2.2)$$

$$\mu'_6 = E(x^6) = \sum_{i=1}^3 p_i (\mu_i^6 + 15\sigma_i^2 \mu_i^4 + 45\sigma_i^4 \mu_i^2 + 15\sigma_i^6)$$

$$\mu'_7 = E(x^7) = \sum_{i=1}^3 p_i (\mu_i^7 + 21\sigma_i^2 \mu_i^5 + 105\sigma_i^4 \mu_i^3 + 105\sigma_i^6 \mu_i)$$

$$\mu'_8 = E(x^8) = \sum_{i=1}^3 p_i (\mu_i^8 + 28\sigma_i^2 \mu_i^6 + 210\sigma_i^4 \mu_i^4 + 420\sigma_i^6 \mu_i^2 + 105\sigma_i^8)$$

olarak elde edilir.

Merkez ya da sıfır etrafındaki linci, 2inci, ... ve 8inci momentler (4.2.2) 'deki gibi elde edildikten sonra (1.2.21) 'deki

bağıntı kullanılarak ortalama etrafındaki 1inci, 2inci, ... ve 8inci momentler hesaplanabilir.

Ortalama etrafındaki 1inci, 2inci, ... ve 8inci momentler (1.2.21) 'deki bağıntı kullanılarak hesaplandıktan sonra sırasıyla ortalama etrafındaki 1inci, 2inci, ... ve 8inci örneklem momentlerine eşitlenir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
 \mu_1 &= \sum_{i=1}^3 p_i \mu_i = m_1 \\
 \mu_2 &= \sum_{i=1}^3 p_i (\mu_i^2 + \sigma_i^2) = m_1^2 + m_2 \\
 \mu_3 &= \sum_{i=1}^3 p_i (\mu_i^3 + 3\sigma_i^2 \mu_i) = m_1^3 + 3m_1 m_2 + m_3 \\
 \mu_4 &= \sum_{i=1}^3 p_i (\mu_i^4 + 6\sigma_i^2 \mu_i^2 + 3\sigma_i^4) = m_1^4 + 6m_1^2 m_2 + 4m_1 m_3 + m_4 \\
 \mu_5 &= \sum_{i=1}^3 p_i (\mu_i^5 + 10\sigma_i^2 \mu_i^3 + 15\sigma_i^4 \mu_i) = m_1^5 + 10m_1^2 m_3 + 10m_1^3 m_2 + 5m_1 m_4 + m_5 \quad (4.2.3) \\
 \mu_6 &= \sum_{i=1}^3 p_i (\mu_i^6 + 15\sigma_i^2 \mu_i^4 + 45\sigma_i^4 \mu_i^2 + 15\sigma_i^6) = \\
 &\quad m_1^6 + 15m_1^4 m_2 + 20m_1^3 m_3 + 15m_1^2 m_4 + 6m_1 m_5 + m_6 \\
 \mu_7 &= \sum_{i=1}^3 p_i (\mu_i^7 + 21\sigma_i^2 \mu_i^5 + 105\sigma_i^4 \mu_i^3 + 105\sigma_i^6 \mu_i) = \\
 &\quad m_1^7 + 21m_1^5 m_2 + 35m_1^4 m_3 + 35m_1^3 m_4 + 21m_1^2 m_5 + 7m_1 m_6 + m_7 \\
 \mu_8 &= \sum_{i=1}^3 p_i (\mu_i^8 + 28\sigma_i^2 \mu_i^6 + 210\sigma_i^4 \mu_i^4 + 420\sigma_i^6 \mu_i^2 + 105\sigma_i^8) = \\
 &\quad m_1^8 + 28m_1^6 m_2 + 56m_1^5 m_3 + 70m_1^4 m_4 + 56m_1^3 m_5 + 28m_1^2 m_6 + 8m_1 m_7 + m_8
 \end{aligned}$$

lineer olmayan denklem sistemi elde edilir.

(4.2.3) 'de örneklem ortalaması ve ortalama etrafındaki 2inci, 3üncü, ... ve 8inci örneklem momentleri (1.2.22) 'deki bağıntılar kullanılarak hesaplanır.

(4.2.3) 'de,

$$A_1 = m_1$$

$$A_2 = m_1^2 + m_2$$

$$A_3 = m_1^3 + 3m_1m_2 + m_3$$

$$A_4 = m_1^4 + 6m_1^2m_2 + 4m_1m_3 + m_4$$

$$A_5 = m_1^5 + 10m_1^2m_3 + 10m_1^3m_2 + 5m_1m_4 + m_5 \quad (4.2.4)$$

$$A_6 = m_1^6 + 15m_1^4m_2 + 20m_1^3m_3 + 15m_1^2m_4 + 6m_1m_5 + m_6$$

$$A_7 = m_1^7 + 21m_1^5m_2 + 35m_1^4m_3 + 35m_1^3m_4 + 21m_1^2m_5 + 7m_1m_6 + m_7$$

$$A_8 = m_1^8 + 28m_1^6m_2 + 56m_1^5m_3 + 70m_1^4m_4 + 56m_1^3m_5 + 28m_1^2m_6 + 8m_1m_7 + m_8$$

alındığında (4.2.3) 'deki lineer olmayan denklem sistemi,

$$\sum_{i=1}^3 p_i \mu_i = A_1$$

$$\sum_{i=1}^3 p_i (\mu_i^2 + \sigma_i^2) = A_2$$

$$\sum_{i=1}^3 p_i (\mu_i^3 + 3\sigma_i^2 \mu_i) = A_3$$

$$\sum_{i=1}^3 p_i (\mu_i^4 + 6\sigma_i^2 \mu_i^2 + 3\sigma_i^4) = A_4$$

$$\sum_{i=1}^3 p_i (\mu_i^5 + 10\sigma_i^2 \mu_i^3 + 15\sigma_i^4 \mu_i) = A_5 \quad (4.2.5)$$

$$\sum_{i=1}^3 p_i (\mu_i^6 + 15\sigma_i^2 \mu_i^4 + 45\sigma_i^4 \mu_i^2 + 15\sigma_i^6) = A_6$$

$$\sum_{i=1}^3 p_i (\mu_i^7 + 21\sigma_i^2 \mu_i^5 + 105\sigma_i^4 \mu_i^3 + 105\sigma_i^6 \mu_i) = A_7$$

$$\sum_{i=1}^3 p_i (\mu_i^8 + 28\sigma_i^2 \mu_i^6 + 210\sigma_i^4 \mu_i^4 + 420\sigma_i^6 \mu_i^2 + 105\sigma_i^8) = A_8$$

şeklinde yazılabilir.

(4.2.5) 'deki herbir eşitlik, $i=1,2,3$ için p_i , μ_i , σ_i parametrelerinin bir fonksiyonudur. Bu nedenle $i=1,2,3$ için p_i , μ_i , σ_i parametrelerinin fonksiyonları; $j=1,\dots,8$ için g_j fonksiyonları olarak tanımlanabilir. Yani $j=1, \dots, 8$ için g_j 'ler $g_j(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, p_1, p_2, p_3)$ olarak gösterilebilir.

Bu durumda ise (4.2.5) 'deki ifade,

$$g_1 = \sum_{i=1}^3 p_i \mu_i - A_1 = 0$$

$$g_2 = \sum_{i=1}^3 p_i (\mu_i^2 + \sigma_i^2) - A_2 = 0$$

$$g_3 = \sum_{i=1}^3 p_i (\mu_i^3 + 3\sigma_i^2 \mu_i) - A_3 = 0$$

$$g_4 = \sum_{i=1}^3 p_i (\mu_i^4 + 6\sigma_i^2 \mu_i^2 + 3\sigma_i^4) - A_4 = 0$$

$$g_5 = \sum_{i=1}^3 p_i (\mu_i^5 + 10\sigma_i^2 \mu_i^3 + 15\sigma_i^4 \mu_i) - A_5 = 0 \quad (4.2.6)$$

$$g_6 = \sum_{i=1}^3 p_i (\mu_i^6 + 15\sigma_i^2 \mu_i^4 + 45\sigma_i^4 \mu_i^2 + 15\sigma_i^6) - A_6 = 0$$

$$g_7 = \sum_{i=1}^3 p_i (\mu_i^7 + 21\sigma_i^2 \mu_i^5 + 105\sigma_i^4 \mu_i^3 + 105\sigma_i^6 \mu_i) - A_7 = 0$$

$$g_8 = \sum_{i=1}^3 p_i (\mu_i^8 + 28\sigma_i^2 \mu_i^6 + 210\sigma_i^4 \mu_i^4 + 420\sigma_i^6 \mu_i^2 + 105\sigma_i^8) - A_8 = 0$$

şeklinde tekrar yazılabilir.

(4.2.6) 'daki lineer olmayan denklem sistemi, (4.1.1) 'deki üç bileşenli normal dağılımın bir karmasındaki parametrelerin tahminini elde etmek için Newton-Raphson iterasyon yöntemi uygulanacak olan denklem sistemidir.

Uygun başlangıç değerleriyle (tahminiyle) Newton-Raphson iterasyon yöntemi tek bir çözüme yakınsar (Carnahan ve ark. 1969, s.319).

4.2.2. Newton-Raphson Iterasyon Yöntemi İçin Uygun Başlangıç Değerlerinin (Tahminlerinin) Hesaplanması

(4.2.6) 'daki lineer olmayan denklem sisteminin çözümünün Newton-Raphson iterasyon yöntemi kullanılarak hesaplanması için uygun başlangıç değerlerine (tahminlerine) gereksinim vardır. Uygun başlangıç değerlerinin (tahminlerinin) seçiminde; ortalamalar ve standart sapmalar için, sırasıyla örneklemin altgruplarının ortalaması ve standart sapması kullanılır. Karma oranlarının uygun başlangıç değerleri için de, ortalamalar ve standart sapmalar için elde edilen uygun başlangıç değerleri kullanılarak en küçük kareler yöntemiyle elde edilen değerler kullanılır.

μ_1, μ_2, μ_3 ve $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ değişkenleri ((4.1.1) 'deki parametreler) için uygun başlangıç değerlerinin hesaplanması:

(4.2.6) 'daki lineer olmayan denklem sisteminde bulunan μ_1, μ_2, μ_3 ve $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ değişkenleri için uygun başlangıç değerleri olarak örneklemin altgruplarının ortalama ve standart sapma değerleri alınabilir. μ_1, μ_2, μ_3 ve $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ değişkenleri için uygun başlangıç değerleri sırasıyla $\mu_{10}, \mu_{20}, \mu_{30}$, ve $\sigma_{10}, \sigma_{20}, \sigma_{30}$ olsun.

p_1 ve p_2 ($p_3=1-p_1-p_2$) karma oranları değişkenleri ((4.1.1) 'deki parametreler) için uygun başlangıç değerlerinin hesaplanması:

p_1 ve p_2 için uygun başlangıç değerleri sırasıyla p_{10} ve p_{20} olsun. p_{10} ve p_{20} değerleri bilinmiyor, bu nedenle hesaplanması gerekir. p_{10} ve p_{20} değerlerinin hesaplaması için önce (4.2.6) 'da μ_1, μ_2, μ_3 ve $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ değişkenlerinin yerine uygun başlangıç değerleri olarak sırasıyla $\mu_{10}, \mu_{20}, \mu_{30}$ ve $\sigma_{10}, \sigma_{20}, \sigma_{30}$ alınsın. Sonra da (4.2.6) 'da p_1 ve p_2 yerine sırasıyla p_{10} ve p_{20} konulsun. ($p_3=1-p_1-p_2$). Bu durumda,

$$p_{10}\mu_{10}+p_{20}\mu_{20}+p_{30}\mu_{30}=A_1$$

$$p_{10}(\mu_{10}^2+\sigma_{10}^2)+p_{20}(\mu_{20}^2+\sigma_{20}^2)+p_{30}(\mu_{30}^2+\sigma_{30}^2)=A_2$$

$$p_{10}(\mu_{10}^3+3\sigma_{10}^2\mu_{10})+p_{20}(\mu_{20}^3+3\sigma_{20}^2\mu_{20})+p_{30}(\mu_{30}^3+3\sigma_{30}^2\mu_{30})=A_3$$

$$p_{10}(\mu_{10}^4+6\sigma_{10}^2\mu_{10}^2+3\sigma_{10}^4)+p_{20}(\mu_{20}^4+6\sigma_{20}^2\mu_{20}^2+3\sigma_{20}^4)+p_{30}(\mu_{30}^4+6\sigma_{30}^2\mu_{30}^2+3\sigma_{30}^4)=A_4$$

$$p_{10}(\mu_{10}^5+10\sigma_{10}^2\mu_{10}^3+15\sigma_{10}^4\mu_{10})+p_{20}(\mu_{20}^5+10\sigma_{20}^2\mu_{20}^3+15\sigma_{20}^4\mu_{20})+p_{30}(\mu_{30}^5+10\sigma_{30}^2\mu_{30}^3+15\sigma_{30}^4\mu_{30})=A_5 \quad (4.2.7)$$

$$p_{10}(\mu_{10}^6+15\sigma_{10}^2\mu_{10}^4+45\sigma_{10}^4\mu_{10}^2+15\sigma_{10}^6)+p_{20}(\mu_{20}^6+15\sigma_{20}^2\mu_{20}^4+45\sigma_{20}^4\mu_{20}^2+15\sigma_{20}^6)+p_{30}(\mu_{30}^6+15\sigma_{30}^2\mu_{30}^4+45\sigma_{30}^4\mu_{30}^2+15\sigma_{30}^6)=A_6$$

$$p_{10}(\mu_{10}^7+21\sigma_{10}^2\mu_{10}^5+105\sigma_{10}^4\mu_{10}^3+105\sigma_{10}^6\mu_{10})+p_{20}(\mu_{20}^7+21\sigma_{20}^2\mu_{20}^5+105\sigma_{20}^4\mu_{20}^3+105\sigma_{20}^6\mu_{20})+p_{30}(\mu_{30}^7+21\sigma_{30}^2\mu_{30}^5+105\sigma_{30}^4\mu_{30}^3+105\sigma_{30}^6\mu_{30})=A_7$$

$$p_{10}(\mu_{10}^8+28\sigma_{10}^2\mu_{10}^6+210\sigma_{10}^4\mu_{10}^4+420\sigma_{10}^6\mu_{10}^2+105\sigma_{10}^8)+p_{20}(\mu_{20}^8+28\sigma_{20}^2\mu_{20}^6+210\sigma_{20}^4\mu_{20}^4+420\sigma_{20}^6\mu_{20}^2+105\sigma_{20}^8)+p_{30}(\mu_{30}^8+28\sigma_{30}^2\mu_{30}^6+210\sigma_{30}^4\mu_{30}^4+420\sigma_{30}^6\mu_{30}^2+105\sigma_{30}^8)=A_8$$

dir.

(4.2.7) 'deki denklem sistemi, p_1 ve p_2 'de lineerdir.

(4.2.7) 'de, $p_{30}=1-p_{10}-p_{20}$ alındığında ve sonrada matris formunda yazıldığında,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \\ a_{51} & a_{52} \\ a_{61} & a_{62} \\ a_{71} & a_{72} \\ a_{81} & a_{82} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{10} \\ p_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^* \\ A_2^* \\ A_3^* \\ A_4^* \\ A_5^* \\ A_6^* \\ A_7^* \\ A_8^* \end{bmatrix} \quad (4.2.8)$$

elde edilir.

Burada,

$$a_{11} = \mu_{10} - \mu_{30}$$

$$a_{12} = \mu_{20} - \mu_{30}$$

$$a_{21} = (\mu_{10}^2 + \sigma_{10}^2) - (\mu_{30}^2 + \sigma_{30}^2)$$

$$a_{22} = (\mu_{20}^2 + \sigma_{20}^2) - (\mu_{30}^2 + \sigma_{30}^2)$$

$$a_{31} = (\mu_{10}^3 + 3\sigma_{10}^2\mu_{10}) - (\mu_{30}^3 + 3\sigma_{30}^2\mu_{30})$$

$$a_{32} = (\mu_{20}^3 + 3\sigma_{20}^2\mu_{20}) - (\mu_{30}^3 + 3\sigma_{30}^2\mu_{30})$$

$$a_{41} = (\mu_{10}^4 + 6\sigma_{10}^2\mu_{10}^2 + 3\sigma_{10}^4) - (\mu_{30}^4 + 6\sigma_{30}^2\mu_{30}^2 + 3\sigma_{30}^4)$$

$$a_{42} = (\mu_{20}^4 + 6\sigma_{20}^2\mu_{20}^2 + 3\sigma_{20}^4) - (\mu_{30}^4 + 6\sigma_{30}^2\mu_{30}^2 + 3\sigma_{30}^4)$$

$$a_{51} = (\mu_{10}^5 + 10\sigma_{10}^2\mu_{10}^3 + 15\sigma_{10}^4\mu_{10}) - (\mu_{30}^5 + 10\sigma_{30}^2\mu_{30}^3 + 15\sigma_{30}^4\mu_{30})$$

$$a_{52} = (\mu_{20}^5 + 10\sigma_{20}^2\mu_{20}^3 + 15\sigma_{20}^4\mu_{20}) - (\mu_{30}^5 + 10\sigma_{30}^2\mu_{30}^3 + 15\sigma_{30}^4\mu_{30})$$

$$a_{61} = (\mu_{10}^6 + 15\sigma_{10}^2\mu_{10}^4 + 45\sigma_{10}^4\mu_{10}^2 + 15\sigma_{10}^6) - (\mu_{30}^6 + 15\sigma_{30}^2\mu_{30}^4 + 45\sigma_{30}^4\mu_{30}^2 + 15\sigma_{30}^6)$$

$$a_{62} = (\mu_{20}^6 + 15\sigma_{20}^2\mu_{20}^4 + 45\sigma_{20}^4\mu_{20}^2 + 15\sigma_{20}^6) - (\mu_{30}^6 + 15\sigma_{30}^2\mu_{30}^4 + 45\sigma_{30}^4\mu_{30}^2 + 15\sigma_{30}^6)$$

$$a_{71} = (\mu_{10}^7 + 21\sigma_{10}^2\mu_{10}^5 + 105\sigma_{10}^4\mu_{10}^3 + 105\sigma_{10}^6\mu_{10}) - (\mu_{30}^7 + 21\sigma_{30}^2\mu_{30}^5 + 105\sigma_{30}^4\mu_{30}^3 + 105\sigma_{30}^6\mu_{30})$$

$$a_{72} = (\mu_{20}^7 + 21\sigma_{20}^2\mu_{20}^5 + 105\sigma_{20}^4\mu_{20}^3 + 105\sigma_{20}^6\mu_{20}) - (\mu_{30}^7 + 21\sigma_{30}^2\mu_{30}^5 + 105\sigma_{30}^4\mu_{30}^3 + 105\sigma_{30}^6\mu_{30})$$

$$a_{81} = (\mu_{10}^8 + 28\sigma_{10}^2\mu_{10}^6 + 210\sigma_{10}^4\mu_{10}^4 + 420\sigma_{10}^6\mu_{10}^2 + 105\sigma_{10}^8) - (\mu_{30}^8 + 28\sigma_{30}^2\mu_{30}^6 + 210\sigma_{30}^4\mu_{30}^4 + 420\sigma_{30}^6\mu_{30}^2 + 105\sigma_{30}^8)$$

$$a_{82} = (\mu_{20}^8 + 28\sigma_{20}^2\mu_{20}^6 + 210\sigma_{20}^4\mu_{20}^4 + 420\sigma_{20}^6\mu_{20}^2 + 105\sigma_{20}^8) - (\mu_{30}^8 + 28\sigma_{30}^2\mu_{30}^6 + 210\sigma_{30}^4\mu_{30}^4 + 420\sigma_{30}^6\mu_{30}^2 + 105\sigma_{30}^8)$$

ve

$$A_1'' = A_1 - \mu_{30}$$

$$A_2'' = A_2 - (\mu_{30}^2 + \sigma_{30}^2)$$

$$A_3'' = A_3 - (\mu_{30}^3 + 3\sigma_{30}^2 \mu_{30})$$

$$A_4'' = A_4 - (\mu_{30}^4 + 6\sigma_{30}^2 \mu_{30}^2 + 3\sigma_{30}^4)$$

$$A_5'' = A_5 - (\mu_{30}^5 + 10\sigma_{30}^2 \mu_{30}^3 + 15\sigma_{30}^4 \mu_{30})$$

$$A_6'' = A_6 - (\mu_{30}^6 + 15\sigma_{30}^2 \mu_{30}^4 + 45\sigma_{30}^4 \mu_{30}^2 + 15\sigma_{30}^6)$$

$$A_7'' = A_7 - (\mu_{30}^7 + 21\sigma_{30}^2 \mu_{30}^5 + 105\sigma_{30}^4 \mu_{30}^3 + 105\sigma_{30}^6 \mu_{30})$$

$$A_8'' = A_8 - (\mu_{30}^8 + 28\sigma_{30}^2 \mu_{30}^6 + 210\sigma_{30}^4 \mu_{30}^4 + 420\sigma_{30}^6 \mu_{30}^2 + 105\sigma_{30}^8)$$

dir.

(4.2.8) 'deki katsayı matrisi X olsun. $P_0 = (p_{10}, p_{20})'$ ve $A = (A_1'', A_2'', A_3'', A_4'', A_5'', A_6'', A_7'', A_8'')$ alınsın. Bu durumda (4.2.8) 'deki matris formundaki lineer denklem sistemi,

$$X P_0 = A \quad (4.2.9)$$

şeklinde yazılabilir.

(4.2.9) 'daki X , 8×2 tipinde olup rankı 2 dir. (Graybill 1983, s.18) 'deki teorem 1.7.6 ve teorem 1.7.7 den $X'X$ matrisi pozitif definittir. Bu nedenle $X'X$ 'in tersi vardır.

(4.2.9) 'daki lineer denklem sisteminin en küçük kareler yöntemi kullanılarak P_0 için çözümü, karma oranları için

$$P_0 = (X' X)^{-1} X' A$$

uygun başlangıç değerlerini (tahminlerini) verir.

4.2.3. Newton-Raphson Iterasyon Yönteminin Uygulanması

Newton-Raphson iterasyon yöntemi, bölüm 4.2.2 'de açıklanan yöntemle elde edilen uygun başlangıç değerlerinin kullanılmasıyla

bölüm 4.2.1 'de kurulan denklem sisteminin çözümünü bulmak için kullanılır.

Karma dağılım modelinin kurulması ve parametrelerin tahmin edilmesi işlemleri için bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Bu bilgisayar programı; Newton-Raphson iterasyon işlemini kullanarak, 8 bilinmeyenli 8 denklemden oluşan bir lineer olmayan denklem sistemini çözer. Bilgisayar programı önce bölüm 4.2.2 'de açıklanan yöntemle uygun başlangıç değerlerini hesaplar. Bu başlangıç değerleri, ITERASYON=0 'daki $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, p_1$, ve p_2 'nin değerleridir. Yani $\mu_{10}, \mu_{20}, \mu_{30}, \sigma_{10}, \sigma_{20}, \sigma_{30}, p_{10}$ ve p_{20} değerleridir ($p_{30}=1-p_{10}-p_{20}$). Sonra CALCN (Carnahan ve ark. 1969, s.326) subroutine altprogramı, ((4.2.6) için yeniden düzenlenmiştir) M 'nin elemanlarını hesaplamak için çağırır. M, kısmi türevlerin ekli matrisidir. Daha sonra da SIMUL (Carnahan ve ark. 1969, s.290) function altprogramını, ((4.2.6) için yeniden düzenlenmiştir) çözüm değerlerindeki değişimler için oluşturulan lineer denklem sistemini çözmek için çağırır. Bu değerler herhangi bir ITERASYON>0 'daki $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, p_1$ ve p_2 'nin değerleridir. Çözümler, $j=1, \dots, 8$ için (4.2.6) 'daki herbir g_j fonksiyonunun değeri ϵ_2 değerinden küçük ya da ϵ_2 değerine eşit olana kadar güncelleştirilir ve işleme devam edilir. ϵ_1 değeri de, SIMUL function altprogramında kullanılan bir yakınsama kriteridir.

Bilgisayar programının mantığı ya da algoritmasının adımları aşağıdaki gibidir.

1. Adım: (En az) üç değişik spektral bant üzerinden bir bölgede bulunan bir alan için spektral parlaklık (piksel) değerlerini oku.

Bir bölgede bulunan bir alan "sınıf" olarak tanımlanır. Bir "sınıf" için (en az) üç değişik spektral bant üzerinden spektral parlaklık (piksel) değerlerinin tamamı örnekleme oluşturur. Bir "sınıf" için her bir spektral bant üzerinden alınan spektral parlaklık (piksel) değerleri de örneklemin bir altgrubunu oluşturur.

2. Adım: Spektral bant üzerinden alınan spektral parlaklık (piksel) değerlerini, diğer bir ifadeyle örneklemin her bir altgrubunu, normallik için test et.

Her bir altgruptaki spektral parlaklık (piksel) değerleri bir normal dağılımdan mı geliyor?. Eğer cevap 'hayır' ise 'yöntem çalışmaz' mesajını ver ve işlemleri durdur. Eğer cevap 'evet' ise işleme bir sonraki adımdan devam et.

3. Adım: Her bir altgruptaki spektral parlaklık (piksel) değerlerinin ortalamasını ve standart sapmasını hesapla.

4. Adım: (4.2.6) 'daki denklem sistemini oluştur. (bölüm 4.2.1)

5. Adım: Her bir altgruptaki spektral parlaklık (piksel) değerlerinin ortalamasını ve standart sapmasını, μ_1 , μ_2 , μ_3 ve σ_1 , σ_2 , σ_3 parametreleri için uygun başlangıç değerleri (tahminleri) olarak al. (bölüm 4.2.2)

6. Adım: 5. adımda elde edilen μ_{10} , μ_{20} , μ_{30} ve σ_{10} , σ_{20} , σ_{30} değerlerini kullanarak en küçük kareler yöntemiyle, p_{10} ve p_{20} ($p_{30}=1-p_{10}-p_{20}$) değerlerini hesapla. (bölüm 4.2.2)

7. Adım: Newton-Raphson iterasyon yöntemini uygula. (bölüm 4.2.3)

8. Adım: Yakınsama kriteri sağlanıyor mu?

Eğer cevap 'hayır' ise 7. adıma git. Eğer cevap 'evet' ise 'tahmin edilen parametre değerleri' mesajını ver ve o alan ("sınıf") için karma dağılım modelini yaz.

9. Adım: İşlemi durdur.

4.3. Karma Dağılım Modelinin Uzaktan Algılama Verilerine Bir Uygulaması Ve Bir Bölgedeki Alanların ("Sınıfların") (En Az) Üç Değişik Spektral Bant Üzerinden Alınan Spektral Parlaklık (Piksel) Değerlerine Göre Karma Dağılım Modelleri Kullanılarak Modellenmesi

Uygulama için kullanılan Landsat5 ve Spot uydu verileri, Çukurova Üniversitesi Uzay Bilimleri ve Güneş Enerjisi Araştırma ve Uygulama Merkezinde bulunan Gemstone görüntü işleme sistemiyle alınmıştır.

Üzerinde çalışılan bölge A olsun. Karma dağılım modellemesi, A bölgesinde seçilen üç değişik tip alan üzerinde gösterilecektir. A bölgesinden seçilen her bir alan bir "sınıf" tır. A bölgesinde seçilen üç değişik tip alan ("sınıf"); A_1 , A_2 ve A_3 olsun. Bu alanların ("sınıfların") tipi bilinmektedir. A_1 , A_2 ve A_3 alanlarının (en az) üç değişik spektral bant üzerinden alınan spektral parlaklık (piksel) değerlerine göre karma dağılım modelleri oluşturulacaktır. Bu bantlar $bant_1$, $bant_2$ ve $bant_3$

olsun. Herbir alan ("sınıf") için spektral parlaklık (piksel) değerleri o alan için örnekleme ve herbir alan ("sınıf") için herbir spektral bant üzerinden alınan spektral parlaklık (piksel) değerler de örneklemin bir altgrubunu oluşturur. Uzaktan algılama verileri, bilinen alanlardan alınmıştır.

Tablo 25. A₁ alanı için uzaktan algılama verileri.

Bant₁ değerleri:																	
30	34	35	37	39	40	41	29	29	30	29	30	34	29	27	27	27	29
30	27	28	29	29	29	29	27	27	27	29	29	30	26	28	27	27	29
Bant₂ değerleri:																	
57	62	64	66	62	63	67	60	58	59	58	56	59	56	54	58	56	58
58	55	54	56	55	57	55	53	55	58	55	56	58	55	53	54	53	55
Bant₃ değerleri:																	
62	64	61	63	60	59	57	56	59	64	66	66	62	58	60	62	62	63
59	62	62	59	61	64	64	67	66	64	66	65	61	68	66	67	69	66

Tablo 26. A₂ alanı için uzaktan algılama verileri

Bant₁ değerleri:																	
31	29	31	32	33	32	33	32	32	32	32	31	29	29	33	35	31	30
30	29	32	32	32	33	31	31	30	34	34	29	29	29	31	32	29	27
Bant₂ değerleri:																	
52	47	57	53	52	54	55	54	50	50	50	49	50	53	52	53	54	54
51	48	56	55	54	54	57	54	52	51	51	52	52	51	52	54	55	55
Bant₃ değerleri:																	
55	52	53	55	56	58	58	59	59	59	58	58	51	51	55	60	60	55
56	50	54	56	55	55	53	56	53	59	65	58	51	51	53	59	56	56

Tablo 27. A₃ alanı için uzaktan algılama verileri

Bant₁ değerleri:																				
26	27	27	28	31	28	31	32	29	30	30	32	33	25	24	25	26	26	23	26	27
26	24	26	26	27	26	23	26	25	25	25	25	25	23	24	24	26	24	25	25	25
27	24	25	26	26	25	26	27	26	24	23	26	27	26	23	23	25	25	25	25	
Bant₂ değerleri:																				
44	44	45	46	65	62	63	61	49	49	49	53	57	47	43	42	45	42	54	49	47
44	40	48	44	43	43	37	45	37	39	38	38	44	41	37	41	45	42	41	43	42
45	43	42	45	42	41	49	47	44	40	36	44	43	43	37	37	37	39	38	38	
Bant₃ değerleri:																				
63	61	59	59	66	75	73	65	58	57	54	55	54	66	69	69	69	64	66	69	70
64	63	66	62	61	60	61	62	62	62	62	62	62	61	62	61	62	64	67	69	68
69	67	69	69	69	64	61	69	70	64	63	62	61	60	61	61	62	62	62	62	

Uzaktan algılamada, bir spektral bant üzerinden alınan spektral parlaklık (piksel) değerlerinin dağılımının genellikle normal olduğu varsayılır (Richards 1986, s.79). Herbir bant üzerinden alınan spektral parlaklık (piksel) değerleri, yani örneklemin herbir altgrubu, STATGRAPHICS 3.0 istatistik paket programı (Statistical Graphics Corporation, 1988) kullanılarak normallik için test edilmiştir. Bazı altgruptaki spektral parlaklık (piksel) değerlerinin dağılımının aşırı basık ya da aşırı sivri veya sağa ya da sola çarpık olmasından dolayı, bazen normallikten küçük sapmalar vardır. Bu sapmalar, normal olasılık grafiklerinden de görülebilir. Fakat bu küçük sapmalar modelin yapısını etkilemez (Montgomery ve Peck 1992, s.69). Bu küçük sapmaların incelenmesi ya da analizi özel bir ilgi alanı olabilir. Normal olasılık grafiklerinin kullanımı, bir düz doğrudan ne kadar uzaklaşıldığının bir ölçütü olarak çok kullanışlıdır. Örneklem (burada, altgrup) hacmi ≥ 32 için normal

olasılık grafikleri daha iyi sonuçlar verir (Daniel ve Wood, 1980).

Bölüm 4.2.2 'de önerilen yöntemin kullanılmasıyla elde edilen uygun başlangıç değerleri, bölüm 4.2.3 'de adımları verilen bir bilgisayar programında kullanılmıştır. Bilgisayar programı, herbir alan ("sınıf") için veriyi (örneklemi) kullanır, (4.2.6) 'daki denklemlerin sistemindeki değişkenler için başlangıç değerlerini hesaplar ve daha sonra da Newton-Raphson iterasyon yöntemini uygular. Herbir alan ("sınıf") için bilgisayar çıktıları aşağıda tablolar halinde verilmiştir.

Tablo 28. A_1 alanı için Newton-Raphson iterasyon yönteminin başlangıç değerleri.

$\epsilon_1=0.0000001$	$\epsilon_2=0.0000001$	ITERASYON=0
$\hat{\mu}_1 = 30.13000000$	$\hat{\mu}_2 = 57.44000000$	$\hat{\mu}_3 = 62.77000000$
$\hat{\sigma}_1 = 03.83000000$	$\hat{\sigma}_2 = 03.49900000$	$\hat{\sigma}_3 = 03.18000000$
$\hat{p}_1 = 0.33509700$	$\hat{p}_2 = 0.32730300$	
$g_1 = -00.00013942$	$g_2 = -00.00010200$	$g_3 = -00.00008550$
$g_4 = -00.00006975$	$g_5 = -00.00005560$	$g_6 = -00.00004536$
$g_7 = -00.00003816$	$g_8 = -00.00003241$	
$\Delta \hat{\mu}_1 = -00.00860489$	$\Delta \hat{\mu}_2 = -00.01318815$	$\Delta \hat{\mu}_3 = 00.00198415$
$\Delta \hat{\sigma}_1 = -00.01309522$	$\Delta \hat{\sigma}_2 = 00.00708141$	$\Delta \hat{\sigma}_3 = -00.00257589$
$\Delta \hat{p}_1 = -00.03043372$	$\Delta \hat{p}_2 = 00.00000005$	

Tablo 29. A_1 alanı için Newton-Raphson iterasyon yönteminin sonuç değerleri ve parametre tahminleri.

$\epsilon_1=0.0000001$	$\epsilon_2=0.0000001$	ITERASYON=4
$\hat{\mu}_1 = 29.16732700$	$\hat{\mu}_2 = 56.45278800$	$\hat{\mu}_3 = 62.39763500$
$\hat{\sigma}_1 = 02.02516000$	$\hat{\sigma}_2 = 05.02203800$	$\hat{\sigma}_3 = 03.14725800$
$\hat{p}_1 = 0.31146240$	$\hat{p}_2 = 0.32730730$	
$\hat{g}_1 = -00.00000000$	$\hat{g}_2 = 00.00000002$	$\hat{g}_3 = 00.00000003$
$\hat{g}_4 = 00.00000004$	$\hat{g}_5 = 00.00000004$	$\hat{g}_6 = 00.00000004$
$\hat{g}_7 = 00.00000003$	$\hat{g}_8 = 00.00000005$	
$\Delta \hat{\mu}_1 = 00.00000005$	$\Delta \hat{\mu}_2 = -00.00000003$	$\Delta \hat{\mu}_3 = 00.00000040$
$\Delta \hat{\sigma}_1 = 00.00000006$	$\Delta \hat{\sigma}_2 = -00.00000079$	$\Delta \hat{\sigma}_3 = -00.00000060$
$\Delta \hat{p}_1 = 00.00000020$	$\Delta \hat{p}_2 = 00.00000142$	

Tablo 30. A_2 alanı için Newton-Raphson iterasyon yönteminin başlangıç değerleri.

$\epsilon_1=0.0000001$	$\epsilon_2=0.0000001$	ITERASYON=0
$\hat{\mu}_1 = 31.07000000$	$\hat{\mu}_2 = 52.55000000$	$\hat{\mu}_3 = 55.65000000$
$\hat{\sigma}_1 = 01.72300000$	$\hat{\sigma}_2 = 02.26800000$	$\hat{\sigma}_3 = 03.22100000$
$\hat{p}_1 = 0.33295600$	$\hat{p}_2 = 0.32135800$	
$\hat{g}_1 = -00.00005267$	$\hat{g}_2 = -00.00001193$	$\hat{g}_3 = 00.00001327$
$\hat{g}_4 = 00.00002018$	$\hat{g}_5 = 00.00001812$	$\hat{g}_6 = 00.00001327$
$\hat{g}_7 = 00.00000849$	$\hat{g}_8 = 00.00000477$	
$\Delta \hat{\mu}_1 = 00.00011466$	$\Delta \hat{\mu}_2 = 00.01609668$	$\Delta \hat{\mu}_3 = -00.01532230$
$\Delta \hat{\sigma}_1 = -00.00025211$	$\Delta \hat{\sigma}_2 = 00.00606944$	$\Delta \hat{\sigma}_3 = 00.01081346$
$\Delta \hat{p}_1 = -00.00056306$	$\Delta \hat{p}_2 = -00.00000004$	

Tablo 31. A_2 alanı için Newton-Raphson iterasyon yönteminin sonuç değerleri ve parametre tahminleri.

$\epsilon_1=0.0000001$	$\epsilon_2=0.0000001$	ITERASYON=5
$\hat{\mu}_1 = 31.07741700$	$\hat{\mu}_2 = 53.65005800$	$\hat{\mu}_3 = 54.58016300$
$\hat{\sigma}_1 = 01.69369400$	$\hat{\sigma}_2 = 01.96988800$	$\hat{\sigma}_3 = 04.01292100$
$\hat{p}_1 = 0.33214270$	$\hat{p}_2 = 0.32135780$	
$g_1 = -00.00000000$	$g_2 = 00.00000000$	$g_3 = 00.00000000$
$g_4 = 00.00000000$	$g_5 = 00.00000000$	$g_6 = 00.00000000$
$g_7 = 00.00000000$	$g_8 = -00.00000000$	
$\Delta \hat{\mu}_1 = -00.00000000$	$\Delta \hat{\mu}_2 = -00.00000001$	$\Delta \hat{\mu}_3 = 00.00000001$
$\Delta \hat{\sigma}_1 = -00.00000000$	$\Delta \hat{\sigma}_2 = -00.00000001$	$\Delta \hat{\sigma}_3 = -00.00000000$
$\Delta \hat{p}_1 = -00.00000000$	$\Delta \hat{p}_2 = -00.00000003$	

Tablo 32. A_3 alanı için Newton-Raphson iterasyon yönteminin başlangıç değerleri.

$\epsilon_1=0.0000010$	$\epsilon_2=0.0000010$	ITERASYON=0
$\hat{\mu}_1 = 26.19000000$	$\hat{\mu}_2 = 44.84000000$	$\hat{\mu}_3 = 63.66000000$
$\hat{\sigma}_1 = 02.59300000$	$\hat{\sigma}_2 = 07.10200000$	$\hat{\sigma}_3 = 04.32400000$
$\hat{p}_1 = 0.34207100$	$\hat{p}_2 = 0.32437600$	
$g_1 = -00.00020220$	$g_2 = 00.00015320$	$g_3 = 00.00014032$
$g_4 = -00.00000635$	$g_5 = -00.00012942$	$g_6 = -00.00019090$
$g_7 = -00.00020238$	$g_8 = -00.00018503$	
$\Delta \hat{\mu}_1 = -00.00899943$	$\Delta \hat{\mu}_2 = -00.04880662$	$\Delta \hat{\mu}_3 = -00.00544747$
$\Delta \hat{\sigma}_1 = -00.01013926$	$\Delta \hat{\sigma}_2 = -00.01730049$	$\Delta \hat{\sigma}_3 = 00.00262222$
$\Delta \hat{p}_1 = -00.05585615$	$\Delta \hat{p}_2 = -00.00000035$	

Tablo 33. A_3 alanı için Newton-Raphson iterasyon yönteminin sonuç değerleri ve parametre tahminleri.

$\epsilon_1=0.0000010$	$\epsilon_2=0.0000010$	ITERATION=4
$\hat{\mu}_1 = 25.54315100$	$\hat{\mu}_2 = 42.09322800$	$\hat{\mu}_3 = 63.37724500$
$\hat{\sigma}_1 = 01.46069900$	$\hat{\sigma}_2 = 04.67336800$	$\hat{\sigma}_3 = 04.50279000$
$\hat{p}_1 = 0.30964260$	$\hat{p}_2 = 0.32438100$	
$g_1 = 00.00000001$	$g_2 = 00.00000003$	$g_3 = 00.00000003$
$g_4 = 00.00000002$	$g_5 = 00.00000001$	$g_6 = 00.00000001$
$g_7 = 00.00000000$	$g_8 = 00.00000000$	
$\Delta \hat{\mu}_1 = -00.00000035$	$\Delta \hat{\mu}_2 = -00.00000079$	$\Delta \hat{\mu}_3 = 00.00000009$
$\Delta \hat{\sigma}_1 = -00.00000064$	$\Delta \hat{\sigma}_2 = -00.00000023$	$\Delta \hat{\sigma}_3 = -00.00000005$
$\Delta \hat{p}_1 = -00.00000211$	$\Delta \hat{p}_2 = 00.00000225$	

Yukarıdaki tablolarda:

ϵ_1 değeri, SIMUL function altprogramında kullanılan yakınsama kriteridir.

ϵ_2 değeri bir yakınsama kriteridir. Öyle ki, $j=1, \dots, 8$ için (4.2.6) 'daki her bir g_j fonksiyonunun değeri herhangi bir ITERASYON 'da $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3, \hat{p}_1$ ve $\hat{p}_2$ değişken ((4.1.1) 'deki parametre) değerleri için ϵ_2 değerinden küçük ya da ϵ_2 değerine eşit oluncaya kadar Newton-Raphson iterasyon işlemleri devam eder.

Tablo 28, tablo 30 ve tablo 32 'de:

$\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3, \hat{p}_1$ ve $\hat{p}_2$; ITERASYON=0 'da, değişkenlerin ((4.1.1) 'deki parametrelerin) uygun başlangıç değerleridir.

$j=1, \dots, 8$ için g_j ; ITERASYON=0 'da; değişken ((4.1.1) 'deki parametre) değerleri için (4.2.6) 'daki her bir g_j fonksiyonunun değeridir. $\Delta \tilde{\mu}_1, \Delta \tilde{\mu}_2, \Delta \tilde{\mu}_3, \Delta \tilde{\sigma}_1, \Delta \tilde{\sigma}_2, \Delta \tilde{\sigma}_3, \Delta \tilde{p}_1$ ve $\Delta \tilde{p}_2$; ITERASYON=0 'da, 8 değişkendeki ((4.1.1) 'deki parametrelerdeki) değişimlerdir.

Tablo 29, tablo 31 ve tablo 33 'de:

$\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \tilde{\mu}_3, \tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3, \tilde{p}_1$ ve $\tilde{p}_2$; en son ITERASYON 'da, değişkenlerin ((4.1.1) 'deki parametrelerin) son (tahmin edilmiş) değerleridir.

$j=1, \dots, 8$ için g_j ; en son ITERASYON 'da; değişken ((4.1.1) 'deki parametre) değerleri için (4.2.6) 'daki her bir g_j fonksiyonunun değeridir. $\Delta \tilde{\mu}_1, \Delta \tilde{\mu}_2, \Delta \tilde{\mu}_3, \Delta \tilde{\sigma}_1, \Delta \tilde{\sigma}_2, \Delta \tilde{\sigma}_3, \Delta \tilde{p}_1$ ve $\Delta \tilde{p}_2$; en son ITERASYON 'da, 8 değişkendeki ((4.1.1) 'deki parametrelerdeki) değişimlerdir.

4.4. Bir Bölgedeki Alanların ("Sınıfların") Üç Değişik Spektral Bant Üzerinden Alınan Spektral Parlaklık (Piksel) Değerlerine Göre Karma Dağılım Modelleri Kullanılarak Modellenmesinin Sonuçları

Newton-Raphson iterasyon işleminde başlangıç değerlerinin seçimi çok önemlidir. Bu nedenle başlangıç değerleri genelde bir yöntem kullanılarak elde edilir (Stark 1970, s.98). Newton-

Raphson iterasyon yöntemi; uygun başlangıç değerleriyle tek bir çözüme, çok hızlı yakınsar (Buchanan ve Turner 1992, s.81).

Bölüm 4.3 'deki üç uygulamada da, bölüm 4.2.2 'de açıklanan yöntemle elde edilen uygun başlangıç değerlerinin kullanılmasıyla Newton-Raphson iterasyonları tek bir çözüme çok hızlı yakınsamıştır (tablo 29 ve tablo 33 'de 4 iterasyon, tablo 31 'de 5 iterasyon sonunda).

Bölüm 4.2.2 'de açıklanan yöntemle elde edilen uygun başlangıç değerlerine "yakın" başka bir başlangıç değeri alındığında, Newton-Raphson iterasyonlarının aynı çözüme yakınsadığı fakat bu durumda iterasyon sayısının arttığı görülebilir.

Bölüm 4.2.2 'de açıklanan yöntemle elde edilen başlangıç değerlerinden "uzak" bir başlangıç değeri alındığında, Newton-Raphson iterasyonlarının bir çözüme yakınsamadığı görülebilir.

Bu bölüm 4.2.2 'de açıklanan yöntemin, (4.2.6) 'daki lineer olmayan denklem sisteminin Newton-Raphson iterasyon yöntemiyle çözümü için "iyi" başlangıç değerleri oluşturduğunu gösterir.

Tablo 29, tablo 31 ve tablo 33 'deki sonuçlar, ϵ_2 yakınsama kriterine göre tahmin edilmiş değişken ((4.1.1) 'deki parametre) değerlerinin çok iyi olduğunu gösterir. 8 değişkenin ((4.1.1) 'deki parametrelerin) herbirindeki değişim yani

$\Delta \bar{\mu}_1, \Delta \bar{\mu}_2, \Delta \bar{\mu}_3, \Delta \bar{\sigma}_1, \Delta \bar{\sigma}_2, \Delta \bar{\sigma}_3, \Delta \bar{p}_1$ ve $\Delta \bar{p}_2$, en son iterasyonda oldukça "küçük" tür. $\Delta \bar{\mu}_1, \Delta \bar{\mu}_2, \Delta \bar{\mu}_3, \Delta \bar{\sigma}_1, \Delta \bar{\sigma}_2,$
 $\Delta \bar{\sigma}_3, \Delta \bar{p}_1$ ve $\Delta \bar{p}_2$ değerleri de bir yakınsama kriteri olarak

kullanılabilir.

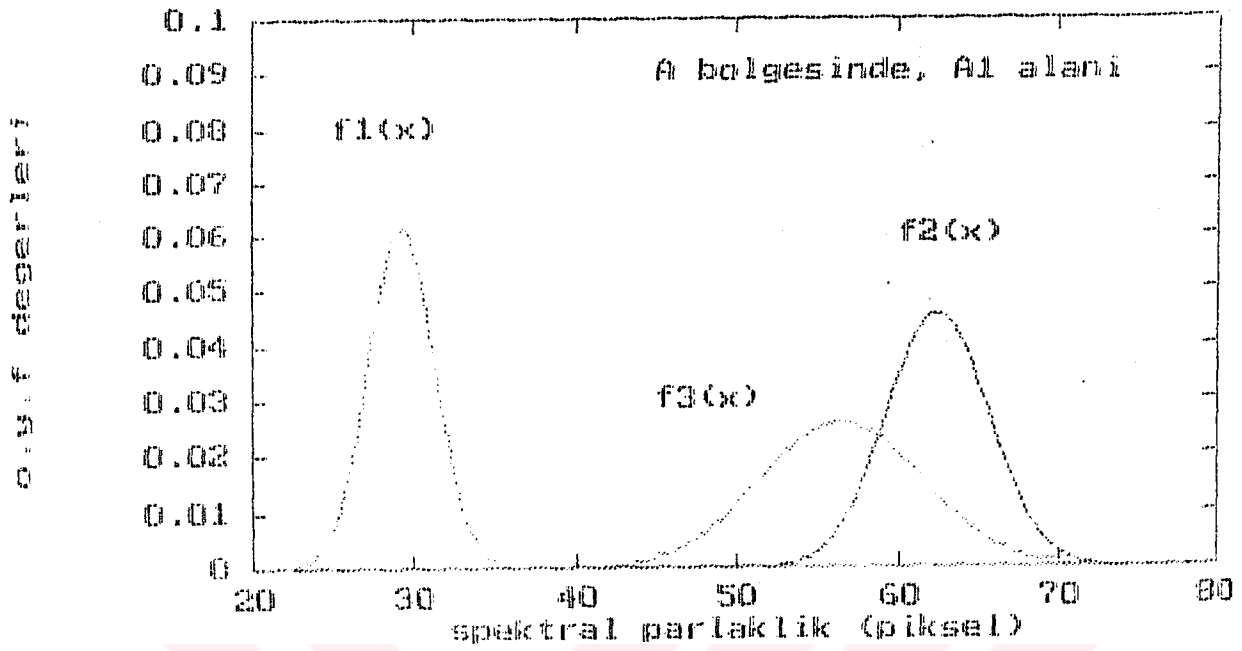
Örneğin tablo 29 'daki sonuçlara göre karma dağılım modelinin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
 f(x) = & \frac{0.31146243}{\sqrt{2\pi} \cdot 2.025160} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x-29.167327}{2.025160} \right)^2 \right\} \\
 & + \frac{0.32730736}{\sqrt{2\pi} \cdot 5.022038} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x-56.452788}{5.022038} \right)^2 \right\} \quad (4.4.1) \\
 & + \frac{0.36123021}{\sqrt{2\pi} \cdot 3.147258} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x-62.397635}{3.147258} \right)^2 \right\} \\
 & -\infty < x < +\infty
 \end{aligned}$$

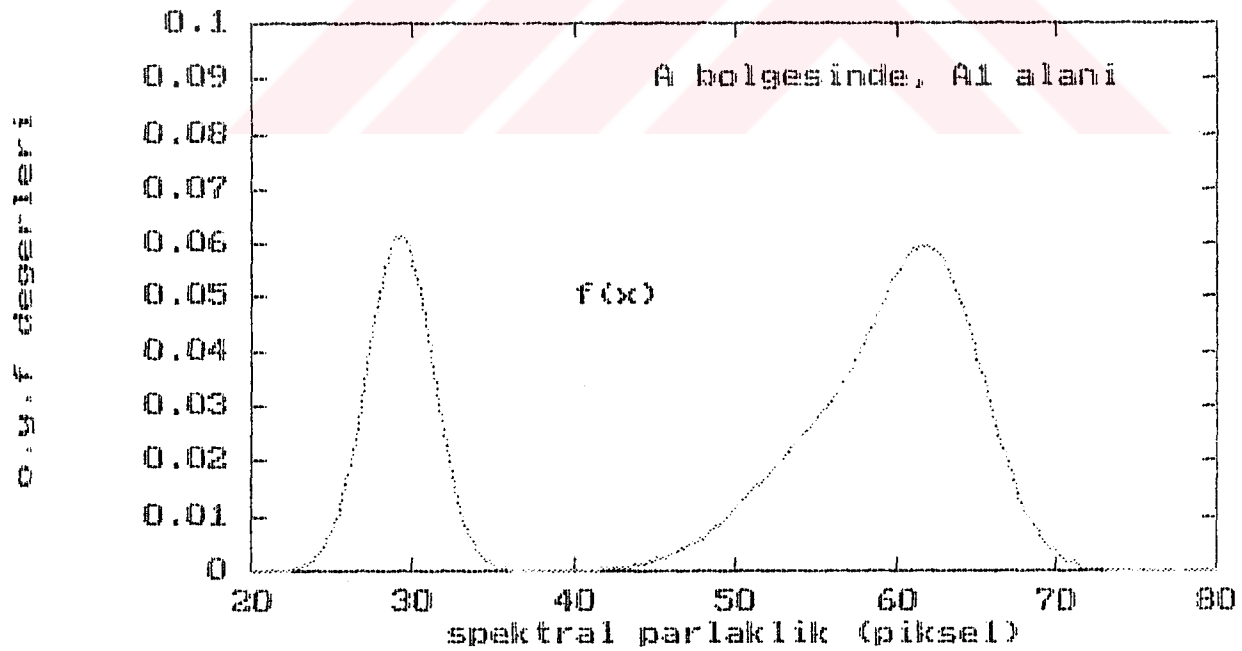
dur.

(4.4.1) 'deki olasılık yoğunluk fonksiyonu, A bölgesindeki A_1 alanının "sınıfının" üç değişik spektral bant üzerinden alınan spektral parlaklık (piksel) değerleri için karma dağılım modelidir.

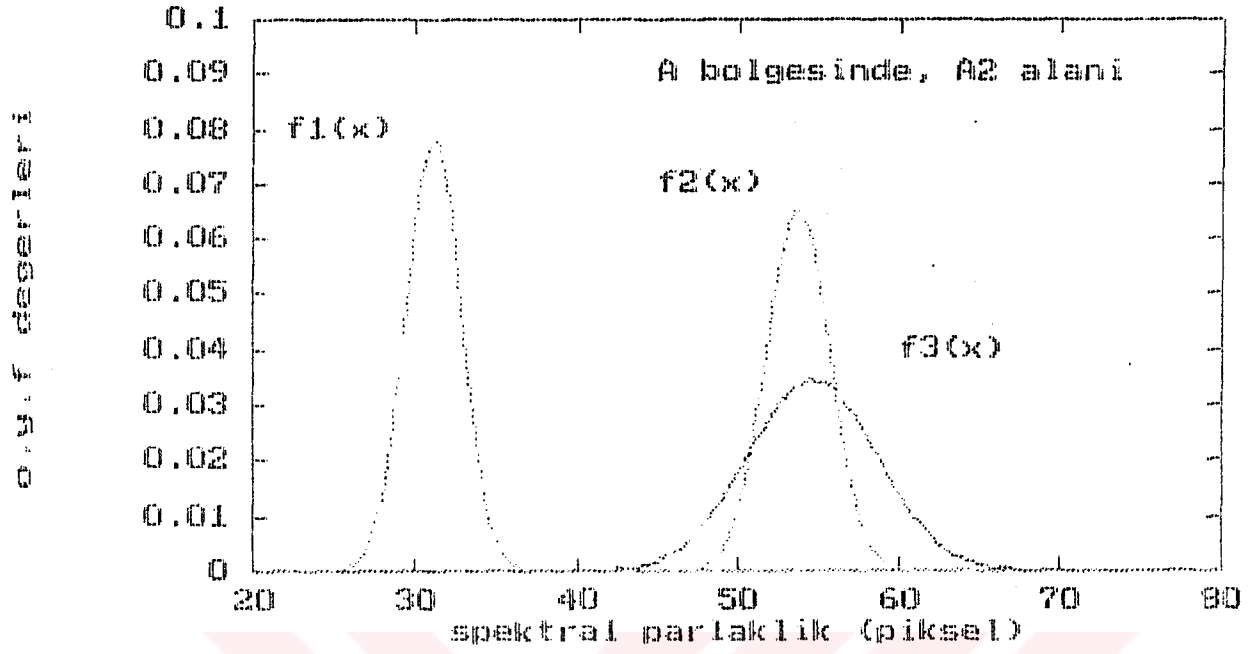
Tahmin edilen parametre değerlerine ya da tablo 29, tablo 31 ve tablo 33 'deki bilgisayar çıktılarına göre olasılık yoğunluk fonksiyonlarının ya da karma dağılım modelinin grafikleri aşağıda gösterilmiştir.



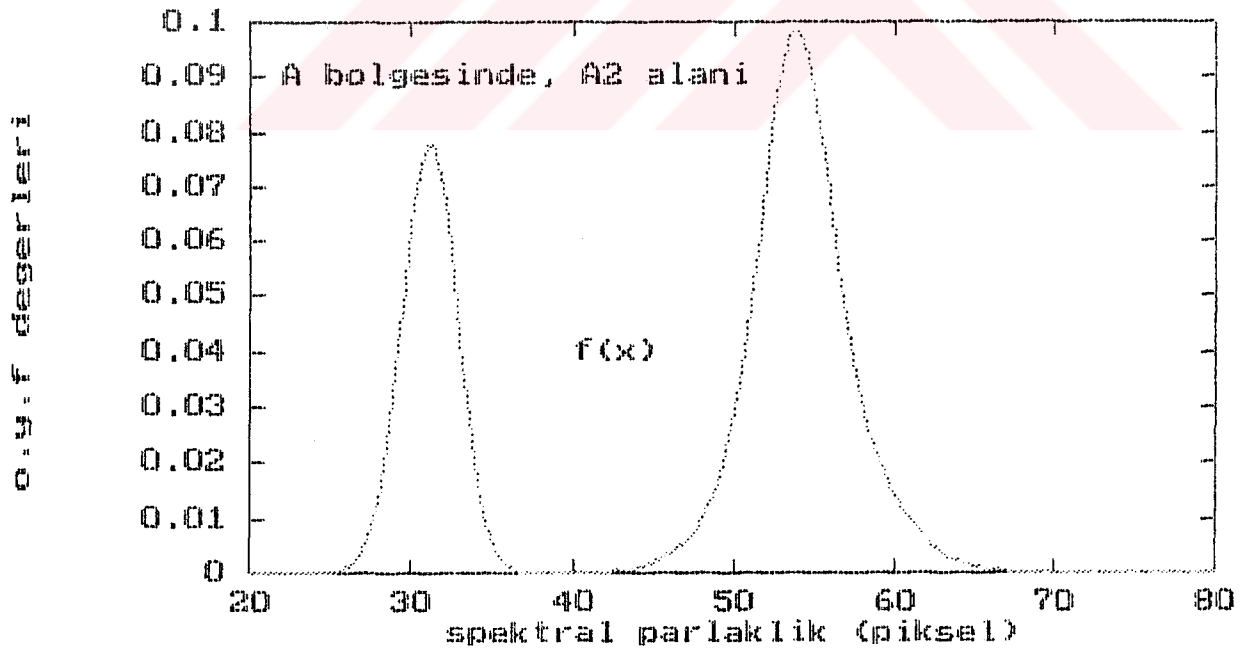
Şekil 14. A_1 alanı için karma dağılım modelinin bileşenleri (bantları).



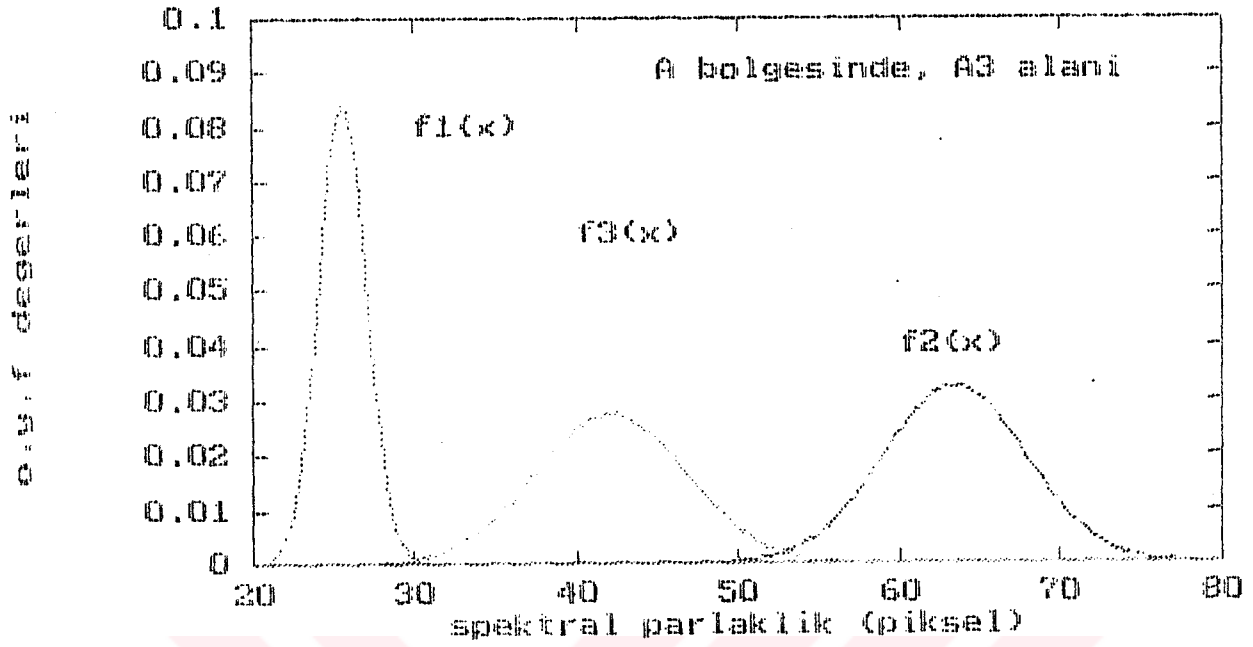
Şekil 15. A_1 alanı için karma dağılım modeli.



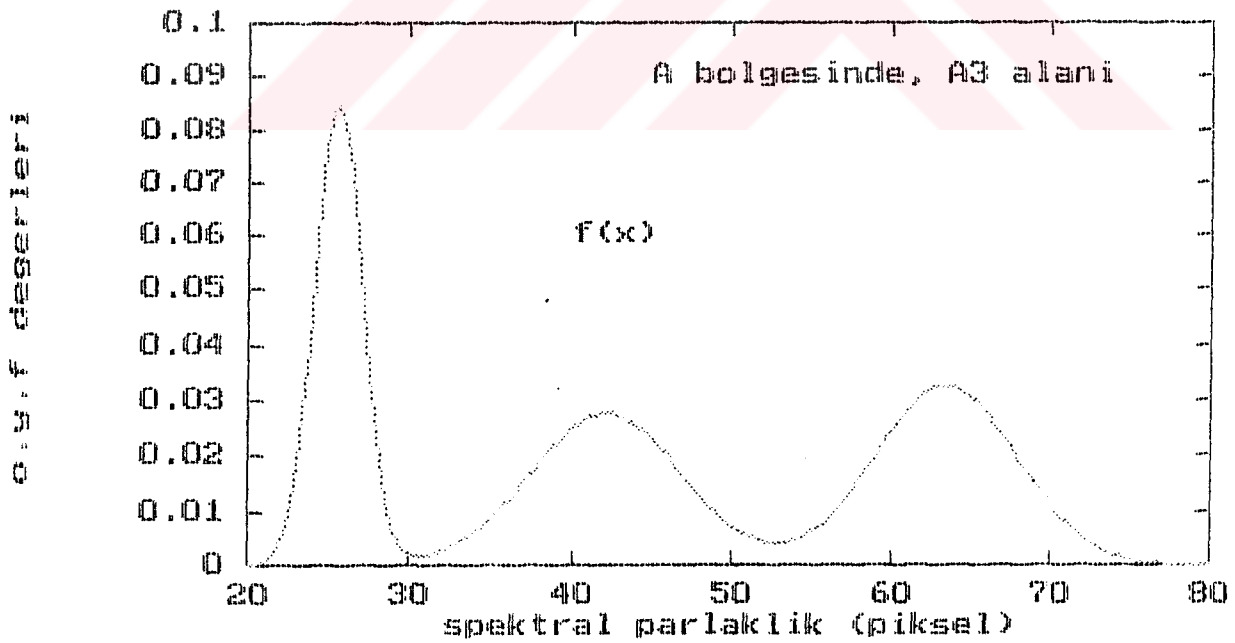
şekil 16. A_2 alanı için karma dağılım modelinin bileşenleri (bantları).



şekil 17. A_2 alanı için karma dağılım modeli.



Şekil 18. A_3 alanı için karma dağılım modelinin bileşenleri (bantları).



Şekil 19. A_3 alanı için karma dağılım modeli.

Şekiller iki kısım halinde gösterilmiştir. Birinci kısımda karma dağılım modelinin bileşenleri ve ikinci kısımda ise karma dağılım modelinin kendisi gösterilmiştir.

Şekil 14, şekil 16 ve şekil 18 'e yani karma dağılım modellerinin bileşenlerine göre:

A_1 ve A_2 alanlarının $bant_2$ ve $bant_3$ için spektral parlaklık (piksel) değerleri birbirine oldukça yakındır ve bu ikinci ve üçüncü bileşenlerin çakıştığını (yaklaşık olarak üst üste geldiğini) gösterir. $Bant_1$ için spektral parlaklık (piksel) değerleri, $bant_2$ ve $bant_3$ için spektral parlaklık (piksel) değerlerinden uzaktadır ve bu da birinci bileşenin diğerlerinden ayırık olduğunu gösterir. Yani karma dağılım modelinin olasılık yoğunluk fonksiyonu çift tepelidir (Şekil 15 ve şekil 17).

A_3 alanının tüm bantları için spektral parlaklık (piksel) değerleri birbirinden uzaktır ve bu da bileşenlerin birbirinden ayırık olduğunu gösterir. Yani karma dağılım modelinin olasılık yoğunluk fonksiyonu üç tepelidir (Şekil 19).

Bir sınıflandırma işlemi, güvenilir ve etkin olmalıdır. Bir sınıflandırma işlemi aynı zamanda optimum (minimum masrafla bölgeden maksimum miktarda bilgi çıkarma) olmalıdır. Bir çoklu-spektral sınıflandırma işleminde, sınıflandırma işleminin güvenilirliğini ve etkinliğini arttırmak için spektral bant sayısı ve spektral parlaklık (piksel) değerlerinin (örneklem hacmi) sayısı arttırıldığında sınıflandırma işleminin masrafı da artar.

Analizciler masrafı minimum yapmak için spektral bant sayısı ve spektral parlaklık (piksel) değerlerinin (örneklem hacmi) sayısı üzerinde bazı kısıtlamalar koymalıdır. Bu nedenle alanın

("sınıf") karma dağılım modellemesi için (en az) üç değişik spektral bant üzerinden spektral parlaklık (piksel) değerleri alınmıştır. Bununla birlikte, spektral bant sayısı üçten daha da fazla olabilir. Bantların parlaklık (piksel) değerlerinin sayısı veya örneklem (burada altgrup) hacminin minimum sayısı Van Genderen ve ark. (1978) ve Rosenfield ve ark. (1982) tarafından belirlenmiştir. Onların kriterlerine göre A_1 , A_2 ve A_3 alanlarının karma dağılım modellemesinde kullanılan örneklem hacimleri yeterlidir.

Bir bölgede bulunan bir alanın ("sınıfın") karma dağılım modellemesi, (en az) üç (veya daha fazla da olabilir) değişik spektral bant değerlerine göre (görüntü resimlerinin yardımıyla), yeni bir çoklu-spektral sınıflandırma yönteminin oluşturulmasına olanak sağlar.

Üç değişik spektral bant üzerinden alınan spektral parlaklık (piksel) değerleri kullanılarak bir alan ("sınıf") için önerilen karma dağılım modeli, üç normal dağılımın bir karmasıdır. Karma dağılım modelindeki rastgele değişken, alanın ("sınıfın") üç değişik spektral üzerinden alınan spektral parlaklık (piksel) değerlerini gösterir. "Böyle bir karma dağılım modellemesi nasıl yeni bir çoklu-sınıflandırma yönteminin oluşturulmasına olanak sağlar?" sorusunun cevabının mantığı temelde, bir "test sınıfı" için karma dağılım modelinin, ilgilenilen belirli sayıdaki "kontrol sınıfları" için karma dağılım modelleriyle karşılaştırılmasına dayanır.

Bu bölümde yeni bir çoklu-spektral sınıflandırma yöntemi ileriye sürülmemiştir. Bununla birlikte, "Bir bölgede bulunan

alanların ("sınıfların") sınıflandırılmasında, karma dağılım modelleri nasıl kullanılabilir?" sorusunun açıklaması, özel bir uygulama sahası üzerinde, örneğin ziraattaki uygulaması aşağıdaki gibidir:

i) Üzerinde çalışılacak bölge seçilir.

(Bu bölge, bir tarım bölgesi olsun. Bu tarım bölgesinde değişik boyutlarda (hacimlerde) parseller olabilir ve bu parseller değişik tipte bitki türü ya da türleri bulundurabilir, bazı parseller boş olabilir hatta bazı parseller tarımsal amaçlar için uygun olmayabilir, vb.)

ii) Bölgede ilgilenilen tipteki veya tiplerdeki ve istenilen sayıdaki parseller seçilir.

(İlgilenilen parsel türlerinin sayısı, bölgede bulunan değişik tipteki toplam parsel sayısından küçük veya eşit olmalıdır. Eğer uygulayıcı bölgedeki tüm parselleri sınıflandırmak istiyorsa ilgilenilen parsel tiplerinin sayısı, bölgede bulunan değişik tipteki toplam parsel sayısına eşit olmalıdır.)

iii) Bölgenin renkli görüntü resmi alınır ve bakılır.

(Bölgenin renkli görüntü resmini almak için (en az) üç değişik spektral bant yeterlidir. Bölgenin renkli görüntü resmi sadece bölgedeki parsellerin sınırlarının belirlenmesinde kullanılır.)

iv) Bölgenin renkli görüntü resmi üzerinde ilgilenilen tipteki parsellerin yerleri belirlenir.

(İlgilenilen tipteki parseller değişik türden olmalıdır.)

v) Üç değişik spektral bant üzerinden, bölgede ilgilenilen tipteki parsellerin herbiri için spektral parlaklık (piksel) değerleri alınır.

(Bölgede ilgilenilen tipteki parsellerin herbiri için (istatistiksel anlamda) rastgele olarak üç değişik spektral bant kullanılarak spektral parlaklık (piksel) değerleri alınır. Herbir spektral bant için en az 35 spektral parlaklık (piksel) değeri yeterlidir. Böylece her bir parsel için toplam 105 (minimum örneklem hacmi) spektral parlaklık (piksel) değeri alınmış olur.

Üç değişik spektral bantın (kanalların) seçimi uygulayıcıya bağlıdır.)

vi) Bölgede ilgilenilen tipteki parsellerin herbiri için karma dağılım modelleri oluşturulur.

(Bölgede ilgilenilen tipteki parseller birbirinden farklı olmalıdır. Bölgede ilgilenilen tipteki herbir parsel için karma dağılım modelinin herbiri bir "kontrol sınıfı" modeli olarak isimlendirilir. Yani "kontrol sınıfları" için karma dağılım modellerinin bir listesi oluşturulur.)

vii) Herbir "kontrol sınıfı" için bir kontrol kodu verilir ve tüm kontrol kodları, bölgenin renkli görüntü resmi üzerine yerleştirilir.

viii) Bölgede kalan, yani bölgenin renkli görüntü resmi üzerinde kontrol kodu yerleştirilmeyen, parsellerin herbiri bir "test sınıfı" olarak isimlendirilir.

ix) Herbir "test sınıfı" için bir test kodu verilir ve tüm test kodları, bölgenin renkli görüntü resmi üzerine yerleştirilir.

x) Üç değişik spektral bant üzerinden, herbir "test sınıfı" için (istatistiksel anlamda) rastgele olarak spektral parlaklık (piksel) değerleri alınır.

(Üç değişik spektral bantın (kanalın) seçimi, v 'deki gibi olmalıdır.)

xi) Bölgedeki herbir "test sınıfı" için karma dağılım modelleri oluşturulur.

(Yani "test sınıfları" için karma dağılım modellerinin bir listesi oluşturulur.)

Buraya kadar yapılan işlemlerde, "kontrol sınıfları" ve "test sınıfları" için karma dağılım modelleri oluşturuldu. Yani iki tane liste var: "kontrol sınıfları" için karma dağılım modellerinin (olasılık yoğunluk fonksiyonlarının) listesi ve "test sınıfları" için karma dağılım modellerinin (olasılık yoğunluk fonksiyonlarının) listesi.

xii) Bir "test sınıfı" için olasılık yoğunluk fonksiyonu (karma dağılım modeli) alınır ve o olasılık yoğunluk fonksiyonu ile "kontrol sınıfları" için karma dağılım modellerinin listesindeki herbir olasılık yoğunluk fonksiyonu arasındaki uzaklıklar ya da mesafeler tek tek hesaplanır.

(Bu amaç için iki olasılık yoğunluk fonksiyonu arasındaki uzaklığın ya da mesafenin ölçütü bir metrik (tablo 1) tanımlanmalıdır. Bu durumda, bir "test sınıfı" için olasılık yoğunluk fonksiyonu ile "kontrol sınıfları" için olasılık yoğunluk fonksiyonları arasındaki farkların ya da uzaklıkların bir listesi de oluşturulmuş olur.)

xiii) Bir "test sınıfı" hakkında farkların ya da uzaklıkların listesine bakarak bir karar verilir.

(Eğer "test sınıfı" ile karşılık gelen "kontrol sınıfı" arasındaki fark ya da uzaklık minimum ise "test sınıfı" yaklaşık olarak "kontrol sınıfı" ile aynı alandır. Diğer bir ifadeyle, bölgedeki aynı tip parsellerin olasılık yoğunluk fonksiyonları (karma dağılım modelleri) da yaklaşık olarak aynıdır.

"Test sınıfları" için karma dağılım modelleri listesindeki her bir "test sınıfı", yukarıdaki şekilde sınıflandırılabilir.

Yukarıdaki kurala göre en az bir parsel sınıflandırılmamış ise o parsel bölgede ilgilenilen tipte bir parsel değildir veya o parsel "kontrol sınıfları" için karma dağılım modelleri listesinde kapsanmayan ya da farklı tipte bir parsel anlamındadır (ii 'ye bakınız).

xiv) Karma dağılım modelleri kullanılarak yapılan sınıflandırma işleminin güvenilirliğini ve etkinliğini sınıflandırma işleminden sonra, sınıflandırılan en az bir (veya uygulayıcının seçimine göre daha fazla) "test sınıfını" alarak, bu "test sınıfının" 'doğru olarak' sınıflandırılıp sınıflandırılmadığı bölgede yerinde kontrol edilir.

Böyle bir sınıflandırmayla, tarımsal bir bölgedeki tüm parseller ya da ilgilenilen tipteki parseller sınıflandırılabilir.

Newton-Raphson iterasyon yöntemi; parametrelerin üzerinde herhangi bir kısıtlama konmaksızın üç normal dağılımın bir karmasındaki parametreleri momentler yöntemiyle tahmin etme problemine sayısal olarak çok iyi çözüm verir.

Üç normal dağılımın bir karması, bir bölgede bulunan bir alanın ("sınıfın") (en az) üç değişik spektral bant üzerinden alınan spektral parlaklık (piksel) değerleri için bir model olarak kullanılabilir. Bir bölgedeki bir alanın (en az) üç değişik spektral üzerinden alınan spektral parlaklık (piksel) değerleri için (renkli görüntü resmi yardımıyla) karma dağılım modeli, yeni bir çoklu-spektral sınıflandırma yöntemine olanak sağlayabilir. Karma dağılım modellerinin kullanılmasıyla örneğin tarımsal bir bölgedeki tüm parseller ya da ilgilenilen tipteki parseller sınıflandırılabilir. Böyle bir sınıflandırma, bir "test sınıfı" için karma dağılım modelinin ya da olasılık yoğunluk fonksiyonunun ilgilenilen belirli sayıdaki "kontrol sınıfları" için karma dağılım modelleriyle karşılaştırılmasına dayanır. Eğer "test sınıfı" ile karşılık gelen "kontrol sınıfı" arasındaki fark ya da uzaklık minimum ise "test sınıfı" yaklaşık olarak "kontrol sınıfı" ile aynı alandır. Diğer bir ifadeyle, bölgedeki aynı tip parsellerin (alanların) karma dağılım modelleri ya da olasılık yoğunluk fonksiyonları da yaklaşık olarak aynıdır.

5. BÖLÜM

GRUPLANDIRILMIŞ VERİLERİN k ($2 \leq k \leq 40$) BİLEŞENLİ NORMAL DAĞILIMLARININ BİR KARMASINDAKİ PARAMETRELERİN MAKSİMUM LIKELIHOOD YÖNTEMİYLE TAHMİN EDİLMESİ İÇİN BİR ALGORİTMA

5.1. Gruplandırılmış Verilerin k Bileşenli Normal Dağılımlarının Bir Karmasındaki Parametrelerin Tahmini Probleminin Tanımı

Kişisel bilgisayarlarda paket programların kullanılmasıyla yapılan uygulamalarda; karma dağılımların analizinde maksimum likelihood yöntemiyle, gruplandırılmış verilere 15 bileşene kadar ($2 \leq k \leq 15$) karma dağılım modelleri uydurulabilmektedir. Bununla birlikte 15 bileşenden daha fazla bileşene gereksinim duyulan birçok durum vardır. Örneğin böyle bir durum, yani 15 bileşenden daha fazla bileşene gereksinim duyulan durum, moleküler biyolojide ortaya çıkar (Ravel 1973, s.245). Bir normal veya patalojik insan serumunda 20 'den fazla serum proteini vardır (Race 1973, böl.5A). Herbir serum proteini bir normal dağılıma sahip olup; bir normal veya patolojik insan serumundaki tüm serum proteinlerinin dağılımı, normal dağılımların bir karmasıdır. Bu durumda, karma dağılım modelinde 15 bileşenden daha fazla bileşen kullanılmalıdır. Böyle durumlarda, karma dağılım modellerinin analizleri için kullanılan ve iyi bilinen bilgisayar paket programları yetersiz kalmaktadır.

k bileşenli karma dağılımlarda parametreleri tahmin etmek için çok kullanılan ve iyi bilinen tahmin yöntemlerinden biri maksimum likelihood yöntemidir (Titterington ve ark. 1985, s.82).

Bu bölümde; gruplandırılmış verilerin k ($2 \leq k \leq 40$) bileşenli normal dağılımlarının bir karmasındaki parametrelerin üzerlerine hiçbir kısıtlama koymaksızın maksimum likelihood yöntemiyle tahmin edilmesi için bir hesaplama algoritması oluşturulmuştur.

Macdonald (1991), maksimum likelihood yöntemi için optimizasyon yöntemleri olan; Newton yöntemlerini (Johnson ve Riess 1982, s.194) (Buchanan ve Turner 1992, s.389), EM algoritmasını ve genel amaçlı optimizasyon yöntemlerini karşılaştırdı. Macdonald 'ın karşılaştırmalarının sonuçlarına göre:

Newton yöntemlerinde iterasyonlar ya çok hızlı biçimde bir çözüme yakınsar ya da iterasyonlar bir çözüme yakınsamaz. Newton yöntemlerinde iterasyonların bir çözüme yakınsama şansını büyük ölçüde arttırmak için düzenlemeler yapılmıştır. Bu düzenlemelerde, her bir iterasyonda iki özellik test edilir. Bu özellikler,

a) Her bir iterasyondan sonra elde edilen değerler kabul edilebilir değerler mi?

b) Her bir iterasyondaki değerler, bir önceki iterasyondaki değerlere göre daha da geliştirildi mi?

şeklindedir. Eğer özelliklerden biri herhangi bir iterasyonda sağlanmazsa bir önceki iterasyondaki değerler, her iki özelliği sağlayana kadar düzeltilir. Newton yöntemlerinde türevlerin açık olarak hesaplanması da karmaşık ve sıkıntılıdır.

Dempster ve arkadaşlarının genel amaçlar için geliştirdikleri ve son yıllarda bir çok alanda yaygın kullanılan EM (Expectation & Minimization) algoritması (Dempster ve ark., 1977) iki avantaja sahiptir. Bu avantajlardan birincisi; EM algoritmasının, kayıp veri anlamındaki bir verinin hangi bileşen grubunda olduğunun bilinmediği durumlarda iyi bir teorik yoruma olanak sağlamasıdır. EM algoritmasının avantajlarından ikincisi; Herbir iterasyondan sonra elde edilen değerlerin kabul edilebilir olmasıdır. EM algoritmasının tek dezavantajı, EM algoritmasında iterasyonların yakınsamasının çok yavaş olmasıdır.

Genel amaçlı optimizasyon yöntemleri, özel amaçlı yöntemlerden daha az etkilidir. Örneğin bazı genel amaçlı optimizasyon yöntemleri (O'Neill, 1971) karma dağılım modelleri için iyi çalışmaz ya da uygun değildir. Sayısal algoritmalar grup kütüphanesi (Numerical Algorithms Group Library - NAGLIB) 'de olduğu gibi bazıları çok iyi ya da çok uygun olabilir ama onlarında çoğu büyük miktarlarda hafıza gereksinimi duyduklarından kişisel bilgisayarlarda uygulaması çok zordur.

Render ve Walker (1984); teorik detaylara da inerek maksimum likelihood yöntemi ile karma dağılım modellerinin olasılık yoğunluk fonksiyonlarını incelediler. Render ve Walker; maksimum likelihood yöntemiyle birlikte kullanılan ve bölüm 1.2.3 'te maksimum likelihood yöntemi başlığı altında açıklanan, iki tip algoritmayı karşılaştırdılar.

İki tip algoritmayı karşılaştırırken Render ve Walker 'in gözönünde bulundurdıkları kriterler:

- i) Yöntemlerin yakınsama hızı

ii) Yöntemler için gerekli işlemlerin uzunluğu ve bilgileri depolamak için gerekli bilgisayar hafızası

iii) Yöntemlerin pratikte etkinliği ve güvenilirliği şeklindedir.

Burada "yöntemler" ile kastedilen; maksimum likelihood yönteminin, 1. tip algoritmalarla veya 2. tip algoritmayla birlikte kullanılmasıdır.

Bu kriterlere göre iki tip algoritma karşılaştırıldığında;

(i) kriterine göre: 1. tip algoritmalarda yerel yakınsama (local convergence) ve 2. tip algortmada genel yakınsama (global convergence) özellikleri vardır. 1. tip algoritmalarda yakınsama hızı; Standart Newton-Raphson algoritmasında karesel, diğerlerinde doğrusaldır ve bazıları kısıtlamalar altında süper doğrusal yapılabilmektedir (Buchanan ve Turner 1992, s.398). 2.tip algortmada yani EM algoritmasında yakınsama hızı doğrusaldır ve pratikte sık karşılaşılan basit problemlerde dahi çıldırtacak ölçüde yavaştır.

(ii) kriterine göre: 1. tip algoritmalar, 2. tip algortmaya göre daha çok işlem gerektirir ve bilgileri depolamak için daha fazla bilgisayar hafızasına gereksinim duyar.

(iii) kriterine göre ise: yöntemlerin pratikte etkinliği açısından; 1. tip algoritmaların lineer olmayan denklem sisteminin boyutları büyüdüğünde etkinliği azalır ve hatta belirli sınırlardan sonra etkinliği kalmaz. Yöntemlerin güvenilirliği açısından; iki tip yöntem arasında pek fark olmamakla beraber, uygun başlangıç değerleriyle 1. tip algoritmalarındaki iterasyonlar tek bir çözüme yakınsar (Buchanan ve Turner 1992,

s.375) ve 2. tip algoritmadaki iterasyonlar bazı durumlarda bir çözüme yakınsamaz (Mclachlan ve Basford 1988, s.11).

Gruplandırılmamış verilere normal dağılımların karmalarını uydurmak için EM algoritması, Mclachlan ve Jones (1988) tarafından bilgisayara programlanmıştır. Gruplandırılmış verilere normal dağılımların karmalarını uydurmak için EM algoritmasının programlanması ise Jones ve Mclachlan (1990) tarafından yapılmıştır. Karma dağılım modellerinin analizi için oluşturulan ve kullanılan diğer bir bilgisayar paket programı ise MIX 3.1 (Ichthus Data Systems, 1993) dir. MIX 3.1 bilgisayar paket programı ilk defa Macdonald ve Pitcher (1979) tarafından turna balığı uzunluklarının (yaşa göre) frekans dağılımlarının analizi için (tablo 8) geliştirilmiş olup, gruplandırılmış verilere maksimum likelihood yöntemiyle birlikte quasi-Newton algoritmalarını kullanarak 15 bileşene ($2 \leq k \leq 15$) kadar karma dağılım modelleri uydurabilmektedir.

Bu bölümde parametrelerinin üzerinde hiçbir kısıtlama koymaksızın; gruplandırılmış verilerin k bileşenli ($2 \leq k \leq 40$) normal dağılımlarının bir karmasındaki parametrelerin, maksimum likelihood yöntemiyle birlikte standart Newton-Raphson algoritmasını kullanarak, tahmin edilmesi için bir hesaplama algoritması oluşturulmuştur.

Maksimum likelihood yöntemiyle birlikte standart Newton-Raphson algoritmasının kullanılmasının en önemli nedeni, standart Newton-Raphson algoritmasının yakınsama hızının karesel olmasıdır.

Karma dağılım modelinde bileşenlerin sayısı k arttığında, maksimum likelihood yöntemi için lineer olmayan denklem sisteminin boyutu da artmaktadır. Bu durumda da parametrelerin tahmini için gerekli iterasyonların sayısı çok önemli olmaktadır. Veri gruplandırılmış olduğundan; standart Newton-Raphson algoritmasının yerel yakınsama (local convergence) özelliğinden kaynaklanabilecek problemler, standart Newton-Raphson algoritmasının iterasyonları için uygun başlangıç değerleri (tahminleri) alınarak ya da seçilerek ortadan kaldırılmıştır.

Gruplandırılmış verilerin k bileşenli ($2 \leq k \leq 40$) normal dağılımlarının bir karmasındaki parametrelerin üzerlerine hiçbir kısıtlama koymaksızın, maksimum likelihood yöntemiyle birlikte standart Newton-Raphson algoritmasını kullanarak tahmin etmek için standart Newton-Raphson algoritması, parçalanmış matrisler (Graybill 1983, s.183) cinsinden ifade edilmiştir.

Gruplandırılmış verilerin k bileşenli ($2 \leq k \leq 40$) normal dağılımlarının karmalarını bilgisayarda direk olarak programlamak (bilgilerin tamamını aynı anda depolamak için yeterli miktarda bilgisayar aktif hafıza depolama alanı olmadığından) mümkün değildir. Bu nedenledir ki karma dağılım modelleri sadece $2 \leq k \leq 15$ için bilgisayarda, örneğin MIX 3.1 bilgisayar paket programı, programlanabilmiştir.

Gruplandırılmış verilerin k bileşenli ($2 \leq k \leq 40$) normal dağılımlarının karmalarını bilgisayarda programlamak için bilgilerin tamamını aynı anda bilgisayarın aktif hafıza depolama alanında tutmak yerine sadece o anda işlemler için gerekli olan parçaları bilgisayarın aktif hafıza depolama alanında

tutulabilir. Bu amaçla gruplandırılmış verilerin k bileşenli ($2 \leq k \leq 40$) normal dağılımlarının bir karmasındaki parametreleri, üzerlerine hiçbir kısıtlama koymaksızın, tahmin etmek için maksimum likelihood yöntemi kullanıldığında elde edilen loglikelihood denklemlerine ya da normal denklemlere standart Newton-Raphson algoritması uygulandığında ortaya çıkan lineer denklem sisteminin Hessian matrisi, parametrelerin oluşturduğu 3×3 tipindeki blok yapıya göre parçalanmış matris ya da blok elemanlar şeklinde ifade edilir. Böylece de standart Newton-Raphson algoritması, parçalanmış matrisler cinsinden ifade edilmiş olur.

5.2. k Bileşenli Normal Karma Dağılım Modeli

k bileşenli normal dağılımın bir karmasının olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x; p_1, \dots, p_k, \mu_1, \dots, \mu_k, \sigma_1, \dots, \sigma_k) = \sum_{i=1}^k p_i f_i(x; \mu_i, \sigma_i) \quad (5.2.1)$$

$$-\infty < x < +\infty$$

$$i=1, \dots, k \text{ için } 0 < p_i < 1, \quad -\infty < \mu_i < +\infty, \quad 0 < \sigma_i$$

şeklindedir.

Burada, k belirli ($0 \leq k \leq 40$) olmak üzere bileşen sayısını;

$$i=1, \dots, k \text{ için } p_i \text{'ler, } \sum_{i=1}^k p_i = 1 \text{ olacak şekilde karma}$$

oranlarını ve $f_i(x; \mu_i, \sigma_i)$ 'ler (1.2.17) 'deki gibi olmak üzere karma dağılım modelinin, bileşenlerinin normal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını göstermektedir.

(5.2.1) 'deki karma dağılım modelinde k bileşen vardır. Herbir bileşen kendi başına bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere herbiri örneklemin bir altgrubuna karşılık gelmektedir. Ayrıca (5.2.1) 'deki karma dağılım modelindeki bileşenler; yerleşim ya da konum parametreleri, ortalamalarına göre $-\infty < \mu_1 < \dots < \mu_k < +\infty$ olacak şekilde düzenlenmiştir.

(5.2.1) 'deki karma dağılım modelindeki parametreler, (1.1.3) 'deki gibi Φ parametre vektörü ile gösterilsin. Yani,

$$\Phi = (p, \theta)' \quad (5.2.2)$$

veya

$$\Phi = (p, \mu, \sigma)' \quad (5.2.3)$$

dir.

(5.2.3) 'de belirli bir k ($0 \leq k \leq 40$) için; $\theta = (\mu, \sigma)'$, $p = (p_1, \dots, p_{k-1})'$ için $\Phi_1 = (\phi_1, \dots, \phi_{k-1})'$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)'$ için $\Phi_2 = (\phi_k, \dots, \phi_{2k-1})'$, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)'$, için $\Phi_3 = (\phi_{2k}, \dots, \phi_{3k-1})'$ kullanıldığında,

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)' \quad (5.2.4)$$

veya

$$\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_{3k-1})' \quad (5.2.5)$$

şeklinde de gösterilebilir.

5.3. k Bileşenli Normal Karma Dağılım Modelinin Loglikelihood fonksiyonunun oluşturulması

Veriler gruplandırılmış ve karma dağılım modelindeki bileşen sayısı k ($2 \leq k \leq 40$) olsun.

(5.2.1) 'deki karma dağılım modelinde; $i=1, \dots, k$ için p_i , μ_i ve σ_i parametreleri maksimum likelihood yöntemi kullanılarak tahmin edilecektir.

$x_1, \dots, x_n$ birbirinden bağımsız olmak üzere herbiri (5.2.1) 'deki olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip n hacimlik rastgele bir örneklem olsun. Bu durumda, $x_1, \dots, x_n$ 'nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$f(x_1, \dots, x_n; \Phi) = f(x_1; \Phi) f(x_2; \Phi) \dots f(x_n; \Phi) \quad (5.3.1)$$

şeklindedir.

(5.3.1) 'deki ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu,

$$l(\Phi) = f(x_1, \dots, x_n; \Phi) \quad (5.3.2)$$

ile gösterelim.

$$l(\Phi) = \prod_{j=1}^n f(x_j; \Phi) \quad (5.3.3)$$

dir. Yani,

$$l(\Phi) = \prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^k p_i f_i(x_j; \mu_i, \sigma_i) \right) \quad (5.3.4)$$

şeklindedir.

(5.3.4) 'de, eşitliğin her iki tarafının doğal logaritması alındığında,

$$L(\Phi) = \log l(\Phi) = \log \left\{ \prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^k p_i f_i(x_j; \mu_i, \sigma_i) \right) \right\} \quad (5.3.5)$$

bulunur. Doğal logaritmanın özellikleri kullanılarak, k bileşenli karma dağılım modeli için loglikelihood fonksiyon,

$$L(\Phi) = \sum_{j=1}^n \log \left\{ \sum_{i=1}^k p_i f_i(x_j; \mu_i, \sigma_i) \right\} \quad (5.3.6)$$

olarak elde edilir.

5.4. k Bileşenli Normal Karma Dağılım Modeli İçin Loglikelihood Denklemlerinin Oluşturulması

Maksimum likelihood yöntemi için loglikelihood denklemler ya da normal denklemler olarak da adlandırılan bir lineer olmayan denklem sistemini oluşturmak için, (5.3.6) 'daki loglikelihood fonksiyonunun p_i , μ_i ve σ_i parametrelerine göre kısmi türevleri alınır ve sıfıra eşitlenir. Bu durumda loglikelihood ya da normal denklemler,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\Phi)}{\partial p_i} &= \sum_{j=1}^n \frac{\frac{\partial}{\partial p_i} \left(\sum_{i=1}^k p_i f_i(x_j; \mu_i, \sigma_i) \right)}{\sum_{i=1}^k p_i f_i(x_j; \mu_i, \sigma_i)} = 0 \\ \frac{\partial L(\Phi)}{\partial \mu_i} &= \sum_{j=1}^n \frac{\frac{\partial}{\partial \mu_i} \left(\sum_{i=1}^k p_i f_i(x_j; \mu_i, \sigma_i) \right)}{\sum_{i=1}^k p_i f_i(x_j; \mu_i, \sigma_i)} = 0 \\ \frac{\partial L(\Phi)}{\partial \sigma_i} &= \sum_{j=1}^n \frac{\frac{\partial}{\partial \sigma_i} \left(\sum_{i=1}^k p_i f_i(x_j; \mu_i, \sigma_i) \right)}{\sum_{i=1}^k p_i f_i(x_j; \mu_i, \sigma_i)} = 0 \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

şeklinde oluşturulur.

k , (tamsayı ve $2 \leq k \leq 40$) belirli olmak üzere karma dağılım modelinde bulunan bileşen sayını gösterebilir. (5.2.1)'deki olasılık yoğunluk fonksiyonundaki parametreler $p_1, \dots, p_{k-1}$, $\mu_1, \dots, \mu_k$ ve $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ olmak üzere tahmin edilecek $3k-1$ tane parametre vardır.

Bu nedenle, (5.4.1) 'deki loglikelihood denklemler ya da normal denklemler kullanılarak $r=1, \dots, 3k-1$ için $p_1, \dots, p_{k-1}$, $\mu_1, \dots, \mu_k$ ve $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ parametrelerine bağlı, $3k-1$ tane $g_r(\Phi)$ fonksiyonu tanımlanabilir.

$r=1, \dots, 3k-1$ için Φ parametresine bağlı $g_r(\Phi)$ fonksiyonları,

$$\frac{\partial L(\Phi)}{\partial p_i} = g_{i+k-1}(\Phi) = \sum_{j=1}^n \frac{f_i(x_j; \theta_i)}{p_i f_1(x_j; \theta_1) + \dots + p_k f_k(x_j; \theta_k)} = 0; \quad i=1, \dots, k-1$$

$$\frac{\partial L(\Phi)}{\partial \mu_i} = g_{i+2k-1}(\Phi) = \sum_{j=1}^n \frac{p_i \frac{\partial}{\partial \mu_i} (f_i(x_j; \theta_i))}{p_i f_1(x_j; \theta_1) + \dots + p_k f_k(x_j; \theta_k)} = 0; \quad i=1, \dots, k \quad (5.4.2)$$

$$\frac{\partial L(\Phi)}{\partial \sigma_i} = g_{i+3k-1}(\Phi) = \sum_{j=1}^n \frac{p_i \frac{\partial}{\partial \sigma_i} (f_i(x_j; \theta_i))}{p_i f_1(x_j; \theta_1) + \dots + p_k f_k(x_j; \theta_k)} = 0; \quad i=1, \dots, k$$

şeklinde dir.

Diğer bir ifadeyle, $r=1, \dots, 3k-1$ için $p_1, \dots, p_{k-1}$, $\mu_1, \dots, \mu_k$ ve $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ parametrelerine bağlı $g_r(\Phi)$ fonksiyonları,

$$g_1(p_1, \dots, p_{k-1}, \mu_1, \dots, \mu_k, \sigma_1, \dots, \sigma_k) = 0$$

$$g_2(p_1, \dots, p_{k-1}, \mu_1, \dots, \mu_k, \sigma_1, \dots, \sigma_k) = 0$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$g_{3k-1}(p_1, \dots, p_{k-1}, \mu_1, \dots, \mu_k, \sigma_1, \dots, \sigma_k) = 0 \quad (5.4.3)$$

dir.

(5.4.3) 'deki lineer olmayan denklem sistemi, k ($2 \leq k \leq 40$) bileşenli normal karma dağılım modelindeki parametrelerin tahmininin maksimum likelihood yöntemiyle hesaplanması için oluşturulan loglikelihood denklemler ya da normal denklemlerdir.

(5.4.3) 'deki lineer olmayan denklem sistemi aynı zamanda, k ($2 \leq k \leq 40$) bileşenli normal dağılımların bir karmasındaki parametrelerin tahmininin maksimum likelihood yöntemiyle hesaplanması için standart Newton-Raphson algoritması uygulanacak olan denklem sistemidir.

Uygun başlangıç değerleriyle (tahminleriyle) standart Newton-Raphson algoritması tek bir çözüme karesel olarak yakınsar (Carnahan ve ark. 1969, s.319).

5.5. k Bileşenli Normal Karma Dağılım Modeli İçin Oluşturulan Loglikelihood Denklemlerine Standart Newton-Raphson Algoritmasını Uygulamak İçin Uygun Başlangıç Değerlerinin Seçimi

Veriler gruplandırılmış olduğundan örneklemin altgruplarının ortalaması ve standart sapması; modeldeki bileşenlerin, ki herbiri bir altgrubu temsil etmektedir, $\mu_1, \dots, \mu_k$ ve $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ parametreleri için standart Newton-Raphson algoritmasında uygun başlangıç değeri yada tahminleri olarak alınabilir. $\mu_{10}, \dots, \mu_{k0}$ ve $\sigma_{10}, \dots, \sigma_{k0}$ değerleri; sırasıyla $\mu_1, \dots, \mu_k$ ve $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ parametreleri için uygun başlangıç değerleri (tahminleri) olsun.

Karma oranları $p_1, \dots, p_k$ parametreleri için standart Newton-Raphson algoritmasında uygun başlangıç değerleri (tahminleri) olarak; olasılık yoğunluk fonksiyonunun tanımından

kaynaklanan $0 < p_i < 1$ ve $\sum_{i=1}^k p_i = 1$ kısıtlamaları da gözönünde

bulundurularak, uygulamalarda en ekonomik ve en pratik olarak, $i=1, \dots, k$ için $p_i = 1/k$ kriteri kullanılabilir.

5.6. k Bileşenli Normal Karma Dağılım Modeli İçin Oluşturulan Loglikelihood Denklemlerine Standart Newton-Raphson Algoritmasının Uygulanması

(5.4.3) 'deki lineer olmayan denklem sisteminin çözümünü hesaplamak ve parametre tahminlerini elde etmek için standart Newton-Raphson algoritması uygulayacağız.

(5.2.1) 'deki k ($0 \leq k \leq 40$) bileşenli normal karma dağılım modelinde üç tip parametre grubu vardır. Bu parametre grupları: $p_1, \dots, p_{k-1}$ karma oranlarından, $\mu_1, \dots, \mu_k$ ortalamalardan ve $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ standart sapmalardan oluşur.

(5.4.3) 'deki lineer olmayan denklem sisteminde $r=1, \dots, 3k-1$ için $g_r(\Phi)$ fonksiyonları, $p_1, \dots, p_{k-1}$ karma oranları, $\mu_1, \dots, \mu_k$ ortalamalar ve $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ standart sapmalar parametrelerine bağlı fonksiyonlardır. Lineer olmayan denklem sisteminin çözümünü hesaplamak için standart Newton-Raphson algoritması uygulandığında bu parametreler, değişkenler olarak işlem görür. Bu nedenle aşağıdaki tanımlamalara gereksinim vardır.

$p=(p_1, p_2, \dots, p_{k-1})'$ parametresi,

$$Y_1=(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})' \quad (5.6.1)$$

değişkeniyle,

$\mu=(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ parametresi,

$$Y_2=(y_k, y_{k+1}, \dots, y_{2k-1})' \quad (5.6.2)$$

değişkeniyle ve

$\sigma=(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$ parametresi,

$$Y_3=(y_{2k}, y_{2k+1}, \dots, y_{3k-1})' \quad (5.6.3)$$

değişkeniyle gösterilsin. Bu durumda (5.2.4) ve (5.2.5) 'deki tanımlamalar, değişkenler cinsinden

$$Y=(Y_1, Y_2, Y_3)' \quad (5.6.4)$$

veya

$$Y=(y_1, y_2, \dots, y_{3k-1})' \quad (5.6.5)$$

şeklinde yazılabilir.

(5.6.4) ve (5.6.5) 'deki Y değişkenindeki değişim,

$$\Delta Y=(\Delta Y_1, \Delta Y_2, \Delta Y_3)' \quad (5.6.6)$$

veya

$$\Delta Y=(\Delta y_1, \Delta y_2, \dots, \Delta y_{3k-1})' \quad (5.6.7)$$

olarak tanımlayalım.

(5.6.4) ve (5.6.5) 'deki Y değişkeni için başlangıç değerleri,

$$Y_0=(Y_{10}, Y_{20}, Y_{30})' \quad (5.6.8)$$

veya

$$Y_0=(y_{10}, y_{20}, \dots, y_{3k-10})' \quad (5.6.9)$$

ile gösterelim. Ayrıca,

$$G_1(Y)=(g_1(Y), g_2(Y), \dots, g_{k-1}(Y))' \quad (5.6.10)$$

$$G_2(Y)=(g_k(Y), g_{k+1}(Y), \dots, g_{2k-1}(Y))' \quad (5.6.11)$$

$$G_3(Y)=(g_{2k}(Y), g_{2k+1}(Y), \dots, g_{3k-1}(Y))' \quad (5.6.12)$$

olarak tanımlayalım. Yani,

$$G(Y)=(G_1(Y), G_2(Y), G_3(Y))'$$

veya

(5.6.13)

$$G(Y)=(g_1(Y), g_2(Y), \dots, g_{3k-1}(Y))'$$

şeklinde alalım.

$$g_{ij}(Y) = \frac{\partial g_i(Y)}{\partial y_j} \quad 1 \leq i \leq 3k-1, \quad 1 \leq j \leq 3k-1 \quad (5.6.14)$$

ve

$$H(Y) = (g_{ij}(Y)) \quad 1 \leq i \leq 3k-1, \quad 1 \leq j \leq 3k-1 \quad (5.6.15)$$

olarak tanımlayalım.

$$D_Y L(Y) = G(Y) \quad (5.6.16)$$

$$D^2_Y L(Y) = H(Y) \quad (5.6.17)$$

$$I(Y) = -(1/n) E[H(Y)] \quad (5.6.18)$$

şeklinde de tanımlanabilir.

Burada $D_Y L(Y)$ ve $D^2_Y L(Y)$, (5.3.6) 'daki loglikelihood fonksiyonunun Y değişkenine göre sırasıyla birinci ve ikinci türevleridir.

(5.6.17) 'deki $H(Y)$ matrisine sayısal analizde Hessian matrisi (Render ve Walker, 1984), istatistikte ise karma dağılım modelleri için bilgi matrisi (Mclachlan ve Basford 1988, s.19) denilmektedir.

(5.6.18) 'deki $I(Y)$ matrisine ise istatistikte, Fisher 'in bilgi matrisi (Titterton ve ark. 1985, s.42) denilmektedir.

m iterasyon sayısını ve $Y_m = Y_{(m)}$, Y değişkeninin m . iterasyondaki değerini gösterebilir.

(5.4.3) 'deki lineer olmayan denklem sistemine standart Newton-Raphson algoritması uygulandığında,

$$H(Y) \quad Y = -G(Y) \quad (5.6.19)$$

şeklinde bir lineer denklem sistemi elde edilir.

(5.6.19) 'da: $H(Y)$ katsayı (Hessian) matrisi, tersi bulunan ve $(3k-1) \times (3k-1)$ tipinde simetrik bir matristir. Y , (5.6.6) veya (5.6.7) 'deki gibi olup, $(3k-1) \times 1$ tipinde bilinmeyenlerin

bir vektördür. $G(Y)$, (5.6.13) 'deki gibi olup, $(3k-1) \times 1$ tipinde bilinenlerin bir vektördür.

(5.6.19) 'daki lineer denklem sisteminin çözümü,

$$Y_{(m+1)} = Y_{(m)} + H(Y_{(m)})^{-1}(-G(Y_{(m)})) \quad (5.6.20)$$

bağıntısıyla hesaplanır.

Bu durumda (5.6.19) 'daki lineer denklem sisteminin çözümü için standart Newton-Raphson algoritmasının adımları aşağıdaki gibidir:

1. Adım: $m=0$ al ve iterasyonların yakınsama kriter(ler)i için ϵ_1 (ve/veya ϵ_2) değer(ler)ini seç. ϵ_1 (ve/veya ϵ_2) değer(ler)i yeterince (istenildiği kadar) küçük olmalıdır. Y değişkeni için iterasyona başlangıç değeri olarak $Y_m = Y_{(m)}$ değerini al. Bu adımda, $Y_m = Y_{(m)}$ değeri olarak bölüm 5.5 'de önerilen yöntemle elde edilen değer kullanılabilir.

2. Adım: $G(Y_{(m)})$ değerini hesapla.

$$G(Y_{(m)}) = (g_1(Y_{(m)}), g_2(Y_{(m)}), \dots, g_{3k-1}(Y_{(m)}))'$$

3. Adım: Eğer $G(Y_{(m)}) \leq \epsilon_1$ ise $Y_{(m)}$ değerini bir çözüm olarak al ve iterasyonları durdur.

4. Adım: $\Delta Y_{(m)}$ değerini hesapla. $\Delta Y_{(m)}$ değeri,

$$\Delta Y_{(m)} = H(Y_{(m)})^{-1}(-G(Y_{(m)})) \quad (5.6.21)$$

bağıntısı kullanılarak hesaplanır.

5. Adım: Eğer $\Delta Y_{(m)} \leq \epsilon_2$ ise $Y_{(m)}$ değerini bir çözüm olarak al ve iterasyonları durdur.

6. Adım: $m=m+1$ al ve

$$Y_{(m)} = Y_{(m-1)} + \Delta Y_{(m-1)} \quad (5.6.22)$$

değerini hesapla.

7. Adım: 2. adıma git.

Tablo 34. IBM/PC AT (486 DX) tipindeki bilgisayarlarda aynı anda aktif hafızada kullanılabilecek (elemanları çift hassasiyetli sayılar olan) matris sayıları ve matris boyutları.

Matris sayısı	Matrisin boyutu	Matrisin elaman sayısı	Aktif hafızada byte olarak kapladığı alan	Aktif hafızada byte olarak kapladığı toplam alan
03	89	7921	63368	190104
04	78	6084	48672	194688
05	69	4761	38088	190440
06	63	3969	31752	190512
07	58	3364	26912	188384
08	54	2916	23328	186624
09	52	2704	21632	194688
10	49	2401	19208	192080
11	46	2116	16928	186208
12	44	1936	15488	185856
13	42	1764	14112	183456
14	41	1681	13448	188272
15	39	1521	12168	182520
16	38	1444	11552	184832
17	37	1369	10952	186184
18	36	1296	10368	186624
19	35	1225	9800	186200
20	34	1156	9248	184960
21	33	1089	8712	182952
22	32	1024	8192	180224
23	32	1024	8192	188416
24	31	961	7688	184512
25	30	900	7200	180000

(5.2.1) 'deki k ($2 \leq k \leq 40$) bileşenli karma dağılım modelinde bileşen sayısı $k=40$ olduğunda, (5.6.19) 'daki lineer denklem sisteminin $H(Y)$ katsayı (Hessian) matrisinin boyutu 119×119 tipindedir. Bu üzerinde çalışılan boyutça büyük bir matristir.

Tablo 34 'den de görüldüğü gibi 119×119 tipindeki $H(Y)$ katsayı (Hessian) matrisiyle direk olarak çalışmak ve kullanmak mümkün değildir.

Bununla birlikte $H(Y)$ katsayı (Hessian) matrisi, alt blok matrislere parçalanarak üzerinde işlem yapılabilir hale getirilir. Bu durumda $H(Y)$ katsayı (Hessian) matrisinin tümü yerine parçaları gerektiği yerlerde işlem için kullanılmış olacağından bilgisayar aktif hafıza gereksinimi problemi $0 \leq k \leq 40$ için ortadan kaldırılmış olur.

(5.2.1) 'deki k ($2 \leq k \leq 40$) bileşenli karma dağılım modelinde bulunan üç tip parametre grubu, $H(Y)$ katsayı (Hessian) matrisinde alt bloklar oluşturur. $H(Y)$ katsayı (Hessian) matrisinin elemanlarına bakıldığında bu bloklar kolayca görülebilir.

$H(Y)$ katsayı (Hessian) matrisini aşağıdaki gibi,

$$H(Y) = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B' & D & E \\ C' & E' & F \end{bmatrix} \quad (5.6.21)$$

alt blok matrislere parçalayalım. (5.6.21) 'deki parçalanmada alt blok matrislerin en büyük boyutu $k \times k$, yani 40×40 tipindedir. Tablo 34 'den de görüleceği gibi aynı anda bilgisayarın aktif hafızasında 15 tane 40×40 tipinde matris kullanılabilir. Örneğin Minitab 8.2 istatistik paket programı (Minitab Statistical Software, 1991), bilgisayarın aktif hafızasında aynı

anda kullanım için 15 tane matris depolayabilmektedir. Minitab 8.2 istatistik paket programında çalışılabilecek ya da kullanılabilecek matrisin boyutu en fazla 40X40 tipindedir.

(5.6.21) 'deki $H(Y)$ katsayı (Hessian) matrisinin A, D ve F alt blok matrisleri de tersleri bulunan, simetrik matrislerdir.

(5.6.20) 'deki bağıntıdan da görüldüğü gibi, $H(Y)$ katsayı (Hessian) matrisinin tersine gereksinim vardır.

$H(Y)$ katsayı (Hessian) matrisi, (5.6.21) 'deki şekliyle alınsın. $H(Y)$ katsayı (Hessian) matrisinin tersi de,

$$H(Y)^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ B_1' & D_1 & E_1 \\ C_1' & E_1' & F_1 \end{bmatrix} \quad (5.6.22)$$

şeklinde alt blok matrislerden oluşur.

(5.6.22) 'deki $H(Y)^{-1}$ matrisinin alt blok matrislerinin boyutları, (5.6.21) 'deki $H(Y)$ katsayı (Hessian) matrisinin alt blok matrislerinin boyutlarıyla karşılıklı olarak aynıdır.

5.7. $H(Y)^{-1}$ Matrisinin Alt Blok Matris Elemanlarının $H(Y)$ Matrisinin Alt Blok Elemanları Cinsinden Hesaplanması ve Standart Newton-Raphson Algoritmasının Parçalanmış Matrisler Cinsinden İfade Edilmesi

$$H(Y) \Delta Y = -G(Y) \quad (5.7.1)$$

lineer denklem sisteminin, (5.6.15) 'deki $H(Y)$ katsayı (Hessian) matrisini,

$$H(Y) = \begin{bmatrix} h_{11}(Y) & h_{12}(Y) & h_{13}(Y) \\ h_{21}(Y) & h_{22}(Y) & h_{23}(Y) \\ h_{31}(Y) & h_{32}(Y) & h_{33}(Y) \end{bmatrix} \quad (5.7.2)$$

şeklinde yazalım. (5.7.2) 'deki $H(Y)$ katsayı (Hessian) matrisi $(3k-1) \times (3k-1)$ tipindedir.

(5.7.2) 'deki $H(Y)$ katsayı (Hessian) matrisinin alt blok matrisleri, yani $1 \leq i \leq 3k-1$ ve $1 \leq j \leq 3k-1$ için $g_{ij}(Y)$ 'ler, (5.6.14) 'deki gibi olmak üzere belirli bir k ($2 \leq k \leq 40$) için,

$$h_{11}(Y) = (g_{ij}(Y)) \quad i=1, \dots, k-1 \quad ; \quad j=1, \dots, k-1$$

olup $(k-1) \times (k-1)$ tipinde bir matris,

$$h_{12}(Y) = (g_{ij}(Y)) \quad i=1, \dots, k-1 \quad ; \quad j=k, \dots, 2k-1$$

olup $(k-1) \times k$ tipinde bir matris,

$$h_{13}(Y) = (g_{ij}(Y)) \quad i=1, \dots, k-1 \quad ; \quad j=2k, \dots, 3k-1$$

olup $(k-1) \times k$ tipinde bir matris,

$$h_{21}(Y) = (g_{ij}(Y)) \quad i=k, \dots, 2k-1 \quad ; \quad j=1, \dots, k-1$$

olup $k \times (k-1)$ tipinde bir matris,

$$h_{22}(Y) = (g_{ij}(Y)) \quad i=k, \dots, 2k-1 \quad ; \quad j=k, \dots, 2k-1$$

olup $k \times k$ tipinde bir matris,

$$h_{23}(Y) = (g_{ij}(Y)) \quad i=k, \dots, 2k-1 \quad ; \quad j=2k, \dots, 3k-1$$

olup $k \times k$ tipinde bir matris,

$$h_{31}(Y) = (g_{ij}(Y)) \quad i=2k, \dots, 3k-1 \quad ; \quad j=1, \dots, k-1$$

olup $k \times (k-1)$ tipinde bir matris,

$$h_{32}(Y) = (g_{ij}(Y)) \quad i=2k, \dots, 3k-1 \quad ; \quad j=k, \dots, 2k-1$$

olup $k \times k$ tipinde bir matris,

$$h_{33}(Y) = (g_{ij}(Y)) \quad i=2k, \dots, 3k-1 \quad ; \quad j=2k, \dots, 3k-1$$

olup $k \times k$ tipinde bir matris şeklindedir.

$H(Y)$ katsayı (Hessian) matrisini,

$$H(Y) = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B' & D & E \\ C' & E' & F \end{bmatrix} \quad (5.7.3)$$

şeklinde, (5.6.21) 'deki gibi alt blok matrisler olarak yeniden yazalım ve

$$t = p_1 f_1(x_j) + \dots + p_k f_k(x_j) \quad (5.7.4)$$

alalım.

$s=1, \dots, k$ için; $\theta_{s1}()$, $\theta_{s2}()$, $\theta_{s12}()$, $\theta_{s21}()$, $\theta_{s11}()$ ve $\theta_{s22}()$ fonksiyonlarını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\theta_{s1}(x_j; \theta_s) = \frac{\partial}{\partial \mu_s} (f_s()) = \frac{(x_j - \mu_s)}{\sigma_s^2} f_s() \quad (5.7.5)$$

$$\theta_{s2}(x_j; \theta_s) = \frac{\partial}{\partial \sigma_s} (f_s()) = \frac{[(x_j - \mu_s)^2 - \sigma_s^2]}{\sigma_s^2} f_s() \quad (5.7.6)$$

$$\theta_{s12}(x_j; \theta_s) = \frac{\partial}{\partial \mu_s} \left(\frac{\partial}{\partial \sigma_s} (f_s()) \right) = \frac{[(x_j - \mu_s)^3 - 3\sigma_s^2(x_j - \mu_s)]}{\sigma_s^5} f_s() \quad (2.6.7)$$

$$\theta_{s21}(x_j; \theta_s) = \frac{\partial}{\partial \sigma_s} \left(\frac{\partial}{\partial \mu_s} (f_s()) \right) = \frac{[(x_j - \mu_s)^3 - 3\sigma_s^2(x_j - \mu_s)]}{\sigma_s^5} f_s() \quad (5.7.8)$$

$$\theta_{s11}(x_j; \theta_s) = \frac{\partial^2}{\partial \mu_s^2} (f_s()) = \frac{[(x_j - \mu_s)^2 - \sigma_s^2]}{\sigma_s^4} f_s() \quad (5.7.9)$$

$$\theta_{s22}(x_j; \theta_s) = \frac{\partial^2}{\partial \sigma_s^2} (f_s()) = \frac{[(x_j - \mu_s)^2(\sigma_s - 3) - \sigma_s^2(\sigma_s - 1)]}{\sigma_s^4} f_s() \quad (5.7.10)$$

(5.7.3) 'deki parçalanmada:

A matrisi $(k-1) \times (k-1)$ tipinde simetrik bir matris olup elemanları,

$$A = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{-f_1(x_j)f_1(x_j)}{t^2} & \dots & \sum_{j=1}^n \frac{-f_1(x_j)f_{k-1}(x_j)}{t^2} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n \frac{-f_{k-1}(x_j)f_1(x_j)}{t^2} & \dots & \sum_{j=1}^n \frac{-f_{k-1}(x_j)f_{k-1}(x_j)}{t^2} \end{bmatrix} \quad (5.7.11)$$

şeklindedir.

B matrisi $(k-1) \times k$ tipinde bir matris olup elemanları,

$$B = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{\theta_{11}()} {t} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{j=1}^n \frac{\theta_{k-11}()} {t} & 0 \end{bmatrix} + \quad (5.7.12)$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{-p_1\theta_{11}()f_1(x_j)}{t^2} & \dots & \sum_{j=1}^n \frac{-p_{k-1}\theta_{k-11}()f_1(x_j)}{t^2} & \sum_{j=1}^n \frac{-p_k\theta_{k1}()f_1(x_j)}{t^2} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n \frac{-p_1\theta_{11}()f_{k-1}(x_j)}{t^2} & \dots & \sum_{j=1}^n \frac{-p_{k-1}\theta_{k-11}()f_{k-1}(x_j)}{t^2} & \sum_{j=1}^n \frac{-p_k\theta_{k1}()f_{k-1}(x_j)}{t^2} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

C matrisi $(k-1) \times k$ tipinde bir matris olup elemanları,

$$C = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{\theta_{12}()} {t} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{j=1}^n \frac{\theta_{k-12}()} {t} & 0 \end{bmatrix} + \quad (5.7.13)$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{-p_1 \theta_{12}() f_1(x_j)}{t^2} & \dots & \sum_{j=1}^n \frac{-p_{k-1} \theta_{k-12}() f_1(x_j)}{t^2} & \sum_{j=1}^n \frac{-p_k \theta_{k2}() f_1(x_j)}{t^2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n \frac{-p_1 \theta_{12}() f_{k-1}(x_j)}{t^2} & \dots & \sum_{j=1}^n \frac{-p_{k-1} \theta_{k-12}() f_{k-1}(x_j)}{t^2} & \sum_{j=1}^n \frac{-p_k \theta_{k2}() f_{k-1}(x_j)}{t^2} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

D matrisi $k \times k$ tipinde simetrik bir matris olup elemanları,

$$D = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{p_1 \theta_{111}()} {t} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{j=1}^n \frac{p_k \theta_{k11}()} {t} \end{bmatrix} + \quad (5.7.14)$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{-p_1 \theta_{111}() p_1 \theta_{111}()} {t^2} & \dots & \sum_{j=1}^n \frac{-p_k \theta_{k11}() p_1 \theta_{111}()} {t^2} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n \frac{-p_1 \theta_{111}() p_k \theta_{k11}()} {t^2} & \dots & \sum_{j=1}^n \frac{-p_k \theta_{k11}() p_k \theta_{k11}()} {t^2} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

E matrisi $k \times k$ tipinde simetrik bir matris olup elemanları,

$$E = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{p_1 \theta_{121}()} {t} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{j=1}^n \frac{p_k \theta_{k21}()} {t} \end{bmatrix} + \quad (5.7.15)$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{-p_1\theta_{12}()p_1\theta_{11}()} {t^2} & \dots & \sum_{j=1}^n \frac{-p_k\theta_{k2}()p_1\theta_{11}()} {t^2} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n \frac{-p_1\theta_{12}()p_k\theta_{k1}()} {t^2} & \dots & \sum_{j=1}^n \frac{-p_k\theta_{k2}()p_k\theta_{k1}()} {t^2} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

F matrisi k X k tipinde simetrik bir matris olup elemanları,

$$F = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{p_1\theta_{122}()} {t} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{j=1}^n \frac{p_k\theta_{k22}()} {t} \end{bmatrix} \quad (5.7.16)$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{-p_1\theta_{12}()p_1\theta_{12}()} {t^2} & \dots & \sum_{j=1}^n \frac{-p_k\theta_{k2}()p_1\theta_{12}()} {t^2} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n \frac{-p_1\theta_{12}()p_k\theta_{k2}()} {t^2} & \dots & \sum_{j=1}^n \frac{-p_k\theta_{k2}()p_k\theta_{k2}()} {t^2} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

(5.7.3) 'deki parçalanmada, H(Y) katsayı (Hessian) matrisinin tersini, yani H(Y)⁻¹ matrisini (5.6.22) 'deki gibi,

$$H(Y)^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ B'_1 & D_1 & E_1 \\ C'_1 & E'_1 & F_1 \end{bmatrix} \quad (5.7.17)$$

ile gösterelim.

(5.7.17) 'deki H(Y)⁻¹ matrisinin alt blok matrislerinin boyutları, (5.7.3) 'deki H(Y) katsayı (Hessian) matrisinin

parçalanmış alt blok matrislerinin boyutlarıyla karşılıklı olarak aynıdır.

Burada yapılması gereken; $H(Y)^{-1}$ matrisinin alt blok matrislerini, $H(Y)$ katsayı (Hessian) matrisinin parçalanmış alt blok matrisleri cinsinden hesaplanmasıdır.

(5.7.3) 'deki $H(Y)$ katsayı (Hessian) matrisi,

$$H(Y) = \begin{bmatrix} A & B & \cdot & C \\ B' & D & \cdot & E \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C' & E' & \cdot & F' \end{bmatrix} \quad (5.7.18)$$

şeklinde tekrar alt blok matrislere parçalayalım. Bu parçalanmada,

$$K = \begin{bmatrix} A & B \\ B' & D \end{bmatrix} \quad (5.7.19)$$

alt blok matrisi $(2k-1) \times (2k-1)$ tipinde karesel bir matris ve

$$L = \begin{bmatrix} C \\ E \end{bmatrix} \quad (5.7.20)$$

alt blok matrisi ise $(2k-1) \times k$ tipinde dörtgensel bir matris olarak alalım.

Bu durumda (5.7.18) 'deki $H(Y)$ katsayı (Hessian) matrisi,

$$H = \begin{bmatrix} K & L \\ L' & F \end{bmatrix} \quad (5.7.21)$$

şeklinde yazılabilir.

(5.7.21) 'deki H matrisinin tersini hesaplamak için Teorem 8.2.1 (Graybill 1983, s.183) uygulandığında,

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} [K-LF^{-1}L']^{-1} & -K^{-1}L[F-L'K^{-1}L]^{-1} \\ -F^{-1}L'[K-LF^{-1}L']^{-1} & [F-L'K^{-1}L]^{-1} \end{bmatrix} \quad (5.7.22)$$

elde edilir.

(5.7.21) 'deki H matrisinin tersi hesaplanırken $|H| \neq 0$, $|K| \neq 0$ ve $|F| \neq 0$ olduğu varsayılmaktadır.

(5.7.22) 'deki H^{-1} matrisi,

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \quad (5.7.23)$$

şeklinde gösterilsin. Bu durumda,

$$H_{11} = [K - LF^{-1}L']^{-1} \quad (5.7.24)$$

$$H_{12} = -K^{-1}L[F - L'K^{-1}L]^{-1} \quad (5.7.25)$$

$$H_{21} = -F^{-1}L'[K - LF^{-1}L']^{-1} \quad (5.7.26)$$

$$H_{22} = [F - L'K^{-1}L]^{-1} \quad (5.7.27)$$

şeklindedir.

H^{-1} matrisinin (5.7.24), (5.7.25), (5.7.26) ve (5.7.27) 'deki elemanları, (5.7.3) 'deki parçalanmış matrisler cinsinden ifade edilebilir.

Bu amaç için önce (5.7.19) 'daki K matrisinin tersi, (5.7.3) 'deki parçalanmış matrisler cinsinden hesaplanır:

(5.7.19) 'daki K matrisinin tersini (5.7.3) 'deki parçalanmış matrisler cinsinden hesaplamak için Teorem 8.2.1 (Graybill 1983, s.183) uygulandığında,

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} [A - BD^{-1}B']^{-1} & -A^{-1}B[D - B'A^{-1}B]^{-1} \\ -D^{-1}B'[A - BD^{-1}B']^{-1} & [D - B'A^{-1}B]^{-1} \end{bmatrix} \quad (5.7.28)$$

elde edilir.

(5.7.28) 'deki K^{-1} matrisi,

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (5.7.29)$$

şeklinde gösterilsin. Bu durumda,

$$K_{11} = [A - BD^{-1}B']^{-1} \quad (5.7.30)$$

$$K_{12} = -A^{-1}B[D-B'A^{-1}B]^{-1} \quad (5.7.31)$$

$$K_{21} = -D^{-1}B'[A-BD^{-1}B']^{-1} \quad (5.7.32)$$

$$K_{22} = [D-B'A^{-1}B]^{-1} \quad (5.7.33)$$

şeklindedir.

K^{-1} matrisi (5.7.3) 'deki parçalanmış matrisler cinsinden hesaplandıktan sonra, (5.7.24) 'deki $[K-LF^{-1}L']^{-1}$ ve (5.7.27) 'deki $[F-L'K^{-1}L]^{-1}$ elemanları da (5.7.3) 'deki parçalanmış matrisler cinsinden yazılır.

$[K-LF^{-1}L']^{-1}$ matrisinin (5.7.3) 'deki parçalanmış matrisler cinsinden yazılması:

$[K-LF^{-1}L']$ matrisi hesaplandığında,

$$[K-LF^{-1}L'] = \begin{bmatrix} A-CF^{-1}C' & B-CF^{-1}E' \\ B'-EF^{-1}C' & D-EF^{-1}E' \end{bmatrix} \quad (5.7.34)$$

elde edilir.

(5.7.34) 'deki $[K-LF^{-1}L']$ matrisi,

$$[K-LF^{-1}L'] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \quad (5.7.35)$$

şeklinde gösterilsin. Bu durumda,

$$L_{11} = A-CF^{-1}C' \quad (5.7.36)$$

$$L_{12} = B-CF^{-1}E' \quad (5.7.37)$$

$$L_{21} = B'-EF^{-1}C' \quad (5.7.38)$$

$$L_{22} = D-EF^{-1}E' \quad (5.7.39)$$

şeklindedir.

(5.7.35) 'deki $[K-LF^{-1}L']$ matrisinin tersini hesaplamak için Teorem 8.2.1 (Graybill 1983, s.183) uygulansın ve

$$[K-LF^{-1}L']^{-1} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (5.7.40)$$

şeklinde olsun. Bu durumda,

$$M_{11} = [L_{11} - L_{12} L_{22}^{-1} L_{21}]^{-1} \quad (5.7.41)$$

$$M_{12} = - L_{11}^{-1} L_{12} M_{22} \quad (5.7.42)$$

$$M_{21} = - L_{22}^{-1} L_{21} M_{11} \quad (5.7.43)$$

$$M_{22} = [L_{22} - L_{21} L_{11}^{-1} L_{12}]^{-1} \quad (5.7.44)$$

dir.

$[F-L'K^{-1}L]^{-1}$ matrisinin (5.7.3) 'deki parçalanmış matrisler cinsinden yazılması:

$[F-L'K^{-1}L]$ matrisi hesaplandığında,

$$[F-L'K^{-1}L] = \begin{bmatrix} F - [C'K_{11}C + E'K_{21}C + C'K_{12}E + E'K_{22}E] \end{bmatrix} \quad (5.7.45)$$

elde edilir.

(5.7.45) 'deki $[F-L'K^{-1}L]$ matrisinde,

$$T = F - [C'K_{11}C + E'K_{21}C + C'K_{12}E + E'K_{22}E] \quad (5.7.46)$$

alalım. Bu durumda,

$$[F-L'K^{-1}L]^{-1} = T^{-1} \quad (5.7.47)$$

dir.

Sonuç olarak, (5.7.17) 'deki H^{-1} matrisinin elemanları (5.7.3) 'deki parçalanmış matrisler cinsinden:

$$A_1 = M_{11} \quad (5.7.48)$$

alt blok matrisi $(k-1) \times (k-1)$ tipinde karesel bir matris,

$$B_1 = M_{12} \quad (5.7.49)$$

alt blok matrisi $(k-1) \times k$ tipinde dörtgensel bir matris,

$$C_1 = -(K_{11}C + K_{12}E)T^{-1} \quad (5.7.50)$$

alt blok matrisi $(k-1) \times k$ tipinde dörtgensel bir matris,

$$B'_1 = M_{21} \quad (5.7.51)$$

alt blok matrisi $k \times (k-1)$ tipinde dörtgensel bir matris,

$$D_1 = M_{22} \quad (5.7.52)$$

alt blok matrisi $k \times k$ tipinde karesel bir matris,

$$E_1 = -(K_{21}C + K_{22}E)T^{-1} \quad (5.7.53)$$

alt blok matrisi $k \times k$ tipinde karesel bir matris,

$$C'_1 = -F^{-1}(C'M_{11} + E'M_{21}) \quad (5.7.54)$$

alt blok matrisi $k \times (k-1)$ tipinde dörtgensel bir matris,

$$E'_1 = -F^{-1}(C'M_{12} + E'M_{22}) \quad (5.7.55)$$

alt blok matrisi $k \times k$ tipinde karesel bir matris ve

$$F_1 = T^{-1} \quad (5.7.56)$$

alt blok matrisi $k \times k$ tipinde karesel bir matris olarak elde edilir.

(5.7.17) 'deki H^{-1} matrisinin alt blok matrislerini (5.7.3) 'deki parçalanmış matrisler cinsinden yazdıktan sonra bölüm 5.6 'da adımları verilen algoritma, parçalanmış matrisler kullanılarak aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir:

1'. Adım: $m=0$ al ve iterasyonların yakınsama kriteri için ϵ_1 (ve/veya ϵ_2) değer(ler)ini seç. ϵ_1 (ve/veya ϵ_2) değer(ler)i yeterince (istenildiği kadar) küçük olmalıdır. Y değişkeni için iterasyona başlangıç değeri olarak $Y_m = Y_{(m)}$ değerini al. Bu adımda, $Y_m - Y_{(m)}$ değeri olarak bölüm 5.5 'de önerilen yöntemle elde edilen değer kullanılabilir.

$$Y_{(m)} = (Y_{1(m)}, Y_{2(m)}, Y_{3(m)})'$$

2'. Adım: $G(Y_{(m)})$ değerini hesapla.

$$G(Y_{(m)}) = (G_1(Y_{(m)}), G_2(Y_{(m)}), G_3(Y_{(m)}))'$$

3'. Adım: Eğer $G(Y_{(m)}) \leq \epsilon_1$ yani,

$$G_1(Y_{(m)}) \leq \epsilon_1$$

$$G_2(Y_{(m)}) \leq \epsilon_1$$

$$G_3(Y_{(m)}) \leq \epsilon_1$$

ise $Y_{(m)}$ değerini bir çözüm olarak al ve iterasyonları durdur.

4'. Adım: $\Delta Y_{(m)} = (\Delta Y_{1(m)}, \Delta Y_{2(m)}, \Delta Y_{3(m)})'$ değerini hesapla. $\Delta Y_{1(m)}$, $\Delta Y_{2(m)}$ ve $\Delta Y_{3(m)}$ değerleri,

$$\Delta Y_{1(m)} = -A_1 G_1(Y_{(m)}) - B_1 G_2(Y_{(m)}) - C_1 G_3(Y_{(m)})$$

$$\Delta Y_{2(m)} = -B'_1 G_1(Y_{(m)}) - D_1 G_2(Y_{(m)}) - E_1 G_3(Y_{(m)})$$

$$\Delta Y_{3(m)} = -C'_1 G_1(Y_{(m)}) - E'_1 G_2(Y_{(m)}) - F_1 G_3(Y_{(m)})$$

bağıntıları kullanılarak hesaplanır.

5'. Adım: Eğer $\Delta Y_{(m)} \leq \epsilon_2$ yani,

$$\Delta Y_{1(m)} \leq \epsilon_2$$

$$\Delta Y_{2(m)} \leq \epsilon_2$$

$$\Delta Y_{3(m)} \leq \epsilon_2$$

ise $Y_{(m)}$ değerini bir çözüm olarak al ve iterasyonları durdur.

6'. Adım: $m=m+1$ al ve $Y_{(m)} = Y_{(m-1)} + \Delta Y_{(m-1)}$ yani,

$$Y_{1(m)} = Y_{1(m-1)} + \Delta Y_{1(m-1)}$$

$$Y_{2(m)} = Y_{2(m-1)} + \Delta Y_{2(m-1)}$$

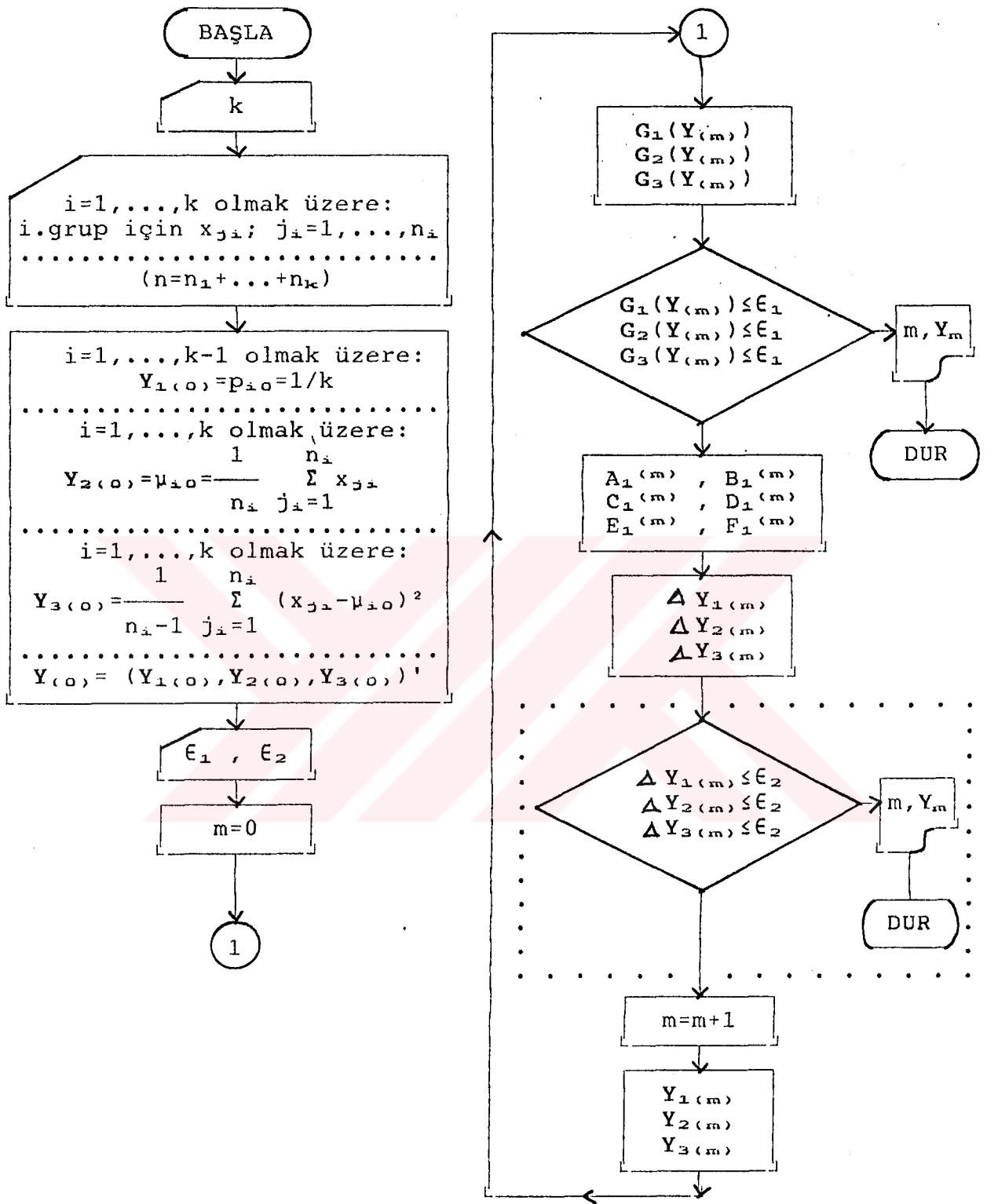
$$Y_{3(m)} = Y_{3(m-1)} + \Delta Y_{3(m-1)}$$

değerlerini hesapla.

7'. Adım: 2'. adıma git.

Bu adımlara yakınsama kriterlerinden biri sağlanana kadar devam edilir. m. iterasyonda "3'. Adım" daki veya "5'. Adım" daki yakınsama kriterlerinden biri sağlandığında $Y_m = Y_{(m)}$ değeri, (5.2.1) 'deki karma dağılım modelindeki parametrelerin bir tahmini olarak alınır.

Yukarıda adımları verilen algoritmanın bilgisayarda akış diagramı olarak gösterimi aşağıdaki gibidir:



Şekil 20. Standart Newton-Raphson yönteminin parçalanmış matrisler cinsinden ifadesinin bilgisayarda akış diagramı.

5.8. Gruplandırılmış Verilerin k Bileşenli Normal Dağılımlarının Bir Karmasındaki Parametrelerin Maksimum Likelihood Yöntemiyle Birlikte Standart Newton-Raphson Algoritmasıyla Tahmin Edilmesinin Sonuçları

Bilgisayar kullanılmadan sayısal analiz ya da sayısal işlem yapmak artık mümkün değildir. Bununla birlikte bilgisayarlarla yapılacak işlemler de sınırsız değildir. Diğer bir ifadeyle bilgisayarlarla yapılacak işlemler; bilgisayarın donanım yapısından kaynaklanan nedenlerden dolayı, bilgisayar sistemi ister çok kullanıcıli isterse kişisel olsun sınırlıdır.

Kişisel bilgisayarlar dünya üzerinde her alanda çok yaygın olarak kullanıldığından, tüm sonuçlar (16 bitlik) kişisel bilgisayar sistemleri için ele alınacaktır. Bilgisayarlarla yapılacak işlemlerdeki sınırlamalara birçok örnek verilebilir. Örneğin; bilgisayarlarda kullanılabilecek tamsayılar veya tek hassasiyetli ya da çift hassasiyetli gerçel sayılar sınırlıdır, bilgisayarda kullanılabilecek (elemanları çift hassasiyetli sayılar olan) matris boyutları ve matris sayıları sınırlıdır (tablo 34) ve buna benzer şekilde örnekler çoğaltılabilir. Bu tür sınırlamalar tamamıyla bilgisayarın donanım yapısından kaynaklanır. Bilgisayarlarda bilgilerin sürekli ve kalıcı olarak depolama alanları, hard disk kapasiteleri sınırlıdır. Bilgisayarda bilgilerin kısa bir süre ve geçici olarak aynı anda depolama alanları, aktif hafıza kapasiteleri sınırlıdır. Bilgisayarda bilgilerin bir zaman biriminde işlenme miktarları sınırlıdır. Bilgisayarlarda bilgilerin bir zaman biriminde sabit

(hard) diskten ya da disket sürücüdeki disketten okunma veya yüklenme miktarları sınırlıdır. Aynı şekilde bilgisayarlarda bilgilerin bir zaman biriminde sabit (hard) diske ya da disket sürücüdeki diskete kayıt edilme veya yazılma miktarları sınırlıdır. Benzer örnekler çoğaltılabilir. Bu nedenle, bu tür sınırlamalardan kaynaklanan problemleri ortadan kaldırmak için bilgisayar teknolojisi geliştirilmektedir. Teknolojik gelişmelere paralel olarak bilgisayar sistemlerindeki mantıksal (algoritmik) yapılar, diğer bir ifadeyle veri yapıları da geliştirilmektedir.

Bileşen sayısı k 'nın belirli olduğu durumlarda, gruplandırılmış verilerin k ($2 \leq k \leq 40$) bileşenli normal dağılımlarının bir karmasındaki parametreleri maksimum likelihood yöntemiyle hesaplamak için standart Newton-Raphson algoritması uygulandığında elde edilen matris formundaki lineer denklem sistemindeki katsayı (Hessian) matrisinin boyutu $(3k-1) \times (3k-1)$ tipindedir.

MIX 3.1 bilgisayar paket programı, gruplandırılmış verilere 15 bileşene kadar ($2 \leq k \leq 15$) karma dağılım modelleri uydurabilmektedir. Yani $2 \leq k \leq 15$ için MIX 3.1 bilgisayar paket programında çalışılan matrisin maksimum boyutu $(3k-1) \times (3k-1)$ 'den 40×40 tipindedir. Bu durumda tablo 34 'den de görüleceği gibi aynı anda 12 matris kullanılabilmektedir.

Bununla birlikte 15 bileşenden daha fazla bileşene gereksinim duyulan birçok durum vardır. Örneğin böyle bir durum moleküler biyolojide ortaya çıkar. Bir normal veya patolojik insan serumunda 20 'den fazla serum proteini vardır. Herbir serum proteini bir normal dağılıma sahip olup; bir normal veya

patolojik insan serumundaki tüm serum proteinlerinin dağılımı, normal dağılımların bir karmasıdır. Böyle durumlarda, karma dağılım modellerinin analizleri için kullanılan ve iyi bilinen bilgisayar paket programları yetersiz kalmaktadır. Bunun en önemli nedeni ise bilgisayarın aynı anda bilgileri depolama alanının yetersiz kalması ya da aktif hafıza depolama alanı gereksinimi problemidir.

Bileşen sayısı $k=40$ için pratikte uygulamalarda bilgisayarlarda çalışılabilecek lineer denklem sisteminin katsayı (Hessian) matrisinin maksimum boyutu, $(3k-1) \times (3k-1)$ 'den 119×119 'dur. Bölüm 5.7 'de açıklanan algoritmada çalışılan parçalanmış matrislerin maksimum boyutu $k \times k$ tipindedir. Yani 40×40 tipindedir. Bu durumda ise tablo 34 'den de görüleceği ve Minitab 8.2 bilgisayar paket programında da olduğu gibi aynı anda 15 matris kullanılabilmektedir. Ayrıca Hessian matrisinin tümü yerine parçaları gerektiği yerlerde işlem için kullanıldığından, bilgisayar hafıza gereksinimi problemi ($2 \leq k \leq 40$) için ortadan kaldırılmıştır.

Bilgisayar hafıza gereksinimi probleminin iki türlü çözümü vardır:

Birinci tür çözüm, bilgisayarın aktif hafızasının ekonomik kullanımıdır. $k \times k$ (elemanlı) tipindeki karesel simetrik matrisler, örneğin (5.7.11), (5.7.14), (5,7,15) ve (5.7.16) 'daki sırasıyla A, D, E ve F matrisleri, aktif hafızada daha az yer kullanılarak depolanabilir. Bunun için matrislerin simetrikliği kullanılır. Simetrik matrisin tüm elemanları yerine, sadece alt (veya üst) üçgensel ve diagonal elemanları satırına göre

$v = [(i-1)l/2 + j]$ veya sütünuna göre $v = [(j-1)j]/2 + i$ (çift yönlü) adreslemesi kullanılarak $w = (k^2 - k)/2 + k$ elemanlı vektörlere aktarılabilir. Bu adreslemenin avantajını 40X40 tipindeki simetrik matrisler üzerinde açıklayalım: 40X40 tipindeki bir matrisin 1600 tane elemanı vardır. Bu matrisin her bir elemanı için çift hassasiyetli (duyarlıklı) sayı (8 byte) kullanılsa, sadece bu matrisi aktif hafızada depolamak için 12800 byte 'lık yer gerekir. Matrisin simetriklik özelliği kullanılarak bir vektöre adresleme yapılarak aktarıldığında ise vektörün $w=820$ tane elemanı olacaktır. Bu vektörün her bir elemanı için çift hassasiyetli (duyarlıklı) sayı (8 byte) kullanılsa bu vektörü depolamak için aktif hafızada 6560 byte 'lık yer gerekir. Bir oranlama yapıldığında bu tip bir adresleme aktif hafızada 0.5125 oranında, yaklaşık olarak yarı yarıya bir tasarruf sağlar. Eğer işlemler parçalanmış matrisler üzerinde değilse, direk olarak $k=40$ için 119X119 tipindeki Hessian matrisi üzerinde yapılırsa 113288 byte 'lık aktif hafıza gerekecektir.

İkinci tür çözüm ise aktif hafızanın kullanımı yerine işlem sonuçlarının dosyalar halinde disk yada disket üzerine yedeklenmesidir. Bunun için de örneğin DOS (Disk İşletim Sistemi) kullanan kişisel bilgisayarlarda CONFIG.SYS dosyasında, FILES= z seçeneğinin uygun yapılması gerekir. Burada z , aynı anda çalışılabilecek maksimum dosya sayısını göstermektedir.

Parametrelerinin üzerinde hiçbir kısıtlama koymaksızın; gruplandırılmış verilerin k ($2 \leq k \leq 40$) bileşenli normal dağılımlarının bir karmasındaki parametrelerin, maksimum likelihood yöntemiyle birlikte standart Newton-Raphson

algoritmasını kullanarak tahmin edilmesi için bir hesaplama algoritması oluşturulmuştur. Oluşturulan hesaplama algoritması; (1.2.40), (1.2.41) ve (1.2.42) 'deki sırasıyla düzenlenmiş (modified) Newton-Raphson algoritması, yarı (quasi) Newton algoritmaları ve scoring yöntemi algoritmasıyla da birlikte kullanılabilir.



SONUÇLAR VE ÖNERİLER

1) Tezin birinci bölümünde; sonlu karma dağılım modelleri için örneklem formunun belirlenmesi, bileşen sayısının belirlenmesi, parametrelerin tahmin edilmesi problemlerine yaklaşımlar açıklanmış ve bu problemlerle ilgili daha önce yapılan çalışmalar özetlenmiştir.

Sonlu karma dağılım modellerinde bu problemler üzerinde çalışılabilir.

2) Tezin ikinci bölümünde; sonlu karma dağılım modellerinin uygulamaları ve başlıca uygulama alanları tablolar halinde sunulmuştur.

Sonlu karma dağılım modellerinin yeni uygulama alanları araştırılabilir.

3) Tezin üçüncü bölümünde; üç bileşenli üstel dağılımın karmasındaki parametrelerin, üzerinde hiçbir kısıtlama konmaksızın, momentler yöntemiyle tahmin edilmesi için bir hesaplama algoritması oluşturulmuştur. Ayrıca üç bileşenli üstel dağılımın karması; inhibütör içeren herhangi bir korozyon (test) ortamdaki herhangi bir (test) metalinin, ağırlık kaybı ölçümlerine göre hesaplanmış ortalama korozyon hızı (mdd) değerleri için bir istatistiksel model olarak önerilmiştir.

Bu modellemeyle, inhibütör içeren değişik test ortamları ve değişik (test) metalleri alınarak; değişik korozyon hızı uygulamaları (korozyon testleri) yapılabilir. Buna ek olarak, üç bileşenli üstel dağılımın karması kullanılarak inhibütör testi yapılabilir.

4) Tezin dördüncü bölümünde; üç bileşenli normal dağılımın karmasındaki parametrelerin, üzerinde hiçbir kısıtlama konmaksızın, momentler yöntemiyle tahmin edilmesi için bir hesaplama algoritması oluşturulmuştur. Ayrıca üç bileşenli normal dağılımın karması; bir bölgede bulunan bir alanın üç değişik spektral bant üzerinden alınan spektral parlaklık değerleri için bir istatistiksel model olarak önerilmiştir.

Bu modellemeye bir bölgedeki alanlar için kontrol sınıfı modelleri ve test sınıfı modelleri oluşturulabilir ve olasılık yoğunluk fonksiyonları arasındaki uzaklığa dayalı bir sınıflandırma yöntemi geliştirilebilir. Geliştirilecek bu sınıflandırma yöntemiyle örneğin, bir tarımsal bölgedeki parseller sınıflandırılabilir. Bu modellemenin ve sınıflandırmanın çok değişkenli durumu geliştirilebilir.

5) Tezin beşinci bölümünde; gruplandırılmış verilerin k bileşenli normal dağılımının karmasında, $2 \leq k \leq 40$ için parametrelerin, üzerinde hiçbir kısıtlama konmaksızın, maksimum likelihood yöntemiyle tahmin edilmesi için bir hesaplama algoritması oluşturulmuştur. Sonlu karma dağılım modellerinde k yani bileşen sayısı için uygulama sınırı 15 'ten 40 'a çıkarılmıştır.

Sonlu karma dağılım modellerinde k yani bileşen sayısı için uygulama sınırını daha da geliştirebilecek algoritmaların oluşturulması için çalışılabilir.

Böyle bir karma dağılım modellemesiyle örneğin moleküler biyoloji alanında; normal veya patolojik insan serumundaki tüm serum proteinlerinin dağılımı modellenenebilir. Bu tür bir

modelleme; tıp alanında hastalıkların çok kolay ve etkin bir şekilde belirlenmesine ya da teşhisine veya diğer kullanımlarına olanak sağlayabilir. Buna ek olarak, patalojik insan serumundaki (en az) bir ya da birkaç serum proteinindeki değişim(ler)in diğer serum proteinlerini etkileyip etkilemediği, etkiliyorsa ne ölçü(ler)de etkilediği model olarak ortaya konabilir.



ÖZET

Üç bileşenli üstel dağılımın karmasındaki parametreleri, üzerinde hiçbir kısıtlama koymaksızın, tahmin etmek için momentler yöntemi uygulanmıştır. Momentler yönteminde üç bileşenli üstel dağılımın karmasının olasılık yoğunluk fonksiyonunun beklenen değerleri örneklem momentlerine eşitlenerek üç bileşenli üstel dağılımın karmasındaki parametreler cinsinden bir lineer olmayan denklem sistemi elde edilir. Elde edilen lineer olmayan denklem sistemi birinci olarak; olasılık yoğunluk fonksiyonunun bileşenlerinde bulunan μ_1 , μ_2 ve μ_3 parametrelerini tahmin etmek amacıyla kullanılır. Bu amaç için önce Prony 'nun yöntemi lineer olmayan denklem sistemine uyarlanarak üçüncü dereceden monik bir polinom elde edilir. Daha sonra elde edilen üçüncü dereceden monik polinomun kökleri, Bairstow 'un sayısal olarak kök bulma yöntemi kullanılarak hesaplanır. Hesaplanan kökler; μ_1 , μ_2 ve μ_3 parametreleri için tahminlerdir. İkinci olarak; olasılık yoğunluk fonksiyonunda bulunan p_1 ve p_2 karma oranları parametrelerini tahmin etmek amacıyla kullanılır. Bu amaç için önce μ_1 , μ_2 ve μ_3 parametreleri için tahminler lineer olmayan denklem sisteminde yerine konularak p_1 ve p_2 parametrelerinde bir lineer denklem sistemi elde edilir. Sonra elde edilen lineer denklem sistemi en küçük kareler yöntemi kullanılarak p_1 ve p_2 parametreleri için çözülür. Böylece üç üstel dağılımın karmasındaki tüm parametreler tahmin edilmiş olur. Üç bileşenli üstel dağılımın karması kimya alanında; korozyon sistemindeki bir metalin, ağırlık kaybı

ölçümlerine göre hesaplanmış ortalama korozyon hız değerleri için bir istatistiksel model olarak önerilmiştir.

Üç bileşenli normal dağılımın karmasındaki parametreleri, üzerinde hiçbir kısıtlama koymaksızın, tahmin etmek için momentler yöntemi uygulanmıştır. Momentler yönteminde üç bileşenli normal dağılımın karmasının olasılık yoğunluk fonksiyonunun beklenen değerleri örneklem momentlerine eşitlenerek üç bileşenli normal dağılımın karmasındaki parametreler cinsinden bir lineer olmayan denklem sistemi elde edilir. Elde edilen lineer olmayan denklem sisteminin standart Newton-Raphson algoritması uygulanarak çözümü, üç bileşenli normal dağılımın karmasındaki tüm parametrelerin tahminini verir. Üç bileşenli normal dağılımın karması fizik alanında; bir bölgede bulunan alanların üç değişik spektral bant üzerinden alınan spektral parlaklık değerleri için bir istatistiksel model olarak önerilmiştir. Uygulamada veriler gruplandırılmış olduğundan üç normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunun bileşenlerinde bulunan μ_1 , μ_2 , μ_3 ve σ_1 , σ_2 , σ_3 parametreleri için standart Newton-Raphson algoritmasında başlangıç değeri olarak örneklemin her bir alt grubunun ortalama ve standart sapma değerleri alınır. olasılık yoğunluk fonksiyonunda bulunan p_1 ve p_2 karma oranları parametreleri için standart Newton-Raphson algoritmasında başlangıç değeri olarak alınacak değeri hesaplamak için ortalamalar ve standart sapmalar için elde edilen başlangıç değerleri lineer olmayan denklem sisteminde yerine konularak p_1 ve p_2 parametrelerinin başlangıç değerlerinde bir lineer denklem sistemi elde edilir. Sonra elde edilen lineer denklem sistemi en

küçük kareler yöntemi kullanılarak p_1 ve p_2 parametrelerinin başlangıç değerleri için çözülür. Böylece standart Newton-Raphson algoritması için tüm başlangıç değerleri elde edilmiş olur.

Gruplandırılmış verilerin k ($2 \leq k \leq 40$) bileşenli normal dağılımlarının karmasındaki parametreleri, üzerinde hiçbir kısıtlama koymaksızın, maksimum likelihood yöntemiyle birlikte standart Newton-Raphson algoritmasını kullanarak tahmin etmek için bir hesaplama algoritması oluşturulmuştur. Maksimum likelihood yönteminde, önce k bileşenli normal dağılımın karmasının loglikelihood fonksiyonu oluşturulur. Daha sonra oluşturulan loglikelihood fonksiyonunun, k bileşenli normal dağılımın karmasındaki parametrelerine göre kısmi türevleri alınıp sıfıra eşitlenerek loglikelihood denklemleri oluşturulur. Loglikelihood denklemler, lineer olmayan bir denklem sistemidir. Elde edilen lineer olmayan denklem sistemine standart Newton-Raphson algoritması uygulanır. Bu durumda ise bir lineer denklem sistemi elde edilir. Bu lineer denklem sisteminin katsayı (Hessian) matrisiyle aktif hafıza gereksinimi problemi nedeniyle direk olarak bilgisayarda çalışmak ya da işlem yapmak mümkün değildir. k bileşenli normal dağılımın karmasındaki parametreler, lineer denklem sisteminin katsayı (Hessian) matrisinde blok yapılar oluşturur. Bu blok yapılara göre katsayı (Hessian) matrisi parçalanır ve standart Newton-Raphson algoritması parçalanmış matrisler cinsinden ifade edilir. Böylece katsayı (Hessian) matrisinin tümü yerine parçaları gerektiği yerde işlem için kullanıldığından, bilgisayar aktif hafıza gereksinimi problemi ($2 \leq k \leq 40$) için ortadan kaldırılmıştır. Böyle bir karma

dağılım modeli kullanılarak örneğin moleküler biyoloji alanında; normal veya patalojik insan serumundaki tüm serum proteinlerinin değerleri için bir istatistiksel model oluşturulabilir.



SUMMARY

The method of moments is used for estimating the parameters, which are unconstrained, in the mixture of three component exponential distributions. In method of moments to get a nonlinear system of equations in terms of parameters in the mixture of three component exponential distributions, the expected values of probability density function for the mixture of three component exponential distributions are equated to the sample moments. The nonlinear system of equations is used for two purposes. First, the nonlinear system of equations is used to estimate μ_1 , μ_2 and μ_3 parameters in components. For this purpose; the Prony's method is adapted to the nonlinear system of equations to get a monic polynomial of third degree. Then the roots of the monic polynomial of third degree are obtained numerically by Bairstow's method. The roots of the monic polynomial are the estimated parameter values for μ_1 , μ_2 and μ_3 . Second, the nonlinear system of equations is used to estimate the mixture proportions p_1 and p_2 . For this purpose; the estimated values for μ_1 , μ_2 and μ_3 are putted into the nonlinear system of equations to get a linear system of equations in terms of p_1 and p_2 . Then this linear system of equations is solved for p_1 and p_2 by the method of least squares. So all the parameters are estimated. In the area of Chemistry; the mixture of three component exponential distributions is proposed as a statistical model for the average corrosion rate values calculated by weight loss measurements of a metal in a corrosion system.

The method of moments is used for estimating the parameters, which are unconstrained, in the mixture of three component normal distributions. In method of moments to get a nonlinear system of equations in terms of parameters in the mixture of three component normal distributions, the expected values of probability density function for the mixture of three component normal distributions are equated to the sample moments. The solution of the nonlinear system of equations by applying standart Newton-Raphson algorithm gives the estimations for all the parameters in the mixture of three component normal distributions. In the area of Pyhsics; the mixture of three component normal distributions is proposed as a statistical model for the spectral band values taken with respect to three different spectral bands of an area in a region. Since the data used in application is grouped, the means and the standart deviations of the subgroups of the sample are taken as the initial values for μ_1 , μ_2 , μ_3 and σ_1 , σ_2 , σ_3 parameters in components respectively. The initial values obtained for μ_1 , μ_2 , μ_3 and σ_1 , σ_2 , σ_3 parameters are putted into the nonlinear system of equations to get a linear system of equations in terms of mixture proportions p_1 and p_1 . This linear system of equations is solved to obtain the initial values for p_1 and p_2 by the method of least squares. So all the parameters are estimated.

A computation algorithm is established for estimating the parameters, which are unconstrained, in the mixture of k ($2 \leq k \leq 40$) component normal distributions by the method of maximum likelihood together with standart Newton-Raphson algorithm from

grouped and truncated data. In method of maximum likelihood, the loglikelihood function of the mixture of k component normal distributions is constructed. To get a nonlinear system of equations in terms of parameters in the mixture of k component normal distributions; the loglikelihood function is differentiated with respect to each parameter in the mixture of k component normal distributions, then these derivatives are equated to zero. Standart Newton-Raphson algorithm is applied to the non-linear system of equations. In this case a linear system of equations is obtained. The coefficient (Hessian) matrix of this linear system of equations cannot be used or operated directly on computers because of active memory requirement problem. The parameters in the mixture of k component normal distributions forms patterns on the coefficient (Hessian) matrix. So the coefficient (Hessian) matrix is partitioned according to these patterns and standart Newton-Raphson algorithm is expressed in terms of partitioned matrix form. By doing this; instead of the coefficient (Hessian) matrix, its partitions is used in operations when they are needed. Therefore the active memory requirement problem is solved for $2 \leq k \leq 40$. By using the mixture of k component normal distributions, a statistical model can be constructed for all serum protein values in a normal or pathological human serum.

KAYNAKLAR

- AITKIN,M. ve TUNNICLIFFE WILSON,G. (1980). Mixture models, outliers and the EM algorithm. *Technometrics*, 22, 325-332.
- AITKIN,M.,ANDERSON,D. ve HINDE,J. (1981). Statistical modelling of data on teaching styles (with discussion). *J. R. Statist. Soc.A*, 44, 419-461.
- ASHTON,W.D. (1971). Distribution for gaps in road traffic. *J. Inst. Maths. Applics.*, 7, 37-46.
- BARTLETT,M.S. ve MACDONALD,P.D.M. (1968). Least square estimation of distribution mixtures. *Nature*, 217, 195-196.
- BEHBOODIAN,J. (1970). On a mixture of normal distributions. *Biometrika*, 57 Part 1, 215-217.
- BERRY,E.R. ve CHANUTIN,A. (1955). Detailed electrophoretic analyses of sera of healthy young men. *J. Clin. Invest.*, 34, 115-135.
- BEZDEK,J.C. (1981). Pattern recognition with fuzzy objective function algorithms. Plenum, Newyork.
- BHATTACHARYA,C.G. (1967). A simple method of resolution of a distribution into Gaussian components. *Biometrics*, 23, 115-135.
- BINDER,D.A. (1978). Bayesian cluster analysis. *Biometrika*, 65, 31-38.
- BOGARDUS,C.,LILLIOJA,S.,NYOMBA,B.L.,ZURLO,F.,SWINBURN,B.,PUENTE,A.E.,KNOWLER,W.C.,RAVUSSIN,E.,MOTT,D.M. ve BENNETT,P.H. (1989). Distribution of in vivo insulin action in pima indians as mixture of three normal distributions. *Diabetes*, Vol. 38,

- BORJA,R.I. (1991). Composite Newton-PCG and quasi-Newton iterations for nonlinear consolidation. Computer methods in applied mechanics and engineering, 86,27-60.
- BOX,G.E.P. ve TIAO,G.C. (1968). A Bayesian approach to some outlier problems. Biometrika, 55, 119-129.
- BOZDOGAN,H. (1983). Determining the number of component clusters in the standard multivariate normal mixture model using model selection criteria. Research report UIC/DQM/A83-1, University of Illinois at Chicago, Quantitative Meth. Dept.
- BROADBENT,D.E. (1966). A difficulty in assessing bimodality in certain distributions. Brit. J. Math. Stat. Psychol., 19, 125-126.
- BUCHANAN-WOLLASTON,H.J. ve HODGSON,W.C. (1928). A new method of treating frequency curves in fishery statistics, with some results. J. Cons. Perm. Intern. Expl. Mer., 4, 207-225.
- BUCHANAN,J.L. ve TURNER,P.R. (1992). Numerical methods and analysis. McGraw-Hill inc., NewYork (751 s.).
1423-1432.
- CARNAHAN,B.,LUTHER,H.A. ve WILKES,J.O. (1969). Applied numerical methods. John wiley & sons inc., NewYork. (604 s.).
- CASSIE,R.M. (1962). Frequency distribution models in the ecology of plankton and other organisms. J. Anim. Ecol., 31, 65-92.
- CASSIE,R.M. (1954). Some uses of probability paper in the analysis of size frequency distributions. Austral. J. Mar. Fish. Freshw. Res., 5, 513-522.
- CHARLIER,C.V.L. ve WICKSELL,S.D. (1924). On the dissection of frequency functions. Arkiv f. Matematik Astron. och Fysik.,

Bd.18, No.6.

- CHOI,K. ve BULGREN,W.B. (1968). An estimation procedure for mixtures of distributions. J.R. Statist. Soc.B, 30, 444-460.
- CLARK,M.W. (1976). Some methods for statistical analysis of multimodal distributions and their application to grain-size data. J. Math. Geol., 8, 267-282.
- CLARK,M.W. (1977). GETHEN: a computer program for the decomposition of mixtures two normal distributions by the method of moments. Comput. Geosci., 3, 257-267.
- CLARK,V.A., CHAPMAN,J.M., COULSON,A.H. ve HASSELBLAD,V. (1968). Dividing the blood pressures from the Los Angeles heart study into two normal distributions. Johns Hopkins. Med. J., 122, 77-83.
- COVEY ve CRUMP,P.A.K. (1970). Statistical analysis of granule size in the granular cells of the magnum of the hen oviduct. Q. J. Exp. Physiol., 55, 233-237.
- DANIEL,C. ve WOOD,F.S. (1980). Fitting equations to data, 2nd edition. John Wiley and Sons inc., NewYork.
- DAVIS,D.J. (1952). An analysis of some failure data. JASA, 47, 113-150.
- DEMPSTER,A.P.,LAIRD,N.M. ve RUBIN,D.B. (1972). Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. J. Royal Statist. Soc. Ser.B, 39, 1-38.
- DENNIS,J.E. ve MORE,J.J. (1977). Quasi-Newton methods, motivation and theory. SIAM review, 19, 46-89.
- DENNIS,J.E. ve SCHNABEL,R.B. (1983). Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations.

Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

DICK, N.P. ve BOWDEN, D.C. (1973). Maximum likelihood estimation for mixtures of two normal distributions. *Biometrics*, 29, 781-791.

EROL, H ve AKDENİZ, F. (1995). A statistical approach for ground cover modelling according to the spectral brightness. *International Journal of Remote Sensing*, to appear.

EVERITT, B.S. ve HAND, D.J. (1981). Finite mixture distributions. Chapman and Hall, London.

EVERETT, G.V. (1973). The rainbow trout *Salmo gairdneri* (Rich.) fishery of Lake Titicaca. *J. Fish. Biol.*, 5, 429-440.

FLETCHER, R. (1971). A general quadratic programming algorithm. *J. Inst. Maths. Applics.*, 7, 76-91.

FOLK, R.L. (1971). Longitudinal dunes of the northwestern edge of the Simpson Desert, Northern Territory, Australia. I. Geomorphology and quasi - size relationships. *Sedimentology*, 16, 5-54.

FOWLKES, E.B. (1979). Some methods for studying the mixture of two normal (lognormal) distributions. *JASA*, 74, 561-575.

FRASER, R.D.B. ve SUZUKI, B. (1966). Resolution of overlapping absorption bands by least square procedures. *Anal. Chem.*, 38, 1770-1773.

FRYER, J.G. ve ROBERTSON, C.A. (1972). A comparison of some methods for estimating mixed normal distributions, *Biometrika*, 59, 639-648.

GHOSE, B.K. (1970). Statistical analysis of mixed fossil populations. *J. Math. Geol.*, 2, 265-276.

- GLAZ, J. (1988). A survey of Statistical methods on remote sensing in russian literature from 1976 to 1985. Commun. in Statis. Theory and Methods, 17(8), 2419-2454.
- GONG, P. ve HOWARTH, P.J. (1990). A graphical approach for the evaluation of land-cover classification procedures. International Journal of Remote Sensing, 11(5), 899-905.
- GRAYBILL, F.A. (1983). Matrices with Applications in Statistics, Belmont, California: Wadsworth, Inc., International Group, (461 s.)
- GREGOR, J. (1969). An algorithm for the decomposition of a distribution into Gaussian components. Biometrics, 25, 79-93.
- GRIDGEMAN, N.T. (1970). A comparison of two methods of analysis of mixtures of normal distributions. Technometrics, 12, 823-833.
- GUMBEL, E.J. (1939). La dissection d'une repartition. Annales de l'Universite de Lyon, 3, 39-51.
- HAHN, G.J. ve SHAPIRO, S.S. (1967). Statistical Models in Engineering, Research and Development Centre, General Electric Company, John Wiley and Sons Inc., NewYork.
- HALD, A. (1952). Statistical theory with engineering applications. Wiley, NewYork.
- HARDING, J.P. (1949). The use of probability paper for the graphical analysis of polymodal frequency distributions. J. Marine Biol. Assoc., 28, 141-153.
- HARDY, G.H., LITTLEWOOD, J.E. ve POLYA, G. (1952). Inequalities. Cambridge University Press.
- HASSELBLAD, V. (1966). Estimation of parameters for a mixture of normal distributions. Technometrics, 8, 431-444.

- HASTINGS,N.A.J. ve PEACOCK,J.B. (1975). Statistical distributions, a hand book for students and practitioners. Butterwofths, London.
- HERSTEIN,I.N. ve WINTER,D.J. (1989). Matrix theory and linear algebra. Macmillan Publishing Company, New York.
- HILDEBRAND,F.B. (1956). Introduction to Numerical Analysis. McGraw-Hill Book Company Inc., New York.
- HOSMER,D.W. (1973-a). A comparison of iterative maximum likelihood estimates of the parameters of a mixture of two normal distributions under three different types of sample. Biometrics, 29, 761-770.
- HOSMER,D.W. (1973-b). On MLE of the parameters of a mixture of two normal distributions when the sample size is small. Commun. Statist., 1, 217-227.
- HOSMER,D.W. (1974). Maximum likelihood estimates of the parameters of a mixture of two regression lines. Commun. Statist., 3, 995-1006.
- HOSMER,D.W. ve DICK,N.P. (1977). Information and mixtures of two normal distributions.. J. Statist. Comput. Simul., 6, 137-148.
- ICHTHUS DATA SYSTEMS (1993). MIX 3.1 Package program, 59 Arkell Street Hamilton, Ontario CANADA L8S1N6.
- ILYAS,D.,YAZICI,B.,ERBİL,M. ve GALİP,H. (1994). The effects of SO_2 and NH_3 on the atmospheric corrosion of galvanized iron sheet. Corrosion Science, Vol.36, No.12, 2181-2191.

- JOHN, S. (1970). On identifying the population of origin of each observation in a mixture of observations from two gamma populations. *Technometrics*, 12, 565-568
- JOHNSON, L.W. ve RIESS, R.D. (1982). *Numerical Analysis*. Addison-Wesley Publishing Company Inc., Philippines.
- JONES, P.N. ve MCLACHLAN, G.J. (1990). Maximum likelihood estimation from grouped and truncated data with finite normal mixture models. *Appl. Statist.*, 39, No.2, 273-312.
- KABIR, A.B.M.L. (1968). Estimation of parameters of a finite mixture of distributions. *J.R. Statist. Soc. B*, 30, 472-482.
- KAPLAN, W. (1981). *Advanced Calculus*. Addison-Wesley Publishing Company Inc., USA.
- KAPLAN, E.B. ve ELSTON, R.C. (1977). A subroutine package for maximum likelihood estimation (MAXLIK). Chapel Hill, The institute of statistics, University of North Carolina.
- KAO, J.H.K. (1959). A graphical estimation of mixed Weibull parameters in life-testing electron tubes. *Technometrics*, 1, 389-407.
- KONDRATYEV, K.Y., GRIGORYEV, A.A., IVANIAN, G.A. ve PUTINTSEVA, G.A. (1993). Maps of spectral brightness coefficients for the U.S.S.R. territory and their statistical analysis. *International Journal of Remote Sensing*, 14(3), 521-535.
- LARKIN, K.P. (1979). An algorithm for assessing bimodality vs. unimodality in a univariate distribution. *Behav. Res. Meth. Instr.*, 11, 467-468.

- LEPELTIER, C. (1969). A simplified statistical treatment of geochemical data by graphical representation. *Econ. Geol.*, 64, 538-550.
- LEYTHAM, K.M. (1984). Maximum likelihood estimates for the parameters of mixture distributions. *Water resources research*, Vol. 20, No.7, 896-902.
- LOGANATHAN, A. ve RAJAGOPALAN, M. (1993). Bayes estimates of mixing parameters in finite mixture distributions. *Commun. Statist. Theory Meth.*, 22(11), 3013-3029.
- LOUIS, T.A. (1982). Finding the observed information matrix when using the EM algorithm. *J. R. Statist. Soc. B*, 44, 226-233.
- MACDONALD, P.D.M. (1971). Comment on a paper by Choi and Bulgren. *J. R. Statist. Soc. B*, 33, 326-329.
- MACDONALD, P.D.M. (1975). Estimation of finite distribution mixtures. In *Applied Statistics* (Ed. R.P. Gupta), 231-245, North Holland, Amsterdam.
- MACDONALD, P.D.M. (1991). Practical aspects of fitting mixture distributions to data. 1991 Proceedings of the Biopharmaceutical Section, Annual Meeting of ASA, Atlanta, Georgia, August 18-22.
- MACDONALD, P.D.M. ve PITCHER, T.J. (1979). Age groups from size-frequency data: a versatile and efficient method of analyzing distribution mixtures. *J. Fish. Res. Bd. Can.*, 36, 987-1001.
- MANDELBAUM, J. ve HARRIS, C.M. (1982). Parameter estimation under progressive censoring conditions for a finite mixture of Weibull distributions. *TIMS/Studies in Management Sciences*, 19, 239-260.

- MARKS,R.G. ve RAO,P.V. (1979). An estimation procedure for data containing outliers with a one-directional shift in the mean. JASA, 74, 614-620.
- MARTIN,E.S. (1936). A study of an Egyptian series of mandibles. With special reference to mathematical methods of sexing. Biometrika, 28, 149-178.
- MASUYAMA,M. (1977). A mixture of two gamma distributions applied to rheumatoid arthritis. Rep. Stat. Appl. Res. JUSE, 24, 28-31.
- MCLACHLAN,G.J. (1987). On bootstrapping the likelihood ratio test statistics for the number of components in a normal mixture. Applied Statistics, 36, 318-324.
- MCLACHLAN,G.J. ve BASFORD,K.E. (1988). Mixture models, inference and applications to clustering. Marcel Dekker inc., NewYork. (253 s.).
- MCLACHLAN,G.J. ve JONES,P.N. (1988). Fitting mixture models to grouped and truncated data via the EM algorithm. Biometrics, 44, 571-578.
- MENDENHALL,W. ve HADER,R.J. (1958). Estimation of parameters of mixed exponentially distributed failure time distributions from censored life test data. Biometrika, 45, 504-520.
- MINITAB STATISTICAL SOFTWARE (1991). MINITAB 8.2 Statistical software. Minitab Inc., 3081 Enterprise Drive, State College, PA 16801-3008.
- MONTGOMERY,D.C. ve PECK,E.A. (1992). Introduction to linear regression analysis. John Wiley and Sons inc., NewYork.

- MUNDY, E. (1972). On the resolution of mixed frequency distributions into normal components. *J. Math. Geol.*, 4, 55-60.
- MURRAY, G.D. ve TITTERINGTON, D.M. (1978). Estimation problems with data from a mixture. *Appl. Statist.*, 27, 325-334.
- NAYLOR, J.C. ve SMITH, A.F.M. (1982). Applications of a method for the efficient computation of posterior distributions. *Applied Statistics*, 31, 214-225.
- ODELL, P.L. ve BASU, J.P. (1976). Concerning several methods for estimating crop areas using remote sensing data. *Commun. in Statist. Theory and Methods*, A5(12), 1091-1114.
- O'NEILL, R. (1971). Algorithm AS 47. Function minimization using a simplex procedure. *Applied Statistics*. 20, 338-345.
- PATIL, G.P., BOSWELL, M.T., RATNAPARKHI, M.V. ve RAO, C.R. (1984). Dictionary and classified bibliography of statistical distributions in scientific work - continuous univariate models. Vol 2, International Co-operative Publishing House. Maryland, USA.
- PEARSON, K. (1894). Contributions to the mathematical theory of evolution. *Phil. Trans.. A*, 185, 71-110.
- PEARSON, K. (1914). A study of Trypanosome strains. *Biometrika*, 10, 85-143.
- PEREIRA, M.C. ve SETZER, A.W. (1993). Spectral characteristics of deforestation fires in NOAA/AVHRR images. *International Journal of Remote Sensing*, 14(3), 538-597.
- PETERS, B.C. ve COBERLY, W.A. (1976). The numerical evaluation of the maximum likelihood estimate of mixture proportions. *Commun. Statist. A*, 5, 1127-1135.

- POLLARD, H.S. (1934). On the relative stability of the median and arithmetic mean, with particular reference to certain frequency distributions which can be dissected into normal distributions. *Ann. Math. Statist.*, 5, 227-262.
- QUANDT, R.E. (1972). A new approach to estimating switching regressions. *JASA*, 67, 306-310.
- QUANDT, R.E. ve RAMSEY, J.B. (1978). Estimating mixtures of normal distributions and switching regression. *JASA*, 73, 730-738.
- RACE, G.J. (1973). *Laboratory Medicine*. Vol.3, Medical Department Harper and Row, publishers. NewYork.
- RAJAGOPALAN, M. ve LOGANATHAN, A. (1991). Bayes estimates of mixing proportions in finite mixture distributions. *Commun. Statist. Theory Meth.*, 20(8), 2337-2349.
- RAO, C.R. (1948). The utilization of multiple measurements in problems of biological classification. *J. R. Statist. Soc. B*, 10, 159-203.
- RAO, C.R. (1952). *Advanced statistical methods in biometric research*. Wiley, NewYork.
- RAPER, L.P., BALKAU, B., TAYLOR, R., MILNER, B., COLLINS, V. ve ZIMMET, P. (1982). Plasma glucose distributions in two Pacific populations: The bimodality phenomenon. Typescript.
- RAVEL, R. (1973). *Clinical Laboratory Medicine*. 245-262. Year book medical Publishers, inc. Chicago.
- REIBER, S., FERGUSON, J.F. ve BENJAMIN, M.M. (1987). An improved method for corrosion rate measurement by weight loss. *J. American Water Works Assoc.*, Vol.80, Iss.11, 41-46.

- RENDER, A.R. ve WALKER, F.H. (1984). Mixture densities, maximum likelihood and the EM algorithm. SIAM Review, Vol.26, No.2, 195-239.
- RICHARDS, J.A. (1986). Remote sensing digital image analysis. Springer-Verlag, Berlin.
- RIDER, P.R. (1961). The method of moments applied to a mixture of two exponential distributions, Ann. Math. Statist., 32, 143-147.
- RIDER, P.R. (1962). Estimating the parameters of mixed Poisson, Binomial and Weibull distributions by the method of moments. Bull. Internat. Statist. Inst., 39 Part 2, 225-232.
- ROBERTSON, C.A. ve FRYER, J.G. (1970). The bias and accuracy of moment estimators. Biometrika, 57, Part 1, 57-65.
- ROCCHINI, G. (1988). Numerical methods for the determination of the polarization resistance in corrosion rate monitoring and inhibitor testing. Corrosion, Vol.44, Iss.3, 158-164.
- ROCCHINI, G. (1993). A numerical method for the evaluation of the corrosion rate of a metal. Corrosion Science, Vol.34, Iss.6, 885-897.
- ROSENFELD, G.H., FITZPATRICK-LINS, K. ve LING, H.S. (1982). Sampling for the thematic map accuracy testing. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 48, 131-137.
- RUSHFORTH, N.B., BENNETT, P.H., STEINBERG, A.G., BURCH, T.A. ve MILLER, M. (1971). Diabetes in the Pima Indians. Evidence of bimodality in glucose tolerance distributions. Diabetes, 20, 756-765.

- RYAN,W.E., KELLY,S.L. ve WHITE,R.E. (1987). A mathematical model for the initial corrosion rate of a porous layer on a rotating disk electrode. J. Electrochemical Soc., Vol.134, Iss. 9, 2154-2159.
- SANDOR,T.,SRIDHAR,B. ve HOLLENBERG,N.K. (1978). Multiexponential fit of data by using the maximum likelihood method on a minicomputer. Comput. Biomed. Res., 11, 35-40.
- SETTLE,J.J. ve DRAKE,N.A. (1993). Linear mixing and the estimation of ground cover proportions. International Journal of Remote Sensing, 14(6), 1159-1177.
- SMITH,D.M. ve BARTLET,J.C. (1961). Calculation of the areas of isolated or overlapping normal probability curves. Nature, 191, 688-689.
- SMITH,A.F.M, SKENE,A.M., SHAW,J.E.H., NAYLOR,J. ve DRANSFIELD,M. (1985). The implementation of the Bayesian paradigm. Commun. Statist. to appear.
- SUCHINDRAN,C.M. ve LACHENBRUCH,P.A. (1974). Estimates of parameters in a probability model for first livebirth interval. JASA, 69, 507-513.
- SUNDBERG,R. (1976). An iterative method for solution of the likelihood equations for incomplete data from exponential families. Commun. Statist. Simulation and Computation, B5, 55-64.
- STATISTICAL GRAPHICS CORPORATION (1988). STATGRAPHICS 3.0 Package program, STSC, Inc., 2115 East Jefferson Street Rockville, Maryland 20852, USA.

- STARK, P.A. (1970). Introduction to numerical methods. Macmillan Publishing Co., inc., New York.
- TALLIS, G.M. ve LIGHT, R. (1968). The use of fractional moments for estimating the parameters of a mixed exponential distribution. *Technometrics*, 10, 161-175.
- TAN, W.Y. ve CHANG, W.C. (1972-a). Convolution approach to genetic analysis of quantitative characters of self-fertilized population. *Biometrics*, 28, 1073-1090.
- TAN, W.Y. ve CHANG, W.C. (1972-b). Some comparisons of the method of moments and the method of maximum likelihood in estimating parameters of a mixture of two normal densities. *JASA*, 67, 702-708.
- TANAKA, S. (1962). A method of analysing a polymodal frequency distribution and its application to the length distribution of the porgy, *Taia tumifrons* (T&S). *J. Fish. Res. Bd. Can.*, 19, 1143-1159.
- TANNER, W.F. (1959). Sample components obtained by the method of differences. *J. Sed. Pet.*, 29, 408-411.
- TANNER, W.F. (1962). Components of the hypsometric curve of the earth. *J. Geophys. Res.*, 67, 2841-2843.
- TAYLOR, B.J.R. (1965). The analysis of polymodal frequency distributions. *J. Anim. Ecol.*, 34, 445-452.
- TISELIUS, A. ve KABAT, E.A. (1939). Electrophoretic study of immune sera and purified antibody preparations. *J. Exp. Med.*, 69, 119-131.

- TITTERINGTON, D.M., SMITH, A.F.M. ve MAKOV, U.E. (1985). Statistical analysis of finite mixture distributions. John Wiley and Sons. Great Britain. (243 s.).
- USINGER, H. (1975). Pollenanalytische und stratigraphische Untersuchungen an zwei Spätglazial-Vorkommen in Schleswig-Holstein. Mitt. Arbeitsgem. Geobot. Schleswig-Holstein, Hamburg, 25.
- VAN ANDEL, T.H. (1973). Texture and disposal of sediments in the Panama Basin. J. Geol., 81, 434-457.
- VAN GENDEREN, J.L., LOCK, B.F. ve VASS, P.A. (1978). Statistical testing of thematic map accuracy. Remote Sensing of Environment, 7, 3-14.
- WALSH, G.R. (1975). Methods of optimization. Wiley, New York.
- WILD, A.E. (1965). Protein concentration of the rabbit foetal fluids. Proc. Roy. Soc. B, 163, 95-115.
- WILKINS, C.A. (1961). A problem concerned with weighting of distributions. JASA, 56, 281-292.
- WINDHAM, M.P. ve CUTLER, A. (1992). Information ratios for validating mixture analyses. JASA, Vol. 87, No. 420, Theory and Methods, 1188-1192.
- WOLFE, J.H. (1970). Pattern clustering by multivariate mixture analysis. Multivariate Behavioral Research, 5, 329-350.
- WU, C.F.J. (1983). On the convergence properties of the EM algorithm. Ann. Statist., 11, 95-103.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımda bana her türlü olanağı sağlayan, maddi ve manevi desteğini benden esirgemeyen sayın hocam Prof.Dr. Fikri AKDENİZ 'e teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Matematik Bölümü elemanlarına göstermiş oldukları anlayış ve desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

Tez çalışmamda; üçüncü bölümün uygulama kısmındaki verileri sağlayan sayın Dr. İlyas DEHRİ 'ye ve dördüncü bölümün uygulama kısmındaki verileri sağlayan sayın Öğr.Gör.Dr. Nuri EMRAHOĞLU 'na teşekkür ederim.

Tez çalışmam süresince göstermiş olduğu anlayıştan ve manevi desteğiden dolayı eşim Sevil EROL 'a teşekkür ederim.

ÖZGEÇMİŞ

26 Haziran 1965 tarihinde Adana ili, Bahçe ilçesi, Savranlı köyünde doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi sırasıyla; Adana Ahmet Karabucak İlkokulu, Adana Atatürk Ortaokulu ve Adana Borsa Lisesi 'nde tamamladım. 1983 yılında Orta Doğu Teknik Üniversitesi 'inde yüksek öğrenime başladım. İlk yıl hazırlık sınıfına devam ettim. Ocak 1989 'da aynı üniversitenin, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Uygulamalı Matematik dalından mezun oldum. 26 Temmuz 1989 tarihinde, Çukurova Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümünde Bilgisayar Uzmanı olarak göreve başladım. Eylül 1991 'da Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı' nda ve Prof.Dr. Fikri AKDENİZ 'in danışmanlığında 'Tek Değişkenli Dağılım Modelleri' konusunda yüksek lisansımı tamamladım. Aynı yıl doktora programına başladım. Halen Çukurova Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü 'nde öğretim görevlisi olarak çalışmaktayım.