

EYLÜL 2019

Yüksek Lisans Tezi - Matematik

AYDIN ÖZGÜLER

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU SPEKTRUMA SAHİP STURM-LIOUVILLE
PROBLEMLERİNİN MATRİS FORMU

MATEMATİK
YÜKSEK LİSANS TEZİ

AYDIN ÖZGÜLER
EYLÜL 2019

**SONLU SPEKTRUMA SAHİP STURM-LIOUVILLE
PROBLEMLERİNİN MATRİS FORMU**

Gaziantep Üniversitesi

Matematik

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Doç. Dr. Abdullah KABLAN

Aydın ÖZGÜLER

Eylül 2019



© 2019 [Aydın ÖZGÜLER]

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tezin Adı: Sonlu Spektruma Sahip Sturm-Liouville Problemlerinin
Matris Formu

Öğrencinin Adı Soyadı: Aydın ÖZGÜLER

Tez Savunma Tarihi: 05.09.2019

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Ahmet Necmeddin YAZICI
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof.Dr. Adil KILIÇ
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Abdullah KABLAN
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:

İmzası

Doç. Dr. Abdullah KABLAN

.....

Dr. Öğr. Üyesi Şükran UYGUN

.....

Dr. Öğr. Üyesi Bayram BALA

.....

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Aydın ÖZGÜLER

ABSTRACT
THE MATRIX FORM OF STURM-LIOUVILLE PROBLEMS
WITH FINITE SPECTRUM

ÖZGÜLER, Aydın
M.Sc. in Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Abdullah KABLAN
September 2019
50 pages

This thesis based on the fact that for every integer n , we construct a class of regular self-adjoint and non-self-adjoint Sturm-Liouville problems with exactly n eigenvalues. In this thesis, first we define a class of Sturm-Liouville equations will be named with Atkinson equation such that any Sturm-Liouville problem consisting of such an equation and an arbitrary separated and coupled real self-adjoint boundary condition has a representation as an equivalent finite dimension matrix eigenvalue problem. Then conversely, given any matrix eigenvalue problem of certain type and an arbitrary separated or coupled real self-adjoint boundary condition, we construct a class of Sturm-Liouville problems with the specified boundary condition, each of which is equivalent to the given matrix eigenvalue problem. Equivalent here means that they have exactly the same eigenvalues. We considered two type Sturm-Liouville problem which are regular Sturm-Liouville problem and Sturm-Liouville problem with transmission condition.

Key Words: Sturm-Liouville Problems, Finite Spectrum, Matrix Eigenvalue Problems

ÖZET

SONLU SPEKTRUMA SAHİP STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİNİN MATRİS FORMU

ÖZGÜLER, Aydın

Yüksek Lisans Tezi, Matematik

Danışman: Doç. Dr. Abdullah KABLAN

Eylül 2019

50 sayfa

Bu tez, her n tamsayısı için tam olarak n tane özdeğere sahip düzenli kendine-eş ve kendine-eş olmayan Sturm-Liouville problemlerinin bir sınıfının oluşturulması gerçeğini temel almıştır. Bu tezde öncelikle daha sonra Atkinson denklemi olarak adlandırılacak olan bir tür Sturm-Liouville problemi tanımlayacağız. Öyle ki; bu türden denklemin, ayrık ve reel ayrık olmayan kendine-eş sınır şartıyla birlikte oluşturduğu Sturm-Liouville problemi sonlu boyutlu matris özdeğer problemi şeklinde bir temsile sahiptir. Tersine, verilen herhangi bir belirli tipteki matris özdeğer problemi ve keyfi ayrık veya reel ayrık olmayan kendine-eş sınır şartı için bu matris özdeğer problemine denk olan özel sınır şartına sahip bir Sturm-Liouville problemler sınıfı inşa edeceğiz. Burada denklik aynı özdeğere sahip olma anlamındadır. Düzenli Sturm-Liouville problemi ve geçiş şartlı Sturm-Liouville problemi şeklinde iki tür Sturm-Liouville problemi ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sturm-Liouville Problemi, Sonlu Spektrum, Matris Özdeğer Problemleri

Ece Işıl ve Yusuf Tuna'ya...

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda bulunarak bu günlere gelmemde en büyük pay sahibi olan aileme sonsuz teşekkür ederim.

Ayrıca desteğini ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Doç. Dr. Abdullah KABLAN'a minnettarlığımı sunarım.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ABSTRACT	iv
ÖZET	v
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	viii
SEMBOLLER LİSTESİ	ix
BÖLÜM 1: GİRİŞ	1
BÖLÜM 2: SONLU SPEKTRUMA SAHİP STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİNİN MATRİS GÖSTERİMLERİ	3
2.1. Giriş	3
2.2. Atkinson Tipinde SLP nin Matris Gösterimleri	5
2.3. Matris Özdeğer Problemlerinin Sturm-Liouville Gösterimleri	17
BÖLÜM 3: GEÇİŞ ŞARTLI STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİNİN MATRİS GÖSTERİMLERİ	21
3.1. Giriş	21
3.2. Geçiş Şartlarına Sahip Atkinson Tipindeki SLP'nin Matris Gösterimi	23
3.3. Matris Özdeğer Problemlerinin Sturm-Liouville Gösterimleri	38
BÖLÜM 4: SONUÇ	48
KAYNAKLAR	49

SEMBOLLER LİSTESİ

λ	Özdeğer
$L(J, \mathbb{R})$	J üzerinde Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar kümesi
SLP	Sturm-Liouville problemi
$[]^T$	Matris transpozu
$[]^*$	Matris eşleniği
$[]^{-1}$	Matris tersi

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu tezin esas amacı $-\infty < a < b < +\infty$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$-(py')' + qy = \lambda wy, \quad J = (a, b) \quad (1.1)$$

Sturm-Liouville denkleminin verilen (ayrık ve ayrık olmayan) sınır şartları ile birlikte oluşturduğu Sturm-Liouville operatörünün sonlu spektruma sahip formlarının matris gösterimleri bulmaktır. Genel Sturm-Liouville teorisinden biliyoruz ki; düzenli veya tekil olsun kendine-eş bir Sturm-Liouville probleminin (SLP) spektrum kümesi sınırsız ve dolayısıyla sonsuz elemana sahiptir. Bu sonuç genel olarak p katsayısı ile w ağırlık fonksiyonunun pozitif olması ile elde edilir. Ancak Atkinson [1] deki kitabında bu pozitiflik şartını oldukça esnetmiştir. Şöyle ki; p ve w fonksiyonlarını negatif olmayan fonksiyonlar olarak almış, ayrıca $1/p$ ve w nun her ikisini de bazı alt aralıklarda sıfıra özdeş almıştır. Daha sonra Kong ve Zettl bu fikirden yola çıkarak herhangi bir negatif olmayan n tamsayısı için, tam olarak n tane özdeğere sahip olan kendine-eş ve kendine-eş olamayan SLP leri inşa etmiştir, [2]. Dolayısıyla bir SLP nin özdeğerlerinin sayısı sonsuz tane olmaktan çıkıp sonlu hale gelmiş, hatta istenilen sayıda özdeğere sahip SLP leri inşa edilebilir duruma gelinmiştir. SLP lerinin özdeğerlerinin sonlu olması bir diğer sonlu özdeğere sahip olan matris özdeğer problemleri ile ilişki kurmaya yol açmış ve Kong, Volkmer ve Zettl [3] deki çalışmasında sonlu özdeğere sahip SLP lerinin matris gösterimlerini elde etmiştir. Bu çalışmada, $L(J, \mathbb{R})$ J üzerinde Lebesgue integrallene-bilir fonksiyonlar kümesini göstermek üzere ve

$$r = \frac{1}{p}, \quad q, w \in L(J, \mathbb{R}) \quad (1.2)$$

kabulleri altında (1.1) Sturm-Liouville denkleminin

$$AY(a) + BY(b) = 0, \quad Y = [y, py']^T \quad (1.3)$$

formunda iki noktalı düzgün ayırık ve ayırık olmayan sınır şartı ile oluşturduğu SLP nin matris gösterimlerini elde etmiştir. Burada A ve B , 2×2 boyutunda, kompleks matrislerdir. Bu problem detaylı bir şekilde Bölüm 2’de ele alınmış ve bütün özel durumlar düşünülerek her bir durum için ayrı ayrı matris gösterimleri bulunmuştur. Bu bölümde ayrıca yukarıdaki işlemlerin ters işlemi incelenmiş ve bir matris özdeğer probleminin SLP şeklindeki temsilleri bulunmuştur.

İki farklı problem arasındaki bu geçiş işlemleri başka bir problem için Bölüm 3’de verilmiştir. Bu bölümde özellikle titreşim problemlerindeki ısı ve kütle transferinde ortaya çıkan geçiş şartlı SLP leri incelenmiştir. Bu problem (1.1) Sturm-Liouville denkleminin, (1.3) sınır şartının ve (a, b) nin bir c iç noktasında

$$CY(c-) + DY(c+) = 0 \quad (1.4)$$

biçiminde tanımlanan geçiş şartının oluşturduğu bir problemdir. Tezde bu tür SLP için önce matris gösterimleri yapılmış ve daha sonra ters işlem uygulanmıştır. Bu bölüm için daha ayrıntılı bilgiler [4] den elde edilebilir.

BÖLÜM 2

SONLU SPEKTRUMA SAHİP STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİNİN MATRİS GÖSTERİMLERİ

2.1. Giriş

Bu bölümde düzenli kendine-eş, Atkinson tipindeki Sturm-Liouville problemleri ile aşağıdaki formda olan matris özdeğer problemleri arasındaki ilişkiyi sistematik bir şekilde açıklayacağız,

$$DX = \lambda WX. \quad (2.1)$$

Burada, D ve W , $n \times n$ boyutunda, $\mathbb{R}$ üzerinde matrisler ve W köşegensel matristir. Şimdi $-\infty < a < b < +\infty$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$-(py')' + qy = \lambda wy, \quad J = (a, b) \quad (2.2)$$

Sturm-Liouville denklemini ele alalım. $L(J, \mathbb{R})$ J üzerinde Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar kümesini gösterebiliriz. Burada problemi

$$r = \frac{1}{p}, \quad q, w \in L(J, \mathbb{R}) \quad (2.3)$$

şartları altında düşüneceğiz. [5] deki genel teoriden biliyoruz ki; (2.3) şartı altında (2.2) nin her bir y çözümü ve onun *kuazi-türevi* (*yarı-türevi*) py' J nin her kompakt alt kümesi üzerinde mutlak süreklidir ve J nin uç noktalarına sürekli genişletilebilir. Dolayısıyla burada $py'(t)$ yi tek bir fonksiyon gibi düşünebiliriz. Çünkü p üzerine ek bir hipotez koymadığımız sürece bu fonksiyonu $p(t)y'(t)$ olarak ayıramayacağız. Bu ve daha fazla bilgi için [5] kitabına bakılabilir. Şimdi

$$AY(a) + BY(b) = 0, \quad Y = [y, py']^T \quad (2.4)$$

formunda iki noktalı düzgün sınır şartını tanımlayalım. Burada A ve B , 2×2 boyutunda, kompleks matrislerdir. Bu sınır şartı

$$\text{rank}(A, B) = 2, \quad AEA^* = BEB^*, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

şartını sağlıyor ise buna kendine-eş sınır şartı denir. Yine [5,s.71] den biliyoruz ki; (2.5) şartları altında (2.4) sınır şartı ayrık ve ayrık olmayan şeklinde iki ayrı sınıfa ayrılır. Ayrık sınır şartları

$$\begin{aligned} \cos \alpha y(a) - \sin \alpha (py')(a) &= 0, \quad 0 \leq \alpha < \pi \\ \cos \beta y(b) - \sin \beta (py')(b) &= 0, \quad 0 < \alpha \leq \pi \end{aligned} \quad (2.6)$$

biçiminde *kanonik (düzgün) forma* sahiptir. Ayrık olmayan sınır şartları ise

$$Y(b) = KY(a), \quad K = (k_{ij}), \quad k_{ij} \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq i, j \leq 2, \quad \det(K) = 1 \quad (2.7)$$

biçiminde *kanonik (düzgün) forma* sahiptir.

Şimdi $u = y$ ve $v = (py')$ diyelim. Bu durumda, J üzerinde (3.2) denkleminin aşağıdaki sistem formunu elde etmiş oluruz:

$$u' = rv, \quad v' = (q - \lambda w)u \quad (2.8)$$

Klasik durumda, (2.2) deki r ve w J üzerinde pozitif olup (2.4) sınır şartı kendine-eş olduğu zaman (2.2)-(2.4) SLP sonsuz sayıdaki reel özdeğerlerin oluşturduğu ayrık spektruma sahiptir. Atkinson [1]'deki kitabında $r \geq 0$ ve $w \geq 0$ durumunu incelemiş ve r ve w fonksiyonlarını J nin bazı alt aralıklarında sıfıra özdeş almıştır. Atkinson göstermiştir ki; sonsuz sayıda özdeğerlerin varlığı için r ve w fonksiyonlarının J nin bazı alt aralıklarında pozitif olması ve w nun her bir uç noktanın komşuluğunda sıfıra denk olmaması yeterlidir. Atkinson ayrıca şunu da belirtmiştir ki; eğer böyle bir ortak alt aralık yok ise o zaman sonlu sayıda özdeğer olabilir. Bu iddia Kong, Wu ve Zettl tarafından daha sonra doğrulanmış ve n pozitif bir tamsayı olmak üzere tam olarak n tane özdeğer sahip olan problemler inşa edilmiştir, [2]. Bu yazarlar her ne kadar karakteristik fonksiyonların ardıl inşası için bir algoritma bulmuş olsalar da bu problemlerin açık şekilde matris gösterimlerini

bulmamışlardır. Volkmer ve Zettle'da yine bu problemler üzerine çalışmış ve Dirichlet sınır şartı için Ambarzumian teoremine benzer şekilde Atkinson tipindeki problemler için ters spektral teoremi ispatlamıştır, [6,7].

Bu bölümde Atkinson tipinde Sturm-Liouville denklemler sınıfını tanımlayacağız, (aşağıdaki Tanım 2.1'e bakınız) ve göstereceğiz ki; bu sınıftan verilen herhangi bir Sturm-Liouville denklemi ve keyfi ayırık ya da ayırık olmayan kendine-eş bir (2.4) sınır şartı için (2.1) formunda bir matris özdeğer problemi vardır, öyle ki; bu matris özdeğer probleminin özdeğerlerinin sayısı tam olarak (2.2)-(2.4) karşılık gelen SLP nin özdeğerlerinin sayısı ile aynıdır. Tersine, (2.1) formunda gerekli şartları sağlayan bir matris özdeğer problemi için özdeğerlerinin sayısı bu matris özdeğer problemininki ile aynı olan keyfi ayırık ya da ayırık olmayan kendine-eş sınır şartına sahip bir SLP vardır. İşte bu ilişki geçiş şartlı, Atkinson tipindeki bir SLP ile belirli matris özdeğer problemleri arasındaki bağlantıyı ortaya koymaktadır. Aşağıda görüleceği üzere, bu türden bağlantılar bir problemin sonuçlarını diğer problemin sonuçlarına 'transfer' etmek için kullanılabilir.

2.2. Atkinson Tipinde SLP nin Matris Gösterimleri

Bu bölümü oluştururken Zettle [6-7] ve Volkmer [8-9] deki yöntemler kullanılacaktır.

Tanım 2.1. Eğer bir $n > 1$ pozitif tamsayısı için J aralığının

$$a = a_0 < b_0 < a_1 < b_1 < \dots < a_n < b_n = b \quad (2.9)$$

biçiminde bir parçalanışı var ise, öyle ki $[a_k, b_k]$ aralıkları üzerinde

$$r = 0, \quad k = 0, \dots, n; \quad \int_{b_{k-1}}^{a_k} r \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad (2.10)$$

ve $[b_{k-1}, a_k]$ aralıkları üzerinde

$$q = 0 = w, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad \int_{a_k}^{b_k} w \neq 0, \quad \int_{a_k}^{b_k} q \neq 0, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (2.11)$$

ise o zaman (2.2) Sturm-Liouville denkleminde *Atkinson tipinden denklem* denir. Eğer problem Atkinson tipinde bir denklem ve kendine eş bir sınır şartından oluşmuş ise o zaman da bu Sturm-Liouville Problemine *Atkinson tipinden problem* denir.

Bu bölümde Atkinson tipi Sturm-Liouville problemlerine karşılık gelen ve aynı özdeşliklere sahip matris özdeğer problemlerini oluşturacağız.

Tanım 2.2. Bir Atkinson tipinde SLP ile bir matris özdeğer problemi aynı özdeşliklere sahip ise bunlara *denktir* denir.

Teoremi ifade etmeden önce bazı ilave gösterimlere ihtiyaç duyacağız. Şöyle ki (2.9)-(2.11) verilsin ve

$$p_k = \left(\int_{b_{k-1}}^{a_k} r \right)^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad q_k = \int_{a_k}^{b_k} q, \quad w_k = \int_{a_k}^{b_k} w, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (2.12)$$

olsun. Burada belirtelim ki; (2.10) ve (2.11) den $p_k, w_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dır ve bunlar üzerinde herhangi bir işaret kısıtlaması yoktur. Yine (2.10) ve (2.11) den görebiliriz ki (2.8) in herhangi bir u, v çözümleri için; $k = 0, 1, \dots, n$ iken $[a_k, b_k]$ aralığında u sabit ve yine $k = 0, 1, \dots, n$ iken $[b_{k-1}, a_k]$ aralığında v sabittir. Şimdi

$$u_k = u(t), \quad t \in [a_k, b_k], \quad k = 0, 1, \dots, n; \quad v_k = v(t), \quad t \in [b_{k-1}, a_k], \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.13)$$

olsun ve

$$v_0 = v(a_0) = v(a), \quad v_{n+1} = v(b_n) = v(b) \quad (2.14)$$

diyelim.

Lemma 2.1. (2.2) denkleminin Atkinson tipinde olduğunu kabul edelim. O zaman (2.8) denkleminin herhangi u, v çözümleri için

$$p_k(u_k - u_{k-1}) = v_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.15)$$

ve

$$v_{k+1} - v_k = u_k(q_k - \lambda w_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2.16)$$

dir. Tersine, (2.15), (2.16) sisteminin herhangi u_k , $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ve v_k , $k = 0, 1, 2, \dots, n + 1$ çözümü için (2.8) denkleminin (2.13) ve (2.14) yı sağlayan bir tek $u(t)$ ve $v(t)$ çözümü vardır.

İspat: (2.8) in ilk denkleminde, $k = 1, 2, \dots, n$ için,

$$u_k - u_{k-1} = u(a_k) - u(a_{k-1}) = \int_{a_{k-1}}^{a_k} u' = \int_{a_{k-1}}^{a_k} rv = u_k \int_{b_{k-1}}^{a_k} r = v_k / p_k$$

elde edilir. Bu da (2.15) dir. (2.16) de (2.8) in ikinci denkleminde elde edilir.

Diğer taraftan, eğer u_k, v_k (2.15) ve (2.16) yı sağlarsa (2.13) ve (2.14) de göre $u(t)$ ve $v(t)$ yi tanımlarız ve daha sonra onları sürekli bir şekilde bütün J aralığına (2.8) deki denklemleri alt aralıklar üzerinde integralleyerek (2.8) in çözümleri olarak genişletiriz.

Teorem 2.1. $\alpha \in [0, \pi)$ ve $\beta \in (0, \pi]$ olsun. $(n + 1) \times (n + 1)$ boyutlu üç köşegensel

$$P_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} p_1 \sin \alpha + \cos \alpha & -p_1 \sin \alpha & & & \\ & -p_1 & p_1 + p_2 & -p_2 & \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & -p_{n-1} & p_{n+1} + p_n & -p_n \\ & & & & -p_n \sin \beta & p_n \sin \beta - \cos \beta \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

matrisini ve

$$Q_{\alpha\beta} = \text{diag}(q_0 \sin \alpha, q_1, \dots, q_n \sin \beta), W_{\alpha\beta} = \text{diag}(w_0 \sin \alpha, w_1, \dots, w_{n-1}, w_n \sin \beta) \quad (2.18)$$

köşegensel matrislerini tanımlayalım. O zaman (2.2), (2.6) SLP

$$(P_{\alpha\beta} + Q_{\alpha\beta})U = \lambda W_{\alpha\beta} U \quad (2.19)$$

biçimindeki matris özdeğer problemine denktir. Burada $U = [u_0, u_1, \dots, u_n]^T$ dir. Ayrıca tüm özdeğerler basit ve (2.2), (2.6) SLP nin $u(t)$ özfonksiyonu ile aynı özdeğere karşılık gelen (2.19) matris özdeğer probleminin U özvektörü arasında $u(t) = u_k$, $t \in [a_k, b_k]$, $k = 0, 1, \dots, n$ biçiminde bir ilişki vardır.

İspat: (2.15), (2.16) sisteminin çözümleri ile aşağıdaki sistemin çözümleri arasında bire-bir bir ilişki vardır:

$$p_1(u_1 - u_0) - v_0 = u_0(q_0 - \lambda w_0), \quad (2.20)$$

$$p_{k+1}(u_{k+1} - u_k) - p_k(u_k - u_{k-1}) = u_k(q_k - \lambda w_k), \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.21)$$

$$v_{n+1} - p_n(u_n - u_{n-1}) = u_n(q_n - \lambda w_n). \quad (2.22)$$

Gerçekten de kabul edelim ki; u_k , $k = 0, 1, \dots, n$ ve v_k , $k = 0, 1, \dots, n+1$ (2.15), (2.16) sisteminin çözümü olsun. O zaman (2.15), (2.16) dan (2.20)-(2.22) elde edilir. Diğer taraftan varsayalım ki (2.20)-(2.22) sisteminin bir çözümü u_k , $k = 0, 1, \dots, n$ olsun. O zaman v_0 ve v_{n+1} sırasıyla (2.20) ve (2.22) den elde edilir. v_k , $k = 1, 2, \dots, n$ (2.15) den tanımlı olsun. O zaman (2.20)-(2.22) yi kullanarak (2.16) yı elde ederiz.

Böylece Lemma 2.1 den (2.8) in (2.6) dan dolayı herhangi bir çözümü (2.20)-(2.22) sisteminin çözümleri ile tek bir şekilde belirlenir. Ayrıca (2.6) dan

$$u_0 \cos \alpha = v_0 \sin \alpha, \quad u_n \cos \beta = v_{n+1} \sin \beta. \quad (2.23)$$

elde edilir ve denklik (2.20)-(2.23) den sağlanır.

Sonuç 2.1. $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ olsun. $(n+1) \times (n+1)$ boyutunda simetrik üç köşegensel

$$P_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} p_1 + \cot \alpha & -p_1 & & & & \\ & -p_1 & p_1 + p_2 & -p_2 & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & -p_{n-1} & p_{n-1} + p_n & -p_n \\ & & & & -p_n & p_n - \cot \beta \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

matrisini ve

$$Q_{\alpha\beta} = \text{diag}(q_0, q_1, \dots, q_{n-1}, q_n), \quad W_{\alpha\beta} = (w_0, w_1, \dots, w_{n-1}, w_n) \quad (2.25)$$

köşegensel matrislerini tanımlayalım. O zaman (2.2), (2.6) SLP

$$(P_{\alpha\beta} + Q_{\alpha\beta})U = \lambda W_{\alpha\beta} U \quad (2.26)$$

matris özdeğer problemine denktir. Burada $U = [u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, u_n]^T$ ve katlılık da dikkate alınarak tam olarak $n + 1$ tane özdeğere sahiptir.

İspat: Bu durumda (2.26) yı elde etmek için (2.19) sisteminin ilk ve son satırını sırasıyla $\sin \alpha$ ve $\sin \beta$ ile böleriz.

Sonuç 2.2. $\alpha = 0$ ve $\beta \in (0, \pi)$ olarak kabul edelim. $n \times n$ boyutunda simetrik üç köşegensel matrisini

$$P_{0\beta} = \begin{bmatrix} p_1 + p_2 & -p_2 & & & \\ -p_2 & p_2 + p_3 & -p_3 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & & -p_{n-1} & p_{n-1} + p_n & -p_n \\ & & & & -p_n & p_n - \cot \beta \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

ve

$$Q_{0\beta} = \text{diag}(q_1, \dots, q_{n-1}, q_n), \quad W_{\alpha\beta} = \text{diag}(w_1, \dots, w_{n-1}, w_n) \quad (2.28)$$

köşegensel matrislerini tanımlayalım. O zaman (2.2), (2.6) SLP

$$(P_{0\beta} + Q_{0\beta})U = \lambda W_{0\beta}U \quad (2.29)$$

matris özdeğer problemine denktir. Burada $U = [u_1, \dots, u_n]^T$ ve katlılık da dikkate alınarak bu problemler tam olarak n tane özdeğere sahiptir. Ayrıca (2.2), (2.6) SLP nin özfonksiyonu $u(t)$ ve (2.29) matris özdeğer probleminin aynı özdeğere karşılık gelen özvektörü U , $k = 0, 1, \dots, n$ olmak üzere $t \in [a_0, b_0]$ iken $u(t) = 0$ ve $t \in [a_k, b_k]$ iken $u(t) = u_k$ eşitliklerini sağlarlar.

İspat: Bu durumda, $\sin \alpha = 0$ ve $u_0 = 0$ olduğundan; $P_{\alpha\beta}$, $Q_{\alpha\beta}$ ve $W_{\alpha\beta}$ matrislerinin ilk satır ve ilk sütunlarının (2.19) sistemine katkıları olmadığından bunlar matrislerden çıkarılabilirler. Böylece son satırı $\sin \beta$ ile bölersek (2.29)'i elde ederiz.

Sonuç 2.3. Kabul edelim ki $\alpha \in [0, \pi]$ ve $\beta = \pi$ olsun. $n \times n$ boyutunda simetrik üç köşegensel matris

$$P_{\alpha\pi} = \begin{bmatrix} p_1 + \cot \alpha & -p_1 & & & & \\ & -p_1 & p_1 + p_2 & -p_2 & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & -p_{n-2} & p_{n-2} + p_{n-1} & -p_{n-1} \\ & & & & -p_{n-1} & p_{n-1} + p_n \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

ve

$$Q_{\alpha\pi} = \text{diag}(q_0, q_1, \dots, q_{n-1}), \quad W_{\alpha\pi} = \text{diag}(w_0, w_1, \dots, w_{n-1}) \quad (2.31)$$

köşegensel matrislerini tanımlayalım. O zaman (2.2), (2.6) SLP

$$(P_{\alpha\pi} + Q_{\alpha\pi})U = \lambda W_{\alpha\pi} U, \quad U = [u_0, \dots, u_{n-1}]^T \quad (2.32)$$

matris özdeğer problemine denktir. Burada $U = [u_1, \dots, u_n]^T$ ve katlılık da dikkate alınarak bu problemler tam olarak n tane özdeğere sahiptir. Ayrıca (2.2), (2.6) SLP nin $u(t)$ özfonksiyonu ve (2.29) matris özdeğer probleminin aynı özdeğere karşılık gelen özvektörü U , $k = 0, 1, \dots, n-1$ olmak üzere $t \in [a_n, b_n]$ iken $u(t) = 0$, ve $t \in [a_k, b_k]$ iken $u(t) = u_k$ eşitliklerini sağlarlar.

İspat: Bu durumda $\sin \beta = 0$ ve $u_n = 0$ olduğundan; $P_{\alpha\beta}$, $Q_{\alpha\beta}$ ve $W_{\alpha\beta}$ matrislerinin ilk satır ve ilk sütunlarının (2.19) sistemine katkıları olmayıp matrislerden çıkarılabilirler. Böylece son satırı $\sin \beta$ ile bölersek (2.29) i elde ederiz.

Sonuç 2.4. Kabul edelim ki $\alpha = 0$ ve $\beta = \pi$ olsun. $(n-1) \times (n-1)$ boyutunda simetrik üç köşegensel matris

$$P_{0\pi} = \begin{bmatrix} p_1 + p_2 & -p_2 & & & & \\ & -p_2 & p_2 + p_3 & -p_3 & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & -p_{n-2} & p_{n-2} + p_{n-1} & -p_{n-1} \\ & & & & -p_{n-1} & p_{n-1} + p_n \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

ve

$$Q_{0\pi} = \text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_{n-1}), \quad W_{0\pi} = \text{diag}(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) \quad (2.34)$$

köşegensel matrislerini tanımlayalım. O zaman (2.2), (1.6) SLP

$$(P_{0\pi} + Q_{0\pi})U = \lambda W_{0\pi} U \quad (2.35)$$

matris özdeğer problemine denktir. Burada $U = [u_1, \dots, u_{n-1}]^T$ olup, katlılık da dikkate alınarak bu problemler $n - 1$ tane özdeğere sahiptir. Ayrıca (2.2), (2.6) SLP nin $u(t)$ özfonksiyonu ve (2.29) matris özdeğer probleminin aynı özdeğere karşılık gelen özvektörü U ; $k = 1, \dots, n - 1$ olmak üzere $t \in [a_0, b_0] \cup [a_n, b_n]$ iken $u(t) = 0$ ve $t \in [a_k, b_k]$ iken $u(t) = u_k$ eşitliklerini sağlarlar.

İspat: Bu durumda $\sin \alpha = \sin \beta = 0$ ve $u_0 = u_n = 0$ olduğundan $P_{\alpha\beta}$, $Q_{\alpha\beta}$ ve $W_{\alpha\beta}$ matrislerinin ilk satır ve ilk sütunlarının (2.19) sistemine katkıları olmayıp matrislerden çıkarılabilirler. Böylece son satırı $\sin \beta$ ile bölersek (2.35) i elde ederiz.

Teorem 2.1 ve sonuçları gösteriyor ki; kendine eş ayırık sınır şartlı Atkinson tipindeki tüm SLP leri üç köşegensel matris özdeğer problemleri biçiminde gösterimlere sahiptir. Yine görüyoruz ki herhangi reel ayırık olmayan kendine eş sınır şartlı Atkinson tipindeki tüm SLP de matris gösterimlerine sahiptir. Bu durumda P simetrik devirli üç köşegenseldir, yani sağ üst ve sol alt elemanları sıfır olmayan üç köşegensel matrislerdir.

Teorem 2.2. $k_{12} = 0$ olmak üzere (2.7) sınır şartlarını ele alalım. Aşağıdaki $n \times n$ simetrik devirli üç köşegensel matrisi

$$P_0 = \begin{bmatrix} -k_{11}k_{21} + p_1 + k_{11}^2 p_n & -p_1 & & & -k_{11}p_n \\ & -p_1 & p_1 + p_2 & -p_2 & \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & -p_{n-2} & p_{n-2} + p_{n-1} & -p_{n-1} \\ & -k_{11}p_n & & & -p_{n-1} & p_{n-1} + p_n \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

ve yine aşağıdaki köşegensel matrisleri tanımlayalım.

$$Q_0 = \text{diag}(q_0 + k_{11}^2 q_n, q_1, \dots, q_{n-1}), \quad W_0 = \text{diag}(w_0 + k_{11}^2 w_n, w_1, \dots, w_{n-1}) \quad (2.37)$$

Bu durumda (2.2), (2.7) SLP aşağıdaki matris özdeğer problemine denktir.

$$(P_0 + Q_0)U = \lambda W_0 U \quad (2.38)$$

Burada $U = [u_0, u_1, \dots, u_{n-1}]^T$, $w_0 + k_{11}^2 w_n \neq 0$ ve katlılık da dikkate alınarak tam olarak n tane özdeğer vardır. Ayrıca (2.2), (2.7) SLP nin $u(t)$ özfonksiyonu ile (2.38) matris özdeğer probleminin aynı özdeğere karşılık gelen U özvektörü arasında $t \in [a_k, b_k]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ olduğu zaman $u(t) = u_k$ ve $t \in [a_n, b_n]$ olduğu zaman $u(t) = k_{11} u_0$ ilişkisi vardır.

İspat: $k_{12} = 0$ olduğunda (2.7) sınır şartları aşağıdakilerle aynıdır.

$$u_n = k_{11} u_0, \quad k_{11} k_{22} = 1 \quad (2.39)$$

Burada $k_{11} k_{22} = 1$ dir. Şimdi göstereceğiz ki (2.15), (2.16) ve (2.39) sınır şartlarının oluşturduğu sisteminin çözümleri ile aşağıdaki sistemin çözümleri arasında bire-bir eşleme vardır.

$$\left[-k_{11} k_{21} + (p_1 + q_0 - \lambda w_0) + k_{11}^2 (p_n + q_n - \lambda w_n) \right] u_0 - p_1 u_1 - k_{11} p_n u_{n-1} = 0 \quad (2.40)$$

$$p_{k+1}(u_{k+1} - u_k) - p_k(u_k - u_{k-1}) = u_k(q_k - \lambda w_k), \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.41)$$

Gerçekten de eğer u_k , $k = 1, 2, \dots, n$ ve v_k , $k = 1, \dots, n+1$ nin (2.15), (2.16) ve (2.39) sisteminin çözümleri olduklarını kabul edersek, o zaman (2.15), (2.16) dan (2.41) ün elde edilebileceği kolaylıkla görülebilir. (2.15) de $k = 1$ ve (2.16) de $k = 0$ alınırsa

$$v_0 = p_1(u_1 - u_0) - u_0(q_0 - \lambda w_0) \quad (2.42)$$

olur. Yine (2.15) ve (2.16) da $k = n$ alınırsa

$$u_{n+1} = p_n(u_n - u_{n-1}) + u_n(q_n - \lambda w_n) \quad (2.43)$$

elde edilir. (2.39), (2.42) ve (2.43) birlikte düşünıldüğünde

$$p_n(k_{11}u_0 - u_{n-1}) + k_{11}u_0(q_n - \lambda w_n) = k_{21}u_0 + k_{22}[p_1(u_1 - u_0) - u_0(q_0 - \lambda w_0)] \quad (2.44)$$

sonucuna ulaşılır.

Burada $k_{11}k_{22} = 1$ dir. Böylece (2.44) den (2.40) elde edilir. Diğer taraftan kabul edelim ki $u_k, k = 0, 1, \dots, n$ (2.40), (2.41) in çözümü olsun. O zaman (2.39), (2.42) ve (2.43) den sırasıyla u_n, v_0 ve v_n elde edilir. Şimdi (2.15) den $v_k, k = 1, 2, \dots, n$ tanımlanmış olsun. Bu durumda (2.42) nin kullanımından ve (2.43) deki tümevarım yönteminden (2.16) yı elde ederiz. Yine (2.42)-(2.44) den $v_{n+1} = k_{21}u_0 + k_{22}v_0$ olduğunu görürüz. Dolayısıyla (2.39) sınır şartları sağlanmış olur. Böylece Lemma 2.1 den (2.2), (2.7) SLP nin herhangi bir çözümü (2.40), (2.41) sisteminin çözümleri ile tek bir şekilde belirlenmiş olur.

Uyarı 2.1. Teorem 2.2 de ele alınan $k_{12} = 0$ özel durumu aşağıdaki ‘genel’ periyodik sınır şartları tipini de kapsar.

$$c \neq 0 \text{ için } k_{21} = k_{12} = 0 \quad k_{11} = c \text{ ve } k_{22} = \frac{1}{c}$$

Bu $c = k$ olduğunda *periyodik şart*, $c = -1$ olduğunda da *yarı-periyodik şarttır*.

Teorem 2.3. $k_{12} \neq 0$ olmak üzere (2.7) sınır şartlarını ele alalım. Aşağıdaki $(n+1) \times (n+1)$ simetrik devirli üç köşegensel matrisi

$$P_1 = \begin{bmatrix} p_1 - \frac{k_{11}}{k_{12}} & -p_1 & & & \frac{1}{k_{12}} \\ -p_1 & p_1 + p_2 & -p_2 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & -p_{n-1} & p_{n-1} + p_n & -p_n \\ \frac{1}{k_{12}} & & & -p_n & p_n - \frac{k_{22}}{k_{12}} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

ve

$$Q_1 = \text{diag}(q_0, q_1, \dots, q_{n-1}, q_n), W_1 = (w_0, w_1, \dots, w_{n-1}, w_n) \quad (2.46)$$

köşegensel matrislerini tanımlayalım. O zaman (2.2), (2.7) SLP aşağıdaki matris özdeğer problemine denktir.

$$(P_1 + Q_1)U = \lambda W_1 U \quad (2.47)$$

Burada $U = [u_0, u_1, \dots, u_n]^T$ ve ayrıca (2.2), (2.7) SLP nin $u(t)$ özfonksiyonları ile (2.47) matris özdeğer problemi arasında $u(t) = u_k, t \in [a_k, b_k], k = 0, 1, \dots, n$ ilişkisi vardır.

İspat: (2.7) sınır şartı aşağıdaki gibidir,

$$u_n = k_{11}u_0 + k_{12}v_0, v_{n+1} = k_{21}u_0 + k_{22}v_0.$$

$k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} = 1$ olduğundan aşağıdaki şekilde de yazılabilir

$$v_0 = -\frac{k_{11}}{k_{12}}u_0 + \frac{1}{k_{12}}u_n, v_{n+1} = -\frac{1}{k_{12}}u_0 + \frac{k_{22}}{k_{12}}u_n. \quad (2.48)$$

Buradaki iddiamız (2.47) sınır şartına sahip (2.15), (2.16) sisteminin çözümleri ile aşağıdaki sistemin çözümleri arasında bire-bir eşleme vardır.

$$\left(p_1 - \frac{k_{11}}{k_{22}} + q_0 - \lambda w_0 \right) u_0 - p_1 u_1 + \frac{1}{k_{12}} u_n = 0, \quad (2.49)$$

$$p_{k+1}(u_{k+1} - u_k) - p_k(u_k - u_{k-1}) = u_k(q_k - \lambda w_k), k = 1, 2, \dots, n-1, \quad (2.50)$$

$$\frac{1}{k_{12}} u_0 - p_n u_{n-1} + \left(p_n - \frac{k_{22}}{k_{22}} + q_n - \lambda w_n \right) u_n = 0. \quad (2.51)$$

Gerçekten de kabul edelim ki $u_k, k = 0, 1, \dots, n$ ve $v_k, k = 1, 2, \dots, n$ (2.15), (2.16) ve (2.48) sisteminin çözümleri olsun. O zaman (2.15), (2.16) dan (2.50) kolaylıkla elde edilir. Teorem 2.2 nin ispatındaki sebeplerden v_0 ve v_{n+1} sırasıyla (2.42) ve (2.43) ü sağlar. Böylece (2.49) ve (2.51); (2.42), (2.43) ve (2.48) in sonuçları olur.

Diğer taraftan eğer $u_k, k = 0, 1, \dots, n$ (2.49)-(2.51) sisteminin çözümü ise o zaman v_0 ve v_n sırasıyla (2.42) ve (2.43) den elde edilir. Şimdi $v_k, k = 1, 2, \dots, n$ (2.15) den tanımlanmış olsun. O zaman (2.42) ve (2.43) ün kullanımından ve (2.50) ye uygulanacak tümevarım yönteminden (2.16) elde edilir. Ayrıca (2.42), (2.43), (2.49) ve (2.51) den (2.48) sınır şartının sağlandığı görülür. Böylece Lemma 2.1 den (2.8), (2.7) SLP nin ve dolayısıyla (2.2), (2.7) SLP nin herhangi bir çözümü (2.49)-(2.51) sisteminin çözümü ile tek bir şekilde belirlenir.

Uyarı 2.2. Teorem 2.2 ve Teorem 2.3 karşılaştırıldığında matris sisteminin boyutunun ilkinde n sonrakinde $n + 1$ olduğu görülür. Bunun sebebi u_n i u_0 ın terimleri cinsinden yazmak için $u_n = k_{11}u_0$ ın kullanılmış olmasıdır. Böylece katlılıkta dikkate alınarak Teorem 2.2 de tam olarak n tane, Teorem 2.3 de ise $n + 1$ tane özdeğer vardır.

Aşağıdaki sonuç her Atkinson tipindeki SLP nin parçalı sabit katsayılı SLP ne denk olmasıyla ilgilidir.

Teorem 2.4. Kabul edelim ki (2.2) denklemi Atkinson tipindendir ve $p_k, k = 1, 2, \dots, n$ ve $q_k, w_k, k = 0, 1, \dots, n$ (2.12) den verilmiş olsun. J üzerinde aşağıdaki parçalı sabit $\bar{p}, \bar{q}$ ve $\bar{w}$ fonksiyonlarını tanımlayalım:

$$\begin{aligned}\bar{p}(t) &= \begin{cases} p_k(a_k - b_{k-1}), t \in [b_{k-1}, a_k], k = 1, 2, \dots, n \\ \infty, & t \in [a_k, b_k], k = 0, 1, \dots, n; \end{cases} \\ \bar{q}(t) &= \begin{cases} \frac{q_k}{(b_k - a_k)}, t \in [a_k, b_k], k = 0, 1, \dots, n \\ 0, & t \in [b_{k-1}, a_k], k = 1, 2, \dots, n; \end{cases} \\ \bar{w}(t) &= \begin{cases} \frac{w_k}{(b_k - a_k)}, t \in [a_k, b_k], k = 0, 1, \dots, n \\ 0, & t \in [b_{k-1}, a_k], k = 1, 2, \dots, n. \end{cases}\end{aligned}\tag{2.52}$$

Yine kabul edelim ki (2.4) kendine eş sınır şartı ayırık veya reel ayırık olmayan olsun. O zaman J üzerinde (2.2), (2.4) SLP aşağıdaki parçalı sabit katsayılı denklemin (1.4) deki aynı sınır şartları ile oluşturduğu SLP ile aynı özdeğere sahiptir,

$$-(\bar{p}y')' + \bar{q}y = \lambda \bar{w}y. \quad (2.53)$$

İspat: Açıkça görebiliriz ki (2.2), (2.4) SLP ve (2.53), (2.4) SLP nin her ikisi de aynı p_k , $k = 1, 2, \dots, n$ ve q_k , w_k , $k = 0, 1, \dots, n$ değerlerini belirler. Böylece hangi (2.4) sınır şartını içerdiğine bağlı olarak Teorem 2.1 ile Teorem 2.3 arasındaki teoremlerin birisinden bu problemler aynı matris özdeğer problemine dolayısıyla özdeğere sahiptirler.

Teorem 2.4 den görebiliriz ki verilen J aralığı üzerinde tespit edilmiş (2.4) sınır şartı için (2.53) SLP ile aynı özdeğere sahip Atkinson tipinde SLP ler ailesi vardır. Bu türden aileye (2.53), (2.4) SLP nin *denklik ailesi* denir.

Teorem 2.5. Teorem 2.1 - Teorem 2.3 deki kabullere ek olarak, ayrıca $w_k > 0$, $k = 0, 1, \dots, n$ olsun. O zaman (2.2), (2.4) SLP ve (2.19), (2.38) ve (2.47) matris özdeğer problemlerinin özdeğerleri reeldir. Ayrıca ayırık sınır şartları altında eğer $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ ise $n + 1$ tane, eğer $\alpha = 0$ ise n tane ve eğer $\alpha = 0$ veya $\beta = \pi$ ise $n - 1$ tane özdeğer vardır.

İspat: [5] deki temel Sturm-Liouville teorisinden veya matris özdeğer problemleri teorisinden ispat yapılabilir.

Uyarı 2.3. Daha önce de belirtildiği üzere, eğer p ve w J nin bir ortak alt aralığında pozitif ve w her bir uç noktanın komşuluğunda sıfıra denk değilse, o zaman SLP üstten sınırsız ancak alttan sınırlı olan sonsuz sayıda özdeğere sahiptir. Möller [10] ve Kong, Möller, Wu ve Zettle [11] ayrıca göstermiştir ki; klasik durumda, eğer p veya w işaret değiştirirse, ki bu durumda pozitif Lebesgue ölçümlü J nin alt kümeleri üzerinde negatif ve pozitif değerler alır, o zaman özdeğerler alttan ve üstten sınırsızdır.

Atkinson tipindeki SLP için sadece sonlu sayıda özdeğerler vardır. (2.12) den açıktır ki, (a_k, b_k) aralığında işaretini değiştiren bir w için w_k pozitifdir. Aynı uyarı p_k için de yapılabilir. Böylece daha önceki paragrafta bahsedilen tipteki SLP nin tersine daha fazla özdeğer ‘üretmeksizin’ Atkinson tipindeki problemlerde p veya w işaret değiştirebilir.

2.3. Matris Özdeğer Problemlerinin Sturm-Liouville Gösterimleri

Bu bölümde aşağıdaki tipte matris özdeğer problemlerinin Atkinson tipinde SLP olarak gösterime sahip olmasını ele alacağız.

$$DX = \lambda BX \quad (2.54)$$

Burada $D = (d_{ij})$ $d_{i,i+1} \neq 0, i = 1, 2, \dots, m-1$, olmak üzere $m \times m$ boyutlu reel, simetrik ya üç köşegensel ya da hemen hemen üç köşegensel matris, $B = \text{diag}(b_{11}, \dots, b_{mm})$, $b_{kk} \neq 0$ dır. Teorem 2.4 den bu tür gösterimlerin tek olmadığı söylenebilir. Burada (2.53), (2.4) SLP ve onların denklik ailesini kullanarak (2.54) matris özdeğer probleminin tüm Sturm-Liouville gösterimlerini tanımlayacağız.

Öncelikle (2.6) ayrık sınır şartlarını ele alalım ve Teorem 2.1 in tersinin bir çeşidini bulalım.

Teorem 3.1. $m > 2$ ve D aşağıdaki gibi tanımlanan $m \times m$ boyutunda simetrik üç köşegensel matris olsun.

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & & & & \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} & & & \\ & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & d_{m-1,m-2} & d_{m-1,m-1} & d_{m-1,m} \\ & & & & d_{m-1,m} & d_{mm} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Burada $d_{ij} \in \mathbb{R}, 1 \leq i, j \leq m, d_{j,j+1} \neq 0, j = 1, \dots, m-1$ ve

$$B = (b_{11}, \dots, b_{mm}), 0 \neq b_{jj} \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq m \quad (2.56)$$

dir. Bu durumda verilen (2.6) ayrık, kendine eş sınır şartı için, (2.54) matris özdeğer problemi (2.2) SLP formunda Atkinson tipinde SLP şeklinde gösterime sahiptir.

Ayrıca J nin verilen tespit edilmiş bir parçalanışı için (2.53), (2.6) formundaki SLP gösterimi tektir, öyleki (2.6), (2.12) gösterimleri kullanılmak üzere aşağıdakilerden birisi ile sağlanır:

$$1. \alpha, \beta \in (0, \pi),$$

2. $\alpha = 0$ ve $\beta \in (0, \pi)$ ve p_1, q_0 ve w_0 tespit edilmiş,

3. $\alpha \in (0, \pi)$ ve $\beta = \pi$ ve p_n, q_n ve w_n tespit edilmiş,

4. $\alpha = 0$ ve $\beta = \pi$ ve p_1, q_0, w_0 ve p_n, q_n, w_n tespit edilmiş.

Bu durumların her birinde, (2.54) probleminin tüm Sturm-Liouville gösterimleri, parametrelerin mümkün olan tüm seçimleriyle (2.53), (2.6) nın karşılık gelen denklik ailesi ile verilir, örneğin $\alpha = 0$ ve $\beta \in (0, \pi)$ durumunda p_1, q_0 ve w_0 in mümkün olan tüm seçimleri gibi.

İspat: Öncelikle $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ durumunu ele alalım. $n = m - 1$, $J = (a, b)$, $-\infty < a < b < \infty$ olsun. Sonra (a, b) aralığının (2.9) parçalanmasını alalım. Şimdi (2.3), (2.10) ve (2.11) i sağlayan $[a, b]$ aralığında parçalı sabit $\bar{p}, \bar{q}, \bar{w}$ fonksiyonlarını tanımlayacağız. Bunun $[a, b]$ aralığının bu alt aralıkları üzerinde bu fonksiyonların değerlerini tanımlayacağız, öyle ki bu aralıklar üzerinde bu fonksiyonlar sıfır olmayacaktır. Bunun için

$$p_k = -d_{k,k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad w_k = b_{k+1,k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

ve

$$q_0 = d_{11} - p_1 - \cot \alpha, \quad q_n = d_{n+1,n+1} - p_n + \cot \beta$$

$$q_k = d_{k+1,k+1} - p_k - p_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

olsun. (2.52) den $\bar{p}(t), \bar{q}(t)$ ve $\bar{w}(t)$ fonksiyonlarını tanımlayalım. Her bir $\bar{p}, \bar{q}$ ve $\bar{w}$ J üzerinde (2.3), (2.10) ve (2.11) i sağlayan parçalı sürekli fonksiyonlardır. Böylece (2.53) Atkinson tipindendir ve p, q, w nun sırasıyla $\bar{p}, \bar{q}, \bar{w}$ ile değiştirilmesiyle bu denklem (2.12) yi sağlar. (2.54) probleminin (2.26) problemi ile aynı formda olduğunu görmek kolaydır. Dolayısıyla Sonuç 2.1 den (2.54) problemi (2.2), (2.6) SLP ne denktir. Geriye kalan kısım Teorem 2.4 den elde edilir.

$n = 0$ ve/veya $\beta = \pi$ durumları da aynı şekilde yapılır. Şimdi (2.7) ayrık olmayan sınır şartlarındaki durumu ele alalım ve Teorem 2.2 ile Teorem 2.3 ün ters

formlarını bulalım. Öncelikle bu iki teoremden (2.54) deki D ye karşılık gelen matris üç köşegensel değildir, ancak ‘hemen hemen’ üç köşegenseldir.

Teorem 3.2. $m > 2$ ve D sıfır olmayan elemanları $d_{1m} = d_{m1}$ özeliğine sahip aşağıdaki simetrik devirli üç köşegensel matris olsun.

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & & & & d_{1m} \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} & & & \\ & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & d_{m-1,m-2} & d_{m-1,m-1} & d_{m-1,m} \\ d_{1m} & & & & d_{m-1,m} & d_{mm} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Burada

$$d_{ij} \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq i, j \leq m, \quad d_{j,j+1} \neq 0, \quad j = 1, \dots, m-1, \quad d_{1m} \neq 0 \quad (2.58)$$

ve

$$B = \text{diag}(b_{11}, \dots, b_{mm}), \quad 0 \neq b_{jj} \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq j \leq m \quad (2.59)$$

olsun. O zaman verilen herhangi (2.7) ayrık olmayan kendine eş sınır şartı için (2.54) matris özdeğer problemi (2.2), (2.7) formunda Atkinson tipinde bir SLP gösterimine sahiptir. Ayrıca J nin verilen (2.9) daki tespit edilmiş bir parçalanışı için (2.53) SLP formunda tek bir gösterime sahiptir. Öyle ki (2.7), (2.12) deki gösterimlerle aşağıdakilerden biri ile sağlanır:

1. $k_{12} \neq 0$,
2. $k_{12} = 0$ ve q_0 ve w_0 tespit edilmiş.

Bu durumların her birinde (2.54) probleminin bütün Sturm-Liouville gösterimleri (2.53), (2.7) SLP nin parametrelerine karşılık mümkün olan bütün seçimleriyle elde edilmiş denklik sınıflarıyla verilir.

İspat: Öncelikle $k_{12} \neq 0$ durumunu düşünelim. (2.54) denklemini $(k_{12}d_{1m})^{-1}$ ile çarparak, ki bu durumda $d_{1m} = \frac{1}{k_{12}}$ olur, D ve B matrislerini normalleştirebiliriz.

Bu işlem (2.54) probleminin özdeğerlerini değiştirmez. $n = m - 1$ ve $a < b$ olsun. $[a, b]$ aralığının (2.9) daki parçalanışını tanımlayalım. Ayrıca

$$p_k = -d_{k,k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad w_k = b_{k+1,k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

ve

$$q_0 = d_{11} - p_1 + \frac{k_{11}}{k_{12}} k_{12}, \quad q_n = d_{n+1,n+1} - p_n + \frac{k_{22}}{k_{12}}$$

$$q_k = d_{k+1,k+1} - p_k - p_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n - 1$$

olsun. O zaman (2.52) $\bar{p}(t)$, $\bar{q}(t)$ ve $\bar{w}(t)$ yi tanımlarız. Teorem 3.1 in ispatına benzer şekilde görebiliriz ki (2.54) problemi (2.47) problemi gibidir. Böylece Teorem 2.3 den (2.54) problemi (2.2), (2.7) SLP ne denktir.

$k_{12} = 0$ durumu için $n = m$ seçilerek q_0 ve w_0 tespit edilir ve aynı yöntem izlenerek ispat tamamlanır.

BÖLÜM 3

GEÇİŞ ŞARTLI STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİNİN MATRİS GÖSTERİMLERİ

3.1. Giriş

Bu bölümde düzenli kendine-eş, geçiş şartlı, Atkinson tipindeki Sturm-Liouville problemleri ile aşağıdaki formda olan matris özdeğer problemleri arasındaki ilişkiyi açıklayacağız,

$$VX = \lambda WX. \quad (3.1)$$

Burada, V ve W , $l \times l$ ($l \in \mathbb{Z}, l > 3$) $\mathbb{R}$ üzerinde matrisler ve W köşgensel matristir.

[3] de, Kong, Volkmer ve Zettl bir Atkinson tipindeki Sturm-Liouville problemler sınıfı ile matris özdeğer problemleri arasındaki ilişkiyi incelemiş ve bu sınıftan Sturm-Liouville problemlerinin (ayrık yada ayrık olmayan) kendine-eş sınır şartları ile birlikte oluşturduğu özdeğer probleminin matris özdeğer problemlerine denkliğini göstermiştir. Buradaki ilişki bir problemin sonuçlarından diğer problemin sonuçlarına ‘transfer’ olarak düşünülebilir. Bu türden uygulamalar için [12,13]’e bakılabilir. Son zamanlarda, Ao, Sun ve Zhang [14] de geçiş şartlı Sturm-Liouville problemlerinin sonlu spektruma sahip olduğunu göstermiştir.

Bu bölümde [1,3,14] deki yöntemler kullanılacaktır. Şimdi

$$-(py')' + qy = \lambda wy, \quad J = (a, c) \cup (c, b), \quad c \in (a, b), \quad -\infty < a < b < +\infty \quad (3.2)$$

Sturm-Liouville denkleminin,

$$A Y(a) + B Y(b) = 0, \quad Y = \begin{bmatrix} y \\ py' \end{bmatrix}, \quad A, B \in M_2(\mathbb{C}) \quad (3.3)$$

biçimindeki sınır şartlarının ve

$$CY(c-) + DY(c+) = 0 \quad (3.4)$$

formundaki geçiş şartlarının oluşturduğu Sturm-Liouville problemini ele alalım. Burada c iç süreksizlik noktası, λ spektral parametre ve $C = (c_{ij})_{2 \times 2}$ ve $D = (d_{ij})_{2 \times 2}$ 2×2 boyutunda, reel değerli matrislerdir, öyle ki; $\det(C) = \rho > 0$ ve $\det(D) = \theta > 0$ dır. Ayrıca $M_2(\mathbb{C})$ de $\mathbb{C}$ üzerinde, mertebesi 2 olan kare matrisler kümesini göstermektedir. $L(J, \mathbb{R})$, J üzerinde Lebesgue integrallenebilir fonksiyonları göstermek üzere denklemdeki katsayılar

$$r = 1/p, q, w \in L(J, \mathbb{R}) \quad (3.5)$$

şartlarını sağlamaktadır, [2,15,16]. (3.3) sınır şartı aşağıdaki iki şartı sağlıyor ise buna kendine-eş sınır şartı denir.

$$\text{rank}(A, B) = 2, \quad AEA^* = BEB^*, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

(3.2)-(3.4) geçiş şartlı SLP için, eğer onunla ilişkili T operatörü kendine-eş ise bu SLP ne kendine-eş denir. Bir T operatörü kendine-eştir, ancak ve ancak

$$\text{rank}(A, B) = 2, \quad \frac{1}{p} AE^{-1}A^* = \frac{1}{\theta} BE^{-1}B^*, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

ise. Geçiş şartlı SLP nin kendine-eşliği konusunda daha detaylı bilgiler için [17,18]'e bakılabilir.

[5] nolu kitaptan iyi bilinmelidir ki; (3.5) şartları altında, (3.3) sınır şartları iki sınıftan birine aittir. Bunlar ayrık yada ayrık olmayan sınıflardır. Ayrık sınır şartları,

$$\cos \alpha y(a) - \sin \alpha (py')(a) = 0, \quad 0 \leq \alpha < \pi \quad (3.8)$$

$$\cos \beta y(b) - \sin \beta (py')(b) = 0, \quad 0 < \alpha \leq \pi$$

biçimindeki *kanonik (düzgün) forma* sahiptir. Yine ayrık olmayan sınır şartları da

$$Y(b) = KY(a), \quad K = (k_{ij}) \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq i, j \leq 2, \quad \det(K) = 1 \quad (3.9)$$

biçimindeki *kanonik (düzgün) forma* sahiptir.

Şimdi $u = y$ ve $v = (py')$ diyelim. Bu durumda, J üzerinde (3.2) denkleminin aşağıdaki sistem formunu elde etmiş oluruz, [2]:

$$u' = rv, \quad v'(q - \lambda w)u \quad (3.10)$$

Klasik durumda, (3.2) deki r ve w J üzerinde pozitif olduğu zaman ve (3.3) sınır şartları ile (3.4) geçiş şartları kendine-eş olduğu zaman geçiş şartlı (3.2)-(3.4) SLP i sonsuz sayıdaki reel özdeğerlerin oluşturduğu ayrık spektruma sahiptir, [1,17,18,19]. Son zamanlardaki çalışmalarda gösterilmiştir ki; geçiş şartlı, Atkinson tipindeki SLP leri sonlu sayıda özdeğerlere sahiptir. Bu bölümde bu sınıftan Sturm-Liouville denklemlerini ele alacağız ve göstereceğiz ki; bu sınıftan verilen herhangi bir sınıftan Sturm-Liouville denklemi ve keyfi ayrık yada ayrık olmayan kendine-eş bir (3.3) sınır şartı ve (3.4) şeklindeki geçiş şartı için (3.1) formunda bir matris özdeğer problemi vardır, öyle ki; bu matris özdeğer probleminin özdeğerlerinin sayısı tam olarak (3.2)-(3.4) geçiş şartlı karşılık gelen SLP nin özdeğerlerinin sayısı ile aynıdır. Tersine, (3.1) formunda gerekli şartları sağlayan bir matris özdeğer problemi için özdeğerlerinin sayısı bu matris özdeğer problemininki ile aynı olan keyfi ayrık yada ayrık olmayan kendine-eş sınır şartına ve geçiş şartlarına sahip bir SLP vardır. İşte bu ilişki geçiş şartlı, Atkinson tipindeki bir SLP ile belirli matris özdeğer problemleri arasındaki bağlantıyı ortaya çıkarmaktadır. Aşağıda görüleceği üzere, bu türden bağlantılar bir problemin sonuçlarını diğer problemin sonuçlarına ‘transfer’ etmek için kullanılabilir.

3.2. Geçiş Şartlarına Sahip Atkinson Tipindeki SLP’nin Matris Gösterimi

Öncelikle, [3,14,20] çalışmalarından geçiş şartlı özel tipte SLP leri de Atkinson tipindendir diyebiliriz.

Tanım 2.1. Geçiş şartlı (3.2) tipindeki Sturm-Liouville denklemi için eğer $m, n \geq 1$ pozitif sayıları için J aralığının

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{2m+1} = c, \quad c = b_0 < b_1 < b_2 < \dots < a_{2n+1} = b \quad (3.11)$$

biçiminde bir parçalanması var ise öyle ki; bu parçalanma üzerinde

$$\begin{aligned}
& k = 0, 1, \dots, m-1 \text{ olmak üzere } [a_{2k}, a_{2k+1}] \text{ üzerinde } r = \frac{1}{p} = 0 \\
& k = 0, 1, \dots, m \text{ olmak üzere } [a_{2m}, a_{2m+1}) \text{ üzerinde } \int_{a_{2k}}^{a_{2k+1}} w \neq 0
\end{aligned} \tag{3.12}$$

ve

$$\begin{aligned}
& [a_{2k+1}, a_{2k+2}] \text{ üzerinde } q = 0 = w, \quad \int_{a_{2k+1}}^{a_{2k+2}} r \neq 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \\
& [b_{2i+1}, b_{2i+2}] \text{ üzerinde } q = 0 = w, \quad \int_{b_{2k+1}}^{b_{2k+2}} r \neq 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

ise o zaman bu denkleme Atkinson tipindendir denir.

Bu bölümde, özdeğerlerinin sayısı tam olarak karşılık gelen geçiş şartlı Atkinson tipindeki SLP nin özdeğer sayısı ile aynı olan bir matris özdeğer problemi inşa edeceğiz.

Tanım 2.2. Bir geçiş şartlı, Atkinson tipindeki SLP nin özdeğerlerinin sayısı bir matris özdeğer probleminin özdeğerlerinin sayısı ile aynı ise bu iki problemlere *denktir* denir.

Teoremlere geçmeden önce ihtiyaç duyacağımız bazı ek gösterimleri verelim. (3.11)-(3.13) verilsin ve ayrıca

$$\begin{aligned}
p_k &= \left(\int_{a_{2k-1}}^{a_{2k}} r \right)^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots, m; \quad q_k = \int_{a_{2k}}^{a_{2k+1}} q, \quad w_k = w, \quad k = 1, 2, \dots, m; \\
\tilde{p}_i &= \left(\int_{b_{2i-1}}^{b_{2i}} r \right)^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad \tilde{q}_i = \int_{b_{2i}}^{b_{2i+1}} q, \quad \tilde{w}_i = w, \quad i = 1, 2, \dots, m.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

olsun. Burada belirtelim ki; (3.12) ve (3.13) den $p_k, w_k, \tilde{p}_i, \tilde{w}_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve bunların işaretleri konusunda bir kısıtlama yoktur. (3.12) ve (3.13) den görebiliriz ki; (3.10) un herhangi u, v çözümü için u, r nin sıfıra denk olduğu aralıklarda sabittir ve yine v de q ve w nun sıfıra denk olduğu aralıklarda sabittir. Şimdi,

$$\begin{aligned}
u_k &= u(x), \quad x \in [a_{2k}, a_{2k+1}], \quad k = 0, \dots, m-1, \quad u_m = u(x), \quad x \in [a_{2m}, a_{2m+1}), \\
\tilde{u}_0 &= u(x), \quad x \in (b_0, b_1], \quad \tilde{u}_i = u(x), \quad x \in [b_{2i}, b_{2i+1}], \quad i = 1, \dots, n; \\
v_k &= v(x), \quad x \in [a_{2k-1}, a_{2k}], \quad k = 1, \dots, m, \quad \tilde{v}_i = v(x), \quad x \in [b_{2i-1}, b_{2i}], \quad i = 1, \dots, n,
\end{aligned} \tag{3.15}$$

olsun ve yine

$$\begin{aligned}
v_0 &= v(a_0) = v(a), \quad \tilde{v}_{n+1} = v(b_{2n+1}) = v(b), \\
v_{m+1} &= v(a_{2m+1}-) = v(c-), \quad \tilde{v}_0 = v(b_0+) = v(c+)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

diyelim.

Lemma 2.1. Kabul eldim ki; (3.2) Atkinson tipinde olsun. O zaman (3.10) un herhangi u, v çözümü için aşağıdakiler vardır,

$$p_k(u_k - u_{k-1}) = v_k, \quad k = 1, 2, \dots, m, \tag{3.17}$$

$$v_{k+1} - v_k = u_k(q_k - \lambda w_k), \quad k = 0, 1, \dots, m, \tag{3.18}$$

$$\tilde{p}_i(\tilde{u}_i - \tilde{u}_{i-1}) = v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{3.19}$$

$$\tilde{v}_{i+1} - \tilde{v}_i = \tilde{u}_i(\tilde{q}_i - \lambda \tilde{w}_i), \quad i = 0, 1, \dots, n. \tag{3.20}$$

Tersine, (3.17)-(3.20) sisteminin herhangi $u_k, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad v_k, \quad k = 0, 1, \dots, m+1$ ve $\tilde{u}_i, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad \tilde{v}_i, \quad i = 0, 1, \dots, n+1$ çözümü için (3.10) un (3.15) ve (3.16) yı sağlayan $u(x)$ ve $v(x)$ tek çözümü vardır.

İspat: (3.10) un ilk denkleminde, $k = 0, 1, \dots, m$ için

$$u_k - u_{k-1} = u(a_{2k}) - u(a_{2k-2}) = \int_{a_{2k-2}}^{a_{2k}} u' = \int_{a_{2k-2}}^{a_{2k}} rv = \int_{a_{2k-1}}^{a_{2k}} rv = v_k \int_{a_{2k-1}}^{a_{2k}} r = v_k / p_k$$

elde edilir ki bu (3.17) dir. Yine benzer şekilde (3.10) un ikinci denkleminde, $k = 0, 1, \dots, m$ için

$$\begin{aligned}
v_{k+1} - v_k &= v(a_{2k+1}) - v(a_{2k-1}) = \int_{a_{2k-1}}^{a_{2k+1}} v' = \int_{a_{2k-1}}^{a_{2k+1}} rv = \int_{a_{2k-1}}^{a_{2k}} (q - \lambda w)u \\
&= \int_{a_{2k}}^{a_{2k+1}} (q - \lambda w)u = u_k \int_{a_{2k}}^{a_{2k+1}} (q - \lambda w) = u_k(q_k - \lambda w_k),
\end{aligned}$$

bulunur ve $k = 0$ için de aynı sonucu elde ederiz ki bu da (3.18) dir. (3.19) ve (3.20) da aynı yolla elde edilebilir. Diğer taraftan, eğer u_k, v_k (3.17) ve (3.18) eşitliklerini ve $\tilde{u}_i, \tilde{v}_i$ (3.19) ve (3.20) eşitliklerini sağlıyor ise, o zaman $u(x)$ ve $v(x)$ (3.15) ve (3.16) ya göre tanımlanabilir ve daha sonra bunlar (3.10) daki denklemlerin alt aralıklar üzerinde integrallenmesiyle (3.10) un çözümü alarak tüm J aralığına sürekli genişletilebilir. Şimdi (3.4) geçiş şartlı ve (3.3) sınır şartlı Sturm-Liouville denkleminin matris gösterimini tartışmak için yeni bir gösterim tanımlayalım. Şöyle ki; (3.8) ayrık sınır şartının ve (3.9) ayrık olmayan sınır şartının her biri için $G = (g_{ij}) = -D^{-1}C$ diyelim. Burada teoremleri $g_{12} \neq 0$ ve $g_{12} = 0$ olma durumuna göre iki farklı durumda ifade edeceğiz.

Teorem 2.1. Kabul edelim ki; $\alpha \in [0, \pi)$, $\beta \in (0, \pi]$ ve $g_{12} \neq 0$ olsun. Aşağıdaki $(m + n + 2) \times (m + n + 2)$ boyutundaki

$$P_{\alpha, \beta} = \begin{bmatrix} p_1 \sin \alpha + \cos \alpha & -p_1 \sin \alpha & & & \\ & -p_1 & p_1 + p_2 & -p_2 & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & -p_{m-1} & p_{m-1} + p_m & -p_m \\ & & & -p_m & p_m + \frac{g_{11}}{g_{12}} & -\frac{1}{g_{12}} \\ & & & & -\frac{\rho}{\theta} \frac{1}{g_{12}} & p_1 + \frac{g_{22}}{g_{12}} - \tilde{p}_1 \\ & & & & & -\tilde{p}_1 & \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 & -\tilde{p}_2 \\ & & & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & -\tilde{p}_{n-1} & \tilde{p}_{n-1} + \tilde{p}_n & -\tilde{p}_n \\ & & & & & & & -\tilde{p}_n \sin \beta & \tilde{p}_n \sin \beta - \cos \beta \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

üç köşgensel matrisi ve

$$Q_{\alpha\beta} = \text{diag}(q_0 \sin \alpha, q_1, \dots, q_m, q_0, \dots, q_{n-1}, q_n \sin \beta), \quad (3.22)$$

$$W_{\alpha\beta} = \text{diag}(w_0 \sin \alpha, w_1, \dots, w_m, w_0, \dots, w_{n-1}, w_n \sin \beta)$$

köşegensel matrisleri tanımlayalım. Bu durumda (3.2), (3.4), (3.8) geçiş şartlı SLP aşağıdaki matris özdeğer problemine denktir,

$$(P_{\alpha\beta} + Q_{\alpha\beta})U = \lambda W_{\alpha\beta}U. \quad (3.23)$$

Burada $U = [u_0, u_1, \dots, u_m, \tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_n]^T$ dir. Ayrıca bütün özdeğerler geometrik olarak basit ve sabit çarpanları dikkate alınmaksızın tektir. (3.2), (3.4), (3.8) geçiş şartlı SLP nin $u(x)$ özfonksiyonu ve aynı özdeğere karşılık gelen (3.23) matris özdeğer probleminin U özvektörü arasında $u(x) = u_k, x \in [a_{2k}, a_{2k+1}], k = 0, \dots, m-1, u(x) = u_m, x \in [a_{2m}, a_{2m+1}), u(x) = \tilde{u}_0, x \in (b_0, b_1], u(x) = \tilde{u}_i, x \in [b_{2i}, b_{2i+1}], k = 1, 2, \dots, n$ ilişkisi vardır.

İspat: (3.17)-(3.20) sisteminin çözümleri ile aşağıdaki sistemin çözümleri arasında bire-bir ilişki vardır.

$$p_1(u_1 - u_0) - v_0 = u_0(q_0 - \lambda w_0), \quad (3.24)$$

$$p_{k+1}(u_{k+1} - u_k) - p_k(u_k - u_{k-1}) = u_k(q_k - \lambda w_k), \quad k = 1, 2, \dots, m-1, \quad (3.25)$$

$$v_{m+1} - p_m(u_m - u_{m-1}) = u_m(q_m - \lambda w_m), \quad (3.26)$$

$$\tilde{p}_1(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_0) - \tilde{v}_0 = \tilde{u}_0(\tilde{q}_0 - \lambda \tilde{w}_0), \quad (3.27)$$

$$\tilde{p}_{i+1}(\tilde{u}_{i+1} - \tilde{u}_i) - \tilde{p}_i(\tilde{u}_i - \tilde{u}_{i-1}) = \tilde{u}_i(\tilde{q}_i - \lambda \tilde{w}_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (3.28)$$

$$\tilde{v}_{n+1} - \tilde{p}_n(\tilde{u}_n - \tilde{u}_{n-1}) = \tilde{u}_n(\tilde{q}_n - \lambda \tilde{w}_n). \quad (3.29)$$

Gerçekten, kabul edelim ki; $u_k, k = 0, 1, 2, \dots, m+1$ ve $v_k, k = 0, 1, 2, \dots, m+1$ (3.17), (3.18) sisteminin çözümü olsun. O zaman (3.17), (3.18); (3.24)-(3.26) dan elde edilir. Aynı şekilde, $\tilde{u}_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$ ve $\tilde{v}_i, i = 0, 1, 2, \dots, n+1$ (3.19), (3.20) sisteminin çözümü olduğunu kabul edersek (3.27)-(3.29); (3.19), (3.20) den elde

edilir. Diğer taraftan u_k , $k = 0, 1, 2, \dots, m$ nin (3.24)-(3.26) sisteminin çözümü olduğu kabul edilirse, o zaman v_0 ve v_{m+1} sırasıyla (3.24) ve (3.26) dan elde edilir. Şimdi v_k , $k = 0, 1, 2, \dots, m$ (3.17) ile tanımlanmış olsun. O zaman (3.24) ün kullanılması ve (3.25) e tümevarım uygulanmasıyla (3.18) elde edilir. Benzer şekilde de (3.19) ve (3.20) için de yapılır. Böylece, Lemma 2.1 den (3.10) denkleminin ve dolayısıyla (3.2) nin herhangi bir çözümü, (3.24)-(3.29) sisteminin çözümünden tek şekilde elde edilir. (3.8) sınır şartlarından

$$u_0 \cos \alpha = v_0 \sin \alpha, \quad \tilde{u}_n \cos \beta = \tilde{v}_{n+1} \sin \beta, \quad (3.30)$$

bulunur ve (3.4) geçiş şartlarından

$$\tilde{u}_0 = g_{11}u_m + g_{12}v_{m+1}, \quad \tilde{v}_0 = g_{21}u_m + g_{22}v_{m+1}, \quad (3.31)$$

elde edilir. $g_{12} \neq 0$ ve $\det(G) = -\frac{\rho}{\theta}$ olduğundan, (3.31) den

$$v_{m+1} = \frac{1}{g_{12}}\tilde{u}_0 - \frac{1}{g_{12}}u_m, \quad \tilde{v}_0 = \frac{g_{22}}{g_{12}}\tilde{u}_0 - \frac{\rho}{\theta} \frac{1}{g_{12}}u_m, \quad (3.32)$$

eşitliklerine ulaşırız ve dolayısıyla (3.24)-(3.32) den denklik elde edilir.

Teorem 2.2. Kabul edelim ki; $\alpha \in [0, \pi)$, $\beta \in (0, \pi]$ ve $g_{12} = 0$ olsun. Aşağıdaki $(m + n + 1) \times (m + n + 1)$ boyutundaki

$$P_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} p_1 \sin \alpha + \cos \alpha & -p_1 \sin \alpha & & & \\ -p_1 & p_1 + p_2 & -p_2 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & -p_{m-1} & p_{m-1} + p_m & -p_m & \\ & -g_{22}p_m & g_{22}p_m + g_{11}\tilde{p}_1 + g_{21} & -\tilde{p}_1 & \\ & -g_{11}\tilde{p}_1 & \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 & -\tilde{p}_2 & \\ & & -\tilde{p}_2 & \tilde{p}_2 + \tilde{p}_3 & -\tilde{p}_3 \\ & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & -\tilde{p}_{n-1} & \tilde{p}_{n-1} + \tilde{p}_n & -\tilde{p}_n \\ & & & & -\tilde{p}_n \sin \beta & \tilde{p}_n \sin \beta - \cos \beta \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

üç köşegenel matrisi ve

$$Q_{\alpha\beta} = \text{diag}(q_0 \sin \alpha, q_1, \dots, q_{m-1}, g_{22}q_m + g_{11}\tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{n-1}, \tilde{q}_n \sin \beta), \quad (3.34)$$

$$W_{\alpha\beta} = \text{diag}(w_0 \sin \alpha, w_1, \dots, w_{m-1}, g_{22}w_m + g_{11}\tilde{w}_0, \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_{n-1}, \tilde{w}_n \sin \beta)$$

köşegensel matrisleri tanımlayalım. Bu durumda (3.2), (3.4), (3.8) geçiş şartlı SLP aşağıdaki matris özdeğer problemine denktir,

$$(P_{\alpha\beta} + Q_{\alpha\beta})U = \lambda W_{\alpha\beta}U. \quad (3.35)$$

Burada $U = [u_0, u_1, \dots, u_m, \tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_n]^T$ dir. Ayrıca bütün özdeğerler geometrik olarak basit, sabit ve çarpanları dikkate alınmaksızın tektir. (3.2), (3.4), (3.8) geçiş şartlı SLP nin $u(x)$ özfonksiyonu ve aynı özdeğere karşılık gelen (3.23) matris özdeğer probleminin U özvektörü arasında $u(x) = u_k, x \in [a_{2k}, a_{2k+1}], k = 0, \dots, m-1, u(x) = u_m, x \in [a_{2m}, a_{2m+1}), u(x) = g_{11}u_m, x \in (b_0, b_1], u(x) = \tilde{u}_i, x \in [b_{2i}, b_{2i+1}], k = 1, 2, \dots, n$ ilişkisi vardır.

İspat: $g_{12} = 0$ olduğu için (3.4) geçiş şartları

$$\tilde{u}_0 = g_{11}u_m, \quad \tilde{v}_0 = g_{21}u_m + g_{22}v_{m+1} \quad (3.36)$$

şartlarına benzer. (3.26), (3.27), (3.28) ve (3.36) dan,

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1(\tilde{u}_1 - g_{11}u_m) - g_{21}u_m - g_{22}[p_m(u_m - u_{m-1}) \\ + u_m(q_m - \lambda w_m)] = g_{11}u_m(\tilde{q}_0 - \lambda \tilde{w}_0) \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$p_2(\tilde{u}_2 - \tilde{u}_2) - \tilde{p}_1(\tilde{u}_1 - g_{11}u_m) = \tilde{u}_1(\tilde{q}_1 - \lambda \tilde{w}_1) \quad (3.38)$$

elde edilir ve denkleğe (3.24)-(3.26), (3.28)-(3.30) ve (3.37)-(3.38) den ulaşılır.

Sonuç 2.1. (i) Kabul edelim ki; $\alpha, \beta \in (0, \pi)$, ve $g_{12} \neq 0$ olsun. Aşağıdaki $(m + n + 2) \times (m + n + 2)$ boyutundaki

$$P_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} p_1 + \cot \alpha & -p_1 & & & \\ & -p_1 & p_1 + p_2 & -p & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & -p_{m-1} & p_{m-1} + p_m & -p_m \\ & & & p_m & p_m + \frac{g_{11}}{g_{12}} & -\frac{1}{g_{12}} \\ & & & -\frac{\rho}{\theta} \frac{1}{g_{12}} & \tilde{p}_1 + \frac{g_{22}}{g_{12}} & -\tilde{p}_1 \\ & & & & -\tilde{p}_1 & \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 & -\tilde{p}_2 \\ & & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & -\tilde{p}_{n-1} & \tilde{p}_{n-1} + \tilde{p}_n & -\tilde{p}_n \\ & & & & & & -\tilde{p}_n & \tilde{p}_n - \cot \beta \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

üç köşgensel matrisi ve

$$Q_{\alpha\beta} = \text{diag}(q_0, \dots, q_m, \tilde{q}_0, \dots, \tilde{q}_n), W_{\alpha\beta} = \text{diag}(w_0, \dots, w_m, \tilde{w}_0, \dots, \tilde{w}_n) \quad (3.40)$$

köşgensel matrisleri tanımlayalım. Bu durumda (3.2), (3.4), (3.8) geçiş şartlı SLP aşağıdaki matris özdeğer problemine denktir,

$$(P_{\alpha\beta} + Q_{\alpha\beta})U = \lambda W_{\alpha\beta} U \quad (3.41)$$

Burada $U = [u_0, u_1, \dots, u_m, \tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_n]^T$ dir.

(ii) Eğer $\alpha = 0$ ve/veya $\beta = \pi$ ise, o zaman aynı ifade, (3.39), (3.40) matrislerinin eğer $\alpha = 0$ ise ilk satırının ve ilk sütunun ve/veya $\beta = \pi$ ise son satır ve son sütununun silinmesiyle elde edilen P, Q, W matrisleri ile sağlanır.

İspat: (i) Bu durumda, (3.41) i elde etmek için (3.23) sisteminin ilk ve son satırını sırasıyla $\sin \alpha$ ve $\sin \beta$ ile böleriz.

(ii) Eğer $\alpha = 0$ ise, o zaman $u_0 = 0$ dır ve P, Q, W matrislerinin ilk satır ve ilk sütunu silinebilir. Benzer şekilde, eğer $\beta = \pi$ ise, o zaman $\tilde{u}_n = 0$ dır ve bu durumda da son satır ve son sütunu silinebilir.

Sonuç 2.2. (i) Kabul edelim ki; $\alpha, \beta \in (0, \pi)$, ve $g_{12} = 0$ olsun. Aşağıdaki $(m + n + 1) \times (m + n + 1)$ boyutundaki

$$P_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} p_1 + \cot \alpha & -p_1 & & & & \\ & -p_1 & p_1 + p_2 & -p & & \\ & \dots & \dots & \dots & & \\ & & -p_{m-1} & p_{m-1} + p_m & -p_m & \\ & & & -g_{22}p_m & g_{22}p_m + g_{11}\tilde{p}_1 + g_{21} & -\tilde{p}_1 \\ & & & & -g_{11}\tilde{p}_1 & \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 & -\tilde{p}_2 \\ & & & & & -\tilde{p}_2 & \tilde{p}_2 + \tilde{p}_3 & -\tilde{p}_3 \\ & & & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & -\tilde{p}_{n-1} & \tilde{p}_{n-1} + \tilde{p}_n & -\tilde{p}_n \\ & & & & & & & -\tilde{p}_n & \tilde{p}_n - \cot \beta \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

üç köşegensel matrisi ve

$$Q_{\alpha\beta} = \text{diag}(q_0, q_1, \dots, q_{m-1}, g_{22}q_m + g_{11}\tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n), \quad (3.43)$$

$$W_{\alpha\beta} = \text{diag}(w_0, w_1, \dots, w_{m-1}, g_{22}w_m + g_{11}\tilde{w}_0, \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n)$$

köşegensel matrisleri tanımlayalım. Bu durumda (3.2), (3.4), (3.8) geçiş şartlı SLP aşağıdaki matris özdeğer problemine denktir,

$$(P_{\alpha\beta} + Q_{\alpha\beta})U = \lambda W_{\alpha\beta}U. \quad (3.44)$$

Burada $U = [u_0, u_1, \dots, u_m, \tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_n]^T$ dir.

(ii) Eğer $\alpha = 0$ ve/veya $\beta = \pi$ ise, o zaman aynı ifade, (3.42), (3.43) matrislerinin eğer $\alpha = 0$ ise ilk satırının ve ilk sütunun ve/veya $\beta = \pi$ ise son satır ve son sütununun silinmesiyle elde edilen P, Q, W matrisleri ile sağlanır.

İspat: İspat, Teorem 2.2 kullanılarak Sonuç 2.1'in ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 2.1, Teorem 2.2 ve bunların sonuçları göstermektedir ki; tüm geçiş şartlı Atkinson tipindeki, kendine-eş ayırık sınır şartlı SLP leri üç köşegensel matris özdeğer problemleri şeklinde gösterime sahiptir. Şimdi de göstereceğiz ki; tüm geçiş şartlı Atkinson tipindeki, reel kendine-eş ayırık olmayan sınır şartlı SLP leri de üç

köşegensel matris özdeğer problemleri şeklinde gösterime sahiptir. Bu durumda, P matrisi ‘hemen hemen üç köşegensel matris’ formda olacaktır. Burada *hemen hemen üç köşegensel* matris formu demekle, matrisin sağ üst ve sol alt köşesindeki elemanların sıfırdan farklı olması kastedilmiştir.

Teorem 2.3. $k_{12} = 0$ olmak üzere, (3.9) sınır şartlarını ele alalım ve kabul edelim ki; $g_{12} \neq 0$ dır. Aşağıdaki $(m + n + 1) \times (m + n + 1)$ boyutundaki

$$P_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} k_{11}k_{21} + p_1 + k_{11}^2\tilde{p}_n & -p_1 & & & & -k_{11}\tilde{p}_n \\ -p_1 & p_1 + p_2 & -p_2 & & & \\ & \dots & \dots & \dots & & \\ & -p_{m-1} & p_{m-1} + p_m & -p_m & & \\ & & -p_m & p_m + \frac{g_{11}}{g_{12}} & -\frac{1}{g_{12}} & \\ & & & -\frac{\rho}{\theta} \frac{1}{g_{12}} & \tilde{p}_1 + \frac{g_{22}}{g_{12}} & -\tilde{p}_1 \\ & & & & -\tilde{p}_1 & \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 & -\tilde{p}_2 \\ & & & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & -\tilde{p}_{n-2} & \tilde{p}_{n-2} + \tilde{p}_{n-1} & -\tilde{p}_{n-1} \\ -k_{11}\tilde{p}_n & & & & & & -\tilde{p}_{n-1} & \tilde{p}_{n-1} + \tilde{p}_n \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$(1, m + n + 1)$ ve $(m + n + 1, 1)$ elemanları hariç üç köşegensel matrisi ve

$$Q_0 = \text{diag}(q_0, k_{11}^2 \tilde{q}_n, q_1, \dots, q_m, \tilde{q}_0, \dots, \tilde{q}_{n-1}), \quad (3.46)$$

$$W_0 = \text{diag}(w_0 + k_{11}^2 \tilde{w}_n, w_1, \dots, w_m, \tilde{w}_0, \dots, \tilde{w}_{n-1})$$

köşegensel matrisleri tanımlayalım. Bu durumda (3.2), (3.4), (3.9) geçiş şartlı SLP aşağıdaki matris özdeğer problemine denktir,

$$(P_0 + Q_0)U = \lambda W_0 U \quad (3.47)$$

Burada $U = [u_0, u_1, \dots, u_m, \tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_{n-1}]^T$ dir.

İspat: $k_{12} = 0$ olduğundan, (3.9) sınır şartları

$$\tilde{u}_n = k_{11}u_0, \quad \tilde{v}_{n+1} = k_{21}u_0 + k_{22}v_0 \quad (3.48)$$

şartları ile aynıdır. Burada $k_{11}k_{22} = 1$ dir ve $g_{12} \neq 0$ olduğundan (3.4) geçiş şartları (3.32) formundadır. Şimdi amacımız, (3.48) sınır şartlı, (3.32) geçiş şartlı, (3.17)-(3.20) sisteminin çözümleri ile aşağıdaki sistemin çözümleri arasında bire-bir bir eşleme olduğunu göstermektir,

$$[-k_{11}k_{21} + (p_1 + q_0 - \lambda w_0) - k_{11}^2(\tilde{p}_n + \tilde{q}_n - \lambda \tilde{w}_n)]u_0 - p_1 u_1 - k_{11}\tilde{p}_n \tilde{u}_{n-1} = 0 \quad (3.49)$$

$$p_{k+1}(u_{k+1} - u_k) - p_k(u_k - u_{k-1}) = u_k(q_k - \lambda w_k), \quad k = 1, 2, \dots, m-1 \quad (3.50)$$

$$\frac{1}{g_{12}} \tilde{u}_0 - \frac{g_{11}}{g_{12}} u_m - p_m(u_m - u_{m-1}) = u_m(q_m - \lambda w_m), \quad (3.51)$$

$$\tilde{p}_1(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_0) - \left(\frac{g_{22}}{g_{12}} \tilde{u}_0 - \frac{\rho}{\theta} \frac{1}{g_{12}} u_m \right) = \tilde{u}_0(\tilde{q}_0 - \lambda \tilde{w}_0), \quad (3.52)$$

$$\tilde{p}_{i+1}(\tilde{u}_{i+1} - \tilde{u}_i) - \tilde{p}_i(\tilde{u}_i - \tilde{u}_{i-1}) = \tilde{u}_i(\tilde{q}_i - \lambda \tilde{w}_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-2, \quad (3.53)$$

$$\tilde{p}_n(k_{11}u_0 - \tilde{u}_{n-1}) - \tilde{p}_{n-1}(\tilde{u}_{n-1} - \tilde{u}_{n-2}) = \tilde{u}_{n-1}(\tilde{q}_{n-1} - \lambda \tilde{w}_{n-1}). \quad (3.54)$$

Gerçekten, kabul edelim ki u_k , $k = 0, 1, 2, \dots, m$ $\tilde{u}_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ve v_k , $k = 0, 1, 2, \dots, m+1$, $\tilde{v}_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n+1$ (3.17)-(3.20), (3.48) ve (3.32) sisteminin çözümü olsun. Bu durumda (3.50)-(3.53), (3.17)-(3.20) den kolaylıkla elde edilir. Yine (3.17) de $k = 1$ ve (3.18) de $k = 0$ alınırsa

$$v_0 = \tilde{p}_1(u_1 - u_0) - u_0(q_0 - \lambda w_0) \quad (3.55)$$

eşitliğini elde ederiz. (3.19) ve (3.20) da $i = n$ alınırsa

$$\tilde{v}_{n+1} = \tilde{p}(\tilde{u}_n - \tilde{u}_{n-1}) + \tilde{u}_n(\tilde{q}_n - \lambda \tilde{w}_n) \quad (3.56)$$

bulunur. Buradan da (3.48), (3.55) ve (3.56) nın birleştirilmesiyle

$$\tilde{p}_n(k_{11}u_0 - \tilde{u}_{n-1}) + k_{11}u_0(\tilde{q}_n - \lambda \tilde{w}_n) = k_{21}u_0 + k_{22}[p_1(u_1 - u_0) - u_0(q_0 - \lambda w_0)] \quad (3.57)$$

eşitliğine ulaşırız. Burada belirtelim ki; $k_{11}k_{22} = 1$ dir. Bu durumda (3.57), (3.49) olur ve (3.53) de $i = n-1$ alınmasından ve (3.48) den aşağıdaki eşitlik bulunur,

$$\tilde{p}_n(k_{11}u_0 - \tilde{u}_{n-1}) - \tilde{p}_{n-1}(\tilde{u}_{n-1} - \tilde{u}_{n-2}) = \tilde{u}_{n-1}(\tilde{q}_{n-1} - \lambda\tilde{w}_{n-1}). \quad (3.58)$$

Diğer taraftan, kabul edelim ki; u_k $k = 0, 1, 2, \dots, m$, $\tilde{u}_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ (3.49)-(3.54) sisteminin çözümü olsun. O zaman $\tilde{u}_n$, v_0 ve v_{n+1} sırasıyla (3.48), (3.55) ve (3.56) dan belirlenir. Şimdi v_k , $k = 0, 1, 2, \dots, m$ (3.17) ile; $\tilde{v}_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ (3.19) ile belirlenmiş olsun. Bu durumda (3.55) ve (3.32) den ve (3.56) da tümevarım kullanılmasından (3.18) ve (3.20) elde edilir. Ayrıca (3.55)-(3.57) den $\tilde{v}_{n+1} = k_{21}u_0 + k_{22}v_0$ olduğu görülür. Böylece (3.48) sınır şartı sağlanır.

Teorem 2.4. $k_{12} \neq 0$ olmak üzere, (3.9) sınır şartlarını ele alalım ve kabul edelim ki; $g_{12} \neq 0$ dır. Aşağıdaki $(m + n + 2) \times (m + n + 2)$ boyutundaki

$$P_1 = \begin{bmatrix} p_1 - \frac{k_{11}}{k_{12}} & -p_1 & & & & & & \frac{1}{k_{12}} \\ & -p_1 & p_1 + p_2 & -p_2 & & & & \\ & & \dots & \dots & \dots & & & \\ & & -p_{m-1} & p_{m-1} + p_m & -p_m & & & \\ & & & -p_m & p_m + \frac{g_{11}}{g_{12}} & -\frac{1}{g_{12}} & & \\ & & & & -\frac{\rho}{\theta} \frac{1}{g_{12}} & \tilde{p}_1 + \frac{g_{22}}{g_{12}} & -\tilde{p}_1 & \\ & & & & & -\tilde{p}_1 & \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 & -\tilde{p}_2 \\ & & & & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & -\tilde{p}_{n-1} & \tilde{p}_{n-1} + \tilde{p}_n & -\tilde{p}_n \\ \frac{1}{k_{12}} & & & & & & & -\tilde{p}_n & \tilde{p}_n - \frac{k_{22}}{k_{12}} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

$(1, m + n + 2)$ ve $(m + n + 2, 1)$ elemanları hariç üç köşgensel matrisi ve

$$Q_1 = \text{diag}(q_0, q_1, \dots, q_m, \tilde{q}_0, \dots, \tilde{q}_n), \quad (3.60)$$

$$W_1 = \text{diag}(w_0, w_1, \dots, w_m, \tilde{w}_0, \dots, \tilde{w}_n)$$

köşgensel matrisleri tanımlayalım. Bu durumda (3.2), (3.4), (3.9) geçiş şartlı SLP aşağıdaki matris özdeğer problemine denktir,

$$(P_1 - Q_1)U = \lambda W_1 U, \quad (3.61)$$

Burada $U = [u_0, u_1, \dots, u_m, \tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_n]^T$ dir.

İspat: Öncelikle (3.9) sınır şartları

$$\tilde{u}_n = k_{11}u_0 + k_{12}v_0, \quad \tilde{v}_{n+1} = k_{21}u_0 + k_{22}v_0$$

şartları ile aynıdır. $k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} = 1$ olduğundan bu şartlar

$$v_0 = -\frac{k_{11}}{k_{12}}u_0 + \frac{1}{k_{12}}\tilde{u}_n, \quad \tilde{v}_{n+1} = -\frac{1}{k_{12}}u_0 + \frac{k_{22}}{k_{12}}\tilde{u}_n \quad (3.62)$$

biçiminde yazılabilir. Burada belirtelim ki; geçiş şartları (3.32) formundadır dolayısıyla ispat Teorem 2.3'ün ispatına benzer.

Teorem 2.5. $k_{12} = 0$ olmak üzere, (3.9) sınır şartlarını ele alalım ve kabul edelim ki; $g_{12} = 0$ dır. Aşağıdaki $(m+n) \times (m+n)$ boyutundaki

$$P_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} k_{11}k_{21} + p_1 + k_{11}^2\tilde{p}_n & -p_1 & & & -k_{11}\tilde{p}_n \\ & -p_1 & p_1 + p_2 & -p_2 & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & -p_{m-1} & p_{m-1} + p_m & -p_m & \\ & & -g_{22}p_m & g_{22}p_m + g_{11}\tilde{p}_1 + g_{21} & -\tilde{p}_1 \\ & & & -g_{11}\tilde{p}_1 & \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 & -\tilde{p}_2 \\ & & & & -\tilde{p}_2 & \tilde{p}_2 + \tilde{p}_3 & -\tilde{p}_3 \\ & & & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & -\tilde{p}_{n-2} & \tilde{p}_{n-2} + \tilde{p}_{n-1} & -\tilde{p}_{n-1} \\ -k_{11}\tilde{p}_n & & & & & & -\tilde{p}_{n-1} & \tilde{p}_{n-1} + \tilde{p}_n \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

$(1, m+n)$ ve $(m+n, 1)$ elemanları hariç üç köşegensel matrisi ve

$$Q_2 = \text{diag}(q_0, k_{11}^2\tilde{q}_n, q_1, \dots, q_{m-1}, g_{22}q_m + g_{11}\tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{n-1}), \quad (3.64)$$

$$W_2 = \text{diag}(w_0 + k_{11}^2\tilde{w}_n, w_1, \dots, w_{m-1}, g_{22}q_m + g_{11}\tilde{w}_0, \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_{n-1})$$

köşegensel matrisleri tanımlayalım. Bu durumda (3.2), (3.4), (3.9) geçiş şartlı SLP aşağıdaki matris özdeğer problemine denktir,

$$(P_2 + Q_2)U = \lambda W_2 U \quad (3.65)$$

Burada $U = [u_0, u_1, \dots, u_m, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{n-1}]^T$ dir.

İspat: Burada sınır şartları (3.48) formunda ve geçiş şartları da (3.36) formundadır. Dolayısıyla ispat yine Teorem 2.3'ün ispatına benzer.

Teorem 2.6. $k_{12} \neq 0$ olmak üzere, (3.9) sınır şartlarını ele alalım ve kabul edelim ki; $g_{12} = 0$ dır. Aşağıdaki $(m + n + 1) \times (m + n + 1)$ boyutundaki

$$P_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} p_1 - \frac{k_{11}}{k_{12}} & -p_1 & & & \frac{1}{k_{12}} \\ -p_1 & p_1 + p_2 & -p_2 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & -p_{m-1} & p_{m-1} + p_m & -p_m & \\ & -g_{22}p_m & g_{22}p_m + g_{11}\tilde{p}_1 + g_{21} & \tilde{p}_1 & \\ & & -g_{11}\tilde{p}_1 & \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 & -\tilde{p}_2 \\ & & & -\tilde{p}_2 & \tilde{p}_2 + \tilde{p}_3 & -\tilde{p}_3 \\ & & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & -\tilde{p}_{n-1} & \tilde{p}_{n-1} + \tilde{p}_n & -\tilde{p}_n \\ \frac{1}{k_{12}} & & & & & -\tilde{p}_n & \tilde{p}_n - \frac{k_{22}}{k_{12}} \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

$(1, m + n + 1)$ ve $(m + n + 1, 1)$ elemanları hariç üç köşegensel matrisi ve

$$Q_3 = \text{diag}(q_0, q_1, \dots, q_{m-1}, g_{22}q_m + g_{11}\tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n), \quad (3.67)$$

$$W_3 = \text{diag}(w_0, w_1, \dots, w_{m-1}, g_{22}q_m + g_{11}\tilde{w}_0, \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n)$$

köşegensel matrisleri tanımlayalım. Bu durumda (3.2), (3.4), (3.9) geçiş şartlı SLP aşağıdaki matris özdeğer problemine denktir,

$$(P_3 + Q_3)U = \lambda W_3 U \quad (3.68)$$

Burada $U = [u_0, u_1, \dots, u_m, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n]^T$ dir.

İspat: Burada sınır şartları (3.62) formunda ve geçiş şartları da (3.32) formundadır. Dolayısıyla ispat yine Teorem 2.3'ün ispatına benzer.

Uyarı 2.1: Teorem 2.3 ve Teorem 2.6 karşılaştırıldığı zaman görürüz ki; matris sistemlerinin boyutları farklıdır. Bunun sebebi, $k_{12} = 0$ olduğunda $\tilde{u}_n$ yı u_m cinsinden yazmak için $\tilde{u}_n = k_{11}u_0$ şartı kullanılır dolayısıyla (3.61) de $\tilde{u}_n$ nin elemine edilmesine ihtiyaç duyulur ve/veya $g_{12} = 0$ olduğunda $\tilde{u}_0$ yı u_m cinsinden yazmak için $\tilde{u}_n = g_{11}u_0$ şartı kullanılır. Dolayısıyla (3.61) de $\tilde{u}_n$ nin elemine edilmesine ihtiyaç duyulur. Böylece katlılığı da hesaba katılarak Teorem 2.3'de tam olarak $m + n + 1$ tane, Teorem 2.4'de tam olarak $m + n + 2$ tane, Teorem 2.5'de tam olarak $m + n$ tane ve Teorem 2.6'da da tam olarak $m + n + 1$ tane özdeğer vardır.

Bir sonraki sonuç; geçiş şartlı, Atkinson tipindeki her SLP nin aynı sınır şartına sahip ve yine geçiş şartlı ancak bu sefer parçalı sabit fonksiyon katsayılı bir SLP ne denk olduğu gerçeğini vurgulamaktadır.

Teorem 2.7. Kabul edelim ki; (3.2) denklemi Atkinson tipinde olsun ve p_k , $k = 1, 2, \dots, m$; $\tilde{p}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ ve q_k , w_k , $k = 0, 1, 2, \dots, m$; $\tilde{q}_i$, $\tilde{w}_i$, $i = 0, 1, \dots, n$ (3.14) ile verilmiş olsun. J üzerinde aşağıdaki $\bar{p}$, $\bar{q}$ ve $\bar{w}$ parçalı sabit fonksiyonları tanımlayalım,

$$\tilde{p}(x) = \begin{cases} p_k(a_{2k} - a_{2k-1}), & x \in [a_{2k-1}, a_{2k}], \quad k = 1, 2, \dots, m, \\ \infty, & x \in [a_{2k}, a_{2k+1}], \quad k = 0, 1, \dots, m, \\ \tilde{p}_i(a_{2i} - a_{2i-1}), & x \in [b_{2i-1}, a_{2i}], \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \infty, & x \in [b_{2i}, b_{2i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, n, \end{cases}$$

$$\tilde{q}(x) = \begin{cases} \frac{q_k}{(a_{2k+1} - a_{2k})}, & x \in [a_{2k}, a_{2k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, m, \\ 0, & x \in [a_{2k-1}, a_{2k}], \quad k = 1, 2, \dots, m, \\ \frac{\tilde{q}_i}{(b_{2i+1} - b_{2i})}, & x \in (b_{2i}, b_{2i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, n, \\ 0, & x \in [b_{2i-1}, b_{2i}], \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (3.69)$$

$$\tilde{w}(x) = \begin{cases} \frac{w_k}{(a_{2k+1} - a_{2k})}, & x \in [a_{2k}, a_{2k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, m, \\ 0, & x \in [a_{2k-1}, a_{2k}], \quad k = 1, 2, \dots, m, \\ \frac{\tilde{w}_i}{(b_{2i+1} - b_{2i})}, & x \in (b_{2i}, b_{2i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, n, \\ 0, & x \in [b_{2i-1}, b_{2i}], \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

Kabul edelim ki; (3.3) sınır şartı ya ayrık ya da reel ayrık olmayan türden olsun. Bu durumda (3.2)-(3.4) geçiş şartlı SLP nin özdeğer sayısı; $J = (a, c) \cup (c, b)$ üzerinde tanımlı, katsayıları parçalı sabit fonksiyon olan ve

$$-(\tilde{p}y')' + \tilde{q}y = \lambda \tilde{w}y, \quad (3.70)$$

biçimindeki denklemden, (3.3) deki sınır şartından ve (3.4) deki geçiş şartından oluşan SLP nin özdeğer sayısı ile tam olarak aynıdır.

İspat: Açıktır ki; (3.2)-(3.4) geçiş şartlı SLP ve (3.70), (3.3), (3.4) probleminin her ikisi de aynı p_k , $k = 1, 2, \dots, m$; $\tilde{p}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ ve q_k , w_k , $k = 0, 1, 2, \dots, m$; $\tilde{q}_i$, $\tilde{w}_i$, $i = 0, 1, \dots, n$ değerlerini belirler. Böylece, hangi (3.3) sınır şartını ve hangi (3.4) geçiş şartını içerdiğine göre Teorem 2.1'den Teorem 2.6'ya olan teoremlerden birisinden söylenebilir ki; onlar aynı matris özdeğer problemine denktirler ve dolayısıyla aynı özdeğerlere sahiptirler.

Teorem 2.7 den, verilen bir J aralığı üzerinde tespit edilmiş bir (3.3) sınır şartı ve (3.4) geçiş şartı için bir SLP ler ailesi vardır, öyle ki; bu aile geçiş şartlı, Atkinson tipindedir ve geçiş şartlı (3.70), (3.3), (3.4) SLP ile aynı özdeğer sayısına sahiptir. İşte bu türden ailelere geçiş şartlı (3.70), (3.3), (3.4) SLP nin denklik ailesi denir.

3.3. Matris Özdeğer Problemlerinin Sturm-Liouville Gösterimleri

$F = (f_{ij})$, $l \times l$ boyutunda üç köşegensel bir matris veya $f_{i,i+1} \neq 0$, $i = 1, \dots, l-1$ olmak üzere 'hemen hemen üç köşegensel' (ki bu matris aynı zamanda hemen hemen simetriktir) bir matris olsun. Ayrıca $h_{kk} \neq 0$, $k = 1, 2, \dots, l$ olmak üzere $H = \text{diag}(h_{11}, \dots, h_{ll})$ şeklinde köşegensel bir matris olsun. Burada 'hemen hemen

simetriktir’ demekle matrisin ortadaki bir ya da iki elemanı hariç simetrik olması kastedilmiştir. Bu bölümde

$$FX = \lambda HX \quad (3.71)$$

formunda olan bir matris özdeğer probleminin geçiş şartlarına sahip, Atkinson tipinde bir SLP temsiline sahip olduğu gösterilecektir. Teorem 2.7 den söylenebilir ki; bu temsil tek olmayabilir. Burada (3.71) matris özdeğer probleminin, geçiş şartlı (3.70), (3.3), (3.4) SLP ve onların denklik aileleri kullanılarak tüm Sturm-Liouville temsillerini karakterize edeceğiz.

Öncelikle (3.8) ayrık sınır şartı durumunu ele alalım ve Teorem 2.1 ve Teorem 2.2 (aslında Sonuç 2.1 ve Sonuç 2.2) nin tersinin bir çeşidini bulalım.

Teorem 3.1. $l > 3$ ve C ile D (3.4) geçiş şartları ile uyumlu herhangi iki matris olsun, öyle ki; $\det(C) = \rho > 0$ ve $\det(D) = \theta > 0$ olsun. Ayrıca $G = -D^{-1}C$, $g_{12} \neq 0$ ve F , $l \times l$ boyutunda, aşağıdaki formda, ‘hemen hemen simetrik’ üç köşegensel bir matris olsun.

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & & & & & & & \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} & & & & & & \\ & & \dots & \dots & \dots & & & & \\ & & & f_{k,k-1} & f_{k,k} & f_{k,k+1} & & & \\ & & & & f_{k+1,k} & f_{k+1,k+1} & f_{k+1,k+2} & & \\ & & & & & f_{k+1,k+2} & \dots & \dots & \\ & & & & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & & f_{l-1,l-2} & f_{l-1,l-1} & f_{l-1,l} \\ & & & & & & & & f_{l-1,l} & f_{l,l} \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Yine $2 \leq k \leq l-2$, $f_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq l$, $f_{j,j+1} \neq 0$, $j = 1, \dots, l-1$, $f_{k+1,k} = \frac{\rho}{\theta} f_{k,k+1}$ ve

$$H = \text{diag}(h_{11}, \dots, h_{ll}), \quad 0 \neq h_{jj} \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq j \leq l \quad (3.73)$$

olsun. Bu durumda verilen herhangi bir (3.8) ayrık kendine-eş sınır şartı için (3.71) matris özdeğer problemi (3.2), (3.4), (3.8) formunda geçiş şartlı Atkinson tipinde SLP olarak temsillere sahiptir. Bunun yanında J nin verilen herhangi bir tespit edilmiş parçalanışı için, (3.14) deki gösterimler kullanılarak aşağıdaki dört maddeden

birisi sağlanmak üzere bu matris özdeğer problemi geçiş şartlı (3.70), (3.4), (3.8) formunda SLP olarak tek bir temsile sahiptir. Bu maddeler aşağıdadır:

- (i) $\alpha, \beta \in (0, \pi)$,
- (ii) $\alpha = 0$ ve $\beta \in (0, \pi)$ ve p_1, q_0 ve w_0 tespit edilmiş,
- (iii) $\alpha, \beta \in (0, \pi)$,
- (iv) $\alpha, \beta \in (0, \pi)$.

Bu durumların her birinde, (3.71) probleminin bütün Sturm-Liouville gösterimleri; bunlara karşılık gelen (3.70), (3.4), (3.8) geçiş şartlı SLP nin denklik aileleri ile parametrelerin tüm mümkün olan seçimlerine bağlı olarak verilir. Örneğin, $\alpha = 0$ ve $\beta \in (0, \pi)$ durumunda p_1, q_0, w_0 in tüm seçimleri gibi.

İspat: Öncelikle $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ durumunu ele alalım. Burada belirtelim ki; F ve H matrislerini, (3.71) eşitliğini $-\frac{1}{g_{12}f_{k,k+1}}$ ile çarparak $f_{k,k+1} = -\frac{1}{g_{12}}$ olacak şekilde normalleştirebiliriz. Bu operasyon (3.71) probleminin özdeğerlerini değiştirmeyecektir. Şimdi $m = k - 1, \quad n = l - k - 1, \quad J = (a, c) \cup (c, b),$ $-\infty < a < b < \infty$ olsun. J nin (3.11) parçalanışını alalım ve $[a, c) \cup (c, b]$ üzerinde (3.5), (3.12) ve (3.13)'ü sağlayacak $\bar{p}, \bar{q}$ ve $\bar{w}$ parçalı sabit fonksiyonlarını tanımlayalım. Burada yapmamız gereken, bu fonksiyonların $[a, c) \cup (c, b]$ nin her bir alt aralığında değerlerini tanımlamak olacaktır. Öyle ki; bu fonksiyonlar (3.12) ve (3.13) de sıfır olarak tanımlanmayacaktır. Bunu yapmak için,

$$p_i = -f_{i,i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \tilde{p}_j = -f_{j+m+1, j+m+2}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$w_i = h_{i+1, i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad \tilde{w}_j = h_{j+m+2, j+m+2}, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

ve

$$q_0 = h_{11} - p_1 - \cot \alpha, \quad q_i = h_{i+1, i+1} - p_i - p_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, m-1,$$

$$q_m = h_{m+1,m+1} - p_m - \frac{g_{11}}{g_{12}}, \quad \tilde{q}_0 = h_{m+2,m+2} - \tilde{p}_1 - \frac{g_{22}}{g_{12}},$$

$$\tilde{q}_j = h_{j+m+2,j+m+2} - \tilde{p}_j - \tilde{p}_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad \tilde{q}_n = h_{m+n+2,m+n+2} - \tilde{p}_n + \cot \beta.$$

olsun. Bu durumda (3.69) dan $\bar{p}(x)$, $\bar{q}(x)$ ve $\bar{w}(x)$ tanımlanır. Öyle ki; bu $\bar{p}$, $\bar{q}$ ve $\bar{w}$ parçalı sabit fonksiyonlar J üzerinde (3.3) (3.12) ve (3.13)'ü sağlar, (3.70) denklemi Atkinson tipindedir ve (3.14) sağlanır. Kolayca görülebilir ki; (3.71) problemi (3.41) problemiyle aynı forma sahiptir. Dolayısıyla Sonuç 2.1'den (3.71) problemi geçiş şartlı (3.2), (3.4), (3.8) SLP ne denktir. Son kısım da Teorem 2.7'den elde edilir.

$\alpha = 0$ ve $\beta = \pi$ durumları içinde aynı düşünce geçerlidir.

Teorem 3.2. $l > 4$ ve C ile D (3.4) deki gibi olan ve $\det(C) = \rho > 0$ ile $\det(D) = \theta > 0$ koşullarını sağlayan herhangi iki matris olsun. Ayrıca yine $G = (g_{ij}) = -D^{-1}C$, $g_{12} = 0$ ve F aşağıdaki gibi tanımlanan $l \times l$ boyutunda 'hemen hemen' simetrik üç köşegensel bir matris olsun.

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & & & & & & & \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} & & & & & & \\ & \dots & \dots & \dots & & & & & \\ & & f_{k,k-1} & f_{k,k} & f_{k,k+1} & & & & \\ & & & f_{k+1,k} & f_{k+1,k+1} & f_{k+1,k+2} & & & \\ & & & & f_{k+1,k+1} & \dots & \dots & & \\ & & & & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & & & f_{l-1,l-2} & f_{l-1,l-1} & f_{l-1,l} \\ & & & & & & & f_{l-1,l} & f_{l,l} \end{bmatrix}. \quad (3.74)$$

Burada $2 \leq k \leq l-3$, $f_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq l$, $f_{j,j+1} \neq 0$, $j = 1, \dots, l-1$,

$f_{k+1,k} = g_{22}f_{k,k+1}$, $f_{k+2,k+1} = g_{11}f_{k+1,k+2}$ ve

$$H = \text{diag}(h_{11}, \dots, h_{ll}), \quad 0 \neq h_{jj} \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq j \leq l \quad (3.75)$$

olsun. O zaman, verilen herhangi bir ayrık kendine-eş (3.8) sınır şartı için (3.71) matris özdeğer problemi (3.2), (3.4), (3.8) SLP formunda, geçiş şartlı, Atkinson

tipinde SLP olarak gösterimlere sahiptir. Ayrıca J nin verilen tespit edilmiş (3.11) parçalanışı için (3.14) deki gösterimler kullanılarak aşağıdaki dört maddeden birisi sağlanmak üzere bu matris özdeğer problemi geçiş şartlı (3.70), (3.4), (3.8) formunda SLP olarak tek bir temsile sahiptir. Bu maddeler aşağıdadır:

- (i) $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ ve q_m ile w_m tespit edilmiş,
- (ii) $\alpha = 0$, $\beta \in (0, \pi)$ ve q_m , w_m ile p_1 , q_0 ve w_0 tespit edilmiş,
- (iii) $\alpha, \beta \in (0, \pi)$, $\beta = \pi$ ve q_m , w_m ile $\tilde{p}_n$, $\tilde{q}_n$ ve $\tilde{w}_n$ tespit edilmiş,
- (iv) $\alpha = 0$, $\beta = \pi$ ve q_m , w_m ile p_1 , q_0 , w_0 ve $\tilde{p}_n$, $\tilde{q}_n$, $\tilde{w}_n$ tespit edilmiş.

Bu durumların her birinde, (3.71) probleminin bütün Sturm-Liouville gösterimleri; bunlara karşılık gelen (3.70), (3.4), (3.8) geçiş şartlı SLP nin denklik aileleri ile parametrelerin tüm mümkün olan seçimlerine bağlı olarak verilir. Örneğin, $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ q_m , w_m in tüm seçimleri gibi.

İspat: Halen $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ durumunu ele alalım. Şimdi $m = k$, $n = l - k - 1$, $J = (a, c) \cup (c, b)$, $-\infty < a < b < \infty$ olsun. J nin (3.11) parçalanışını alalım.

$$p_i = -f_{i,i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \tilde{p}_j = -f_{j+m,j+m+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$w_i = h_{i+1,i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad \tilde{w}_j = h_{j+m+1,j+m+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\tilde{w}_0 = \frac{1}{g_{11}}(h_{m+1,m+1}, g_{22}w_m) \text{ burada } w_m \text{ tespit edilmiş,}$$

ve

$$q_0 = h_{11} - p_1 - \cot \alpha, \quad q_i = h_{i+1,i+1} - p_i - p_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, m-1,$$

$$\tilde{q}_0 = \frac{1}{g_{11}}(h_{m+1,m+1}, g_{22}q_m - g_{22}p_m - g_{11}\tilde{p}_1 - g_{21}) \text{ burada } q_m \text{ tespit edilmiş,}$$

$$\tilde{q}_j = h_{j+m+2,j+m+2} - \tilde{p}_j - \tilde{p}_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad \tilde{q}_n = h_{m+n+1,m+n+1} - \tilde{p}_n + \cot \beta.$$

olsun. Ayrıca $\bar{p}(x)$, $\bar{q}(x)$ ve $\bar{w}(x)$ fonksiyonlarını (3.69) daki gibi tanımlayalım. Teorem 3.1'in ispatına benzer şekilde, görülebilir ki (3.71) problemi (3.44) deki forma benzer. Buradan Sonuç 2.2'den (3.71) problemi (3.2), (3.4), (3.8) geçiş şartlı SLP ne denktir. Son kısım yine Teorem 2.7'den elde edilir.

$\alpha = 0$ ve/veya $\beta = \pi$ durumları da aynı şekilde yapılır.

Şimdi, (3.9) ayrık olmayan durumu ele alalım ve Teorem 2.3 den Teorem 2.6 ya olan teoremlerin terslerini bulalım.

Teorem 3.3. $l > 3$ ve C ile D (3.4) deki gibi olan ve $\det(C) = \rho > 0$ ile $\det(D) = \theta > 0$ koşullarını sağlayan herhangi iki matris olsun. Ayrıca yine $G = (g_{ij}) = -D^{-1}C$, $g_{12} = 0$ ve F aşağıdaki gibi tanımlanan $l \times l$ boyutunda 'hemen hemen' simetrik, sıfır olmayan $f_{1l} = f_{l1}$ elemanları hariç üç köşegensel bir matris olsun.

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & & & & & & f_{1l} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} & & & & & \\ & \dots & \dots & \dots & & & & \\ & & f_{k,k-1} & f_{k,k} & f_{k,k+1} & & & \\ & & & f_{k+1,k} & f_{k+1,k+1} & f_{k+1,k+2} & & \\ & & & & f_{k+1,k+1} & \dots & \dots & \\ & & & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & f_{l-1,l-2} & f_{l-1,l-1} & f_{l-1,l} \\ f_{1l} & & & & & & & f_{l-1,l} & f_{l,l} \end{bmatrix}. \quad (3.76)$$

Burada $2 \leq k \leq l-2$, $f_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq l$, $f_{j,j+1} \neq 0$, $j = 1, \dots, l-1$,

$$f_{k+1,k} = \frac{\rho}{\theta} f_{k,k+1} \quad f_{1,l} = -\frac{g_{12}}{k_{12}} f_{k,k+1} \quad \text{ve}$$

$$H = \text{diag}(h_{11}, \dots, h_{ll}), \quad 0 \neq h_{jj} \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq j \leq l \quad (3.77)$$

olsun. O zaman, verilen herhangi bir ayrık olmayan kendine-eş $k_{12} \neq 0$ olan (3.9) sınır şartı için (3.71) matris özdeğer problemi (3.2), (3.4), (3.9) SLP formunda, geçiş şartlı, Atkinson tipinde SLP olarak gösterimlere sahiptir. Ayrıca J nin verilen tespit

edilmiş (3.11) parçalanışı için (3.14) deki gösterimler kullanılarak bu matris özdeğer problemi geçiş şartlı (3.70), (3.4), (3.8) formunda SLP olarak tek bir temsile sahiptir ve parametrelerin tüm mümkün olan seçimleriyle birlikte (3.71) in tüm Sturm-Liouville gösterimleri, karşılık gelen geçiş şartlı (3.70), (3.4), (3.9) SLP nin denklik ailesi ile verilir.

İspat: Burada belirtelim ki; F ve H matrislerini, (3.71) eşitliğini $-\frac{1}{g_{12}f_{k,k+1}}$ ile

çarparak $f_{k,k+1} = -\frac{1}{g_{12}}$ olacak şekilde normalleştirebiliriz. Bu operasyon (3.71)

probleminin özdeğerlerini değiştirmeyecektir. Şimdi $m = k - 1$, $n = l - k - 1$, $J = (a, c) \cup (c, b)$, $-\infty < a < b < \infty$ seçelim. J nin (3.11) parçalanışını alalım ve

$$p_i = -f_{i,i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \tilde{p}_j = -f_{j+m+1,j+m+2}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$w_i = h_{i+1,i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad \tilde{w}_j = h_{j+m+2,j+m+2}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

ve

$$q_0 = h_{11} - p_1 - \frac{k_{11}}{k_{12}}, \quad q_i = h_{i+1,i+1} - p_i - p_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, m-1,$$

$$q_m = h_{m+1,m+1} - p_m - \frac{g_{11}}{g_{12}}, \quad \tilde{q}_0 = h_{m+2,m+2} - \tilde{p}_1 - \frac{g_{22}}{g_{12}},$$

$$\tilde{q}_j = h_{j+m+2,j+m+2} - \tilde{p}_j - \tilde{p}_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad \tilde{q}_n = h_{m+n+2,m+n+2} - \tilde{p}_n + \frac{k_{11}}{k_{12}}$$

olsun. Ayrıca $\bar{p}(x)$, $\bar{q}(x)$ ve $\bar{w}(x)$ fonksiyonlarını (3.69) daki gibi tanımlayalım.

Teorem 3.1 in ispatına benzer şekilde görebiliriz ki; (3.71) problemi (3.61) deki problem gibidir. Böylece, Teorem 2.4 den (3.71) problemi geçiş şartlı (3.2), (3.4), (3.9) SLP ne denktir.

Teorem 3.4. $l > 3$ ve C ile D (3.4) deki gibi olan ve $\det(C) = \rho > 0$ ile $\det(D) = \theta > 0$ koşullarını sağlayan herhangi iki matris olsun. Ayrıca yine $G = (g_{ij}) = -D^{-1}C$, $g_{12} = 0$ ve F aşağıdaki gibi tanımlanan $l \times l$ boyutunda

‘hemen hemen’ simetrik, sıfır olmayan $f_{1l} = f_{l1}$ elemanları hariç üç köşgensel bir matris olsun.

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & & & & & & f_{1l} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} & & & & & \\ & \dots & \dots & \dots & & & & \\ & & f_{k,k-1} & f_{k,k} & f_{k,k+1} & & & \\ & & & f_{k+1,k} & f_{k+1,k+1} & f_{k+1,k+2} & & \\ & & & & f_{k+1,k+2} & \dots & \dots & \\ & & & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & f_{l-1,l-2} & f_{l-1,l-1} & f_{l-1,l} \\ f_{1l} & & & & & & & f_{l-1,l} & f_{l,l} \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

Burada $2 \leq k \leq l-2$, $f_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq l$, $f_{j,j+1} \neq 0$, $j = 1, \dots, l-1$,
 $f_{k+1,k} = \frac{\rho}{\theta} f_{k,k+1}$ ve

$$H = \text{diag}(h_{11}, \dots, h_{ll}), \quad 0 \neq h_{jj} \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq j \leq l \quad (3.79)$$

olsun. O zaman, verilen herhangi bir ayrık olmayan kendine-eş $k_{12} = 0$ olan (3.9) sınır şartı için (3.71) matris özdeğer problemi (3.2), (3.4), (3.9) SLP formunda, geçiş şartlı, Atkinson tipinde SLP olarak gösterimlere sahiptir. Ayrıca J nin verilen tespit edilmiş (3.11) parçalanışı için (3.14) deki gösterimler kullanılarak bu matris özdeğer problemi geçiş şartlı (3.70), (3.4), (3.8) formunda SLP olarak tek bir temsile sahiptir ve parametrelerin tüm mümkün olan seçimleriyle birlikte (3.71) in tüm Sturm-Liouville gösterimleri, karşılık gelen geçiş şartlı (3.70), (3.4), (3.9) SLP nin denklik ailesi ile verilir.

İspat: Burada belirtelim ki; F ve H matrislerini, (3.71) eşitliğini $(k_{12}f_{1l})^{-1}$ ile

çarparak $f_{k,k+1} = -\frac{1}{g_{12}}$ ve $f_{1,l} = \frac{1}{k_{12}}$ olacak şekilde normalleştirebiliriz. Bu operasyon

(3.71) probleminin özdeğerlerini değiştirmeyecektir. Şimdi $m = k-1$, $n = l-k-1$, $J = (a, c) \cup (c, b)$, $-\infty < a < b < \infty$ seçelim. J nin (3.11) parçalanışını alalım ve

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & & & & & & f_{1l} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} & & & & & \\ & \dots & \dots & \dots & & & & \\ & & f_{k,k-1} & f_{k,k} & f_{k,k+1} & & & \\ & & & f_{k+1,k} & f_{k+1,k+1} & f_{k+1,k+2} & & \\ & & & & f_{k+1,k+1} & \dots & \dots & \\ & & & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & f_{l-1,l-2} & f_{l-1,l-1} & f_{l-1,l} \\ f_{1l} & & & & & & & f_{l-1,l} & f_{l,l} \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

Burada $2 \leq k \leq l-2$, $f_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq l$, $f_{j,j+1} \neq 0$, $j = 1, \dots, l-1$,

$f_{k+1,k} = g_{22}f_{k,k+1}$, $f_{k+2,k+1} = g_{11}f_{k+1,k+2}$ ve

$$H = \text{diag}(h_{11}, \dots, h_{ll}), \quad 0 \neq h_{jj} \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq j \leq l \quad (3.81)$$

olsun. O zaman, verilen herhangi bir ayrık olmayan kendine-eş $k_{12} = 0$ olan (3.9) sınır şartı için (3.71) matris özdeğer problemi (3.2), (3.4), (3.9) SLP formunda, geçiş şartlı, Atkinson tipinde SLP olarak gösterimlere sahiptir. Ayrıca J nin verilen tespit edilmiş (3.11) parçalanışı için (3.14) deki gösterimler kullanılarak bu matris özdeğer problemi geçiş şartlı (3.70), (3.4), (3.8) formunda SLP olarak tek bir temsile sahiptir ve parametrelerin tüm mümkün olan seçimleriyle birlikte (3.71) in tüm Sturm-Liouville gösterimleri, karşılık gelen geçiş şartlı (3.70), (3.4), (3.9) SLP nin denklik ailesi ile verilir.

Teorem 3.6. $l > 4$ ve C ile D (3.4) deki gibi olan ve $\det(C) = \rho > 0$ ile $\det(D) = \theta > 0$ koşullarını sağlayan herhangi iki matris olsun. Ayrıca yine $G = (g_{ij}) = -D^{-1}C$, $g_{12} = 0$ ve F aşağıdaki gibi tanımlanan $l \times l$ boyutunda ‘hemen hemen’ simetrik, sıfır olmayan $f_{1l} = f_{l1}$ elemanları hariç üç köşegensel bir matris olsun.

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & & & & & & f_{1l} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} & & & & & \\ & \dots & \dots & \dots & & & & \\ & & f_{k,k-1} & f_{k,k} & f_{k,k+1} & & & \\ & & & f_{k+2,k+1} & f_{k+1,k+1} & f_{k+1,k+2} & & \\ & & & & f_{k+1,k+1} & \dots & \dots & \\ & & & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & f_{l-1,l-2} & f_{l-1,l-1} & f_{l-1,l} \\ f_{1l} & & & & & & & f_{l-1,l} & f_{l,l} \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

Burada $2 \leq k \leq l-2$, $f_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq l$, $f_{j,j+1} \neq 0$, $j = 1, \dots, l-1$,

$f_{k+1,k} = g_{22}f_{k,k+1}$, $f_{k+2,k+1} = g_{11}f_{k+1,k+2}$ ve

$$H = \text{diag}(h_{11}, \dots, h_{ll}), \quad 0 \neq h_{jj} \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq j \leq l \quad (3.83)$$

olsun. O zaman, verilen herhangi bir ayrık olmayan kendine-eş $k_{12} = 0$ olan (3.9) sınır şartı için (3.71) matris özdeğer problemi (3.2), (3.4), (3.9) SLP formunda, geçiş şartlı, Atkinson tipinde SLP olarak gösterimlere sahiptir. Ayrıca J nin verilen tespit edilmiş (3.11) parçalanışı için (3.14) deki gösterimler kullanılarak bu matris özdeğer problemi geçiş şartlı (3.70), (3.4), (3.8) formunda SLP olarak tek bir temsile sahiptir ve parametrelerin tüm mümkün olan seçimleriyle birlikte (3.71) in tüm Sturm-Liouville gösterimleri, karşılık gelen geçiş şartlı (3.70), (3.4), (3.9) SLP nin denklik ailesi ile verilir.

İspat: $m = k$, $n = l - k$ seçelim ve q_0 , w_0 ve q_m , w_m tespit edilmiş olsun. Bu durumda ispat Teorem 3.3 ün ispatına benzer.

BÖLÜM 4

SONUÇ

Bu tezde iki farklı uygulama sonlu spektruma sahip Atkinson tipinden iki farklı formdaki Sturm-Liouville problemine tatbik edilmiştir. Birinci uygulama verilen Sturm-Liouville problemiyle aynı özdeğere sahip (ki bu duruma tezde iki problemin denkliği denilmiştir) bir matris özdeğer problemi inşa etmektir. İkinci uygulama ise bir anlamda önceki uygulamanın tersi sayılabilecek, bir matris özdeğer problemi verildiğinde bu problemle denk olan bir Sturm-Liouville problemi kumaktır. Tezde incelenen iki Sturm-Liouville problemi şunlardır. Birincisi $-\infty < a < b < +\infty$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ ve p ve q katsayıları belirli kabulleri sağlayan (Bkz. Bölüm 2, (2.3) şartları)

$$-(py')' + qy = \lambda wy, \quad J = (a, b) \quad (1.1)$$

Sturm-Liouville denkleminin ve A ile B , bazı şartları sağlayan (Bkz. Bölüm 2, (2.5) eşitliği) 2×2 boyutunda, kompleks matrisler olmak üzere

$$AY(a) + BY(b) = 0, \quad Y = [y, py']^T \quad (1.2)$$

formunda iki noktalı düzgün ayırık veya ayırık olmayan sınır şartı ile oluşturduğu sonlu spektruma sahip Atkinson tipindeki Sturm-Liouville problemidir. İkinci ele alınan problem ise yine aynı kabuller altındaki (1.1) Sturm-Liouville denklemi, (1.2) ayırık veya ayırık olmayan sınır şartı ve bunlara ek olarak bir $c \in (a, b)$ iç noktasında süreksizliğe sahip ve bu noktada

$$CY(c-) + DY(c+) = 0 \quad (1.3)$$

biçimindeki geçiş şartları ile birlikte oluşturduğu geçiş şartlı Atkinson tipindeki sonlu spektruma sahip Sturm-Liouville problemidir. Her iki problemde incelenirken gerek düz gerekse ters uygulamada bütün özel durumlar dikkate alınmış ve her bir durum için Sturm-Liouville problemi ve matris özdeğer problemi ayrı ayrı inşa edilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Atkinson, F. V. (1964). *Discrete and continuous boundary value problems*. New York, London: Academic Press.
- [2] Kong, Q., Wu, H., Zettl, A. (2001). Sturm-Liouville Problems with Finite Spectrum, *J. Math. Anal. and Appl.* **263**, 748-762.
- [3] Kong, Q., Volkmer, H., Zettl, A. (2009). Matrix Representations of Sturm-Liouville Problems with Finite Spectrum. *Result. Math.* **54**, 103-116.
- [4] Ao, J. J., Sun, J., Zhang, M. (2012). The Finite Spectrum of Sturm–Liouville Problems with Transmission Conditions. *Applied Mathematics and Computation* **63**, 1335-1348.
- [5] Zettl, A. (2005). *Sturm-Liouville theory*. Rhode Island: Amer. Math. Soc., Mathematical Surveys and Monographs.
- [6] Volkmer, H., Zettl, A. (2007). Inverse Spectral Theory for Sturm-Liouville Problems with Finite Spectrum. *Proc. Amer. Math. Soc.* **135**, 1129-1132.
- [7] Volkmer, H., Zettl, A. A Discrete Version of Ambarzumian’s Theorem. Preprint.
- [8] Volkmer, H. (2005). Eigenvalue Problems Associated with Borel Sets. *Real Anal. Exchange.* **31**, 111-124
- [9] Volkmer, H. (2005). Eigenvalue Problems of Atkinson, Feller and Krein and Their Mutual Relationship. *Electron. J. Differential Equations.* **48**, pp.15.
- [10] Möller, M. (1999). On the Unboundedness Below of the Sturm-Liouville Pperator. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh.* **129A**, 1011-1015.
- [11] Kong, Q., Möller, M., Wu, H., Zettl, A. (2003). Indefinite Sturm-Liouville Problems. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh.* **133A**, 639-652.
- [12] Kong, Q., Zettl, A. (2011). The Study of Jacobi and Cyclic Jacobi Matrix Eigenvalue Problems Using Sturm–Liouville Theory. *Linear Algebra Appl.* **434**, 1648–1655.
- [13] Kong, Q., Zettl, A. (2012). Inverse Sturm–Liouville Problems with Finite Spectrum, *J. Math. Anal. Appl.* **386**, 1–9.

- [14] Ao, J. J., Sun, J., Zhang, M. Z. (2011). The Finite Spectrum of Sturm–Liouville Problems with Transmission Conditions. *Appl. Math. Comput.* **218**, 1166–1173.
- [15] Everitt, W.N., Race, D. (1976). On Necessary and Sufficient Conditions for the Existence of Caratheodory Solutions of Ordinary Differential equations, *Quaest.Math.* **3**, 507–512.
- [16] Kong, Q., Wu, H., Zettl, A. (1999). Dependence of the n th Sturm–Liouville Eigenvalue on the Problem, *J. Differential Equations*, **156**, 328–354.
- [17] Chanane, B. (2007). Sturm–Liouville Problems with Impulse Effects. *Appl. Math. Comput.* **190**, 610–626.
- [18] Sun, J., Wang, A. (2008). Sturm–Liouville Operators with Interface Conditions. *In the Progress of Research for Math. Mech., Phys. and High New Tech. Science Press, Beijing*, **12**, 513–516.
- [19] Kadakal, M., Mukhtarov, O. Sh. (2007). Sturm–Liouville Problems with Discontinuities at Two Points. *Comput. Math. Appl.* **54**, 1367–1379.