

**SONLU STRUM-LIOUVILLE DİFERENSİYEL OPERATÖRLER
SİSTEMİNİN SPEKTRUMU VE ESAS FONKSİYONLARI**

Gülcan KILIÇ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MAYIS 2006
ANKARA**

Gülcan KILIÇ tarafından hazırlanan SONLU STRUM-LIOUVILLE DİFERENSİYEL OPERATÖRLER SİSTEMİNİN SPEKTRUMU VE ESAS FONKSİYONLARI adlı bu tezin YÜKSEK LİSANS tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Esra KIR
Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Elgiz BAYRAM

Üye : Prof. Dr. Aydın TİRYAKİ

Üye : Doç. Dr. Bahri TURAN

Üye : Doç. Dr. Nurhayat İSPİR

Üye : Yrd. Doç. Dr. Esra KIR

Tarih : 30 / 05 / 2006

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Gülcan KILIÇ

**SONLU STRUM-LIOUVILLE DİFERENSİYEL OPERATÖRLER
SİSTEMİNİN SPEKTRUMU VE ESAS FONKSİYONLARI
(Yüksek Lisans Tezi)**

Gülcan KILIÇ

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Mayıs 2006

ÖZET

Bu tezde $L_2[0, \infty)$ uzayında Bairamov, Kır tarafından Indian J. Pure and Appl. Math. (2004)'de yayınlanmış makalede Strum–Liouville diferensiyel denklemler sisteminin ürettiği operatör gözönüne alınmıştır. Buna ilişkin denklemin belirli sınır koşullarını sağlayan çözümleri incelenmiştir. Operatörün resolventi ve sürekli spektrumu çalışılmıştır. Özdeğer ve spektral tekilliklerin yapısı incelenip, özdeğer ve spektral tekilliklere karşı gelen esas fonksiyonlar irdelenmiştir.

Bilim Kodu : 204.1.138
Anahtar Kelimeler : Diferensiyel denklem sistemi, Özdeğer, öz fonksiyon, Wronskian, spektrum, spektral tekillik, resolvent, esas fonksiyon
Sayfa Adedi : 49
Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Esra KIR

**SPECTRUM AND THE PRINCIPAL FUNCTION OF THE SYSTEM OF
FINITE STRUM-LIOUVILLE DIFFERENTIAL OPERATORS**

(M. Sc. Thesis)

Gülcan KILIÇ

**GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

May 2006

ABSTRACT

In this thesis the operator in $L_2[0,\infty)$ generated by the system of finite Sturm–Liouville differential equations by Bairamov, Kır in J. Pure and Appl. Math. (2004) is considered. The solutions satisfying certain initial conditions of the equation are investigated. The resolvent and the continuous spectrum of the operator L are studied. The structure of the eigenvalues and spectral singularities is investigated and the principal functions corresponding to the eigenvalues and spectral singularities are studied.

Science Code : 204.1.138

Key Words : System of differential equation, Eigenvalue, eigenfunction, Wronskian, spectrum, spectral singularity, resolvent, principal function

Page Number : 49

Adviser : Assist. Prof. Esra KIR

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın ortaya çıkış sürecinde bilgi birikimi ve tecrübeleriyle beni yönlendiren danışmanım Yrd. Doç. Dr. Esra KIR'a ve her aşamada desteklerini benden esirgemeyen aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Giriş.....	3
2.2. $\ell(y) = 0$ Denkleminin Çözümleri	8
3. L OPERATÖRÜNÜN RESOLVENTİ VE SPEKTRUMU	13
3.1. L Operatörünün Resolventi ve Sürekli Spektrumu	14
3.2. L Operatörünün Özdeğerleri ve Spektral Tekillikleri	19
4. L OPERATÖRÜNÜN ÖZDEĞERLERİNE VE SPEKTRAL TEKİLLİKLERİNE KARŞILIK GELEN ESAS FONKSİYONLAR.....	36
4.1. L Operatörünün Özdeğerlerine Karşılık Gelen Esas Fonksiyonlar.....	36
4.2. L Operatörünün Spektral Tekilliklerine Karşılık Gelen Esas Fonksiyonlar.....	43
KAYNAKLAR	48
ÖZGEÇMİŞ	49

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar cümlesi
H	Hilbert uzayı
$D(A)$	A operatörünün tanım cümlesi
$R(A)$	A operatörünün değer cümlesi
$W[y_1, y_2]$	y_1 ve y_2 çözümlerinin Wronskianı
$o(1)$	Sonsuz küçük değerler
$O(1)$	Sınırlı değerler
$R_\lambda(A)$	A operatörünün resolventi
$\rho(A)$	A operatörünün resolvent cümlesi
$\sigma(A)$	$\mathbb{C} \setminus \rho(A)$ A operatörünün spektrumu
$\sigma_d(A)$	A operatörünün diskret spektrumu
$\sigma_c(A)$	A operatörünün sürekli spektrumu
$\sigma_r(A)$	A operatörünün rezidü spektrumu
L^*	L operatörünün adjointi

1. GİRİŞ

Non-selfadjoint Sturm–Liouville diferensiyel operatörlerin, spektral analizinin incelenmesine Naimark tarafından başlanmıştır [1, 2]. Naimark, bu operatörlerin spektrumunun özdeğerler, spektral tekillikler ve sürekli spektrumdan oluştuğunu göstermiştir. Özdeğer olmayan, sürekli spektrumda yer alan, resolventin kutuplarına, Schwartz spektral tekillik adını vermiştir [6]. Lyance, spektral tekilliklerine karşılık gelen esas fonksiyonların özelliklerini incelemiş ve spektral tekilliklerin, spektral açılıma etkisini araştırmıştır [7].

$L_2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N)$ uzayında, $\ell_n(y_n) = -y_n'' + q_n(x)y_n$, $n = 1, 2, \dots, N$ $x \in \mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ diferensiyel ifadesi ve $y_n(0) = 0$ koşuluyla tanımlanan operatörün ters problemi Apronovich and Marchenko tarafından ele alınmıştır [5].

$L_2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N)$ uzayında $-y_n'' + q_n(x)y_n = 0$, $n = 1, 2, \dots, N$ $x \in \mathbb{R}_+$ denklemi ve $y_n(0) = 0$ sınır koşulu yardımıyla üretilen operatör $\mathcal{L}$ ile gösterilsin. Bairamov ve Kır 2004'teki çalışmalarında $\mathcal{L}$ operatörünün spektrumunu bulup,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} \{ \exp(\varepsilon \sqrt{x}) |q_n(x)| \} < \infty, n = 1, 2, \dots, N, \varepsilon > 0$$

koşulu altında $\mathcal{L}$ 'nin özdeğerlerinin, spektral tekilliklerinin ve onların katlarının sonlu olduğunu göstermişlerdir [4].

Bu tez 4 bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümün ilk kısmında temel tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci kısımda ise diferensiyel operatör tanımlanmış ve diferensiyel denklemin çözümleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümün ilk kısmında operatörün resolventi parametrelerin değişimi yöntemiyle hesaplanmış, operatörün sürekli spektrumu bulunmuştur. Üçüncü bölümün ikinci kısmında $\mathcal{L}$ operatörünün özdeğer ve spektral tekilliklerinin yapısı incelenmiştir.

Dördüncü bölümün ilk kısmında $\mathcal{L}$ 'nin özdeğerlerine karşılık gelen esas fonksiyonlar tümevarım yöntemiyle bulunmuştur. İkinci kısmında $\mathcal{L}$ 'nin spektral tekilliklerine karşılık gelen esas fonksiyonlar elde edilmiştir. Özdeğerlere karşılık gelen esas fonksiyonların L_2 , spektral tekilliklere karşılık gelen esas fonksiyonların H uzayına ait olduğu incelendi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Giriş

Bu bölümde, spektral analizin bazı temel tanımları ve önemli teoremleri ifade edildikten sonra, sonlu Sturm–Liouville diferensiyel denklemler sisteminin belirli başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri incelenecektir.

2.1. Tanım

H Hilbert uzayında herhangi bir $D \subset H$ lineer alt uzayı ve $A: D \subset H \rightarrow H$ dönüşümü verilsin. Eğer her $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ ve her $x_1, x_2 \in D$ için

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A_{x_1} + \alpha_2 A_{x_2}$$

eşitliği sağlanıyorsa A operatörüne lineer operatör, D' 'ye ise A operatörünün tanım bölgesi denir ve bu küme $D(A)$ ile gösterilir. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi, X topolojik vektör uzayı, $L(X)$ X 'de tanımlı lineer operatör uzayı olsun.

2.2. Tanım

$A \in L(X)$ ve $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ için $(A - \lambda_0 I)x = 0$ denkleminin $x = 0$ aşıkâr çözümünden başka bir $x \neq 0$ çözümü bulunursa, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ sayısına A operatörünün özdeğeri, bu denklemin her bir $x \neq 0$ çözümüne ise A operatörünün λ_0 özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu denir.

2.3. Tanım

$D(A) = H$ olmak üzere $\forall x, y \in D(A)$ için

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$$

eşitliği sağlanıyorsa A operatörüne simetrik operatör denir. A simetrik operatörü için $A^* = A$ ise A operatörüne self-adjoint operatör denir. Bu şartı sağlamıyorsa operatöre non-selfadjoint operatör denir.

2.4. Tanım

$A \in L(X)$ olmak üzere

$$\sigma_d(A) = \{\lambda: \lambda \in \mathbb{C}, R_\lambda(A) := (A - \lambda I)^{-1} \text{ resolvent operatörü yoktur}\}$$

cümlesine A operatörünün özdeğerler cümlesi denir.

2.5. Tanım

$A \in L(X)$ olmak üzere

$$\rho(A) := \{\lambda: \lambda \in \mathbb{C}, R_\lambda(A) \text{ var, } R_\lambda(A) \text{ sınırlı, } \overline{D(R_\lambda(A))} = H\}$$

cümlesine A operatörünün resolvent cümlesi denir.

2.6. Tanım

$A \in L(X)$ olmak üzere

$$\sigma_c(A) := \{\lambda: \lambda \in \mathbb{C}, R_\lambda(A) \text{ var, } R_\lambda(A) \text{ sınırsız, } \overline{D(R_\lambda(A))} = H\}$$

cümlesine A operatörünün sürekli spektrumu denir.

2.7. Tanım

$A \in L(X)$ olmak üzere

$$\sigma_r(A) := \{\lambda: \lambda \in \mathbb{C}, R_\lambda(A) \text{ var, } R_\lambda(A) \text{ sınırlı, } \overline{D(R_\lambda(A))} \neq H\}$$

cümlesine A operatörünün kalan (rezidü) spektrumu denir.

2.8. Tanım

$A \in L(X)$ olmak üzere

$$\sigma(A) := C \setminus \rho(A)$$

kümesine A operatörünün spektrumu denir.

2.1. Teorem (Privalov) [9]

g fonksiyonunun açık üst düzlemde analitik, E cümlesi g fonksiyonunun reel sıfırlarının cümlesi ve μ , E cümlesinin reel Lebesgue ölçüsü olsun.

Eğer $\mu(E) > 0$ ise bu durumda $g(z) \equiv 0$ olur.

2.2. Teorem

$f \in L_2(-\infty, +\infty)$ ise $N > 0$ için

$$g_N(\lambda) = \int_{-N}^{+N} f(x) \cdot e^{-i\lambda x} dx$$

olmak üzere

$$\lim_{N \rightarrow \infty} g_N(\lambda) = g(\lambda)$$

olacak şekilde bir $g \in L_2(0, \infty)$ vardır.

2.3. Teorem (Pavlov) [8]

Kabul edelim ki $g(z)$ fonksiyonu açık kompleks üst düzlemde analitik, tüm basamaktan türevleri sürekli, kapalı üst düzlemde sürekli olsun.

$$\left| \frac{d^r}{dz^r} g(z) \right| \leq A_r, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad \text{Im } z \geq 0, \quad |z| < T$$

ve

$$\left| \int_{-\infty}^T \frac{\ln |g(x)|}{1+x^2} dx \right| < \infty, \quad \left| \int_T^{\infty} \frac{\ln |g(x)|}{1+x^2} dx \right| < \infty$$

sağlanacak şekilde $T > 0$ sayısı vardır. Ayrıca M cümlesi $g(z)$ fonksiyonunun sonsuz katlı sıfırlarının cümlesi ve $\mu(M_s) = 0$ 'dır. h keyfi pozitif bir sayı olmak üzere

$$\int_0^h \ln T(s) d\mu(M_s) = -\infty$$

ise bu durumda $g(z) \equiv 0$ 'dır. Burada

$$T(s) = \inf_r \frac{A_r \cdot s^r}{r!}$$

dir ve $\mu(M_s)$, M cümlesinin s komşuluğunun lineer Lebesgue ölçüsüdür.

Şimdi aşağıdaki sınır değer problemini tanımlayalım.

$$-y_n'' + q_n(x)y_n = \lambda^2 y_n, \quad x \in R_+ = [0, \infty), \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.1)$$

Strum–Liouville diferensiyel denklemler sistemi ve

$$y_n(0) = 0 \quad (2.2)$$

sınır koşulunu gözönüne alalım.

Burada q_n , $n = 1, 2, \dots, N$ fonksiyonları kompleks değerli fonksiyonlar ve λ spektral parametredir.

$$\text{Eş. 2.1 ve Eş. 2.2 sınır değer problemi yardımıyla } L_2(R_+, \mathbb{C}^N) := \left\{ f: \int_0^\infty \sum_{n=1}^N |f_n(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

uzayında L operatörü aşağıdaki biçimde tanımlansın.

$\forall y_n \in L_2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N)$ diferensiyellenebilen $y_n(x, \lambda)$ ($n = 1, 2, \dots, N$) fonksiyonları için $\ell(y_n) := -y_n'' + [q_n(x) - \lambda^2]y_n$ diferensiyel ifadesini göz önüne alalım.

$$D(L) = \left\{ y_n : y_n \in L_2[0, \infty; \mathbb{C}^N) \begin{array}{l} 1 - y_n' \text{ var ve } \mathbb{R}_+ \text{'nin her bir sonlu} \\ \text{alt aralığında mutlak sürekli.} \\ 2 - \ell(y_n) \in L_2[0, \infty; \mathbb{C}^N) \\ 3 - y_n(0) = 0 \end{array} \right\}$$

olmak üzere $\forall y \in D(L)$ için $L y := \ell(y)$ şeklinde tanımlayalım [4]. Burada

$$\ell(y) = \begin{bmatrix} \ell_1(y_1) \\ \ell_2(y_2) \\ \vdots \\ \ell_N(y_N) \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

Eş. 2.1 ve Eş. 2.2 denklemi

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad Q(x) = \begin{bmatrix} q_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q_N(x) \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$-y'' + Q(x)y = \lambda^2 y, \quad x \in \mathbb{R}_+ \quad (2.3)$$

ve

$$y(0) = 0 \quad (2.4)$$

biçiminde yazılabilir.

2.2. $\ell(y) = 0$ Denkleminin Çözümleri

2.4. Teorem [1]

Eş. 2.1 ve Eş. 2.2 probleminin her bir çözümü

$$e_n(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty \frac{\sin \lambda(x-t)}{\lambda} q_n(t) \cdot e_n(t, \lambda) dt, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.5)$$

denklemin bir çözümüdür. Karşıt olarak integral denkleminin her bir çözümü Eş. 2.1 ve Eş. 2.2 denkleminin bir çözümüdür.

Eş. 2.3 denkleminin

$$E(x, \lambda) = \begin{bmatrix} e_1(x, \lambda) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_2(x, \lambda) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e_N(x, \lambda) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-i\lambda x} \cdot E(x, \lambda) = I \quad (2.7)$$

koşulunu $\lambda \in \overline{C}_+ = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}, \text{Im} \lambda \geq 0\}$ için sağlayan $E(x, \lambda)$ matris çözümü vardır.

Burada I , $\mathbb{C}^N$ deki birim matristir. $E(x, \lambda)$ matris çözümü

q_n , $n = 1, 2, \dots, N$ kompleks değerli fonksiyonlar

$$\int_0^\infty x |q_n(x)| dx < \infty \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.8)$$

koşulunu sağlıyor ise Eş. 2.5 çözümü

$$e_n(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K_n(x, t) \cdot e^{i\lambda t} dt \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.9)$$

biçiminde tanımlanır.

Burada $K_n(x,t)$ Volterra tipli integral denkleminin çözümüdür. Aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar [4].

$$|K_n(x,t)| \leq c \cdot \int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} |q_n(s)| ds \quad n = 1,2,\dots,N \quad c > 0 \text{ (sabit)} \quad (2.10)$$

ve

$$\left| \frac{d}{dx} K_n(x,t) \right|, \left| \frac{d}{dt} K_n(x,t) \right| \leq \frac{1}{4} \left| q \left(\frac{x+t}{2} \right) \right| + \frac{1}{2} e^{\sigma(x)} \sigma \left(\frac{x+t}{2} \right) \quad 0 \leq x < \infty \quad (2.11)$$

Ayrıca $e_n(x,\lambda)$ $n = 1,2,\dots,N$ fonksiyonları

$\mathbb{C}_+ := \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} \lambda > 0\}$ bölgesinde λ 'ya göre analitiktir ve $\overline{\mathbb{C}_+}$ 'da süreklidir.

Ayrıca Eş. 2.3 denkleminin

$$s(0,\lambda) = 0 \quad \text{ve} \quad s'(0,\lambda) = 1 \quad (2.12)$$

koşullarını sağlayan matris çözümü vardır, tektir ve bu çözüm λ 'nın tam fonksiyonudur. Bu matris çözümü

$$S(x,\lambda) = \begin{bmatrix} S_1(x,\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_2(x,\lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & S_N(x,\lambda) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

gösterimine sahiptir. Burada

$$S_n(x,\lambda) = \frac{\sin \lambda x}{\lambda} + \int_0^x \frac{\sin \lambda(x-t)}{\lambda} q_n(t) S_n(t,\lambda) dt, \quad n = 1,2,\dots,N \quad (2.14)$$

dir. Eş. 2.14 denkleminin her bir çözümü Eş.2.3 denkleminin de çözümü olup başlangıç koşulunu sağlar [4].

2.5. Teorem [1]

$-y'' + Q(x)y = \lambda^2 y$, $0 \leq x < \infty$ denkleminin Eş. 2.8 koşulunu sağlayan $E(x, \lambda)$ çözümü aşağıdaki asimptotik eşitlikleri sağlar.

$$E(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + o(1), |\lambda| \rightarrow \infty, \text{Im}\lambda \geq 0 \quad (2.15)$$

$$E_x(x, \lambda) = i\lambda e^{i\lambda x} + O(1), |\lambda| \rightarrow \infty, \text{Im}\lambda \geq 0 \quad (2.16)$$

İspat

$$E(x, \lambda) = \begin{bmatrix} e_1(x, \lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_2(x, \lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_N(x, \lambda) \end{bmatrix}$$

$$e_n(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K_n(x, t).e^{i\lambda t}.dt, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

olduğundan Eş. 2.15 ve Eş. 2.16 asimptotik eşitliklerini ispatlamak için sırasıyla

$$e_n(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + o(1) \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \text{Im}\lambda \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

ve

$$\frac{d}{dx} e_n(x, \lambda) = i\lambda e^{i\lambda x} + O(1) \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \text{Im}\lambda \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

eşitliklerinin varlığını göstermemiz yeterlidir. Eş. 2.15 asimptotik eşitliğinin ispatı ile başlayalım.

(i) $\text{Im}\lambda = 0$ olsun. $|e^{i\lambda t}| = 1$ olduğu açıktır. Eş. 2.10 eşitsizliğinin $0 \leq x < \infty$ için integrali alınırsa

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |K_n(x, t)| dt &\leq c \cdot \int_0^\infty \int_{\frac{x+t}{2}}^\infty |q_n(s)| ds dt \\ &= c \cdot \int_0^\infty \int_{t/2}^\infty |q_n(s)| ds dt \\ &= c \cdot \int_0^\infty |q_n(s)| \cdot \int_0^{2s} dt ds \\ &= 2c \cdot \int_0^\infty s |q_n(s)| ds < \infty \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $K_n(x, \cdot) \in L_1[0, \infty)$ olur.

$$\tilde{K}_n(x, t) = \begin{cases} K_n(x, t) & , \quad t \in (x, \infty), n = 1, 2, \dots, N \\ 0 & , \quad t \in (-\infty, x] \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $e_n(x, \lambda)$, ($n = 1, 2, \dots, N$) çözümleri

$$e_n(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + \int_{-\infty}^\infty \tilde{K}_n(x, t) \cdot e^{i\lambda t} dt \quad , \quad n = 1, 2, \dots, N$$

olarak yazılır. $K_n(x, \cdot) \in L_1[0, \infty)$ olduğundan ve $\tilde{K}_n(x, \cdot)$, $K_n(x, \cdot)$ 'nin Fourier dönüşümü olduğundan $\tilde{K}_n(x, \cdot) \in L_1[0, \infty)$ olur. O halde

$$e_n(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + o(1) \quad , \quad \text{Im}\lambda = 0 \quad , \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad , \quad n = 1, 2, \dots, N$$

elde edilir.

(ii) $\text{Im}\lambda > 0$ olsun. Bu durumda $e^{i\lambda t}$ fonksiyonu azalandır.

$$|K_n(x, t)| \cdot |e^{i\lambda t}| \leq |K_n(x, t)| \quad \text{ve} \quad K_n(x, t) \in L_1$$

olduğundan

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} |K_n(x, t) \cdot e^{i\lambda t}| dt = \int_0^{\infty} \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} |K_n(x, t) \cdot e^{i\lambda t}| dt$$

$$= o(1), |\lambda| \rightarrow \infty, \text{Im}\lambda > 0$$

elde edilir. O halde $e_n(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + o(1)$ $\text{Im}\lambda > 0, |\lambda| \rightarrow \infty, n = 1, 2, \dots, N$ olur.

(i) ve (ii)'den $e_n(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + o(1)$ $|\lambda| \rightarrow \infty, \text{Im}\lambda \geq 0, n = 1, 2, \dots, N$

elde edilir.

Şimdi de Eş. 2.16 eşitliğini ispatlayalım.

$$e_n(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^{\infty} K_n(x, t) \cdot e^{i\lambda t} dt, n = 1, 2, \dots, N$$

eşitliğinde türev alınırsa

$$\frac{d}{dx} e_n(x, \lambda) = i\lambda \cdot e^{i\lambda x} - K_n(x, x) \cdot e^{i\lambda x} + \int_x^{\infty} \frac{d}{dx} K_n(x, t) e^{i\lambda t} dt, n = 1, 2, \dots, N$$

elde edilir.

(i) $\text{Im}\lambda = 0$ olsun. Bu durumda $|e^{i\lambda t}| = 1$ dir.

Eş. 2.11 eşitsizliğinden

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{d}{dx} K_n(x_0, t) \right| dt \leq \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \left| q\left(\frac{x_0 + t}{2}\right) \right| + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{\sigma(x_0)} \cdot \sigma\left(\frac{x_0 + t}{2}\right) dt < \infty, n = 1, 2, \dots, N$$

bulunur. Bu eşitsizlikten $\frac{d}{dx} K_n(x, t) \in L_1[0, \infty)$ dir.

$K_n(x,t) \in L_1[0,\infty)$ olduğundan $K_n(x,x)$ sınırlıdır. Buradan $K_n(x,x) = O(1)$, $|\lambda| \rightarrow \infty$ bulunur. Böylece

$$\frac{d}{dx} e_n(x, \lambda) = i\lambda \cdot e^{i\lambda x} + O(1) , |\lambda| \rightarrow \infty , \text{Im}\lambda = 0 , n = 1, 2, \dots, N$$

elde edilir.

(ii) $\text{Im}\lambda > 0$ olsun. Bu durumda, $e^{i\lambda t}$ azalandır. $K_n(x,x) \in L_1[0,\infty)$ olduğu açıktır ve

$$\frac{d}{dx} K_n(x, t) \in L_1[0, \infty) \text{ dir.}$$

Ayrıca

$$\left| \int_0^\infty \frac{d}{dx} K_n(x, t) \cdot e^{i\lambda t} dt \right| \leq \int_0^\infty \left| \frac{d}{dx} K_n(x, t) \right| \cdot |e^{i\lambda t}| dt , n = 1, 2, \dots, N$$

olduğundan

$$\frac{d}{dx} e_n(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + o(1) \quad |\lambda| \rightarrow \infty , \text{Im}\lambda > 0 , n = 1, 2, \dots, N$$

elde edilir. (i) ve (ii)'den

$$\frac{d}{dx} e_n(x, \lambda) = i\lambda \cdot e^{i\lambda x} + O(1) \quad |\lambda| \rightarrow \infty , \text{Im}\lambda \geq 0 , n = 1, 2, \dots, N$$

bulunur.

3. L OPERATÖRÜNÜN RESOLVENTİ VE SPEKTRUMU

Bu bölümde ilk olarak L operatörünün resolventi ve sürekli spektrumu hesaplanacaktır. İkinci kısımda L operatörünün özdeğerleri ve spektral tekilliklerinin yapısı incelenecektir.

3.1. L Operatörünün Resolventi ve Sürekli Spektrumu

3.1. Teorem [4]

Her $\lambda \in \overline{C}_+$ ve $\det E(\lambda) \neq 0$ için

$$G(x,t;\lambda) = \begin{cases} S(t,\lambda).E(x,\lambda).E^{-1}(\lambda) & , \quad 0 \leq t < x \\ -E(t,\lambda).S(x,\lambda).E^{-1}(\lambda) & , \quad x \leq t < \infty \end{cases} \quad (3.1)$$

olmak üzere L operatörünün resolventi

$$(R_\lambda(L)f)(x) := \int_0^\infty G(x,t;\lambda).f(t) dt \quad (3.2)$$

biçimindedir.

İspat

Teoremin ispatı için $-y'' + Q(x)y - \lambda^2 y = f(x)$ homogen olmayan denklemini gözönüne alalım. Eş. 2.3 denkleminin E ve S çözümlerinin Wronskian'ı alınırsa

$$\begin{aligned} W[S,E] &= S.E' - S'.E \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} [S.E' - S'.E] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} SE' - \lim_{x \rightarrow 0} S'E \\ &= -E(0,\lambda) = -E(\lambda) \end{aligned} \quad (3.3)$$

bulunur. $\det E(\lambda) \neq 0$ olduğundan $\det E(\lambda) = \prod_{n=1}^N e_n(\lambda) \neq 0$ dır. Bu durumda

$W[S,E] = -E(\lambda) \neq 0$ elde edilir. Böylece S ve E çözümleri Eş. 2.3 denkleminin temel çözümler sistemini oluşturur.

$$-y'' + Q(x)y - \lambda^2 y = f(x)$$

homogen olmayan denkleminin çözümünü parametrelerin değişimi yöntemiyle bulabiliriz.

$$-y'' + Q(x)y - \lambda^2 y = 0$$

homogen denkleminin çözümü

$$\tilde{y} = c_1 E(x, \lambda) + c_2 S(x, \lambda)$$

olsun.

$-y'' + Q(x)y - \lambda^2 y = f(x)$ denkleminin çözümü

$$y(x, \lambda) = c_1(x).E(x, \lambda) + c_2(x).S(x, \lambda) \quad (3.4)$$

biçiminde aransın. Eş. 3.4 eşitliğinde türev alınırsa

$$y' = c_1'(x).E(x, \lambda) + c_2'(x).S(x, \lambda) + c_1(x).E'(x, \lambda) + c_2(x).S'(x, \lambda)$$

bulunur.

$$c_1'(x).E(x, \lambda) + c_2'(x).S(x, \lambda) = 0 \quad (3.5)$$

alınsın. Bu durumda

$$y' = c_1(x).E'(x, \lambda) + c_2(x).S'(x, \lambda)$$

bulunur.

Son eşitlikte türev alınırsa

$$y'' = c_1'(x).E'(x, \lambda) + c_2'(x).S'(x, \lambda) + c_1(x).E''(x, \lambda) + c_2(x).S''(x, \lambda)$$

elde edilir. Bulunan eşitlikler

$$-y'' + Q(x)y - \lambda^2(y) = f(x)$$

denkleminde yerlerine yazılırsa

$$-c_1'(x).E'(x,\lambda) - c_2'(x).S'(x,\lambda) = f(x) \quad (3.6)$$

elde edilir. Eş. 3.5 ve Eş. 3.6 eşitliklerini kullanarak

$$c_1'(x) = f(x).S(x,\lambda).E^{-1}(\lambda) \quad (3.7)$$

ve

$$c_2'(x) = -f(x).E(x,\lambda).E^{-1}(\lambda) \quad (3.8)$$

bulunur. Eş. 3.7 ve Eş. 3.8 eşitliklerinin her iki tarafının integrali alınır

$$c_1(x) = \int_0^x f(t).S(t,\lambda).E^{-1}(\lambda) dt + c_1(0) \quad (3.9)$$

ve

$$c_2(x) = -\int_x^\infty f(t).E(t,\lambda).E^{-1}(\lambda) dt + c_2(\infty) \quad (3.10)$$

elde edilir. Eş. 3.9 ve Eş. 3.10 eşitlikleri Eş. 3.4 eşitliğinde gözönüne alınır

$$y(x,\lambda) = \int_0^x f(t).S(t,\lambda).E^{-1}(\lambda).E(x,\lambda) dt + c_1(0).E(x,\lambda) \\ - \int_x^\infty f(t).E(t,\lambda).E^{-1}(\lambda).S(x,\lambda) dt + c_2(\infty).S(x,\lambda)$$

elde edilir. $y(0) = 0$ şartının sağlanması için $c_1(0).E(0,\lambda) = 0$ olmalıdır. $\det E(\lambda) \neq 0$ olduğundan $E(\lambda) \neq 0$ olup $c_1(0) = 0$ dır. Çözümün L_2 de olması için $c_2(\infty) = 0$ olmalıdır. Böylece

$$y(x, \lambda) = \int_0^x f(t).S(t, \lambda).E^{-1}(\lambda).E(x, \lambda) dt - \int_x^\infty f(t).E(t, \lambda).E^{-1}(\lambda).S(x, \lambda) dt$$

bulunur.

$$G(x, t; \lambda) = \begin{cases} S(t, \lambda).E(x, \lambda).E^{-1}(\lambda) & , \quad 0 \leq t < x \\ -E(t, \lambda).S(x, \lambda).E^{-1}(\lambda) & , \quad x \leq t < \infty \end{cases}$$

alınırsa

$$y = \int_0^\infty G(x, t; \lambda).f(t).dt$$

bulunur.

3.2. Teorem [4]

Herbir λ kompleks sayısı için $\text{Im}\lambda > 0$ düzleminde

$$\|R_\lambda\| \geq \frac{c_\lambda}{|E(\lambda)| \cdot \sqrt{|\text{Im}\lambda|}} \quad (3.10)$$

olacak şekilde $c_\lambda > 0$ sayısı vardır.

İspat

$$f_b(x) = \begin{cases} \overline{S(x, \lambda)} & , \quad 0 \leq x \leq b \\ 0 & , \quad b < x < \infty \end{cases}$$

olarak tanımlayalım.

$$\int_0^\infty |f_b(x)|^2 dx = \int_0^b |S(x, \lambda)|^2 dx < \infty$$

olduğundan $f_b(\cdot) \in L_2[0, \infty)$ olur.

$$\begin{aligned}
(R_\lambda f_b)(t) &= \int_0^\infty G(x, t; \lambda) \cdot f_b(t) dt \\
&= \int_0^b G(x, t; \lambda) \overline{S(t, \lambda)} dt \\
&= \frac{E(x, \lambda)}{E(\lambda)} \cdot E^{-1}(\lambda) \|f_b\|^2
\end{aligned}$$

olur.

$E(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + o(1) \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \text{Im} \lambda \geq 0$ asimptotik eşitliğinden

$$|E(x, \lambda)| = e^{-\text{Im} \lambda \cdot x} + o(1) \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \text{Im} \lambda \geq 0$$

elde edilir. Buradan

$$|E(x, \lambda)| > \frac{1}{2} e^{-\text{Im} \lambda \cdot x}$$

olduğu açıktır.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |E(x, \lambda)|^2 dx &\geq \frac{1}{4} \int_b^\infty e^{-2 \text{Im} \lambda \cdot x} dx \\
&\geq \frac{1}{8 \cdot \text{Im} \lambda} \cdot e^{-2b \cdot \text{Im} \lambda}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

elde edilir. O halde Eş. 3.11 aşağıdaki eşitlikte göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\|R_\lambda f_b\|^2 &= \int_0^\infty |(R_\lambda f_b)(t)|^2 dt \\
\|R_\lambda f_b\|^2 &> \frac{1}{|E(\lambda)|^2} \cdot \|f_b\|^2 \cdot \frac{1}{8 \cdot \text{Im} \lambda} e^{-2b \cdot \text{Im} \lambda} \\
\|R_\lambda\|^2 &\geq \frac{c_\lambda}{|E(\lambda)| \cdot \sqrt{|\text{Im} \lambda|}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.3. Teorem [4]

λ , L operatörünün resolvent cümlesine ait ve $\lambda \rightarrow \lambda_0 \in (0, \infty)$ ise $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \|R_\lambda\| = \infty$.

İspat

Eş. 3.10 eşitsizliğinde $\text{Im}\lambda_0 = 0$ olduğundan $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \|R_\lambda\| = \infty$ elde edilir.

3.4. Teorem [4]

L operatörünün sürekli spektrumu $\sigma_c(L) = (0, \infty)$ dır.

İspat

$\lambda \in (0, \infty)$ için Teorem 3.2'den $R_\lambda(L)$ operatörünün varlığı ve Teorem 3.3'den $R(L)$ 'nin sınırsızlığı ispatlandı. Şimdi $R_\lambda(L)$ 'nin tanım kümesinin $L_2(0, \infty)$ da yoğun olduğunu gösterelim.

$$L_2(0, \infty) = \overline{R(L - \lambda I)} \oplus N(L^* - \lambda I) \quad (3.12)$$

eşitliğinde $N(L^* - \lambda I)$ cümlesi $L^* - \lambda I$ operatörünün çekirdeğidir. L^* ise L 'nin adjointidir.

$$L^* := \begin{cases} -y'' + [\overline{Q(x)} - \lambda^2]y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ile gösterilen operatörün pozitif özdeğeri olmadığından $N(L^* - \lambda I) = \{0\}$ elde edilir. O halde $L_2(0, \infty) = \overline{D((L - \lambda I)^{-1})}$ dir. Buradan $\sigma_c(L) = (0, \infty)$ bulunur.

3.2. L Operatörünün Özdeğerleri ve Spektral Tekillikleri

3.1. Tanım

L operatörünün resolventinin çekirdeğinin kutbu olup, özdeğer olmayan, sürekli spektrumda yer alan noktalara spektral tekillik denir [1]. L operatörünün özdeğerleri

ve spektral tekillikleri cümlesini $\sigma_d(L)$ ve $\sigma_{ss}(L)$ ile gösterelim. Aşağıdaki eşitlikleri tanımlayalım.

$$A_n = \{\rho : \text{Im}\rho \geq 0, e_n(\rho) = 0\} \quad (3.13)$$

$$A_n^1 = \{\rho : \rho \in \mathbb{C}_+, e_n(\rho) = 0\} \quad (3.14)$$

$$A_n^2 = \{\rho : \rho \in \mathbb{R}, e_n(\rho) = 0\} \quad (3.15)$$

burada $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ şeklinde tanımlıdır. $e_n(\rho)$ cümlesinin sıfırlarının limit noktaları cümlesini

$$A_n^3 = \{\lambda : (\lambda_m), \text{Im}\lambda > 0, \lambda_m \rightarrow \lambda, m \rightarrow \infty, e_n(\lambda_m) = 0, n = 1, 2, \dots, N\} \quad (3.16)$$

ve $e_n(\lambda)$ $n = 1, 2, \dots, N$ fonksiyonlarının sonsuz katlı sıfırlarının cümlesini

$$A_n^4 = \{\lambda : \text{Im}\lambda \geq 0, e_n^{(k)}(\lambda) = 0, n = 1, 2, \dots, N, k = 1, 2, \dots\} \quad (3.17)$$

biçiminde tanımlayalım.

3.5. Teorem [4]

$$(i) \sigma_d(L) = \bigcup_{n=1}^N B_n^1 \quad (3.18)$$

eşitliği vardır ve burada

$$B_n^1 = \{\lambda : \lambda = \rho^2, \rho \in A_n^1\} \quad (3.19)$$

biçimindedir.

$$(ii) \sigma_{ss}(L) = \bigcup_{n=1}^N B_n^2 \setminus \{0\} \quad (3.20)$$

eşitliği vardır ve burada

$$B_n^2 = \{\lambda : \lambda = \rho^2, \rho \in A_n^2\} \quad (3.21)$$

biçimindedir.

İspat

Eş.3.18 eşitliğinin var olduğunu gösterelim. Bunun için öncelikle $\bigcup_{n=1}^N B_n^1 \subset \sigma_d(L)$ olduğunu gösterelim.

$\lambda \in \bigcup_{n=1}^N B_n^1$ olsun. $\lambda \in B_{n_0}^1$ olacak şekilde en az bir $n_0 \in N$ vardır. Eş. 3.19 eşitliğinden $\rho \in A_{n_0}^1$ ve buradan $e_n(\rho) = 0$, $n = 1, 2, \dots, N$ bulunur. e_n , $n = 1, 2, \dots, N$ fonksiyonları L_2 'de ve özfonksiyonlar olduğundan λ özdeğerdir. Buradan

$$\bigcup_{n=1}^N B_n^1 \subset \sigma_d(L) \quad (3.22)$$

elde edilir. Şimdi de

$$\sigma_d(L) \subset \bigcup_{n=1}^N B_n^1$$

olduğunu gösterelim. $\lambda_0 \in \sigma_d(L)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $-y'' + Q(x)y - \lambda^2 y = 0$, $x \in \mathbb{R}_+$ denkleminin $\lambda = \lambda_0$ için aşıkâr olmayan $y(0) = 0$ koşulunu sağlayan $\psi(x, \lambda_0) \in L_2[0, \infty)$ çözümü vardır.

$$W[\psi(x, \lambda_0), S(x, \lambda_0)] = [\psi(x, \lambda_0).S'(x, \lambda_0) - \psi'(x, \lambda_0).S(x, \lambda_0)]$$

Wronskian x 'den bağımsız olduğundan

$$W[\psi(x, \lambda_0), S(x, \lambda_0)] = \lim_{x \rightarrow 0} [\psi(x, \lambda_0).S'(x, \lambda_0) - \psi'(x, \lambda_0).S(x, \lambda_0)]$$

$$= 0$$

elde edilir. Bu durumda $\psi(x, \lambda_0)$, $S(x, \lambda_0)$ lineer bağımlıdır. $\psi(x, \lambda_0)$, $S(x, \lambda_0)$ çözümünün bir katı şeklinde yazılabilir. c sabit sayı olmak üzere

$$\psi(x, \lambda_0) = c.S(x, \lambda_0)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} W[\psi(x, \lambda_0), E(x, \lambda_0)] &= \lim_{x \rightarrow 0} [\psi(x, \lambda_0).E'(x, \lambda_0) - \psi'(x, \lambda_0).E(x, \lambda_0)] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} [c.S(x, \lambda_0).E'(x, \lambda_0) - c.S'(x, \lambda_0).E(x, \lambda_0)] \\ &= -c.E(\lambda_0) \end{aligned} \quad (3.23)$$

dir.

$$\begin{aligned} W[E(x, \lambda_0), \psi(x, \lambda_0)] &= \lim_{x \rightarrow \infty} [E(x, \lambda_0).c.S'(x, \lambda_0) - E'(x, \lambda_0).c.S(x, \lambda_0)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Son eşitlikten ve Eş.3.23 eşitliğinden

$$\begin{aligned} E(\lambda_0) = 0 &\Rightarrow e_n(\lambda_0) = 0, n = 1, 2, \dots, N \\ &\Rightarrow \lambda_0 \in B_n^1 \end{aligned}$$

Böylece

$$\sigma_d(L) \subset \bigcup_{n=1}^N B_n^1 \quad (3.25)$$

bulunur. Eş.3.22 ve Eş.3.25'den $\sigma_d(L) = \bigcup_{n=1}^N B_n^1$ elde edilir.

(ii) Eş.3.20 eşitliğini ispatlamak için öncelikle $\bigcup_{n=1}^N B_n^2 \setminus \{0\} \subset \sigma_{ss}(L)$ olduğunu

göstermeliyiz.

$\lambda \in \bigcup_{n=1}^N B_n^2 \setminus \{0\}$ olduğunu kabul edelim. $\lambda \in B_{n_0}^2$ olacak şekilde en az bir tane $n_0 \in N$ vardır. Öyleki $\lambda = \rho^2$ olacak şekilde $\rho \in A_n^2$ bulunabilir. Buradan $e_n(\rho) = 0$, $\rho \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots, N$ elde edilir. Spektral tekilliğin tanımından $\lambda \in \sigma_{ss}(L)$ bulunur. Böylece

$$\bigcup_{n=1}^N B_n^2 \setminus \{0\} \subset \sigma_{ss}(L) \quad (3.26)$$

elde edilir.

Şimdi de $\sigma_{ss}(L) \subset \bigcup_{n=1}^N B_n^2 \setminus \{0\}$ olduğunu gösterelim. $\rho \in \sigma_{ss}(L)$ olduğunu kabul edelim. $\rho \in \sigma_{ss}(L)$ ise $\rho \in \mathbb{R}$, $e_n(\rho) = 0$, $\rho \in A_n^2$ elde edilir.

$\rho \in A_n^2$ ise $\lambda = \rho^2$ olacak şekilde en az bir $\lambda \in B_n^2$ vardır. $\lambda \in B_n^2$ ise $\lambda \in \bigcup_{n=1}^N B_n^2 \setminus \{0\}$ 'dır.

Buradan

$$\sigma_{ss}(L) \subset \bigcup_{n=1}^N B_n^2 \setminus \{0\} \quad (3.27)$$

olur. Eş. 3.26 ve Eş. 3.27'den ise

$$\sigma_{ss}(L) = \bigcup_{n=1}^N B_n^2 \setminus \{0\}$$

elde edilir.

Böylece Teorem 3.5'in ispatı tamamlanır.

3.6. Teorem [4]

$$\int_0^\infty x |q_n(x)| dx < \infty$$

koşulu altında aşağıdakiler vardır.

(i) A_n^1 kümesi sınırlıdır, A_n^1 sayılabilir sayıda elemana sahiptir ve limit noktaları reel eksenin sınırlı bir alt aralığındadır.

(ii) A_n^2 kümesi kompakttır ve $\mu(A_n^2) = 0$ 'dır. Burada $\mu(A_n^2)$, A_n^2 kümesinin Lebesgue ölçüsüdür.

İspat

$$(i) e_n(\lambda) = 1 + \int_0^\infty K_n(0, t) e^{i\lambda t} dt, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

fonksiyonları $\text{Im}\lambda > 0$ yarı düzleminde analitik ve $\text{Im}\lambda \geq 0$ yarı düzleminde ise süreklidir. Diğer taraftan

$$e_n(\lambda) = 1 + o(1), \quad \lambda \in \overline{C}_+, \quad |\lambda| \rightarrow \infty$$

asimptotik eşitliğinden $e_n(\lambda)$, ($n = 1, 2, \dots, N$) fonksiyonları yeteri kadar büyük λ 'lar ve $\text{Im}\lambda \geq 0$ için sıfırdan farklıdır. Yani $e_n(\lambda)$, ($n = 1, 2, \dots, N$) özdeş olarak sıfır değildir ve sıfırları sınırlı bir bölgededir. $e_n(\lambda)$, ($n = 1, 2, \dots, N$) $\text{Im}\lambda > 0$ 'da analitik olduğundan buradaki sıfırları en çok sayılabilir sayıdadır. Analitik fonksiyonun analitik bölgesinin içindeki sıfırlarının limit noktaları analitik bölgesinin sınırında olduğundan A_n^1 cümlesinin limit noktaları reel eksenin sınırlı bir alt aralığında yer alır.

(ii) Privalov birebirlik teoreminden A_n^2 cümlesinin Lebesgue ölçüsü sıfırdan büyük olsaydı A_n^2 cümlesinin özdeş olarak sıfır olması gerekirdi. Fakat $A_n^2 \neq 0$ olduğundan $\mu(A_n^2) = 0$ elde edilir.

Şimdi A_n^2 cümlesinin kompakt olduğunu gösterelim. Bunun için A_n^2 cümlesinden alınan herhangi bir dizinin limit noktasının A_n^2 'ye ait olduğunu göstermeliyiz.

$(\lambda_m) \in A_n^2$, $e_n(\lambda_m) = 0$, $n = 1, 2, \dots, N$, $\lambda_m \rightarrow \lambda_0$, $m \rightarrow \infty$ herhangi dizisini alalım. $e_n(\lambda_m)$, $(n = 1, 2, \dots, N)$ $\text{Im} \lambda \geq 0$ yarı düzleminde analitik ve sürekli olduğundan

$$\lim_{m \rightarrow \infty} e_n(\lambda_m) = e_n\left(\lim_{m \rightarrow \infty} (\lambda_m)\right) = e_n(\lambda_0) = 0$$

elde edilir. Buradan λ_0 'ın $e_n(\lambda)$, $(n = 1, 2, \dots, N)$ fonksiyonlarının sıfırı olduğu elde edilir. Yani $\lambda_0 \in A_n^2$ 'dir.

3.1. Lemma [4]

$c > 0$ olmak üzere

$$M_r = 2^r \cdot c \cdot \int_0^\infty t^r \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{t}} dt < \infty, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (3.28)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

$$\frac{\varepsilon}{2} \cdot \sqrt{t} = u \text{ dönüşümünü yapalım.}$$

$$\frac{\varepsilon^2}{4} t = u^2 \Rightarrow \frac{\varepsilon^2}{4} dt = 2u du$$

$$\Rightarrow dt = \frac{8u}{\varepsilon^2} du$$

$$M_r = 2^r \cdot c \cdot \int_0^\infty \left(\frac{u^2 \cdot 4}{\varepsilon^2} \right)^r \cdot e^{-u} \cdot \frac{8u}{\varepsilon^2} du$$

$$= 2^r \cdot c \cdot \int_0^\infty \frac{u^{2r}}{\varepsilon^{2r}} \cdot 4^r \cdot e^{-u} \cdot 8 \cdot \frac{u}{\varepsilon^2} du$$

$$= \frac{8c \cdot 2^r \cdot 4^r}{\varepsilon^{2r+2}} \int_0^\infty u^{2r+1} e^{-u} du$$

$2r$ kez kısmi integrasyon uygularsak

$$M_r \leq \frac{8c.2^r.4^r}{\epsilon^{2r+2}} (2r+1).(2r) \dots 3.2 \int_0^\infty u.e^{-u} du$$

$$\leq \frac{8c.2^r.4^r}{\epsilon^{2r+2}} (2r+1)^{2r} \int_0^\infty u.e^{-u} du$$

elde edilir. $\int_0^\infty u.e^{-u} du$ integralinde kısmi integrasyon uygulayarak $x \rightarrow \infty$ için limitine bakalım.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^\infty u.e^{-u} du = \lim_{M \rightarrow \infty} \left(-u.e^{-u} \Big|_0^M \right) - \lim_{M \rightarrow \infty} \left(e^{-u} \Big|_0^M \right)$$

$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{e^M} \right) = 0$$

elde edilir. Buradan da $M_r < \infty$ bulunur.

3.7. Teorem [4]

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} \left\{ e^{\epsilon \sqrt{x}} |q_n(x)| \right\} < \infty, \epsilon > 0, n = 1, 2, \dots, N \quad (3.29)$$

koşulu sağlandığında e_n , ($n = 1, 2, \dots, N$) fonksiyonları $\text{Im} \lambda > 0$ düzleminde analitik ve tüm türevleri $\text{Im} \lambda \geq 0$ yarı düzleminde süreklidir. Ayrıca öyle M_r , $r = 0, 1, 2, \dots$ sabitleri vardır ki

$$\left| \frac{d^r}{d\lambda^r} e_n(\lambda) \right| \leq M_r, \lambda \in \overline{C}_+, n = 1, 2, \dots, N$$

eşitsizliği sağlanır. Buradaki M_r sabitleri Eş. 3.28 eşitliği ile tanımlanmıştır.

İspat

$$e_n(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K_n(x, t).e^{i\lambda t} dt, n = 1, 2, \dots, N$$

eşitliğinin her iki tarafının r 'inci basamaktan türevini alalım.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}(e_n(x, \lambda)) &= ix \cdot e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K_n(x, t) \cdot it \cdot e^{i\lambda t} dt, \quad n = 1, 2, \dots, N \\ &\vdots \\ \frac{d^r}{d\lambda^r}(e_n(x, \lambda)) &= (ix)^r \cdot e^{i\lambda x} + \int_x^\infty (it)^r \cdot K_n(x, t) \cdot e^{i\lambda t} dt, \quad n = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte $x = 0$ alınırsa

$$\frac{d^r}{d\lambda^r}(e_n(\lambda)) = \int_0^\infty (it)^r \cdot K_n(0, t) \cdot e^{i\lambda t} dt, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

bulunur.

$$\left| \frac{d^r}{d\lambda^r} e_n(\lambda) \right| \leq \int_0^\infty t^r \cdot |K_n(0, t)| \cdot dt \quad (3.30)$$

olur. $|K_n(0, t)| \leq \frac{1}{2} \sigma\left(\frac{t}{2}\right)$ olduğu Eş. 3.30 gözönüne alınır

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^r}{d\lambda^r} e_n(\lambda) \right| &\leq \int_0^\infty t^r \cdot \frac{1}{2} \cdot \sigma\left(\frac{t}{2}\right) dt \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^\infty t^r \cdot \int_0^\infty |q_n(s)| ds dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^{2s} t^r |q_n(s)| dt ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty |q_n(s)| \cdot \int_0^{2s} t^r dt ds \\ &= \frac{2^r}{r+1} \int_0^\infty s^{r+1} |q_n(s)| ds \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte $t = s$ dönüşümü yapılırsa

$$\left| \frac{d^r e_n(\lambda)}{d\lambda^r} \right| \leq \frac{2^r}{r+1} \int_0^\infty t^{r+1} \cdot |q_n(t)| dt$$

bulunur. $t \cdot |q_n(t)| \cong |q_n(t)|$ olduğundan

$$\left| \frac{d^r e_n(\lambda)}{d\lambda^r} \right| \leq \frac{2^r}{r+1} \int_0^\infty t^r \cdot |q_n(t)| dt$$

ve Eş. 3.29 koşulundan $|q_n(t)| \leq c_1 \cdot e^{-\varepsilon\sqrt{t}}$ olduğundan son eşitsizlik

$$\left| \frac{d^r e_n(\lambda)}{d\lambda^r} \right| \leq \frac{2^r}{r+1} \cdot c_1 \int_0^\infty t^r \cdot e^{-\varepsilon\sqrt{t}} dt$$

$$\leq \frac{2^r}{r+1} \cdot c_1 \int_0^\infty t^r \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{t}} dt$$

olur. $\frac{c_1}{r+1} = c$ alınırsa buradan

$$\left| \frac{d^r}{d\lambda^r} e_n(\lambda) \right| \leq M_r, \quad r = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

bulunur.

3.8. Teorem [4]

$$(i) \quad A_n^3 \subset A_n^2, A_n^4 \subset A_n^2$$

$$(ii) \quad A_n^3 \subset A_n^4$$

$$(iii) \quad A_n^3 \text{ ve } A_n^4 \text{ kümelerinin Lebesgue ölçüleri sıfırdır.}$$

İspat

(i) Özdeş olarak sıfırdan farklı analitik fonksiyonun, analitiklik bölgesi içindeki sıfırlarının limit noktaları analitiklik bölgesinin sınırındadır. Bu nedenle $\text{Im}\lambda > 0$ yarı düzleminde analitik olan $e_n(\lambda)$, ($n = 1, 2, \dots, N$) fonksiyonlarının $\text{Im}\lambda > 0$ yarı düzlemindeki sıfırlarının limit noktaları olan A_n^3 cümlesi reel ekseninde olmalıdır. $e_n(\lambda)$, ($n = 1, 2, \dots, N$) fonksiyonlarının reel eksenindeki sürekliliğinden $A_n^3 \subset A_n^2$ bulunur. Şimdi $A_n^4 \subset A_n^2$ olduğunu gösterelim. $\lambda_0 \in A_n^4$ olsun. Bu durumda

$$e_n^{(k)}(\lambda_0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

yazabiliriz. İspat için λ_0 sayısının A_n^2 cümlesinde olduğunu göstermeliyiz. Analitik fonksiyonun sonsuz katlı sıfırları analitik bölgenin içinde yer alıyorsa o fonksiyon özdeş olarak sıfır olmalıdır. Bu bir çelişkidir. e_n , ($n = 1, 2, \dots, N$) fonksiyonları özdeş olarak sıfır değildir. O halde $\lambda_0 \in A_n^2$ 'dir.

(ii) Kabul edelim ki $A_n^3 \not\subset A_n^4$ olsun. Yani $\exists (\lambda_m) \in A_n^1$ ve $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m = \lambda_0$ var öyleki $\lambda_0 \notin A_n^4$ olsun. $e_n(\lambda)$, ($n = 1, 2, \dots, N$) fonksiyonları reel eksene dek sürekli olduğundan $\lambda_0 \in A_n^2$ olur ve öyle bir n_0 sonlu pozitif tam sayısı vardır ki

$$e_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{n_0} \cdot a(\lambda) \quad a(\lambda_0) \neq 0$$

olur.

$e_n(\lambda_m) = 0$ ve $\lambda_m \neq \lambda_0$ olduğundan

$$0 = \frac{e_n(\lambda_m)}{(\lambda_m - \lambda_0)^{n_0}} = a(\lambda_m) \quad (3.31)$$

olur.

$a(\lambda)$ fonksiyonunun sürekliliğinden ve Eş. 3.31 eşitliğinden

$$0 = \lim_{m \rightarrow \infty} a(\lambda_m) = a(\lambda_0)$$

elde edilir ve dolayısıyla $a(\lambda_0) = 0$ olur ki bu da $a(\lambda_0) \neq 0$ olmasına tezattır. O halde $\lambda_0 \in A_n^4$ olmalıdır. Buradan $A_n^3 \subset A_n^4$ elde edilir.

(iii) Teoremin (i) şıkkında $A_n^4 \subset A_n^2$ olduğunu ispatladık. Lebesgue ölçüsü sürekli olduğundan $A_n^4 \subset A_n^2$ ise $\mu(A_n^4) < \mu(A_n^2)$ olur. A_n^2 kümesinin Lebesgue ölçüsünün sıfır olduğunu Teorem 3.6'da ispatlamıştık. O halde $\mu(A_n^4) < \mu(A_n^2)$ olduğundan $\mu(A_n^2) = 0$ elde edilir. Benzer şekilde $\mu(A_n^3) = 0$ olduğu gösterilebilir.

3.9. Teorem [4]

$$M_r = c.2^r. \int_0^\infty t^r . e^{-\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{t}} dt, \quad r = 0, 1, 2, \dots, \quad c > 0$$

ile tanımlanan M_r sabitleri aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$M_r \leq B.b^r.r^r.r! \quad (3.32)$$

Burada B ve b sabitleri c'ye ve ε 'na bağlı pozitif sabitlerdir.

İspat

$M_r = c.2^r. \int_0^\infty t^r . e^{-\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{t}} dt$ eşitliğini gözönüne alalım. İntegralde $\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{t} = u$ dönüşümü yapılırsa

$$M_r = \frac{8c.2^r.4^r}{\varepsilon^{2r+2}} \int_0^\infty u^{2r+1} . e^{-u} du$$

elde edilir. Son integrale 2r kez kısmi entegrasyon uygularsak

$$\begin{aligned}
M_r &= \frac{8c.2^r.4^r}{\epsilon^{2r+2}} (2r+1).(2r)...\ 3.2. \int_0^{\infty} u.e^{-u} du \\
&\leq \frac{8c.2^r.4^r}{\epsilon^{2r+2}} (2r+1).(2r+1)...\ (2r+1). \int_0^{\infty} u.e^{-u} du \\
&\leq \frac{8c.2^r.4^r}{\epsilon^{2r+2}} (2r+1)^{2r}. \int_0^{\infty} u.e^{-u} du
\end{aligned}$$

olur.

$$8c. \int_0^{\infty} u.e^{-u} du = B \text{ alırsak son eşitlik}$$

$$\begin{aligned}
M_r &\leq \frac{2^r.4^r}{\epsilon^{2r+2}} B.(2r+1)^{2r} \\
&\leq 2^r.4^r.B(2r+1)^{2r} \\
&\leq 2^r.4^r.B(2r+1)^{2r} \\
&= 2^r.4^r.B\left(2r.\left(1+\frac{1}{2r}\right)\right)^{2r} \\
&= 2^r.4^r.B.(2r)^{2r}.\left(1+\frac{1}{2r}\right)^{2r} \\
&= 2^r.4^r.B.2^{2r}.r^{2r}.\left(1+\frac{1}{2r}\right)^{2r} \\
&= 32^r.B.r^{2r}.\left(1+\frac{1}{2r}\right)^{2r} \tag{3.33}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\left(1+\frac{1}{2r}\right)^{2r} < e$ ve $r^r < e^r.r!$ eşitsizlikleri Eş.3.33'de göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
M_r &\leq 32^r.B.e^r.r!.r^r.e \\
&\leq 32^r.e^r.B.r!.r^r \\
&= B.b^r.r^r.r!
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $b = 32.e$ 'dir.

3.10. Teorem [4]

q_n , $n = 1,2,...,N$ fonksiyonları Eş. 3.29 koşulunu gerçekliyorlarsa bu durumda $A_n^4 = \emptyset$ 'dir. Yani $\text{Im}\lambda \geq 0$ yarı düzleminde $e_n(\lambda)$, $(n = 1,2,...,N)$ fonksiyonlarının sonsuz katlı sıfırlarının cümlesi boştur.

İspat

Teoremi analitik fonksiyonların birebirlik teoremi olan Pavlov teoremini kullanarak ispatlayacağız. Pavlov birebirlik teoreminden $\text{Im}\lambda \geq 0$ yarı düzlemini birim daireye konform dönüştürelim. Bu durumda $\text{Im}\lambda \geq 0$, $|z| \leq 1$ 'e dönüştür ve teoremin şartları sağlanır. Eğer $\int_0^h \ln T(s).d\mu(A_n^4, s) = -\infty$ olsaydı $\text{Im}\lambda \geq 0$ 'da $e_n(\lambda) \equiv 0$ olurdu. Fakat

$\text{Im}\lambda \geq 0$ 'da $e_n(\lambda)$ özdeş olarak sıfır değildir. Bu durumda A_n^4 için

$$\int_0^h \ln T(s).d\mu(A_n^4, s) > -\infty \quad (3.34)$$

olur. Burada $T(s) = \inf_r M_r \cdot \frac{s^r}{r!}$ ve $\mu(A_n^4, s)$ ise A_n^4 cümlesinin s -komşuluğunun Lebesgue ölçüsüdür.

$T(s)$ aşağıdaki gibi değerlendirilebilir. Eş.3.32'ye göre

$$\begin{aligned} T(s) &= \inf_r \frac{M_r \cdot s^r}{r!} \leq B \cdot \inf_r \frac{b^r \cdot r^r \cdot r! \cdot s^r}{r!} = B \left(\inf_r b^r \cdot r^r \cdot s^r \right) \\ &\leq \min_{x \in [0, \infty)} \{b^x \cdot x^x \cdot s^x\} \end{aligned} \quad (3.35)$$

olur. Aşağıdaki fonksiyonu göz önüne alalım.

$$f(x) = b^x \cdot s^x \cdot x^x = (bsx)^x$$

T(s) ile ilgili bir değerlendirme elde etmek için $f(x)$ fonksiyonunun minimumu bulunmalıdır. $f(x)$ fonksiyonunun türevini alalım.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (bsx)^x \Rightarrow \ln f(x) = x \cdot \ln(bsx) \\
 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} &= \ln(bsx) + 1 \\
 \Rightarrow f'(x) &= (bsx)^x [\ln(bsx) + 1]
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Şimdi $f(x)$ fonksiyonunun ekstremum noktalarını inceleyelim.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 0 \\
 f'(x) &= (bsx)^x \cdot [\ln(bsx) + 1] = 0
 \end{aligned}$$

ise $\ln(bsx) = -1$ ve $\ln e^{-1} = -1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
 \ln(bsx) &= \ln(e^{-1}) \Rightarrow bsx = e^{-1} \\
 \Rightarrow x &= b^{-1} \cdot s^{-1} \cdot e^{-1}
 \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi $x = b^{-1} \cdot s^{-1} \cdot e^{-1}$ noktasında yerel minimum olduğunu gösterelim. Eş. 3.36'dan

$$\ln f'(x) = \ln(bsx)^x + \ln[\ln(bsx) + 1]$$

ve türev alınırsa

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = \ln(bsx) + x \frac{bs}{bsx} + \frac{\frac{bs}{bsx}}{\ln(bsx) + 1}$$

$$f''(x) = f'(x) \cdot \left[\frac{(\ln(bsx) + 1)^2 + \frac{1}{x}}{\ln(bsx) + 1} \right]$$

$$f''(x) = (bsx)^x \left[(\ln(bsx) + 1)^2 + \frac{1}{x} \right]$$

elde edilir.

$$f''(b^{-1}.s^{-1}.e^{-1}) = (e^{-1})^{b^{-1}.s^{-1}.e^{-1}} [bse] > 0$$

olduğundan $x = b^{-1}.s^{-1}.e^{-1}$ noktası yerel minimum noktasıdır. Yerel minimum noktasını fonksiyonda yerine yazarsak

$$f(b^{-1}.s^{-1}.e^{-1}) = e^{-b^{-1}.s^{-1}.e^{-1}}$$

sonucu elde edilir. Buradan

$$T(s) \leq B. \inf_r \{b^r.s^r.r^r\} \leq B \exp\{-b^{-1}.s^{-1}.e^{-1}\}$$

olur.

$$\ln T(s) \leq -\frac{1}{bse} < \frac{1}{s}$$

olduğundan Pavlov teoremine göre

$$\int_0^h \frac{1}{s} . d\mu(A_n^4, s) < \infty$$

bulunur. Bu integralin yakınsak olması A_n^4 cümlesinin lineer komşuluğunun boş olmasını gerektirir. Bu ise $A_n^4 = \emptyset$ olması demektir.

$A_n^3 \subset A_n^4$ olduğundan $A_n^3 = \emptyset$ olur.

3.1. Sonuç [4]

L operatörünün özdeğerleri ve spektral tekillikleri sonlu sayıdadır.

3.2. Sonuç [4]

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_T} \{ \exp(e\sqrt{x}) |q_n(x)| \} < \infty \quad \varepsilon > 0 \quad n = 1, 2, \dots, N$$

koşulu altında L 'nin özdeğerleri ve spektral tekillikleri sonludur. Bunların katı da sonludur.

4. L OPERATÖRÜNÜN ÖZDEĞERLERİNE VE SPEKTRAL TEKİLLİKLERİNE KARŞILIK GELEN ESAS FONKSİYONLAR

Bu bölümde L operatörünün özdeğerlerine ve spektral tekilliklerine karşılık gelen esas fonksiyonlar incelenecektir. Daha sonra L operatörünün özdeğer ve spektral tekilliklere karşılık gelen esas fonksiyonların sırasıyla L_2 ve Hilbert uzaylarına ait olduğu ispat edilecektir.

4.1. L Operatörünün Özdeğerlerine Karşılık Gelen Esas Fonksiyonlar

$\mathbb{C}_+$ 'da $\det E(\lambda)$ 'nın sıfırları $\lambda_1^+, \lambda_2^+, \dots, \lambda_j^+$, reel eksenindeki $\det(E(\lambda))$ sıfırlarını $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\alpha$ ile gösterelim. Bunların katı da sırasıyla $m_1^+, m_2^+, \dots, m_j^+$ ve $m_1, m_2, \dots, m_\alpha$ olsun. $E(x, \lambda)$ ve $S(x, \lambda)$ çözümlerinin Wronskian'ı

$$W[E(x, \lambda), S(x, \lambda)] = E(x, \lambda).S'(x, \lambda) - E'(x, \lambda).S(x, \lambda)$$

biçiminde tanımlıdır [3]. İki çözümün Wronskian'ı x 'ten bağımsız olduğundan

$$\lim_{x \rightarrow 0} W[E(x, \lambda), S(x, \lambda)] = \lim_{x \rightarrow 0} E(0, \lambda) = E(\lambda)$$

elde edilir.

$$n = 0, 1, \dots, m_k^+ - 1, \quad k = 1, 2, \dots, j \text{ için}$$

$$\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \{W[E(x, \lambda), S(x, \lambda)]\}_{\lambda=\lambda_k^+} = \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \det E(\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} = 0 \quad (4.1)$$

eşitliği vardır. Gerçekten

$$n = 0 \text{ için}$$

$$\begin{aligned} \{W[E(x, \lambda), S(x, \lambda)]\}_{\lambda=\lambda_k^+} &= \{\det E(\lambda)\}_{\lambda=\lambda_k^+} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \{S'(x, \lambda).E(x, \lambda) - E'(x, \lambda).S(x, \lambda)\}_{\lambda=\lambda_k^+} = E(\lambda_k^+) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $a_0(\lambda_k^+) \neq 0$ için

$$S(x, \lambda) = a_0(\lambda_k^+) E(x, \lambda_k^+) \quad (4.2)$$

yazılabilir.

$n = 1$ için

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \lambda} W[E(x, \lambda), S(x, \lambda)]_{\lambda=\lambda_k^+} &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \lim_{x \rightarrow 0} \{W[E(x, \lambda), S(x, \lambda)]\}_{\lambda=\lambda_k^+} \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} E(\lambda_k^+) = 0 \end{aligned}$$

$n = m_k^+ - 2$ için eşitlik var olsun.

$$\frac{\partial^{m_k^+-2}}{\partial \lambda^{m_k^+-2}} [W[E(x, \lambda), S(x, \lambda)]]_{\lambda=\lambda_k^+} = \frac{\partial^{m_k^+-2}}{\partial \lambda^{m_k^+-2}} E(\lambda_k^+) = 0$$

$n = m_k^+ - 2$ için var olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial^{m_k^+-1}}{\partial \lambda^{m_k^+-1}} W[E(x, \lambda), S(x, \lambda)]_{\lambda=\lambda_k^+} &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\partial^{m_k^+-2}}{\partial \lambda^{m_k^+-2}} [W[E(x, \lambda), S(x, \lambda)]]_{\lambda=\lambda_k^+} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

4.1. Teorem [3]

$n = 0, 1, 2, \dots, m_k^+ - 1$, $k = 1, 2, \dots, j$ için

$$\left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} S(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_{n-i}(\lambda_k^+) \left\{ \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i} E(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \quad (4.3)$$

dir. Burada $a_0, a_1, \dots, a_n$ sabitleri λ_k^+ 'ya bağlıdır.

İspat

İspatta tümevarım metodunu kullanacağız. $n = 0$ için Eş. 4.2 eşitliğinden Eş. 4.3 elde edilir. $n = 1$ için ispatlayalım. $U(x, \lambda)$, Eş.2.3 denkleminin çözümü olsun. Bu durumda

$$\left(-\frac{d}{dx^2} + Q(x) - \lambda^2 \right) \frac{\partial}{\partial \lambda} U(x, \lambda) = U(x, \lambda) \quad (4.4)$$

olur. Bu eşitliği kullanırsak

$$\left\{ -\frac{d}{dx^2} + Q(x) - \lambda^2 \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} S(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} = S(x, \lambda_k^+) \quad (4.5)$$

ve

$$\left\{ -\frac{d}{dx^2} + Q(x) - \lambda^2 \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} E(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} = E(x, \lambda_k^+) \quad (4.6)$$

eşitlikleri elde edilir. Eş.4.5 ve Eş.4.6 eşitlikleri Eş.4.2 eşitliğinde gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned} & \left\{ -\frac{d}{dx^2} + Q(x) - \lambda^2 \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} S(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} = a_0(\lambda_k^+) \cdot \left\{ -\frac{d}{dx^2} + Q(x) - \lambda^2 \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} E(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \\ & \left\{ -\frac{d}{dx^2} + Q(x) - \lambda^2 \right\} \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} S(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} - a_0(\lambda_k^+) \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} E(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \right] = 0 \\ & \left\{ -\frac{d}{dx^2} + Q(x) - \lambda^2 \right\} f_1(x, \lambda_k^+) = 0 \end{aligned}$$

Burada

$$f_1(x, \lambda_k^+) = \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} S(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} - a_0(\lambda_k^+) \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} E(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+}$$

dır. O halde $n = 1$ için eşitlik gerçekleşir. $f_1(x, \lambda_k^+)$ ile $E(x, \lambda_k^+)$ 'nin Wronskian'ları sıfır olduğundan $a_1(\lambda_k^+)$ sabit olmak üzere

$$f_1(x, \lambda_k^+) = a_1(\lambda_k^+) \cdot E(x, \lambda_k^+)$$

veya

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} S(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} = a_1(\lambda_k^+) \cdot E(x, \lambda_k^+) + a_0(\lambda_k^+) \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} E(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+}$$

olur. O halde $n = 1$ için formül gerçekleşir.

$2 \leq n_0 \leq m_k^+ - 2$ için

$$\left\{ \frac{\partial^{n_0}}{\partial \lambda^{n_0}} S(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} = \sum_{i=0}^{n_0} \binom{n_0}{i} a_{n_0-i}(\lambda_k^+) \left\{ \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i} E(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \quad (4.7)$$

var olsun. Şimdi Eş.4.3 formülünü n_0+1 için ispatlayalım. $U(x, \lambda)$, Eş.2.3

denkleminin çözümü olsun. Bu taktirde $\frac{\partial^{n_0}}{\partial \lambda^{n_0}} U(x, \lambda)$ ifadesi

$$\left\{ -\frac{d}{dx^2} + Q(x) - \lambda^2 \right\} \frac{\partial^{n_0}}{\partial \lambda^{n_0}} U(x, \lambda) = \frac{\partial^{n_0-1}}{\partial \lambda^{n_0-1}} U(x, \lambda) \quad (4.8)$$

denklemini sağlar. Bu son eşitlikten

$$\left\{ -\frac{d}{dx^2} + Q(x) - \lambda^2 \right\} \left\{ \frac{\partial^{n_0}}{\partial \lambda^{n_0}} E(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} = \frac{\partial^{n_0-1}}{\partial \lambda^{n_0-1}} E(x, \lambda_k^+) \quad (4.9)$$

ve

$$\left\{ -\frac{d}{dx^2} + Q(x) - \lambda^2 \right\} \left\{ \frac{\partial^{n_0}}{\partial \lambda^{n_0}} S(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} = \frac{\partial^{n_0-1}}{\partial \lambda^{n_0-1}} S(x, \lambda_k^+) \quad (4.10)$$

elde edilir. Eş. 4.9 ve Eş. 4.10 eşitliklerini Eş. 4.7 eşitliğinde gözönüne alırsak

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \frac{\partial^{n_0-1}}{\partial \lambda^{n_0}} S(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} = \sum_{i=0}^{n_0} \binom{n_0}{i} a_{n_0-i}(\lambda_k^+) \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \frac{\partial^{i-1}}{\partial \lambda^{i-1}} E(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \\
& \Rightarrow \left\{ -\frac{d}{dx^2} + Q(x) - \lambda^2 \right\} \left\{ \frac{\partial^{n_0+1}}{\partial \lambda^{n_0+1}} S(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \\
& = \sum_{i=0}^n \binom{n_0}{i} a_{n_0-i}(\lambda_k^+) \cdot \left\{ -\frac{d}{dx^2} + Q(x) - \lambda^2 \right\} \left\{ \frac{\partial^{n_0+1}}{\partial \lambda^{n_0+1}} E(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \\
& \Rightarrow \left\{ -\frac{d}{dx^2} + Q(x) - \lambda^2 \right\} \left[\left\{ \frac{\partial^{n_0+1}}{\partial \lambda^{n_0+1}} S(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \right. \\
& \quad \left. - \sum_{i=0}^{n_0+1} \binom{n_0+1}{i} a_{n_0-i+1}(\lambda_k^+) \cdot \left\{ \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i} E(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \right] = 0 \\
& \Rightarrow \left\{ -\frac{d}{dx^2} + Q(x) - \lambda^2 \right\} \cdot f_{n_0+1}(x, \lambda_k^+) = 0 \tag{4.11}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$f_{n_0+1}(x, \lambda_k^+) = \left\{ \frac{\partial^{n_0+1}}{\partial \lambda^{n_0+1}} S(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} - \sum_{i=0}^{n_0+1} \binom{n_0+1}{i} a_{n_0-i+1}(\lambda_k^+) \cdot \left\{ \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i} E(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+}$$

dir. Eş.4.1 eşitliği kullanılırsa $f_{n_0+1}(x, \lambda_k^+)$ ile $E(x, \lambda_k^+)$ 'nın Wronskian'ı sıfır bulunur. Böylece öyle bir $a_{n_0+1}(\lambda_k^+)$ sabiti vardır öyle ki

$$f_{n_0+1}(x, \lambda_k^+) = a_{n_0+1}(\lambda_k^+) \cdot E(x, \lambda_k^+)$$

şeklinde. O halde Eş. 4.3 formülü n_0+1 için gerçekleşir. Böylece Eş. 4.3 formülü tümevarım yöntemiyle gösterilmiş olur.

4.2. Teorem [3]

Özdeğerlere karşılık gelen esas fonksiyonlar $L_2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N)$ uzayının elemanıdır. Yani $n_0 = 0, 1, 2, \dots, m_k^+ - 1$, $k = 1, 2, \dots, j$ için

$$\left\{ \frac{\partial^{n_0}}{\partial \lambda^{n_0}} S(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \in L_2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N) \tag{4.12}$$

dir.

İspat

$$E(x, \lambda) = \begin{bmatrix} e_1(x, \lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_2(x, \lambda) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_N(x, \lambda) \end{bmatrix} \quad \text{ve}$$

$$e_n(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K_n(x, t) e^{i\lambda t} dt \quad n = 1, 2, \dots, N$$

olduğunu biliyoruz. Son eşitlikte türev alınırsa

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} e_n(x, \lambda) = e^{i\lambda x} \cdot ix + \int_x^\infty K_n(x, t) \cdot it \cdot e^{i\lambda t} dt \quad n = 1, 2, \dots, N$$

$\vdots$

$$\frac{\partial^{n_0}}{\partial \lambda^{n_0}} e_n(x, \lambda) = (ix)^{n_0} \cdot e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K_n(x, t) \cdot (it)^{n_0} \cdot e^{i\lambda t} dt \quad n = 1, 2, \dots, N$$

olur. Buradan

$$\left[\frac{\partial^{n_0}}{\partial \lambda^{n_0}} E(x, \lambda) \right]_{\lambda=\lambda_k^+} = \begin{bmatrix} (ix)^{n_0} \cdot e^{i\lambda_k^+ x} + \int_x^\infty (it)^{n_0} \cdot K_1(x, t) e^{i\lambda_k^+ t} dt & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (ix)^{n_0} \cdot e^{i\lambda_k^+ x} + \int_x^\infty (it)^{n_0} \cdot K_2(x, t) e^{i\lambda_k^+ t} dt & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (ix)^{n_0} \cdot e^{i\lambda_k^+ x} + \int_x^\infty (it)^{n_0} \cdot K_N(x, t) e^{i\lambda_k^+ t} dt \end{bmatrix}$$

(4.13)

elde edilir. Eş. 4.13 eşitliğinden $n = 1, 2, \dots, N$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \left\{ \frac{\partial^{n_0}}{\partial \lambda^{n_0}} e_n(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \right| = \left| (ix)^{n_0} \cdot e^{i\lambda_k^+ \cdot x} + \int_x^\infty (it)^{n_0} \cdot K_n(x, t) \cdot (it)^{n_0} \cdot e^{i\lambda_k^+ \cdot t} dt \right| \\
& \leq \left| (ix)^{n_0} \cdot e^{i\lambda_k^+ \cdot x} \right| + \left| \int_x^\infty K_n(x, t) \cdot (it)^{n_0} \cdot e^{i\lambda_k^+ \cdot t} dt \right| \\
& \leq x^{n_0} \cdot e^{-x \cdot \text{Im} \lambda_k^+} + \int_x^\infty t^{n_0} \cdot |K_n(x, t)| \cdot e^{-t \cdot \text{Im} \lambda_k^+} dt
\end{aligned}$$

$K_n(x, t) \in L_1$ ($n = 1, 2, \dots, N$) olduğundan $\int_x^\infty |K_n(x, t)| dt < \infty$ dur. Bu durumda

$$\left| \left\{ \frac{\partial^{n_0}}{\partial \lambda^{n_0}} e_n(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \right| \leq x^{n_0} \cdot e^{-x \cdot \text{Im} \lambda_k^+} + \int_x^\infty t^{n_0} \cdot e^{-t \cdot \text{Im} \lambda_k^+} dt$$

dir. $\text{Im} \lambda_k^+ > 0$ olduğundan

$$\int_x^\infty t^{n_0} \cdot e^{-t \cdot \text{Im} \lambda_k^+} dt < \infty$$

olur. Buradan $c_1 > 0$ sabit olmak üzere

$$\left| \left\{ \frac{\partial^{n_0}}{\partial \lambda^{n_0}} e_n(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \right| \leq x^{n_0} \cdot e^{-x \cdot \text{Im} \lambda_k^+} + c_1 \quad n = 1, 2, \dots, N$$

olur. $n_0 = 1, 2, \dots, N$ için

$$\left\| \left\{ \frac{\partial^{n_0}}{\partial \lambda^{n_0}} e_n(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N)} = \int_0^\infty \left| \left\{ \frac{\partial^{n_0}}{\partial \lambda^{n_0}} e_n(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \right|^2 dx < \infty$$

elde edilir. $n_0 = 0, 1, 2, \dots, m_k^+ - 1$, $k = 1, 2, \dots, j$ için

$$\left\{ \frac{\partial^{n_0}}{\partial \lambda^{n_0}} E(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \in L_2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N)$$

olur.

4.1. Tanım [4]

$$S(x, \lambda_k^+), \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} S(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+}, \dots, \left\{ \frac{\partial^{m_k^+-1}}{\partial \lambda^{m_k^+-1}} S(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+}$$

fonksiyonlarına L operatörünün $\lambda = \lambda_k^+$, $k = 1, 2, \dots, j$ özdeğerlerine bağlı esas fonksiyonları denir. $S(x, \lambda_k^+)$ baş fonksiyon,

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} S(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+}, \dots, \left\{ \frac{\partial^{m_k^+-1}}{\partial \lambda^{m_k^+-1}} S(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+}$$

fonksiyonları $S(x, \lambda_k^+)$ 'nın eş (associated) fonksiyonları olarak adlandırılır [4].

4.2. L Operatörünün Spektral Tekilliklerine Karşılık Gelen Esas Fonksiyonlar

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\alpha$ L operatörünün spektral tekillikleri ise $p = 0, 1, 2, \dots, m_k - 1$, $k = 1, 2, \dots, \alpha$ için

$$\frac{\partial^p}{\partial \lambda^p} \{W[E(x, \lambda), S(x, \lambda)]\}_{\lambda=\lambda_k} = \left\{ \frac{\partial^p}{\partial \lambda^p} \det E(\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k} = 0 \quad (4.14)$$

eşitliği vardır.

4.1. Sonuç [3]

$p = 0, 1, \dots, m_k - 1$, $k = 1, 2, \dots, \alpha$ için

$$\left\{ \frac{\partial^p}{\partial \lambda^p} S(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k} = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} b(\lambda_k) \left\{ \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i} E(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k}$$

eşitliği vardır. Sonuç 4.1'in ispatı Teorem 4.1'in ispatına benzer olarak yapılabilir.

4.1. Lemma [3]

$p = 0, 1, 2, \dots, m_k - 1$, $k = 1, 2, \dots, \alpha$ için $\left\{ \frac{\partial^p}{\partial \lambda^p} S(\cdot, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k} \notin L_2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N)$ dir. Yani spektral

tekilliklere karşılık gelen esas fonksiyonlar $L_2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N)$ 'nin elemanı değildir.

İspat

Eş.4.13 eşitliğinden $n = 1, 2, \dots, N$ için

$$\left| \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} e_n(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k} \right| \leq |(ix)^n \cdot e^{i\lambda_k \cdot x}| + \int_x^\infty t^n |K_n(x, t)| dt$$

$$= x^n + \int_x^\infty |K_n(x, t)| \cdot t^{n_0} dt$$

olduğundan $\left\{ \frac{\partial^p}{\partial \lambda^p} S(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k} \notin L_2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N)$ dir.

Şimdi aşağıdaki Hilbert uzaylarını tanımlayalım [10]:

$$H_m := H(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N, m) = \left\{ f : f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \int_0^\infty (1+x)^{2m} \cdot \{ |f_1(x)|^2 + \dots + |f_n(x)|^2 \} dx < \infty \right\}$$

kümesi üzerindeki norm

$$\|f\|_m^2 = \int_0^\infty (1+x)^{2m} \cdot \{ |f_1(x)|^2 + \dots + |f_n(x)|^2 \} dx$$

ve

$$H_{-m} := H(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N, -m) = \left\{ g : g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}, \int_0^\infty (1+x)^{-2m} \cdot \{ |g_1(x)|^2 + \dots + |g_n(x)|^2 \} dx < \infty \right\}$$

kümesi üzerindeki norm

$$\|g\|_{-m}^2 = \int_0^\infty (1+x)^{-2m} \cdot \{ |g_1(x)|^2 + \dots + |g_n(x)|^2 \} dx$$

biçimindedir. Bu tanımların sonucunda $m = 1, 2, \dots$ için

$$H(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N, 0) = L_2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N) \text{ ve } H(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N, m) \subsetneq L_2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N) \subsetneq H(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N, -m)$$

dir. Gerçekten,

(i) $H(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N, m) \subsetneq L_2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N)$ $m = 1, 2, \dots$ ifadesini göstermek için $\forall f \in H(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N, m)$ için $f \in L_2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N)$ olduğunu gösterelim.

$f \in H(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N, m)$ olduğu için

$$\int_0^\infty (1+x)^{2m} \cdot \{ |f_1(x)|^2 + \dots + |f_n(x)|^2 \} dx < \infty$$

dur.

$$1 \leq 1+x \Rightarrow 1 \leq (1+x)^{2m} \quad m = 1, 2, \dots, x \in [0, \infty)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \{ |f_1(x)|^2 + \dots + |f_n(x)|^2 \} dx \leq \int_0^\infty (1+x)^{2m} \cdot \{ |f_1(x)|^2 + \dots + |f_n(x)|^2 \} dx < \infty$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \{ |f_1(x)|^2 + \dots + |f_n(x)|^2 \} dx < \infty$$

$$\Rightarrow f \in L_2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N)$$

elde edilir.

(ii) $L_2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N) \subsetneq H(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N, -m)$ $m = 1, 2, \dots$ ifadesini göstermek için $\forall f \in L_2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N)$ için $f \in H(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N, -m)$ olduğunu gösterelim.

$x \in [0, \infty)$ olduğundan $0 \leq x < 1$ ve $x > 1$ durumlarını ayrı ayrı inceleyelim.

a) $0 \leq x < 1$ ise $0 < (1+x)^{-2m} < 1$ olur.

Buradan

$$\int_0^\infty \left\{ |f_1(x)|^2 + \dots + |f_n(x)|^2 \right\} (1+x)^{-2m} dx \leq \int_0^\infty \left\{ |f_1(x)|^2 + \dots + |f_n(x)|^2 \right\} dx$$

yazılır. $f \in L_2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N)$ olduğu için

$$\int_0^\infty \left\{ |f_1(x)|^2 + \dots + |f_n(x)|^2 \right\} (1+x)^{-2m} dx \leq \int_0^\infty \left\{ |f_1(x)|^2 + \dots + |f_n(x)|^2 \right\} dx < \infty$$

yazılır. O halde $f \in H(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N, -m)$ bulunur.

b) $x \geq 1$ ise $(1+x)^{-2m} \leq 1$ olduğundan (a) şıkkına benzer olarak elde edilebilir.

(i) ve (ii)'den $H(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N, m) \subsetneq L_2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N) \subsetneq H(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N, -m)$ $m = 1, 2, \dots$ bulunur.

4.3. Teorem [3]

Spektral tekilliklere karşı gelen esas fonksiyonlar Hilbert uzayındadır. Yani

$$\left\{ \frac{\partial^p}{\partial \lambda^p} S(\cdot, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k} \in H(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N, -(n+1)), \quad p = 0, 1, \dots, m_k-1, \quad k = 1, 2, \dots, \alpha \quad (4.15)$$

İspat

Eş. 4.3 eşitliğinden $p = 0, 1, \dots, m_k - 1$, $k = 1, 2, \dots, \alpha$ için

$$\left| \left\{ \frac{\partial^p}{\partial \lambda^p} E(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k} \right| \leq x^p + \int_x^\infty t^p |K_n(x, t)| dt , \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (4.16)$$

elde edilir. $H(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N, -(n+1))$ uzayının tanımından ve Eş. 4.16 eşitliğinden Eş. 4.15 elde edilir.

4.2. Tanım [3]

$$S(x, \lambda_k) , \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} S(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k} , \dots , \left\{ \frac{\partial^{m_k-1}}{\partial \lambda^{m_k-1}} S(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k}$$

fonksiyonlarına, L operatörünün $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, 2, \dots, \alpha$ spektral tekilliklerine bağlı esas fonksiyonları denir [4].

$m_0 = \max \{m_1, m_2, \dots, m_\alpha\}$ olmak üzere

$$H_{m_0} = H(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N, m_0+1) , \quad H_{-m_0} = H(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N, -(m_0+1)) \text{ alınır}$$

$$H_{m_0} \subsetneq L_2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N) \subsetneq H_{-m_0}$$

olur.

4.2. Sonuç [3]

Spektral tekilliklere bağlı esas fonksiyonlar H_{-m_0} uzayına aittir. Yani

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} S(\cdot, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k} \in H_{-m_0} \quad p = 0, 1, 2, \dots, m_k - 1 , \quad k = 1, 2, \dots, \alpha$$

dir.

KAYNAKLAR

1. Naimark, M.A., "Linear Differential Operators II", *Ungar*, New York, 300-305 (1968).
2. Naimark, M.A., "Investigation of the Spectrum and the Expansion in Eigenfunctions of a Non-selfadjoint Operator of Second Order on a Semi-axis", *Amer. Math Soc. Trans.*, 2(16): 103-193 (1960).
3. Kır, E., "The Principal Functions of the System of Finite Sturm-Liouville Differential Operators Corresponding to the Eigenvalues and Spectral Singularities", *G.U. Journal of Science*, 18(2): 239-247 (2005).
4. Bairamov, E., Kır, E., "Spectral Properties of a Finite System of Sturm-Liouville Differential Operators", *Indian J. Pure and Appl. Math.*, 35(2): 249-256 (2004).
5. Agronovich, Z.S., Marchenko, V.A., "The Inverse Problem of Scattering Theory", *Gordon – Breach*, New York, 13-46 (1963).
6. Schwartz, J.T., "Some Non-selfadjoint Operators", *Comm. Pure and Appl. Math.*, 13: 609-639 (1960).
7. Lyance, V.E., "A Differential Operator with Spectral Singularities I", *AMS Translations*, 2(60): 185-225 (1960).
8. Pavlov, B.S., "The Non-selfadjoint Schrödinger Operator", *Topics in Math. Phys.*, 1: 87-110 (1967).
9. Privalov, I.I., "The Boundary Properties of Analytic Functions" in "Hochschulbücher für Math.", *VEB Deutscher Verlag*, Berlin, 25: 53-57 (1970).
10. Berezanski, Yu, M., "Expansion in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators", *Amer. Math. Soc.*, New York, Providence, 2: 1-365 (1968).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : KILIÇ, Gülcan
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 17.04.1980 Yozgat
 Medeni hali : Bekar
 Telefon : 0 (312) 255 61 15
 Faks : —
 e-mail : gulcanm@mynet.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi Matematik Bölümü	2003
Lisans	Ankara Üniversitesi Matematik Bölümü	2001
Lise	Mobil Lisesi	1997

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2005-	Özel Yavuz Sultan Lisesi	Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

—

Hobiler

Kitap okumak, müzik dinlemek, tenis.