

**T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SONLU TANE TRİPOTENT MATRİSİN TOPLAMI
İÇİN BİR RANK EŞİTLİĞİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gülsemin Betül DURAN

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı : UYGULAMALI MATEMATİK
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR

Ocak 2017

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SONLU TANE TRİPOTENT MATRİSİN TOPLAMI
İÇİN BİR RANK EŞİTLİĞİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gülsemin Betül DURAN

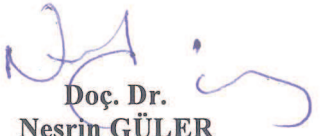
Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Enstitü Bilim Dalı : UYGULAMALI MATEMATİK

Bu tez 17/01/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

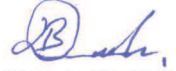

**Prof. Dr.
Halim ÖZDEMİR
Jüri Başkanı**


**Doç. Dr.
Ali DEMİR
Üye**


**Doç. Dr.
Nesrin GÜLER
Üye**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.



Gülsemin Betül DURAN

17/01/2017

ÖNSÖZ

Çalışmalarımnda bana zaman ayıran, bilgi ve tecrübesiyle beni yönlendiren, hiçbir konuda yardımlarını esirgemeyen değerli danışmanım Prof. Dr. Halim Özdemir'e en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca lisansüstü öğrenimim boyunca hem bilgi ve tecrübesini hem de manevi desteğini eksik etmeyen, sabırla ilgilenen, kişisel ve akademik hayatımda daima bana örnek olan Arş. Gör. Tuğba Petik'e çok teşekkür ederim.

Son olarak maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda olan aileme ve Enes Aydın'a minnettarlığımı belirtmek isterim.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	i
İÇİNDEKİLER	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	iv
ÖZET	v
SUMMARY	vi
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ	1
1.1. Çalışmanın İçeriği ve Önemi	1
BÖLÜM 2.	
TEMEL KAVRAMLAR VE ÖZELLİKLER	3
2.1. Matrisler	3
2.2. Bir Matrisin Ters, Devriği ve İzi	4
2.3. Bir Matrisin Determinantı	5
2.4. Lineer Denklem Sistemleri ve Bu Sistemlerin Çözümleri	6
2.5. Temel Satır/Sütun İşlemleri, Denk Denklem Sistemi ve Denk Matris	7
2.6. Bir Matrisin Rankı	8
2.7. Bazı Özel Tipli Matrisler	9
2.8. Blok Matrisler	10
BÖLÜM 3.	
SONLU TANE İNVOLUTİF MATRİSİN TOPLAMI İÇİN BİR RANK	
EŞİTLİĞİ	13
3.1. Giriş	13

3.2. Sonlu Tane İnvolutif Matrisin Toplamı İçin Bir Rank Eşitliği	14
---	----

BÖLÜM 4.

SONLU TANE TRİPOTENT MATRİSİN TOPLAMI İÇİN BİR RANK

EŞİTLİĞİ	24
----------------	----

4.1. Giriş	24
------------------	----

4.2. Sonlu Tane Tripotent Matrisin Toplamı İçin Bir Rank Eşitliği	24
---	----

BÖLÜM 5.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER	34
----------------------------	----

KAYNAKLAR	35
-----------------	----

ÖZGEÇMİŞ	37
----------------	----

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{C}$	: Karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{C}^*$	: Sıfırdan farklı karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{C}^n$	: n boyutlu karmaşık vektörler kümesi
$\mathbb{C}_{m \times n}$	: $m \times n$ boyutlu karmaşık matrisler kümesi
$\mathbb{C}_n$	: $n \times n$ boyutlu karmaşık matrisler kümesi
I	: Uygun boyutlu birim matris
0	: Uygun boyutlu sıfır matris
$A \oplus B$	: A ve B matrislerinin direkt toplamı
$\text{iz}(A)$	: A matrisinin izi
A^T	: A matrisinin devriği
$\text{rk}(A)$	: A matrisinin rankı
$\det(A)$	: A matrisinin determinantı
Σ	: Toplam sembolü
Π	: Çarpım sembolü
■	: İspat sonu

ÖZET

Anahtar kelimeler: İnvolutif Matris, Tripotent Matris, Rank, Elementer Satır/Sütun İşlemleri.

İlk bölümde idempotent, involutif ve tripotent matrislerle ilgili kısa bir literatür bilgisi sunulmakta ve rank kavramının önemine vurgu yapılmaktadır. Çalışmanın tamamında kullanılacak olan bazı temel kavram ve özellikler ikinci bölümde verilmektedir.

$n \times n$ boyutlu $M_1, M_2, \dots, M_k$ karmaşık involutif matrislerinin toplamının rankı ve ranklarının toplamı arasındaki bir ilişkiyi ortaya koyan bir sonuç üçüncü bölümde elde edilmektedir.

Dördüncü bölümde involutif matrisler ailesini kapsayan tripotent matrisler ailesi için üçüncü bölümdekine benzer bir problem ele alınmaktadır. Ayrıca bu bölümde elde edilen temel sonucun idempotent matrislerin ranklarıyla ilgili literatürde mevcut olan pek çok sonucu kapsadığına dikkat çekilmektedir.

A RANK EQUALITY FOR THE SUM OF FINITELY MANY TRIPOTENT MATRICES

SUMMARY

Keywords: Involutive Matrix, Tripotent Matrix, Rank, Elementary Row/Column Operations.

In the first chapter, it is presented some brief literature information related to the matrices idempotent, involutive and tripotent and also pointed out the importance of the concept of the rank. Some fundamental concepts and properties which will be used throughout the study are given in the second chapter.

A relation between the rank of the sum of the $n \times n$ complex matrices $M_1, M_2, \dots, M_k$ and the sum of the ranks of these matrices is established in the third chapter.

In the fourth chapter, it is handled a problem which is similar to the problem in the third chapter for the family of tripotent matrices which covers the family of the involutive matrices. It is also noted that the main result obtained in this chapter covers many results that exist in the literature related to the of idempotent matrices.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Çalışmanın İçeriği ve Önemi

Bir lineer denklemler sisteminin çözümlerinin sayısının rank sayesinde belirlenmesi, bir matrisin rankını hesaplamanın kullanışlı bir uygulamasıdır. İyi bilinir ki, bir lineer denklemler sisteminde ekli matrisin rankı katsayılar matrisinin rankından büyükse sistemin çözümü yoktur. Öte yandan bu matrislerin rankları eşitse, sistem en az bir çözüme sahiptir. Çözümün tek olmasının gerek ve yeter koşulu rankın bilinmeyen sayısına eşit olmasıdır. Aksi halde sistem, k bilinmeyen sayısı ile rank arasındaki fark olmak üzere, k tane parametreye bağlı sonsuz çoklukta çözüme sahiptir [1].

Öte yandan, karar teorisi, kontrol teorisi, istatistik teorisi gibi alanlarda ortaya çıkan problemlerin birçoğu matrisler aracılığıyla matematiksel olarak modellenir ve problem karşılık gelen matrislerin ranklarına dayalı olarak incelenir [2,3].

Matris teorisinin kullanıldığı uygulamalı bilimlerin birçoğunda, idempotent, involutif, tripotent gibi özel tipli matrislerle sık sık karşılaşılır ve literatürde bu tipli matrislerin ranklarıyla ilgili pek çok çalışmaya rastlamak mümkündür. Örneğin, Tian ve Styan tarafından, idempotent ve involutif matrislerle ilgili çeşitli rank eşitlikleri ortaya koyulmuştur [4]. Bahsedilen bu çalışmada yazarlar, özellikle idempotent veya involutif matrislerin farkı, toplamı ve çarpımın ranklarıyla ilgili yeni formüller elde etmişlerdir. Söz konusu çalışmanın temeli, idempotent ve involutif matrisler arasındaki ve yine idempotent ve skaler-potent matrisler arasındaki ilişkilere dayanmaktadır: $A \in \mathbb{C}_n$ involutif ise $\frac{1}{2}(I + A)$ ve $\frac{1}{2}(I - A)$ matrisleri idempotenttir.

Öte yandan herhangi bir P idempotent matrisi için $\mp(I - 2P)$ matrisleri involutiftir.

Yine A bir idempotent matris ise, $c \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere cA matrisi bir skaler-potent matristir.

Daha sonra aynı yazarlar tarafından idempotent matrisler için yeni bir rank formülü ortaya koyulmuş [5], üç tane idempotent matrisin toplamı ile ilgili bir rank eşitliği elde edilmiştir [6]. Bütün bunların yanında özel tipli matrislerin ranklarıyla ilgili farklı çalışmalara da rastlamak mümkündür [7-12].

Oldukça yakın bir zamanda Chen ve arkadaşları tarafından yapılan yeni bir çalışmada, sonlu tane idempotent matrisin toplamı ile ilgili bir rank eşitliği ortaya koyulmuştur [13]. Söz konusu çalışmadaki sonuçlar, idempotent matrislerin ranklarıyla ilgili daha önceden ortaya koyulmuş olan birçok sonucu kapsayıcı nitelikte olmuştur.

Bu çalışmada ise, öncelikle sonlu tane involutif matrisin toplamı için bir rank eşitliği elde edilmekte, daha sonra elde edilen sonuç tripotent matrislere genelleştirilmektedir.

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖZELLİKLER

Bu bölümde, sonraki bölümlere hazırlık niteliğinde olmak üzere, bazı gösterim, kavram, tanım ve ispatsız olarak bazı teoremler verilmektedir.

2.1. Matrisler

Aşağıda, matrisin tanımı ve bazı temel matris tipleri verilmektedir.

Tanım 2.1. a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$) karmaşık sayılarının

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

biçimindeki bir düzenlemesine, m satırlı n sütunlu bir karmaşık matris veya kısaca bir $m \times n$ boyutlu karmaşık matris denir. Böyle bir matris $A = [a_{ij}]$ ile de gösterilir [14].

$n = m$ olduğunda A matrisine, $n \times n$ boyutlu matris yerine genellikle n mertebeli matris denir.

$A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}_n$ matrisinin a_{ii} ($i = 1, 2, \dots, n$) elemanlarına A matrisinin esas köşegenini oluşturur denir [1]. Bu oluşuma çalışma boyunca kısaca “köşegen” denilmektedir.

Tanım 2.2. Bir $D = [d_{ij}] \in \mathbb{C}_n$ matrisi, $i \neq j$ için $d_{ij} = 0$ koşulunu sağlıyorsa D matrisine *köşegen matris* denir [15].

Tanım 2.3. Bir kare matrisin köşegeninin solunda ve aşağısında yer alan tüm elemanları sıfır ise, bu matrise bir *üst üçgensel matris* denir. Bir $M \in \mathbb{C}_n$ üst üçgensel matrisinin genel biçimi

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \dots & m_{1n} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & \dots & m_{2n} \\ 0 & 0 & m_{33} & \dots & m_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Benzer şekilde, bir kare matrisin köşegeninin sağında ve üstünde yer alan tüm elemanları sıfır ise, bu matrise bir *alt üçgensel matris* denir. Bir $M \in \mathbb{C}_n$ alt üçgensel matrisinin genel biçimi

$$\begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & \dots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Daha genel olarak, bir $M = [m_{ij}] \in \mathbb{C}_n$ matrisine, eğer $j < i$ için $m_{ij} = 0$ ise bir üst üçgensel matris, $j > i$ için $m_{ij} = 0$ ise bir alt üçgensel matris denir [16].

2.2. Bir Matrisin Tersi, Devriği ve İzi

Tanım 2.4. Bir $A \in \mathbb{C}_n$ matrisi için, $AB = I$ ve $BA = I$ olacak şekilde bir $B \in \mathbb{C}_n$ matrisi varsa, A kare matrisine *tersinir (veya nonsingular) matris* denir. Buradaki B matrisine, A matrisinin *tersi* denir ve A^{-1} ile gösterilir [1].

Teorem 2.5. A ve B tersinir matrisler ise, AB matrisinin tersi vardır ve $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ olur. Bu özellik sonlu sayıda matris için de geçerlidir [17].

Tanım 2.6. $A \in \mathbb{C}_{m \times n}$ matrisinin satır ve sütunlarının yer değiştirilmesiyle elde edilen matrise A matrisinin *devriği* denir. Bu matris A^T ile gösterilir. A matrisi $m \times n$ boyutlu ise A^T matrisi $n \times m$ boyutludur [1].

Tanım 2.7. $M = [m_{ij}] \in \mathbb{C}_n$ olsun. M matrisinin *izi*, M matrisinin köşegen elemanlarının toplamı olarak tanımlanır ve $\text{iz}(M)$ ile gösterilir. Yani,

$$\text{iz}(M) = \sum_{i=1}^n m_{ii}$$

dir [17].

2.3. Bir Matrisin Determinantı

Tanım 2.8. $1, 2, \dots, n$ tamsayılarının herhangi bir sırada $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ şeklindeki düzenlemesine, $1, 2, \dots, n$ 'nin bir *permütasyonu* denir. Bu permütasyonlardan $n!$ tane vardır [18].

Tanım 2.9. $1, 2, \dots, n$ sayılarının bir $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ permütasyonunda i_r , i_s 'den önce geliyor ve $i_r > i_s$ ise, bu durumda permütasyona bir *inversiyon* denir. Permütasyon, tek ya da çift sayıda inversiyona sahip olmasına göre *tek* veya *çift permütasyon* olarak adlandırılır [18].

Tanım 2.10. $A \in \mathbb{C}_n$ olsun. A matrisinin *determinantı*

$$\det(A) = \sum_p e_p a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n}$$

olarak tanımlanır. Burada toplam işareti altındaki p , toplamın, $1, 2, \dots, n$ sayılarının tüm $p = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ permütasyonları üzerinden olduğu anlamına gelir. e_p , permütasyon tek ise -1 , çift ise $+1$ sayısına karşılık gelir [18].

$A = [a_{ij}]$, $n \times n$ boyutlu bir matris olmak üzere A matrisinin determinanı

- a. $n = 1$ ise $\det A = a_{11}$;
- b. $n = 2$ ise $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;
- c. $n > 2$ ise $\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j},$$

olarak hesaplanır [1].

Teorem 2.11. $A, B \in \mathbb{C}_n$ olmak üzere

$$\det(AB) = [\det(A)][\det(B)]$$

dir [17].

Teorem 2.12. $A \in \mathbb{C}_n$ matrisinin tersinir olmayan bir matris olmasının gerek ve yeter koşulu $\det(A) = 0$ olmasıdır [17].

2.4. Lineer Denklem Sistemleri ve Bu Sistemlerin Çözümleri

Tanım 2.13. x_j ($j = 1, 2, \dots, n$)'ler bilinmeyenler olmak üzere, n tane bilinmeyen ve m tane denklemden oluşan

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned} \tag{2.1}$$

şeklindeki sisteme bir *lineer denklem sistemi* denir. Burada a_{ij} ($i=1,2,\dots,m$; $j=1,2,\dots,n$) sayılarına *sistemin katsayıları* ve b_i ($i=1,2,\dots,m$) sayılarına da *sistemin sabitleri* denir [19].

2.5. Temel Satır/Sütun İşlemleri, Denk Denklem Sistemi ve Denk Matris

(2.1) lineer denklem sisteminde;

- Bir denklemi sıfırdan farklı bir skalerle çarpmak,
- İki denklemin yerini değiştirmek,
- Bir denklemin bir skaler katını diğer bir denkleme eklemek

işlemlerinden biri veya birkaçı yapılarak elde edilen yeni denklem sistemi

$$\begin{aligned}
c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \cdots + c_{1n}x_n &= d_1 \\
c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \cdots + c_{2n}x_n &= d_2 \\
&\vdots \\
c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + c_{m3}x_3 + \cdots + c_{mn}x_n &= d_m
\end{aligned} \tag{2.2}$$

olsun. Bu durumda (2.1) ile (2.2) lineer denklem sistemleri denktir. Bu sistemlerin, birinin çözümü yoksa diğerinin de çözümü yoktur. Eğer iki sistem çözüme sahip ise çözümler aynıdır [20].

Bir lineer denklem sisteminin artırılmış matrisinin (yani katsayılar matrisine sabitlerden oluşan sütunun eklenmesiyle oluşturulan matrisin) satırlarına/sütunlarına sistemin denklemlerinin katsayıları karşılık geldiğinden bu üç işlem artırılmış matrisin satırlarında/sütunlarında;

- a. Bir satır/sütunu sıfırdan farklı bir skalerle çarpmak,
- b. İki satırın/sütunun yerini değiştirmek,
- c. Bir satırın/sütunun bir skaler katını diğer bir satıra/sütunun eklemek

işlemlerine karşılık gelir ve bu işlemler *temel satır/sütun işlemleri* olarak adlandırılır [20].

Temel satır/sütun işlemleri yaparak bir denklem sistemini başka bir sisteme dönüştürerek çözüme yöntemine *Gauss eliminasyon yöntemi* denir [1].

Tanım 2.14. B matrisi sonlu sayıda temel satır/sütun işlemleri ile A matrisinden elde edilmişse B matrisi A matrisine *satırca/sütunca denktir* denir [21].

2.6. Bir Matrisin Rankı

Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir matrise, *satır indirgenmiş eşelon biçimdedir* denir.

- a. Tüm elemanları sıfır olmayan herhangi bir satırda, sıfırdan farklı ilk eleman 1'dir (bu eleman bir 1 *baş elemanı* olarak adlandırılır).
- b. 1 baş elemanını içeren herhangi bir sütundaki diğer tüm elemanlar sıfırdır.
- c. Sıfırdan farklı eleman içeren herhangi iki satırda, daha büyük numaralı satırın 1 baş elemanı daha sağda bulunur.
- d. Sadece sıfır elemanlarından ibaret olan herhangi bir satır, sıfırdan farklı eleman içeren diğer satırlardan daha aşağıdadır [1].

Tanım 2.15. Bir $A \in \mathbb{C}_{m \times n}$ matrisinin *rankı*, A matrisinin satır indirgenmiş eşelon biçiminde bütün elemanları sıfır olmayan satırlarının sayısıdır ve $\text{rk}(A)$ ile gösterilir [1].

Bir $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}_{m \times n}$ matrisinin i . satır elemanlarından oluşan satır vektörü a_i ve j . sütununun elemanlarından oluşan sütun vektörü a^j ile göstermek gelenek haline gelmiştir.

Tanım 2.16. $A \in \mathbb{C}_{m \times n}$ matrisin $a^1, a^2, \dots, a^n$ sütunlarıyla üretilen $\mathbb{C}^m$ 'nin alt uzayına A matrisinin *sütun uzayı* denir. Bu uzayın boyutuna A matrisinin *sütun rankı* denir [1].

Tanım 2.17. $A \in \mathbb{C}_{m \times n}$ matrisin satırları olan $a_1, a_2, \dots, a_m$ ile üretilen $\mathbb{C}^n$ 'nin alt uzayına A matrisinin *satır uzayı* denir. Onun boyutuna A matrisinin *satır rankı* denir [1].

Teorem 2.18. $A \in \mathbb{C}_{m \times n}$ matrisinin satır rankı, sütun rankı ve rankının hepsi birbirine eşittir [1].

Teorem 2.19. A ve B matrisleri tersinir matrisler ise uygun boyutlu herhangi bir C matrisi için C , AC , CB ve ACB matrislerinin tümü aynı ranka sahiptir [17].

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak, bir matrisin rankı ile o matrisin sıfırdan farklı bir c skaleri ile çarpımının rankının eşit olduğuna dikkat edelim.

Teorem 2.20. Tersinir bir matrisin rankı, o matrisin mertebesine eşittir [1].

Teorem 2.21. Satırca/sütunca denk olan matrislerin rankları eşittir [21].

2.7. Bazı Özel Tipli Matrisler

Aşağıda matrislerin kuvvetlerinin sağladığı özelliklere göre tanımlanan bazı özel tipli matrislerin tanımları ve ilgili teoremler verilmektedir.

Tanım 2.22. $A^2 = A$ özelliğini sağlayan bir $A \in \mathbb{C}_n$ matrisine bir *idempotent matris* denir [17].

Teorem 2.23. $A \in \mathbb{C}_n$ olmak üzere $A^2 = mA$ ise

$$\text{iz}(A) = m \text{ rk}(A)$$

olur. Özel olarak A bir idempotent matris ise $m = 1$ ve $\text{iz}(A) = \text{rk}(A)$ 'dır [17].

Tanım 2.24. $A^2 = I$ özelliğini sağlayan bir $A \in \mathbb{C}_n$ matrisine bir *involatif matris* denir [16].

Tanım 2.25. $A^3 = A$ özelliğini sağlayan bir $A \in \mathbb{C}_n$ matrisine bir *tripotent matris* denir [17].

İdempotent, involatif ve tripotent matrislerin tanımlarından, idempotent ve involatif matrislerin aynı zamanda birer tripotent matris oldukları, involatif matrislerin tersinir tripotent matris olduğu görülür.

2.8. Blok Matrisler

Tanım 2.26. Bir $A \in \mathbb{C}_{m \times n}$ matrisinin bazı satır ve/veya sütunlarının silinmesi ile elde edilen matrise A matrisinin *bir alt matrisi* denir [16].

Tanım 2.27. Bir matris, satırları veya sütunları arasına yatay veya dikey çizgiler çizilerek alt matrislere parçalanabilir. Bu durumda matrise *parçalanmış matris (blok matris)* ve alt matrislere de *bloklar* denir [16].

Uyarı. Kısım 2.5'deki Gauss eliminasyon yönteminin blok matrisler üzerinde de geçerli olduğuna dikkat edelim.

$A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ uygun boyutlu matrisler olmak üzere, $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_{m \times n}$ matrisi

bir blok matris olsun. Bu durumda A matrisinin devriği $A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_{n \times m}$

ile hesaplanır.

Teorem 2.28. $A \in \mathbb{C}_{m \times n}$, A_{ij} $i, j = 1, 2, \dots, k$ uygun boyutlu matrisler olmak üzere,

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1k} \\ \mathbf{0} & A_{22} & \dots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & A_{kk} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^k \det(A_{ii}) = \det \begin{pmatrix} A_{11} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \dots & A_{kk} \end{pmatrix}$$

dir [15].

Tanım 2.29. $A_{ii} \in \mathbb{C}_{n_i}$ ve $\sum_{i=1}^k n_i = n$ olmak üzere,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{kk} \end{pmatrix}$$

biçimindeki $A \in \mathbb{C}_n$ matrisine bir *blok köşegen matris* denir. Böyle bir matrisi

$A = A_{11} \oplus A_{22} \oplus \dots \oplus A_{kk} = \bigoplus_{i=1}^k A_{ii}$ olarak yazmak gelenek haline gelmiştir. Buna $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{kk}$ matrislerinin direk toplamı denir [15].

2.9. Bazı Rank Eşitlikleri

Teorem 2.30. Bir $A \in \mathbb{C}_n$ matrisi, köşegen üzerindeki blokları $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{kk}$ olan bir blok köşegen matris olmak üzere

$$\text{rk}(A) = \sum_{i=1}^k \text{rk}(A_{ii})$$

dir [15].

Lemma 2.31. A_{11} , A_{12} , A_{21} ve A_{22} matrisleri uygun boyutlu matrisler ve A_{11} tersinir ise, bu durumda

$$\text{rk} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \text{rk}(A_{11}) + \text{rk}(A_{22} - A_{12}A_{11}^{-1}A_{21})$$

dir [22].

Lemma 2.31’de $A_{11} = A_{12} = I \in \mathbb{C}_n$ alındığında

$$\text{rk} \begin{pmatrix} I & I \\ X & Y \end{pmatrix} = n + \text{rk}(X - Y)$$

olduğu görülür.

BÖLÜM 3. SONLU TANE İNVOLUTİF MATRİSİN TOPLAMI İÇİN BİR RANK EŞİTLİĞİ

3.1. Giriş

Bu bölümde önce ele alınacak olan probleme referans olan k tane idempotent matrisin toplamının rankı ile ilgili literatürdeki [13] çalışması kısaca özetlenmekte, sonra özetlenecek olan çalışmadaki yöntemle benzer bir yöntemle sonlu tane involutif matrisin toplamı için bir rank eşitliği ortaya koyulmaktadır.

Bu kısımda verilecek olan sonuçlar yukarıda bahsedilen çalışmadaki sonuçlar olduğundan ispatları verilmemektedir. Söz konusu çalışmanın esas sonucu aşağıdaki lemmaya dayanmaktadır.

Lemma 3.1. [[13], Lemma 4] $M_1, M_2, \dots, M_k \in \mathbb{C}_{n \times m}$ olsun. Bu durumda,

$$\text{rk} \begin{pmatrix} M_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & M_1 \\ \mathbf{0} & M_2 & \dots & \mathbf{0} & M_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & M_k & M_k \\ M_1 & M_2 & \dots & M_k & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^k \text{rk}(M_i) + \text{rk} \left(\sum_{i=1}^k M_i \right)$$

dir. ■

Aşağıdaki teorem, sonlu tane idempotent matrisin toplamının rankı ile sonlu tane idempotent matrisin ranklarının toplamı arasında bir ilişki ortaya koyar.

Teorem 3.2. [[13], Teorem 6] $M_1, M_2, \dots, M_k \in \mathbb{C}_n$ matrisleri idempotent olsun. Bu durumda,

$$W(M_1, M_2, \dots, M_k) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}M_1 & M_2 & M_3 & \dots & M_{k-1} & M_k \\ M_2 & \mathbf{0} & M_2M_3 & \dots & M_2M_{k-1} & M_2M_k \\ M_3 & M_3M_2 & \mathbf{0} & \dots & M_3M_{k-1} & M_3M_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ M_{k-1} & M_{k-1}M_2 & M_{k-1}M_3 & \dots & \mathbf{0} & M_{k-1}M_k \\ M_k & M_kM_2 & M_kM_3 & \dots & M_kM_{k-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \text{rk} \left(\sum_{i=1}^k M_i \right) &= \text{rk} (W(M_1, M_2, \dots, M_k)) - \sum_{i=2}^k \text{rk}(M_i) \\ &= \text{rk} (W(M_1, M_2, \dots, M_k)) - \sum_{i=2}^k \text{iz}(M_i) \\ &= \text{rk} (W(M_1, M_2, \dots, M_k)) - \text{iz} \left(\sum_{i=2}^k M_i \right) \end{aligned}$$

dir. ■

Sonuç 3.3. [[13], Sonuç 7] $M_1, M_2, \dots, M_k \in \mathbb{C}_n$ idempotent matrisler olmak üzere

$$\text{rk} \begin{pmatrix} M_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & M_1 \\ \mathbf{0} & M_2 & \dots & \mathbf{0} & M_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & M_k & M_k \\ M_1 & M_2 & \dots & M_k & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \text{rk} (W(M_1, M_2, \dots, M_k)) = \text{rk}(M_1) = \text{iz}(M_1)$$

dir. ■

3.2. Sonlu Tane İnvolutif Matrisin Toplamı İçin Bir Rank Eşitliği

Bu kısımda elde edilen sonuç, Lemma 3.1'e, bir matrisin sağdan ve/veya soldan tersinir bir matrisle çarpıldığında rankının değişmediği gerçeğine ve Gauss

eliminasyon yöntemine dayandırılarak üretilmektedir. Bu sonuç aşağıdaki teoremden içermekte olup sonlu tane involutif matrisin toplamının rankı ile ilgili bir eşitlik ortaya koymaktadır.

Bu bölümde, kısalık adına, $M_1, M_2, \dots, M_k \in \mathbb{C}_n$ olmak üzere aşağıdaki matris gösterimi kullanılmaktadır.

$$V(M_1, M_2, \dots, M_k) = \begin{pmatrix} I & M_2 & \dots & M_{k-1} & M_k \\ M_2 & I - M_2 M_1 M_2 - M_2 & \dots & M_2 M_{k-1} - M_2 M_1 M_{k-1} & M_2 M_k - M_2 M_1 M_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ M_{k-1} & M_{k-1} M_2 - M_{k-1} M_1 M_2 & \dots & I - M_{k-1} M_1 M_{k-1} - M_{k-1} & M_{k-1} M_k - M_{k-1} M_1 M_k \\ M_k & M_k M_2 - M_k M_1 M_2 & \dots & M_k M_{k-1} - M_k M_1 M_{k-1} & I - M_k M_1 M_k - M_k \end{pmatrix}$$

Teorem 3.4. $M_1, M_2, \dots, M_k \in \mathbb{C}_n$ involutif matrisler olmak üzere

$$\text{rk} \left(\sum_{i=1}^k M_i \right) = \text{rk} (V(M_1, M_2, \dots, M_k)) + n(1-k) \quad (3.1)$$

dır.

İspat.

$$N = \begin{pmatrix} M_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & M_1 \\ \mathbf{0} & M_2 & \dots & \mathbf{0} & M_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & M_k & M_k \\ M_1 & M_2 & \dots & M_k & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

olsun. N matrisini,

$$N_{11} = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_k, \quad N_{12} = (M_1^T \quad M_2^T \quad \dots \quad M_k^T)^T \quad (3.2)$$

ve

$$N_{21} = (M_1 \ M_2 \ \dots \ M_k) \quad (3.3)$$

olmak üzere,

$$N = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

şeklinde parçalayalım.

M_i , $i=1,2,\dots,k$, matrisleri involutif olduğundan tersinirdirler, dolayısıyla Teorem 2.20 ve Lemma 3.1'den

$$\text{rk}(N) = kn + \text{rk}\left(\sum_{i=1}^n M_i\right) \quad (3.5)$$

yazılabilir. Öte yandan,

$$\begin{aligned} W_1 &= (\mathbf{0} \ (M_2 M_1 - M_2)^T \ \dots \ (M_k M_1 - M_k)^T)^T \in \mathbb{C}_{nk \times n}, \\ W_2 &= (-M_1 \ \mathbf{0} \ \dots \ \mathbf{0}) \in \mathbb{C}_{n \times nk}, \\ W_3 &= (M_1 - I \ \mathbf{0} \ \dots \ \mathbf{0}) \in \mathbb{C}_{n \times nk}, \\ W_4 &= (-M_1^T \ \mathbf{0} \ \dots \ \mathbf{0})^T \in \mathbb{C}_{nk \times n} \end{aligned} \quad (3.6)$$

ve $Q = N_{11} + W_1 N_{21}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ W_2 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & W_1 \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ W_3 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & W_4 \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Q + N_{12} W_3 & (Q + N_{12} W_3) W_4 + N_{12} \\ W_2 Q + N_{21} + W_2 N_{12} W_3 & (W_2 Q + N_{21} + W_2 N_{12} W_3) W_4 + W_2 N_{12} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.7)$$

elde edilir.

N_{11} , N_{21} ve W_1 matrislerinin sırasıyla (3.2), (3.3) ve (3.6)'daki ifadeleri

$Q = N_{11} + W_1 N_{21}$ eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$Q = \begin{pmatrix} M_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ M_2 - M_2 M_1 & M_2 + M_2 M_1 M_2 - I & \dots & M_2 M_1 M_{k-1} - M_2 M_{k-1} & M_2 M_1 M_k - M_2 M_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ M_{k-1} - M_{k-1} M_1 & M_{k-1} M_1 M_2 - M_{k-1} M_2 & \dots & M_{k-1} + M_{k-1} M_1 M_{k-1} - I & M_{k-1} M_1 M_k - M_{k-1} M_k \\ M_k - M_k M_1 & M_k M_1 M_2 - M_k M_2 & \dots & M_k M_1 M_{k-1} - M_k M_{k-1} & M_k + M_k M_1 M_k - I \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

bulunur. N_{12} , W_3 ve Q matrislerinin sırasıyla (3.2), (3.6) ve (3.8)'deki ifadeleri göz önüne alınarak,

$$Q + N_{12} W_3 = \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M_2 + M_2 M_1 M_2 - I & \dots & M_2 M_1 M_{k-1} - M_2 M_{k-1} & M_2 M_1 M_k - M_2 M_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & M_{k-1} M_1 M_2 - M_{k-1} M_2 & \dots & M_{k-1} + M_{k-1} M_1 M_{k-1} - I & M_{k-1} M_1 M_k - M_{k-1} M_k \\ \mathbf{0} & M_k M_1 M_2 - M_k M_2 & \dots & M_k M_1 M_{k-1} - M_k M_{k-1} & M_k + M_k M_1 M_k - I \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

olduğu görülür. (3.9)'dan, (3.2)'nin ikinci ve (3.6)'nın dördüncü eşitliği yardımı ile,

$$(Q + N_{12} W_3) W_4 + N_{12} = (\mathbf{0} \quad M_2^T \quad \dots \quad M_k^T)^T \quad (3.10)$$

elde edilir. Öte yandan, (3.3), (3.6)'nın ikinci eşitliği ve (3.9)'dan

$$W_2 (Q + N_{12} W_3) + N_{21} = (\mathbf{0} \quad M_2 \quad \dots \quad M_k) \quad (3.11)$$

yazılabilir. Son olarak, N_{12} , W_2 ve W_4 matrislerinin sırasıyla (3.2) ve (3.6)'daki, ifadeleri, (3.11) ile birlikte göz önüne alınırsa,

$$(W_2 Q + N_{21} + W_2 N_{12} W_3) W_4 + W_2 N_{12} = -I \quad (3.12)$$

bulunur. (3.9), (3.10), (3.11) ve (3.12) eşitlikleri (3.7)'de yerlerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M_2 + M_2 M_1 M_2 - I & \dots & M_2 M_1 M_k - M_2 M_k & M_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & M_k M_1 M_2 - M_k M_2 & \dots & M_k + M_k M_1 M_k - I & M_k \\ \mathbf{0} & M_2 & \dots & M_k & -I \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

elde edilir.

Böylece, $\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ W_2 & I \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} I & W_1 \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ W_3 & I \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} I & W_4 \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}$ matrisleri tersinir olduğundan,

Teorem 2.19'a göre $\begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ matrisinin rankı, (3.13)'teki matrisin rankına eşittir.

Şimdi,

$$Z_{11} = \begin{pmatrix} M_2 + M_2 M_1 M_2 - I & \dots & M_2 M_1 M_k - M_2 M_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_k M_1 M_2 - M_k M_2 & \dots & M_k + M_k M_1 M_k - I \end{pmatrix},$$

$$Z_{12} = (M_2^T \quad \dots \quad M_k^T)^T$$

ve

$$Z_{21} = (M_2 \quad \dots \quad M_k)$$

olmak üzere,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & I \\ -I & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I \\ -I & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & Z_{21} \\ Z_{12} & -Z_{11} \end{pmatrix} = V(M_1, M_2, \dots, M_k)$$

olduğu görülür. Buradan, $Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & -I \end{pmatrix}$ olmak üzere Teorem 2.30'a göre

$$\begin{aligned}
 \text{rk}(N) &= \text{rk} \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
 &= \text{rk}(I \oplus Z) \\
 &= \text{rk}(I) + \text{rk}(Z) \\
 &= n + \text{rk}(V(M_1, M_2, \dots, M_k))
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

elde edilir.

Böylece, (3.5) ve (3.14)'ten istenen sonuç elde edilir. ■

Teorem 3.4'te $k = 2$ alınırsa,

$$\text{rk}(M_1 + M_2) = \text{rk} \begin{pmatrix} I & M_2 \\ M_2 & I - M_2 M_1 M_2 - M_2 \end{pmatrix} - n$$

olur. Şimdi yukarıdaki blok matriste birinci satır ikinci satıra eklenerek, ikinci satıra yazılır, ikinci satır sağdan ve soldan M_2 ile çarpılır ve Teorem 2.21 dikkate alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.5. $M_1, M_2 \in \mathbb{C}_n$ involutif matrisler olsun. Bu durumda

$$\text{rk}(M_1 + M_2) = \text{rk} \begin{pmatrix} I & M_2 \\ I + M_2 & I - M_1 \end{pmatrix} - n$$

dir. Ayrıca, M_2 involutif bir matris ise $-M_2$ matrisi de involutif bir matris olacağından,

$$\text{rk}(M_1 - M_2) = \text{rk} \begin{pmatrix} I & -M_2 \\ I - M_2 & I - M_1 \end{pmatrix} - n$$

elde edilir. ■

Teorem 3.4'te $k = 3$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.6. $M_1, M_2, M_3 \in \mathbb{C}_n$ involutif matrisler olsun. Bu durumda,

$$\text{rk}(M_1 + M_2 + M_3) = \text{rk}(M_1 M_2 + M_1 M_3 + I)$$

dır.

İspat. Involutif matrisler tersinir olduğundan Teorem 2.20 ve Teorem 3.4'e göre,

$$\text{rk}(M_1 + M_2 + M_3) = \text{rk} \begin{pmatrix} I & M_2 & M_3 \\ M_2 & I - M_2 M_1 M_2 - M_2 & M_2 M_3 - M_2 M_1 M_3 \\ M_3 & M_3 M_2 - M_3 M_1 M_2 & I - M_3 M_1 M_3 - M_3 \end{pmatrix} - 2n \quad (3.15)$$

yazılabilir. Şimdi,

$$\begin{pmatrix} I & M_2 & M_3 \\ M_2 & I - M_2 M_1 M_2 - M_2 & M_2 M_3 - M_2 M_1 M_3 \\ M_3 & M_3 M_2 - M_3 M_1 M_2 & I - M_3 M_1 M_3 - M_3 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

matrisinde, birinci satır soldan $-M_2$ ile çarpılır, ikinci satıra eklenerek ikinci satıra yazılır ve birinci satır soldan $-M_3$ ile çarpılır, üçüncü satıra eklenerek üçüncü satıra yazılırsa, (3.16)'daki matrisin

$$\begin{pmatrix} I & M_2 & M_3 \\ \mathbf{0} & -M_2 M_1 M_2 - M_2 & -M_2 M_1 M_3 \\ \mathbf{0} & -M_3 M_1 M_2 & -M_3 M_1 M_3 - M_3 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

matrisine satırca denk olduğu görülür. Sonra birinci sütun $-M_2$ ile çarpılır, ikinci sütuna eklenip ikinci sütuna yazılır ve birinci sütun $-M_3$ ile çarpılır üçüncü sütuna eklenip üçüncü sütuna yazılırsa, (3.17)'deki matrisin de

$$I \oplus \begin{pmatrix} -M_2M_1M_2 - M_2 & -M_2M_1M_3 \\ -M_3M_1M_2 & -M_3M_1M_3 - M_3 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

matrisine sütunca denk olduğu görülür. Böylece (3.16) matrisi, elementer satır/sütun işlemleri ile (3.18)'deki matrise dönüşür. Dolayısıyla Teorem 2.21 ve (3.15)'e göre

$$\text{rk}(M_1 + M_2 + M_3) = \text{rk} \left(I \oplus \begin{pmatrix} -M_2M_1M_2 - M_2 & -M_2M_1M_3 \\ -M_3M_1M_2 & -M_3M_1M_3 - M_3 \end{pmatrix} \right) - 2n$$

yani,

$$\text{rk}(M_1 + M_2 + M_3) = \text{rk} \begin{pmatrix} -M_2M_1M_2 - M_2 & -M_2M_1M_3 \\ -M_3M_1M_2 & -M_3M_1M_3 - M_3 \end{pmatrix} - n \quad (3.19)$$

yazılabilir. Öte yandan, birinci satır soldan $-M_2$ ile, ikinci satır soldan $-M_3$ ile çarpılırsa,

$$\begin{pmatrix} -M_2M_1M_2 - M_2 & -M_2M_1M_3 \\ -M_3M_1M_2 & -M_3M_1M_3 - M_3 \end{pmatrix}$$

matrisi de

$$\begin{pmatrix} M_1M_2 + I & M_1M_3 \\ M_1M_2 & M_1M_3 + I \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

matrisine satırca denk olur. Şimdi ikinci satırın -1 katı birinci satıra eklenip birinci satıra yazılırsa, (3.20)'deki matris

$$\begin{pmatrix} I & -I \\ M_1 M_2 & M_1 M_3 + I \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

matrisine satırca denk olur. (3.21)'deki matris sağdan $\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I \end{pmatrix}$ tersinir matrisi ile çarpılır ve Teorem 2.19 dikkate alınır, (3.21)'deki matrisin rankının, $\text{rk} \begin{pmatrix} I & I \\ M_1 M_2 & -M_1 M_3 - I \end{pmatrix}$ 'ye eşit olduğu görülür. Öte yandan Lemma 2.31'e göre,

$$\text{rk} \begin{pmatrix} I & I \\ M_1 M_2 & -M_1 M_3 - I \end{pmatrix} = n + \text{rk}(M_1 M_2 + M_1 M_3 + I)$$

yazılabilir. Böylece (3.19)'dan istenen sonuç elde edilir. ■

Teorem 3.7. $A, B \in \mathbb{C}_n$ herhangi iki involutif matris olsun. Bu durumda

$$\text{rk}(AB - BA) = \text{rk}(A + B) + \text{rk}(A - B) - n \quad (3.22)$$

olur ve dolayısıyla,

$$AB = BA \Leftrightarrow \text{rk}(A + B) + \text{rk}(A - B) = n$$

dir [4]. ■

Sonuç 3.5 ve Teorem 3.7 birlikte düşünülürse aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.8. $A, B \in \mathbb{C}_n$ herhangi iki involutif matris olsun. Bu durumda,

$$\text{rk}(AB - BA) = \text{rk} \begin{pmatrix} I & B \\ I + B & I - A \end{pmatrix} + \text{rk} \begin{pmatrix} I & -B \\ I - B & I - A \end{pmatrix} - 3n \quad (3.23)$$

olur. Özellikle $AB = BA$ iken,

$$\text{rk} \begin{pmatrix} I & B \\ I+B & I-A \end{pmatrix} + \text{rk} \begin{pmatrix} I & -B \\ I-B & I-A \end{pmatrix} = 3n \quad (3.24)$$

dir. ■



BÖLÜM 4. SONLU TANE TRİPOTENT MATRİSİN TOPLAMI İÇİN BİR RANK EŞİTLİĞİ

4.1. Giriş

Önceki bölümde verilen sonuçlar sonlu tane involutif (tersinir tripotent) matris ile ilgiliydi. Bu bölümde, tersinir olması gerekmeyen tripotent matrisler içinde benzer sonuçlar ortaya koyulacaktır.

Bu bölümde, kısalık olsun diye, $T_1, T_2, \dots, T_k \in \mathbb{C}_n$ olmak üzere,

$$W(T_1, T_2, \dots, T_k) = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & T_3 & \dots & T_k \\ 2T_2 + T_2^2 T_1 - T_2 T_1^2 & \mathbf{0} & T_2^2 T_3 & \dots & T_2^2 T_k \\ 2T_3 + T_3^2 T_1 - T_3 T_1^2 & T_3^2 T_2 & \mathbf{0} & \dots & T_3^2 T_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2T_k + T_k^2 T_1 - T_k T_1^2 & T_k^2 T_2 & T_k^2 T_3 & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

matris gösterimi kullanılacaktır.

4.2. Sonlu Tane Tripotent Matrisin Toplamı İçin Bir Rank Eşitliği

Aşağıdaki teorem bu bölümün esas sonucudur. Teorem, sonlu tane tripotent matrisin toplamının rankı ve aynı tripotent matrislerin ranklarının toplamı arasında bir ilişkiyi ortaya koymaktadır.

Teorem 4.1. $T_1, T_2, \dots, T_k \in \mathbb{C}_n$ tripotent matrisler olmak üzere,

$$\text{rk} \left(\sum_{i=1}^k T_i \right) = \text{rk} (W(T_1, T_2, \dots, T_k)) - \sum_{i=2}^k \text{rk}(T_i)$$

dir.

İspat.

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & T_1 \\ \mathbf{0} & T_2 & \dots & \mathbf{0} & T_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & T_k & T_k \\ T_1 & T_2 & \dots & T_k & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

olsun. T matrisini,

$$\begin{aligned} T_{11} &= T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_k, \\ T_{12} &= (T_1^T \quad T_2^T \quad \dots \quad T_k^T)^T, \\ T_{21} &= (T_1 \quad T_2 \quad \dots \quad T_k) \end{aligned} \quad (4.1)$$

olmak üzere,

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

şeklinde parçalayalım. $W_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -(T_2^2)^T & \dots & -(T_k^2)^T \end{pmatrix}^T$ olmak üzere, gerekli

işlemler yapıldığında

$$T_{11} + W_1 T_{21} = \begin{pmatrix} T_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ -T_2^2 T_1 & \mathbf{0} & -T_2^2 T_3 & \dots & -T_2^2 T_k \\ -T_3^2 T_1 & -T_3^2 T_2 & \mathbf{0} & \dots & -T_3^2 T_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -T_k^2 T_1 & -T_k^2 T_2 & -T_k^2 T_3 & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

olduğu görülür. Şimdi,

$$W_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}I & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

$$W_3 = \begin{pmatrix} T_1^2 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

$$W_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(T_1^2)^T & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix}^T \quad (4.6)$$

ve $Q = T_{11} + W_1 T_{21}$ olsun. Bu durumda (4.1)'in ikinci eşitliği, (4.3) ve (4.5)'ten,

$$Q + T_{12}W_3 = \begin{pmatrix} 2T_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ T_2T_1^2 - T_2^2T_1 & \mathbf{0} & -T_2^2T_3 & \dots & -T_2^2T_k \\ T_3T_1^2 - T_3^2T_1 & -T_3^2T_2 & \mathbf{0} & \dots & -T_3^2T_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_kT_1^2 - T_k^2T_1 & -T_k^2T_2 & -T_k^2T_3 & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.1)'in ikinci eşitliği, (4.6) ve (4.7) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$(Q + T_{12}W_3)W_4 + T_{12} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ T_2 + \frac{1}{2}(T_2^2T_1 - T_2T_1^2) \\ \vdots \\ T_k + \frac{1}{2}(T_k^2T_1 - T_kT_1^2) \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

bulunur. Öte yandan (4.1)'in üçüncü, (4.4) ve (4.7) eşitliklerinden

$$W_2(Q + T_{12}W_3) + T_{21} = (\mathbf{0} \quad T_2 \quad \dots \quad T_k) \quad (4.9)$$

olduğu görülür. Böylece, (4.1)'in ikinci eşitliği, (4.4), (4.6) ve (4.9) eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$(W_2(Q + T_{12}W_3) + T_{21})W_4 + W_2T_{12} = -\frac{1}{2}T_1 \quad (4.10)$$

olur. Buradan (4.7), (4.8), (4.9) ve (4.10) eşitliklerinden

$$= \begin{pmatrix} Q + T_{12}W_3 & (Q + T_{12}W_3)W_4 + T_{12} \\ W_2(Q + T_{12}W_3) + T_{21} & (W_2Q + T_{21} + W_2T_{12}W_3)W_4 + W_2T_{12} \\ 2T_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ T_2T_1^2 - T_2^2T_1 & \mathbf{0} & -T_2^2T_3 & \dots & -T_2^2T_k & T_2 + \frac{1}{2}(T_2^2T_1 - T_2T_1^2) \\ T_3T_1^2 - T_3^2T_1 & -T_3^2T_2 & \mathbf{0} & \dots & -T_3^2T_k & T_3 + \frac{1}{2}(T_3^2T_1 - T_3T_1^2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ T_kT_1^2 - T_k^2T_1 & -T_k^2T_2 & -T_k^2T_3 & \dots & \mathbf{0} & T_k + \frac{1}{2}(T_k^2T_1 - T_kT_1^2) \\ \mathbf{0} & T_2 & T_3 & \dots & T_k & -\frac{1}{2}T_1 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

elde edilir.

Öte yandan,

$$\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ W_2 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & W_1 \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ W_3 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & W_4 \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} Q + T_{12}W_3 & (Q + T_{12}W_3)W_4 + T_{12} \\ W_2(Q + T_{12}W_3) + T_{21} & (W_2Q + T_{21} + W_2T_{12}W_3)W_4 + W_2T_{12} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

olduğunu görmek kolaydır. Ayrıca, Teorem 2.12 ve Teorem 2.28'e göre, $\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ W_2 & I \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} I & W_1 \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ W_3 & I \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} I & W_4 \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}$ matrislerinin tersinir olduğu açıktır. Dolayısıyla

Teorem 2.5'e göre $\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ W_2 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & W_1 \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ W_3 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & W_4 \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}$ matrisleri de tersinirdir.

Dolayısıyla, Teorem 2.19 ve Teorem 2.5'e göre $\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ matrisinin rankı, (4.12)'deki matrisin rankına eşittir.

$$K = \begin{pmatrix} T_2 T_1^2 - T_2^2 T_1 \\ T_3 T_1^2 - T_3^2 T_1 \\ \vdots \\ T_k T_1^2 - T_k^2 T_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

ve

$$L = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -T_2^2 T_3 & \dots & -T_2^2 T_k & T_2 + \frac{1}{2}(T_2^2 T_1 - T_2 T_1^2) \\ -T_3^2 T_2 & \mathbf{0} & \dots & -T_3^2 T_k & T_3 + \frac{1}{2}(T_3^2 T_1 - T_3 T_1^2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -T_k^2 T_2 & -T_k^2 T_3 & \dots & \mathbf{0} & T_k + \frac{1}{2}(T_k^2 T_1 - T_k T_1^2) \\ T_2 & T_3 & \dots & T_k & -\frac{1}{2}T_1 \end{pmatrix}$$

olmak üzere, (4.11) ve (4.12) eşitlikleri dikkate alındığında

$$\text{rk}(T) = \text{rk} \begin{pmatrix} 2T_1 & \mathbf{0} \\ K & L \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

elde edilir. Öte yandan

$$W_5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(T_2^2 - T_2 T_1) \\ \vdots \\ \frac{1}{2}(T_k^2 - T_k T_1) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

olmak üzere,

$$\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ W_5 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2T_1 & \mathbf{0} \\ K & L \end{pmatrix} = 2T_1 \oplus L$$

olduğu görülür. Ayrıca, $\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ W_5 & I \end{pmatrix}$ matrisi tersinir olduğundan,

$$\text{rk} \begin{pmatrix} 2T_1 & \mathbf{0} \\ K & L \end{pmatrix} = \text{rk}(2T_1 \oplus L) = \text{rk}(T_1) + \text{rk}(L)$$

ve dolayısıyla

$$\text{rk}(T) = \text{rk}(T_1) + \text{rk}(L) \quad (4.15)$$

elde edilir.

Şimdi de, L matrisini

$$L_{11} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -T_2^2 T_3 & \dots & -T_2^2 T_{k-1} & -T_2^2 T_k \\ -T_3^2 T_2 & \mathbf{0} & \dots & -T_3^2 T_{k-1} & -T_3^2 T_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -T_{k-1}^2 T_2 & -T_{k-1}^2 T_3 & \dots & \mathbf{0} & -T_{k-1}^2 T_k \\ -T_k^2 T_2 & -T_k^2 T_3 & \dots & -T_k^2 T_{k-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

$$L_{12} = \begin{pmatrix} T_2 + \frac{1}{2}(T_2^2 T_1 - T_2 T_1^2) \\ T_3 + \frac{1}{2}(T_3^2 T_1 - T_3 T_1^2) \\ \vdots \\ T_{k-1} + \frac{1}{2}(T_{k-1}^2 T_1 - T_{k-1} T_1^2) \\ T_k + \frac{1}{2}(T_k^2 T_1 - T_k T_1^2) \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

ve

$$L_{21} = (T_2 \quad T_3 \quad \dots \quad T_{k-1} \quad T_k) \quad (4.18)$$

olmak üzere,

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & -\frac{1}{2}T_1 \end{pmatrix}$$

olarak parçalayalım. Bu durumda,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & I \\ -I & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & -\frac{1}{2}T_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I \\ -2I & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & L_{21} \\ 2L_{12} & -L_{11} \end{pmatrix}$$

elde edilir. $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & I \\ -I & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & I \\ -2I & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ matrisleri tersinir olduğundan, Teorem 2.19'a göre

$$\text{rk}(L) = \text{rk} \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & -\frac{1}{2}T_1 \end{pmatrix} = \text{rk} \begin{pmatrix} T_1 & L_{21} \\ 2L_{12} & -L_{11} \end{pmatrix}$$

olur. Buradan, (4.15), (4.16), (4.17) ve (4.18) eşitlikleri dikkate alındığında

$$\text{rk}(T) = \text{rk}(T_1) + \text{rk}(W(T_1, T_2, \dots, T_k))$$

eşitliği ve Lemma 3.1'den,

$$\text{rk}\left(\sum_{i=1}^k T_i\right) = \text{rk}(W(T_1, T_2, \dots, T_k)) - \sum_{i=2}^k \text{rk}(T_i)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.1'de $k = 2$ alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.2. T_1 ve T_2 matrisleri tripotent matrisler olsun. Bu durumda

$$\text{rk}(T_1 + T_2) = \text{rk}\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 2T_2 + T_2^2 T_1 - T_2 T_1^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} - \text{rk}(T_2)$$

ve $T_2^2 T_1 = T_2 T_1^2$ koşulu ile

$$\text{rk}(T_1 + T_2) = \text{rk}\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} - \text{rk}(T_2)$$

dir. ■

Eğer T_1 ve T_2 matrisleri idempotent ise $T_2^2 T_1 - T_2 T_1^2 = \mathbf{0}$ olur. Dolayısıyla Sonuç 4.2'den de aşağıdaki iyi bilinen rank eşitliği elde edilir.

Sonuç 4.3. [[6], Teorem 2.1] T_1 ve T_2 iki idempotent matris olsun. Bu durumda

$$\text{rk}(T_1 + T_2) = \text{rk} \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} - \text{rk}(T_2)$$

dir. ■

Teorem 4.1’de $k = 3$ alınırse aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.4. T_1 , T_2 ve T_3 tripotent matrisler olsun. Bu durumda,

$$\text{rk}(T_1 + T_2 + T_3) = \text{rk} \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \\ 2T_2 + T_2^2T_1 - T_2T_1^2 & \mathbf{0} & T_2^2T_3 \\ 2T_3 + T_3^2T_1 - T_3T_1^2 & T_3^2T_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} - \text{rk}(T_2) - \text{rk}(T_3)$$

olur. ■

T_1 , T_2 ve T_3 idempotent matrisler ise, Sonuç 4.4’ten de, aşağıda verilen ve iyi bilinen rank eşitliği elde edilir.

Sonuç 4.5. T_1 , T_2 ve T_3 idempotent matris olsun. Bu durumda

$$\text{rk}(T_1 + T_2 + T_3) = \text{rk} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}T_1 & T_2 & T_3 \\ T_2 & \mathbf{0} & T_2T_3 \\ T_3 & T_3T_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} - \text{rk}(T_2) - \text{rk}(T_3)$$

eşitliği sağlanır [6]. ■

Teorem 4.1'in Teorem 3.2'yi kapsadığına dikkat edilmesi gerekir. Gerçekten eğer $T_1, T_2, \dots, T_k$ idempotent matrisler ise, bu durumda, her idempotent matris tripotent olduğundan,

$$W(T_1, T_2, \dots, T_k) = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & T_3 & \dots & T_k \\ 2T_2 & \mathbf{0} & T_2 T_3 & \dots & T_2 T_k \\ 2T_3 & T_3 T_2 & \mathbf{0} & \dots & T_3 T_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2T_k & T_k T_2 & T_k T_3 & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

ve buradan da

$$\text{rk}(W(T_1, T_2, \dots, T_k)) = \text{rk} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}T_1 & T_2 & T_3 & \dots & T_k \\ T_2 & \mathbf{0} & T_2 T_3 & \dots & T_2 T_k \\ T_3 & T_3 T_2 & \mathbf{0} & \dots & T_3 T_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_k & T_k T_2 & T_k T_3 & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

bulunur.

Böylece Teorem 3.2, Teorem 4.1'den elde edilmiş olur. ■

BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Giriş bölümünde, ele alınacak problemin önemi, tanıtımı ve kısa bir literatür araştırması yapılmaktadır. Sonraki bölümde temel tanım ve ispatsız olmak üzere bilinen temel sonuçlar verilmektedir.

Üçüncü bölümde, çalışmanın ortaya koyulmasında esinlenilen [13] çalışması kısaca özetlenmektedir. Daha sonra sonlu tane involutif matrisin toplamının rankı için bir esas sonuç ve buna bağlı olarak bazı sonuçlar ortaya koyulmaktadır. Dördüncü bölümde de sonlu tane tripotent matrisin toplamının rankı için esas bir sonuç ve bu sonuçtan elde edilmek üzere bazıları literatürde iyi bilinen sonuçlar elde edilmektedir.

Bu çalışmada elde edilen temel sonuçların, birinci bölümde bahsedilen alanlardaki uygulanabilirlikleri ve sağlayacağı kolaylıklar araştırılabilir. İdempotent, involutif ve tripotent matrisleri kapsayan kuadratik veya genelleştirilmiş kuadratik matrisler için de benzer problemler ele alınabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Venit, S., Bishop, W., Elementary Linear Algebra, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1985.
- [2] Johnson, R. A., Wichern, D. W., Applied Multivariate Statistical Analysis, Prentice-Hall, New Jersey, 1982.
- [3] Brogan, W., Modern Control Theory, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 1991.
- [4] Tian, Y., Styan, G. P. H., Rank Equalities for Idempotent and Involutory Matrices, Linear Algebra Appl., 335, 101-117, 2001.
- [5] Tian, Y., Styan, G. P. H., A New Rank Formula for Idempotent Matrices with Applications, Comment. Math. Univ. Carolinae, 379-384, 2002.
- [6] Tian, Y., Styan, G. P. H., Rank Equalities for Idempotent Matrices with Applications, Journal of Computational and Applied Mathematics, 191, 77-97, 2006.
- [7] Koliha, J., Rakočević, V. ve Straskraba, I., The Difference and Sum of Projectors, Linear Algebra Appl., 388, 279-288, 2004.
- [8] Koliha, J., Rakočević, V., The Nullity and Rank of Linear Combinations of Idempotent Matrices, Linear Algebra Appl., 418, 11-14, 2006.
- [9] Gross, J., Trenkler, G., Nonsingularity of The Difference of Two Oblique Projectors, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 21, 390-395, 1999.
- [10] Koliha, J., Rakočević, V., Invertibility of The Difference of Idempotents, Linear and Multilinear Algebra, 51, 97-110, 2003.
- [11] Koliha, J., Rakočević, V., Invertibility of The Sum of Idempotents. Linear and Multilinear Algebra, 50, 285-292, 2002.
- [12] Marsaglia, G., Styan, G. P. H., Equalities and Inequalities for Ranks of Matrices, Linear and Multilinear Algebra, 2, 269-292, 1974.

- [13] Chen, M., Chen, Q., Li, Q., Yang, Z., On the Open Problem Related to Rank Equalities for the Sum of Finitely Many Idempotent Matrices and Its Applications, Hindawi Publishing Corporation, The Scientific World Journal, Article ID 702413, 7 pages, 2014.
- [14] Zhang, F., Matrix Theory, Basic Results and Techniques, Springer, New York, 2011.
- [15] Horn, R. A., Johnson, C. R., Matrix Analysis, Cambridge University Press, New York, 2013.
- [16] Harville, D. A., Matrix Algebra From a Statistician's Perspective, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [17] Graybill, F. A., Matrices with Applications in Statistics, Wadsworth Publishing Company, California, 1983.
- [18] Eves, H., Elementary Matrix Theory, Allyn and Bacon Inc., Boston, 1966.
- [19] Bronson, R., Schaum's Outline of Theory and Problems of Matrix Operations, McGraw-Hill, New York, 1989.
- [20] Anton, H., Rorres, C., Elementary Linear Algebra, Hoboken, John Wiley & Sons, Inc., NJ, 2010.
- [21] Blyth, T., Robertson, E., Basic Linear Algebra, Springer-Verlag London Limited, Great Britain, 2007.
- [22] Puntanen, S., Styan, G. P. H., Historical Introduction: Issai Schur and the Early Development of the Schur Complement, Zhang F. (Ed.), USA, 2005.

ÖZGEÇMİŞ

Gülsemin Betül DURAN, 08.06.1991 tarihinde Ankara’da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini 2009 yılında tamamladı. 2009 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde lisans eğitimine başladı. 2013 yılında lisans eğitimini başarıyla tamamladı. Aynı yıl Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik EABD’ da yüksek lisans programına başladı. 2014 yılında pedagojik formasyon sertifikası aldı. Şu anda herhangi bir kurumda çalışmıyor.