

**SONSUZ BASİT GRUPLARDA
DİNGİN ALTGRUPLAR**

Tuğba USTA

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MAYIS 2006
ANKARA**

Tuğba USTA tarafından hazırlanan SONSUZ BASİT GRUPLARDA DİNGİN ALTGRUPLAR adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Aynur ARIKAN
Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Abdullah HARMANCI

Üye : Prof. Dr. Dursun TAŞÇI

Üye : Prof. Dr. Adnan TERCAN

Üye : Prof. Dr. Ziya ARGÜN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Aynur ARIKAN

Tarih : 22 / 06 / 2006

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Tuğba USTA

SONSUZ BASİT GRUPLARDA DİNGİN ALTGRUPLAR

(Yüksek Lisans Tezi)

Tuğba USTA

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Mayıs 2006

ÖZET

Bu tezde G grubunun dingin altgruplarını ele aldık. Gerçekten dingin altgruplar grup teorisinin çeşitli bölümlerinde özel bir araştırma konusu olarak ortaya çıkar. “Dingin altgrup” terimi Kegel tarafından bulunmuştur.

G bir grup, $H \leq G$ olmak üzere $\forall g \in G$ için $[H : H \cap H^g] < \infty$ ise H ya dingin altgrup denir. Açık olarak her normal altgrup ve her sonlu altgrup dingindir. Dolayısıyla dingin altgrup kavramı normal altgrup kavramının bir genellemesidir.

Bu çalışma yedi bölümden oluşmaktadır. İkinci bölüm, sonraki bölümlerde kullanacağımız bazı tanım ve teoremleri kapsamaktadır. Üçüncü bölümde dingin altgrupların temel özellikleri ve örnekleri elde edilmiştir. Dördüncü bölüm akranlık özelliği ve bazı gözlemler tartışılmıştır. Beşinci bölümde alterne grupların ve Lie tipi basit grupların involisyonlarının merkezleyenleri incelenmiştir. Son olarak altıncı bölümde dingin altgrupların FC-etkisi, dingin altgruplarda radikaller ve basit gruplarda dingin altgruplar ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Bilim Kodu : 204.1.025
Anahtar Kelimeler :Dingin altgruplar, involisyon, lokal sonlu gruplar, akranlık
Sayfa Adedi : 87
Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Aynur ARIKAN

INERT SUBGROUPS IN INFINITE SIMPLE GROUPS

(M.Sc. Thesis)

Tuğba USTA

GAZİ UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

May, 2006

ABSTRACT

In the present thesis, we consider inert subgroups of a group G . In fact, inert subgroups appear in various sections of group theory and arouse a natural desire to make them a subject of especial research. The term “inert subgroup” was coined by Kegel.

A subgroup H of a group G is called an inert subgroup of G , if $[H : H \cap H^g] < \infty$ for all $g \in G$. It is clear that every normal subgroup and every finite subgroup are inert. Consequently, the notion of inert subgroup generalizes the notion of normal subgroup.

The present study consists of seven chapters. The second chapter includes definitions and theorems which we use in further chapters. In the third chapter, we obtain basic properties and examples of inert subgroups. In the fourth chapter, we discuss the commensurable property and some observations. In the fifth chapter, we investigate the centralizer of involutions in alternating groups and simple groups of Lie type. Finally, in the sixth chapter, we discuss the FC-effect of inert subgroups, radicals in inert subgroups and inert subgroups in simple groups in detail.

Science Code : 204.1.025

Key Words : Inert subgroups, involution, locally finite groups, commensurable

Page Number : 87

Adviser : Assist. Prof. Dr. Aynur ARIKAN

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, sadece çalışmalarımda değil her konuda bana yardımcı olan değerli Hocam Yrd. Doç. Dr. Aynur ARIKAN'a , manevi desteğini benden esirgemeyen sevgili aileme ve çalışmalarım esnasında her konuda bana destek ve yardımcı olan sevgili eşim Kemal USTA'ya teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. BAZI HAZIRLIK TANIM VE SONUÇLARI.....	3
3. DİNGİN ALTGRUPLAR.....	17
3.1. Dingin Altgrupların Bazı Örnekleri.....	17
3.2. Dingin Altgrupların Özellikleri.....	28
4. AKRANLIK ÖZELLİĞİ.....	41
5. İNVOLİSYONLARIN MERKEZLEYENİ.....	52
6. SONSUZ BASİT GRUPLARDA DİNGİN ALTGRUPLAR.....	69
6.1. Temel Sonuçların İfadeleri.....	69
6.2. Dingin Altgrupların FC-Etkisi.....	70
6.3. Dingin Altgruplarda Radikaller.....	76
6.4. Basit Gruplarda Dingin Altgruplar.....	78
7. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	85
KAYNAKLAR.....	86
ÖZGEÇMİŞ.....	87

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\text{Aut}(G)$	G nin otomorfizmalarının grubu
$\text{Alt}(\Omega)$	Alterne grup
$C_G(N)$	N nin G içindeki merkezleyeni
$\det \beta$	β matrisinin determinantı
G/H	G nin H ile bölüm grubu
$G \setminus H$	G de olup H da olmayan elemanların kümesi
$ G $	G kümesinin kardinali
G'	$[G, G]$
$[G : H]$	H ın G içindeki indeksi
$GL(V), SL(V)$	V vektör uzayında singüler olmayan lineer transformasyonların grubu
$GL(n, F), SL(n, F)$	F cismi üzerinde derecesi n olan genel lineer grup ve özel lineer grup
$H \leq G$	H, G nin altgrubudur
$H \triangleleft G$	H, G nin normal altgrubudur
$H \triangleleft\triangleleft G$	H, G de altnormaldir
$H \cong K$	H ile K izomorftur
$\text{Im } \varphi$	φ dönüşümünün görüntü kümesi
$\text{Ker } \varphi$	φ dönüşümünün çekirdeği
$M(n, F)$	F cismi üzerinde $n \times n$ tipindeki matrislerin grubu
$\text{Stab}_G(\alpha)$ veya G_α	G altında α nın dengeleyeni
$\text{Sym}(\Omega)$ veya S^Ω	Ω üzerinde simetrik grup
$\text{Supp}(x)$	$\text{Supp}(x) = \{ \alpha \in \Omega : \alpha^x \neq \alpha, x \in G \}$
$\langle x \rangle$	x tarafından üretilen devirli grup

Simge	Açıklama
$[x,y]$	x ile y nin komütatörü
$[X,Y]$	$\langle [x,y]: x \in X \text{ ve } y \in Y \rangle$
$Z(G)$	G grubunun merkezi
α^G	G altında α nın yörüngesi

1.GİRİŞ

A ve B , G nin iki altgrubu olmak üzere $A \cap B$ altgrubu, A da ve B de sonlu indeksli ise A ve B altgruplarına akrandır denir. Eğer A altgrubu G de kendi eşleniği ile akrandır ise, A altgrubu G de dingindir denir. “Dingin altgrup” kavramı ilk kez O. H. Kegel tarafından verilmiştir.

Açık olarak bir grubun her normal altgrubu dingindir. Böylece dingin altgrup kavramı normal altgrup kavramının bir genellemesidir. Ayrıca bir grubun sonlu her altgrubu ve dingin bir altgrubuyla akrandır olan her altgrubu dingindir.

Dingin altgrupların daha ilginç bir örneği, $SL(n, Q)$ grubunda $SL(n, Z)$ altgrubu tarafından verilir. $SL(n, Q)$ nun içine $SL(n, Z)$ nin gömülmesinin kendine has bir özelliği, $SL(n, Q)$ nun tamlaması bir lokal tıkız tamamen bağlantısız grup olarak bir topolojik yapı ile bahsedilen $SL(n, Q)$ için aritmetik gruplar teorisinde kullanılır. Bu durum dingin altgrup kavramı ile yakın ilişkilidir. Aslında lokal tıkız bir gruptaki her açık altgrup dingindir.

Dingin altgrupların oldukça genel bir örneği de, $\text{Aut } \Gamma$ deki lokal sonlu graph ın keyfi bir node unun dengeleyeni tarafından verilir. Sayılabilir lokal sonlu gruplar içinde dingin altgruplar yapılandırmak için bir genel metot önerilebilir [1]. Özel olarak, sonlu basit grupların sınıflandırılması amacıyla, sonsuz residually sonlu dingin altgrup içermeyen, sonlu lokal sayılabilir grupların tam tanımı tamamlanmıştır (Teorem 1.2, Teorem 5.13) [1].

Gerçekten dingin altgruplar grup teorisinin çeşitli bölümlerinde özel bir araştırma konusu ortaya çıkar. Bu çalışma bütün grupların normal yapısı ve dingin altgruplarda normal altgrupların yapısının arasındaki ilişkinin çalışılması için yapılmıştır. Basit gruplarda dingin altgrupların yapısını çalışmak ve aşağıdaki temel teoremleri ispatlamak için bu doğrultuda elde edilmiş sonuçlara başvuracağız.

Aşağıdaki teoremlerin ispatları çalışmamızda Teorem 6.1.2., Teorem 6.1.3., Teorem 6.1.4., Teorem 6.1.5. ve Teorem 6.1.6. da detaylı olarak açıklanmıştır.

(i) Basit bir gruptaki her dingin altgrup ya bir FC-gruba ya da bir FC-radikale sahiptir.

(ii) H , G basit grubunda dingin bir altgrup olsun ve aşikar olmayan normal periyodik grup içersin. O zaman H nin komütatör grubu periyodiktir.

(iii) H , G basit grubunda dingin bir altgrup olsun ve aşikar olmayan lokal sonlu normal altgrup içersin. O zaman H nin komütatör grubu lokal sonludur.

(iv) H , G basit grubunda dingin altgrup ve H nin lokal nilpotent radikali $F(H)$, 1 den farklı olsun. O zaman

(1) $H / F(H)$ bir FC- gruptur.

(2) Eğer H , FC-grup değilse o zaman ya $F(H)$ torsiyonsuz gruptur ya da $F(H)$ nin periyodik radikali bir p asalı için p -gruptur.

Bu çalışmada her ne kadar kullanılan sonuçlar lokal sonlu gruplarda çalışılan dingin altgruplar için elde edildi ise de lineer gruplarda dingin altgrupların yapısına dayandırılmış bazı sonuçları göstermek mümkündür.

(v) H , basit bir lineer grupta sonsuz öz dingin altgrup olsun. O zaman,

(1) H alt grubunun FC-radikali aşıkardır.

(2) H nin aşikar olmayan normal periyodik alt grubu yoktur.

(3) H nin lokal çözülebilir radikali aşıkardır.

2. BAZI HAZIRLIK TANIM VE SONUÇLARI

2.1. Tanım

G bir grup ve $N \leq G$ olsun. Eğer her $g \in G$ ve $n \in N$ için $g^{-1}ng \in N$ ise o zaman N ye G nin bir normal altgrubu denir ve $N \triangleleft G$ şeklinde gösterilir.

2.2. Tanım

G bir grup ve G nin $\langle e \rangle$ ve G den başka normal altgrubu yoksa G ye *basit grup* denir.

2.3. Tanım

Abeliyan normal altgrubu olmayan gruba *abeliyan olmayan basit grup* denir.

2.4. Tanım

G bir grup, $x, y \in G$ olsun. $x^y = y^{-1}xy$ elemanına x in y ile eşleniği (*konjugesi*) denir.

X ve Y , G nin boştan farklı alt kümeleri olsun. G nin, X in Y ile eşleniği olan altgrubu $X^Y = \langle x^y : x \in X \text{ ve } y \in Y \rangle$ olarak tanımlanır.

2.5. Tanım

G bir grup ve $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$ olsun. $[x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2$ elemanına x_1 ile x_2 nin *komütatörü* denir. Genel olarak $n \geq 2$ ağırlıklı basit komütatör indüksiyon yardımıyla

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] = [[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}], x_n]$$

şeklinde tanımlanır.

X_1 ve X_2 G nin boştan farklı iki altkümesi olsun. X_1 ve X_2 nin komütatör altgrubu $[x_1, x_2] = \langle [x_1, x_2] : x_1 \in X_1 \text{ ve } x_2 \in X_2 \rangle$ olarak tanımlanır.

Özel olarak $X_1 = X_2 = G$ ise $[G, G] = G'$ komütatör grubuna G nin *derived altgrubu* denir.

Daha genel olarak $X_1 = \langle X_1 \rangle$ ve $n \geq 2$ için $[X_1, X_2, \dots, X_n] = [[X_1, X_2, \dots, X_{n-1}], X_n]$ dir.

Eğer $G = G'$ ise G ye bir *mükemmel (perfect) grup* denir.

2.6. Tanım

G bir grup, $a \in G$ olmak üzere $C_G(a) = \{x \in G : xa = ax\}$ kümesine *a elemanının G içindeki merkezleyeni* denir. $C_G(a)$, G nin altgrubudur.

$Z(G) = \{z \in G : \forall x \in G \text{ için } zx = xz\}$ altgrubuna *G nin merkezi* denir.

2.7. Tanım

G bir grup ve Ω boştan farklı bir küme olsun.

Kabul edelim ki;

$$\begin{aligned} G \times \Omega &\rightarrow \Omega \\ (x, \alpha) &\rightarrow \alpha^x \end{aligned}$$

bir fonksiyon olsun. Eğer ;

$$(1) 1 \in G \text{ nin birimi } \alpha^1 = \alpha,$$

$$(2) \forall x, y \in G \text{ için } \alpha^{xy} = (\alpha^x)^y,$$

oluyorsa, Ω üzerinde G nin etkisi veya G , Ω üzerine etki eder denir. Eğer bir grup bir küme üzerine etki ediyorsa kümenin boştan farklı olduğu kabul edilir.

2.8. Tanım

G bir grup, S boştan farklı bir küme olsun. G , S üzerine etki etsin. $\forall x \in S$ için $G_x = \{g \in G : x^g = x\}$ kümesine x in dengeleyeni denir.

$\forall x, x' \in S$ için $x' = gx \Rightarrow x' \approx x$ şeklinde tanımlı bağıntı S de bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntıya göre x in denklik sınıflarının kümesi $\bar{x} = \{x^g : g \in G\}$ kümesine G nin bir yörüngesi denir.

2.9. Tanım

G grubu Ω kümesi üzerine etki etsin ve $\Gamma \subseteq \Omega$ olsun. Eğer her $x \in G$ için $\Gamma^x = \Gamma$ ise Γ kümesine Ω kümesinin G -invariant alt kümesi denir. Kısaca Γ nın G -invariant olması için gerek ve yeter koşul Γ nın, G nin yörüngelerinin birleşimi olmasıdır.

2.10. Tanım

G bir grup olsun ve bir Ω kümesi üzerine etki etsin. Eğer G altında Ω nın bir tek yörüngesi varsa bu etkiye Ω üzerinde geçişlidir (transitive) denir. Yani $\forall \alpha \in \Omega$ için $\alpha^G = \Omega$ dır. Başka bir ifadeyle $\forall \alpha, \beta \in \Omega$ için $\alpha = \beta^x$ olacak şekilde $x \in G$ vardır.

2.1. Teorem

Kabul edelim ki bir G grubu Ω kümesi üzerine etki etsin ve $x, y \in G$, $\alpha, \beta \in \Omega$ olsun. O zaman;

(i) α^G ve β^G ya eşit ya da ayrıktır. Böylece ikişer ikişer ayrık olan bütün yörüngelerin birleşimi Ω yı verir.

(ii) G nin G_α dengeleyeni G nin bir altgrubudur ve $\beta = \alpha^x$ ise $G_\beta = x^{-1}G_\alpha x$ dir. Bundan

başka $\alpha^x = \alpha^y \Leftrightarrow G_\alpha x = G_\alpha y$ dir.

(iii) Yörünge – Dengeleyen Özelliği: $\alpha \in \Omega$ için $|\alpha^G| |G_\alpha| = |G|$ dir.

İspat

(i) Varsayalım ki $\alpha^G \cap \beta^G \neq \emptyset$ olsun. O zaman ,

$$\begin{aligned} \forall \rho \in \alpha^G \cap \beta^G &\Rightarrow \rho \in \alpha^G \quad \text{ve} \quad \rho \in \beta^G \\ &\Rightarrow \rho^G = \alpha^G \quad \text{ve} \quad \rho^G = \beta^G \\ &\Rightarrow \alpha^G = \beta^G \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla ya $\alpha^G \cap \beta^G = \emptyset$ dir ya da $\alpha^G = \beta^G$ dir. Ayrıca $\forall \alpha \in \Omega$ için $\alpha = \alpha^1 \in \alpha^G$ dir. O halde $\Omega = \bigcup_{\alpha \in \Omega} \alpha^G$ dir.

(ii) G_α grubunun G nin bir altgrubu olduğunu gösterelim.

$$1 \in G \Rightarrow \alpha^1 = \alpha \Rightarrow 1 \in G_\alpha = \{x : \alpha^x = \alpha\} \Rightarrow \emptyset \neq G_\alpha \subseteq G$$

dir. $x, y \in G_\alpha$ ise $\alpha^x = \alpha$ ve $\alpha^y = \alpha$ olur.

$$\begin{aligned} \alpha^y = \alpha &\Rightarrow (\alpha^y)^{y^{-1}} = \alpha^{y^{-1}} \\ &\Rightarrow \alpha^{yy^{-1}} = \alpha^{y^{-1}} \\ &\Rightarrow \alpha^1 = \alpha = \alpha^{y^{-1}} \\ &\Rightarrow \alpha^{y^{-1}} \in G_\alpha \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\alpha^{xy^{-1}} = (\alpha^x)^{y^{-1}} = \alpha^{y^{-1}} = \alpha \Rightarrow xy^{-1} \in G_\alpha$$

olur. O zaman, $G_\alpha \leq G$ dir.

Eğer $\beta = \alpha^x$ ise o zaman,

$$y \in G_\beta \Leftrightarrow \beta^y = \beta$$

$$\Leftrightarrow (\alpha^x)^y = \alpha^x$$

$$\Leftrightarrow \alpha^{xy} = \alpha^x$$

$$\Leftrightarrow \alpha^{xyx^{-1}} = \alpha^{xx^{-1}}$$

$$\Leftrightarrow \alpha^{xyx^{-1}} = \alpha$$

$$\Leftrightarrow xyx^{-1} \in G_\alpha$$

$$\Leftrightarrow y \in x^{-1}G_\alpha x$$

olduğundan $G_\beta = x^{-1}G_\alpha x$ dir.

Şimdi de $\alpha^x = \alpha^y \Leftrightarrow G_\alpha x = G_\alpha y$ olduğunu gösterelim.

$$\alpha^x = \alpha^y \Leftrightarrow \alpha^{xy^{-1}} = \alpha$$

$$\Leftrightarrow xy^{-1} \in G_\alpha$$

$$\Leftrightarrow G_\alpha xy^{-1} = G_\alpha$$

$$\Leftrightarrow G_\alpha x = G_\alpha y$$

olur ve ispat tamamlanır.

(iii) G_α nın G içindeki sağ kosetlerinin bir tam kümesi A olsun. $A = \{ G_\alpha x : x \in G \}$ şeklinde tanımlıdır.

$$\begin{aligned}\varphi: \alpha^G &\rightarrow A \\ \alpha^x &\rightarrow G_\alpha x\end{aligned}$$

fonksiyonunu tanımlayabiliriz. Çünkü, $\alpha^x = \alpha^y$ olması için gerek ve yeter koşul $xy^{-1} \in G_\alpha$ olmasıdır. Bu yüzden φ fonksiyonu iyi tanımlı ve birebirdir.. φ fonksiyonu tanımından dolayı örtendir. O halde $|\alpha^G| = |A| = |G: G_\alpha|$ dır. Lagrange den dolayı $|G| = |G: G_\alpha| |G_\alpha|$ olduğundan $|G| = |\alpha^G| |G_\alpha|$ olur. Eğer $|G| < \infty$ ise $|\alpha^G| / |G|$ dir.

2.11. Tanım

α bir G grubunun otomorfizması olsun. Eğer $g^\alpha = g$ ise g ye G nin bir *sabit noktası* denir.

$C_G(\alpha) = \{g \in G : g^\alpha = g\}$ olsun. Eğer $C_G(\alpha) = 1$ ise α ya *sabit noktasızdır* denir.

$H \leq \text{Aut}G$ olmak üzere eğer H nın aşikar olmayan her elemanı sabit noktasız ise H ya *sabit noktasızdır* denir.

2.12. Tanım

G bir grup, $g \in G$ olsun. $g^n = e$ olacak şekilde en küçük n doğal sayısına g *elemanının mertebesi* denir ve $|g|$ veya $O(g)$ ile gösterilir. Eğer $g^n = e$ olacak şekilde n doğal sayısı yoksa $|g| = \infty$ yazılır.

2.13. Tanım

G bir grup ve p bir asal sayı olsun. Her $g \in G$ için $g^{p^n} = 1$ olacak şekilde bir $n \neq 0$ tamsayısı varsa, başka bir deyişle G nin her elemanının mertebesi p nin bir kuvveti ise o

zaman G ye bir p -grubu denir. Bir elemanter abeliyan grup $GF(p)$ üzerinde bir vektör uzayı gözü ile bakılabilir.

2.14. Tanım

G bir değişmeli grup olsun. Her $x \in G$ için $x^p = 1$ ise o zaman G ye *elemanter abeliyan p -grup* denir. Bir elemanter abeliyan p -gruba $GF(p)$ üzerinde bir vektör uzayı gözü ile bakılabilir.

p asal sayı olmak üzere mertebesi p^n olan bir G elemanter abeliyan grup, n tane p mertebeli devirli grubun direkt çarpımı şeklindedir.

2.15. Tanım

G bir grup, X , G nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. G nin X i içeren bütün altgruplarının arakesatine X tarafından üretilen altgrup denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir.

$\langle X \rangle = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ ($a_i \in G$) altgrubuna $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemanları tarafından üretilen *sonlu üreteçli altgrup* denir.

2.16. Tanım

Sonlu üreteçli her altgrubu sonlu olan gruplara *lokal sonlu grup* denir.

2.17. Tanım

G bir grup olsun. Eğer $S = \{1 = G_0, G_1, \dots, G_n = G\}$, G nin altgruplarının bir dizisi ve $G_i \triangleleft G_{i+1}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) ise S ye G nin bir serisi denir ve

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$$

şeklinde gösterilir. G_{i+1}/G_i bölüm gruplarına *serinin faktörleri* ve G_i gruplarına *serinin terimleri* denir. Eğer S nin bütün terimleri farklı ise n ye *serinin uzunluğu* denir.

2.18. Tanım

G bir grup ve H, G nin bir altgrubu olsun. Eğer G nin

$$H = H_r \triangleleft H_{r-1} \triangleleft \dots \triangleleft H_1 \triangleleft H_0 = G$$

olacak şekilde $H_0, H_1, \dots, H_r$ altgrupları varsa H, G de *altnormaldir* denir ve $H \triangleleft\triangleleft G$ veya H sn G ile gösterilir. H dan G ye bu şekilde uzanan serilerin en kısasının uzunluğuna H nin G içindeki *altnormallik indeksi* denir ve $s(G:H)$ ile gösterilir.

2.19. Tanım

G bir grup olsun. $1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_\beta = G$ serisi için $G_\alpha \triangleleft G$ ($\alpha \leq \beta$) ve her $\alpha \leq \beta$ için $G_{\alpha+1}/G_\alpha \leq Z(G/G_\alpha)$ ise bu seriye G nin *artan merkez serisi* denir. Eğer G nin sonlu artan merkez serisi varsa G ye *nilpotent grup* denir. G nin sonlu artan merkez serilerinin en kısasının uzunluğuna G nin *nilpotentlik sınıfı* denir.

2.20. Tanım

G bir grup olsun. G nin $1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$ ve G_{i+1}/G_i ler abeliyan olacak şekilde bir serisi varsa G ye *çözülebilir grup* denir. Eğer G abeliyan ise $1 = G_0 \triangleleft G_1 = G$ ve $G/G_0 = G$ abeliyan olduğundan G çözülebilirdir. Dolayısıyla her abeliyan grup çözülebilirdir.

G çözülebilir bir grupsa G deki en kısa abeliyan serinin uzunluğuna G nin *çözülebilirlik uzunluğu* denir. Çözülebilirlik uzunluğu en fazla 1 olan gruplar sadece abeliyan gruplardır.

G bir grup olsun. $1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_n = G$ normal serisi, öyle ki $(G_{i+1}/G_i) < Z(G/G_i)$ ise bu seriye G nin *merkez serisi* denir. G nin merkez serisi varsa G ye *nilpotent grup* denir. Her nilpotent grup çözülebilirdir.

2.21. Tanım

Ω boştan farklı bir küme olsun. Ω nın elemanlarını nokta olarak kabul edeceğiz. Ω nın bire bir örten bir fonksiyonuna Ω nın *bir permutasyonu* denir. Ω nın bütün permutasyonlarının kümesi fonksiyonların bileşke işlemine göre bir gruptur. Buna Ω üzerinde *simetrik grup* denir ve $\text{Sym}(\Omega)$ ya da S^Ω ile gösterilir.

n pozitif bir tamsayı ve $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ olduğunda özel olarak $\text{Sym}(\Omega)$ simetrik grubu S_n ile gösterilir. Simetrik grubun altgrubuna *permutasyon grubu* denir.

2.22. Tanım

G bir grup, $N \triangleleft G$ ve $H \leq G$ nin $G = HN$ olacak şekilde bir altgrubu ve $H \cap N = 1$ olsun. Bu durumda G , N ve H nin *yarı direkt çarpımıdır* ve $G = H \rtimes N$ veya $G = N \rtimes H$ ile gösterilir.

2.23. Tanım

G bir grup ve $\{1\} \neq H \neq G$ olmak üzere $H \leq G$ nin altgrubu olsun. Eğer her $g \in G \setminus H$ için $H \cap H^g = \{1\}$ ise H ya G nin bir *Frobenius altgrubu* denir. Eğer G bir Frobenius altgrup H içeriyor ise G ye bir *Frobenius grup* veya kısaca *F-grup* denir.

G bir $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}, n \geq 3$ kümesi üzerinde bir permutasyon grubu olsun. G, Ω üzerinde transitif ve G nin birim elemandan farklı her permutasyonu Ω nın en fazla bir noktasını sabit bırakıyorsa G ye *Frobenius permutasyon grubu* veya kısaca *FP-grup* denir. G bir FP-grup ise aynı zamanda bir F-gruptur.

2.2. Teorem (Frobenius Teoremi)

G bir F -grup, H , G nin çözülebilir bir altgrubu olsun. O zaman $N = G \setminus \bigcup_{g \in G} (H \setminus \{1\})^g$ olsun. O zaman N , G nin bir normal alt grubudur. Özel olarak $G = NH$ ve $N \cap H = \{1\}$ dir. Buradaki N normal bölenine *Frobenius çekirdeği* (F -çekirdek) ve H alt grubuna da *Frobenius komplementi* (F -komplement) denir [2].

2.24. Tanım

G bir grup, H G nin alt grubu olsun. $H < G$ ve $H < K \leq G$ için $K = G$ ise H ye G nin bir *maksimal alt grubu* denir.

2.25. Tanım

G bir grup, H G nin aşıkâr olmayan bir alt grubu olsun. Eğer H nin aşıkâr olmayan alt grubu yoksa H ya G nin bir *minimal alt grubu* denir.

2.26. Tanım

Eğer bir grubun her elemanının mertebesi sonlu ise gruba *torsiyon (periyodik) grup* denir. Eğer bir grubun birimden başka hiçbir elemanının mertebesi sonlu değilse o zaman gruba *torsiyonsuz (torsion-free) grup* denir.

2.27. Tanım

G bir grup olsun. Her $x \in G$ ve her pozitif n tamsayısı için

$$x = y^n$$

olacak şekilde bir $y \in G$ varsa G ye bir *köklü (radicable) grup* denir.

G bir toplamsal grup olsun. Her $x \in G$ ve her pozitif n tamsayısı için

$$x = ny$$

olacak şekilde bir $y \in G$ varsa G ye bir *bölümlü (divisible) grup* denir

2.28. Tanım

$G = \langle c_i : c_1^p = 1, c_{i+1}^p = c_i, i = 1, 2, 3, \dots \rangle$ şeklinde tanımlı G grubuna *lokal devirli p-grubu* veya *prüfer p-grup* veya C_p^∞ tipinde bir grup denir.

C_p^∞ tipinde bir grup, bir sonsuz p-grubudur ve her öz alt grubu devirli bir p-gruptur.

2.29. Tanım

Elemanları gruplardan oluşan ve aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\mathcal{X}$ sınıfına *grup teorik sınıf* veya *grup sınıfı* denir.

(i) $G_1 \cong G \in \mathcal{X}$ ise $G_1 \in \mathcal{X}$ dir.

(ii) $\mathcal{X}$ aşık grup içerir.

2.30. Tanım

$\mathcal{X}$ grup teorik sınıf olsun. Eğer bir G grubunun her sonlu altkümesi G nin bir $\mathcal{X}$ -altgrubu tarafından içeriliyorsa G ye $L\mathcal{X}$ -grup denir.

2.31. Tanım

$\mathcal{X}$ ve $\mathcal{Y}$ iki grup sınıfı olsun. Eğer G bir grup ve $N \triangleleft G$ iken $N \in \mathcal{X}$ ve $G/N \in \mathcal{Y}$ ise o zaman G grubuna $\mathcal{X}$ tipindeki bir grubun $\mathcal{Y}$ tipindeki bir gruba genişlemesi denir.

2.32. Tanım

G bir grup olsun. Eğer G minimum şartını sağlayan bir abeliyan grubun sonlu genişlemesi ise o zaman G ye bir *Chernikov grup* denir.

Minimum şartını sağlayan bir abeliyan grup sonlu sayıda C_p^∞ tipindeki grupların direkt çarpımına izomorf olduğundan, bir Chernikov grup, sonlu sayıda C_p^∞ tipindeki grupların direkt çarpımına izomorf bir altgrubunun sonlu genişlemesi şeklinde tanımlanabilir.

2.33. Tanım

G bir grup ve $\mathcal{X}$ bir grup sınıfı olsun. Her $1 \neq y \in G$ için $y \notin A_y$ ve $G / A_y \in \mathcal{X}$ olacak şekilde $A_y \triangleleft G$ var ise G ye bir *residually $\mathcal{X}$ -grubu* denir.

2.34. Tanım

F bir cisim, n sabit bir doğal sayı olsun. Matris çarpımı operasyonuna göre $n \times n$ tipindeki singüler olmayan bütün matrislerin kümesi bir gruptur. Bu gruba F üzerinde derecesi n olan *genel lineer grup* denir ve $GL(n, F)$ ile gösterilir.

$GL(n, F)$ de determinantı 1 olan bütün matrislerin kümesi $GL(n, F)$ nin bir altgrubudur. Bu gruba *özel lineer grup* denir ve $SL(n, F)$ ile gösterilir.

Eğer F elemanlarının bir sonlu cismi ise $F = F_q$ için $GL(n, F_q)$ ve $SL(n, F_q)$ notasyonları yerine $GL(n, q)$ ve $SL(n, q)$ kullanılır.

$GL(n, F)/Z(GL(n, F))$ bölüm grubuna *projective genel lineer grup* denir ve $PGL(n, F)$ ile gösterilir. Benzer şekilde $SL(n, F)/Z(SL(n, F))$ bölüm grubuna da *projective özel lineer grup* denir ve $PSL(n, F)$ ile gösterilir.

2.35. Tanım

F bir cisim ve $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in F$ olmak üzere

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

şeklindeki bir ifadeye katsayıları F de olan bir *polinom* denir. Buradaki $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ elemanlarına *polinomun katsayıları*, a_n elemanına *polinomun baş katsayısı* denir. Eğer $a_n = 1$ ise o zaman $p(x)$ polinomuna *monik polinom* denir.

2.36. Tanım

$A \in M(n, F)$ olsun. Buna göre $m(A) = 0$ olacak şekilde en küçük dereceli monik polinoma *A matrisinin minimal polinomu* denir ve $m(x)$ şeklinde gösterilir.

2.37. Tanım

Esas köşegeni üzerindeki bütün elemanları eşit ve esas köşegen üstündeki ilk köşegen üzerindeki elemanları 1 ve diğer tüm elemanları 0 olan bir kare matrise *Jordan bloku* denir. Böylece bir Jordan bloku

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

şeklinde bir kare matristir.

Eğer A , $n \times n$ tipinde bir genel matris ise, o zaman J_i ler Jordan blokları olmak üzere

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_k \end{pmatrix}$$

olacak şekilde tekil olmayan bir Q matrisi bulunabilir. Bu matris *Jordan kanonik formu* olarak adlandırılır.

3. DİNGİN ALTGRUPLAR

3.1. Dingin Altgrupların Bazı Örnekleri

3.1.1. Tanım

G bir grup, $H \leq G$ olmak üzere $\forall g \in G$ için $[H : H \cap H^g] < \infty$ ise H ya *dingin altgrup* denir.

G den ve G nin sonlu altgruplarından farklı olan *dingin altgruplara özdingin altgrup* denir. G nin her sonlu altgrubu, her normal altgrubu ve G nin kendisi G de *dingin altgrup*tur.

Şimdi özdingin altgruplara bazı örnekler verelim:

3.1.1. Örnek

$G = GL(n, Q)$ olmak üzere $S = SL(n, Z)$ G de dingindir.

$T \in S$ olmak üzere, $[T]_N$, (i, j) inci girişi $[T_{ij}]_N = \{ K_{ij} : K_{ij} \equiv T_{ij} \pmod{N} \}$ olan $n \times n$ tipindeki matrisi gösterebiliriz ve $S_N = \{ T \in S : [T]_N = [I]_N \}$ olsun.

Bu örneği ispatlamadan önce aşağıdaki lemmaları inceleyelim.

3.1.1. Lemma

$b \in Z^+$ olsun.

$$\begin{aligned} \varphi : S = SL(n, Q) &\rightarrow SL(n, Z_b) \\ a &\rightarrow [a]_b \end{aligned}$$

dönüşümü bir epimorfizmadır. Bundan başka $S / \text{Ker } \varphi$ sonludur.

İspat

$\bar{a} = [a]_b$ olsun.

φ dönüşümü iyi tanımlıdır;

$a, b \in S$ için $a = b \Rightarrow \forall i, j$ için $a_{ij} = b_{ij} \Rightarrow \forall i, j$ için $\bar{a}_{ij} = \bar{b}_{ij} \Rightarrow \bar{a} = \bar{b}$

φ dönüşümü homomorfizmadır;

$a, b \in S$ için $\varphi(ab) = \bar{ab} = \bar{a}\bar{b} = \varphi(a)\varphi(b)$

φ dönüşümü örtendir;

Gerçekten verilen herhangi bir $\bar{a}_{ij} \in SL(n, Z_b)$ için bir $a_{ij} \in S$ vardır öyle ki $\varphi(a_{ij}) = \bar{a}_{ij}$ dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \text{Ker}\varphi &= \{a \in S : \varphi(a) = \bar{I}_n\} \\ &= \{a \in S : a_{ij} = \delta_{ij} \pmod{b}\} \\ &= \{a \in S : a \equiv I_n \pmod{b}\} \\ &= S_b \end{aligned}$$

olduğundan, 1. izomorfizma teoreminden $S/S_b \cong SL(n, Z_b)$ elde ederiz. Z_b sonlu olduğundan $SL(n, Z_b)$ sonludur ve buradan $[S : S_b] < \infty$ olduğu elde edilir.

3.1.2. Lemma

$\beta \in M(n, Z)$ öyle ki $\det \beta = b \neq 0$ olsun. Negatif olmayan her N tamsayısı için $S_{Nb} \subseteq \beta^{-1}S_N\beta \cap \beta S_N\beta^{-1}$ dir.

İspat

$S = SL(n, Z)$ ve $G = GL(n, Q)$ ve $\beta' = b\beta^{-1}$ olsun. O zaman

$$\beta' = b\beta^{-1} = b \frac{1}{\det \beta} \text{adj}(\beta) = bb^{-1} \text{adj}(\beta) = \text{adj}(\beta) \in M(n, Z) \text{ dir.}$$

Eğer $T = I_n \pmod{Nb}$ ise o zaman

$$\begin{aligned} \beta' T \beta &\equiv \beta' \beta \pmod{Nb} \\ &\equiv b\beta^{-1} \beta \pmod{Nb} \\ &\equiv bI_n \pmod{Nb} \end{aligned}$$

Böylece $b\beta^{-1} T \beta \equiv bI_n \pmod{Nb}$ olduğundan $\beta^{-1} T \beta \equiv I_n \pmod{Nb}$ dir. Bundan dolayı $\beta^{-1} T \beta \in M(n, Z)$ olur.

$T \in S_{Nb}$ olsun. O zaman $T \equiv I_n \pmod{Nb}$ ve $\det(\beta T \beta^{-1}) = 1$ olduğundan $\beta^{-1} T \beta \in S_N$ dir.

Böylece $T \in \beta S_N \beta^{-1}$ dir.

Diğer taraftan $\beta'' = \beta^{-1} b = \frac{1}{\det \beta} \text{adj}(\beta) b = \text{adj}(\beta) b^{-1} b = \text{adj}(\beta) \in M(n, Z)$ dir. Eğer

$T = I_n \pmod{Nb}$ ise o zaman

$$\begin{aligned} \beta T \beta'' &\equiv \beta \beta'' \pmod{Nb} \\ &\equiv \beta \beta^{-1} b \pmod{Nb} \\ &\equiv I_n b \pmod{Nb} \end{aligned}$$

Böylece $\beta T \beta^{-1} b \equiv I_n b \pmod{Nb}$ olduğundan $\beta T \beta^{-1} \equiv I_n \pmod{Nb}$ olup $\beta T \beta^{-1} \in M(n, Z)$ olur.

$T \in S_{Nb}$ olsun. O zaman $T \equiv I_n \pmod{Nb}$ ve $\det(\beta T \beta^{-1}) = 1$ olduğundan $\beta T \beta^{-1} \in S_N$ dir ve böylece $T \in \beta^{-1} S_N \beta$ dir.

$T \in \beta S_N \beta^{-1}$ ve $T \in \beta^{-1} S_N \beta$ olduğundan $T \in \beta S_N \beta^{-1} \cap \beta^{-1} S_N \beta$ elde edilir.

Örnek 3.1.1 in ispatı

Şimdi S nin G de dingin olduğunu gösterelim;

$\alpha \in GL(n, Q)$ olsun. O zaman $c \in Q$ ve $\beta \in GL(n, Z)$ için $\alpha = c\beta$ şeklinde yazabiliriz.

Buradan $\alpha S \alpha^{-1} = \beta S \beta^{-1}$ elde ederiz.

Gerçekten; $a \in S$ olmak üzere

$$\alpha a \alpha^{-1} = (c\beta)a(c\beta)^{-1} = c\beta a \left(\frac{1}{c}\beta^{-1}\right) = \frac{c}{c}\beta a \beta^{-1} = \beta a \beta^{-1} \in \beta S \beta^{-1}$$

dir. Bu durumda $\alpha a \alpha^{-1} \in \beta S \beta^{-1}$ dir. Tersine olarak, $d \in S$ olmak üzere eğer $\beta d \beta^{-1} \in \beta S \beta^{-1}$ ise

$$\beta d \beta^{-1} = \frac{c}{c}\beta a \beta^{-1} = c\beta d \left(\frac{1}{c}\beta^{-1}\right) = \alpha d \alpha^{-1} \in \alpha S \alpha^{-1}$$

olur. Bundan dolayı $\alpha S \alpha^{-1} = \beta S \beta^{-1}$ elde edilir. Şimdi $N = 1$ ve $b = \det(\beta)$ alalım. Bu durumda

$$S_b \subseteq \beta^{-1} S_N \beta \cap \beta S_N \beta^{-1} \subseteq S \cap \beta S \beta^{-1} = S \cap \alpha S \alpha^{-1}$$

ve böylece $S_b \subseteq S \cap \alpha S \alpha^{-1}$ dir.

Lemma 3.1.1 den $[S : S_b] < \infty$ olduğundan $[S : S \cap \alpha S \alpha^{-1}] < \infty$ dur. Böylece $S = SL(n, Z)$ $G = GL(n, Q)$ de dingindir.

3.1.2. Tanım

G , sonlu Ω kümesi üzerinde bir permutasyon grubu olsun. Eğer G nin Ω üzerindeki etkisi geçişli ve G nin her öz altgrubunun bütün yörüngeleri sonlu ise G ye *barely transitive grup* denir.

Barely transitive permutasyon kavramını ilk defa Hartley takdim etmiştir [3].

3.1.3. Lemma

Bir G sonsuz grubunun sadık barely transitive grup olarak gösterilebilmesi için gerek ve yeter koşul G grubunun $\bigcap_{x \in G} H^x = \{1\}$ ve G nin her öz altgrubu için $[K : K \cap H] < \infty$ olacak şekilde bir H altgrubuna sahip olmasıdır.

İspat

H in G içindeki kosetlerinin kümesi S olsun. $S = \{xH : x \in G\}$ dir.

$\forall g \in G, xH \in S$ için

$$\begin{aligned} G \times S &\rightarrow S \\ (g, xH) &\rightarrow gxH \end{aligned}$$

olmak üzere,

(i) $1 \in G$ için $1xH = xH$ ve

(ii) $\forall g, k \in G, xH \in S$ için $(gk)xH = g(k(xH))$ olduğundan G, S üzerine soldan çarpma şeklinde etki eder.

$$\begin{aligned} \varphi : G &\rightarrow \text{Sym}(S) \\ g &\rightarrow \varphi(g) \end{aligned}$$

ve $\varphi(g) \in \text{Sym}(S)$ olmak üzere

$$\varphi(g) : S \rightarrow S$$

$$xH \rightarrow (xH)^g = gxH$$

olsun.

$$g \in \text{Ker}\varphi \Leftrightarrow \varphi(g) = I_S$$

$$\Leftrightarrow gxH = xH$$

$$\Leftrightarrow x^{-1}gx \in H$$

$$\Leftrightarrow g \in xHx^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in G \text{ için } g \in xHx^{-1}$$

Bundan dolayı $\text{Ker}\varphi = \bigcap_{x \in G} x^{-1}Hx$ dir. $\text{Ker}\varphi = 1$ olduğundan $\bigcap_{x \in G} x^{-1}Hx = 1$ dir. G barely

transitive olduğundan $\forall K < G$ için $|\alpha^K|$ sonludur. O halde $|\alpha^K| = [K : K_\alpha] < \infty$ dur. G_α , α nın G deki nokta dengeleyeni olsun.

$$x \in G_\alpha \cap K \Leftrightarrow x \in G_\alpha \wedge x \in K$$

$$\Leftrightarrow \alpha^x = \alpha \wedge x \in K$$

$$\Leftrightarrow x \in K_\alpha$$

Dolayısıyla, $G_\alpha \cap K = K_\alpha$ dir. O halde $[K : H \cap K] = [K : G_\alpha \cap K] = [K : K_\alpha] < \infty$ sağlanır.

3.1.2. Örnek (Barely Transitive Grup)

G, Ω kümesi üzerinde lokal sonlu barely transitive permutasyon grubu ve H bir nokta dengeleyeni olsun. Lemma 3.1.3 ten G nin her K öz alt grubu için $K \cap H$ arakesiti K da sonlu indekse sahiptir.

Özel olarak verilen her $g \in G$ için $H^{g^{-1}}$ grubu G nin bir öz alt grubudur. Gerçekten $H^{g^{-1}} = G$ olsun. O zaman

$$g^{-1}Hg = G \Rightarrow H = gGg^{-1} \Rightarrow H = G \text{ dir.}$$

Bu ise H nokta dengeleyeninin öz olmasıyla çelişir. Buradan $[H^{g^{-1}} : H^{g^{-1}} \cap H] < \infty$ dur. g ile eşleniğini alırsak $[H : H \cap H^g] < \infty$ dur. Böylece H, G de dingin altgruptur.

3.1.3. Tanım

G bir grup, X ve Y G nin iki altgrubu olsun. Eğer $[X : X \cap Y] < \infty$ ve $[Y : X \cap Y] < \infty$ ise X ve Y *akrandır* denir.

3.1.4. Lemma

G bir grup, H G nin altgrubu olsun. H nin G de dingin altgrup olması için gerek ve yeter koşul $\forall x, y \in G$ için H^x ve H^y nin akran olmasıdır.

İspat

Önce H, G de dingin altgrup olsun. O zaman $[H : H \cap H^{yx^{-1}}] < \infty$ dur. Böylece x ile eşleniğini alırsak $[H^x : H^x \cap H^y] < \infty$ elde edilir. Benzer olarak $[H : H \cap H^{xy^{-1}}] < \infty$ dur. y ile eşleniğini alırsak $[H^y : H^y \cap H^x] < \infty$ elde edilir. Böylece H^y ile H^x akrandır. Tersine olarak eğer $\forall x, y \in G$ için H^x ile H^y akran ise $[H^x : H^x \cap H^y] < \infty$ ve $[H^y : H^y \cap H^x] < \infty$ dur.

Özel olarak $x = 1$ alınırsa $\forall y \in G$ için $[H : H \cap H^y] < \infty$ elde edilir. Böylece H, G de dingindir.

3.1.3. Örnek (Açık Tıkız Altgruplar)

G topolojik grup uzayı olsun. (G bir topolojik uzay, grup işlemi ve ters işlem süreklidir). H açık tıkız altgrubu G de dingindir.

İspat

H açık olduğundan $\forall g \in G$ için $H^g = g^{-1}Hg$ açıktır ve $H \cap H^g \leq H$ dir. H nın tıklılığından X , G de H nın sol transversali bir tam kümesi olmak üzere $H = \bigcup_{x_i \in X} (H \cap H^g)$ açık örtüsü sonlu alt örtüye sahiptir. Böylece bir $n \in \mathbb{N}$ vardır öyle

ki $H = \bigcup_{i=1}^n (H \cap H^g)$ dir. O halde $[H : H \cap H^g] < \infty$ dur.

3.1.4. Örnek (Lokal sonlu graph)

Γ graph ı $E \subset V \times V$ olmak üzere V (köşe) ve E (kenar) kümelerinin $(V; E)$ ikilileridir. Bir $(\alpha, \beta) \in E$ kenarı α yı β ya birleştirir ve β , α ya *bitişiktir (komşudur)* denir. α nın derecesi α ya bitişik olan köşelerin sayısıdır. Eğer α ve β , bir Γ graph ının iki köşesiye, α dan β ya giden direkt yolun uzunluğu olan d , $d+1$ köşenin bir listesidir;

$\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d = \beta$ öyle ki $\forall i = 1, 2, \dots, d$ için $(\alpha_{i-1}, \alpha_i) \in E$ dir.

$\Gamma = (V, E)$ bağlantılı lokal sonlu graph (yani her köşesinin derecesi sonlu) olsun. Eğer bir G grubunu

$$G = \text{Aut}(\Gamma) = \{g \in \text{Sym}(V) : (a, b) \in E \Leftrightarrow (g(a), g(b)) \in E\}$$

olarak alırsak $\forall a \in V$ için $\text{Stab}_G(a) = G_a$ G de dingindir.

İspat

$\forall x \in G$ için $[G_a : G_a \cap G_a^x] < \infty$ olduğunu göstermeliyiz. Teorem 2.1 den $G_a^x = G_{x(a)}$ dir. $G_{x(a)} = G_b$ diyelim. $\forall a, b \in V$ için G_a ve G_b nin akran olduğunu göstermek yeterlidir.

İki köşe arasındaki uzaklığı a dan b ye en kısa yol olarak tanımlayalım ve bunu $d(a,b)$ ile gösterelim. Şimdi $\delta = d(a,b) < \infty$ olsun. Γ bağlantılı lokal sonlu graph olduğundan $C(a,\delta) = \{v \in V : d(a,v) = \delta\}$ sonludur.

G_a altında b nin yörüngesi $G_a(b) = \{g(b) : g(b) \in G_a\}$ olup bir $g(b) \in G_a(b)$ için otomorfizma uzaklıkları koruduğundan $\delta = d(a,b) = d(a,g(b))$ dir. O halde $g(b) \in C(a,\delta)$ dir. Buradan $G_a(b) \subseteq C(a,\delta)$ dir. Bundan dolayı $|G_a(b)| \leq |C(a,\delta)|$ ve $C(a,\delta)$ sonlu olduğundan $|G_a(b)| < \infty$ dur. Aynı zamanda $(G_a)_b = \{g \in G_a : g(b) = b\} = G_a \cap G_b$ dir. O halde $|G_a(b)| = |G_a : (G_a)_b| = |G_a : G_a \cap G_b| < \infty$ dur. Böylece G_a ve G_b akrandır.

3.1.5. Örnek (Tamamen İlkel Olmayan Gruplar)

G, Ω üzerine geçişli etki eden bir permutasyon grubu olsun. Δ, Ω nın boştan farklı bir altkümesi olsun. Eğer $\forall g \in G$ için $g(\Delta) = \Delta$ veya $g(\Delta) \cap \Delta = \emptyset$ ise Δ ya G -blok denir. Bundan başka her $\Sigma \subset \Omega$ sonlu kümesi için Σ yı kapsayan bir Δ sonlu G -bloğu varsa G ye *tamamen ilkel olmayan grup* denir.

Eğer G, Ω üzerinde tamamen ilkel olmayan grup ise Ω da herhangi bir noktanın dengeleyeni G de dingindir.

İspat

G_x, x in G de dengeleyeni olsun. $G_x = \{g \in G : g(x) = x\}$ dir. $\forall g \in G$ ve $\forall x \in \Omega$ için $G_x^g = G_{g(x)}$ olduğundan herhangi bir $\alpha, \beta \in \Omega$ için G_α ve G_β nin akran olduğunu göstermek yeterlidir. $G_\alpha \cap G_\beta = (G_\alpha)_\beta$ olduğundan $|G_\alpha : (G_\alpha)_\beta| < \infty$ olması için gerek ve yeter şart G_α ya göre β nin yörüngesinin sonlu olmasıdır. Yani $|G_\alpha)_\beta| < \infty$ olmasıdır. Tam ilkel olmayan grubun tanımına göre bir sonlu Δ bloğu vardır, öyle ki $\{\alpha, \beta\} \subseteq \Delta$ dir. $\forall g \in G_\alpha$ için $\alpha = g(\alpha)$ dir.

Δ blok ve $\forall g \in G_\alpha$ için $g(\alpha) = \alpha \in g(\Delta) \cap \Delta$ olduğundan $g(\Delta) = \Delta$ dir. O zaman β nin G_α ya göre yörüngesi sonludur, yani $\beta^{G_\alpha} = \{g(\beta) : g \in G_\alpha\} \subseteq \Delta$ ve Δ sonlu olduğundan $|\beta^{G_\alpha}| < \infty$ dur. Böylece $[G_\alpha : (G_\alpha)_\beta] = [G_\alpha : G_\alpha \cap G_\beta] < \infty$ dur. Buradan G_α ile G_β akrandır. Bu durumda $[G_\alpha : G_\alpha \cap G_\alpha^x] < \infty$ olup G_α G de dingindir.

3.1.6. Örnek (Lokal Sonlu Gruplar)

G , sayılabilir lokal sonlu grup olsun. O zaman, $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ olacak şekilde $G_1 \leq G_2 \leq \dots$ sonlu altgruplarını bulabiliriz. Eğer $N_i \triangleleft G_i$ ise o zaman $N := \langle N_i \mid i \in I \rangle$ G de dingindir.

İspat

$g \in G$ olsun. O zaman bir $i \in I$ için $g \in G_i$ dir. Böylece her $j \geq i$ için $g \in G_j$ dir. Eğer her $j \geq i$ için $N_j \triangleleft G_j$ ise $N_j^g = N_j$ dir. Şimdi, $L := \langle N_j \mid j \geq i \rangle$ ve $K = \langle N_k \mid k < i \rangle$ olsun. Öncelikle önce $N = \langle L, K \rangle$ olduğunu gösterelim. G sayılabilir ve lokal sonlu ve bütün N_k lar sonlu olduğundan $K = \langle N_k \mid k < i \rangle = \langle N_1, N_2, \dots, N_{i-1} \rangle$ sonlu buluruz. Şimdi $k < i$ ve $L \triangleleft N$ olduğunu gösterelim. Gerçekten $k < i$ ve her $j \geq i$ için $x \in G_j$ verildiğinde $N_j \triangleleft G_j$ olduğundan $N_j^x = N_j$ dir. Bu durumda her $x \in N$ için $L^x = L$ dir. Buradan $L \triangleleft N$ dir. Bu durumda $N = \langle L, K \rangle$ olduğu açıktır. K sonlu olduğundan $[N : L]$ sonludur. Her $j \geq i$ için $N_j^g = N_j \leq N^g$ olduğundan, $L \leq N \cap N^g$ ve bu nedenle $[N : N \cap N^g] \leq [N, L] < \infty$ dur. Dolayısıyla N, G de dingindir.

Aşağıdaki teoremi kullanarak örnek verelim:

3.1.4. Teorem

G bir grup ve H , G nin bir altgrubu olsun. O zaman her $g \in G$ için $[H : H \cap H^g] \leq 2$ olması için gerek ve yeter şart G nin öyle bir normal N altgrubu vardır ki; ya

(i) $H \leq N$ ve $[N : H] \leq 2$ dir

veya,

(ii) $N \leq H$ ve $[H : N] \leq 2$ dir. [4]

3.1.7. Örnek

V , p elemanlı cismin üzerinde olabildiğince geniş (muhtemelen sonsuz) boyutlu bir vektör uzayı ve A , V nin yeterince büyük otomorfizmalarının bir grubu olsun öyle ki; A altında H in yörüngelerinin V deki kesişimi geniş boyuta sahiptir. Son olarak G , V üzerindeki A nin hareketinden elde edilen yarı direkt çarpım olsun. Bu durumda H , V de dingindir.

İspat

$V = Z_p \times Z_p \times \dots \times Z_p \times \dots = \text{Dr}_{i \in \mathbb{N}}(Z_p)^i$ alalım.

$$\begin{aligned} L_i^j : V &\rightarrow V \\ e_i &\rightarrow e_j \\ e_j &\rightarrow e_i \\ e_k &\rightarrow e_k \end{aligned} \quad k \notin \{i, j\}$$

otomorfizmasını tanımlayalım.

$H = \langle B \setminus \{e_i\} \rangle$ olduğunu kabul edebiliriz. $V = \langle e_i \rangle \times H$ olduğu açıktır. $H \cap H^{L_i}$ nin V de 2 boyutlu olduğunu elde ederiz. Buradan $[H : H \cap H^{L_i}] = p$ dir. Şimdi $A = \langle L_i^i \mid i \in \mathbb{N} \rangle$ ve $G = V \rtimes A$ alalım. Buradan $[H : H \cap H^{a_i}] = [H : H \cap H^a] < \infty$ dur. V abeliyandır, o halde $H^{a_i} = H^a$ dır. O halde H , G de dingindir.

3.2. Dingin Altgrupların Özellikleri

3.2.1. Tanım

G bir grup, $g \in G$ olsun. g nin G de sonlu sayıda eşleniği varsa g elemanına *FC-elemanı* denir. Yani g bir FC- elemanı ise $[G : C_G(g)] < \infty$ dur.

G nin tüm FC-elemanlarının oluşturduğu altgruba G nin *FC-merkezi* denir. Eğer grubun kendisi FC-merkezine eşit ise bu gruba *FC-grubu* denir. Yani G , FC-grubu ise G deki bütün elemanların eşlenik sınıfları sonlu olmalıdır.

3.2.2. Tanım

Eğer G nin her altgrubu G de dingin ise G ye *tamamen dingin grup (TIN-grup)* denir.

3.2.1. Örnek

Her FC-grubu bir TIN-gruptur.

İspat

G bir FC-grubu olsun. O zaman G nin herhangi bir H altgrubu ve herhangi bir $x \in G$ için $[H : H \cap H^x] < \infty$ olduğunu göstermeliyiz. G bir FC-grubu olduğundan $\forall x \in G$ için $[G : C_G(x)] < \infty$ dur. H ile arakesitini alırsak $[H \cap G : H \cap C_G(x)] < \infty$ olur. H, G nin altgrubu olduğundan $H \cap G = H$ dır.

Ayrıca $H \cap C_G(x) = C_H(x)$ tir. Gerçekten

$$\forall h \in H \cap C_G(x) \Leftrightarrow h \in H \text{ ve } h \in C_G(x)$$

$$\Leftrightarrow h \in H \text{ ve } h^x = h$$

$$\Leftrightarrow h \in C_H(x)$$

olduğundan $H \cap C_G(x) = C_H(x)$ tir.

O halde $\forall x \in G$ için $[H : C_H(x)] < \infty$

Şimdi $C_H(x) \leq H \cap H^x$ olduğunu gösterelim. $C_H(x) \leq H$ olduğu açıktır.

$h \in C_H(x)$ olsun $\Leftrightarrow hx = xh$

$$\Leftrightarrow x(hx)x^{-1} = x(xh)x^{-1}$$

$$\Leftrightarrow xh(x^{-1}x)xx^{-1} = x(xhx^{-1})$$

$$\Leftrightarrow (xhx^{-1})x = x(xhx^{-1})$$

$$\Leftrightarrow h^{x^{-1}}x = xh^{x^{-1}}$$

$$\Leftrightarrow h^{x^{-1}} \in C_H(x) \leq H$$

$$\Leftrightarrow h \in (C_H(x))^x \leq H$$

Buradan $C_H(x) \leq H \cap H^x$ ve $\forall x \in G$ için $[H : C_H(x)] < \infty$ olduğundan $[H : H \cap H^x] < \infty$ dur. O halde H, G de dingindir.

Yukarıda verilen örnekten de anlaşılacağı gibi TIN-grup FC-gruplarının bir genellemesidir. Böylece her FC-grubu bir TIN-gruptur ancak bunun tersi doğru değildir. Şimdi FC-grup olmayan ancak TIN- grup olan bir grup örneği verelim.

3.2.2. Örnek

A sonsuz abeliyan $2'$ -grubu olsun.

$$t : A \rightarrow A$$

$$x \rightarrow x^{-1}$$

dönüşümü A nın mertebesi 2 olan sabit noktasız bir otomorfizmasıdır. Gerçekten eğer;

$$x^t = x \Rightarrow x^{-1} = x \Rightarrow x^2 = 1$$

dir. Fakat A , $2'$ grup olduğundan A nın dışında mertebesi 2 olan elemanı yoktur. Dolayısıyla $x=1$ dir. Yani t , sabit noktasızdır.

$G = A \rtimes \langle t \rangle$ yarı direkt çarpım grubunu alalım.

(i) G , FC-grubu değildir.

(ii) G , TIN-gruptur.

İspat

$$(i) C_G(t) = \{ g \in G : g^t = g \}$$

İddia ediyoruz ki $C_G(t) = \langle t \rangle$ dir. $g \in C_G(t)$ olsun. O zaman bir $x \in A$ için $g = xt$ dir ve $g \in C_G(t)$ olduğundan $g^t = g$ dir. Böylece $(xt)^t = xt$ dir. Fakat o zaman $x^t t = xt$ ve böylece $x^2 = 1$ dir. Fakat A bir sonsuz abeliyan $2'$ -grup olduğundan $x = 1$ dir ve böylece $g = xt = t$ olduğundan $C_G(t) = \langle t \rangle$ dir. Bu durumda $[G : C_G(t)] = [G : \langle t \rangle]$ sonsuzdur. O halde G FC-grup değildir.

(ii) H , G nin herhangi bir altgrubu olsun. H ın G de dingin olduğunu göstermeliyiz. $[H : H \cap A] = |HA/A| \leq |G/A| \leq \infty$ dir. İddia ediyoruz ki; $H \cap A \triangleleft G$ dir. Gerçekten $H \cap A \leq A$ ve A abeliyan olduğundan her $a \in A$ $(H \cap A)^a = H \cap A$ dir. Her $x \in A \cap A$ ve $at \in G$ için $t A$ nın involisyon otomorfizması olduğundan

$$x^{at} = x^t = x^{-1} \in H \cap A$$

dir. Böylece $H \cap A$ G de normaldir. Bundan başka $\forall g \in G$ için $(H \cap A)^g = H \cap A \leq H^g$ ve $H \cap A \leq H$ dir. Böylece $H \cap A \leq H \cap H^g$ dir. Bundan dolayı $[H : H \cap H^g] \leq [H : H \cap A] < \infty$ ve böylece G bir TIN-gruptur.

3.2.1. Gözlem

Yukarıdaki örnekte G sonlu bir FC-grubudur. Yani $A \triangleleft G$, A bir FC-grubu ve G/A sonludur.

Her sonlu FC-grubunun bir TIN-grup olduğu düşünülebilir ancak aşağıdaki örnek bunun doğru olmadığını gösterir.

3.2.3. Örnek

A sonsuz abeliyan grup ve t , G nin mertebesi 2 olan otomorfizması ve $A = \langle a_1 \rangle \times \langle a_1^t \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \langle a_2^t \rangle \times \dots$ olmak üzere $G = A \rtimes \langle t \rangle$ olsun. O halde $[G : A] = 2$ ve böylece A abeliyan grup olduğundan G sonlu bir FC-grubudur.

$C = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \dots$ olsun. Buradan $C^t = \langle a_1^t \rangle \times \langle a_2^t \rangle \times \dots$ dir. O zaman $C \cap C^t = 1$ dir. Bundan dolayı $[C : C \cap C^t]$ sonsuzdur. Böylece C, G de dingin değildir.

3.2.1. Lemma

İki dingin grubun arakesiti de bir dingin gruptur.

İspat

H ve K , G de dingin gruplar olsun. O halde $\forall g \in G$ için $[H : H \cap H^g] < \infty$ ve $[K : K \cap K^g] < \infty$ dur. Buradan $[H \cap K : K \cap H \cap H^g] < \infty$ ve $[H \cap K : K \cap H \cap K^g] < \infty$ elde ederiz. O zaman $[H \cap K : (K \cap H \cap H^g) \cap (K \cap H \cap K^g)] < \infty$ dur. Böylece $[H \cap K : (H \cap K) \cap (H \cap K)^g] < \infty$ olur. O halde $H \cap K$ G de dingindir.

3.2.2. Lemma

H G de dingin grup ve $K \leq G$ olsun. O zaman $H \cap K$, K da dingindir.

İspat

H, G de dingin olduğundan verilen herhangi bir $k \in K$ için $[H : H \cap H^k] < \infty$ olur. $H \cap K$ nın K da dingin olduğunu göstermek için herhangi bir $k \in K$ için $[H \cap K : (H \cap K) \cap (H \cap K)^k] < \infty$ olduğunu göstermeliyiz.

$H \cap H^k \cap K = H \cap H^k \cap K \cap K^k = (H \cap K) \cap (H^k \cap K^k) = (H \cap K) \cap (H \cap K)^k$ olduğu göz önüne alınırsa $[H \cap K : (H \cap K) \cap (H \cap K)^k] < \infty$ olur. Böylece $H \cap K$, K da dingindir.

3.2.3. Lemma

H, G nin dingin altgrubu, K H nin sonlu indeksli bir altgrubu ise K, G nin dingin altgrubudur.

İspat

H, G de dingin olduğundan $\forall g \in G$ için $[H : H \cap H^g] < \infty$ ve K H nin sonlu indeksli altgrubu olduğundan $[H : K] < \infty$ dur. O zaman $\forall g \in G$ için $[K : K \cap K^g] < \infty$ olduğunu göstermeliyiz.

H G nin dingin altgrubu olduğundan $\forall g \in G$ için $[H : H \cap H^g] < \infty$ dur. g ile eşleniğini alırsak $[H^g : H^g \cap H^{g^2}] < \infty$ olur. H ile arakesitini alırsak $[H \cap H^g : H \cap H^g \cap H^{g^2}] < \infty$ dur. O zaman $[H : H \cap H^g \cap H^{g^2}] = [H : H \cap H^g][H \cap H^g : H \cap H^g \cap H^{g^2}] < \infty$ dur. $[H : H \cap H^g \cap H^{g^2}]$ nin K ile arakesiti alınır $[K \cap H : K \cap H \cap H^g \cap H^{g^2}] < \infty$ dur. g ile eşleniğini alırsak $[K^g : K^g \cap H^g \cap H^{g^2} \cap H^{g^3}] < \infty$ olur. Ayrıca $[H : K]$ sonlu olduğundan $[H^g : K^g] < \infty$ ve böylece $[H^g : K^g \cap H^g \cap H^{g^2} \cap H^{g^3}] < \infty = [H^g : K^g][K^g : K^g \cap H^g \cap H^{g^2} \cap H^{g^3}] < \infty$ ve buradan $[H^g : K^g \cap H^g \cap H^{g^2} \cap H^{g^3}] < \infty$ dur. H ile arakesitini alırsak $[H \cap H^g : H \cap K^g \cap H^g \cap H^{g^2} \cap H^{g^3}] < \infty$ ve böylece

$[H : H \cap K^g \cap H^g \cap H^{g^2} \cap H^{g^3}] < \infty = [H : H \cap H^g][H \cap H^g : H \cap K^g \cap H^g \cap H^{g^2} \cap H^{g^3}]$
 $< \infty$ ve buradan $[H : H \cap K^g \cap H^g \cap H^{g^2} \cap H^{g^3}] < \infty$ dur.

Ayrıca $[H : K] < \infty$ ve $[H : H \cap H^g \cap K^g \cap H^{g^2} \cap H^{g^3}] < \infty$ olduğundan
 $[H : H \cap H^g \cap K \cap K^g \cap H^{g^2} \cap H^{g^3}] < \infty$ dur.

Böylece $H \cap H^g \cap K \cap K^g \cap H^{g^2} \cap H^{g^3} \leq K \cap K^g$ olduğundan $[H : K \cap K^g] < \infty$ olur.
 Buradan $\forall g \in G$ için $[K : K \cap K^g] < \infty$ dur. O halde K, G de dingindir.

3.2.4. Lemma

$H \leq G$ nin dingin altgrubu, $K \leq H$ ve $[K : H] < \infty$ olsun. Bu durumda K, G de dingindir.

İspat

H, G de dingin olduğundan $\forall g \in G$ için $[H : H \cap H^g] < \infty$ olur.
 $\forall g \in G$ için $[K : K \cap K^g] < \infty$ olduğunu göstermeliyiz.

$[K : H] < \infty$ ve $\forall g \in G$ için $[H : H \cap H^g] < \infty$ olduğundan $[K : H][H : H \cap H^g] =$
 $[K : H \cap H^g] < \infty$ dur. Ayrıca $H \leq K$ olduğundan $H \cap H^g \leq K \cap K^g$ dir.
 Böylece $[K : K \cap K^g] \leq [K : H \cap H^g] < \infty$ olur. Buradan $[K : K \cap K^g] < \infty$ dur. O
 halde K, G de dingindir.

3.2.5. Lemma

Eğer X, G nin dingin altgrubu ve $Y \leq G$ olmak üzere X ile Y akran ise, $Y \leq G$ nin dingin altgrubudur.

İspat

$g \in G$ olsun. Hipotezden X G nin dingin altgrubu olduğundan $[X : X \cap X^g] < \infty$ dur. X ile Y akran olduğundan $[X : X \cap Y] < \infty$ ve $[Y : X \cap Y] < \infty$ dur. $\forall g \in G$ için $[Y : Y \cap Y^g] < \infty$ olduğunu göstermek istiyoruz.

$[X : X \cap X^g] < \infty$ ise Y ile arakesitini alırsak $[X \cap Y : X \cap Y \cap X^g] < \infty$ dur. Ayrıca $[Y : X \cap Y] < \infty$ olduğundan $[Y : X \cap Y][X \cap Y : X \cap Y \cap X^g] < \infty = [Y : X \cap Y \cap X^g] < \infty$ dur.

$[X : X \cap Y] < \infty$ ise g ile eşleniğini alırsak $[X^g : X^g \cap Y^g] < \infty$ ve X ile arakesitini alırsak $[X \cap X^g : X \cap X^g \cap Y^g] < \infty$ dur. Fakat $[X : X \cap X^g] < \infty$ olduğundan $[X : X \cap X^g][X \cap X^g : X \cap X^g \cap Y^g] = [X : X \cap X^g \cap Y^g] < \infty$ dur. Y ile arakesitini alırsak $[Y \cap X : Y \cap X \cap X^g \cap Y^g] < \infty$ dur. $[Y : X \cap Y] < \infty$ ve $[Y \cap X : Y \cap X \cap X^g \cap Y^g] < \infty$ olduğundan $[Y : X \cap Y][Y \cap X : Y \cap X \cap X^g \cap Y^g] = [Y : Y \cap X \cap X^g \cap Y^g] < \infty$ dur. Fakat $Y \cap X \cap X^g \cap Y^g \leq Y \cap Y^g$ olduğundan $\forall g \in G$ için $[Y : Y \cap Y^g] < \infty$ olur. O halde Y , G nin dingin altgrubudur.

3.2.3. Tanım

G bir grup olsun. Her $1 \neq g \in G$ için $g \notin N_g$ ve $[G : N_g] < \infty$ olacak şekilde $N_g \triangleleft G$ normal altgrubu varsa G ye *residually sonlu grup* denir.

3.2.6. Lemma

- (i) Eğer H , G de sonsuz basit dingin grup ise $H \triangleleft G$ dir.
- (ii) Eğer G basit grup ve H , G nin öz dingin altgrubu ise H residually sonlu gruptur.
- (iii) Eğer H , G nin dingin altgrubu ve $N \triangleleft G$ ise HN , G de dingindir.

İspat

(i) H d'ingün olduğundan $\forall g \in G$ için $[H : H \cap H^g] = n < \infty$ dur. $K = H \cap H^g$ diyelim. K nın H deki kosetlerinin kümesi $S = \{Kx_1, Kx_2, \dots, Kx_n\}$ olsun. H, S ye sağ çarpım olarak etki eder.

$$\begin{aligned} \forall x \in H \text{ için } \varphi_x : S &\rightarrow S \\ Kx_i &\rightarrow Kx_i x \end{aligned}$$

dönüşümü bire bir ve örtendir. Gerçekten;

$$\varphi_x(Kx_i) = \varphi_x(Kx_j) \Leftrightarrow Kx_i x = Kx_j x \Leftrightarrow Kx_i = Kx_j$$

olduğundan φ_x birebirdir ve $\forall Kx_i x \in S$ için $Kx_i \in S$ olduğundan φ_x örtendir. Dolayısıyla $\varphi_x \in \text{Sym}(S)$ dir. O halde

$$\begin{aligned} \varphi : H &\rightarrow \text{Sym}(S) \cong \text{Sym}(n) \\ x &\rightarrow \varphi_x \end{aligned}$$

olarak tanımlanan bir homomorfizma vardır. Gerçekten;

$$\begin{aligned} \forall x, y \in H \text{ için } \varphi(xy) &= \varphi_{xy} \quad , \quad \varphi_x : S \rightarrow S \quad , \quad \varphi_y : S \rightarrow S \\ Kx_i &\rightarrow Kx_i x \quad Kx_i \rightarrow Kx_i y \\ \varphi_{xy}(Kx_i) &= Kx_i(xy) = (Kx_i x)y = \varphi_y(\varphi_x(Kx_i)) \end{aligned}$$

Bu her $Kx_i \in S$ için doğru olduğundan $\varphi(xy) = \varphi_{xy}$ dir. Böylece φ homomorfizma olduğundan $\text{Ker}\varphi \triangleleft H$ dir. O halde H basit grup olduğundan $\text{Ker}\varphi = \{1\}$ veya $\text{Ker}\varphi = H$ dir ve $\text{Ker}\varphi = \bigcap_{x \in H} (H \cap H^g)^x \leq H \cap H^g$ dir. Eğer $n > 1$ ise $\text{Ker}\varphi \leq H \cap H^g < H$ dir. Bu durumda $\text{Ker}\varphi \leq H$ olduğundan $\text{Ker}\varphi = \{1\}$ dir. Buradan $H, \text{Sym}(n)$ in bir altgrubuna

izomorftur. Bu da H ın mertebesinin sonsuz olmasıyla çelişir. O halde $n = 1$ dir. O halde $\forall g \in G$ için $[H : H \cap H^g] = n < \infty$ dir. Böylece $H \triangleleft G$ dir.

(ii) $\bigcap_{g \in G} H^g \triangleleft G$ olduğunu biliyoruz. Ancak G basit olduğundan $\bigcap_{g \in G} H^g = 1$ dir. O halde

her $h \in H$ için öyle bir $g \in G$ vardır, öyle ki $h \notin H \cap H^g$ dir. H dingin olduğundan $[H : H \cap H^g] < \infty$ dur. O zaman H da normal bir N_h altgrubu vardır, öyle ki $N_h \leq H \cap H^g$, $[H : N_h] < \infty$ dur. $h \notin H \cap N^G \geq N_h$ olduğundan $h \notin N_h$ dır. O halde H residually sonlu gruptur.

(iii) H, G de dingin, $N \triangleleft G$ olsun. $\forall g \in G$ için $[HN : HN \cap (HN)^g] < \infty$ olduğunu göstermeliyiz. $N \triangleleft G$ olduğundan

$$(HN)^g = g^{-1}HNg = g^{-1}Hg g^{-1}Ng = H^g N$$

dır. Ayrıca H, G de dingin olduğundan $\forall g \in G$ için $[H : H \cap H^g] < \infty$ dur. O halde bir $M \triangleleft H$ bulunabilir öyle ki $M \leq H \cap H^g$ ve $[H : M] < \infty$ dur. Böylece;

$$\begin{aligned} [HN : HN \cap (HN)^g] &= [HN : HN \cap H^g N] \\ &< [HN : MN \cap MN] \\ &= [HN : MN] \\ &= [HMN : MN] \\ &= [H : H \cap MN] \\ &= [H : M(H \cap N)] \\ &< [H : M] < \infty \end{aligned}$$

olur. Böylece $[HN : HN \cap (HN)^g] < \infty$ dur. O halde HN, G de dingindir.

3.2.7. Lemma

Dingin bir altgrubun homomorfik görüntüsü de dingindir.

İspat

H, G de dingin altgrup, $N \triangleleft G$ olsun. $\forall gN \in G/N$ için $[HN/N : (HN/N) \cap (HN/N)^{gN}] < \infty$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} [HN/N : (HN/N) \cap (HN/N)^{gN}] &= [HN/N : (HN/N) \cap (H^g N/N)] \leq [HN/N : HN \cap H^g N/N] \\ &= [HN : (HN) \cap (H^g N)] < \infty \text{ (Lemma 3.2.6 (iii) den)} \end{aligned}$$

Böylece $[HN/N : (HN/N) \cap (HN/N)^{gN}] < \infty$ dur.

3.2.8. Lemma

Bir TIN-grubun homomorfik görüntüsü de bir TIN-gruptur.

İspat

G , tamamen dingin grup ve N , G nin normal altgrubu ve $K \leq G$ olsun.

$[G/N : K/N] = [G : K]$ dir. Gerçekten $\bar{K} = K/N \leq G/N = \bar{G}$ ve $\Sigma = \{\bar{x}_i \bar{K} : \bar{x}_i \in \bar{G}\}$ olsun. O halde $|\Sigma| = [G/N : K/N]$ dir. Böylece $\Gamma = \{x_i K : x_i \in G\}$ olarak tanımlarsak o zaman $|\Gamma| = [G : K]$ dir.

$$\alpha : \Sigma \rightarrow \Gamma$$

$$\bar{x}_i \bar{K} \rightarrow x_i K$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm iyi tanımlı ve bire birdir. Gösterelim;

$$\bar{x}_i \bar{K}, \bar{y}_i \bar{K} \in \Sigma \text{ için } \bar{x}_i, \bar{y}_i \in \bar{G} \Rightarrow \bar{x}_i, \bar{y}_i \in G/N \Rightarrow x_i N, y_i N \in G$$

$$\bar{x}_i \bar{K} = \bar{y}_i \bar{K} \Leftrightarrow x_i N(K/N) = y_i N(K/N)$$

$$\Leftrightarrow y_i^{-1} x_i N(K/N) = K/N$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow y_i^{-1}x_iN \in K/N \\
&\Leftrightarrow y_i^{-1}x_i \in K \\
&\Leftrightarrow y_i^{-1}x_iK = K \\
&\Leftrightarrow x_iK = y_iK \\
&\Leftrightarrow \alpha(\overline{x_i} \overline{K}) = \alpha(\overline{y_i} \overline{K})
\end{aligned}$$

olduğundan α dönüşümü birebirdir ve iyi tanımlıdır. Şimdi de α dönüşümünün örten olduğunu gösterelim.

$x_iK \in \Gamma$ ise $x_i \in G$ ve $x_iN \in G/N$, $(x_iN)K/N \in \Sigma$ ve $\alpha(\overline{x_i} \overline{K}) = x_iN$ dir.

Böylece α dönüşümü birebir ve örten olduğundan $|\Gamma| = |\Sigma|$ dir. O halde $[G/N : K/N] = [G : K]$ dir. Lemma 3.2.7 den dolayı $\forall gN \in G/N$ için $[K/N : (K/N) \cap (K/N)^{gN}] < \infty$ dur.

Ayrıca $(K/N)^{gN} = K^g/N$ ve $(K/N) \cap (K/N)^{gN} \geq (K \cap K^g)/N$ olduğundan $[K/N : (K^g/N) \cap (K/N)] \leq [K/N : (K \cap K^g)/N] = [K : K \cap K^g] < \infty$ olur.

3.2.9. Lemma

G basit TIN-grup olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

- (i) G de birimden farklı her x ve y elemanı için $C_G(x)$ ile $C_G(y)$ akrandır.
- (ii) G de birimden farklı x torsiyon elemanı için $C_G(x)$ sonludur.

İspat

- (i) $1 \neq x \in G$ olsun. O zaman $N = \{y \in G : [C_G(x) : C_G(x) \cap C_G(y)] < \infty\} \triangleleft G$ dir. Gerçekten;

$y_1, y_2 \in N$ olsun. O zaman $[C_G(x) : C_G(x) \cap C_G(y_1)] < \infty$ ve $[C_G(x) : C_G(x) \cap C_G(y_2)] < \infty$ dir. Ayrıca $C_G(y_1) \cap C_G(y_2) \leq C_G(y_1 y_2)$ olduğundan $[C_G(x) : C_G(x) \cap C_G(y_1 y_2)] < \infty$ dir. Böylece $y_1 y_2 \in N$ dir. Ayrıca $C_G(y) = C_G(y^{-1})$ olduğundan $y \in N$ için $y^{-1} \in N$ dir. Böylece N, G nin bir altgrubudur.

Şimdi de N nin G de normal olduğunu gösterelim.

$g \in G$ ve $y \in N$ olsun. $[C_G(x) : C_G(x) \cap C_G(y)] < \infty$ olduğundan $[C_G(x)^g : C_G(x)^g \cap C_G(y)^g] < \infty$ dur. $C_G(x)$ ile arakesitini alırsak; $[C_G(x) \cap C_G(x)^g : C_G(x) \cap C_G(x)^g \cap C_G(y)^g] < \infty$ olur. G bir TIN grup ve dingin bir grubun her altgrubu dingin olduğundan $\forall g \in G$ için $[C_G(x) : C_G(x) \cap C_G(x)^g] < \infty$ dur. Böylece $[C_G(x) : C_G(x) \cap C_G(x)^g][C_G(x) \cap C_G(x)^g : C_G(x) \cap C_G(x)^g \cap C_G(y)^g] < \infty$ olduğundan $[C_G(x) : C_G(x) \cap C_G(x)^g \cap C_G(y)^g] < \infty$ dur.

Fakat $C_G(x) \cap C_G(x)^g \cap C_G(y)^g \leq C_G(x) \cap C_G(y)^g$ olduğundan $[C_G(x) : C_G(x) \cap C_G(y)^g] < \infty$ dur. Ayrıca $C_G(y)^g = C_G(y^g)$ olduğundan $y^g \in N$ dir. Böylece $N \triangleleft G$ dir. $1 \neq x \in N$ olduğunu biliyoruz. O halde N aşıkardır. Fakat G basit olduğundan $N = G$ dir. Böylece $\forall x, y \in G$ için $C_G(x)$ ile $C_G(y)$ akrandır.

(ii) $1 \neq x$, G de bir torsiyon elemanı olduğundan $x \in T(G)$ dir. Böylece $T(G) \neq 1$ dir. $K = \{a, b\} \subseteq T(G)$ olsun. (i) den dolayı $[C_G(x) : C_G(a) \cap C_G(x)] < \infty$ ve $[C_G(x) : C_G(x) \cap C_G(b)] < \infty$ dur. Böylece $[C_G(x) : C_G(x) \cap C_G(a) \cap C_G(b)] < \infty$ olduğundan $[C_G(x) : C_G(x) \cap C_G(K)] < \infty$ dur. Bu $C_G(K)$ nin sonsuz olduğunu gösterir.

$y \in C_G(K)$ olsun. O zaman $K \leq C_G(y)$ bir FC-gruptur. Dietzman Lemma dan $\langle K \rangle = \langle K^{C_G(a)} \rangle$ sonludur [2]. O halde $\langle K \rangle$ sonlu olduğundan $|xy^{-1}| < \infty$ dur. Böylece

$T(G) \leq G$ dir. Ayrıca $t \in T(G)$ için $|t| = n$ olsun. O zaman $\forall g \in G$ için $|g^{-1}tg| = n$ dir. Böylece $T(G) \triangleleft G$ dir.

$M = \{ m_1, m_2, \dots, m_r \}$, $T(G)$ nin sonlu bir altkümesi olsun. İspatın ilk kısmına benzer olarak $\langle M \rangle$ sonlu bulunur. Fakat G basit, $T(G) \neq 1$ ve $T(G) \triangleleft G$ olduğundan $T(G) = G$ dir. Böylece G lokal sonludur. Fakat lokal sonlu basit TIN-grup olmadığından bu bir çelişkidir. O halde kabulümüz yanlış olup $|C_G(x)|$ sonludur.

4. AKRANLIK ÖZELLİĞİ

H ve K bir G grubunun altgrupları olsun. Eğer $[H : H \cap K] < \infty$ ve $[K : H \cap K] < \infty$ ise H ve K ya *akrandır* denir.

Eğer H, G de tüm eşlenikleri ile akran ise H, G de dingindir.

4.1. Tanım

Eğer G nin birimden farklı herhangi iki altgrubu akran ise G grubuna *akranlık özelliğini sağlar* denir.

Eğer G akranlık özelliğini sağlıyorsa tamamen dingin gruptur.

4.1. Lemma

Eğer G akranlık özelliğini sağlıyorsa G nin herhangi bir homomorfik görüntüsü de akranlık özelliğini sağlar.

İspat

G akranlık özelliklerini sağlasın. $N \triangleleft G$, H ile K , G nin akran altgrupları olsun. G/N nin K/N ve H/N altgruplarının da akran olduğunu gösterelim.

$$[K/N : K/N \cap H/N] \leq [K/N : (K \cap H)/N] = [K : K \cap H] < \infty$$

ve

$$[H/N : K/N \cap H/N] \leq [H/N : (K \cap H)/N] = [H : K \cap H] < \infty$$

olur.

4.2. Lemma

Akranlık özelliğini sağlayan her grup sayılabilir.

İspat

G akranlık özelliğini sağlayan bir grup, $x_1 \in G$ olsun. $G = \langle x_1 \rangle$ ise G sayılabilir. Kabul edelim ki $\langle x_1 \rangle \neq G$ olsun. O zaman $x_2 \in G \setminus \langle x_1 \rangle$ vardır. Akranlık özelliğinden $[\langle x_1, x_2 \rangle : \langle x_1 \rangle] < \infty$ dur. Eğer $G = \langle x_1, x_2 \rangle$ ise G sayılabilir. Kabul edelim ki $\langle x_1, x_2 \rangle \neq G$ olsun. O zaman $x_3 \in G \setminus \langle x_1, x_2 \rangle$ vardır. Yine akranlık özelliğinden $[\langle x_1, x_2, x_3 \rangle : \langle x_1, x_2 \rangle][\langle x_1, x_2 \rangle : \langle x_1 \rangle] = [\langle x_1, x_2, x_3 \rangle : \langle x_1 \rangle] < \infty$ olur. Benzer olarak devam edilirse $[\bigcup_{i=1}^{\infty} \langle x_1, \dots, x_i \rangle : \langle x_1 \rangle] < \infty$ olması beklenirdi ancak $[\bigcup_{i=1}^{\infty} \langle x_1, \dots, x_i \rangle : \langle x_1 \rangle]$ sonsuzdur. Dolayısıyla $\bigcup_{i=1}^{\infty} \langle x_1, \dots, x_i \rangle = G$ dir. O halde G sayılabilir.

4.3. Lemma (P. Hall - Kulatilaka)

Her sonsuz lokal sonlu grup, sonsuz abeliyan altgruba sahiptir [5].

4.2. Tanım

Eğer G nin aşıkâr olmayan, sonlu üreteçli her altgrubunun sonlu indeksli bir öz altgrubu varsa G grubuna *lokal dereceli grup* denir.

4.4. Lemma

G aşıkâr olmayan torsiyon elemanı içeren lokal dereceli grup olsun. G nin birimden farklı herhangi iki öz altgrubu akran ise G lokal sonludur.

İspat

x , G nin sonlu mertebeli aşikar olmayan elemanı olsun. $\langle x \rangle = G$ ise G sonludur. O halde $\langle x \rangle < G$ olsun. H , G nin herhangi bir öz altgrubu olsun. O zaman hipotezden H ve $\langle x \rangle$ akrant olduğundan $[H : H \cap \langle x \rangle] < \infty$ dur. Fakat $\langle x \rangle$ sonlu olduğundan H sonludur. Buradan G nin her öz altgrubu sonludur.

Y G nin sonlu üreteçli altgrubu olsun. Lokal dereceli olma özelliğinden Y , sonlu indeksli öz altgrup içerir. Yani Y nin öyle bir M altgrubu vardır ki $[Y : M] < \infty$ dur. Fakat M sonlu olduğundan Y sonludur. Buradan G lokal sonludur.

Eğer bir grubun torsiyon elemanı yoksa bu grup lokal sonlu olmak zorunda değildir. Tamsayılar kümesini göz önüne alalım. Z nin herhangi iki öz altgrubu akrandır ve Z lokal derecelidir ancak lokal sonlu değildir.

4.5. Lemma

G , $1 \neq x$ torsiyon elemanını içeren lokal dereceli grup olsun. O zaman G nin birimden farklı herhangi iki öz altgrubunun akrant olması için gerek ve yeter şart bir p asalı için G nin C_p^∞ grubuna izomorfik olmasıdır.

İspat

Kabul edelim ki G , bir p asalı için C_p^∞ ile izomorfik olsun. G nin her öz altgrubu sonlu olduğundan herhangi iki öz altgrubu akrandır.

Karşıt olarak x , G nin sonlu mertebeli elemanı olsun. G nin herhangi bir öz altgrubu H için hipotezden H ile $\langle x \rangle$ akrant olduğundan $[H : H \cap \langle x \rangle] < \infty$ dur. $H \cap \langle x \rangle$ sonlu olduğundan H sonludur. Böylece G nin her öz altgrubu sonludur. Lemma 4.4 dan G lokal sonludur. Hall – Kulatilaka teoreminden her lokal sonlu grup sonsuz abeliyan altgrup içerir. Eğer G nin sonsuz abeliyan öz altgrup olsaydı, her öz altgrup sonlu olduğundan bu

bir çelişki olurdu. Dolayısıyla bu altgrup G ye eşittir. O halde G abeliyandır. Bu durumda G yi G_p maksimal p altgruplarının direkt çarpımı olarak yazabiliriz.

Eğer G nin elemanlarının mertebesini sonsuz sayıda asal bölerse, o zaman G bir sonsuz öz alt grubunu elde edilir. Ancak G nin bütün öz altgrupları sonlu olduğundan sadece sonlu sayıda asal G grubunun elemanlarının mertebesini böler. Her bir öz altgrup sonlu olduğu sürece G nin elemanlarının mertebesini sadece bir p asalı bölebilir. Buradan G abeliyan p gruptur.

φ dönüşümünü

$$\begin{aligned}\varphi : G &\rightarrow G_p \\ x &\rightarrow x^p\end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. Eğer G^p öz altgrup ise G^p sonludur. Eğer $\text{Ker}\varphi < G$ ise $G/\text{Ker}\varphi \cong G^p$ ve $\text{Ker}\varphi$ sonlu olduğundan G sonlu olur. Bu G nin sonsuz olması ile çelişir. O halde $\text{Ker}\varphi = G$ dir. Bu durumda G sonsuz elemanlı abeliyan p gruptur. Buradan $\text{Ker}\varphi = 1$ dir. Bu durumda $G^p = G$ dir ve G divisible abeliyan p gruptur. O halde $G \cong C_p^\infty$ dur.

4.1. Teorem (Pontryagin)

G sayılabilir torsiyonsuz abeliyan grup olsun. O zaman G nin serbest abeliyan olması için gerek ve yeter koşul sonlu ranklı her alt grubunun serbest abeliyan olmasıdır.

İspat

Farz edelim ki G , abeliyan olmasın ancak tüm altgrupları sonlu ranklı olsun. $\{g_1, g_2, \dots\}$ G nin üreteçlerinin sayılabilir kümesi ve sonlu G_1 , G deki tüm $m x \in \langle g_1 \rangle$ olacak şekildeki x lerden meydana gelsin. Açıkça G_1 in rankı 1 dir, böylece hipotezden sonsuz devirlidir.

O halde G/G_1 torsiyonsuz ve sayılabilir. Üstelik bu grubun sonlu ranklı altgrupları serbest abeliyandır. Gerçekten H/G_1 bir altgrup ise H sonlu ranklıdır ve buradan serbest abeliyan ve sonlu üreteçlidir. O halde H/G_1 serbest abeliyandır, sonlu üreteçli ve torsiyonsuzdur. Sonuç olarak G/G_1 G deki hipotezi sağlar.

Aynı yolla tüm $x + G_1$ lerden oluşan, öyle ki bazı pozitif m ler için $m(x+G_1) \in \langle g_2 + G_1 \rangle$ olacak şekilde G_2/G_1 tanımlanır. Böylece G_2/G_1 sonsuz devirli ve G/G_2 G deki hipotezi sağlar. Aynı yöntemle devam edilirse altgrupların sayılabilir artan zinciri $G_1 < G_2 < \dots$ öyle ki G_{i+1}/G_1 sonsuz devirli elde edilebilir. Bu sonsuz kümenin $x_1, x_2, \dots$ elemanlarının G yi ürettiğinin kanıtıdır. Buradan $G = \langle x_1, x_2, \dots \rangle$ de serbest abeliyan gruptur.

4.2. Teorem

G sonsuz abeliyan grup olsun. Eğer G akranlık özelliğini sağlıyorsa $G \cong \mathbb{Z}$ veya $G \cong C_p^\infty$ dur.

İspat

G sonsuz abeliyan grup olsun. D bir divisible grup ve R bir indirgenmiş grup olmak üzere $G \cong D \oplus R$ dir [2]. Aynı zamanda her D divisible grup, Q nun ve bazı p asalları için C_p^∞ un kopyalarının direkt toplamı olarak yazılabilir [2].

1.Durum: Eğer G torsiyonsuz grup ise G , C_p^∞ un herhangi bir kopyasını içermez. Böylece divisible kısım Q nun kopyalarının direkt toplamıdır. Ancak akranlık özelliğinden dolayı yalnızca bir kopyaya sahiptir. Diğer taraftan; $Q_p = \{\frac{m}{p^n} : m, n \in \mathbb{Z}\}$ için $Q_p/\mathbb{Z}$ sonsuz olduğundan $[Q_p : \mathbb{Z} \cap Q_p] > [Q_p : \mathbb{Z}] = \infty$ olup Q akranlık özelliğini sağlamaz. O zaman $G \cong R$ indirgenmiştir. Ayrıca Lemma 4.2 den G nin sayılabiliridir.

Şimdi G^n i göz önüne alalım. G reduced olduğundan $G \neq G^n$ olacak şekilde n vardır. Lemma 4.1 den akranlık özelliğini sağlayan herhangi bir grubun homomorfik görüntüsü de akranlık özelliğini sağlar. O zaman G/G^n akranlık özelliğini sağlar. Ayrıca bu grubun torsiyon elemanı vardır. O zaman G/G^n periyodik abeliyan ve lokal sonlu olduğundan Lemma 4.5 den $G/G^n \cong C_{p^\infty}$ elde ederiz. G/G^n sonlu exponentli olduğundan C_{p^∞} sonlu exponentli olmalıdır. Ancak C_{p^∞} sonsuz exponentli olduğundan $G/G^n \cong C_{p^\infty}$ olmasıyla çelişir. G torsiyonsuz olduğundan $G^n \neq 1$ dir. Böylece G/G^n aşikar olmayan gruptur. $H = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ G nin sonlu üreteçli altgrubu olsun. G torsiyonsuz olduğundan $H \cong Z \oplus Z \oplus \dots \oplus Z$ dir. Akranlık özelliğinden dolayı $H \cong Z$ dir. O halde G nin her sonlu üreteçli altgrubu devirlidir. G nin rankı 1 dir. Bu durumda Teorem 4.1 den G serbest abeliyandır. Bundan dolayı $G \cong Z$ dir.

2.Durum: G nin bir torsiyon elemanı varsa Lemma 4.5 ten dolayı $G \cong C_{p^\infty}$ dur.

4.3. Teorem

G sonlu grup, A , G nin abeliyan altgrubu olsun. Eğer A , G nin maksimal altgrubu ise G çözülebilirdir. [6]

4.6. Lemma

G aşikar merkezli sonlu grup olsun. Eğer A , G nin normal olmayan abeliyan, maksimal altgrubu ise o zaman G de bir minimal normal elemanter abeliyan p altgrubu N için $G=AN$ ve $A \cap N = 1$ dir. Aynı zamanda A , mertebesi p ile aralarında asal olan devirli gruptur. Üstelik G , derived uzunluğu en fazla 2 olan çözülebilir gruptur.

İspat

A , G nin abeliyan maksimal altgrubu olsun öyle ki A normal olmasın. A , G de normal olmadığından öyle bir $x \in G \setminus A$ vardır ki $A^x \neq A$ dır. A , G nin maksimal altgrubu ve

$x \notin A$ olduğundan $\langle A, x \rangle = G$ dir. $A^x \neq A$ ve A maksimal olduğundan $\langle A, A^x \rangle = G$ dir. Eğer $w \in A \cap A^x$ ise o zaman $\langle A, A^x \rangle \leq C_G(w)$ dir. Gerçekten $\forall a \in A$ için, A abeliyan olduğundan $a^{-1}wa = w$ dir. Böylece $A \leq C_G(w)$ dir.

Şimdi de $v \in A^x$ ise $v = b^x$ olacak şekilde $b \in A$ vardır. Fakat $w \in A \cap A^x$ olduğundan $w = c^x$ olacak şekilde $c \in A$ vardır.

$$v^{-1}wv = (b^x)^{-1}c^xb^x = (b^{-1}cb)^x = c^x = w$$

dir. Böylece $A^x \leq C_G(w)$ dir. O halde $\langle A^x, A \rangle \leq C_G(w)$ elde edilir. Fakat $\langle A, A^x \rangle$ olduğundan $C_G(w) = G$ dir. Buradan $w \in Z(G) = 1$ olduğundan $w = 1$ dir. Böylece $A \cap A^x = 1$ dir. Teorem 2.2 den G bir Frobenius gruptur. Bu da A nın G de Frobenius complement olduğunu gösterir. Buradan $G = AN$ ve $A \cap N = 1$ olacak şekilde N Frobenius çekirdeği vardır. Frobenius teoreminden, Frobenius çekirdeği G de normal ve nilpotent altgruptur. Böylece $G/N = AN/N = A/A \cap N$ olup A abeliyan olduğundan G/N çözülebilir, fakat N çözülebilir olduğundan G çözülebilirdir. Çözülebilir G grubunun minimal normal altgrubu elemanter abeliyan p gruptur. Bundan dolayı N elemanter abeliyan p gruptur.

Eğer $G = AM$ ve $1 \neq M \leq N$ olacak şekilde M normal altgrubu varsa $A \cap M \leq A \cap N = 1$ dir. Üstelik $|G| = \frac{|A||M|}{|A \cap M|} = \frac{|A||N|}{|A \cap N|} = |A||M| = |A||N|$ dir. O halde $|M| = |N|$ dir. Buradan $M=N$ elde edilir. Böylece N G nin normal altgrubudur.

N elemanter abeliyan p grup olduğundan A , mertebesi p nin kuvveti olan bir g elemanı içerir, o zaman $H = N\langle g \rangle$ bir p gruptur. Sonlu bir p grup nilpotenttir ve nilpotent bir grubun merkezi trivial olmadığından $Z(H) \neq 1$ dir.

$1 \neq x \in Z(H)$ olsun. Eğer $x \in A$ ise $C_G(x) \geq \langle A, N \rangle = G$ dir. Bu $x \in Z(G) = 1$, dolayısıyla $x = 1$ olduğunu gösterir. Ancak $x \neq 1$ olduğundan bu imkansızdır. Böylece

$x \in G \setminus A$ dir. O halde $\langle g \rangle \cap \langle g \rangle^x \leq A \cap A^x = 1$ dir ancak $\langle g \rangle \cap \langle g \rangle^x = \langle g \rangle$ olduğundan $g = 1$ elde edilir. Böylece $(|A|, p) = 1$ dir.

İddia: A devirlidir.

Frobenius teoreminden, eğer $p > 2$ ve devirli veya genelleştirilmiş quaternion ise Frobenius complement A'nın Sylow p altgrupları devirlidir. Eğer $p = 2$ ise A abeliyan olduğundan, Sylow altgrup genelleştirilmiş quaternion grup olamaz [2]. Buradan A'nın tüm Sylow altgrupları devirlidir. Bu da A'nın devirli olduğunu gösterir.

4.1. Önerme

M lokal sonlu G grubunun maksimal altgrubu olsun. Eğer M dingin ve abeliyan ise o zaman G, çözülebilirlik uzunluğu en fazla 3 olan çözülebilir gruptur.

İspat

M, G'nin maksimal altgrubu olduğundan $x \in G \setminus M$ için $\langle M, x \rangle = G$ dir. Eğer M, G'nin normal altgrubu ise o zaman $G/M = \langle x \rangle M/M \cong \langle x \rangle / (\langle x \rangle \cap M)$ olduğundan G/M abeliyan ve böylece $[G, G] \leq M$ dir. Fakat M abeliyan olduğundan $[G, G]$ abeliyandır. Buradan $G \geq [G, G] \geq 1$ dir ve G çözülebilirlik uzunluğu en fazla 2 olan çözülebilir bir gruptur.

Kabul edelim ki M, G de normal olmasın. M maksimal olduğundan $N_G(M) = M$ dir. O halde $M^x \neq M$ olacak şekilde bir $x \in G \setminus M$ vardır. O zaman $\langle M, M^x \rangle = G$ dir. Ayrıca M dingin olduğundan $[M : M \cap M^x] < \infty$ ve $[M^x : M \cap M^x] < \infty$ dur. O zaman $[G : M \cap M^x] = [\langle M, M^x \rangle : M \cap M^x] < \infty$ dir [7]. $G = \langle M, M^x \rangle \leq N_G(M \cap M^x)$ olduğundan $G = N_G(M \cap M^x)$ ve böylece $M \cap M^x \triangleleft G$ dir. O zaman $\bar{M} = M / (M \cap M^x)$ grubu $\bar{G} = G / (M \cap M^x)$ sonlu grubunun abeliyan maksimal

altgrubudur. $Z(\bar{G})$ yi göz önüne alalım. Eğer $Z(\bar{G})$, $\bar{M}$ tarafından içerilmez ise $\bar{M}$, $\bar{G}$ nin maksimal altgrubu olduğundan $\bar{M}Z(\bar{G}) = \bar{G}$ dir. Bir abeliyan grup ile merkezi genişlemesi yine abeliyan olduğundan $\bar{G} = \bar{M}Z(\bar{G})$ abeliyandır. Böylece G , çözülebilirlik uzunluğu en fazla 2 olan çözülebilir gruptur. $Z(\bar{G})$ nin $\bar{M}$ tarafından içerildiğini kabul edebiliriz. O zaman $Z(\bar{G}) = Z(\bar{G})^x \leq \bar{M}^x$ tir ve böylece $Z(\bar{G}) \leq \bar{M} \cap \bar{M}^x$ tir.

İddia: $Z(\bar{G}) = \bar{M} \cap \bar{M}^x$ tir.

Eğer $\bar{w} \in \bar{M} \cap \bar{M}^x$ ise, $C_G(\bar{w}) \geq \langle \bar{M}, \bar{M}^x \rangle = \bar{G}$ ve böylece $C_G(w) = G$ olduğundan $\bar{w} \in Z(\bar{G})$ dir. O halde $\bar{M} \cap \bar{M}^x \subseteq Z(\bar{G})$ dir. Buradan $\bar{M} \cap \bar{M}^x = Z(\bar{G})$ dir. Şimdi de $Z(\bar{G}) = \bar{1}$ olduğunu gösterelim. Gerçekten eğer, $a(M \cap M^x) \in M/(M \cap M^x) \cap M^x/(M \cap M^x)$ ise o zaman öyle $a_1 \in M$, $m_1 \in M \cap M^x$ vardır ki $a = a_1 m_1$ ve öyle $a_2 \in M^x$, $m_2 \in M \cap M^x$ vardır ki $a = a_2 m_2$ dir. O zaman $a_1 m_1 = a_2 m_2$ ve böylece $a_1 = a_2 m_2 m_1^{-1} \in M^x$ dir. Fakat $a_1 \in M$ olduğundan $a_1 \in M \cap M^x$ dir. O halde $a = a_1 m_1 \in M \cap M^x$ dir. Böylece $a(M \cap M^x) = \bar{1}$ ve $M \cap M^x = \bar{1}$ dir. O zaman $Z(\bar{G}) = \bar{1}$ elde edilir. Lemma 4.6 dan $\bar{G}$, Frobenius komplementi $\bar{M}$, Frobenius çekirdeği $\bar{N}$ ve $\bar{G} = \bar{M} \bar{N}$ olan Frobenius gruptur. Bu durumda $\bar{G}$ çözülebilirdir. $\bar{G} / \bar{N}$ nin abeliyan olduğundan $\bar{G}' \leq \bar{N}$ dir. Yani $(G/(M \cap M^x))' \leq N/(M \cap M^x)$ dir. O halde $G''(M \cap M^x) \leq M \cap M^x$ olduğundan $G'' \leq M \cap M^x$ dir. Böylece, M abeliyan olduğundan $G^{(3)} = 1$ dir.

4.3. Tanım

$M, \leq$ bağıntısına göre kısmi sıralı bir küme olsun. Boştan farklı her M_0 kümesi en az bir minimal eleman içeriyorsa, o zaman M ye *minimal şartını sağlar* denir.

4.2. Örnek

Minimal şartını sağlayan fakat TIN olmayan bir lokal sonlu G grubu vardır.

İspat

A sonsuz , minimal şartını sağlayan lokal sonlu abeliyan grup ve t , mertebesi 2 olan eleman olsun. $T = A \times A^t$ olsun. $t, (a, b^t)^t = (b, a^t)$ şeklinde T üzerine etki etsin. Bu etki aşağıdaki yolla düşünülebilir.

$$\begin{aligned} \varphi : A \times A &\rightarrow A \times A \\ (a, b) &\rightarrow (b, a) \end{aligned}$$

$\varphi, A \times A$ nın mertebesi 2 olan otomorfizması olsun. $G = (A \times A) \rtimes \langle \varphi \rangle$ olsun. $A \times \{1\}$ grubunu düşünelim. O zaman $[A \times A : (A \times \{1\})^t \cap (A \times \{1\})]$ sonsuzdur. Böylece $A \times A$, G de dingin değildir. G grubu minimal şartını sağlar ve lokal sonludur ancak TIN-grup değildir.

Örneğin $A = C_{p^\infty}$ veya herhangi bir Chernikov grup da minimal şartını sağlar.

4.3. Örnek

V, F_p cismi üzerinde sonsuz boyutlu vektör uzayı, T mertebesi p olan sonlu lineer transformasyon ve $G = V \rtimes \langle T \rangle$ olsun. O zaman $|G/V| = p$ ve V, G de maksimal, abeliyan ve G derived uzunluğu 2 olan çözülebilir gruptur.

Aşağıdaki örnek maksimal altgrupların dingin olduğunu, ancak normal olması gerekmediğini göstermektedir.

4.4. Örnek

A , sonsuz abeliyan grup olmak üzere, $G = A \times \text{Sym}(3)$ olsun. O zaman M , G de normal olmayan fakat M , G de dingin olmayacak şekilde bir maksimal M altgrubuna sahiptir. Eğer M sonsuz G grubunun maksimal altgrubu ve M G de dingin ise M nin G de normal olmasına gerek yoktur.

İspat

$M = A \times \langle (1,2) \rangle$ olsun. M nin G de maksimal ve abeliyan olduğu açıktır. Şimdi M nin G de dingin olduğunu gösterelim. Verilen herhangi bir $x \in G$ için $(A \times \langle (1,2) \rangle)^x \geq (A \times \{1\})^x \cong A$ olduğunu biliyoruz. O halde

$$\begin{aligned} [A \times \langle (1,2) \rangle : A \times \langle (1,2) \rangle \cap A \times \langle (1,2) \rangle^x] &\leq [A \times \langle (1,2) \rangle : A \times \langle (1,2) \rangle \cap A \times \{1\}] \\ &\leq [A \times \langle (1,2) \rangle : A \times \{1\}] \leq 2 \end{aligned}$$

O halde M , G de dingindir.

4.7. Lemma

M , lokal sonlu G grubunun sonsuz dingin ve maksimal altgrubu olsun. Bu durumda G basit değildir.

İspat

G sonsuz, basit, lokal sonlu grup ve M G nin sonsuz, maksimal ve dingin altgrubu olsun. $[\langle M, M^x \rangle : M \cap M^x] < \infty$ olduğundan $M \cap M^x$ de öyle bir N altgrubu vardır ki $N \triangleleft G$ dir [6]. Bu ise G nin sonsuz basit olmasıyla çelişir.

5. İNVLİSYONLARIN MERKEZLEYENİ

Bu bölümde sonsuz, lokal sonlu basit grupların involisyonlarının merkezleyenlerinin dingin olup olmadığını inceleyeceğiz ve Lie tipi gruplarda involisyonların merkezleyenlerinin yapılarını araştıracağız.

5.1. Tanım

$\mathfrak{S}_{n,r}$ en fazla n tane faktörü abeliyan olmayan basit grup, diğer faktörleri çözülebilirlik uzunlukları toplamı en fazla r olan sonlu uzunluklu serilere sahip tüm grupların sınıfını gösterir.

$\mathfrak{S}_n$ en fazla n tane faktörü abeliyan olmayan basit, diğer faktörleri lokal çözülebilir, sonlu uzunluklu serilere sahip olan tüm lokal sonlu gruplardan oluşur.

5.1. Lemma

- (i) $\mathfrak{S}_{n,r}$ ve $\mathfrak{S}_n$ sınıfları normal altgruplar ve bölüm grupları altında kapalıdır.
- (ii) $N \triangleleft M \triangleleft G$ olsun. Eğer $G \in \mathfrak{S}_{n,r}$ ve M/N çözülebilir ise M/N nin çözülebilirlik uzunluğu en fazla r dir.
- (iii) Eğer $M \triangleleft G$, $M \in \mathfrak{S}_n$ ve $G/M \in \mathfrak{S}_m$ ise o zaman $G \in \mathfrak{S}_{m+n}$ dir [8].

5.2. Lemma

G , derecesi m olan simetrik grup ve x , G nin mertebesi n olan elemanı olsun. O zaman $C_G(x) \in \mathfrak{S}_{[n/2]+1}$ dir [9].

5.3. Lemma

G lokal sonlu grup ve i G nin involisyonu olsun. Eğer $C_G(i) \in \mathfrak{S}_n$ ise o zaman Z , G nin merkezi olmak üzere $C_{G/Z}(i) \in \mathfrak{S}_n$ dir.

İspat

$C/Z = C_{G/Z}(i)$ ve $C_G(i) = C_1 \triangleright C_2 \triangleright \dots \triangleright C_m = 1$ $C_G(i)$ nin bir serisi öyle ki her bir faktörü abeliyan olmayan basit ya da lokal çözülebilir olsun. O zaman $C/Z = C_1 Z/Z \triangleright C_2 Z/Z \triangleright \dots \triangleright C_m Z/Z = Z$, C/Z nin serisidir.

$$\begin{aligned} \varphi_i : C &\rightarrow Z \\ g &\rightarrow [g, i] \end{aligned}$$

dönüşümü, çekirdeği $C_G(i)$ olan grup homomorfizmasıdır. Gerçekten;

$$\begin{aligned} \forall g \in C \text{ için } gZ \in C/Z = C_{G/Z}(i) &\Rightarrow g^{-1}igZ = iZ \\ &\Rightarrow Z = g^{-1}i^{-1}giZ \\ &\Rightarrow g^{-1}i^{-1}gi \in Z \\ &\Rightarrow [g, i] \in Z \end{aligned}$$

olduğundan φ_i anlamlıdır.

$$\begin{aligned} \forall g_1, g_2 \in C \text{ için } g_1 = g_2 &\Rightarrow g_1^{-1} = g_2^{-1} \\ &\Rightarrow g_1^{-1}i^{-1}g_1i = g_2^{-1}i^{-1}g_2i \\ &\Rightarrow [g_1, i] = [g_2, i] \end{aligned}$$

olduğundan φ_i iyi tanımlıdır.

$$\forall g_1, g_2 \in C \text{ için } \varphi_i(g_1 g_2) = [g_1 g_2, i] = [g_1, i]^{g_2} [g_2, i] = [g_1, i] \cdot [g_2, i] = \varphi_i(g_1) \varphi_i(g_2)$$

olduğundan φ_i homomorfizmadır.

$$\begin{aligned} g \in \text{Ker} \varphi_i &\Leftrightarrow \varphi_i(g) = 1 \\ &\Leftrightarrow [g, i] = 1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow g^{-1}i^{-1}gi = 1$$

$$\Leftrightarrow gi = ig$$

$$\Leftrightarrow g \in C_G(i)$$

O halde $\text{Ker}\varphi_i = C_G(i) \triangleleft C$ ve $C/C_G(i)$ abeliyandır. Eğer C_i/C_{i+1} faktörü abeliyan olmayan basit ise o zaman $(C_i Z/Z)/(C_{i+1} Z/Z) \cong C_i Z/C_{i+1} Z = C_i C_{i+1} Z/C_{i+1} Z \cong C_i/(C_i \cap C_{i+1} Z) = C_i/C_{i+1}(C_i \cap Z)$ dir. Şimdi $C_{i+1}(C_i \cap Z)/C_{i+1} \triangleleft C_i/C_{i+1}$ abeliyan olmayan basit ancak $C_{i+1}(C_i \cap Z)/C_{i+1} \cong C_i \cap Z/(C_i \cap Z) \cap C_{i+1}$ ve $C_i \cap Z/(C_i \cap Z) \cap C_{i+1}$ abeliyan olduğundan $C_{i+1}(C_i \cap Z)/C_{i+1}$ abeliyan normal altgruptur. Böylece $C_{i+1}(C_i \cap Z)/C_{i+1} = 1$ olmak zorunda ve buradan $C_{i+1}(C_i \cap Z) = C_{i+1}$ olduğundan $C_i \cap Z \leq C_{i+1}$ dir. Bundan başka $(C_i Z/Z)/(C_{i+1} Z/Z)$ faktörü abeliyan olmayan basittir. Diğer taraftan, eğer C_i/C_{i+1} lokal çözülebilir ise, o zaman $(C_i Z/Z)/(C_{i+1} Z/Z) \cong C_i/C_{i+1}(C_i \cap Z)$ lokal çözülebilirdir. Buradan $C/Z \in \mathfrak{S}_n$ dir.

5.4. Lemma

$G, \mathfrak{S}_n$ de lokal sonlu grup olsun. Eğer G , residually-sonlu ise o zaman G almost lokal çözülebilirdir. Özel olarak G sonsuz basit grup içermez [8].

5.5. Lemma

G bir grup ve α G de bir otomorfizma olsun. N, G nin normal α -invariant altgrubu ve $C/N = C_{G/N}(\alpha)$ olsun.

(i) Eğer $N \leq Z(G)$ ise o zaman $C_G(\alpha) \triangleleft C$ ve $C/C_G(\alpha)$ N nin bir altgrubuna izomorftur.

(ii) G terimleri sonlu sayıda olmak üzere $[N, G, \dots, G] = 1$ ve $C \in \mathfrak{S}_n$ ise o zaman $C_G(\alpha) \in \mathfrak{S}_n$ dir [9].

İspat

$$(i) \quad \begin{array}{l} \varphi_\alpha : C \rightarrow N \\ g \rightarrow [g, \alpha] = g^{-1}g^\alpha \end{array}$$

Frobenius dönüşümünü göz önüne alalım.

$C/N = C_{G/N}(\alpha) = \{gN : (gN)^\alpha = gN\}$ olduğundan $gN \in C/N$ ise $(gN)^\alpha = gN$ dir. N α -invariant olduğundan $g^\alpha N = gN$ dir. O halde $g^{-1}g^\alpha N = N$ olduğundan $g^{-1}g^\alpha \in N$ dir. Böylece φ_α anlamlıdır.

$$\begin{aligned} \forall g_1, g_2 \in C \text{ için } g_1 = g_2 &\Rightarrow g_1^{-1} = g_2^{-1} \text{ ve } g_1^\alpha = g_2^\alpha \\ &\Rightarrow g_1^{-1}g_1^\alpha = g_2^{-1}g_2^\alpha \\ &\Rightarrow [g_1, \alpha] = [g_2, \alpha] \end{aligned}$$

olduğundan φ_α iyi tanımlıdır.

φ_α nın homomorfizma olması için gerek ve yeter koşul $\varphi_\alpha(C) \subseteq Z(G)$ olmasıdır. Bunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha \text{ homomorfizma olsun.} &\Leftrightarrow \forall g_1, g_2 \in C \text{ için } \varphi_\alpha(g_1g_2) = \varphi_\alpha(g_1)\varphi_\alpha(g_2) \\ &\Leftrightarrow [g_1g_2, \alpha] = [g_1, \alpha].[g_2, \alpha] \\ &\Leftrightarrow [g_1, \alpha]^\alpha [g_2, \alpha] = [g_1, \alpha].[g_2, \alpha] \\ &\Leftrightarrow [g_1, \alpha]^\alpha = [g_1, \alpha] \\ &\Leftrightarrow [g_1, \alpha] \in Z(G) \\ &\Leftrightarrow \varphi_\alpha(g_1) \in Z(G) \\ &\Leftrightarrow \varphi_\alpha(C) \subseteq Z(G) \end{aligned}$$

Kabulden dolayı $\varphi_\alpha(C) = N \subseteq Z(G)$ olduğundan dönüşüm homomorfizmadır. Dolayısıyla $\text{Ker}\varphi_\alpha = C_G(\alpha)$ dır. $C_G(\alpha) \triangleleft C$ ve 1. izomorfizma teoreminden $C/C_G(\alpha)$, N nin bir altgrubuna izomorftur.

(ii) $N_0 = N$ ve $N_{i+1} = [N_i, G]$ olsun. N normal olduğundan $N_i \triangleleft N$ dir. Ayrıca $N_{i+1} = [N_i, G] \triangleleft G$ dir. Kabulden dolayı bir r için $N_r = 1$ olduğundan $N = N_0 \triangleright N_1 \triangleright \dots \triangleright N_r = 1$ normal serisi vardır.

$C_i/N_i = C_{G/N_i}(\alpha)$ olsun. (i) den $C_{i+1} \triangleleft C_i$ ve böylece C_i, C de altnormaldir. Böylece ispat Lemma 5.1 den sonuçlanır.

5.6. Lemma

(i) Eğer $G \in L\mathfrak{S}_n$ ise o zaman G , faktörlerinin en fazla n tanesi abeliyan olmayan basit, en fazla $n+1$ tanesi çözülebilirlik uzunluğu en fazla r olan, uzunluğu en fazla $2n+1$ olan seriye sahiptir.

(ii) $L\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_n$ dir [9].

5.1. Teorem

$G = B(F)$, F karakteristiği p olan sonsuz lokal sonlu cisim ve n , p ile bölünmeyen bir pozitif tamsayı olsun. $\Pi = \{r_1, \dots, r_\ell\}$ G nin oluşturduğu Lie cebirinin esas köklerinin kümesi olsun ve $r = m_1 r_1 + \dots + m_\ell r_\ell$ en yüksek kök olsun.

(i) Eğer $n \leq \sum_{i=1}^{\ell} m_i$ ise o zaman G deki mertebesi n olan (eğer varsa) her elemanın merkezleyeni sonsuz basit grup içerir.

(ii) Kabul edelim ki $n > \sum_{i=1}^{\ell} m_i$ ve eğer n tek ise F , 1 in n . ilkel kökünü içerir, eğer n çift ise 1 in $2n$. ilkel kökünü içerir. O zaman G mertebesi n ve merkezleyeni bir temel grubun bir altgrubu ile bir abeliyan p' -grubunun genişlemesi olan elemanları içerir [9].

5.2. Teorem

Kabul edelim ki G nin elemanlarının her sonlu kümesi bir sonlu basit altgrup içinde olsun ve G lineer olmasın. O zaman aşağıdaki özellikleri sağlayan bir p asal sayısı vardır. n , p tarafından bölünmeyen herhangi bir doğal sayı, g , G nin mertebesi n olan herhangi bir elemanı ve $r(n) = n + [4/n]$ olsun. O zaman $C_G(g)$ uzunluğu en fazla $2r(n)+1$ olan ve her bir faktörü ya abeliyan olmayan basit ya da çözülebilir olan sonlu bir seriye sahiptir. Abeliyan olmayan basit faktörlerinin sayısı en fazla $r(n)$ ve bunlardan en az biri lineer değildir. Her bir çözülebilir faktörünün derived uzunluğu en fazla 6 ve bunlardan en fazla $r(n)+1$ tane vardır [9].

5.3. Teorem (Sınıflandırma Teoremi)

G sonlu basit grup olsun. O zaman G ,

- (i) Asal mertebeli devirli gruptur, ya da
- (ii) Derecesi $n \geq 5$ olan alterne gruptur, ya da
- (iii) Lie tipinde sonlu basit gruptur, ya da
- (iv) 26 sporadik sonlu basit gruptan biridir.

Aşağıdaki lemma yalnız elemanların merkezleyenlerinin değil aynı zamanda sonsuz alterne grupların sonlu altgrupların merkezlerinin de sonsuz alterne gruplarda dingin olmadığını gösterir.

5.7. Lemma

$G = \text{Alt}(\Omega)$ sonsuz Ω kümesi üzerinde $\text{Sym}(\Omega)$ nın çift permutasyonlarının grubu, F sonlu bir altgrup olsun. O zaman $\Omega_1 = \text{supp}(F) = \{\alpha \in \Omega : \alpha^x \neq \alpha, x \in F\}$ ve $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$ olmak üzere $C_G(F) = C_{\text{Alt}(\Omega_1)}(F) \times \text{Alt}(\Omega_2)$ dir.

İspat

Önce $C_{\text{Alt}(\Omega_1)}(F) \times \text{Alt}(\Omega_2) \leq C_G(F)$ olduğunu gösterelim. Eğer $g \in \text{Alt}(\Omega_2)$ ve $f \in F$ ise o zaman $\Omega_1 \cap \Omega_2$ boş küme olduğundan her $\alpha \in \Omega_1$ için $\alpha^{gf} = \alpha^f = \alpha^{fg}$ dir. Benzer olarak $\alpha \in \Omega_2$ için $\alpha^{gf} = \alpha^g = \alpha^{fg}$ dir. Buradan herhangi bir $\alpha \in \Omega$, $\alpha^{gf} = \alpha^{fg}$ eşitliğini sağlar. Bu eşitlik her α için doğru olduğundan $gf=fg$ dir. Bundan dolayı $g \in C_G(F)$ dir. Açıkça $C_{\text{Alt}(\Omega_1)}(F) \leq C_G(F)$ dir. Böylece $\Omega_1 \cap \Omega_2$ boş küme olduğundan $C_{\text{Alt}(\Omega_1)}(F) \cap \text{Alt}(\Omega_2) = 1$ ve buradan $C_{\text{Alt}(\Omega_1)}(F) \times \text{Alt}(\Omega_2) \leq C_G(F)$ dir.

Karşıt olarak $g \in C_G(F)$ olsun. O zaman g_i ler ayrık devirler olmak üzere $g = g_1 g_2 \dots g_s \in C_G(F)$ olarak yazılabilir.

İddia ediyoruz ki verilen herhangi bir g_i nin tüm girişleri ya Ω_1 de ya da Ω_2 dedir. Kabul edelim ki bu doğru olmasın. O zaman $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{j-1} \in \Omega_1$ ve $\beta_j \in \Omega_2$ olacak şekilde $g_i = (\delta_1 \delta_2 \dots \delta_{j-1} \beta_j \delta_{j+1} \dots \delta_k)$ vardır. Şimdi girişlerinden biri δ_{j-1} olan $x \in F$ seçelim. Biliyoruz ki F nin her elemanı $\alpha_{st} \in \text{Supp}(F) = \Omega_1$ olmak üzere $x = (\alpha_{11} \alpha_{12} \dots \alpha_{1k_1})(\alpha_{21} \alpha_{22} \dots \alpha_{2k_2}) \dots (\alpha_{n1} \alpha_{n2} \dots \alpha_{nk_n})$ formundadır. Şimdi x in g ile eşlenişini alırsak $x^g = (g(\alpha_{11}) \dots g(\alpha_{1k_1}) \dots g(\alpha_{n1}) \dots g(\alpha_{nk_n}))$ elde ederiz. Genelliği bozmadan $\delta_{j-1} = g(\alpha_{1i_1})$ alabiliriz. O zaman $g(\delta_{j-1}) = g(\alpha_{1i_1}) = \beta_j$ ve $\beta_j \notin \Omega_2$ olduğundan $\beta_j \in \text{Supp}(F)$ olup $x^g \neq x$ tir. Bu ise $g \in C_G(F)$ olmasıyla çelişir. Böylece g_i nin tüm girişleri Ω_1 de ya da Ω_2 dedir. Eğer girişler Ω_2 de ise o zaman $g \in \text{Alt}(\Omega_2)$ dir. Aksi taktirde girişler Ω_1 de ve $g \in C_{\text{Alt}(\Omega_1)}(F)$ olur. O zaman $C_G(F) \leq C_{\text{Alt}(\Omega_1)}(F) \times \text{Alt}(\Omega_2)$ dir. Böylece $C_{\text{Alt}(\Omega_1)}(F) \times \text{Alt}(\Omega_2) \leq C_G(F)$ ve $C_G(F) \leq C_{\text{Alt}(\Omega_1)}(F) \times \text{Alt}(\Omega_2)$ den eşitliği elde ederiz.

5.1. Sonuç

Ω sonsuz bir küme olmak üzere $\text{Alt}(\Omega)$ daki involisyonların merkezleyenleri $\text{Alt}(\Omega)$ da dingin değildir.

İspat

i , $\text{Alt}(\Omega)$ da bir involisyon olsun. Lemma 5.7 den $\Omega_1 = \text{Supp}(i)$ ve $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$ olmak üzere $C_{\text{Alt}(\Omega)}(i) = C_{\text{Alt}(\Omega_1)}(i) \times \text{Alt}(\Omega_2)$ dir. O zaman Ω_2 sonsuz olduğundan $\text{Alt}(\Omega_2)$ basittir. Bu da $C_{\text{Alt}(\Omega)}(i)$ nin sonsuz basit altgrup olmasını gerektirir.

Lemma 3.2.6 (ii) den her dingin altgrup residually-sonludur. Bu ise grubun basit olmasıyla çelişir.

Aşağıda, F karakteristiği tek olan bir cisim olmak üzere $\text{PSL}(2, F)$ de involisyonların merkezleyeni incelenmiştir.

5.8. Lemma

F karakteristiği tek olan bir cisim ve $G = \text{PSL}(2, F)$ olsun. O zaman herhangi bir $g \in G$ elemanı ve herhangi bir $i \in G$ involisyonu için $[C_G(i) : C_G(i) \cap C_G(i)^g] \geq |F^*|$ dir. Özel olarak, eğer F sonsuz ise o zaman $C_G(i)$ G de dingin değildir.

İspat:

Bilindiği üzere $\text{SL}(2, F)$ nin merkezleyeni $Z = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda^2 = 1 \right\}$ ve

$G = \text{PSL}(2, F) = \text{SL}(2, F) / Z(\text{SL}(2, F))$ dir. O zaman $i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Z$ G de bir involisyondur.

Gerçekten $i^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Z \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Z$ dir. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in Z$ olduğundan $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Z = Z$ dir.

$g = \begin{pmatrix} p & r \\ s & t \end{pmatrix}$ olsun. $C_G(i)$ yi bulalım. $ig = gi$ eşitliğinin sağlanması gerekir. O zaman

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & r \\ s & t \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} p & r \\ s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Z \text{ dir. O zaman } \lambda = 1 \text{ veya } \lambda = -1 \text{ için}$$

$$\begin{pmatrix} s & t \\ -p & -r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & p \\ -t & s \end{pmatrix} \lambda I \text{ dir.}$$

$$\text{Eğer } \lambda = 1 \text{ ise } C_1 = \left\{ \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ -r_1 & p_1 \end{pmatrix} Z : p_1^2 + r_1^2 = 1, p_1, r_1 \in F \right\}$$

$$\text{Eğer } \lambda = -1 \text{ ise } C_2 = \left\{ \begin{pmatrix} p_2 & r_2 \\ r_2 & -p_2 \end{pmatrix} Z : p_2^2 + r_2^2 = -1, p_2, r_2 \in F \right\}$$

$$\begin{pmatrix} p_2 & r_2 \\ r_2 & -p_2 \end{pmatrix} Z \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ -r_1 & p_1 \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} p_1 p_2 - r_1 r_2 & r_1 p_2 + p_1 r_2 \\ r_1 p_2 + p_1 r_2 & -(p_1 p_2 - r_1 r_2) \end{pmatrix} Z \in C_2 \text{ olduğundan } x = \begin{pmatrix} p_2 & r_2 \\ r_2 & -p_2 \end{pmatrix} Z$$

olmak üzere $C_G(i) = \langle C_1 \cup C_2 \rangle = \langle C_1 \cup x C_1 \rangle$ dir.

$$\text{Eğer } y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Z \text{ seçersek } C_1^y = \left\{ \begin{pmatrix} p_1 + r_1 & r_1 \\ -2r_1 & p_1 - r_1 \end{pmatrix} Z : p_1^2 + r_1^2 = 1, p_1, r_1 \in F \right\}$$

elde ederiz.

O halde $[C_1 : C_1 \cap C_1^y] = |F^*|$ olur. Gerçekten $r_1 = -2r_1 \Rightarrow r_1 = 0$

$$\Rightarrow C_1 \cap C_1^y = \left\{ \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ -r_1 & p_1 \end{pmatrix} Z \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} p_1 + r_1 & r_1 \\ -2r_1 & p_1 - r_1 \end{pmatrix} Z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_1 \end{pmatrix} Z \right\} \text{ dir. Buradan}$$

eğer F sonsuz ise C_1 G de dingin değildir. Böylece $C_G(i)$ G de dingin değildir.

$[C_G(i) : C_1]$ sonlu olduğundan Lemma 3.2.4 ten $C_G(i)$ G de yine dingin değildir.

Şimdi q tek olmak üzere $SU(3, q^2)$ ve $PSU(3, q^2)$ de involisyonların merkezleyenini inceleyelim.

T , $SU(3, q^2)$ de triviya1 olmayan bir involisyon olsun. O zaman $T^2 = I$ dır. Buradan T , $x^2 - 1$ polinomunu sağlar. Böylece T nin minimal polinomu $x-1$, $x+1$ veya $(x-1)(x+1)$ dir. $T \neq I$ olduğundan minimal polinom $x-1$ olamaz. Ayrıca eğer minimal polinom $x+1$

olsaydı $T = -I$ olurdu ve bu durumda $\det T = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$ olurdu. O halde T nin

minimal polinomu $x+1$ de olamaz. Buradan T nin minimal polinomu $(x-1)(x+1)$ dir. O zaman T diyagonalleştirilebilir bir matristir ve T nin aygen değeri1eri 1 ve -1 dir. Buradan

$T, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ diyagonal matrisiyle benzerdir.

1 aygen değeri1ine karşılık gelen aygen vektör u , -1 aygen değeri1ine karşılık gelen aygen vektörler v_1, v_2 olsun. $V = \langle u \rangle \oplus \langle v_1, v_2 \rangle$ ve $A \in C_{SU(3, q^2)}(T)$ olsun.

Genel olarak, X ve Y değişmeli matrisler ise o zaman X, Y nin aygen uzayını sabit bırakır. Gerçekten α , Y nin c aygen değeri1ine karşılık gelen aygen vektör olsun. O zaman $Y(X(\alpha)) = X(Y(\alpha)) = X(c\alpha) = c(X(\alpha))$ dır. Buradan $Y(X(\alpha)) = c(X(\alpha))$ eşitliği $X(\alpha)$ nın Y nin c aygen değeri1ine karşılık gelen aygen vektör olduğunu gösterir.

O halde $AT = TA$ ve herhangi bir λu için $TA(\lambda u) = AT(\lambda u) = A\lambda T(u) = A(\lambda u) = \lambda A(u)$ olur. Böylece $TA(\lambda u) = A(\lambda u)$ yani 1 aygen değeri1ine karşılık gelen aygen uzay $A(\lambda u)$ dur. Bu yüzden $\{u, v_1, v_2\}$ sıralı bazına göre

$$Au = \lambda u$$

$$Av_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2$$

$$Av_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 \text{ olduğundan}$$

$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ gösterimine sahiptir. Bundan başka bu formdaki her matris T ile değişmelidir. Yani ;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$SU(3, q^2)$ den A matrisini alalım. Bu durumda A üniter matristir ve $\lambda(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = 1$

$$\text{dir. } C_{SU(3, q^2)}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid \lambda(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = 1 \right\}$$

Şimdi

$$\varphi : C_{SU(3, q^2)}(T) \rightarrow F^*$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \lambda$$

dönüşümünü tanımlayalım.

$$\varphi \text{ grup homomorfizmasıdır ve } \text{Ker } \varphi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in SU(3, q^2) \mid a_{ij} \in F \right\} = SU(2, q^2)$$

O zaman $C_{SU(3, q^2)}(T) \supset \text{Ker } \varphi \supset Z(C_{SU(3, q^2)}(T)) \supset 1$ serisini elde ederiz.

$SU(2, q^2) \cong SL(2, q)$ ve $Z(SU(2, q^2)) \cong Z(SL(2, q))$ olduğundan

$PSL(2, q) \cong SU(2, q^2) / Z(SU(2, q^2))$ elde ederiz. $PSU(3, q^2) = SU(3, q^2) / Z(SU(3, q^2))$ idi.

Özel olarak $|Z(SU(3, q^2))| = (3, q^2 - 1)$ dir. O zaman $|Z(SU(3, q^2))|$ 1 ya da 3 tür.

Eğer s , mertebesi n olan eleman ve M normal altgrup öyle ki $(|M|,n)=1$ ise o zaman $C_{G/M}(s) = C_G(s)M/M$ dir. Bunu kullanarak M yerine $SU(3,q^2)$ nin merkezini alırsak;
 $C_{PSU(3,q^2)}(T) \cong C_{SU(3,q^2)}(T)Z/Z = C_{SU(3,q^2)}(T)/(C_{SU(3,q^2)}(T) \cap Z)$ dir.

Özel olarak $C_{PSU(3,q^2)}(T) \cong C_{SU(3,q^2)}(T)Z/Z \triangleright \text{Ker}\varphi Z/Z \triangleright \bar{1}$ $C_{PSU(3,q^2)}(T)$ nin bir serisidir. $Z(SU(3,q^2)) \cap C_{SU(3,q^2)}(T) = 1$ olduğundan $\text{Ker}\varphi Z/Z \cong \text{Ker}\varphi$ olduğunu biliyoruz. $\text{Ker}\varphi \cong SL(2,q)$, $C_{PSU(3,q^2)}(T)$ nin bir alt grubuna izomorftur. Böylece sonsuz lokal sonlu F cismi için $C_{PSU(3,q^2)}(T)$ grubunun sonsuz basit grup $SL(2,F)$ olmasını gerektir.

Her öz dingin altgrup residually sonlu olduğundan Lemma 5.4 ten sonsuz basit grup içermez.

Aşağıda $PSL(2,F)$ deki involisyonların merkezleyeni incelenmiştir.

5.9. Lemma

F karakteristiği 2 olan sonlu cisim olsun. O zaman $SL(2,F)$ ile $PSL(2,F)$ izomorftur.

İspat

$SL(2,F)$ in merkezinin $Z = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda^2 = 1 \right\}$ olduğunu biliyoruz. F nin karakteristiği 2 ve $\lambda^2 = 1$ olduğundan $(\lambda - 1)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 1 - 2\lambda + 1 = 2 - 2\lambda = 0$ dir. Böylece $\lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$ eşitliği sağlanır. O zaman $\lambda = 1$ dir. Böylece $SL(2,F)$ nin merkezi birimden oluşur. Buradan $PSL(2,F) \cong SL(2,F)/Z(SL(2,F))$ olduğundan $PSL(2,F) \cong SL(2,F)$ elde edilir.

5.10. Lemma

F karakteristiği 2 olan bir cisim olsun. $SL(2,F)$ deki herhangi bir i involisyonu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ nin eşleniğidir ve bir $g \in SL(2,F)$ elemanı vardır öyle ki $[C_{SL(2,F)}(i) : C_{SL(2,F)}(i) \cap (C_{SL(2,F)}(i))^g] \geq |F|$ dir. Özel olarak eğer F sonsuz ise involisyonun merkezi $SL(2,F) \cong PSL(2,F)$ de dingin değildir.

İspat

i , $SL(2,F)$ de bir involisyon olsun. O zaman $i, i^2 = 1$ olduğundan $x^2 - 1$ polinomunu sağlar. $x^2 - 1 = (x - 1)^2$ olduğundan i nin minimal polinomu $(x - 1)^2$ dir. Bundan dolayı i , $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Jordan kanonik formuna sahiptir. O zaman i ile eşlenik olan her involisyon $SL(2,F)$ dedir. $C_{SL(2,F)}(i)$ yi bulalım. $y \in C_{SL(2,F)}(i)$ olsun. O halde $iy = yi$ dir.

$$y = \begin{pmatrix} p & r \\ s & t \end{pmatrix} \text{ olsun. O zaman } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & r \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & r \\ s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

$$\text{Buradan } \begin{pmatrix} p & r \\ p+s & r+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+r & r \\ s+t & t \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

$p = p+r$ olduğundan $r = 0$ ve $p+s = s+t$ olduğundan $p = t$ dir. Determinant 1 olduğundan $pt+rs = 1$ dir. O zaman $pt = 1$ dir. Buradan $p^2 = 1$ dir. Karakteristiğin 2 olması $p = 1$ olduğunu gösterir. Buradan $C_{SL(2,F)}(i) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} \mid s \in F \right\}$ elde ederiz. O zaman

$$C_{SL(2,F)}(i) \cap (C_{SL(2,F)}(i))^g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ dir.}$$

Bundan dolayı $[C_{SL(2,F)}(i) : C_{SL(2,F)}(i) \cap (C_{SL(2,F)}(i))^g] \geq |F|$ dir.

Özel olarak eğer $|F|$ sonsuz ise $C_{SL(2,F)}(i)$, $SL(2,F)$ de dingin değildir.

5.11. Lemma

V , karakteristiği 2 olan F cismi üzerinde 2 boyutlu vektör uzayı olsun. Eğer i ve j involisyonları $GL(V)$ de eşlenik iseler $SL(V)$ de de eşleniktirler.

İspat:

$i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $SL(2,F)$ de involisyon ve $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(n,F)$ olsun. i nin keyfi bir eşleniği

$$\begin{aligned} i^g &= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad-bc+bd & -b^2 \\ d^2 & ad-bc-bd \end{pmatrix} \end{aligned}$$

formundadır. i nin $SL(2,F)$ deki tüm eşleniklerini bulalım. $s = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in SL(2,F)$ olsun.

$$i^s = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & -y \\ -z & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & y \\ z+t & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & -y \\ -z & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+yt & -y^2 \\ t^2 & 1-yt \end{pmatrix}$$

Böylece

$$1 + \frac{bd}{ad-bc} = 1 + yt$$

$$\frac{b^2}{ad-bc} = -y^2$$

$$\frac{d^2}{ad-bc} = t^2$$

olduğundan verilen herhangi $a, b, c, d \in F$ için yukarıdaki eşitlikleri sağlayan $x, y, z, t \in F$ bulabiliriz.

F cismi üzerinde φ dönüşümü

$$\begin{aligned}\varphi : F &\rightarrow F \\ x &\rightarrow x^2\end{aligned}$$

olarak tanımlansın. F cisminin karakteristiği 2 olduğundan

$$\varphi(x + y) = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + y^2 = \varphi(x) + \varphi(y)$$

ve

$$\varphi(xy) = (xy)^2 = x^2 y^2 = \varphi(x)\varphi(y)$$

dir. Böylece φ bir cisim otomorfizmasıdır. Buradan t ve y yi bulabiliriz. Eşitliklerdeki a, b, c, d ile bu değerleri yerine yazdığımızda x ve t değerlerini elde edebiliriz.

Şimdi $\text{PSL}(3, F)$ deki involisyonların merkezleyenini inceleyelim

5.12. Lemma

F karakteristiği 2 olan bir cisim olsun. O zaman $i \in \text{PSL}(3, F)$ involisyon ve $y \in \text{PSL}(3, F)$ vardır öyle ki $[C_{\text{PSL}(3, F)}(i) : C_{\text{PSL}(3, F)}(i) \cap (C_{\text{PSL}(3, F)}(i))^y] \geq |F|$ dir. Özel olarak eğer F sonsuz ise $C_{\text{PSL}(3, F)}(i)$, $\text{PSL}(3, F)$ de dingin değildir.

İspat

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z, \text{ PSL}(3, F) \text{ de olsun. Herhangi bir } y = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} Z \in \text{PSL}(3, F)$$

seçelim. $iy = yi$ eşitliğinden;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z$$

elde ederiz. Buradan

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + a_{11} & a_{32} + a_{12} & a_{33} + a_{13} \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} Z$$

$\text{PSL}(3, F)$ de eğer $aZ = bZ$ ise o zaman $\lambda \in F$ için $a = b\lambda I = \lambda b$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + a_{11} & a_{32} + a_{12} & a_{33} + a_{13} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} + a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

elde ederiz. O halde $a_{12} = \lambda a_{12}$, $a_{13} = \lambda a_{13}$, $a_{23} = \lambda a_{23}$, $a_{22} = \lambda a_{22}$ olup $\lambda = 1$ veya $\lambda = 0$ dir. Eğer $\lambda = 0$ ise o zaman $a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{22} = a_{32} = a_{11} = 0$ dir. Bu determinantın sıfır olduğunu gösterir ki bu imkansızdır. Dolayısıyla $\lambda = 1$ dir.

$$a_{11} + a_{13} = a_{11} \Rightarrow a_{13} = 0$$

$$a_{21} + a_{23} = a_{21} \Rightarrow a_{23} = 0$$

$$a_{32} + a_{12} = a_{32} \Rightarrow a_{12} = 0$$

$$a_{31} + a_{33} = a_{31} + a_{11} \Rightarrow a_{11} = a_{33}$$

$$\text{Buradan } C = C_{\text{PSL}(3,F)}(i) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{11} \end{pmatrix} Z \mid a_{ij} \in F, a_{11}^2 a_{22} = 1 \right\}$$

$$\text{Şimdi } y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} Z \text{ seçelim ve } C^y \text{ yi bulalım:}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{32} & a_{31} \\ 0 & a_{22} & a_{21} \\ 0 & 0 & a_{11} \end{pmatrix} Z$$

$$\text{Böylece } C \cap C^y = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} \end{pmatrix} Z \mid a_{ii} \in F, a_{11}^2 a_{22} = 1 \right\} \text{ olur.}$$

O halde $a_{11} \in F^*$ dan keyfi seçilebileceğinden dolayı $|C \cap C^y| \geq |F^*|$ dır. Özel olarak F sonsuz ise o zaman C , $\text{PSL}(3,F)$ de dingin değildir.

6. BASİT GRUPLARDA DİNGİN ALTGRUPLAR

6.1. Temel Sonuçların İfadeleri

Bu bölümde Balyaev'in "Sonsuz Basit Gruplarda Dingin Altgruplar" adlı makalesi incelenmiş ve aşağıdaki teoremler elde edilmiştir.

6.1.1. Teorem

G sayılabilir lokal sonlu basit grubunun sonsuz öz dingin altgrup içermesi için gerek ve yeter koşul G nin, bir lokal sonlu cisim üzerinde sonlu ranklı Lie tipi grup olmamasıdır. Gerçekten dingin altgruplar grup teorisinin çeşitli bölümlerinde özel bir araştırma konusu ortaya çıkar. Bu çalışma bütün grupların normal yapısı ve dingin altgruplarda normal altgrupların yapısının arasındaki ilişkinin çalışılması için yapılmıştır. Basit gruplarda dingin altgrupların yapısını çalışmak ve aşağıdaki temel teoremleri ispatlamak için bu doğrultuda elde edilmiş sonuçlara başvuracağız.

6.1.2. Teorem

Basit bir gruptaki her dingin altgrup ya bir FC-gruba ya da bir FC-radikale sahiptir.

6.1.3. Teorem

H , G basit grubunda dingin bir altgrup olsun ve aşık olmayan normal periyodik grup içersin. O zaman H nin komütatör grubu periyodiktir.

6.1.4. Teorem

H , G basit grubunda dingin bir altgrup olsun ve aşık olmayan lokal sonlu normal altgrup içersin. O zaman H nin komütatör grubu lokal sonludur.

6.1.5. Teorem

H , G basit grubunda dingin altgrup ve H nin lokal nilpotent radikali $F(H)$, 1 den farklı olsun. O zaman

- (1) $H / F(H)$ bir FC- gruptur.
- (2) Eğer H , FC-grup değilse o zaman ya $F(H)$ torsiyonsuz gruptur ya da $F(H)$ nin periyodik radikali bir p asalı için p -gruptur.

Bu çalışmada her ne kadar kullanılan sonuçlar lokal sonlu gruplarda çalışılan dingin altgruplar için elde edildi ise de lineer gruplarda dingin altgrupların yapısına dayandırılmış bazı sonuçları göstermek mümkündür.

6.1.6. Teorem

H , basit bir lineer grupta sonsuz öz dingin altgrup olsun. O zaman,

- (1) H alt grubunun FC-radikali aşıkardır.
- (2) H nin aşık olmayan normal periyodik alt grubu yoktur.
- (3) H nin lokal çözülebilir radikali aşıkardır.

6.2. Dingin Altgrupların FC-Etkisi

Sonraki gözlemlerimiz ile dingin gruplar yardımıyla normal altgrupları çalışacağız. H bir G grubunun dingin alt grubu, N de G nin normal alt grubu olsun. Açık olarak $H \cap N \triangleleft H$ dir. $N \triangleleft G$ olduğundan N , G nin dingin alt grubudur. Ayrıca iki dingin alt grubun arakesiti de dingin olduğundan $H \cap N$, G de dingindir.

Ortaya çıkan sorular:

- $L \triangleleft H$ ve L ve H G de dingin altgruplar olsun. $N = \langle L^x : x \in G \rangle$ olmak üzere $N \cap H/L$ bölüm grubu nasıl genişletilebilir ?
- Ne zaman $N \cap L = H$ olur ?

Çok sayıda notasyona ihtiyacımız var. Şimdi aşağıdaki notasyonları tanımlayalım.

$H \leq G$ olsun. $C_H(g)$ nin H da indeksi sonlu olacak şekilde tüm $g \in G$ elemanlarının kümesi $FC_G(H)$ ile gösterilsin.

$C_H(g) = C_H(g^{-1})$ ve $C_H(gh) \leq C_H(g) \cap C_H(h)$ olduğundan eğer $C_H(g)$ ve $C_H(h)$, H da sonlu indeksli ise $[H: C_H(g^{-1})] < \infty$ ve $[H: C_H(gh)] \leq [H: C_H(g) \cap C_H(h)] < \infty$ olur. O halde $FC_G(H)$, G de bir altgrubudur.

Özel olarak $H = G$ olması durumunda $FC_G(H)$ altgrubu $FC(G)$ ile gösterilir ve $FC(G)$ ye G nin *FC-radikali* denir.

6.2.1. Önerme

H bir G grubunun dingin altgrubu olsun. O zaman $FC_G(H)$, G de normaldir. Özel olarak $\langle (FC(H))^g : g \in G \rangle \cap H = FC(H)$ dir.

İspat

H , G de dingin altgrup olduğundan H ile H^g akrandır. Dolayısıyla $FC_G(H^g) = FC_G(H)$ dir. Buradan $\forall g \in G$ için $(FC_G(H))^g = FC_G(H^g) = FC_G(H)$ dir. Böylece $FC_G(H) \triangleleft G$ dir.

$$FC(H) = FC_G(H) \cap H$$

olduğundan

$$FC(H) \leq \langle (FC_G(H))^g : g \in G \rangle \cap H \leq FC_G(H) \cap H = FC(H)$$

dir. Bundan dolayı

$$\langle (FC_G(H))^g : g \in G \rangle \cap H = FC(H)$$

dır.

6.2.1. Sonuç

H, G basit grubunun dingin altgrubu olsun. O zaman $FC_G(H) = 1$ ya da $FC_G(H) = G$ dir.

İspat

Önerme 6.2.1 den dolayı $FC_G(H), G$ de normaldir. Fakat G basit olduğundan $FC_G(H) = 1$ ya da $FC_G(H) = G$ dir.

Açık olarak Teorem 6.1.2, Sonuç 6.2.1 nin basit bir sonucudur.

Teorem 6.1.2 nin ispatı

G bir basit grup olsun. Her grup kendinin bir dingin altgrubu olduğundan Sonuç 6.2.2 den dolayı $FC(G) = 1$ veya $FC(G) = G$ dir.

Şimdi daha genel bir durumu göz önüne alalım.

6.2.1. Teorem

Kabul edelim ki $N \triangleleft H \leq G$, N ve H G nin dingin altgrupları ve L, H de $FC(H/N)$ nin ters görüntüsü olsun. O zaman $L = \langle L^g : g \in G \rangle$ dir.

İspat

Kabul edelim ki $g \in G$ ve $H_g = \{x \in H : [g, x] \in N\}$ olsun. Eğer $x, y \in H_g$ ise o zaman

$[g, y]$ ve $[g, x] \in N$ dir. Ayrıca $N \triangleleft H$ olduğundan $[g, x]^y \in N$ dir. O zaman

$$[g, xy] = [g, y][g, x]^y \in N$$

dir. Böylece H_g çarpma işlemi altında kapalıdır. $H_g^{-1} = \{x^{-1} : x \in H_g\}$ olmak üzere

$$H(g) = H_g^{-1} \cap H_g$$

olsun. O zaman $H(g)$ elemanlarının tersini alma ve çarpım altında kapalıdır. Böylece $H(g)$ H nin bir altgrubudur. $H(g)$ nin yardımıyla

$$K = \{g \in G : [H : H(g)] < \infty\}$$

kümesini tanımlayalım. Her $g \in H$ ve $n \in N$ için $N \triangleleft G$ olduğundan $[g, n] \in N$ dir. Böylece $n \in H_g$ dir. Ayrıca $n^{-1} \in N$ olduğundan benzer olarak $[g, n^{-1}] \in N$ ve böylece $n^{-1} \in H_g$ dir. O halde $N \leq H_g$ dir.

$xN \in H(g)/N$ olsun. O zaman $x \in H(g)$ dir.

$$\begin{aligned} x \in H(g) &\Leftrightarrow \forall g \in H \text{ için } [g, x] \in N; \\ &\Leftrightarrow \forall g \in H \text{ için } g^{-1}x^{-1}gx \in N; \\ &\Leftrightarrow \forall g \in H \text{ için } g^{-1}x^{-1}gxN = N; \\ &\Leftrightarrow \forall g \in H \text{ için } x^{-1}gxN = gN; \\ &\Leftrightarrow \forall g \in H \text{ için } xN \in C_{H/N}(gN) \end{aligned}$$

Buradan $H(g)/N = C_{H/N}(gN)$ dir. Böylece $g \in K \cap H$ olması için gerek ve yeter şart

$C_{H/N}(gN)$ nin H/N de sonlu indeksli altgrup olmasıdır ya da denk olarak $gN \in FC(H/N)$ olmasıdır.

Gerçekten $g \in K \cap H$ ise $g \in K$ ve $g \in H$ olduğundan $[H : H(g)] < \infty$ ve $N < H(G)$ olduğundan $[H : H(g)]N / N < \infty$ ve böylece $[H / N : H(g) / N] < \infty$ dur. Fakat $H(g)/N = C_{H/N}(gN)$ olduğundan $[H / N : C_{H/N}(gN)] < \infty$ dur. Böylece $gN \in FC(H / N)$ dir.

Karşıt olarak $gN \in FC(H / N)$ olsun. O zaman $[H / N : C_{H/N}(gN)] < \infty$ dur. $H(g)/N = C_{H/N}(gN)$ olduğundan $[H / N : H(g) / N] < \infty$ ve böylece $[H : H(g)] < \infty$ olduğundan $g \in K$ dır. Fakat $g \in H$ olduğundan $g \in K \cap H$ dır.

Böylece L, H de $FC(H / N)$ nin ters görüntüsü olmak üzere $K \cap H = L$ dir. Açık olarak teorem aşağıdaki şartların sağlandığı durumlarda geçerlidir.

- (i) K G de invaryant altkümedir.
- (ii) K çarpma işlemi altında kapalıdır.

Önce (i) yi ispat edelim. Kabul edelim ki $g \in K, t \in G$ ve $H_1 = H^t(g) \cap H$ olsun. O zaman

$$[g^t, H_1] = [g^t, H^t(g) \cap H] = [g, H(g) \cap H^{t^{-1}}]^t \leq N^t$$

dir. $N \triangleleft H$ ve dolayısıyla N altgrubu H -invaryant ve N^t altgrubu $H^t(g)$ -invaryanttır. Sonuç olarak N^t ve $N \cap N^t$ altgrupları $H^t(g) \cap N$ -invaryanttır. O halde N^t ve $N \cap N^t$ altgrupları H_1 -invaryanttır.

Hipotezden dolayı N, G de dingin olduğundan $N \cap N^t, N^t$ de sonlu indekslidir.

$$N_1 = N^t \text{ ve } N_2 = \bigcap_{x \in N_1} (N \cap N^t)^x \text{ olsun. } [N_1 : N_2] < \infty, \text{ ayrıca } N_1 \triangleleft N_2 \text{ ve } N_2$$

H_1 -invarianttır. $H_2 = C_{H_1}(N_1/N_2)$ olsun. N_1/N_2 nin sonlu olduğundan $[H_1:H_2] < \infty$ dur ve böylece H_2 , H da sonludur.

$$\varphi: H_2 \rightarrow N_1/N_2, \quad \varphi(i) = [i, g^t]N_2$$

olsun. $i \in H_2 = C_{H_1}(N_1/N_2)$ olduğundan $[i, g^t] = [g^t, i] \in N_1$ dir. Böylece φ dönüşümü anlamlıdır.

Şimdi φ dönüşümünün homomorfizma olduğunu gösterelim. $a, b \in H_2$ olsun. O zaman

$$\varphi(ab) = [ab, g^t]N_2 = [a, g^t]^b [b, g^t]N_2 \text{ dir. } b \in C_{H_1}(N_1/N_2) \text{ olduğundan}$$

$$[a, g^t]^b N_2 = [a, g^t] N_2 \text{ dir. Böylece}$$

$$\varphi(ab) = [ab, g^t]N_2 = [a, g^t]^b [b, g^t]N_2 = [a, g^t][b, g^t]N_2 = \varphi(a)\varphi(b)$$

dir. N_1/N_2 sonlu grup olduğundan $\text{Ker } \varphi = H_3$, H_2 içinde sonlu indekslidir. Böylece

$\forall x \in \text{Ker } \varphi = H_3$ için $\varphi(x) = [x, g^t] N_2 = N_2$ olduğundan $[H_3, g^t] \leq N_2$ dir. O halde

$$[g^t, H_3] = [H_3, g^t] \leq N_2 \leq N$$

dir. Sonuç olarak $H_3 \leq H(g^t)$ dir. Bundan dolayı $g^t \in K$ dir.

Şimdi de iddia (ii) yi ispat edelim. $a, b \in K$ olsun. (i) den dolayı K , G -invariant olduğundan $a^b \in K$ dir. Bundan dolayı $R = (H(a^b))^{b^{-1}} \cap H(b)$, H da sonlu indeksli altgruptur. $[ab, R] \leq N$ olduğunu gösterelim. $r \in R$ olsun. O zaman $[ab, r] = [a, r]^b [b, r]$ dir. $R \leq H(b)$ olduğundan $[b, r] \in N$ dir.

$[ab, r] \in N$ olduğunu göstermek için $[a, r]^b \in N$ olduğunu göstermek yeterlidir. $[a, r]^b = [a^b, b^b]$ ve $R^b \leq H(a^b)$ olduğundan $[a, r]^b = [a^b, b^b] \in N$ dir. Böylece $[ab, r] \in N$ dir. Böylece $[ab, R] \leq N$ ve $R \leq H(ab)$ dir.

Böylece K G -invariant altgrubu çarpma işlemi altında kapalıdır. Sonuç olarak $L \leq H \cap \langle L^g : g \in G \rangle \leq H \cap K \leq L$ ve böylece $L = H \cap \langle L^g : g \in G \rangle$ dir.

Teorem 6.2.1 in ispatının (ii) şikkından dolayı $K = \{ g \in G : |H : H(g)| < \infty \}$ altkümesi çarpma altında kapalı olduğundan $K \cap K^{-1}$, G nin bir alt grubudur. Ayrıca (ii) den dolayı K , G -invariant olduğundan K^{-1} de G -invarianttır. Böylece $K \cap K^{-1}$, G -invarianttır. Bundan dolayı $K \cap K^{-1}$, G nin bir normal alt grubudur. Böylece Teorem 6.2.1, Önerme 6.2.1 i içerir.

6.2.2. Sonuç

Kabul edelim ki $1 \neq N \triangleleft H < G$ ve N ve H , G basit grubunda dingin altgruplar olsun. O zaman H/N bir FC- gruptur.

İspat

Teorem 6.2.1 den açıktır.

6.3. Dingin Altgruplarda Radikaller

6.3.1. Tanım

$\mathfrak{K}$ grupların sınıfı olsun. Eğer her $G \in \mathfrak{K}$ için

$$\mathfrak{K}(G) = \langle X : X \triangleleft G, X \in \mathfrak{K} \rangle \in \mathfrak{K}$$

ise $\mathfrak{K}$ grupların sınıfına $\mathfrak{K}$ grupların sınıfında *radikaldir* denir.

Bir $\mathfrak{R}$ radikal sınıfı verildiğinde, bir G grubunun $\mathfrak{R}(G)$ altgrubuna G nin $\mathfrak{R}$ -radikali denir. Eğer $\mathfrak{R}$ radikal sınıfının keyfi bir grubundaki sonlu indeksli olan her normal altgrup da $\mathfrak{R}$ ye ait ise o zaman $\mathfrak{R}$ ye *dingin radikal sınıf* denir.

Periyodik gruplar, lokal sonlu gruplar, lokal nilpotent gruplar gibi sınıflar, bütün grupların sınıfında *dingin radikal* sınıflara örnek oluşturur. Lokal çözülebilir grupların sınıfı lokal sonlu lineer grupların sınıfında *dingin radikal*dir.

6.3.1. Teorem

G bir grup, H G nin *dingin* altgrubu, $\mathfrak{R}$ altgrup kapalı grupların sınıfı olmak üzere $H \in \mathfrak{R}$ ve $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}$ nin *dingin radikal* sınıfı olsun. O zaman $\mathfrak{R}(H)$ altgrubu G de *dingin*dir.

İspat

Kabul edelim ki $K = \mathfrak{R}(H)$ ve $g \in G$ olsun. H, G de *dingin* olduğundan $H \cap H^g$, H da sonlu indekslidir. O zaman $H \cap H^g$, H da normal, sonlu indeksli bir H_1 altgrubu içerir. $K_1 = H_1 \cap K^g$ olsun.

$$K = \langle X : X \triangleleft H, X \in \mathfrak{R} \rangle \in \mathfrak{R}$$

olduğundan K^g, H^g -invariant altgruptur. Yani $K^g \triangleleft H^g$ dir. Ayrıca $H_1 \triangleleft H$ olduğundan $K_1 = H_1 \cap H^g \triangleleft H \cap H^g = H_1$ dir. O halde $K_1 \triangleleft H_1$ dir. H_1 ve H^g akran olduğundan $[H_1 : H_1 \cap H^g] < \infty$ ve $[H^g : H_1 \cap H^g] < \infty$ dur. Her iki tarafın K^g ile arakesitini alırsak $[H^g \cap K^g : H_1 \cap H^g \cap K^g] < \infty$ olduğundan $[K^g : K_1 \cap H^g] < \infty$ dur. Böylece $[K^g : K_1] < \infty$ dur. O zaman K_1, K^g de normal sonlu indeksli bir K_2 altgrubu içerir. $\mathfrak{R}$ *dingin radikal* olduğundan $K_2 \in \mathfrak{R}$ dir ve $\mathfrak{R}(K_1), K_1$ de sonlu indeksli bir altgruptur. Bununla başka $\mathfrak{R}(K_1), K_1$ de karakteristik altgrup ve $K_1 \triangleleft H_1$ olduğundan $\mathfrak{R}(K_1) \triangleleft H_1$ dir. Böylece

$$K_2 \leq \mathfrak{K}(K_1) \leq \mathfrak{K}(H_1) \leq \mathfrak{K}(H) = K$$

ve böylece $K \cap K^g$, K^g de sonlu indekslidir. g , G nin herhangi bir elemanı olduğundan K , G de dingindir.

6.4. Basit Gruplarda Dingin Altgruplar

Bölüm 6.2 de Önerme 6.2.1 den sonra verilen sonuçlarda basit gruplardaki dingin altgrupların yapısının bazı özelliklerinden bahsedilmişti. Diğer bir gerçek aşağıdaki iddia üzerinde temel teşkil eder.

İddia : Her $H \leq G$ altgrubu için $\bigcap_{x \in G} H^x \triangleleft G$ dir.

İddiayı kullanarak aşağıdaki önermeyi elde edebiliriz.

6.4.1. Önerme

Basit bir gruptaki her öz dingin altgrup residually-sonludur.

İspat

G bir basit grup, H G nin öz dingin altgrubu olsun. O zaman $H < G$, $\bigcap_{x \in G} H^x \triangleleft G$ ve G basit grup olduğundan $\bigcap_{x \in G} H^x = 1$ dir. O zaman $\forall 1 \neq h \in H$ için $\exists x \in G$ vardır öyle ki $h \notin H^x$ dir. O zaman $h \notin H \cap H^x$ dir. H , G nin dingin altgrubu olduğundan $[H : H \cap H^x] < \infty$ dur. O zaman $H \cap H^x$, H da normal ve sonlu indeksli olan bir H_h altgrubu içerir. $h \notin H \cap H^x \geq H_h$ olduğundan $h \notin H_h$ ve $H_h \triangleleft H$ dir. Ayrıca $[H : H_h] < \infty$ olduğundan H residually sonludur.

Sonuç 6.2.2 ve Teorem 6.3.1 i kullanarak daha derin ve ilginç sonuçlar elde edebiliriz.

6.4.1. Teorem

G basit bir grup ve $H < G$ öz dingin altgrup olsun. $\mathfrak{K}$ altgrup kapalı bir gruplar sınıfı olmak üzere $H \in \mathfrak{K}$ ve $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{K}$ de grupların dingin radikal sınıfı olsun. O zaman $H / \mathfrak{R}(H)$ bir FC-gruptur.

İspat

G bir basit grup ve $H < G$ dingin altgrup olduğundan Önerme 6.4.1 den dolayı H residually sonludur. O zaman her $1 \neq h \in H$ için bir $h \notin H_h$ vardır öyle ki $H_h < H$ ve H/H_h sonlu ve $\mathfrak{R}$ dingin radikal olduğundan her $1 \neq h \in H$ için $H_h \in \mathfrak{R}$ dir. Böylece $H_h \leq \mathfrak{R}(H)$ dır. Bu yüzden $\mathfrak{R}(H) \neq 1$ dir. Ayrıca Teorem 6.3.1 den dolayı $\mathfrak{R}(H)$, G nin dingin altgrubudur.

Böylece $1 \neq \mathfrak{R}(H) < H < G$ ve $\mathfrak{R}(H)$ ile H basit G grubunun dingin altgrubu olduğundan Sonuç 6.2.2 den dolayı $H / \mathfrak{R}(H)$ bir FC-gruptur.

Teorem 6.4.1 in yardımıyla Teorem 6.1.3, 6.1.4 ve 6.1.5 in ispatı yapılabilir.

Teorem 6.1.3 ün ispatı

G bir grup ve H altgrubu Teorem 6.1.3 ün hipotezlerini sağlasın. Eğer $H = G$ ise hipotezden G aşıkâr olmayan bir periyodik normal altgrup içerir. Fakat G basit olduğundan periyodik gruptur. O zaman G' de periyodiktir. O halde $H < G$ kabul edebiliriz.

Bütün grupların sınıfında periyodik grupların sınıfı dingin radikal olduğundan ve teoremin hipotezinden dolayı H aşıkâr olmayan periyodik normal altgrup içerdiğinden H nin 1 den farklı en büyük normal periyodik altgrubu vardır. Bu altgrup $T(H)$ olsun. O zaman Teorem 6.4.1 den dolayı $H / T(H)$ bir FC-gruptur. O halde $H'T(H) / T(H)$ periyodiktir. Buradan $H'T(H)$ periyodik olduğundan H' periyodiktir.

Teorem 6.1.4 ün ispatı

Teorem 6.1.3 e benzer olarak yapılır.

Teorem 6.1.5 in ispatı

Teorem 6.1.5 iki iddia içerir. İlk iddia Teorem 6.4.1 den kolayca gösterilir. Teorem 6.1.5 in ikinci iddiasını göz önünde bulunduralım. H , G basit grubunda dingin altgrup olsun, H nin lokal nilpotent radikali $F(H)$, sonlu mertebeli aşıkâr olmayan elemanlar içersin ve H bir FC-grup olmasın. Eğer $F(H)$ grubunun periyodik radikali $T=T(F(H))$ asal değil ise, o zaman T altgrubu $p \in \pi(T)$ olmak üzere maksimal aşıkâr olmayan p -altgruplarının direkt çarpım olarak $T = P_1 \times P_2 \times \dots$ ile temsil edilir. Teorem 6.3.2 den dolayı P_i altgrubu da G de dingindir. Sonuç 6.2.2 den H / P_i nin her i için FC- grup olduğu sonucuna varırız. Dolayısıyla H , iki FC- grubunun alt direkt çarpımı olarak yine bir FC-gruptur. Bu da bizim iddiamızla çelişir. Buradan, Teorem 6.1.5 in ikinci iddiası da geçerlidir.

6.4.1. Lemma

Kabul edelim ki $N \triangleleft G$, $FC_G(N) = G$ ve $G/C_G(N)$ bir FC-grup olsun. O zaman $[G, N] \leq FC(G)$ dir.

İspat

$g \in G$ nin herhangi bir elemanı olmak üzere $K = \{ [g, n] : n \in N \} \subseteq FC(G)$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$FC_G(N) = G$ olduğundan N bir FC-grup ve $N \triangleleft G$ olduğundan $K \subseteq N$ dir. O zaman $[g, N]$ sonludur (Sonuç 3, sf 122) [10]. O halde K kümesi sonludur. $\bar{G} = G/C_G(N)$ olsun.

$$\begin{aligned} \pi : G &\rightarrow G/C_G(N) \\ g &\rightarrow gC_G(N) \end{aligned}$$

epimorfizma olmak üzere L, G de $C_{\bar{G}}(gC_G(N))$ altgrubunun ters görüntüsü olsun.

$$\begin{aligned}
 L &= \{ x \in G : \pi(x) \in C_{\bar{G}}(gC_G(N)) \} \\
 &= \{ x \in G : xC_G(N) \in C_{\bar{G}}(gC_G(N)) \} \\
 &= \{ x \in G : x^{-1}gx C_G(N) = gC_G(N) \} \\
 &= \{ x \in G : [g, x] \in C_G(N) \}
 \end{aligned}$$

Lemma'nın hipotezinden $\bar{G}$ bir FC-gruptur. Dolayısıyla L, G de sonlu indeksli bir altgruptur. $\forall x \in G$ için, $g^x = gc$ olacak şekilde $c \in C_G(N)$ vardır. Böylece $\forall n \in N$ için

$$[g, n]^x = [g^x, n^x] = [gc, n^x] = [g, n^x]^c [c, n^x]$$

$c \in C_G(N)$ olduğundan $[c, n^x] = 1$ ve $[g, n^x]^c = [g, n^x]$ dir. Böylece $L \leq N_G(K)$ ve $K \leq FC(G)$ dir.

6.4.2. Teorem

G bir basit grup, H ve N, G nin dingin iki altgrubu ve $N \triangleleft H$ olsun. Eğer $FC(H) = 1$ ise o zaman $FC(N) = 1$ dir.

İspat

Kabul edelim ki $FC(H) = 1$ ve $FC(N) \neq 1$ olsun. Sonuç 6.2.1 den dolayı $FC_G(N) = G$ dir. Özel olarak N bir FC-gruptur.

Önce N grubunun lokal nilpotent radikali $F(N)$ nin 1 den farklı olduğu durumu göz önüne alalım. Sonuç 6.2.2 den dolayı $H / F(N)$ bir FC-gruptur. Herhangi bir lokal nilpotent FC-

grup aşikar olmayan merkeze sahip olduğundan $Z(F(N)) \neq 1$ dir. $FC_G(N) = G$ olduğundan

$$FC_H(Z(F(N))) = H$$

ve $F(N) \leq C_H(Z(F(N)))$ dir. Böylece $H/F(N)$ bir FC-grup olduğundan $H/C_H(Z(F(N)))$ FC-gruptur. Lemma 6.4.1 den

$$[H, Z(F(N))] \leq FC(H) = 1$$

elde ederiz. Böylece $Z(F(N)) \leq Z(H) \leq FC(H) = 1$ ve $Z(F(N)) = 1$ elde ederiz. Bu bir çelişkidir. O halde $F(N) \neq 1$ dir.

Şimdi de eğer $F(N) = 1$ ise o zaman N lokal normal gruptur. Böylece bir sonlu minimal normal abeliyan olmayan M altgrubu içerir. $L = \langle M^x \mid x \in H \rangle$ olsun. O zaman L sonlu basit abeliyan olmayan grupların direkt çarpımıdır. H grubu L nin ayrışımındaki basit direkt faktörleri üzerine geçişli etki eder ve sonuç olarak L, H de minimal normal altgruptur. Önerme 6.4.1 den dolayı H residually sonlu olduğundan her $g \in L$ ve $g \neq 1$ için H de sonlu indeksli normal altgrup R vardır öyle ki $g \notin R$ dir. Böylece $R \cap L \neq L$ olduğundan ve L, H nin minimal normal altgrubu olduğundan $R \cap L = 1$ dir. H/R sonlu olduğundan $RL/R \cong L/R \cap L$ sonludur. Fakat $R \cap L = 1$ olduğundan L sonludur. Böylece $L \leq FC(H) = 1$ dir. Bu bir çelişkidir ve teoremin ispatı tamamlanır.

6.4.1. Sonuç

H, G basit grubunun dingin altgrubu, $F(H)$, H grubunun 1 den farklı lokal nilpotent radikali ve $FC(H) = 1$ olsun. O zaman $F(H)$ altgrubunun periyodik radikali aşikar FC-radikale sahiptir.

Sonuç 6.2.1 i kullanarak dingin FC-altgruplarda çeşitli genel sonuçlar elde edilebilir. Onların kolay ispatları aşağıdaki gözlemin temeline dayanır. H, G basit grubunda dingin

FC-altgrup olsun. O zaman her sonlu $K \subset G$ sonlu kümesi için $C_H(K)$ H de sonlu indekse sahiptir.

6.4.2. Sonuç

Sonlu üreteçli basit bir gruptaki her dingin altgrup ya sonludur ya da FC-radikale sahiptir.

6.4.3. Sonuç

Altkümelerin merkezleyenleri için minimal koşulunu sağlayan basit bir grupta her dingin altgrup ya sonludur ya da FC-radikale sahiptir.

Son olarak, basit lineer gruplarda dingin altgrupları göz önüne alalım. Bir yarı basit lineer grupta her residually-sonlu dingin periyodik altgrup sonludur (Sonuç 5.12) [1]. Bu çalışmada elde edilen sonuçların yardımı ile Teorem 6.1.6 yı ispatlayabiliriz.

Teorem 6.1.6 nın ispatı

(i) H bir basit lineer G grubunda sonsuz öz dingin altgrup olsun. Lineer gruplar altkümelerin merkezleyenleri için minimal şartını sağladığından ve H , G nin sonsuz dingin altgrubu olduğundan Sonuç 6.4.3 ten dolayı H altgrubunun FC-radikali aşıkardır. Sonuç olarak Teorem 6.1.6 nın ilk iddiası sağlanmış olur.

(ii) Kabul edelim ki H nin 1 den farklı periyodik radikali $T(H)$ olsun. (i) den dolayı $FC(H) = 1$ olduğundan $T(H)$ sonsuz altgruptur. Gerçekten eğer $T(H)$ sonlu ise $T(H) \leq FC(H) = 1$ olduğundan $T(H) = 1$ olur ki bu kabulümüzle çelişir. O halde $T(H)$ sonsuzdur. Teorem 6.3.1 den dolayı $T(H)$, G de bir dingin altgruptur. Bundan başka Önerme 6.4.1 den $T(H)$ residually-sonlu gruptur. Fakat bu bir çelişkidir (Sonuç 5.12) [1]. O halde H nin aşıkır olmayan normal periyodik altgrubu yoktur. Böylece Teorem 6.1.6 nın ikinci iddiası da sağlanmış olur.

(iii) H grubunun lokal çözülebilir radikali S , 1 den farklı olsun. (i) den dolayı H nin FC-radikali aşıkardır olduğundan S altgrubu sonsuzdur. Teorem 6.3.1 den S , G nin dingin alt grubudur. G bir lineer grup olduğundan G de indirgenmiş Zariski topolojisini göz önüne alabiliriz. İndirgenmiş topolojide S alt grubunun kapanışı $\bar{S}$ ile gösterilsin. Lokal çözülebilir lineer grupların çözülebilirliğinden, S alt grubu için ve böylece S nin $\bar{S}$ kapanışı için çözülebilirliğinden bir sonuca varabiliriz. Bundan başka $\bar{S} \neq G$ ve $\bigcap_{x \in G} \bar{S}^x = 1$ dir. $\bar{S}$ alt grubu kapalı olduğundan G de x_i elemanlarının her sonlu kümesi için

$$\bigcap_{x \in G} \bar{S}^x = \bigcap_i \bar{S}^{x_i}$$

dir. Bundan dolayı

$$\bigcap_i S^{x_i} \leq \bigcap_i \bar{S}^{x_i} = 1$$

Böylece $\bigcap_i S^{x_i} = 1$ dir. Bundan başka S , G de bir dingin alt grup olduğundan her $\forall x_i \in G$ için $[S : S \cap S^{x_i}] < \infty$ olduğundan G de x_i elemanlarının her sonlu kümesi için $[S : \bigcap_i S^{x_i}] < \infty$ dur. Fakat $\bigcap_i S^{x_i} = 1$ olduğundan S sonludur. Bu bir çelişkidir. O halde $S=1$ dir. Böylece Teorem 6.1.6 nın ispatı tamamlanmış olur.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde dingin gruplar, akranlık , alterne gruplarda ve Lie tipi gruplarda involisyonların merkezleyenleri ve son olarak da sonsuz basit gruplarda dingin altgruplar kavramlarına değinilmiştir.

Çalışmamızdan yararlanmak isteyen okuyucular grup teorisine genel bir giriş yapmış olmalı , radikaller , involisyonlar , alterne gruplar ve FC-gruplar hakkında gerekli bilgilere sahip olmalıdırlar. Çalışmamızın ilk bölümünde ihtiyaç duyulabilecek genel bilgiler verilmiştir. Bu konu ile ilgili yapılacak çalışmalarda, bizim çalışmamızın faydalı olmasını umarım.

KAYNAKLAR

1. Balyaev , V. V., “Locally Finite Groups Containing a Finite Inseparable Subgroup”, *Sibirsk. Mat. Zh.* , 34 (2) : 23-41 (1993).
2. Robinson, D. J. S., A Course in the Theory of Groups, *Springer-Verlag*, New York , 91-244 (1996).
3. Hartley, B., “The Normalizer Condition and Mini-Transitive Permutation Groups”, *Algebra i Logika* , 13 (5) : 539-602 (1974).
4. Bergman, G. M., Lenstra, H. W. Jr., “Subgroups Close to Normal Subgroups” , *Journal of Algebra*, 127 : 80-97 (1989).
5. Hall, P., Kulatilaka, C. R., “A Property of Locally Finite Groups” , *J. London Math. Soc.*, 39 : 235-239 (1964).
6. Herstein, I. N., “ A Remark on Finite Groups”, *Proc. London Math. Soc.*, 9 : 255-257 (1958).
7. Balyaev , V. V., “Locally Finite Groups with Cernikov Sylow p-Subgroups”, *Algebra i Logika*, 20 (6) : 605-619 (1981).
8. Kuzucuoglu, M., “Barely Transitive Permutation Groups”, *Arch. Math.* , 55 : 521-532 (1990).
9. Hartley, B., Kuzucuoglu, M., “Centralizers of Elements in Locally Finite Simple Groups”, *Proc. London Math. Soc.* , 62 (3) : 301-324 (1991).
10. Balyaev, V. V., “Inert Subgroups in Infinite Simple Groups”, *English Translation Siberian Math. J.* , 34 : 218-232 (1993).
11. Balyaev , V. V. , “Locally Finite Groups with Cernikov Sylow p-Subgroups”, *Translation Algebra and Logic*, 20 : 93-402 (1981).
12. Özyurt, E., “Inert subgroups and centralizers of involutions in locally finite simple groups” , Doktora Tezi , *Orta Doğu Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, 5-48 (2003).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : USTA, Tuğba
 Uyruğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 25.03.1980 Ankara
 Medeni hali : Evli
 e-mail : tbozkurtusta@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik Bölümü	2003
Lise	Başkent Lisesi YDA	1997

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2004-2006	Özel Umuda Yükseliş Dersanesi	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Sinema, Tiyatro, Müzik, Hayvanlar