

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

Nazan AKDOĞAN

SONSUZ GRASSMANN CEBİRLERİNİN OTOMORFİZMLERİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2022

ÖZ

DOKTORA TEZİ

SONSUZ GRASSMANN CEBİRLERİNİN OTOMORFİZMLERİ

Nazan AKDOĞAN

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Doç. Dr. Şehmus FINDIK
Yıl: 2022, Sayfa: 51
Jüri : Doç. Dr. Şehmus FINDIK
: Prof. Dr. Hamza MENKEN
: Doç. Dr. Zeynep ÖZKURT
: Doç. Dr. Tuncay TUNÇ
: Doç. Dr. Nazar Şahin ÖĞÜŞLÜ

Bu tezde sonsuz boyutlu Grassmann cebirinin otomorfizmler grubunun özel bir alt grubu belirlendi ve bu alt grup için bir üreteç kümesi verildi. Ayrıca sonsuz boyutlu Grassmann cebirleri tarafından üretilen varyetede rankı 2 ve 3 olan serbest cebirler ele alındı. Bu serbest cebirlerin simetrik polinomlarının cebirleri için sonlu üreteç kümeleri elde edildi.

Anahtar Kelimeler: Grassmann, otomorfizm, simetrik polinom.

ABSTRACT

PhD THESIS

AUTOMORPHISMS OF INFINITE GRASSMANN ALGEBRAS

Nazan AKDOĞAN

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor : Assoc. Dr. Şehmus FINDIK
Year: 2022, Pages: 51
Jury : Assoc. Dr. Şehmus FINDIK
: Prof. Dr. Hamza MENKEN
: Assoc. Prof. Dr. Zeynep ÖZKURT
: Assoc. Prof. Dr. Tuncay TUNÇ
: Assoc. Prof. Dr. Nazar Şahin ÖĞÜŞLÜ

In this thesis, a special subgroup of the automorphism group of the infinite dimensional Grassmann algebra was determined and a generating set for this subgroup was given. In addition, the free algebras of rank 2 and rank 3 in the variety generated by infinite dimensional Grassmann algebras were considered. Finite generating sets for algebras of symmetric polynomials of these free algebras were obtained.

Keywords: Grassmann, automorphism, symmetric polynomial.

GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

Grassmann cebiri, Hermann Grassmann tarafından yapılan çalışmalarla başlayıp, farklı bakış açıları ve konularla zenginleşerek günümüzde de yaygın olarak çalışılan konular arasında yer almaktadır. Gibbs, Clifford, Peano, Whitehead, Forder gibi birçok isim tarafından çalışılmıştır.

$K\langle X_m \rangle$, karakteristiği sıfır olan bir cisim üzerinde $x_1, \dots, x_m$ tarafından üretilen serbest birleşmeli cebir olsun. $K\langle X_m \rangle$ nin $x_i x_j + x_j x_i$, $1 \leq i, j \leq m$ şeklindeki elemanlar tarafından üretilen bir ideali I_m olmak üzere $K\langle X_m \rangle / I_m$ bölüm cebirine Grassmann cebiri denir.

Grassmann cebirinin otomorfizm grupları ile ilgili yapılmış birçok çalışma mevcuttur. Bu çalışmalarda sonlu boyutlu Grassmann cebirinin otomorfizm grubunun, belli şekilde tanımlı üç alt grubun yarıdirekt çarpımına izomorf olduğu belirtilmiştir. Bu tezin üçüncü bölümünde sonlu boyut için yapılmış çalışmalardan yola çıkarak sonsuz boyutlu Grassmann cebirinin otomorfizm grubunu elde etmek için bazı çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalarda sonsuz boyutlu Grassmann cebirinin otomorfizm grubunun bir alt grubu elde edilmiştir. Bu alt grup, sonlu boyutlu Grassmann cebirinin otomorfizm grubunu tanımlamada rol oynayan alt gruplardan birine karşılık gelir. Dolayısıyla bu alt grup sonsuz boyutlu Grassmann cebirinin otomorfizm grubunu tanımlamada önemli bir rol oynayacaktır. Ayrıca elde edilen alt grup için bir üreteç kümesi bulundu ve elde edilen alt gruptaki her otomorfizmi üreteç elemanlarının bir bileşkesi olarak nasıl yazılacağını gösteren bir algoritma verildi.

Bir A cebirin bütün polinom özdeşliklerinin kümesi, $K\langle X_n \rangle$ nin bir T -idealini oluşturur. Bu T -idealindeki polinom özdeşlikleri tarafından tanımlanan varyeteye A cebiri tarafından üretilen varyete denir.

Sonsuz boyutlu Grassmann cebirleri tarafından üretilen varyetede rankı 2 olan

serbest F_2 cebirini ele alalım. F_2 cebirindeki simetrik polinomların kümesi S_2 simetrik grubunun $F_2^{S_2}$ invaryant cebiri olup bu tezin dördüncü bölümünde $F_2^{S_2}$ invaryant cebirinin sonlu bir üreteç kümesi elde edilecektir.

Sonsuz boyutlu Grassmann cebirleri tarafından üretilen varyetede rankı 3 olan serbest F_3 cebirini ele alalım. F_3 cebirindeki simetrik polinomların kümesi S_3 simetrik grubunun $F_3^{S_3}$ invaryant cebirini oluşturur. F_3 cebirinin komütatör ideali F'_3 bir sol $K[X_3]$ -modüldür ve $(F'_3)^{S_3}$ bir sol $K[X_3]^{S_3}$ -modüldür. Bu tezin beşinci bölümünde $F_3^{S_3}$ invaryant cebiri elde edilecektir ve $K[X_3]^{S_3}$ -modül olan $(F'_3)^{S_3}$ için sonlu bir üreteç kümesi verilecektir.



Sevgili anne ve babama

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanması sırasında bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan, yardımlarını ve desteğini esirgemeyen, bilgisi ve kişiliğiyle örnek aldığım saygıdeğer danışman hocam Sayın Doç. Dr. Şehmus FINDIK’a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Doktora tez izleme komitesi jüri üyeleri Sayın Doç. Dr. Zeynep ÖZKURT ve Sayın Doç. Dr. Tuncay TUNÇ’a ilgi ve desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümünün akademik personeline yardım ve destekleri için teşekkür ederim. Görev yaptığım süre boyunca yardım ve desteklerini eksik etmeyen İstanbul Teknik Üniversitesi Matematik Mühendisliği Bölümünün akademik personeline ve sevgili araştırma görevlisi arkadaşlarıma teşvikleri ve bana sağladıkları katkılar için teşekkür ederim.

Bu hayatta desteğini en çok hissettiğim, varlıklarıyla hayatıma anlam veren canım anneme, babama ve kardeşime her şey için sonsuz sevgilerimi ve teşekkürlerimi sunarım. İyi ki varsınız.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZ	I
ABSTRACT	II
GENİŞLETİLMİŞ ÖZET	III
TEŞEKKÜR	VI
İÇİNDEKİLER	VII
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER	5
3 GRASSMANN CEBİRİNİN OTOMORFİZMLERİ	19
4 2 RANKLI SERBEST CEBİRDE SİMETRİK POLİNOMLAR	33
5 3 RANKLI SERBEST CEBİRDE SİMETRİK POLİNOMLAR	37
KAYNAKLAR	47
ÖZGEÇMİŞ	51

1. GİRİŞ

Grassmann cebiri, Hermann Grassmann (1844) tarafından yapılan çalışmaya dayanır. Hermann Grassmann'ın çalışmalarının önemi uzun yıllar keşfedilmedi. 1860'lardan sonra yavaş yavaş önemi anlaşılmaya başlanan bu çalışmalar, 1877 yılına gelindiğinde özellikle J. Willard Gibbs ve William Kingdon Clifford'un oldukça dikkatini çekmiştir. Ayrıca Grassmann cebiri Giuseppe Peano (1888) tarafından incelenmiştir. Hermann Grassmann'ın çalışmaları üzerine yapılmış en kapsamlı çalışmalardan biri Alfred North Whitehead (1898) diğeri ise Henry George Forder (1941) tarafından yapılmıştır.

Fizikte ve mühendislikte yaygın olarak kullanılan geometrik ve fiziksel unsurların çoğu matematiksel olarak temsil edilirken Grassmann cebiri kullanılmıştır.

Grassmann cebiri $[[x, y], z] = 0$ özdeşliğini sağlıyor olup bir PI-cebirdir. Grassmann cebiri PI-teoride önemli bir yere sahiptir. PI-teorisinde amaçlarından biri bir cebirin özdeşliklerinin T -idealinin üreteçlerini elde etmektir. Krakowski ve Regev (1973) karakteriği sıfır olan bir cisim üzerinde sonsuz boyutlu ve birimli Grassmann cebirinin T -idealinin $[[x, y], z]$ komütatörü tarafından üretildiğini gösterdi. Cismin karakteristiği pozitif (asal) iken bu durumun hala geçerli olduğunu Giambruno ve Koshlukov (2001) göstermiştir. Bekh-Ochir ve Rankin (2011) ise sonlu bir cisim üzerinde sonsuz boyutlu birimli Grassmann cebirinin T -idealinin üreteçlerini elde etti.

Herhangi bir cebiri tanımak ve karakterize etmek için bu cebirin otomorfizm grubunu çalışmak önemli bir yaklaşımdır. Grassmann cebirlerinin otomorfizm grupları ile ilgili çalışmalarından biri Berezin (1967) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmaya göre sırasıyla U_m ve B_m ile lineer otomorfizmler grubunu ve lineer bileşene sahip olmayan bir f_p için $T(e_p) = e_p + f_p(e_1, \dots, e_m)$ şeklindeki otomorfizmlerin grubunu tanımlayalım. Burada e_p Grassmann cebirinin üretecidir. K karmaşık sayılar cismi

iken Berezin (1967) G_m m üreteçli Grassmann cebirinin otomorfizmler grubunun B_m ve U_m alt gruplarının yarı direkt çarpımı olduğunu belirledi. Karakteristiği 2'den farklı bir cisim için Djoković (1978), G_m cebirinin otomorfizmler grubunun Grassmann cebirinin iç otomorfizmler grubu ile G_m cebirinin Z_2 -derecelendirmesini koruyan $\text{Aut}(G_m)$ nin bir alt grubunun yarı direkt çarpımı olarak yazılabileceğini gösterdi. Bavula (2010) K değişmeli bir halka iken Grassmann cebirlerinin otomorfizmleri grubunun benzer şekilde yazılabileceğini gösterdi. Grassmann cebirinin $\text{Aut}(G_m)$ otomorfizmler grubunun tanımı açık bir şekilde literatürde verilmiştir (bkz. László, 2016).

Bu tezin üçüncü bölümünde, G_m Grassmann cebirinin otomorfizmleri grubuyla ilgili elde edilen sonuçlardan yola çıkarak ve sonlu boyutlu Grassmann cebiri fikrini karakteristiği sıfır olan bir cisim üzerindeki sayılabilir sonsuz eleman tarafından üretilen (sayılamaz sonsuz boyutlu) G Grassmann cebirine taşıyarak sonsuz boyutlu G Grassmann cebirinin $\text{Aut}(G)$ otomorfizmlerinin bir sınıfı verilecektir. Bu sınıf sonsuz boyutlu Grassmann cebirinin $\text{Aut}(G)$ otomorfizmleri grubunun bir H alt grubunu oluşturur. Bu, $\text{Aut}(G)$ grubunun tanımlanmasında önemli bir rol oynayacaktır. Ayrıca H alt grubundaki her otomorfizmi belli bir şekilde tanımlanmış otomorfizmler cinsinden ifade eden bir algoritma elde edildi. Böylece bu şekilde tanımlanmış otomorfizmler H grubu için sonsuz elemanlı bir üreteç kümesini oluşturur. (Akdoğan, 2021a)

L , $\text{GL}_m(K)$ genel lineer grubunun bir alt grubu ve $X_m = \{x_1, \dots, x_m\}$ olsun. Her $g \in L$ için $g(p(X_m)) = p(X_m)$ olacak şekildeki $p(X_m) \in K[X_m]$ polinomlarının kümesine L nin invaryant cebiri denir ve $K[X_m]^L$ ile gösterilir. Burada $K[X_m]$ ile değişmeli polinomların cebiri gösterilmektedir. İnvaryant teorisinin birinci ve ikinci temel teoremleri olarak bilinen invaryant cebirinin sonlu üretilmesi ve syzygy'lerin sonlu bazlı olması ile ilgili çalışmalar 19. yüzyılın son yıllarında yayınlanan Hilbert (1890); Hilbert (1893) çalışmalarında ele alınmıştır. Hilbert'in 1900 yılında Paris kongresinde ortaya attığı meşhur yirmi üç probleminden biri olan *Hilbert'in 14. problemi* (Hilbert,

1900), Hilbert'in kendi elde ettiği sonuçları $GL_m(K)$ grubunun herhangi bir alt grubuna genellemeyi amaçlıyordu. Bu problemin özel bir durumu $GL_m(K)$ nin bir L alt grubu için $K[X_m]^L$ invaryant cebirinin sonlu üretilip üretilmediğini belirlemek ile ilişkilidir. Bu probleme yanıt olarak kısmen olumlu sonuçlar elde edilmiştir. Örneğin, L , $GL_m(K)$ nin sonlu bir alt grubu iken $K[X_m]^L$ invaryant cebirinin sonlu üretilmiş olduğunu Noether (1916) gösterdi. Diğer bir olumlu cevap ise Shephard ve Todd (1954) ve Chevalley (1955) tarafından (özel bir durum için) verildi. Bu çalışmalarda, sonlu G grubu reflection'lar tarafından üretilmiş ise $K[X_m]^L$ invaryant cebirinin m tane cebirsel bağımsız homojen eleman tarafından üretildiği gösterildi. 1959 yılına gelindiğinde Nagata (1959) Hilbert'in 14. problemine bir aksine örnek verdi. Bu problem hakkında daha fazla bilgi Humpreys (1978)'de bulunabilir.

Yukarıda bahsedilen problem değişmeli olmayan invaryant teoriye de uygulanabilir. Serbest birleşmeli bir cebiri $K\langle X_m \rangle$ ile gösterelim. Kharchenko (1984) Noether'in elde ettiği sonucu değişmeli olmayan duruma genişletti ve T bir T -ideal olmak üzere $GL_m(K)$ nin her sonlu L alt grubu için $(K\langle X_m \rangle/T)^L$ nin sonlu üretilmiş olması için gerek ve yeter koşul $K\langle X_m \rangle/T$ nin iki taraflı idealler üzerinde azalan zincir koşulunu sağlamasıdır, ifadesini elde etti. Ayrıca Dicks ve Formanek (1982) ve Kharchenko (1984) $K\langle X_m \rangle^L$ cebirinin sonlu üretilmesi için sonlu L grupları üzerinde koşul belirlediler: $GL_m(K)$ nin sonlu bir L alt grubu için $K\langle X_m \rangle^L$ invaryant cebirinin sonlu üretilmiş olması için gerek ve yeter koşul L nin skaler çarpma işlemi ile cebir üzerine etki eden bir devirli grup olmasıdır. $GL_m(K)$ nin herhangi bir sonlu alt grubu için $K\langle X_m \rangle^L$ cebirinin bir serbest cebir olduğunu Lane (1976) ve Kharchenko (1978) gösterdi. Daha sonra, Domokos (1996) gösterdi ki sonlu bir L grubu için $(K\langle X_m \rangle/T)^L$ nin cebirsel bağımsız elemanlar tarafından üretilmesi için gerek ve yeter koşul L nin bir pseudo-reflection grubu olması ve T idealinin $[[z_1, z_2], z_2]$ polinomunu içermesidir. Değişmeli olmayan durumlar hakkında daha fazla detay Formanek (1985)'de bulu-

nabilir.

Değişmeli olmayan ve birleşmeli olmayan cebirler söz konusu olduğunda ilk düşünülen cebirlerden bazıları Lie cebirleri ve Leibniz cebirleridir. Bryant ve Pappas (2000) serbest Lie cebirinin aşikar olmayan sonlu bir otomorfizmler grubu için bu cebirin invaryantlar cebirinin sonlu üretilmediğini göstermiştir. Benzer bir sonuç aynı çalışmada serbest metabelyen Lie cebiri için de elde edilmiştir. Yakın zamanda problemin Lie ve Leibniz cebirleri için genellemesi ile ilgili çalışmalar yapılmıştır. Rankı m olan serbest metabelyen Lie ve Leibniz cebirlerini sırasıyla L_m ve $\mathcal{L}_m$ ile gösterelim. İki durumda da verilen cebirlerin L'_m ve $\mathcal{L}'_m$ komütatör idealleri sağ $K[X_m]$ -modüldür. $L_2^{S_2}$ Lie cebirinin sonsuz elemanlı bir minimal üreteç kümesi Fındık ve Öğüşlü (2019) tarafından verilmiştir. $K[X_m]^{S_m}$ -modül olan $(L'_m)^{S_m}$ için ise sonlu bir üreteç kümesi Drensky ve ark. (2020) tarafından elde edilmiştir. Ayrıca $K[X_m]^{S_m}$ -modül olarak $(\mathcal{L}'_m)^{S_m}$ cebirindeki simetrik polinomların karakterizasyonu Fındık ve Özkurt (2020) tarafından yapılmıştır.

Değişmeli olmayan cebirlerin önemli bir sınıfı $[[z_1, z_2], z_3] = 0$ Grassmann özdeşliği tarafından tanımlanan varyetedir. Bu varyetede rankı m olan serbest cebiri F_m ile gösterelim. Bu cebirin $F'_m = F_m[F_m, F_m]F_m$ komütatör ideali bir sol $K[X_m]$ -modüldür.

Bu tezin dördüncü bölümünde karakteristiği sıfır olan bir K cismi üzerinde X_2 kümesi tarafından üretilen rankı 2 olan serbest birleşmeli F_2 cebiri ele alınacaktır. S_2 grubunun $F_2^{S_2}$ invaryant cebiri elde edilip cebir olarak üreteç kümesi verilecektir ve bir sol $K[X_2]^{S_2}$ -modül olarak $(F'_2)^{S_2}$ nin üreteçleri elde edilecektir. (Akdoğan, 2021b)

Bu tezin beşinci bölümünde karakteristiği sıfır olan bir K cismi üzerinde X_3 tarafından üretilen rankı 3 olan serbest birleşmeli F_3 cebiri ele alınacaktır. S_3 grubunun $F_3^{S_3}$ invaryant cebiri elde edilecek ve bir sol $K[X_3]^{S_3}$ -modül olarak $(F'_3)^{S_3}$ ün sonlu serbest bir üreteç kümesi verilecektir. (Akdoğan ve Fındık, 2021)

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu tezde K karakteristiği sıfır olan bir cisim, $K\langle X_m \rangle$ üreteç kümesi $X_m = \{x_1, \dots, x_m\}$ olan K cismi üzerindeki serbest birleşmeli birimli cebir ve $K[X_m]$ ise üreteç kümesi X_m olan K cismi üzerinde değişmeli birleşmeli birimli polinom cebiri olarak düşünülecektir.

Tanım 2.1 V , K cismi üzerinde $\{e_1, \dots, e_m\}$ baz kümesine sahip bir vektör uzayı olsun. Bu $\{e_1, \dots, e_m\}$ kümesi tarafından üretilen ve bu üreteç kümesi üzerinde $e_i e_j + e_j e_i = 0$ bağıntısı tanımlı olan birleşmeli cebire V tarafından belirlenen Grassmann cebiri denir ve $G_m = G_m(V)$ ile gösterilir.

Yukarıdaki tanımdan, $K\langle X_m \rangle$ nin $x_i x_j + x_j x_i$, $1 \leq i, j \leq m$ şeklindeki elemanlar tarafından üretilen bir ideali I_m olmak üzere Grassmann cebiri $K\langle X_m \rangle / I_m$ bölüm cebirine izomorftur (Drensky, 1999). Buradan, üreteçler $e_i = x_i + I_m$ formundadır. Cismin karakteristiği 2'den farklı iken $e_i e_j + e_j e_i = 0$ eşitliği $e_i^2 = 0$ a denktir. Bunu gösterelim: her e_i, e_j üreteç çifti için $e_i e_j + e_j e_i = 0$ olup özel olarak $i = j$ seçilirse $e_i e_i + e_i e_i = 0$ ve buradan $2e_i e_i = 0$ olur. Cismin karakteristiği 2 den farklı olduğundan $e_i^2 = 0$ elde edilir. Tersine, her e_i üreteci için $e_i^2 = 0$ olsun. Bu durumda

$$(e_i + e_j)(e_i + e_j) = 0$$

$$e_i e_i + e_i e_j + e_j e_i + e_j e_j = 0$$

$$e_i e_j + e_j e_i = 0$$

elde edilir. Görüleceği üzere cismin karakteristiğinin 2 olması durumunda $e_i^2 = 0$ eşitliği sağlanıyorsa $e_i e_j + e_j e_i = 0$ eşitliği de sağlanır, fakat aksi yanlıştır.

Örnek 2.2 V , K cismi üzerinde $\{e_1, e_2\}$ bazına sahip iki boyutlu vektör uzayı olsun. $G_2 = G_2(V)$ Grassmann cebiri $\{1, e_1, e_2, e_1 e_2\}$ baz kümesine sahip vektör uzayıdır.

Tanım 2.3 G_m Grassmann cebiri, vektör uzayı olarak $1_{G_m} = 1_{K\langle X_m \rangle} + I_m$ birim elemanını ve $i_1 < \dots < i_k$, $k \leq m$, olmak üzere $e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_k}$ biçimindeki elemanları içeren kanonik bir baza sahiptir. Bu bazı B_{G_m} ile gösterirsek

$$B_{G_m} = \bigcup_{k=0}^m B_k$$

dır öyle ki,

$$\begin{aligned} B_0 &= \{1\} \\ B_1 &= \{e_i : 1 \leq i \leq m\} \\ B_2 &= \{e_{i_1}e_{i_2} : 1 \leq i_1 < i_2 \leq m\} \\ &\vdots \\ B_k &= \{e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m\} \\ &\vdots \\ B_m &= \{e_1e_2\dots e_m\} \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. G_m Grassmann cebirinin boyutu 2^m dir.

Tanım 2.4 B_k kümesindeki elemanlar tarafından gerilen vektör uzayına derecelendirilmiş Grassmann cebirinin k -inci dereceden homojen alt vektör uzayı denir ve G_m^k ile gösterilir.

G_m^k vektör uzayının boyutu $\binom{m}{k}$ dir. Ayrıca $u \in G_m^p$ ve $v \in G_m^r$ elemanları için $uv = (-1)^{pr}vu$ şeklindedir. Ayrıca $x^2 = 0$ özelliği Grassmann cebirinin her x elemanı için sağlanmaz. Diğer bir ifadeyle, $x^2 = 0$ Grassmann cebiri için bir polinom özdeşliği değildir. Sadece B_1 kümesi tarafından gerilen alt uzayın elemanları için ve $e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_k}$ şeklindeki monomialler için geçerlidir. Örneğin;

$$(e_1e_2 + e_3e_4)(e_1e_2 + e_3e_4) = 2e_1e_2e_3e_4 \neq 0$$

dır. Benzer şekilde $xy + yx = 0$ özdeşliği de Grassmann cebiri tarafından sağlanmaz. Bu özdeşlik Grassmann cebirinin sadece tek uzunluklu elemanları için geçerli olup diğer elemanlar için geçerli değildir. Örneğin;

$$(e_1 e_2)(e_3 e_4) + (e_3 e_4)(e_1 e_2) = 2e_1 e_2 e_3 e_4 \neq 0$$

dır.

Tanım 2.5 Grassmann cebirinin iki alt vektör uzayı

$$G_m^{(0)} = Sp\{1, e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_{2k}, k \geq 0\}$$

ve

$$G_m^{(1)} = Sp\{e_{i_1} \cdots e_{i_{2k+1}} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_{2k+1}, k \geq 0\}$$

şeklinde tanımlı olsun.

$$G_m = G_m^{(0)} \oplus G_m^{(1)}$$

ve $i, j \in \{0, 1\}$ için

$$G_m^{(i)} G_m^{(j)} \subset G_m^{(i+j \bmod 2)}$$

dir. Dolayısıyla Grassmann cebiri $\mathbb{Z}_2$ -derecelendirilmiştir. Ayrıca Grassmann cebirinin merkezi

$$Z(G_m) = G_m^{(0)}$$

dır.

Önerme 2.6 Her $x, y, z \in G_m$ için $[x, y] = xy - yx$ olmak üzere G_m Grassmann cebirinde

$$[[x, y], z] = 0$$

özdeşliği sağlanır.

İspat: Grassmann cebiri $\mathbb{Z}_2$ -derecelendirilmiş olduğu için $g^{(0)} \in G_m^{(0)}$ ve $g^{(1)} \in G_m^{(1)}$ olmak üzere her g elemanı $g = g^{(0)} + g^{(1)}$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda

$$[x, y] = [x^{(0)} + x^{(1)}, y^{(0)} + y^{(1)}] = [x^{(0)}, y^{(0)}] + [x^{(0)}, y^{(1)}] + [x^{(1)}, y^{(0)}] + [x^{(1)}, y^{(1)}]$$

dir. Grassmann cebirinin merkezi $G_m^{(0)}$ olduğundan $[x^{(0)}, y^{(0)}] = 0$, $[x^{(0)}, y^{(1)}] = 0$, $[x^{(1)}, y^{(0)}] = 0$ dır. Böylece $[x, y] = [x^{(1)}, y^{(1)}]$ olur. Buradan $[x, y] = x^{(1)}y^{(1)} - y^{(1)}x^{(1)}$ komütatörü $G_m^{(0)}$ ın elemanı olup benzer şekilde $[[x, y], z] = 0$ elde edilir.

Tanım 2.7 Bir x monomiali $x = \alpha e_{i_1} \cdots e_{i_k}$ şeklinde tanımlı olsun. $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\}$ kümesine x monomialinin support'u denir ve $\text{supp}(x)$ ile gösterilir. Buradaki pozitif k tamsayısı x monomialinin uzunluğudur ve $|x| = |e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}| = k$ ile gösterilir.

Tanım 2.8 Grassmann cebirinin $e_1, \dots, e_m$ tarafından üretilen (augmentation) idealini $\omega(G_m)$ ile gösterelim. Dikkat edilirse $1 \notin G_m$ olup $G_m \neq \omega(G_m)$ olduğu görülmektedir. Ayrıca $\omega(G_m)^k$ ile $e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}$ şeklindeki elemanlar tarafından üretilen ideal gösterilir.

Tanım 2.9 G_m Grassmann cebirinin otomorfizmleri grubu $\text{Aut}(G_m)$ ile gösterilir.

$\phi \in \text{Aut}(G_m)$ bir otomorfizm olsun. Bu durumda $u_{ik} \in G_m^k$, $0 \leq k \leq m$ olmak üzere

$$\phi(e_i) = u_{i0} + u_{i1} + \cdots + u_{im}, \quad 1 \leq i \leq m$$

biçiminde ifade edilebilir. Bundan sonraki bulgular birçok kaynakta var olmasına rağmen tezin bütünlüğü açısından ispatlar verilmiştir.

Lemma 2.10 Bir $\phi \in \text{Aut}(G_m)$ otomorfizmi için $1 \leq i \leq m$ olmak üzere $u_{i0} = 0$ dır.

İspat: $v_i \in \omega(G_m)$ olmak üzere $\phi(e_i) = u_{i0} + u_{i1} + \cdots + u_{im} = u_{i0} + v_i$ biçiminde ifade edilsin. ϕ bir Grassmann cebiri otomorfizmi olup $\phi(0) = 0$ ve $\phi(e_i e_i) = 0$ dır.

$$\phi(e_i e_i) = \phi(e_i) \phi(e_i) = (u_{i0} + v_i)(u_{i0} + v_i) = u_{i0} u_{i0} + u_{i0} v_i + v_i u_{i0} + v_i v_i = 0$$

dır. Buradan

$$0 = \phi(e_i e_i) \equiv u_{i0} u_{i0} \pmod{\omega(G_m)}$$

elde edilir. Böylece $0 = u_{i0} u_{i0} \in K$ olur. K sıfır bölensiz olup her $1 \leq i \leq m$ için $u_{i0} = 0$ bulunur.

Yukarıdaki lemmadan anlaşılabacağı gibi bir $\phi \in \text{Aut}(G_m)$ otomorfizminde

$$\phi(e_i) = u_{i1} + \cdots + u_{im}, \quad 1 \leq i \leq m$$

şeklindedir.

Teorem 2.11 R birim elemanlı bir halka, I R nin bir ideali ve ϕ, R nin $\phi(I) = I$ olacak şekilde bir otomorfizmi olsun. Bu durumda $\bar{\phi}(r+I) = \phi(r) + I$ olarak tanımlanan

$$\bar{\phi} : R/I \longrightarrow R/I$$

dönüşümü bir otomorfizmdir.

İspat: Öncelikle $\bar{\phi}$ nin iyi tanımlı olduğunu gösterelim. $r_1, r_2 \in R$ için

$$r_1 + I = r_2 + I$$

olsun. O zaman $r_1 - r_2 \in I$ ve $\phi(I) = I$ olduğundan $\phi(r_1 - r_2) \in I$ dır. Buradan

$$\phi(r_1) - \phi(r_2) \in I \Rightarrow \phi(r_1) + I = \phi(r_2) + I$$

ve $\bar{\phi}(r_1 + I) = \bar{\phi}(r_2 + I)$ dır.

$\bar{\phi}(r_1 + I)$ nin homomorfizm olduğunu gösterelim. $r_1 + I, r_2 + I \in R/I$ olsun.

$$\begin{aligned} \bar{\phi}((r_1 + I) + (r_2 + I)) &= \bar{\phi}((r_1 + r_2) + I) = \phi(r_1 + r_2) + I = (\phi(r_1) + \phi(r_2)) + I \\ &= (\phi(r_1) + I) + (\phi(r_2) + I) = \bar{\phi}(r_1 + I) + \bar{\phi}(r_2 + I) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\bar{\phi}((r_1 + I)(r_2 + I)) &= \bar{\phi}((r_1 r_2) + I) = \phi(r_1 r_2) + I = (\phi(r_1)\phi(r_2)) + I \\ &= (\phi(r_1) + I)(\phi(r_2) + I) = \bar{\phi}((r_1 + I))\bar{\phi}((r_2 + I))\end{aligned}$$

dır.

$\bar{\phi}$ in birebir olduğunu gösterelim. $r_1 + I, r_2 + I \in R/I$ ve

$$\bar{\phi}(r_1 + I) = \bar{\phi}(r_2 + I)$$

olsun. O zaman

$$\phi(r_1) + I = \phi(r_2) + I$$

$$\phi(r_1) - \phi(r_2) \in I$$

$$\phi(r_1 - r_2) \in I$$

$$r_1 - r_2 \in I$$

$$r_1 + I = r_2 + I$$

elde edilir. Son olarak her $r + I \in R/I$ için $\phi^{-1}(r) \in R$ olup

$$\bar{\phi}(\phi^{-1}(r) + I) = \phi(\phi^{-1}(r)) + I = r + I$$

bulunur ki buradan $\bar{\phi}$ örtendir. Dolayısıyla $\bar{\phi}$ bir otomorfizmdir.

Lemma 2.12 Grassmann cebirinin bir ϕ otomorfizmi,

$$u_{i1} = c_{1i}e_1 + \cdots + c_{mi}e_m, \quad c_{1i} \in K$$

olmak üzere

$$\phi(e_i) = u_{i1} + \cdots + u_{im}, \quad 1 \leq i \leq m$$

olarak tanımlansın. O zaman $(c_{kl})_{1 \leq k, l \leq m}$ matrisi singüler değildir.

İspat: $\omega^2(G_m)$ idealini G'_m ile gösterelim. $\phi(G'_m) \subset G'_m$ olup Teorem 2.11'den $\bar{\phi}(g + G'_m) = \phi(g) + G'_m$ olarak tanımlanan

$$\bar{\phi} : \omega(G_m)/G'_m \longrightarrow \omega(G_m)/G'_m$$

dönüşümü bir otomorfizm olur. Böylece $\bar{\phi}, \omega(G_m)/G'_m = Sp\{e_1, \dots, e_m\}$ vektör uzayı üzerinde bir otomorfizm belirler. $\bar{\phi}$ aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\bar{\phi}(e_i) = u_{i1} = c_{1i}e_1 + \dots + c_{mi}e_m, \quad 1 \leq i \leq m, \quad c_{1i} \in K.$$

Buradan $(c_{kl})_{1 \leq k, l \leq m}$ matrisinin determinanı sıfırdan farklıdır.

Lemma 2.13 Her $\phi \in \text{Aut}(G_m)$ otomorfizmi için $\phi(1) = 1$ dir.

İspat: Bir $\phi \in \text{Aut}(G_m)$ otomorfizmi $u_j \in Sp(B_j), 0 \leq j \leq m$ olmak üzere

$$\phi(1) = u_0 + u_1 + \dots + u_m, \quad 1 \leq i \leq m$$

biçiminde ifade edilsin. Her $n \geq 1$ için

$$(\phi(1))^n = \phi(1) \cdots \phi(1) = \phi(1 \cdots 1) = \phi(1)$$

dir. $\phi(1) = (\phi(1))^2$ olup

$$u_0 + u_1 + \dots + u_m = (u_0 + u_1 + \dots + u_m)(u_0 + u_1 + \dots + u_m)$$

ve buradan $u_0 - u_0^2 = 0 \pmod{\omega(G_m)}$ elde edilir. $u_0(1 - u_0) = 0$ olup $u_0 = 0$ veya $u_0 = 1$ dir. $u_0 = 0$ olduğunu varsayalım. $\phi(1) = (\phi(1))^2$ olduğundan

$$u_1 + \dots + u_m = (u_1 + \dots + u_m)(u_1 + \dots + u_m)$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafı en az iki uzunluklu olup $u_1 = 0$ elde edilir. Şimdi $\phi(1) = (\phi(1))^3$ olup benzer şekilde $u_2 = u_3 = 0$ bulunur. Böyle devam edilerek

sonlu işlem sonunda $\phi(1) = 0$ elde edilir. ϕ bir otomorfizm olup bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $u_0 = 1$ olup $\phi(1) = 1 + u_1 + \cdots + u_m$ biçimindedir. Yukarıdakine benzer şekilde $\phi(1) = (\phi(1))^2$ eşitliğinden

$$1 + u_1 + \cdots + u_m = (1 + u_1 + \cdots + u_m)(1 + u_1 + \cdots + u_m)$$

ve buradan $u_1 = 2u_1$ olup $u_1 = 0$ olur. $\phi(1) = (\phi(1))^k$, $k \geq 2$ eşitlikleri art arda uygulanarak $u_k = 0$, $k \geq 2$ bulunur. Dolayısıyla $\phi(1) = 1$ dir.

Her $x \in G_m$ için $y \in G_m$ olmak üzere

$$\text{adx}(y) = [y, x]$$

olarak tanımlanan $\text{adx} : G_m \longrightarrow G_m$ lineer dönüşümünü ele alalım. G_m Grassmann cebirinde $[[x, y], z] = 0$ özdeşliği sağlandığı için $(\text{adx})^2(y) = [[y, x], x] = 0$ olur. Dolayısıyla adx nilpotent olup

$$\exp(\text{adx}) = e^{\text{adx}} = 1 + \text{adx} + \frac{\text{ad}^2 x}{2!} + \cdots = 1 + \text{adx}$$

lineer dönüşümü G_m nin bir otomorfizmidir. Bu otomorfizme G_m Grassmann cebirinin iç otomorfizmi denir. Eğer x , $G_m^{(0)}$ in bir elemanı ise $e^{\text{adx}} = 1 + \text{adx} = 1$ dir. Dolayısıyla

$$\text{Inn}(G_m) = \{1 + \text{adx} \mid x \in G_m^{(1)}\} \cup \{1\}$$

bütün iç otomorfizmlerin kümesi $\text{Aut}(G_m)$ nin bir alt grubudur. $\text{Inn}(G_m)$ grubu $\text{Aut}(G_m)$ nin bir normal alt grubu olup

$$\text{Out}(G_m) = \text{Aut}(G_m) / \text{Inn}(G_m)$$

bölüm grubuna G_m nin dış otomorfizm grubu denir.

Aşağıdaki teorem G_m Grassmann cebirinin otomorfizmler grubunu belirlemektedir (Djoković, 1978; László, 2016).

Teorem 2.14 G_m Grassmann cebirinin K -otomorfizmleri grubu aşağıdaki şekilde tanımlı alt grupların yarı direkt çarpımına izomorftir.

- i) $GL_m(K)$, e_i üreticini $e_1, \dots, e_m$ üreticilerinin bir lineer toplam götüren ve katsayılar matrisinin determinantı sıfırdan farklı olacak şekildeki otomorfizmleri grubu,
- ii) $Inn(G_m)$, Grassmann cebirinin iç otomorfizmler grubu,
- iii) A_v , v_i , uzunluğu 3 ten büyük eşit tek uzunluklu monomiallerin bir lineer toplam olmak üzere e_i üreticini $e_i + v_i$ elemanına götüren otomorfizmlerin grubudur.

Yani

$$Aut(G_m) = Inn(G_m) \rtimes A_v \rtimes GL_m(K)$$

dır.

Tanım 2.15 A , K cismi üzerinde bir cebir ve $f = f(x_1, \dots, x_m)$, $K\langle X_m \rangle$ cebirinin bir elemanı olsun. Her $a_1, \dots, a_m \in A$ için $f(a_1, \dots, a_m) = 0$ oluyor ise $f = 0$, A cebirinin bir polinom özdeşliğidir.

Tanım 2.16 Bir A cebirinin aşikar olmayan bir polinom özdeşliği varsa bu cebire bir PI-cebiri denir.

Örnek 2.17 A bir değişmeli cebir olsun. A cebiri $[x, y] = 0$ özdeşliğini sağladığı için bir PI-cebirdir.

Örnek 2.18 Grassmann cebiri $[[x, y], z] = 0$ polinom özdeşliğini sağladığından bir PI-cebirdir.

A bir cebir olsun. $T(A)$ ile A nın bütün polinom özdeşliklerinin kümesini gösterelim. Yani,

$$T(A) = \{f \in K\langle X_m \rangle \mid f(a_1, \dots, a_m) = 0, a_i \in A, 1 \leq i \leq m\}$$

olsun. $T(A)$ kümesi $K\langle X_m \rangle$ nin bir idealidir.

Tanım 2.19 I , $K\langle X_m \rangle$ nin bir ideali olsun. $K\langle X_m \rangle$ cebirinin her ϕ endomorfizmi için $\phi(I) \subseteq I$ oluyorsa I ideale T -ideal denir.

$T(A)$ ideali $K\langle X_m \rangle$ nin her endomorfizmi altında invaryant olduğu için $T(A)$ bir T -idealdir.

Tanım 2.20 $\{f_i(x_1, \dots, x_m) \in K\langle X_m \rangle \mid i \in I\}$ kümesi $K\langle X_m \rangle$ serbest birleşmeli cebirinin polinomlarının bir kümesi olsun. $f_i = 0$, $i \in I$ polinom özdeşliklerini sağlayan bütün birleşmeli cebirlerin sınıfına, $\{f_i \mid i \in I\}$ polinom özdeşlikleri sistemi tarafından tanımlanan varyete denir.

Tanım 2.21 Bir A cebiri için $T(A)$ idealindeki polinom özdeşlikleri tarafından tanımlanan varyeteye A cebiri tarafından üretilen varyete denir ve $\text{var}A$ ile gösterilir.

Teorem 2.22 $K\langle X_m \rangle$ serbest birleşmeli cebirinin T -idealleri ile birleşmeli cebirlerin varyeteleri arasında birebir bir π eşleşmesi (Galois eşleşmesi) vardır. Yani, iki U_1 ve U_2 T -ideali için $U_1 \subset U_2$ içermesi, bu T -ideallerin polinom özdeşlikleri tarafından tanımlanan $\pi(U_1)$ ve $\pi(U_2)$ varyeteleri üzerinde $\pi(U_1) \supset \pi(U_2)$ içermesine denktir.

Tanım 2.23 A , K cismi üzerinde bir cebir, Y boş olmayan bir küme ve $i : Y \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. Eğer her B cebiri ve her $g : Y \rightarrow B$ homomorfizmi için $g = \bar{g}i$ olacak şekilde bir tek $\bar{g} : A \rightarrow B$ homomorfizmi varsa A ya Y tarafından üretilen serbest cebir denir.

Tanım 2.24 V bir varyete, A bu varyetede bir cebir ve $Y \subseteq A$, A nın bir alt kümesi olsun. Eğer her $B \in V$ cebiri ve her $g : Y \rightarrow B$ fonksiyonu için $g = \bar{g}i$ olacak şekilde bir tek $\bar{g} : A \rightarrow B$ homomorfizmi varsa A ya Y tarafından üretilen göreceli serbest cebir denir.

Tanım 2.25 Grassmann cebiri tarafından üretilen varyetede sonlu ranklı serbest A cebiri için $a, b \in A$ olmak üzere tüm $[a, b]$ elemanları tarafından üretilen ideale A nın komütatör ideali denir ve $A' = A[A, A]A$ ile gösterilir.

A' komütatör idealinin bir bazı

$$x_1^{a_1} \cdots x_t^{a_t} [x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots [x_{i_{2c-1}}, x_{i_{2c}}], \quad a_i \geq 0, \quad i_1 < \cdots < i_{2c}, \quad c \geq 1.$$

şeklindeki elemanlardan oluşur (Drensky, 1999).

Teorem 2.26 (Krakowski ve Regev, 1973) Karakteriği sıfır olan bir cisim üzerinde sonsuz boyutlu ve birimli Grassmann cebirinin T -ideali

$$[[x, y], z]$$

komütatörü tarafından üretilir.

Lemma 2.27 $[[x, y], z] = 0$ polinom özdeşliği

$$[x, y][z, t] + [x, z][y, t] = 0$$

özdeşliğini gerektirir.

İspat: $[[x, y], z] = 0$ polinom özdeşliğinden $[[xt, y], z] = 0$ dır. $[xy, z] = x[y, z] + [x, z]y$ özdeşliğini kullanılarak

$$\begin{aligned} 0 &= [[xt, y], z] \\ &= [x[t, y] + [x, y]t, z] \\ &= [x[t, y], z] + [[x, y]t, z] \\ &= (x[[t, y], z] + [x, z][t, y]) + ([x, y][t, z] + [[x, y], z]t) \\ &= 0 - [x, z][y, t] - [x, y][z, t] + 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $[x, y][z, t] + [x, z][y, t] = 0$ dır.

Sonuç 2.28 x, y, z, t elemanlarından herhangi ikisinin çakışması durumunda $[[x, y], z] = 0$ polinom özdeşliğinden

$$[x, y][z, t] = 0$$

dır.

İspat: Lemma 2.27'den $[x, y][z, t] = -[x, z][y, t] = [x, t][y, z] = 0$ olup iki elemanın çakışması durumunda $[x, x] = 0$ özelliği kullanılarak $[x, y][z, t] = 0$ elde edilir.

F_m ile Grassmann cebiri tarafından üretilen varyetede rankı m olan serbest cebiri göstereyim. Bu cebirin $x_1, \dots, x_m$ tarafından üretildiğini varsayalım. Sonuç 2.28'den dolayı F_2 cebirinin F_2' komütatör ideali için $u \in F_2'$ olmak üzere

$$x_1 x_2 u = x_2 x_1 u$$

dır. Ayrıca F_3 cebiri için ise $v \in F_3'$ olmak üzere

$$x_1 x_2 x_3 v = x_1 x_3 x_2 v = x_2 x_1 x_3 v = x_2 x_3 x_1 v = x_3 x_1 x_2 v = x_3 x_2 x_1 v$$

dur. Bu yüzden F_2' bir sol $K[X_2]$ -modül ve F_3' bir sol $K[X_3]$ -modüldür. Fakat $m \geq 4$ için yukarıdaki eşitlikler sağlanmaz. Çünkü $[x_1, x_2][x_3, x_4] \neq 0$ dır. Dolayısıyla $m \geq 4$ için F_4' bir sol $K[X_4]$ -modül değildir.

Sonuç 2.29 F_2' ideali $[x_1, x_2]$ komütatörü tarafından üretilen bir serbest sol $K[X_2]$ -modüldür. F_3' ideali ise $[x_1, x_2], [x_1, x_3], [x_2, x_3]$ komütatörü tarafından üretilen bir serbest sol $K[X_3]$ -modüldür.

Tanım 2.30 Bir $p \in K[X_m]$ polinomu, $\{1, \dots, m\}$ kümesinin her ξ permütasyonu için $p(x_1, \dots, x_m) = p(x_{\xi_1}, \dots, x_{\xi_m})$ oluyorsa p polinomuna simetrik polinom denir.

Tanım 2.31

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= x_1 + \cdots + x_m \\
&\vdots \\
\sigma_j &= \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_j} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_j} \\
&\vdots \\
\sigma_m &= x_1 x_2 x_3 \cdots x_m
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\sigma_1, \dots, \sigma_m \in K[x_1, \dots, x_m]$ polinomlarına elemanter simetrik polinom denir

Teorem 2.32 (Simetrik Polinomların Temel Teoremi) $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$ nin her simetrik polinomu, elemanter simetrik polinomların bir polinomu şeklinde bir tek şekilde yazılabilir.

Tanım 2.33 $j \geq 1$ olmak üzere

$$v_j = v_j(x_1, \dots, x_m) = x_1^j + \cdots + x_m^j = \sum_{i=1}^m x_i^j$$

şeklinde tanımlı olan polinoma j -inci dereceden kuvvetler toplamı denir.

Tanım 2.34 Bir L grubu $GL_m(K)$ nin alt grubu olsun. L nin her g elemanı için $g(p(X_m)) = p(X_m)$ olacak şekildeki $p(X_m) \in K[X_m]$ polinomlarının kümesine L nin invariant cebiri denir ve $K[X_m]^L$ ile gösterilir.

L grubu, $K[X_m]$ cebiri üzerine değişkenlerin sırasını değiştirerek etki eden S_m permütasyon grubu olsun. Yani, $K[X_m]$ nin bir p polinomu ve S_m nin bir ξ permütasyonu için

$$\xi \cdot p(x_1, \dots, x_m) = p(x_{\xi_1}, \dots, x_{\xi_m})$$

dir. $K[X_m]^{S_m}$ invariant cebiri, $K[X_m]$ polinomlar cebirindeki simetrik polinomların cebirine denktir. $K[X_m]^{S_m}$ cebiri, K cismi üzerinde cebirsel bağımsız olan $\sigma_j = \sum x_{i_1} \cdots x_{i_j}$, $i_1 < \cdots < i_j$, $j = 1, \dots, m$ elemanter simetrik polinomlar tarafından üretilir. Üstelik $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ üreteçleri cebirsel bağımsız olduğu için $K[X_m]^{S_m}$, m değişkenli bir polinomlar cebirine izomorfiktir. Ayrıca kuvvetler toplamının ilk m terimi, $K[X_m]^{S_m}$ cebirinin diğer bir üreteç kümesidir.

3. GRASSMANN CEBİRİNİN OTOMORFİZMLERİ

Bu bölümde sonsuz boyutlu Grassmann cebirlerinin otomorfizmler grubunun özel bir alt grubu belirlenmiş ve bu alt grup için bir üreteç kümesi elde edilmiştir.

Tanım 3.1 $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ sonsuz değişkenlerin bir kümesi olmak üzere $K\langle X \rangle$ serbest birleşmeli cebir olsun. $K\langle X \rangle$ in $x_i x_j + x_j x_i$, $i, j \geq 1$ şeklindeki elemanlar tarafından üretilen ideali I olmak üzere $K\langle X \rangle / I$ bölüm cebirine sonsuz boyutlu Grassmann cebiri denir ve G ile gösterilir. Sonsuz boyutlu Grassmann cebirinin üreteçleri $i \geq 1$ olmak üzere $e_i = x_i + I$ formundadır. Bu üreteç kümesi E ile gösterilecektir.

Teorem 3.2 $f : E \longrightarrow K\langle X \rangle / I = G$ bir fonksiyon olsun. Eğer

$$f(e_i)f(e_j) + f(e_j)f(e_i) = 0$$

oluyorsa f bir tek şekilde G sonsuz boyutlu Grassmann cebiri homomorfizmine genişler.

İspat: Her $i \in \{1, 2, \dots\}$ için $u_i \in K\langle X \rangle$ olmak üzere f ,

$$f : E \longrightarrow K\langle X \rangle / I = G, \quad f(e_i) = u_i + I$$

olarak tanımlanan bir fonksiyon olsun. Bir $\tilde{f} : X \longrightarrow K\langle X \rangle$ fonksiyonu vardır ki $\tilde{f}(x_i) = u_i$ dir. $K\langle X \rangle$ serbest olup bir tek şekilde belirlenmiş $\bar{\phi} : K\langle X \rangle \longrightarrow K\langle X \rangle$ homomorfizmi vardır öyle ki

$$\bar{\phi}(x_i) = \tilde{f}(x_i) = u_i$$

dir. Yani, $\bar{\phi}$ bir genişleme homomorfizmidir. Eğer $f(e_i)f(e_j) + f(e_j)f(e_i) = 0$ ise

$$(u_i + I)(u_j + I) + (u_j + I)(u_i + I) = 0$$

$$(u_i u_j + I) + (u_j u_i + I) = 0$$

$$(u_i u_j + u_j u_i) + I = 0$$

$$u_i u_j + u_j u_i \in I$$

olup buradan $\bar{f}(x_i)\bar{f}(x_j) + \bar{f}(x_j)\bar{f}(x_i) \in I$ bulunur. Bu durumda

$$\bar{\phi}(x_i x_j + x_j x_i) = \bar{\phi}(x_i)\bar{\phi}(x_j) + \bar{\phi}(x_j)\bar{\phi}(x_i) = \bar{f}(x_i)\bar{f}(x_j) + \bar{f}(x_j)\bar{f}(x_i) = u_i u_j + u_j u_i \in I$$

olup $\bar{\phi}(I) \subseteq I$ elde edilir. Teorem 2.11'den dolayı

$$\phi : K\langle X \rangle / I \longrightarrow K\langle X \rangle / I, \quad \phi(r + I) = \bar{\phi}(r) + I$$

olarak tanımlanan dönüşüm iyi tanımlı olup bir homomorfizm belirtir.

Not 3.3 $\phi(e_i) = \phi(x_i + I) = \bar{f}(x_i) + I = u_i + I = f(e_i)$ olup ϕ , f nin genişleme homomorfizmidir.

$G^{(1)} \cap \omega^3(G)$ nin bir x elemanı ele alalım. Yani, x uzunluğu 3 den büyük eşit, tek uzunluklu monomiallerin bir lineer toplamı olsun. Bir e_i üretici için $f_x(e_i) = e_i + x$ olacak şekilde bir $f_x : E \longrightarrow G$ dönüşümünü tanımlayalım. Buradan

$$f_x(e_i)f_x(e_j) + f_x(e_j)f_x(e_i) = (e_i e_j + e_j e_i) + (e_i x + x e_i) + (e_j x + x e_j) + 2x^2 = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla f_x dönüşümü bir tek şekilde $\phi_x : G \longrightarrow G$ K -homomorfizmine genişler ve $\phi_x(e_i) = e_i + x$ dir.

Teorem 3.4 Bir $x \in G^{(1)} \cap \omega^3(G)$ monomiali için $\phi_x : G \longrightarrow G$, $\phi_x(e_i) = e_i + x$ bir otomorfizmdir ve tersi $(\phi_x)^{-1} = \phi_{-x}$ dir.

İspat: $\beta \in K$ olmak üzere $x = \beta e_{j_1} \cdots e_{j_{2n+1}} \in G^{(1)} \cap \omega^3(G)$ bir monomial ise yukarıdaki ifadeye benzer şekilde ϕ_x ve ϕ_{-x} in homomorfizm olduğu gösterilebilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \phi_x \phi_{-x}(e_i) &= \phi_x(e_i - x) = \phi_x(e_i) - \phi_x(x) = e_i + x - \phi_x(x) \\ &= e_i + x - \beta(e_{j_1} + x)(e_{j_2} + x) \cdots (e_{j_{2n+1}} + x) \\ &= e_i + x - \beta e_{j_1} \cdots e_{j_{2n+1}} + \beta x(e_{j_2} \cdots e_{j_{2n+1}} - e_{j_1} e_{j_3} \cdots e_{j_{2n+1}} + \cdots + e_{j_1} \cdots e_{j_{2n}}) \\ &= e_i + x - x = e_i \end{aligned}$$

olup $\phi_x \phi_{-x} = 1$ dir. Benzer şekilde $\phi_{-x} \phi_x = 1$ elde edilir. Dolayısıyla $x \in G^{(1)} \cap \omega^3(G)$ monomiali için ϕ_x dönüşümü bir otomorfizmdir ve $(\phi_x)^{-1} = \phi_{-x}$ dir.

Lemma 3.5 $G^{(1)} \cap \omega^3(G)$ nin her x, y elemanı için $\phi_x \phi_y = \phi_{x+\phi_x(y)}$ dir.

İspat: G nin her e_i üretici için

$$\phi_x \phi_y(e_i) = \phi_x(e_i + y) = \phi_x(e_i) + \phi_x(y) = e_i + x + \phi_x(y) = \phi_{x+\phi_x(y)}(e_i)$$

olduğundan $x + \phi_x(y) \in G^{(1)} \cap \omega^3(G)$ olup $\phi_x \phi_y(e_i) = \phi_{x+\phi_x(y)}(e_i)$ elde edilir. Dolayısıyla $\phi_x \phi_y = \phi_{x+\phi_x(y)}$ dir.

Şimdi bazı notasyonları tanımlayalım. $\beta \in K$ olmak üzere $y = \beta e_{j_1} \cdots e_{j_{2n+1}}$, $G^{(1)} \cap \omega^3(G)$ nin bir monomiali olsun ve $i = 1, \dots, n$ için $y_{(i)} = (-1)^{i+1} \beta e_{j_1} \cdots e_{j_{i-1}} e_{j_{i+1}} \cdots e_{j_{2n+1}}$ ve $\bar{y} = y_{(1)} + \cdots + y_{(2n+1)}$ şeklinde tanımlı olsun.

Lemma 3.6 Bir $x \in G^{(1)} \cap \omega^3(G)$ monomiali için

$$x.\bar{x} = 0, \quad x_{(i)}\bar{x} = 0$$

dır.

İspat: $\beta \in K$ olmak üzere x monomiali $x = \beta e_{j_1} \cdots e_{j_{2n+1}}$ olsun.

$$\begin{aligned} x.\bar{x} &= \beta e_{j_1} \cdots e_{j_{2n+1}} (x_{(1)} + \cdots + x_{(2n+1)}) \\ &= \beta e_{j_1} \cdots e_{j_{2n+1}} (\beta e_{j_2} e_{j_3} \cdots e_{j_{2n+1}} - \beta e_{j_1} e_{j_3} \cdots e_{j_{2n+1}} + \cdots + \beta e_{j_1} \cdots e_{j_{2n}}) \end{aligned}$$

$e_i^2 = 0$ olduğundan $x.\bar{x} = 0$ dır.

$$\begin{aligned} x_{(i)}\bar{x} &= (-1)^{i+1} \beta e_{j_1} \cdots e_{j_{i-1}} e_{j_{i+1}} \cdots e_{j_{2n+1}} (x_{(1)} + \cdots + x_{(2n+1)}) \\ &= (-1)^{i+1} \beta e_{j_1} \cdots e_{j_{i-1}} e_{j_{i+1}} \cdots e_{j_{2n+1}} (\beta e_{j_2} e_{j_3} \cdots e_{j_{2n+1}} - \cdots + \beta e_{j_1} \cdots e_{j_{2n}}) \end{aligned}$$

$e_i^2 = 0$ olduğundan $x_{(i)}\bar{x} = 0$ dır.

Lemma 3.7 Bir y elemanı $G^{(1)} \cap \omega^3(G)$ nin bir monomiali olmak üzere

$$\phi_x(\bar{y}) = \bar{y}$$

dir.

İspat: $\beta \in K$ olmak üzere $y = \beta e_{j_1} \cdots e_{j_{2n+1}}$ olsun.

$$\phi_x(\bar{y}) = \phi_x(y_{(1)} + \cdots + y_{(2n+1)}) = \phi_x(y_{(1)}) + \cdots + \phi_x(y_{(2n+1)}).$$

$i \in \{1, \dots, 2n+1\}$ için

$$\phi_x(y_{(i)}) = \phi_x(\beta e_{j_1} \cdots e_{j_{i-1}} e_{j_{i+1}} \cdots e_{j_{2n+1}}) = \beta \phi_x(e_{j_1}) \cdots \phi_x(e_{j_{i-1}}) \phi_x(e_{j_{i+1}}) \cdots \phi_x(e_{j_{2n+1}})$$

ve $\phi_x(e_{j_i}) = (e_{j_i} + x)$ olup $\phi_x(\bar{y}) = y_{(1)} + \cdots + y_{(2n+1)} = \bar{y}$ elde edilir.

Lemma 3.8 $G^{(1)} \cap \omega^3(G)$ nin bir x elemanı ve bir y monomiali için

$$\phi_x(y) = y + x\bar{y}$$

dir.

İspat: $\beta \in K$ olmak üzere bir y monomiali $y = \beta e_{j_1} \cdots e_{j_{2n+1}}$ şeklinde tanımlı olsun.

Her $n \geq 2$ için $x^n = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \phi_x(y) &= \beta(e_{j_1} + x)(e_{j_2} + x) \cdots (e_{j_{2n+1}} + x) \\ &= \beta e_{j_1} \cdots e_{j_{2n+1}} + x(\beta e_{j_2} e_{j_3} \cdots e_{j_{2n+1}} - \beta e_{j_1} e_{j_3} \cdots e_{j_{2n+1}} + \beta e_{j_1} \cdots e_{j_{2n}}) \\ &= y + x(y_{(1)} + \cdots + y_{(2n+1)}) \\ &= y + x\bar{y} \end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 3.9 $x_1, \dots, x_k, x_{k+1}$ elemanları $G^{(1)} \cap \omega^3(G)$ de birer monomial olsun. Eğer $\phi_{x_1+\dots+x_k}$ bir otomorfizm ise

$$\begin{aligned} X_k &= x_1 + \dots + x_k - x_1(\bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_k) - \dots - x_k(\bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_{k-1}) \\ &\quad + x_1(\bar{x}_2\bar{x}_3 + \dots + \bar{x}_k\bar{x}_{k-1}) + \dots + x_k(\bar{x}_1\bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_{k-1}\bar{x}_{k-2}) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (-1)^{k-1}x_1(\bar{x}_2\bar{x}_3 \dots \bar{x}_k + \dots + \bar{x}_k\bar{x}_{k-1} \dots \bar{x}_2) + \dots \\ &\quad + (-1)^{k-1}x_k(\bar{x}_1\bar{x}_2 \dots \bar{x}_{k-1} + \dots + \bar{x}_{k-1}\bar{x}_{k-2} \dots \bar{x}_1) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\phi_{x_1+\dots+x_k}^{-1}(x_{k+1}) = x_{k+1} - X_k\bar{x}_{k+1}$$

dir.

İspat: $\phi_{x_1+\dots+x_k}$ bir otomorfizm olup

$$\phi_{x_1+\dots+x_k}(x_{k+1} - X_k\bar{x}_{k+1}) = \phi_{x_1+\dots+x_k}(x_{k+1}) - \phi_{x_1+\dots+x_k}(X_k)\phi_{x_1+\dots+x_k}(\bar{x}_{k+1})$$

şeklinde yazılabilir. Lemma 3.8'den $\phi_{x_1+\dots+x_k}(x_{k+1}) = x_{k+1} + (x_1 + \dots + x_k)\bar{x}_{k+1}$ dir.

Lemma 3.7'den $\phi_{x_1+\dots+x_k}(\bar{x}_{k+1}) = \bar{x}_{k+1}$ dir. $\phi_{x_1+\dots+x_k}$ nin otomorfizm olma özelliği ve

Lemma 3.8, Lemma 3.7, Lemma 3.6 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\phi_{x_1+\dots+x_k}(X_k) &= x_1 + \dots + x_k + x_1(\bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_k) + \dots + x_k(\bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_{k-1}) \\
&\quad - x_1(\bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_k) - \dots - x_k(\bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_{k-1}) \\
&\quad - x_1(\bar{x}_2\bar{x}_3 + \dots + \bar{x}_k\bar{x}_{k-1}) - \dots - x_k(\bar{x}_1\bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_{k-1}\bar{x}_{k-2}) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (-1)^{k-1}x_1(\bar{x}_2\bar{x}_3 \dots \bar{x}_k + \dots + \bar{x}_k\bar{x}_{k-1} \dots \bar{x}_2) + \dots \\
&\quad + (-1)^{k-1}x_k(\bar{x}_1\bar{x}_2 \dots \bar{x}_{k-1} + \dots + \bar{x}_{k-1}\bar{x}_{k-2} \dots \bar{x}_1) \\
&\quad + (x_1 + \dots + x_k)(\bar{x}_1\bar{x}_2 \dots \bar{x}_k + \dots + \bar{x}_k\bar{x}_{k-1} \dots \bar{x}_1) \\
&= x_1 + \dots + x_k
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\phi_{x_1+\dots+x_k}(x_{k+1} - X_k\bar{x}_{k+1}) = x_{k+1} + (x_1 + \dots + x_k)\bar{x}_{k+1} - (x_1 + \dots + x_k)\bar{x}_{k+1} = x_{k+1}$$

olur. $\phi_{x_1+\dots+x_k}$ bir otomorfizm olduğu için tersi mevcut olup

$$\phi_{x_1+\dots+x_k}^{-1}(x_{k+1}) = x_{k+1} - X_k\bar{x}_{k+1}$$

dir.

Lemma 3.10 x, y elemanları $|\text{supp}(x) \cap \text{supp}(y)| \geq 2$ olacak şekilde $G^{(1)} \cap \omega^3(G)$ nin monomialleri olsun. O zaman $\phi_x(y) = y$ ve dolayısıyla $x\bar{y} = 0$ dir.

İspat: y monomiali $\beta \in K$ olmak üzere $y = \beta e_{j_1} \dots e_{j_{2n+1}}$ şeklinde tanımlı olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
\phi_x(y) &= \beta(e_{j_1} + x)(e_{j_2} + x) \dots (e_{j_{2n+1}} + x) \\
&= \beta e_{j_1} \dots e_{j_{2n+1}} + \beta x(e_{j_2} \dots e_{j_{2n+1}} - e_{j_1} e_{j_3} \dots e_{j_{2n+1}} + \dots + e_{j_1} \dots e_{j_{2n}}) \\
&= y
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla Lemma 3.8'den $x\bar{y} = 0$ dır.

Lemma 3.10'un bir sonucu olarak aşağıdaki lemmayı elde ederiz.

Sonuç 3.11 Her $i = 1, \dots, n$ için $x_i, y \in G^{(1)} \cap \omega^3(G)$ elemanları $|\text{supp}(x_i) \cap \text{supp}(y)| \geq 2$ olacak şekildeki monomialler olsun. O zaman $\phi_{x_1+\dots+x_n}(y) = y$ dir.

Lemma 3.12 Her $i = 1, \dots, n$ için $x_i, y \in G^{(1)} \cap \omega^3(G)$ elemanları $|\text{supp}(x_i) \cap \text{supp}(y)| \geq 2$ olacak şekildeki monomialler olsun. Eğer $\phi_{x_1+\dots+x_n}$ bir otomorfizm ise $\phi_{x_1+\dots+x_n}^{-1}(y) = y$ dir.

İspat: Bir $x \in G$ elemanı $x = x_1 + \dots + x_n$ şeklinde tanımlı olsun. Sonuç 3.11'den $\phi_x(y) = y$ olduğu biliniyor. Dolayısıyla $\phi_x^{-1}(\phi_x(y)) = \phi_x^{-1}(y)$ olup $\phi_x^{-1}(y) = y$ elde edilir.

Lemma 3.13 $n \geq 2$ olmak üzere $x_1, \dots, x_n$ elemanları $G^{(1)} \cap \omega^3(G)$ de birer monomial olsun. O zaman

$$\phi_{(-1)^{n-1}x_1\bar{x}_2\cdots\bar{x}_n}$$

bir otomorfizmdir. Ayrıca $\bar{x}_2 = (x_2)_{(1)} + \dots + (x_2)_{(2t+1)}$ olmak üzere

$$\phi_{(-1)^{n-1}x_1\bar{x}_2\cdots\bar{x}_n} = \phi_{(-1)^{n-1}x_1(x_2)_{(1)}\bar{x}_3\cdots\bar{x}_n} \cdots \phi_{(-1)^{n-1}x_1(x_2)_{(2t+1)}\bar{x}_3\cdots\bar{x}_n}$$

şeklinde yazılır.

İspat: İspat n üzerinden tümevarım ile gösterilecektir. Öncelikle lemmadaki ifadenin

doğruluğu $n = 2$ durumu için incelenecektir. $x_2 = v$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
\phi_{-x_1 \bar{x}_2} &= \phi_{-x_1 \bar{v}} \\
&= \phi_{-x_1 (v_{(1)} + \dots + v_{(2t+1)})} \\
&= \phi_{-x_1 v_{(1)} - \dots - x_1 v_{(2t+1)}} \\
&= \phi_{-x_1 v_{(1)}} + \phi_{-x_1 v_{(1)}} \phi_{-x_1 v_{(1)}}^{-1} (-x_1 v_{(2)} - \dots - x_1 v_{(2t+1)}) \\
&= \phi_{-x_1 v_{(1)}} \phi_{-x_1 v_{(1)}}^{-1} (-x_1 v_{(2)} - \dots - x_1 v_{(2t+1)}) \\
&= \phi_{-x_1 v_{(1)}} \phi_{x_1 v_{(1)}} (-x_1 v_{(2)} - \dots - x_1 v_{(2t+1)}) \\
&= \phi_{-x_1 v_{(1)}} \phi_{-x_1 v_{(1)}} (x_1 v_{(2)} - \dots - x_1 v_{(2t+1)})
\end{aligned}$$

elde edilir. Her $i = 2, \dots, 2t + 1$ için $|\text{supp}(x_1 v_{(1)}) \cap \text{supp}(x_1 v_{(i)})| \geq 2$ olup Lemma 3.10'dan dolayı $\phi_{-x_1 \bar{x}_2} = \phi_{-x_1 v_{(1)}} \phi_{-x_1 v_{(2)}} \dots \phi_{-x_1 v_{(2t+1)}}$ dir. Benzer şekilde $2t - 1$ adım sonunda $\phi_{-x_1 \bar{x}_2} = \phi_{-x_1 v_{(1)}} \phi_{-x_1 v_{(2)}} \dots \phi_{-x_1 v_{(2t+1)}}$ elde edilir.

Her $l = 1, \dots, 2t + 1$ için $-x_1 v_{(l)}$ elemanının monomial olduğu ve $\phi_{-x_1 v_l}$ nin otomorfizm olduğu biliniyor. Dolayısıyla $\phi_{-x_1 \bar{x}_2}$ otomorfizmlerin bir bileşkesi olduğundan bir otomorfizmdir.

Lemmadaki ifade $n = k$ için doğru olsun. Yani $\phi_{(-1)^{k-1} x_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_k}$ bir otomorfizm olsun ve $x_2 = v$ için

$$\phi_{(-1)^{k-1} x_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_k} = \phi_{(-1)^{k-1} x_1 \bar{v} \dots \bar{x}_k} = \phi_{(-1)^{k-1} x_1 v_{(1)} \bar{x}_3 \dots \bar{x}_k} \dots \phi_{(-1)^{k-1} x_1 v_{(2t+1)} \bar{x}_3 \dots \bar{x}_k}$$

olsun. $n = k + 1$ iken lemmadaki ifadenin doğruluğunu kontrol edelim. $i = 1, \dots, 2t + 1$

ve $\bar{v} = v_{(1)} + \dots + v_{(2t+1)}$ için $\xi(i, k) = (-1)^k x_1 v_{(i)} \bar{x}_3 \dots \bar{x}_k \bar{x}_{k+1}$ notasyonunu kullanalım.

$$\begin{aligned}
\phi_{(-1)^k x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \dots \bar{x}_k \bar{x}_{k+1}} &= \phi_{(-1)^k x_1 \bar{v} \bar{x}_3 \dots \bar{x}_k \bar{x}_{k+1}} \\
&= \phi_{(-1)^k x_1 (v_{(1)} + \dots + v_{(2t+1)}) \bar{x}_3 \dots \bar{x}_k \bar{x}_{k+1}} \\
&= \phi_{(-1)^k x_1 v_{(1)} \bar{x}_3 \dots \bar{x}_k \bar{x}_{k+1} + \dots + (-1)^k x_1 v_{(2t+1)} \bar{x}_3 \dots \bar{x}_k \bar{x}_{k+1}} \\
&= \phi_{\xi(1, k) + \dots + \xi(2t+1, k)} \\
&= \phi_{\xi(1, k) + \phi_{\xi(1, k)}^{-1} (\xi(2, k) + \dots + \xi(2t+1, k))} \\
&= \phi_{\xi(1, k)} \phi_{\phi_{\xi(1, k)}^{-1} (\xi(2, k) + \dots + \xi(2t+1, k))}.
\end{aligned}$$

Lemma 3.12'den dolayı

$$\phi_{(-1)^k x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \dots \bar{x}_k \bar{x}_{k+1}} = \phi_{\xi(1, k)} \phi_{\xi(2, k) + \dots + \xi(2t+1, k)}$$

dir. Benzer şekilde $2t - 1$ adım sonunda

$$\begin{aligned}
\phi_{(-1)^k x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \dots \bar{x}_k \bar{x}_{k+1}} &= \phi_{\xi(1, k)} \phi_{\xi(2, k)} \dots \phi_{\xi(2t+1, k)} \\
&= \phi_{(-1)^k x_1 v_{(1)} \bar{x}_3 \dots \bar{x}_k \bar{x}_{k+1}} \dots \phi_{(-1)^k x_1 v_{(2t+1)} \bar{x}_3 \dots \bar{x}_k \bar{x}_{k+1}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Tümevarım hipotezinden dolayı $l = 1, \dots, 2t + 1$ için $\phi_{(-1)^k x_1 v_{(l)} \bar{x}_3 \dots \bar{x}_k \bar{x}_{k+1}}$ bir otomorfizmdir. Dolayısıyla $\phi_{(-1)^k x_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_k \bar{x}_{k+1}}$ otomorfizmlerin bir bileşkesi olduğundan bir otomorfizmdir.

Lemma 3.14 Her $x_1, \dots, x_n, y$ elemanı $G^{(1)} \cap \omega^3(G)$ de bir monomial olmak üzere

$$\phi_{(x_1 + \dots + x_n) \bar{y}} = \phi_{x_1 \bar{y}} \dots \phi_{x_n \bar{y}}$$

dir.

İspat: İspat n üzerinden tümevarım ile yapılacaktır. Öncelikle $n = 2$ iken lemmadaki ifadenin doğruluğu gösterilecektir.

$$\phi_{(x_1 + x_2) \bar{y}} = \phi_{x_1 \bar{y} + x_2 \bar{y}} = \phi_{x_1 \bar{y} + \phi_{x_1 \bar{y}}^{-1} (x_2 \bar{y})} = \phi_{x_1 \bar{y}} \phi_{\phi_{x_1 \bar{y}}^{-1} (x_2 \bar{y})}$$

olup Lemma 3.13'ten

$$\phi_{(x_1+x_2)\bar{y}} = \phi_{x_1\bar{y}} \phi_{(\phi_{x_1 y(1)} \cdots \phi_{x_1 y(2t+1)})^{-1}(x_2\bar{y})}$$

elde edilir. Buradan

$$\phi_{(x_1+x_2)\bar{y}} = \phi_{x_1\bar{y}} \phi_{\phi_{-x_1 y(2t+1)} \cdots \phi_{-x_1 y(1)}(x_2\bar{y})}$$

olur.

$$\phi_{-x_1 y(1)}(x_2\bar{y}) = (x_2 - x_1 y(1) \bar{x}_2) \bar{y} = x_2 \bar{y}$$

olup $2t$ adım sonunda

$$\phi_{-x_1 y(2t+1)} \cdots \phi_{-x_1 y(1)}(x_2\bar{y}) = x_2 \bar{y}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\phi_{(x_1+x_2)\bar{y}} = \phi_{x_1\bar{y}} \phi_{x_2\bar{y}}$ dir.

$n = k$ için $\phi_{(x_1+\cdots+x_k)\bar{y}} = \phi_{x_1\bar{y}} \cdots \phi_{x_k\bar{y}}$ olsun. $n = k + 1$ için lemmadaki ifadenin doğruluğu kontrol edilecektir.

$$\phi_{(x_1+\cdots+x_k+x_{k+1})\bar{y}} = \phi_{(x_1+\cdots+x_k)\bar{y}+x_{k+1}\bar{y}}$$

olup tümevarım hipotezinden $\phi_{(x_1+\cdots+x_k)\bar{y}} = \phi_{x_1\bar{y}} \cdots \phi_{x_k\bar{y}}$ dir. Lemma 3.13'ten

$\phi_{x_1\bar{y}}, \dots, \phi_{x_k\bar{y}}$ otomorfizm olup $\phi_{(x_1+\cdots+x_k)\bar{y}}$ bir otomorfizm olur ve dolayısıyla tersi mevcuttur. Buradan

$$\phi_{(x_1+\cdots+x_k+x_{k+1})\bar{y}} = \phi_{(x_1+\cdots+x_k)\bar{y}} \phi_{\phi_{(x_1+\cdots+x_k)\bar{y}}^{-1} \phi_{(x_{k+1}\bar{y})}^{-1}(x_{k+1}\bar{y})} = \phi_{(x_1+\cdots+x_k)\bar{y}} \phi_{\phi_{(x_1+\cdots+x_k)\bar{y}}^{-1}(x_{k+1}\bar{y})}^{-1}$$

dir. Tümevarım hipotezi kullanılarak

$$\phi_{(x_1+\cdots+x_k+x_{k+1})\bar{y}} = \phi_{(x_1+\cdots+x_k)\bar{y}} \phi_{(\phi_{x_1\bar{y}} \cdots \phi_{x_k\bar{y}})^{-1}(x_{k+1}\bar{y})} = \phi_{(x_1+\cdots+x_k)\bar{y}} \phi_{\phi_{x_k\bar{y}}^{-1} \cdots \phi_{x_1\bar{y}}^{-1}(x_{k+1}\bar{y})}$$

elde edilir. Lemma 3.13'den

$$\begin{aligned} \phi_{x_1\bar{y}}^{-1}(x_{k+1}\bar{y}) &= (\phi_{x_1 y(1)} \cdots \phi_{x_1 y(2t+1)})^{-1}(x_{k+1}\bar{y}) = \phi_{-x_1 y(2t+1)} \cdots \phi_{-x_1 y(1)}(x_{k+1}\bar{y}) \\ &= \phi_{-x_1 y(2t+1)} \cdots \phi_{-x_2 y(1)}((x_{k+1} - x_1 y(1) \bar{x}_{k+1}) \bar{y}) \\ &= \phi_{-x_1 y(2t+1)} \cdots \phi_{-x_2 y(1)}(x_{k+1}\bar{y}) = \cdots = x_{k+1}\bar{y} \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde $k - 1$ adım sonunda $\phi_{x_k \bar{y}}^{-1} \cdots \phi_{x_1 \bar{y}}^{-1}(x_{k+1} \bar{y}) = x_{k+1} \bar{y}$ elde edilir. Buradan

$$\phi_{(x_1 + \cdots + x_k + x_{k+1}) \bar{y}} = \phi_{(x_1 + \cdots + x_k) \bar{y}} \phi_{x_{k+1} \bar{y}}$$

dır. Tümevarım hipotezinden

$$\phi_{(x_1 + \cdots + x_k + x_{k+1}) \bar{y}} = \phi_{x_1 \bar{y}} \cdots \phi_{x_k \bar{y}} \phi_{x_{k+1} \bar{y}}$$

bulunur.

Lemma 3.15 x, y elemanları $G^{(1)} \cap \omega^3(G)$ de birer monomial olmak üzere

$$\phi_{x+y} = \phi_x \phi_y \phi_{-x \bar{y}}$$

dir.

İspat: Lemma 3.5 ve Lemma 3.8 yardımıyla

$$\begin{aligned} \phi_{x+y} &= \phi_{x+\phi_x \phi_x^{-1}(y)} = \phi_x \phi_{\phi_x^{-1}(y)} = \phi_x \phi_{\phi_{-x}(y)} = \phi_x \phi_{y-x \bar{y}} = \phi_x \phi_{y+\phi_y \phi_y^{-1}(-x \bar{y})} \\ &= \phi_x \phi_y \phi_{\phi_y^{-1}(-x \bar{y})} = \phi_x \phi_y \phi_{\phi_{-y}(-x \bar{y})} = \phi_x \phi_y \phi_{-\phi_{-y}(x) \phi_{-y}(\bar{y})} = \phi_x \phi_y \phi_{-(x-y \bar{x}) \bar{y}} \\ &= \phi_x \phi_y \phi_{-x \bar{y}} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.16 $i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, n-1, i \neq j$ olmak üzere $x_i, x_{j_1}, \dots, x_{j_k}$ elemanları $G^{(1)} \cap \omega^3(G)$ nin monomialleri olsun. $\phi_{x_1 + \cdots + x_n}$ homomorfizmi $\phi_{x_i}, \phi_{x_i \bar{x}_{j_1}} \cdots \phi_{x_i \bar{x}_{j_k}}$ şeklindeki otomorfizmlerin bir bileşkesi olarak yazılabilir.

İspat: İspat n üzerinden tümevarım ile yapılacaktır. $n = 2$ için Lemma 3.15'ten

$$\phi_{x_1 + x_2} = \phi_{x_1} \phi_{x_2} \phi_{-x_1 \bar{x}_2}$$

olduğu açıkça görülür. $n = k$ için teoremin ifadesinin doğru olduğunu kabul edelim.
 $n = k + 1$ için

$$\begin{aligned}\phi_{x_1+\dots+x_k+x_{k+1}} &= \phi_{x_1+\dots+x_k+\phi_{(x_1+\dots+x_k)}\phi_{x_1+\dots+x_k}^{-1}(x_{k+1})} \\ &= \phi_{x_1+\dots+x_k}\phi_{\phi_{x_1+\dots+x_k}^{-1}(x_{k+1})}\end{aligned}$$

olup X_k elemanı Lemma 3.9'da belirtildiği gibi olmak üzere bu Lemmadan

$$\phi_{x_1+\dots+x_k+x_{k+1}} = \phi_{x_1+\dots+x_k}\phi_{x_{k+1}-X_k\bar{x}_{k+1}}$$

dir ve böylece

$$\begin{aligned}\phi_{x_1+\dots+x_k+x_{k+1}} &= \phi_{x_1+\dots+x_k}\phi_{x_{k+1}}\phi_{-\phi_{x_{k+1}}^{-1}(X_k\bar{x}_{k+1})} \\ &= \phi_{x_1+\dots+x_k}\phi_{x_{k+1}}\phi_{-\phi_{-x_{k+1}}(X_k\bar{x}_{k+1})}\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, bir $Y \in G^{(0)}$ için

$$\phi_{-x_{k+1}}(X_k\bar{x}_{k+1}) = \phi_{-x_{k+1}}(X_k)\bar{x}_{k+1} = (X_k + x_{k+1}Y)\bar{x}_{k+1} = X_k\bar{x}_{k+1}$$

dir. Dolayısıyla $\phi_{x_1+\dots+x_k+x_{k+1}} = \phi_{x_1+\dots+x_k}\phi_{x_{k+1}}\phi_{-X_k\bar{x}_{k+1}}$ dir. Lemma 3.13 ve Lemma 3.14 kullanılarak X_k elemanının yapısı dolayısıyla $\phi_{-X_k\bar{x}_{k+1}}$ in Lemma 3.13'te yer alan otomorfizmlerin bileşkesi olduğu görülür.

Sonuç 3.17 Bir $x \in G^{(1)} \cap \omega^3(G)$ için

$$\phi_x : e_i \longrightarrow e_i + x$$

bir otomorfizmdir.

Örnek 3.18 $G^{(1)} \cap \omega^3(G)$ nin $x = e_1e_2e_3 + e_1e_4e_5$ şeklinde bir elemanını alalım.

$$\phi_{e_1e_2e_3+e_1e_4e_5} = \phi_{e_1e_2e_3}\phi_{e_1e_2e_3}^{-1}\phi_{e_1e_4e_5}$$

olup Lemma 3.5'ten

$$\phi_{e_1e_2e_3+e_1e_4e_5} = \phi_{e_1e_2e_3}\phi_{\phi_{e_1e_2e_3}^{-1}(e_1e_4e_5)} = \phi_{e_1e_2e_3}\phi_{\phi_{-e_1e_2e_3}(e_1e_4e_5)}$$

ve Lemma 3.8'den

$$\begin{aligned}\phi_{e_1e_2e_3+e_1e_4e_5} &= \phi_{e_1e_2e_3}\phi_{e_1e_4e_5-e_1e_2e_3(\overline{e_1e_4e_5})} \\ &= \phi_{e_1e_2e_3}\phi_{e_1e_4e_5+\phi_{e_1e_4e_5}\phi_{e_1e_4e_5}^{-1}(-e_1e_2e_3(\overline{e_1e_4e_5}))} \\ &= \phi_{e_1e_2e_3}\phi_{e_1e_4e_5}\phi_{\phi_{e_1e_4e_5}^{-1}(-e_1e_2e_3(\overline{e_1e_4e_5}))} \\ &= \phi_{e_1e_2e_3}\phi_{e_1e_4e_5}\phi_{\phi_{-e_1e_4e_5}(-e_1e_2e_3(\overline{e_1e_4e_5}))} \\ &= \phi_{e_1e_2e_3}\phi_{e_1e_4e_5}\phi_{\phi_{-e_1e_4e_5}(-e_1e_2e_3)\phi_{-e_1e_4e_5}(\overline{e_1e_4e_5})}\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 3.7 yardımıyla

$$\phi_{e_1e_2e_3+e_1e_4e_5} = \phi_{e_1e_2e_3}\phi_{e_1e_4e_5}\phi_{-(e_1e_2e_3-e_1e_4e_5(\overline{e_1e_2e_3}))(\overline{e_1e_4e_5})}$$

olup Lemma 3.6 göz önünde bulundurulursa

$$\phi_{e_1e_2e_3+e_1e_4e_5} = \phi_{e_1e_2e_3}\phi_{e_1e_4e_5}\phi_{-(e_1e_2e_3)\overline{e_1e_4e_5}} = \phi_{e_1e_2e_3}\phi_{e_1e_4e_5}\phi_{-e_1e_2e_3e_4e_5}$$

elde edilir. Bu otomorfizmin bir e_i üretici üzerindeki etkisi

$$\begin{aligned}\phi_{e_1e_2e_3+e_1e_4e_5}(e_i) &= (\phi_{e_1e_2e_3}\phi_{e_1e_4e_5}\phi_{-e_1e_2e_3e_4e_5})(e_i) = \phi_{e_1e_2e_3}(\phi_{e_1e_4e_5}(\phi_{-e_1e_2e_3e_4e_5}(e_i))) \\ &= \phi_{e_1e_2e_3}(\phi_{e_1e_4e_5}(e_i - e_1e_2e_3e_4e_5)) \\ &= \phi_{e_1e_2e_3}(\phi_{e_1e_4e_5}(e_i) - \phi_{e_1e_4e_5}(e_1e_2e_3e_4e_5)) \\ &= \phi_{e_1e_2e_3}(e_i + e_1e_4e_5 - (e_1e_2e_3e_4e_5 + e_1e_4e_5(\overline{e_1e_2e_3e_4e_5}))) \\ &= \phi_{e_1e_2e_3}(e_i + e_1e_4e_5 - e_1e_2e_3e_4e_5) \\ &= \phi_{e_1e_2e_3}(e_i) + \phi_{e_1e_2e_3}(e_1e_4e_5) - \phi_{e_1e_2e_3}(e_1e_2e_3e_4e_5) \\ &= e_i + e_1e_2e_3 + e_1e_4e_5 + e_1e_2e_3(\overline{e_1e_4e_5}) - e_1e_2e_3e_4e_5 - e_1e_2e_3(\overline{e_1e_2e_3e_4e_5}) \\ &= e_i + e_1e_2e_3 + e_1e_4e_5 + e_1e_2e_3e_4e_5 - e_1e_2e_3e_4e_5 = e_i + e_1e_2e_3 + e_1e_4e_5\end{aligned}$$

şeklindedir.

Not 3.19 Sonuç 3.17’de belirtilen ϕ_x şeklindeki bir otomorfizmin tersi ve yine bu şekildeki ϕ_x ve ϕ_y otomorfizmlerin $\phi_x \phi_y$ bileşkesi Lemma 3.5 ve Teorem 3.16’dan dolayı aynı formdadır. Bundan dolayı aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.20 Bir $x \in G^{(1)} \cap \omega^3(G)$ elemanı için ϕ_x şeklindeki otomorfizmlerin H kümesi, sonsuz boyutlu G Grassmann cebirlerinin $\text{Aut}(G)$ otomorfizm grubunun bir alt grubunu oluşturur. Üstelik bu H alt grubu sonsuz elemanlı

$$\{\phi_x \mid x \in G^{(1)} \cap \omega^3(G) \text{ bir monomial}\}$$

kümesi tarafından üretilir.

4. 2 RANKLI SERBEST CEBİRDE SİMETRİK POLİNOMLAR

Bu bölümde Grassmann cebirleri tarafından üretilen varyetede rankı 2 olan serbest F_2 cebirin simetrik polinomlarının oluşturduğu cebir incelenmiştir.

Lemma 4.1 Her $p(x_1, x_2) \in (F'_2)^{S_2}$ elemanı $\alpha_{ab} \in K$ olmak üzere

$$p(x_1, x_2) = \sum_{0 \leq a < b} \alpha_{ab} (x_1^a x_2^b - x_1^b x_2^a) [x_1, x_2]$$

şeklindedir.

İspat: Bir $p(x_1, x_2) \in F'_2$ elemanı

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2) &= \sum_{0 \leq a, b} \alpha_{ab} x_1^a x_2^b [x_1, x_2] \\ &= \sum_{a \neq b} \alpha_{ab} x_1^a x_2^b [x_1, x_2] + \sum_{0 \leq a} \alpha_{aa} x_1^a x_2^a [x_1, x_2] \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Aynı zamanda $p(x_1, x_2) \in (F'_2)^{S_2}$ olduğu için $p(x_1, x_2) = p(x_2, x_1)$ dir ve buradan

$$\begin{aligned} \sum_{a \neq b} \alpha_{ab} x_1^a x_2^b [x_1, x_2] + \sum_{0 \leq a} \alpha_{aa} x_1^a x_2^a [x_1, x_2] &= \sum_{a \neq b} \alpha_{ab} x_2^a x_1^b [x_2, x_1] + \sum_{0 \leq a} \alpha_{aa} x_2^a x_1^a [x_2, x_1] \\ \sum_{0 \leq a} 2\alpha_{aa} x_1^a x_2^a [x_1, x_2] + \sum_{a \neq b} \alpha_{ab} x_1^a x_2^b [x_1, x_2] - \sum_{a \neq b} \alpha_{ab} x_2^a x_1^b [x_2, x_1] &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\sum_{0 \leq a} 2\alpha_{aa} x_1^a x_2^a [x_1, x_2] = 0$ olup baz elemanlarının lineer bağımsızlığından her $0 \leq a$ için $\alpha_{aa} = 0$ olur. Böylece

$$\begin{aligned} \sum_{a \neq b} \alpha_{ab} x_1^a x_2^b [x_1, x_2] &= \sum_{a \neq b} \alpha_{ab} x_2^a x_1^b [x_2, x_1] \\ \sum_{a < b} \alpha_{ab} x_1^a x_2^b [x_1, x_2] + \sum_{b < a} \alpha_{ab} x_1^a x_2^b [x_1, x_2] &= \sum_{a < b} \alpha_{ab} x_2^a x_1^b [x_2, x_1] + \sum_{b < a} \alpha_{ab} x_2^a x_1^b [x_2, x_1] \\ \sum_{a < b} \alpha_{ab} x_1^a x_2^b [x_1, x_2] + \sum_{b < a} \alpha_{ab} x_1^a x_2^b [x_1, x_2] &= \sum_{b < a} \alpha_{ba} x_2^b x_1^a [x_2, x_1] + \sum_{a < b} \alpha_{ba} x_2^b x_1^a [x_2, x_1] \end{aligned}$$

$$\sum_{a < b} (\alpha_{ab} + \alpha_{ba}) x_1^a x_2^b [x_1, x_2] + \sum_{b < a} (\alpha_{ab} + \alpha_{ba}) x_1^a x_2^b [x_1, x_2] = 0$$

olup buradan $a < b$ ve $b < a$ için lineer bağımsızlıktan her bir toplam sıfır olur. Dolayısıyla her $a \neq b$ için $\alpha_{ab} = -\alpha_{ba}$ dır. Buna göre $p(x_1, x_2)$ yi tekrar yazmak gerekirse

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2) &= \sum_{0 \leq a, b} \alpha_{ab} x_1^a x_2^b [x_1, x_2] \\ &= \sum_{0 \leq a} \alpha_{aa} x_1^a x_2^a [x_1, x_2] + \sum_{0 \leq a < b} \alpha_{ab} x_1^a x_2^b [x_1, x_2] + \sum_{0 \leq b < a} \alpha_{ab} x_1^a x_2^b [x_1, x_2] \\ &= \sum_{0 \leq a < b} \alpha_{ab} x_1^a x_2^b [x_1, x_2] + \sum_{0 \leq a < b} \alpha_{ba} x_1^b x_2^a [x_1, x_2] \\ &= \sum_{0 \leq a < b} \alpha_{ab} x_1^a x_2^b [x_1, x_2] + \sum_{0 \leq a < b} -\alpha_{ab} x_1^b x_2^a [x_1, x_2] \\ &= \sum_{0 \leq a < b} \alpha_{ab} (x_1^a x_2^b - x_1^b x_2^a) [x_1, x_2] \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 4.2 $(F_2')^{S_2}$ cebirinin K -vektör uzayı olarak bir bazı

$$\{(x_1^a x_2^b - x_1^b x_2^a) [x_1, x_2] \mid 0 \leq a < b\}$$

şeklindedir.

İspat: Lemma 4.1'den dolayı verilen küme $(F_2')^{S_2}$ yi vektör uzayı olarak gerdiği için lineer bağımsızlığını göstermek yeterli olacaktır.

$$\sum_{0 \leq a < b} \alpha_{ab} (x_1^a x_2^b - x_1^b x_2^a) [x_1, x_2] = 0$$

olsun. $F_2^{S_2}$ derecelendirilmiş bir vektör uzayı olduğu için sabit bir n sayısı için $a + b = n$ olduğunu varsayalım. Yani

$$\sum_{a+b=n, 0 \leq a < b} \alpha_{ab} (x_1^a x_2^b - x_1^b x_2^a) [x_1, x_2] = 0$$

olsun. F_2' komütatör ideali $[x_1, x_2]$ tarafından üretilen bir $K[X_2]$ -modül olup

$$\sum_{a+b=n, 0 \leq a < b} \alpha_{ab}(x_1^a x_2^b - x_1^b x_2^a) = \sum_{a+b=n, 0 \leq a < b} \alpha_{ab} x_1^a x_2^b - \sum_{a+b=n, 0 \leq a < b} \alpha_{ab} x_1^b x_2^a = 0$$

elde edilir. Her toplam sıfıra eşit olacağından her $0 \leq a < b$ için $\alpha_{ab} = 0$ olur.

Teorem 4.3 $0 \leq a < b$ ve $0 \leq a' < b'$ olmak üzere $m_{ab} = (x_1^a x_2^b - x_1^b x_2^a)[x_1, x_2]$ ve $m_{a'b'} = (x_1^{a'} x_2^{b'} - x_1^{b'} x_2^{a'})[x_1, x_2]$ ise $m_{ab} m_{a'b'} = 0$ dır ve böylece

$$(F_2')^{S_2} = Sp\{m_{ab} \mid 0 \leq a < b\}$$

dir.

İspat: $m_{ab} m_{a'b'} = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned} m_{ab} m_{a'b'} &= (x_1^a x_2^b - x_1^b x_2^a)[x_1, x_2] (x_1^{a'} x_2^{b'} - x_1^{b'} x_2^{a'})[x_1, x_2] \\ &= (x_1^a x_2^b - x_1^b x_2^a)(x_1^{a'} x_2^{b'} - x_1^{b'} x_2^{a'})[x_1, x_2][x_1, x_2] \\ &= (x_1^a x_2^b - x_1^b x_2^a)(x_1^{a'} x_2^{b'} - x_1^{b'} x_2^{a'})(x_1 x_2 - x_2 x_1)[x_1, x_2] \\ &= (x_1^a x_2^b - x_1^b x_2^a)(x_1^{a'} x_2^{b'} - x_1^{b'} x_2^{a'})(x_1 x_2)[x_1, x_2] - (x_1^a x_2^b - x_1^b x_2^a)(x_1^{a'} x_2^{b'} - x_1^{b'} x_2^{a'})(x_2 x_1)[x_1, x_2] \\ &= (x_1^a x_2^b - x_1^b x_2^a)(x_1^{a'} x_2^{b'} - x_1^{b'} x_2^{a'})(x_1 x_2)[x_1, x_2] - (x_1^a x_2^b - x_1^b x_2^a)(x_1^{a'} x_2^{b'} - x_1^{b'} x_2^{a'})(x_1 x_2)[x_1, x_2] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Teorem 4.4 $F_2^{S_2}$ cebiri

$$\{x_1 + x_2, x_1^2 + x_2^2, (x_2 - x_1)[x_1, x_2]\}$$

kümesi tarafından üretilir ve $(F_2')^{S_2}$ cebiri $(x_2 - x_1)[x_1, x_2]$ tarafından üretilen bir sol $K[X_2]^{S_2}$ -modüldür.

İspat: $(F_2/F_2')^{S_2} \cong K[X_2]^{S_2}$ cebiri $x_1 + x_2, x_1^2 + x_2^2$ elemanları tarafından üretilir. Dolayısıyla $x_1 + x_2, x_1^2 + x_2^2, (x_2 - x_1)[x_1, x_2]$ elemanları tarafından üretilen bir cebirin

$(F'_2)^{S_2}$ cebirini kapsadığını göstermek yeterli olacaktır. Aynı zamanda $(F'_2)^{S_2}$ cebirinin üreteç kümesi de olan

$$\{(x_1^a x_2^b - x_1^b x_2^a)[x_1, x_2] : 0 \leq a < b\}$$

kümesinin $(F'_2)^{S_2}$ nin bazı olduğu Sonuç 4.2 den bilinmektedir. Buradan

$$q(x_1, x_2) = \left(\frac{(x_1 + x_2)^2 - (x_1^2 + x_2^2)}{2} \right)^a$$

ve

$$r(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{b-a} x_1^{b-a-i} x_2^{i-1}$$

olmak üzere

$$(x_1^a x_2^b - x_1^b x_2^a)[x_1, x_2] = q(x_1, x_2) r(x_1, x_2) (x_2 - x_1)[x_1, x_2]$$

şeklindedir. $r(x_1, x_2)$ polinomu $r(x_1, x_2) = \frac{x_1^{b-a} - x_2^{b-a}}{x_1 - x_2}$ olarak yazılabilir. Açıkça görülür ki $r(x_1, x_2) = r(x_2, x_1)$ ve $q(x_1, x_2) = q(x_2, x_1)$ dir. Dolayısıyla $q(x_1, x_2), r(x_1, x_2) \in K[x_1 + x_2, x_1^2 + x_2^2]$ dir ve $(x_1^a x_2^b - x_1^b x_2^a)[x_1, x_2] = q(x_1, x_2) r(x_1, x_2) (x_2 - x_1)[x_1, x_2]$ elemanı $\langle x_1 + x_2, x_1^2 + x_2^2, (x_2 - x_1)[x_1, x_2] \rangle$ tarafından kapsanır. Böylece $(F'_2)^{S_2}$ bir sol $K[x_1 + x_2, x_1^2 + x_2^2] = K[X_2]^{S_2}$ -modüldür.

5. 3 RANKLI SERBEST CEBİRDE SİMETRİK POLİNOMLAR

Bu bölümde Grassmann cebirleri tarafından üretilen varyetede rankı 3 olan serbest F_3 cebirin simetrik polinomlarının oluşturduğu cebir incelenmiştir.

Teorem 5.1 Bir $f \in F'_3$ polinomunun simetrik olması için gerek ve yeter koşul $p(x_1, x_2, x_3) = -p(x_2, x_1, x_3)$ olacak şekilde bir $p \in K[X_3]$ polinomu için

$$f(x_1, x_2, x_3) = p(x_1, x_2, x_3)[x_1, x_2] + p(x_1, x_3, x_2)[x_1, x_3] + p(x_2, x_3, x_1)[x_2, x_3]$$

olmasıdır.

İspat: $f(x_1, x_2, x_3)$ polinomu $(F'_3)^{S_3}$ ün bir elemanı olsun. Açıkça görülür ki $(F'_3)^{S_3} \subset F'_3$ dir. Yani, $p, q, r \in K[X_3]$ olmak üzere $f(x_1, x_2, x_3)$ polinomu

$$f(x_1, x_2, x_3) = p(x_1, x_2, x_3)[x_1, x_2] + q(x_1, x_2, x_3)[x_1, x_3] + r(x_1, x_2, x_3)[x_2, x_3]$$

şeklinde yazılabilir. F'_3 cebirinin üreteçleri ve f polinomunun

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x_{\xi_1}, x_{\xi_2}, x_{\xi_3}), \quad \xi \in S_3,$$

simetrik olma özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2, x_3) &= q(x_1, x_3, x_2) = -p(x_2, x_1, x_3) = -q(x_2, x_3, x_1) \\ &= r(x_3, x_1, x_2) = -r(x_3, x_2, x_1) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $p(x_1, x_2, x_3) = -p(x_2, x_1, x_3)$ olmak üzere

$$q(x_1, x_2, x_3) = p(x_1, x_3, x_2), \quad r(x_1, x_2, x_3) = p(x_2, x_3, x_1)$$

eşitlikleri elde edilir.

Şimdi teoremden ifade edildiği gibi $p(x_1, x_2, x_3) = -p(x_2, x_1, x_3)$ olacak şekilde bir $p \in K[X_3]$ polinomu için $f(x_1, x_2, x_3)$ polinomu

$$f(x_1, x_2, x_3) = p(x_1, x_2, x_3)[x_1, x_2] + p(x_1, x_3, x_2)[x_1, x_3] + p(x_2, x_3, x_1)[x_2, x_3]$$

şeklinde tanımlı olsun. S_3 simetrik grubunun üretici olan (12) ve (13) transpozisyonlarının etkisi altında $f(x_1, x_2, x_3)$ polinomunun sabit kaldığı gösterilmelidir. (12) transpozisyonunun $f(x_1, x_2, x_3)$ polinomuna etkisi

$$\begin{aligned} f(x_2, x_1, x_3) &= p(x_2, x_1, x_3)[x_2, x_1] + p(x_2, x_3, x_1)[x_2, x_3] + p(x_1, x_3, x_2)[x_1, x_3] \\ &= -p(x_1, x_2, x_3)[x_2, x_1] + p(x_1, x_3, x_2)[x_1, x_3] + p(x_2, x_3, x_1)[x_2, x_3] \\ &= p(x_1, x_2, x_3)[x_1, x_2] + p(x_1, x_3, x_2)[x_1, x_3] + p(x_2, x_3, x_1)[x_2, x_3] \\ &= f(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

şeklindedir. Benzer şekilde $f(x_1, x_2, x_3)$ polinomu (13) etkisi altında $f(x_3, x_2, x_1) = f(x_1, x_2, x_3)$ şeklindedir. Dolayısıyla $f(x_1, x_2, x_3)$ polinomu simetriktir.

Not 5.2 f , Theorem 5.1'deki gibi $(F_3')^{S_3}$ cebirinin bir simetrik polinomu olsun. Bu teoremden belirtildiği gibi birinci ve ikinci bileşenler üzerindeki etkisiyle p bir alterne polinomdur. Alterne polinomların oluşturduğu cebir, simetrik polinomlar cebiri üzerinde bir sol modül yapısına sahip olduğundan p polinomu, $p_1 \in K[X_3]^{S_3}$ ve

$$p_2(x_1, x_2, x_3) = \sum_{0 \leq a < b, 0 \leq c} \epsilon_{abc} (x_1^a x_2^b - x_1^b x_2^a) x_3^c, \quad \epsilon_{abc} \in K$$

olmak üzere $p = p_1 p_2$ şeklinde yazılabilir. Negatif olmayan a, b, c tamsayıları için $f_{a,b,c}$ polinomlarını

$$f_{a,b,c} = (x_1^a x_2^b - x_1^b x_2^a) x_3^c [x_1, x_2] + (x_1^a x_3^b - x_1^b x_3^a) x_2^c [x_1, x_3] + (x_2^a x_3^b - x_2^b x_3^a) x_1^c [x_2, x_3]$$

olacak şekilde tanımlayalım. Buradan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.3 $\{f_{a,b,c} \mid 0 \leq a < b, 0 \leq c\}$ kümesi $K[X_3]^{S_3}$ -modül olan $(F'_3)^{S_3}$ için bir bazdır. Yani, bir f polinomunun $(F'_3)^{S_3}$ cebirinin bir elemanı olması için gerek ve yeter koşul tek şekilde belirlenen $\delta_{abc} \in K[X_3]^{S_3}$ polinomları için

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{0 \leq a < b, 0 \leq c} \delta_{abc} f_{a,b,c}$$

biçiminde yazılabilmektedir.

Bu bölümün bundan sonraki kısmında $K[X_3]^{S_3}$ -modül olan $(F'_3)^{S_3}$ için bir üreteç kümesi elde edeceğiz.

Lemma 5.4 $f_{a,b,c}$ yukarıdaki gibi tanımlanmış olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

1. $f_{0,b,c} = \nu_c f_{0,b,0} - f_{0,b+c,0} + f_{b,c,0}, \quad b, c \geq 1$
2. $f_{a,b,c} = -f_{b,a,c}, \quad a, b, c \geq 0,$
3. $f_{0,b,0} = \sigma_1 f_{0,b-1,0} - \sigma_2 f_{0,b-2,0} + \sigma_3 f_{0,b-3,0}, \quad b \geq 4$
4. $f_{0,3,0} = \sigma_1 f_{0,2,0} - \sigma_2 f_{0,1,0}$
5. $f_{a,b,0} = \sigma_1 f_{a,b-1,0} - \sigma_2 f_{a,b-2,0} + \sigma_3 f_{a,b-3,0}, \quad a \geq 1, b \geq 4$
6. $f_{a,3,0} = \sigma_1 f_{a,2,0} - \sigma_2 f_{a,1,0} - \sigma_3 f_{0,a,0}, \quad a \geq 1$

İspat:

1. Her $b, c \geq 1$ için $f_{0,b,c} = v_c f_{0,b,0} - f_{0,b+c,0} + f_{b,c,0}$ eşitliğini gösterelim.

$$\begin{aligned}
 & v_c f_{0,b,0} - f_{0,b+c,0} + f_{b,c,0} \\
 &= (x_1^c + x_2^c + x_3^c)((x_2^b - x_1^b)[x_1, x_2] + (x_3^b - x_1^b)[x_1, x_3] + (x_3^b - x_2^b)[x_2, x_3]) \\
 &- ((x_2^{b+c} - x_1^{b+c})[x_1, x_2] + (x_3^{b+c} - x_1^{b+c})[x_1, x_3] + (x_3^{b+c} - x_2^{b+c})[x_2, x_3]) \\
 &+ (x_1^b x_2^c - x_1^c x_2^b)[x_1, x_2] + (x_1^b x_3^c - x_1^c x_3^b)[x_1, x_3] + (x_2^b x_3^c - x_2^c x_3^b)[x_2, x_3] \\
 &= (x_2^b - x_1^b)x_3^c[x_1, x_2] + (x_3^b - x_1^b)x_2^c[x_1, x_3] + (x_3^b - x_2^b)x_1^c[x_2, x_3] \\
 &= f_{0,b,c}
 \end{aligned}$$

2. Her $a, b, c \geq 0$ için $f_{a,b,c} = -f_{b,a,c}$ eşitliğini gösterelim.

$$\begin{aligned}
 f_{a,b,c} &= (x_1^a x_2^b - x_1^b x_2^a)x_3^c[x_1, x_2] + (x_1^a x_3^b - x_1^b x_3^a)x_2^c[x_1, x_3] + (x_2^a x_3^b - x_2^b x_3^a)x_1^c[x_2, x_3] \\
 &= -((x_1^b x_2^a - x_1^a x_2^b)x_3^c[x_1, x_2] + (x_1^b x_3^a - x_1^a x_3^b)x_2^c[x_1, x_3] + (x_2^b x_3^a - x_2^a x_3^b)x_1^c[x_2, x_3]) \\
 &= -f_{b,a,c}
 \end{aligned}$$

3. Her $b \geq 4$ için $f_{0,b,0} = \sigma_1 f_{0,b-1,0} - \sigma_2 f_{0,b-2,0} + \sigma_3 f_{0,b-3,0}$ eşitliğini gösterelim.

$$\begin{aligned}
 & \sigma_1 f_{0,b-1,0} - \sigma_2 f_{0,b-2,0} + \sigma_3 f_{0,b-3,0} \\
 &= (x_1 + x_2 + x_3)((x_2^{b-1} - x_1^{b-1})[x_1, x_2] + (x_3^{b-1} - x_1^{b-1})[x_1, x_3] \\
 &+ (x_3^{b-1} - x_2^{b-1})[x_2, x_3]) - (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)((x_2^{b-2} - x_1^{b-2})[x_1, x_2] \\
 &+ (x_3^{b-2} - x_1^{b-2})[x_1, x_3] + (x_3^{b-2} - x_2^{b-2})[x_2, x_3]) \\
 &+ (x_1 x_2 x_3)((x_2^{b-3} - x_1^{b-3})[x_1, x_2] + (x_3^{b-3} - x_1^{b-3})[x_1, x_3] + (x_3^{b-3} - x_2^{b-3})[x_2, x_3]) \\
 &= (x_2^b - x_1^b)[x_1, x_2] + (x_3^b - x_1^b)[x_1, x_3] + (x_3^b - x_2^b)[x_2, x_3] \\
 &= f_{0,b,0}
 \end{aligned}$$

4. $f_{0,3,0} = \sigma_1 f_{0,2,0} - \sigma_2 f_{0,1,0}$ eşitliğini gösterelim.

$$\begin{aligned}
 & \sigma_1 f_{0,2,0} - \sigma_2 f_{0,1,0} \\
 &= (x_1 + x_2 + x_3)((x_2^2 - x_1^2)[x_1, x_2] + (x_3^2 - x_1^2)[x_1, x_3] + (x_3^2 - x_2^2)[x_2, x_3]) \\
 &- (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)((x_2 - x_1)[x_1, x_2] + (x_3 - x_1)[x_1, x_3] + (x_3 - x_2)[x_2, x_3]) \\
 &= (x_2^3 - x_1^3)[x_1, x_2] + (x_3^3 - x_1^3)[x_1, x_3] + (x_3^3 - x_2^3)[x_2, x_3] \\
 &= f_{0,3,0}
 \end{aligned}$$

5. Her $a \geq 1, b \geq 4$ için $f_{a,b,0} = \sigma_1 f_{a,b-1,0} - \sigma_2 f_{a,b-2,0} + \sigma_3 f_{a,b-3,0}$ eşitliğini gösterelim.

$$\begin{aligned}
 & \sigma_1 f_{a,b-1,0} - \sigma_2 f_{a,b-2,0} + \sigma_3 f_{a,b-3,0} \\
 &= (x_1 + x_2 + x_3)((x_1^a x_2^{b-1} - x_1^{b-1} x_2^a)[x_1, x_2] + (x_1^a x_3^{b-1} - x_1^{b-1} x_3^a)[x_1, x_3] \\
 &+ (x_2^a x_3^{b-1} - x_2^{b-1} x_3^a)[x_2, x_3]) - (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)((x_1^a x_2^{b-2} - x_1^{b-2} x_2^a)[x_1, x_2] \\
 &+ (x_1^a x_3^{b-2} - x_1^{b-2} x_3^a)[x_1, x_3] + (x_2^a x_3^{b-2} - x_2^{b-2} x_3^a)[x_2, x_3]) \\
 &+ (x_1 x_2 x_3)((x_1^a x_2^{b-3} - x_1^{b-3} x_2^a)[x_1, x_2] + (x_1^a x_3^{b-3} - x_1^{b-3} x_3^a)[x_1, x_3] \\
 &+ (x_2^a x_3^{b-3} - x_2^{b-3} x_3^a)[x_2, x_3]) \\
 &= (x_1^a x_2^b - x_1^b x_2^a)[x_1, x_2] + (x_1^a x_3^b - x_1^b x_3^a)[x_1, x_3] + (x_2^a x_3^b - x_2^b x_3^a)[x_2, x_3] \\
 &= f_{a,b,0}
 \end{aligned}$$

6. Her $a \geq 1$ için $f_{a,3,0} = \sigma_1 f_{a,2,0} - \sigma_2 f_{a,1,0} - \sigma_3 f_{0,a,0}$ eşitliğini gösterelim.

$$\begin{aligned}
 & \sigma_1 f_{a,2,0} - \sigma_2 f_{a,1,0} - \sigma_3 f_{0,a,0} \\
 &= (x_1 + x_2 + x_3)((x_1^a x_2^2 - x_1^2 x_2^a)[x_1, x_2] + (x_1^a x_3^2 - x_1^2 x_3^a)[x_1, x_3] + (x_2^a x_3^2 - x_2^2 x_3^a)[x_2, x_3]) \\
 &\quad - (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)((x_1^a x_2 - x_1 x_2^a)[x_1, x_2] + (x_1^a x_3 - x_1 x_3^a)[x_1, x_3] \\
 &\quad + (x_2^a x_3 - x_2 x_3^a)[x_2, x_3]) - (x_1 x_2 x_3)((x_2^a - x_1^a)[x_1, x_2] + (x_3^a - x_1^a)[x_1, x_3] \\
 &\quad + (x_3^a - x_2^a)[x_2, x_3]) \\
 &= (x_1^a x_2^3 - x_1^3 x_2^a)[x_1, x_2] + (x_1^a x_3^3 - x_1^3 x_3^a)[x_1, x_3] + (x_2^a x_3^3 - x_2^3 x_3^a)[x_2, x_3] \\
 &= f_{a,3,0}
 \end{aligned}$$

Teorem 5.5 $(F'_3)^{S_3}$ bir sol $K[X_3]^{S_3}$ -modül olarak $\{f_{0,1,0}, f_{0,2,0}, f_{1,2,0}\}$ kümesi tarafından üretilir.

İspat: Sonuç 5.3'ten dolayı, $0 \leq a < b, 0 \leq c$ olmak üzere $f_{a,b,c}$ formundaki elemanlar $(F'_3)^{S_3}$ cebirini $K[X_3]^{S_3}$ -modül olarak üretir. Aşağıdaki durumlar, a ve c arasındaki ilişkiye göre üç kısımda ele alınabilir.

Durum I. $a = c$ ve $b = a + k, k \in \mathbb{Z}^+$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
 f_{a,b,c} &= (x_1^a x_2^b - x_1^b x_2^a) x_3^a [x_1, x_2] + (x_1^a x_3^b - x_1^b x_3^a) x_2^a [x_1, x_3] + (x_2^a x_3^b - x_2^b x_3^a) x_1^a [x_2, x_3] \\
 &= (x_1 x_2 x_3)^a \left((x_2^k - x_1^k) [x_1, x_2] + (x_3^k - x_1^k) [x_1, x_3] + (x_3^k - x_2^k) [x_2, x_3] \right) \\
 &= \sigma_3^a f_{0,k,0}
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Durum II. $a < c$ ve $b = a + k, c = a + l, k, l \in \mathbb{Z}^+$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
 f_{a,b,c} &= (x_1^a x_2^b - x_1^b x_2^a) x_3^c [x_1, x_2] + (x_1^a x_3^b - x_1^b x_3^a) x_2^c [x_1, x_3] + (x_2^a x_3^b - x_2^b x_3^a) x_1^c [x_2, x_3] \\
 &= (x_1 x_2 x_3)^a \left((x_2^k - x_1^k) x_3^l [x_1, x_2] + (x_3^k - x_1^k) x_2^l [x_1, x_3] + (x_3^k - x_2^k) x_1^l [x_2, x_3] \right) \\
 &= \sigma_3^a f_{0,k,l}
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Durum III. $c < a$ ve $a = c + k$, $b = c + l$, $k, l \in \mathbb{Z}^+$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} f_{a,b,c} &= (x_1^a x_2^b - x_1^b x_2^a) x_3^c [x_1, x_2] + (x_1^a x_3^b - x_1^b x_3^a) x_2^c [x_1, x_3] + (x_2^a x_3^b - x_2^b x_3^a) x_1^c [x_2, x_3] \\ &= (x_1 x_2 x_3)^c \left((x_1^k x_2^l - x_1^l x_2^k) [x_1, x_2] + (x_1^k x_3^l - x_1^l x_3^k) [x_1, x_3] + (x_2^k x_3^l - x_2^l x_3^k) [x_2, x_3] \right) \\ &= \sigma_3^c f_{k,l,0} \end{aligned}$$

elde edilir.

Dolayısıyla $K[X_3]^{S_3}$ -modül olarak $(F'_3)^{S_3}$ cebirinin üreteç kümesi $f_{0,b,0}$, $f_{a,b,0}$ ve $f_{0,b,c}$ elemanlarından oluşan kümeye indirgenir. Lemma 5.4 (1) ve (2) den dolayı $f_{0,b,c}$ elemanları üreteç kümesinden elenebilir. Ayrıca $c < b$ durumunda notasyonun Sonuç 5.3'teki gibi kalması için Lemma 5.4 (2) kullanılabilir.

Lemma 5.4 (3), (4) ve tümevarım yardımıyla $f_{0,b,0}$, $b \geq 3$ formundaki her eleman $f_{0,1,0}$ ve $f_{0,2,0}$ tarafından üretilen $K[X_3]^{S_3}$ -modülün bir elemanıdır. Benzer şekilde Lemma 5.4 (2), (5) (6) yardımıyla $f_{a,b,0}$, $b \geq 3$ formundaki elemanlar, $\{f_{a,1,0}, f_{a,2,0}, f_{0,a,0}\}$ ve dolayısıyla $\{f_{1,a,0}, f_{2,a,0}, f_{0,a,0}\}$ tarafından üretilen $K[X_3]^{S_3}$ -modülün birer elemanıdır. Aynı zamanda $f_{1,1,0} = f_{2,2,0} = 0$, $f_{2,1,0} = -f_{1,2,0}$ dır. Dolayısıyla $a \geq 3$ iken $f_{1,a,0}$ ve $f_{2,a,0}$ elemanları, $f_{1,2,0}$, $f_{0,1,0}$ ve $f_{0,2,0}$ tarafından üretilen $K[X_3]^{S_3}$ -modül tarafından (3), (5), (6) ve tümevarım yardımıyla kapsanır.

Teorem 5.6 $\{f_{0,1,0}, f_{0,2,0}, f_{1,2,0}\}$ kümesi, sol $K[X_3]^{S_3}$ -modül olan $(F'_3)^{S_3}$ için bir minimal üreteç kümesidir. Dahası, $(F'_3)^{S_3}$; $f_{0,1,0}$, $f_{0,2,0}$ ve $f_{1,2,0}$ tarafından $K[X_3]^{S_3}$ -modül olarak serbestçe üretilir.

İspat: Derecelendirilmiş F'_3 cebirinde homojenlik dereceleri sırasıyla 3, 4 ve 5 olan $f_{0,1,0}$, $f_{0,2,0}$ ve $f_{1,2,0}$ elemanları

$$\begin{aligned} f_{0,1,0} &= (x_2 - x_1)[x_1, x_2] + (x_3 - x_1)[x_1, x_3] + (x_3 - x_2)[x_2, x_3] \\ f_{0,2,0} &= (x_2^2 - x_1^2)[x_1, x_2] + (x_3^2 - x_1^2)[x_1, x_3] + (x_3^2 - x_2^2)[x_2, x_3] \end{aligned}$$

$$f_{1,2,0} = (x_1x_2^2 - x_1^2x_2)[x_1, x_2] + (x_1x_3^2 - x_1^2x_3)[x_1, x_3] + (x_2x_3^2 - x_2^2x_3)[x_2, x_3]$$

şeklinde yazılır. Derecesi 3 olan $f_{0,1,0}$ elemanının $\{f_{0,2,0}, f_{1,2,0}\}$ tarafından üretilen $K[X_3]^{S_3}$ -modülün bir elemanı olmadığı aşıkardır. Diğer taraftan $f_{0,2,0}$ elemanının $\{f_{0,1,0}, f_{1,2,0}\}$ tarafından üretilen $K[X_3]^{S_3}$ -modülün bir elemanı olduğunu varsayalım. O zaman bir $\alpha \in K$ için $f_{0,2,0} = \alpha\sigma_1 f_{0,1,0}$ dır. $[x_1, x_2]$, $[x_1, x_3]$ ve $[x_2, x_3]$ tarafından üretilen serbest $F'_3 K[X_3]$ -modülünde $[x_1, x_2]$ komütatörünün çarpanı düşünülürse Sonuç 2.29'dan

$$(x_2^2 - x_1^2) = \alpha(x_1 + x_2 + x_3)(x_2 - x_1)$$

elde edilir ve buradan $\alpha = 0$ dir. Bu ise $f_{0,2,0} \neq 0$ ile çelişir. Ayrıca $f_{1,2,0}$, $\{f_{0,1,0}, f_{0,2,0}\}$ tarafından üretilen $K[X_3]^{S_3}$ -modülün bir elemanı ise bir $\alpha, \beta, \gamma \in K$ için

$$f_{1,2,0} = (\alpha\sigma_1^2 + \beta\sigma_2)f_{0,1,0} + \gamma\sigma_1 f_{0,2,0}$$

dır. Bu eşitliğin her iki tarafında $[x_1, x_2]$ komütatörünün çarpanı göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} (x_1x_2^2 - x_1^2x_2) &= (\alpha(x_1 + x_2 + x_3)^2 + \beta(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3))(x_2 - x_1) \\ &\quad + \gamma(x_1 + x_2 + x_3)(x_2^2 - x_1^2) \end{aligned}$$

olup $\alpha x_3^2 x_2 = 0$ eşitliğinden $\alpha = 0$ elde edilir ve dolayısıyla $x_1x_2^2$ ve $x_2^2x_3$ ün katsayılarından $\beta + \gamma = 1$ ve $\beta + \gamma = 0$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $\{f_{0,1,0}, f_{0,2,0}, f_{1,2,0}\}$ kümesi bir minimal üreteç kümesidir.

Son olarak, $f_{0,1,0}$, $f_{0,2,0}$ ve $f_{1,2,0}$ elemanlarının serbest üreteçler olduğu gösterilecektir. Sonuç 2.28'den dolayı $f_{0,1,0}^2 = f_{0,2,0}^2 = f_{1,2,0}^2 = 0$ olduğundan bu elemanlar olabilecek bütün bağıntılarda lineer olarak görünür. $s_1, s_2, s_3 \in K[X_3]^{S_3}$ simetrik polinomları için

$$s_1 f_{0,1,0} + s_2 f_{0,2,0} + s_3 f_{1,2,0} = 0$$

olsun. Yine $[x_1, x_2]$ komütatörünün çarpanları kullanılarak benzer bir yolla $K[X_3]$ değişmeli polinom cebirinde

$$s_1(x_2 - x_1) + s_2(x_2^2 - x_1^2) + s_3(x_1x_2^2 - x_1^2x_2) = 0$$

veya

$$s_1 + s_2(x_2 + x_1) + s_3x_1x_2 = 0$$

elde edilir. Buradan

$$s_2(x_2 + x_1) + s_3x_1x_2$$

polinomu simetrik olur. Bu polinom $(23) \in S_3$ transpozisyonunun etkisi altında sabit kalacağından

$$s_2(x_2 + x_1) + s_3x_1x_2 = s_2(x_3 + x_1) + s_3x_1x_3$$

$$s_2x_2 + s_3x_1x_2 = s_2x_3 + s_3x_1x_3$$

$$x_2(s_2 + s_3x_1) = x_3(s_2 + s_3x_1)$$

elde edilir. Dolayısıyla $(x_2 - x_3)(s_2 + s_3x_1) = 0$ olup $s_2 + s_3x_1 = 0$ dır. Buradan s_3x_1 polinomunun simetrik olduğu elde edilir. $(12) \in S_3$ transpozisyonu için $s_3x_1 = (12) \cdot s_3x_1 = s_3x_2$ olup $s_3 = 0$ dır. Dolayısıyla $s_2 = s_3x_1 = 0$ ve $s_1 = -s_2(x_2 + x_1) - s_3x_1x_2 = 0$ elde edilir.

Bir simetrik polinomun $f_{0,1,0}$, $f_{0,2,0}$ ve $f_{1,2,0}$ serbest üreteçler cinsinden nasıl yazılacağı bir örnek ile gösterilecektir.

Örnek 5.7

$$f_{2,4,5} = (x_1^2x_2^4 - x_1^4x_2^2)x_3^5[x_1, x_2] + (x_1^2x_3^4 - x_1^4x_3^2)x_2^5[x_1, x_3] + (x_2^2x_3^4 - x_2^4x_3^2)x_1^5[x_2, x_3]$$

simetrik polinomunu düşünelim. Teorem 5.5'in ispatındaki Durum II den

$$\begin{aligned} f_{2,4,5} &= (x_1^2 x_2^4 - x_1^4 x_2^2) x_3^5 [x_1, x_2] + (x_1^2 x_3^4 - x_1^4 x_3^2) x_2^5 [x_1, x_3] + (x_2^2 x_3^4 - x_2^4 x_3^2) x_1^5 [x_2, x_3] \\ &= x_1^2 x_2^2 x_3^2 ((x_2^2 - x_1^2) x_3^3 [x_1, x_2] + (x_3^2 - x_1^2) x_2^3 [x_1, x_3] + (x_3^2 - x_2^2) x_1^3 [x_2, x_3]) \\ &= \sigma_3^2 f_{0,2,3} \end{aligned}$$

tür. Lemma 5.4 (1) kullanılarak

$$f_{2,4,5} = \sigma_3^2 f_{0,2,3} = \sigma_3^2 (v_3 f_{0,2,0} - f_{0,5,0} + f_{2,3,0})$$

elde edilir. Lemma 5.4 (3), (6) ve (2) yardımıyla

$$\begin{aligned} f_{2,4,5} &= \sigma_3^2 (v_3 f_{0,2,0} - (\sigma_1 f_{0,4,0} - \sigma_2 f_{0,3,0} + \sigma_3 f_{0,2,0}) + (\sigma_1 f_{2,2,0} - \sigma_2 f_{2,1,0} - \sigma_3 f_{0,2,0})) \\ &= \sigma_3^2 (v_3 f_{0,2,0} - (\sigma_1 (\sigma_1 f_{0,3,0} - \sigma_2 f_{0,2,0} + \sigma_3 f_{0,1,0}) - \sigma_2 f_{0,3,0} + \sigma_3 f_{0,2,0}) \\ &\quad + (\sigma_2 f_{1,2,0} - \sigma_3 f_{0,2,0})) \\ &= \sigma_3^2 (-\sigma_1 \sigma_3 f_{0,1,0} + (v_3 + \sigma_1 \sigma_2 - 2\sigma_3) f_{0,2,0} + (-\sigma_1^2 + \sigma_2) f_{0,3,0} + \sigma_2 f_{1,2,0}) \\ &= \sigma_3^2 (-\sigma_1 \sigma_3 f_{0,1,0} + (v_3 + \sigma_1 \sigma_2 - 2\sigma_3) f_{0,2,0} + (-\sigma_1^2 + \sigma_2) (\sigma_1 f_{0,2,0} - \sigma_2 f_{0,1,0}) \\ &\quad + \sigma_2 f_{1,2,0}) \end{aligned}$$

olup buradan

$$\begin{aligned} f_{2,4,5} &= (-\sigma_1 \sigma_3^3 + \sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_3^2 - \sigma_2^2 \sigma_3^2) f_{0,1,0} \\ &\quad + (v_3 \sigma_3^2 + \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^2 - 2\sigma_3^3 - \sigma_1^3 \sigma_3^2 + \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^2) f_{0,2,0} + \sigma_2 \sigma_3^2 f_{1,2,0} \end{aligned}$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

- Akdoğan, N., 2021a. An algorithm for automorphisms of infinite dimensional Grassmann algebras. *Creat. Math. Inform.*, 30(2):121-128
- Akdoğan, N., 2021b. On the symmetric polynomials in the variety of Grassmann algebras. *Erzincan Un. J. Sci. Tech.*, 14(3):907-913.
- Akdoğan, N., ve Findik, Ş., 2021. Symmetric polynomials in the variety generated by Grassmann algebras. *J. Algebra Appl.*, (baskıda) (doi:101142/S0219498823500196)
- Bavula, V. V., 2010. The Jacobian map, the Jacobian group and the group of automorphisms of the Grassmann algebra. *Bull. Soc. Math. France*, 138(1):39–117.
- Bekh-Ochir, C., ve Rankin, S., 2011. The identities and the central polynomials of the infinite dimensional unitary Grassmann algebra over a finite field. *Comm. Algebra*, 39(3):819–829.
- Berezin, F. A., 1967. Automorphisms of a Grassmann algebra. *Mat. Zametki*, 1(3):269–276.
- Bryant R., ve Papistas A., 2000. On the fixed points of a finite group acting on a relatively free Lie algebra. *Glasgow Mathematical Journal*, 42(2):167-181
- Chevalley, C., 1955. Invariants of finite groups generated by reflections. *Amer. J. Math.*, 77:778-782.
- Dicks, W., ve Formanek, E., 1982. Poincare series and a problem of S. Montgomery. *Lin. Mult. Alg.*, 12:21-30.
- Djoković, D. Ž., 1978. Derivations and automorphisms of exterior algebras. *Can. J. Math.*, 30(6):1336–1344.
- Domokos, M., 1996. Relatively free invariant algebras of finite reflection groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348:2217-2233.
- Drensky, V., 1999. *Free Algebras and PI-Algebras*. Springer, Singapore, 240s.
- Drensky, V., Findik Ş., ve Öğüşlü N.Ş., 2020. Symmetric polynomials in the free metabelian Lie algebras. *Mediterr. J. Math.*, 17(5):1-11.

- Fındık Ş., ve Ögürlü N.Ş., 2019. Palindromes in the free metabelian Lie algebras. *Int. J. Algebra and Comput.*, 29(5):885-891.
- Fındık, Ş., ve Özkurt, Z., 2020. Symmetric polynomials in Leibniz algebras and their inner automorphisms. *Turkish. J. Math.*, 44(6):2306-2311.
- Forder, H.G., 1941. *The Calculus of Extentation*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 490s.
- Formanek, E., 1985. Noncommutative invariant theory. *Contemp. Math.*, 43:87-119.
- Giambruno, A., ve Koshlukov, P., 2001. On the identities of the Grassmann algebras in characteristic $p > 0$. *Isr. J. Math.*, 122:305–316.
- Grassmann, H.G., 1844. *Die lineale Ausdehnungslehre: ein neuer Zweig der Mathematik*. Leipzig.
- Hilbert, D., 1890. Ueber die Theorie der algebraischen Formen. *Math. Ann.*, 36:473-534.
- Hilbert, D., 1893. Ueber die vollen Invariantensysteme. *Math. Ann.*, 42:313-373.
- Hilbert, D., 1900. Mathematische Probleme, *Gottinger Nachrichten*. 253-297; 1901. *Arch.Math. u. Phys.*, 3(1):44-63; Translation: 1902. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 8(10):437-479.
- Humphreys, J.E., 1978. Hilbert's Fourteenth Problem. *Amer. Math. Monthly Vol.*, 85(5):341-353.
- Kharchenko, V.K., 1978. Algebras of invariants of free algebra. *Algebra i Logika*, 17:478-487. Translation: 1978. *Algebra and Logic*, 17:316-321.
- Kharchenko, V.K., 1984. Noncommutative invariants of finite groups and Noetherian varieties. *J.Pure Appl. Alg.*, 31:83-90.
- Krakovski, D., ve Regev, A., 1973. The polynomial identities of the Grassmann algebra. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 181:429–438.
- Lane, D.R., 1976. Free algebras of rank two and their automorphisms. Ph.D. thesis, Bedford College, London.

- László, A., 2016. A natural extension of the conformal Lorentz group in a field theory context. *Int. J. Mod. Phys. A.*, 31(28–29): 1645041:1-11.
- Nagata, M., 1959. On the 14-th problem of Hilbert. *Amer. J. Math.*, 81:766-772.
- Noether, E., 1916. Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher Gruppen. *Math. Ann.*, 77:89-92.
- Peano, G., 1888. *Galeoto geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann.* Fratelli Bocca, Torino
- Shephard, G.C., ve Todd, J. A., 1954. Finite unitary reflection groups. *Can. J. Math.*, 6:274-304.
- Whitehead, A.N., 1898. *Treatise on Universal Algebra with Applications.* Cambridge University Press, Cambridge, 614s.



ÖZGEÇMİŞ

İlk ve orta öğrenimini Adana’da tamamladıktan sonra Seyhan Rotary Anadolu Lisesi’nden mezun oldu. 2008 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’ne başladı. 2012 yılında bölüm ikincisi olarak mezun oldu. Aynı yıl Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisans eğitimine başladı. 2014 yılında yüksek lisansını bitirip yine aynı yıl Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktora eğitimine başladı. 2018 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Matematik Mühendisliği Bölümü’nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı.