



T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

SOSYO-MATEMATİKSEL NORMLARLA DESTEKLENMİŞ
SORGULAMA TEMELLİ ÖĞRETİMİN ÖĞRENCİLERİN
CEBİRSEL DÜŞÜNME SÜREÇLERİNE ETKİSİ

SÜMEYRA KÖKEN

İzmir
2022

DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**SOSYO-MATEMATİKSEL NORMLARLA DESTEKLENMİŞ
SORGULAMA TEMELLİ ÖĞRETİMİN ÖĞRENCİLERİN
CEBİRSEL DÜŞÜNME SÜREÇLERİNE ETKİSİ**

SÜMEYRA KÖKEN

DANIŞMAN

Prof. Dr. Sibel Yeşildere İMRE

İzmir

2022

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum “Sosyo-matematiksel Normlarla Desteklenmiş Sorgulama Temelli Öğretimin Öğrencilerin Cebirsel Düşünme Süreçlerine Etkisi” adlı çalışmanın içerdiği fikri izinsiz başka bir yerden almadığımı; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında ve bölümlerinin yazımında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada kullanılan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yaptığımı ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi, ayrıca bu çalışmanın Dokuz Eylül Üniversitesi tarafından kullanılan bilimsel intihal tespit programıyla tarandığını ve *intihal içermediğini* beyan ederim. Herhangi bir zamanda aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonuca razı olduğumu bildiririm.

23/08/2022

Sümeysra KÖKEN

TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU



DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU



Tarih: 31/08./2022

Tez Başlığı: Sosyo-matematiksel Normlarla Desteklenmiş Sorgulama Temelli Öğretimin Öğrencilerin Cebirsel Düşünme Süreçlerine Etkisi

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler ve d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 317 sayfalık kısmına ilişkin, 31/08/2022 tarihinde **tez danışmanım tarafından** Dokuz Eylül Üniversitesi Kütüphane ve Dokümantasyon Daire Başkanlığı'nın sağladığı İntihal Tespit Programından (**Turnitin-Tez İntihal Analiz Programı**) aşağıda belirtilen **filtreleme tiplerinden biri** (uygun olanı işaretleyiniz) uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin **benzerlik oranı %24'tür**.

☐ <http://www.kutuphane.deu.edu.tr/tr/turnitin-tez-intihal-analiz-programi/> adresindeki Tez İntihal Analiz Programı

Kullanım Kılavuzunu okudum ☒ X

Filtreleme Tipi 1(Maksimum%15) ☐

Filtreleme Tipi 2 (Maksimum%30) ☒ X

☐ Kabul/Onay ve Bildirim sayfaları hariç, ☐ Kaynakça hariç, ☐ Alıntılar dâhil, ☐ Altı (6) kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç.	☐ Kabul/Onay ve Bildirim sayfaları hariç, ☒ Kaynakça dâhil, ☒ Alıntılar dâhil.
EK 1- İntihal Tespit Programı Raporu İLK SAYFA Çıktısı. ☒ X	
EK 2- İntihal Tespit Programı Raporu (Tümü) Cđ İçinde. ☒ X	

Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orijinallik Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve yukarıda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Adı Soyadı : Sümeyra KÖKEN
Öğrenci No : 2019950105
Anabilim Dalı : Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı
Programı : İlköğretim Matematik Öğretmenliği Yüksek Lisans
Statüsü : Yüksek Lisans ☒ X Doktora ☐

ÖĞRENCİ

Sümeyra KÖKEN

DANIŞMAN

Prof. Dr. Sibel YEŞİLDERE İMRE

Açıklamalar

1: Bu formu teslim etmeden önce sizden istenen bilgileri uygun kutucuğu (☐) işaretleyerek doldurunuz.

Kullanıcı şifre vb. konusunda sorun yaşanması durumunda Üniversitemiz Merkez Kütüphanesinde bulunan Turnitin yetkilisine (.....Tel: +..... veya: başvurunuz.

2: Yüksek Lisans/Doktora Tez Çalışması Orijinallik Raporu" formu tezin ciltlenmiş ve elektronik nüshalarının içerisinde ekler kısmında yer alır.

3: Tez savunmasında düzeltilme alınması durumunda bu form güncellenerek yeniden hazırlanır.

4: Turnitin-Tez İntihal Analiz Programına yükleme yapılırken Dosya Başlığı (document title) olarak **tez başlığının tamamı**, Yazar Adı (author's first name) olarak **öğrencinin adı**, Yazar Soyadı (author's last name) olarak **öğrencinin soyadı** bilgisini yazınız.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her bir aşamasında; lisans ve yüksek lisans eğitimim süresince akademik bilgeliği ve uzmanlığı ile yoluma ışık tutan ve beni yönlendiren; değerli ilgi ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli danışmanım Prof. Dr. Sibel YEŞİLDERE İMRE'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İyi bir araştırmacı olabilmem için ders içi ve ders dışı akademik olarak gelişmem konusunda beni destekleyen çok değerli Sayın Prof. Dr. Süha YILMAZ, Sayın Prof. Dr. Elif TÜRNÜKLÜ ve Sayın Doç. Dr. Berna CANTÜRK GÜNHAN hocalarıma teşekkürlerimi sunarım. Tez konumu belirlememde lisans ve yüksek lisans eğitimimde bana sonsuz destek veren hocam Sayın Doç. Dr. Ayşe TEKİN DEDE'ye sonsuz teşekkür ederim. Ayrıca tezime katkı ve görüşlerini sunan sayın hocalarım Prof. Dr. Esra BUKOVA GÜZEL ve Dr. Öğr. Üyesi Aysun Nüket ELÇİ'ye çok teşekkür ederim.

Eğitim öğretim hayatım boyunca her sürecimde ve aldığım her kararda arkamda olan, sonsuz bir güven ve destek veren, çalışmalarımı ve araştırma sürecimi en iyi şekilde destekleyen canım annem, canım babam ve canım kardeşime hayatıma ortak oldukları ve yanımda oldukları için sonsuz teşekkür ederim.

İhtiyaç duyduğum her an yanımda duran ve bana tezimin her aşamasında varlığı ile sonsuz yaratan canım yol arkadaşım Çetin CABAOĞLU'na; yüksek lisans tez çalışmam süresince bana gece gündüz tüm desteğini veren ve beni motive eden canım arkadaşım Merve TOKGÖZ'e sonsuz teşekkür ederim.

Son olarak bugünlere gelmemde üzerimde emeği olan tüm değerli öğretmenlerime teşekkürlerimi sunarım.

Sümevra KÖKEN

İÇİNDEKİLER

ÖZET	viii
ABSTRACT	x
BÖLÜM I.....	1
GİRİŞ	1
1.1. Problem Durumu	4
1.2. Amaç ve Önem.....	7
1.3. Problem Cümlesi / Alt Problem Cümleleri	8
1.4. Sınırlılıklar	9
1.5. Varsayımlar	9
1.6. Tanımlar	9
1.7. Kısaltmalar	10
BÖLÜM II	11
KURAMSAL ÇERÇEVE / KAVRAMSAL ÇERÇEVE / İLGİLİ ARAŞTIRMALAR	11
2.1. Sorgulama Temelli Öğretim.....	11
2.1.1. Sorgulama Temelli Matematik Öğretimi	16
2.1.1.1. Sosyo-matematiksel Normlar	25
2.1.2. Sorgulama Temelli Öğretim ile İlgili Araştırmalar.....	29
2.2. Cebir ve Cebirsel Düşünme.....	36
2.3. Cebirsel Düşünme Sürecinin Oluşumu ve Genelleme	40
2.3.1. Kuramsal Çerçeve: Cebirsel Örüntü Genellemesinin İnşası	44
2.3.2. Cebirsel Düşünme ile İlgili Araştırmalar	49
2.4. Sorgulama Temelli Öğretim ve Cebirsel Düşünme	53
BÖLÜM III	55
YÖNTEM	55
3.1. Araştırmanın Modeli / Deseni	55
3.2. Katılımcılar.....	60
3.3. Veri Toplama Araçları	62
3.3.1. Cebirsel Düşünme Süreçleri Ön Değerlendirme Formu'nun Geliştirilmesi ...	63
3.3.2. Öğretim Sonrası Cebirsel Düşünme Süreçleri Değerlendirme Formu'nun Geliştirilmesi.....	77
3.3.3. Sosyo-matematiksel Normlarla Desteklenmiş Sorgulama Temelli Öğretime İlişkin Ders İçeriğinin Geliştirilmesi.....	96
3.3.4. Cebirsel Düşünme Süreçlerinin Analizine İlişkin Yarı Yapılandırılmış Mülakat Formu'nun Geliştirilmesi.....	106
3.4. Uygulama Süreci	108
3.5. Verilerin Analizi.....	111

3.5.1. Cebirsel Düşünme Süreçleri Ön Değerlendirme Formu ve Öğretim Sonrası Cebirsel Düşünme Süreçleri Değerlendirme Formu Verilerinin Analizi.....	111
3.5.2. Sorgulama Temelli Öğretim Sürecinde Elde Edilen Verilerin Analizi.....	113
3.5.3. Yarı Yapılandırılmış Mülakatlardan Elde Edilen Verilerin Analizi	114
3.6. Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği.....	114
3.7. Araştırmacının Rolü	116
BÖLÜM IV	118
BULGULAR.....	118
4.1. Öğrencilerin Öğretim Öncesi Cebirsel Düşünme Süreçlerine İlişkin Bulgular ...	118
4.1.1. Olgunlaşmamış Tümevarım Sergileyen Öğrenci Yaklaşımı.....	120
4.1.2. Aritmetik Genelleme Sergileyen Öğrenci Yaklaşımı	135
4.2. Sorgulama Temelli Öğretim Sürecinde Açığa Çıkan Sosyo-matematiksel Norm ve Beceriler	146
4.3. Öğrencilerin Öğretim Sonrası Cebirsel Düşünme Süreçlerine İlişkin Bulgular...	165
4.3.1. Cebirsel Genelleme Sergileyen Öğrenci Yaklaşımı.....	166
4.3.2. Aritmetik Genelleme Sergileyen Öğrenci Yaklaşımı	195
4.4. Öğrencilerin Cebirsel Düşünme Süreçlerinin Değişimine İlişkin Bulgular	198
BÖLÜM V	218
TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER.....	218
KAYNAKÇA.....	226
EK 1.....	246
EK 2. Uygulama İzinleri.....	247
EK 3. Cebirsel Düşünme Süreçleri Ön Değerlendirme Formu	250
EK 4. Öğretim Sonrası Cebirsel Düşünme Süreçleri Değerlendirme Formu	257
EK 5. Sosyo-matematiksel Normlarla Desteklenmiş Sorgulama Temelli Öğretime İlişkin Ders İçeriği	271
EK. 6. Cebirsel Düşünme Süreçlerinin Analizine İlişkin Yarı Yapılandırılmış Mülakat Formu	301

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 1	27
Tablo 2	45
Tablo 3	47
Tablo 4	57
Tablo 5	61
Tablo 6	62
Tablo 7	65
Tablo 8	100
Tablo 9	110
Tablo 10	112
Tablo 11	114
Tablo 12	119
Tablo 13	134
Tablo 14	145
Tablo 15	147
Tablo 16	165
Tablo 17	195
Tablo 18	198
Tablo 19	203
Tablo 20	205
Tablo 21	207
Tablo 22	209
Tablo 23	211
Tablo 24	213
Tablo 25	215
Tablo 26	216
Tablo 27	217

ŞEKİLLER LİSTESİ

<i>Şekil 1: Sorgulama Temelli Matematik Öğretimine İlişkin Öğrenme Teorileri (Artigue & Blomhoj, 2013)</i>	18
<i>Şekil 2: Altı alt süreç ve farklı epistemolojik yapıdaki unsurlardan oluşan bir matematiksel modelleme süreci (Blomhøj ve Jensen, 2006, akt. Bukova - Güzel & Hıdıroğlu, 2013).....</i>	20
<i>Şekil 3: Cebirsel Düşünmenin Çatısı (Herbert ve Brown, 1997'den uyarlayan Tanışlı, 2008)</i>	38
<i>Şekil 4: Cebirsel Düşünmenin Bileşenleri (Kriegler, 2008; aktaran Ataş, 2019)</i>	39
<i>Şekil 5: Cebirsel Örüntü Genellemesinin İnşası (Radford, 2008, s.85)</i>	45
<i>Şekil 6: Aritmetik Genelleme Süreci (Radford, 2008).....</i>	46
<i>Şekil 7: Olgunlaşmamış Tümevarım Süreci (Radford, 2008).....</i>	47
<i>Şekil 8: Örnek şekil örüntüsü (F. D. Rivera, 2018).....</i>	48
<i>Şekil 9: Cebirsel genelleme yaklaşımı sergileyen bir öğrencinin olası çözümü</i>	48
<i>Şekil 10: Araştırma süreci</i>	59
<i>Şekil 11: Uzman görüşü öncesi geliştirilen Etkinlik 6</i>	66
<i>Şekil 12: Uzman görüşü sonrası düzenlenen Etkinlik 6'nın son hali.....</i>	66
<i>Şekil 13: Cebirsel genelleme sergileyen bir öğrencinin olası çözümü-1</i>	87
<i>Şekil 14: Cebirsel genelleme sergileyen bir öğrencinin olası çözümü-2</i>	87
<i>Şekil 15: Etkinlik 5'in orijinal versiyonu (Stacey, 1989, p.148).....</i>	88
<i>Şekil 16: Etkinlik 6'nın orijinal versiyonu (Van de Walle ve ark., 2007).....</i>	89
<i>Şekil 17: Etkinlik 7'nin orijinal versiyonu (F. D. Rivera, 2018).....</i>	91
<i>Şekil 18: Sorgulama Temelli Ders İçeriğine İlişkin Kuramsal Çerçeve (Artigue & Blomhoj, 2013).....</i>	97
<i>Şekil 19: Yarı yapılandırılmış görüşmelerin gerçekleştirildiği örnek mülakat ortamı.....</i>	110
<i>Şekil 20: Cebirsel düşünmenin inşasında açığa çıkan genelleme süreçleri (Radford, 2008).....</i>	113
<i>Şekil 21: D_3'ün örüntünün belirli bir bölümünü inceleme süreci (i).....</i>	120
<i>Şekil 22: D_3 tarafından P_n ifadesinin oluşturulması (ii)</i>	121
<i>Şekil 23: O_1'in örüntünün belirli bir bölümünü inceleme süreci (i).....</i>	122
<i>Şekil 24: O_1 tarafından P_n ifadesinin oluşturulması (ii).....</i>	123
<i>Şekil 25: O_3'ün örüntünün belirli bir bölümünü inceleme süreci (i).....</i>	125
<i>Şekil 26: O_3 tarafından P_n ifadesinin oluşturulması (ii)</i>	125
<i>Şekil 27: Y_1'in örüntünün belirli bir bölümünü inceleme süreci (i).....</i>	127
<i>Şekil 28: Y_1 tarafından P_n ifadesinin oluşturulması (ii)</i>	128

Şekil 29: Y_1 'in örüntünün terimlerini elde etme süreci.....	128
Şekil 30: Y_2 'nin örüntüye ilişkin ortaklıkları keşfetme süreci	130
Şekil 31: Y_2 'in örüntünün belirli bir bölümünü inceleme süreci (i).....	131
Şekil 32: Y_2 tarafından P_n ifadesinin oluşturulması (ii)	131
Şekil 33: D_2 'nin sayı örüntüsüne ilişkin ortak özelliği fark etme süreci (i)	136
Şekil 34: D_2 tarafından örüntünün anlamlandırılma süreci	136
Şekil 35: D_2 'nin fark edilen ortak özelliğin örüntünün diğer terimlerinin içerip içermediğini inceleme süreci (ii).....	136
Şekil 36: Y_1 'in sayı örüntüsüne ilişkin ortak özelliği fark etme süreci (i)	139
Şekil 37: Y_1 'in fark edilen ortak özelliğin örüntünün diğer terimlerinin içerip içermediğini inceleme süreci (ii).....	139
Şekil 38: Y_3 'ün sayı örüntüsüne ilişkin ortak özelliği fark etme süreci (i)	140
Şekil 39: Y_3 'ün fark edilen ortak özelliğin örüntünün diğer terimlerinin içerip içermediğini inceleme süreci (ii).....	141
Şekil 40: O_1 'in sayı örüntüsüne ilişkin ortak özelliği fark etme süreci (i)	143
Şekil 41: O_1 'ün fark edilen ortak özelliğin örüntünün diğer terimlerinin içerip içermediğini inceleme süreci (ii).....	143
Şekil 42: O_1 'in örüntünün genel kuralını ifade etmeye yönelik sözel açıklaması.....	144
Şekil 43: Problem-1 Kenarlık Problemi	150
Şekil 44: Problem-1 / Örüntüye ait ortaklıkların Y_3 tarafından fark edilme süreci.....	152
Şekil 45: Y_3 'ün fark ettiği ortak özelliğe ilişkin matematiksel açıklamasını gerekçelendirme süreci.....	153
Şekil 46: Y_3 'ün Problem-1'e ait fark ettiği ortak özellik	154
Şekil 47: Problem-3.....	155
Şekil 48: Problem-8.....	159
Şekil 49: Problem-4.....	161
Şekil 50: Problem-9.....	163
Şekil 51: Y_3 'ün Etkinlik 3'e (1) ilişkin ortaklıkları fark etme süreci (i)	167
Şekil 52: Y_3 'ün fark edilen ortaklığı örüntünün diğer terimlerine genelleme süreci (ii)	167
Şekil 53: Y_3 'ün örüntünün herhangi bir terimini doğrudan belirtmek için cebirsel bir kural elde etme süreci (iii)	168
Şekil 54: Y_3 'ün Etkinlik 3'e (2) ilişkin ortaklıkları keşfetme süreci (i).....	169
Şekil 55: Y_3 'ün fark edilen ortaklığı örüntünün diğer terimlerine genelleme süreci (ii)	169
Şekil 56: Y_3 'ün belirlediği ortaklıklara ilişkin açıklamaları.....	170

<i>Şekil 57:</i> Y_3 'ün örüntünün herhangi bir terimini doğrudan belirtmek için cebirsel bir kural elde etme süreci (iii)	170
<i>Şekil 58:</i> Y_2 'nin Etkinlik 7'ye ilişkin ortaklıkları keşfetme süreci (i).....	173
<i>Şekil 59:</i> Y_2 'nin fark edilen ortaklığı örüntünün diğer terimlerine genelleme süreci (ii)	174
<i>Şekil 60:</i> Y_2 'nin örüntünün herhangi bir terimini doğrudan belirtmek için cebirsel bir kural elde etme süreci (iii).....	175
<i>Şekil 61:</i> Y_1 'in Etkinlik 1'e ilişkin ortaklıkları fark etme süreci (i).....	177
<i>Şekil 62:</i> Y_1 'in fark edilen ortaklığı örüntünün diğer terimlerine genelleme süreci (ii)	178
<i>Şekil 63:</i> Y_1 'in örüntünün herhangi bir terimini doğrudan belirtmek için cebirsel bir kural elde etme süreci (iii)	179
<i>Şekil 64:</i> D_3 'ün Etkinlik 2'ye ilişkin ortaklıkları fark etme süreci (i).....	180
<i>Şekil 65:</i> D_3 'ün fark edilen ortaklığı örüntünün diğer terimlerine genelleme süreci (ii)	181
<i>Şekil 66:</i> D_3 'ün örüntünün herhangi bir terimini doğrudan belirtmek için cebirsel bir kural elde etme süreci (iii)	182
<i>Şekil 67:</i> D_2 'nin Etkinlik 2'ye (2) ilişkin ortaklıkları keşfetme süreci (i).....	184
<i>Şekil 68:</i> D_2 'nin fark edilen ortaklığı örüntünün diğer terimlerine genelleme süreci (ii)	184
<i>Şekil 69:</i> D_2 'nin örüntünün herhangi bir terimini doğrudan belirtmek için cebirsel bir kural elde etme süreci (iii).....	185
<i>Şekil 70:</i> O_3 'ün Etkinlik 4'e ilişkin ortaklıkları fark etme süreci (i).....	187
<i>Şekil 71:</i> O_3 'ün fark edilen ortaklığı örüntünün diğer terimlerine genelleyerek cebirsel bir kural elde etme süreci (ii) / (iii).....	188
<i>Şekil 72:</i> O_2 'nin Etkinlik 5'e ilişkin ortaklıkları fark etme süreci (i).....	190
<i>Şekil 73:</i> O_2 'nin fark edilen ortaklığı örüntünün diğer terimlerine genelleyerek cebirsel bir kural elde etme süreci (ii) / (iii)	190
<i>Şekil 74:</i> O_1 'in Etkinlik 8'e ilişkin ortaklıkları fark etme süreci (i).....	192
<i>Şekil 75:</i> O_1 'in fark edilen ortaklığı örüntünün diğer terimlerine genelleme süreci (ii)	193
<i>Şekil 76:</i> D_1 'in Etkinlik 9'a ilişkin ortak özelliği fark etme süreci (i)	196
<i>Şekil 77:</i> D_1 'in fark edilen ortak özelliği örüntünün diğer terimlerinin içerip içermediğini inceleme süreci (ii).....	197

ÖZET

SOSYO-MATEMATİKSEL NORMLARLA DESTEKLENMİŞ SORGULAMA TEMELLİ ÖĞRETİMİN ÖĞRENCİLERİN CEBİRSEL DÜŞÜNME SÜREÇLERİNE ETKİSİ

Bu araştırma kapsamında sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretimin yedinci sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme süreçlerine etkisinin incelenmesi amaçlanmaktadır. Gerçekleştirilen çalışmada, birbirinden farklı akademik başarı düzeylerine sahip, aynı sınıf ortamında öğrenim gören 7. sınıf öğrencilerinin sorgulama temelli matematik öğretimi öncesi ve sonrasında cebirsel düşünme süreçlerinde oluşan değişim karşılaştırılmaktadır. Öğrencilerin cebirsel düşünme süreçleri genelleme becerileri bağlamında analiz edilmektedir. Bununla birlikte çalışmada sorgulama temelli öğretim sürecine entegre edilen sosyo-matematiksel normlarla birlikte açığa çıkan norm ve beceriler ses ve video kayıtları, sınıf içi diyaloglar ışığında açıklanmaktadır.

Araştırma da nitel araştırma yöntemleri kullanılmaktadır. Araştırmanın örneklemini Ordu ilindeki resmi bir ortaokuldan amaçlı örnekleme yöntemi ile seçilen dokuz tane yedinci sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Çalışmada, öğrencileri değerlendirmekten ya da cebirsel düşünme süreçleri üzerine kesin yargılar açığa çıkarmaktan çok öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerinin gerçekleştirilen öğretim bağlamında nasıl değiştiğini incelemeye ve öğretimin niteliği üzerine odaklanılmaktadır. Bu bağlamda durum çalışması araştırma deseni olarak belirlenmiştir. Çalışmada dört farklı veri toplama aracı çalıştırıcı tarafından geliştirilmiştir. İlk veri toplama aracı öğrencilerin öğretim öncesi ve sonrası cebirsel düşünme süreçlerinin analizine yönelik geliştirilen Cebirsel Düşünme Süreçleri Ön Değerlendirme Formu ve Öğretim Sonrası Cebirsel Düşünme Süreçleri Değerlendirme Formu'dur. Bir diğer veri toplama aracı ise Sosyo-matematiksel Normlarla Desteklenmiş Sorgulama Temelli Öğretime İlişkin Ders İçeriği'dir. Son veri toplama aracı ise Cebirsel Düşünme Süreçlerinin Analizine İlişkin Yarı Yapılandırılmış Mülakat Formu'dur.

Araştırma bulguları kapsamında, sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretimin, yedinci sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme süreçlerini örüntü genelleme becerileri bağlamında geliştirdiği görülmüştür. Araştırma sonuçları doğrultusunda, sorgulama temelli öğretim öncesi öğrencilerin en çok olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı sergilediği tespit edilirken öğretim sonrasında öğrencilerin yüksek düzeyde cebirsel genelleme gerçekleştirdiği bulgusuna ulaşılmıştır. Elde edilen bulgular, temelinde sorgulama yatan bir

öğretim sürecinin ve bu doğrultuda oluşturulan öğrenme ortamının; öğrencilerin örüntünün altında yatan ilişkileri sorgulaması, cebirsel olarak bir genelleme gerçekleştirebilmesi, verilen örüntüyü cebirsel bir kural elde etme yönünde etkili kullanabilmesi konusunda gelişim sağladığı tespit edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sorgulama, Sorgulama Temelli Matematik Öğretimi, Cebirsel Düşünme



ABSTRACT

THE EFFECT OF SOCIO-MATHEMATICAL NORMS SUPPORTED INQUIRY BASED TEACHING ON STUDENTS' ALGEBRAIC THINKING PROCESSES

Within the scope of this research, it is aimed to examine the effect of inquiry-based teaching supported by socio-mathematical norms on the algebraic thinking processes of seventh grade students. In the conducted research, the change in the algebraic thinking processes of 7th grade students with different academic achievement levels and studying in the same classroom environment before and after inquiry-based mathematics teaching is compared. Students' algebraic thinking processes are analyzed in the context of their generalization skills. In addition, the norms and skills that emerged together with the socio-mathematical norms integrated into the inquiry-based teaching process in the research are explained in the light of audio and video recordings and in-class dialogues.

Qualitative research methods are used in the research. The sample of the study consists of nine seventh grade students selected by purposive sampling method from an official secondary school in Ordu. The research focuses on examining how students' algebraic thinking processes change in the context of instruction and the quality of instruction, rather than assessing students or revealing definitive judgments on algebraic thinking processes. In this context, the case study was determined as a research design. In the study, four different data collection tools were developed by the researcher. The first data collection tool was the Algebraic Thinking Process Pre-Evaluation Form and the Post-Instruction Algebraic Thinking Process Evaluation Form, which were developed for the analysis of the algebraic thinking processes of the students before and after the instruction. Another data collection tool is the Course Content of Inquiry-Based Teaching Supported by Socio-mathematical Norms. The last data collection tool is the Semi-Structured Interview Form on the Analysis of Algebraic Thinking Processes.

Within the scope of the research findings, it was seen that inquiry-based instruction supported by socio-mathematical norms improved the algebraic thinking processes of seventh grade students in the context of pattern generalization skills. In line with the results of the research, it was determined that the students showed the most immature inductive approach before inquiry-based instruction, while it was found that the students made a high level of algebraic generalization after the instruction. The findings show that a teaching process that is

based on questioning and the learning environment created in this direction; It has been determined that students have made progress in questioning the relationships underlying the pattern, making an algebraic generalization, and using the given pattern effectively in order to obtain an algebraic rule.

Keywords: Inquiry, inquiry-based mathematics teaching, algebraic thinking



BÖLÜM I

GİRİŞ

“Şüphe etmek düşünmektir. Düşünmekte var olmaktır. Öyleyse var olduğun şüphesizdir. Düşünüyorum o halde varım”.

Rene Descartes’e ait olan bu söz, düşünme ile insanoğlunun varlık dayanışması arasındaki ilişkiyi kuvvetli bir şekilde vurgulamaktadır. Düşünme becerisinin insanları diğer canlılardan ayıran en önemli eylemlerden biri olduğu muhakkaktır. Tarih boyunca insanoğlunun entelektüel gelişimini amaç olarak edinen eğitim felsefelerinin tamamı düşünmeyi geliştirilmesi gereken en önemli beceri olarak tanımlamış, düşünmenin sistematik gelişimine destek olması açısından matematik, okutulması gereken temel dersler arasında yer almıştır (Çelik, 2016). Matematik eğitiminin temel amaçları arasında düşünme becerilerini geliştirmek, çok daha özel olarak matematiksel düşünme becerisini geliştirmek önemli bir yer teşkil etmektedir. Matematiğin öğretilmesinde ve anlamlandırılmasında vurgulanan bakış açısı, bir aktaran tarafından gösterilen yöntemlerin tekrarlanmasından ziyade öğrencinin hata yapma ve alternatif yollar keşfetme hakkına izin vermesi ve böylece yeni bakış açılarının oluşması yönünde değişmektedir (Köhler, 1997). Bu yeni anlayışla birlikte öğrencinin matematiksel bir kavram ya da durumu anlamlandırırken bilgiye kendi deneyimlemeleri ile ulaşması, ulaştığı bilgiyi sorgulaması ve araştırması fikri, öğrencilerin matematiksel anlamlandırma ve düşünme becerilerine yapacağı katkılardan dolayı araştırmacılar tarafından ilgi görmüştür (Kandil, 2016; Karademir, 2017; Kalkan, 2019). Bu araştırmalarda düşünme becerisinin gelişiminin analiz etme, ilişkilendirme, genelleme yapma, kanıtlama gibi sorgulama becerileri bağlamında ele alınması araştırmanın bu yönde şekillenmesini sağlamaktadır. Bu bölümde bu araştırmanın ortaya çıkış kaynağı ve araştırmanın konusunun nasıl yapılandırıldığına ilişkin açıklamalara yer verilmektedir.

Literatür taraması matematiksel düşünme becerisinin gelişimi için öğrencinin matematiğin özünün keşfetmesinin önemli bir adım olduğunu göstermektedir (Kalkan, 2019). NCTM (1989) öğrencinin matematiği keşfetme sürecinde matematiksel bir kavram ya da durumu sorgulayarak anlamlandırması ve kişinin matematiksel düşünme becerilerine güvenmesi en önemli hedefleri olduğunu belirtmiştir. Aynı şekilde matematik öğretiminin en önemli hedeflerinden bir diğeri de neden, nasıl sorularına karşılık olarak mantıklı cevaplar elde etmeyi sağlayan ve sadece matematiksel olmayan aynı zamanda temel bir beceri olan sorgulama ve muhakemenin oluşmasına ortam sağlamaktır (Altıparmak ve Öziş, 2005).

Yapılan araştırmalar bahsedilen bu ortamın, geleneksel öğrenme ortamlarından uzak, öğrencinin bilgiyi sorgulayarak kendisinin yapılandırdığı ve aktif olarak yer aldığı bir öğretim şeklinin benimsenmesi ile gerçekleşebileceğinin önemi üzerinde durmaktadır (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Bu durum araştırmanın sorgulama temelli öğretimin matematik eğitimi üzerine entegre edilerek şekillenmesini sağlamaktadır.

Sorgulama bilinmeyen bir konuyu ya da problemi merak etme, onu araştırma ve başkalarıyla da iş birliği yaparak merak edilen soruya cevap vermek için girişimde bulunmaktır (Wells, 1999). Matematik eğitiminde sorgulama ise; problem çözme, meta biliş, modelleme, tartışma ve kanıt sunma, ilişki kurma, temsil etme, akıl yürütme, iletişim kurma, genelleme yapma gibi farklı matematiksel düşünme süreçlerini kullanır (Artigue ve Blomhøj, 2013; Chapman, 2011).

Matematiksel düşünme özel durumlar üzerinde çalışma (specializing), varsayımda bulunma (conjecturing), ikna etme (convincing) ve genelleme yapma (generalizing) şeklinde dört temel süreci ortaya çıkaran düşünme becerisi olarak tanımlanmaktadır (Çelik, 2016). Öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini inceleyen araştırmalar matematiksel düşünmenin bir alt bileşeni olan geometrik düşünme, aritmetik düşünme ve cebirsel düşünme üzerine yoğunlaşmaktadır. Matematiksel düşünmenin bir diğer biçimi olan cebirsel düşünme, bireyin matematiksel işlemler ve örüntülerle/ilişkilerle ilgili genellemeler yapması, bu genellemelerden bir varsayım üretmesi, açığa çıkardığı varsayımları giderek artan formel bir dil içinde ifade edebilmesi şeklinde açıklanmaktadır (Kaput, 1999).

Cebirsel düşünme; sayılar ve işlemlerle genellemeler yapmayı, bu düşünceleri anlamlı sembol sistemleri kullanarak formülleştirmeyi, örüntü ve fonksiyon kavramlarını anlamayı (Van de Walle, Karp ve Bay Williams, 2011), cebirsel sembolleri kullanarak matematiksel yapı ve durumları farklı şekillerde temsil ve analiz etmeyi, nicel ilişkileri anlamak ve temsil etmek için matematiksel modeller kullanmayı, gerçek yaşamda karşılaşılan farklı durumlardaki değişimleri analiz etmeyi içermektedir (NCTM, 2000). Dolayısıyla cebirsel düşünme farklı kavramların ve fikirlerin kavranmasını içermektedir.

Çalışmalar incelendiğinde, öğrencilerin, bir problem ya da durumu sorgulayarak öğrenme ortamında birbirleriyle paylaşma, tartışma olanağına sahip olması düşünme becerilerinin geliştirilmeye teşvik edildiğini ortaya çıkarmaktadır (Elder ve Paul, 2003; Bracey, 1991; Hunkins, 1972; Chin ve Osborn, 2008; Winstanley, 2008; Kalkan, 2019). Araştırma, sorgulama, bilgi edinme ve inceleme, edinilen bilgiyi değerlendirme ve analiz

etme, kişinin kendi düşünsel süreçlerinin farkında olma ve genelleme becerilerini desteklemektedir (Kalkan, 2019). Bu becerileri içeren sorgulama temelli öğretim yöntemi, öğrencilerin, derin ve düşünsel bir süreç içerisinde bulunabilmeleri ve genellemeye ulaşma süreçlerini kendilerinin yapılandırmaları için imkân sağlamaktadır (Kandil, 2016). Bu bağlamda sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretimin, 7. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme becerisi özelinde kendilerine ait fikirleri ve bakış açıları keşfetmesine, potansiyellerini ortaya koydukları alanda ortaya çıkarmalarına, cebirsel düşünme becerisi bağlamında genelleme süreçlerinin taklit veya ezber yoluyla değil sorgulayarak keşfetmelerine olanak sağlayacağı düşünülmektedir.

Ortaya çıkışı yukarıda kısaca özetlenen bu araştırmada sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretimin 7. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme süreçlerine etkisi incelenmektedir. Öğretim öncesi ve sonrası öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerinin incelenmesi aynı okulda ve aynı sınıfta öğrenim gören farklı başarı seviyesindeki öğrenciler üzerine gerçekleştirilmektedir. Öğrencilerin cebirsel düşünme becerileri, genelleme yapma süreçleri özelinde analiz edilmektedir. Ayrıca sorgulama temelli öğretim sürecine dahil edilerek benimsenen sosyo-matematiksel normların öğretim sürecinde ne şekilde olgunlaşarak açığa çıktığı ve bu süreçte başka hangi norm ve becerilerin oluştuğu araştırılmaktadır.

Beş bölüm halinde sunulan tezin birinci bölümünde araştırmanın başlaması ve konunun belirlenmesinden itibaren son şeklini almasına kadar geçen akademik sürecin nasıl gerçekleştiğine değinilmektedir. Bu bölümün başlıkları; problem durumu, amaç ve önem, problem cümlesi / alt problem cümleleri, sınırlılıklar, varsayımlar, tanımlar ve kısaltmalar şeklindedir.

İkinci bölümde, araştırmanın alt yapısının oluşmasına yardımcı olan ilgili literatür ve kuramsal çerçeveler açıklanmaktadır. Sorgulama temelli öğretim, cebir ve cebirsel düşünme, cebirsel düşünme sürecinin oluşumu ve genelleme gibi başlıklara ve araştırmanın kuramsal çerçevesi ile ilgili yayın ve araştırmalara yer verilmektedir. Sorgulama temelli öğretim ve cebirsel düşünmeye ilişkin bir literatür taraması sunulmaktadır. İlk olarak ele alınacak sorgulama temelli öğretim ana başlığında, sorgulama temelli öğretiminin ne tür bir yapıya sahip olduğundan, tarihi geçmişinden, sosyo-matematiksel normlarla ilişkisinden ve matematik eğitime entegre edilmesinden bahsedilmektedir. Bir diğer ana başlıkta ise cebir kavramı ele alınarak cebirsel düşünme ve içeriğine yer verilmektedir. Bu noktada cebirsel düşünmenin gelişiminde önemli bir konuma sahip olan genelleme kavramı üzerinde

durulmaktadır. Aynı zamanda araştırmanın kuramsal çerçevesi ve inceleme aracı olarak kullanılan Cebirsel Örüntü Genellemesinin İnşası'na ait içeriği ve kavramlar açıklanmaktadır.

Üçüncü bölüm araştırmanın yöntem kısmını oluşturmaktadır. Araştırma modeli / deseni, katılımcılar, veri toplama araçları ve geliştirilme süreci, veri toplama araçlarını uygulama süreci, verilerin analizi, araştırmanın geçerliği ve güvenilirliği, araştırmacının rolü bu bölümde açıklanmaktadır.

Dördüncü bölüm araştırmaya ait elde edilen bulgular ve yorumlardan oluşmaktadır. Bu bölümde aynı sınıf ortamında öğretim gören farklı başarı seviyelerine sahip 7. sınıf öğrencilerinin gerçekleştirilen sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim öncesi ve sonrası cebirsel düşünme süreçlerinin analizine ilişkin elde edilen bulgular ilgili kuramsal çerçeve doğrultusunda sunulmaktadır. Ayrıca öğretim sürecinde açığa çıkan norm ve beceriler öğrencilerin sınıf içi tartışmaları bağlamında toplu bir şekilde açıklanmaktadır. Araştırmanın amacı ve problemi doğrultusunda elde edilen bulgulara ilişkin yorumlamalara yer verilmektedir.

Beşinci bölümde, tartışma, sonuç ve öneriler yer almaktadır. Dördüncü bölümde yer alan bulgulardan elde edilen çıkarımlar toplu bir şekilde değerlendirilmekte ve literatürde ulaşılan bulgular ile karşılaştırılmaktadır. Bu araştırmadan elde edilen izlenimlerden hareketle yapılabilecek araştırma önerileri sunulmaktadır.

1.1. Problem Durumu

2000'li yılların başlangıcından itibaren gelişen ve değişen dünya doğrultusunda kendini yenileyen teknolojik gelişmelerle, eğitimin amaçlarına dair taleplerde de değişiklikler meydana gelmiştir. Bu değişim geleneksel öğretimden uzaklaşarak öğretmen veya öğretici tarafından sunulan bir bilginin öğrenci tarafından hazır bir şekilde alınmasını geride bırakmıştır. Bunun yerine bilgiye ve veriye kendi deneyimleriyle ulaşan, ulaştığı bilgiyi sorgulayan, önceki öğrenmeleri ışığında yeni bilgiler ortaya çıkaran ve bunu yapılandıran bir öğrenci anlayışı benimsenmiştir (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Bu yeni anlayışla birlikte öğrencilerden her bir matematiksel kavram ya da konuyu ezber öğretimden uzaklaşarak sorgulama yapan, sorgulayarak anlamlandıran, akıl yürütme süreçlerini geçiren, öğrencinin kendi öğrenme sürecini kendisinin yönettiği bir öğrenme ortamının oluşması beklenmektedir. Bu şekilde araştıran, sorgulayan, bilgiye ulaşma yollarına hâkim olan, bilgi kaynaklarının güvenilirliğini sorgulayan, iletişim becerileri yüksek bireyler

yetiştirilmesi Türk Milli Eğitim sisteminin önemli bir amacı haline gelmiştir (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018).

Günümüz şartları da içinde bulunduğumuz bilgi ve teknoloji çağı ile beraberinde bireylerin toplum içerisindeki konumu göz önüne alındığında çağın öncelikli gereksinimleri araştırma yapan, sorgulayan, düşünen, neden-sonuç ilişkilerini sorgulayan, merak eden bireylerin yetiştirilmesidir. Bu noktada bireylerin belirtilen davranışları sergilemesinde belirtilen davranışların temeli eğitim öğretim ile atılmaktadır. Sorgulama yapabilen, öğrenme sürecini yöneterek bulunduğu durumu fark edebilen, bir problemin sonuçlarını tahmin edebilen, tahminini sorgulayan bireylerin yetiştirilmesi Milli Eğitim Bakanlığı'nın (MEB, 2018) temel amaçları arasında yer almaktadır. Bu amaçlara ulaşılabilmesi için içerisinde bulunduğu durumu kontrol edebilen, yönetip değerlendirebilen bir başka ifade ile sorgulama becerisi kazanan bireylere ihtiyaç vardır. Sorgulama becerisine sahip bireyler soru sorar, araştırır, merak eder, sorduğu sorular sonucunda elde ettiği cevaplar ile birlikte yeni bilgiyi oluşturur ve yapılandırır (Taşkoyan, 2008). Bu becerilere sahip bireylerin yetiştirilmesi için sorgulama temelli öğretim yaklaşımının eğitim sistemine entegre edilerek bütünleştirilmesi gerekmektedir (Howe, 2002).

Geçmişten günümüze kadar geleneksel sınıf ortamlarında, öğrenme ve öğretme süreci öğretmenin başlattığı, öğrencinin cevap verdiği ve öğretmenin değerlendirdiği bir süreç olarak bilinir (Mehan, 1979). Bu yöntem günümüzde halen çok yaygın bir şekilde kullanılmaktadır (Black & Wiliam, 2009). Fakat alanyazın incelendiğinde araştırmalar, etkili bir öğrenme ortamı oluşturulabilmesi için sınıf içerisinde yaratılacak sosyal ortamın önemine dikkat edilmesi gerektiği üzerinde durmaktadır. Araştırmalar öğrenmenin hem bireylerin sosyal bir ortamda birbirleri ile kurdukları etkileşim hem de bireysel düşünmeye bağlı olduğunu göstermiş, sosyal etkileşimleri teşvik eden sınıf içi tartışma ve sorgulama ortamlarının sağlanmasının öğrenme sürecine olan olumlu etkisine dikkat çekmiştir (Cobb, Stephan, McClain, & Gravemeijer, 2011; Stephan & Akyuz, 2012; Stephan, Bowers, Cobb, & Gravemeijer, 2003). Sosyal içerikli, öğrenciler arasında iletişim ve etkileşim durumunun fazla olduğu öğrenme ortamlarında öğrenciler bir durum ya da problemi sorgulama yoluyla çözerler (Akyüz, 2014). Sorgulama, bilinmeyen bir konuyu veya problemi merak etme, onu araştırma ve başkalarıyla da iş birliği yaparak merak edilen soruya cevap vermek için girişimde bulunmaktır (Wells, 1999). Chapman (2011) sorgulamayı öğrencilerin matematiği öğrenebileceği bir araç olarak görmektedir. Sorgulama temelli bir öğrenme ortamı ise öğrenci-

merkezli, araştırma yapılan, sorular sorulan, iletişimin ve iş birliğinin fazla olduğu bir ortam olarak tanımlamıştır.

Sorgulama temelli öğretimin özellikleri bilimin içeriğinde özellikle bilimsel fenomenlere ilişkin örnekler açısından açıklansa da matematik eğitiminde uygulanabilmeleri için de geçerlidir. Bilimsel sorgulamada olduğu gibi, doğal, sosyal ve kültürel dünyayı anlamak amacıyla gerçek yaşamdan kaynaklanan sorularla matematiksel sorgulama da teşvik edilmektedir (Artigue & Baptist, 2012).

Uluslararası çalışmalarda matematik öğretiminde sorgulamanın etkisi ve gücüne sıklıkla değinilmektedir. Etkili bir matematik öğretimi için öğretmenlerin öğrencilerini matematiksel sorgulamaya teşvik eden öğrenme olanakları ve etkinlikleri hazırlamaları, öğrencilerini sorgulatarak ne bildiklerini ve neye gereksinim duyduklarını anlamaları ve onları öğrenmeye daha iyi bir şekilde teşvik etmeleri gerekmektedir (NCTM, 2000). Sorgulama temelli bir öğrenme ortamı öğrencilerin aktif durumda olduğu, öğrencinin bilgiye kendi zihinsel sorgulamaları sonucu ulaştığı, iletişim ve tartışmanın fazla olduğu bir ortamdır (Chapman, 2011). Etkili bir tartışma ortamı öğrencilerin ve öğretmenin doğru ve etkili matematiksel açıklamalar yaptıkları ve gerektiğinde açıklamalarına ilişkin gerekçeleri sunmalarını gerektirmektedir.

Literatür incelendiğinde, sorgulamaya dayalı öğretimin öğrencilerin düşünme becerileri üzerinde olumlu etki oluşturduğu görülmüştür. Sorgulama temelli yöntemin öğrencilerin düşünme becerilerini olumlu yönde etkilemesinin çeşitli olası nedenleri vardır. Bunlardan birisi öğrencilerin ders esnasında hep aktif durumda olmaları olabilir. Bu durum sorgulama yaklaşımının doğasından kaynaklanmaktadır. Çünkü sorgulama yöntemi öğrencilerin gözlem yapma, problem üzerinde çalışma, soru sorma, varsayımlarda bulunma, veri toplama, bulgularını sunma ve önceki bilgileriyle ilişki kurmalarını gerektirir (Artigue & Blomhøj, 2013). Aynı şekilde cebirsel düşünmenin kalbi de matematiksel ilişkileri veya genellemeleri oluşturmak, ifade etmek ve doğrulamaktır (Kaput, 2008). Daha basit bir açıklama ile cebirsel düşünme, niceliksel durumları ilişkisel olarak tartışmak ve semboller ile ifade etmektir (Kieran, 2004). Sorgulama temelli öğretim bu nokta da öğrencileri cebirsel olarak düşünmeye sevk etmekte önemli bir noktaya sahip olabilir. Buna ek olarak, sorgulama yaklaşımının gerektirdiği gibi öğrencilerden ders esnasında çözümlerini açıklamaları, matematiksel gerekçelere dayandırarak desteklemeleri, arkadaşlarının açıklamaları doğrultusunda kendi çıkarımlarını sorgulamaları, tartışmaları ve genel bir doğruda buluşmaları beklenmektedir (Kandil, 2016).

Bu durum, ders esnasında öğrenciler arası iletişimi kaçınılmaz kılabilir. Böylece, öğrencilerin aktif oluşu, arkadaşları ile iletişimi ve matematiksel gerekçeler kullanarak tartışma yapabilmeleri onların cebirsel düşünme süreçlerinin gelişimine fırsat oluşturabilir. Literatür incelendiğinde, matematik eğitiminde sorgulama temelli öğretim üzerine yapılan araştırmalar oldukça azdır. Araştırmanın bu alanda yapılacak çalışmalara katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Bu noktada belirlenen sosyo- matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretimin öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerini geliştireceği varsayılmaktadır.

1.2. Amaç ve Önem

Matematik eğitimi alanında yapılan çalışmalarda matematiksel bilgileri öğrenirken öğrencilerin bireysel öğrenmeleri yerine bulundukları sosyal ve kültürel bağlamda öğrenmelerine yönelik vurgular artmıştır (Cobb, Gravemeijer, Yackel, McClain ve Whitenack, 1997; Cobb ve Bauersfeld, 1995; Mottier Lopez ve Allal, 2007). Araştırmalar öğrenmenin bireysel düşünmeye ve öğrenme ortamında oluşan tartışma ortamı ile temelinde sorgulama yatan öğrenme ortamlarının sağlanmasının öğrenme sürecine olan olumlu etkisine dikkat çekmiştir (Cobb, Stephan, McClain, & Gravemeijer, 2011; Stephan & Akyuz, 2012; Stephan, Bowers, Cobb, & Gravemeijer, 2003). Bunun yanında Ortaokul Matematik Dersi (5,6,7,8. Sınıflar) Öğretim Programı'nda geleneksel öğretim yaklaşımından öte öğrencilerin araştırabilecekleri, iletişim kurabilecekleri, alternatif çözüm yöntemlerinin açıklanabileceği, gerekçelendirme yapılabileceği öğrenme ortamları ile zenginleştirilen öğretime odaklanıldığı görülmüştür (MEB, 2013). Sınıf içerisindeki iletişimi aktif kılmada, etkin tartışma ortamları oluşturulup öğrencileri tartışmaya katılmalarına teşvik etmek zengin öğrenme ortamlarının oluşması konusunda önemli olabilmektedir. Öğrenme ortamının tartışmaya açık olması ve sınıf içerisinde bir sorgulama sürecinin olması sınıf içi etkileşimi arttırabilmektedir.

Sorgulama bilinmeyen bir konuyu ya da problemi merak etme, onu araştırma ve başkalarıyla da iş birliği yaparak merak edilen soruya cevap vermek için girişimde bulunmaktır (Wells, 1999). Matematik eğitiminde sorgulama ise; problem çözme, meta biliş, modelleme, akıl yürütme, tartışma ve kanıtlama, bağlantı kurma, temsil etme, iletişim kurma gibi farklı matematiksel düşünme süreçlerini kullanır (Artigue ve Blomhøj, 2013; Chapman, 2011). Matematiksel düşünmenin bir diğer biçimi olan cebirsel düşünme ise, nicel durumlara göre değişken kullanımı ve bu değişkenler arasındaki ilişkiyi açık hale getirebilme kapasitesi şeklinde ifade edilmektedir (Driscoll, 1999). Ayrıca cebirsel düşünme, bireyin matematiksel işlemler ve ilişkilerle/örüntülerle ilgili genellemeler yapması, bu genellemelerden varsayımında bulunma, tartışma ve bunları giderek artan formel bir dil içinde ifade edebilmesidir (Kaput,

1999). Bu şekilde öğrenme ortamının tartışma ve sorgulamaya açık olması öğrencilerin düşünme becerilerini geliştirebilmektedir. Bu bağlamda cebirsel düşünmeye teşvik etmeye imkân sağlaması açısından sorgulama temelli öğretimin etkili olacağı düşünülmektedir.

Bu araştırmanın amacı, 7. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme süreçlerinin incelenmesi amacıyla sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretimin sınıf içerisinde bir öğretim yöntemi olarak gerçekleştirilmesidir. Bu bağlamda birbirinden farklı başarılarla sahip, aynı sınıf ortamında bulunan 7. sınıf öğrencilerinin sorgulama temelli öğretim öncesi ve sonrasında cebirsel düşünme süreçlerinde oluşan değişim karşılaştırılmaktadır.

Cebirsel düşünme; sayılar ve işlemlerle genellemeler yapmayı, bu düşünceleri anlamlı sembol sistemleri kullanarak formüllemeyi, örüntü kavramını anlamayı (Van de Walle, Karp ve Bay Williams, 2011), genellemeler yaparak bu genellemelerden varsayımda bulunmayı ve bunları formel bir dil ile ifade edebilmeyi gerektirmektedir (NCTM, 2000). Cebirsel düşünmeye geçişte literatürde belirtilen öğrenci güçlükleri göz önünde bulundurulursa, sorgulama temelli öğretimin matematiğe entegre edilerek öğrenme ortamlarının düzenlenmesi, öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerinin gelişimine fırsat oluşturabilmektedir. Literatür incelendiğinde matematik eğitiminde sorgulama temelli öğretim üzerine yapılan araştırmalar oldukça azdır. Bu amaçla hazırlanan bu çalışmada cebirsel düşünmenin geliştirilmesi bağlamında gerçekleştirilen öğretimin matematik eğitimi literatürüne katkıda bulunacağı düşünülmektedir.

1.3. Problem Cümlesi / Alt Problem Cümleleri

Araştırmanın problemi ‘‘Sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretimin öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerine etkileri nelerdir?’’ şeklindedir.

Araştırmanın alt problemleri aşağıda verilmiştir:

1. Sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim öncesi öğrencilerin cebirsel düşünme süreçleri nasıldır?
2. Sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim sürecinde hangi sosyo-matematiksel normlar ve beceriler gözlemlenmiştir?
3. Sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim sonrasında öğrencilerin cebirsel düşünme süreçleri nasıldır?
4. Sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim öncesi ve sonrasında öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerinde farklılık var mıdır?

1.4. Sınırlılıklar

1. 2021-2022 öğretim yılı bahar döneminde Ordu ilinin Gökçöy ilçesindeki bir devlet ortaokulunun 7-A sınıfında öğrenim gören 9 öğrenci ile sınırlıdır.
2. Araştırmanın verileri, yedinci sınıf matematik dersi öğretim programında cebir öğrenme alanında yer alan “Örüntü ve İlişkiler” konusu ile sınırlıdır.
3. Yarı yapılandırılmış mülakat çalışmasına ait bulgular, yalnızca araştırmanın gerçekleştirildiği öğrencilerin açıklamalarından elde edilen veriler ile sınırlıdır.

1.5. Varsayımlar

1. Araştırmada kullanılan tüm veri toplama araçları için alınan uzman görüşlerinin yeterli olduğu varsayılmaktadır.
2. Araştırma sürecine katılan öğrencilerin veri toplama sürecinde, veri toplama araçlarına yansız bir şekilde objektif olarak cevap verdikleri varsayılmaktadır.
3. Araştırmada kullanılan tüm veri toplama araçlarının, veri toplama ve yorumlama aşamaları için yeterli olduğu varsayılmaktadır.

1.6. Tanımlar

Sorgulama: Sorgulama bilinmeyen bir konuyu ya da problemi merak etme, onu araştırma ve başkalarıyla da iş birliği yaparak merak edilen soruya cevap vermek için girişimde bulunmaktır (Wells, 1999).

Sorgulama Temelli Öğretim: Sorgulamaya temelli öğretim yöntemi, öğrencilerin araştırmalarına, sorgulamalarına ve çözümlerini savunmalarına olanak sağlayan, öğrenci merkezli bir öğretim yaklaşımıdır (Artigue & Blomhøj, 2013).

Cebirsel Düşünme: Bireyin matematiksel işlemler ve ilişkilerle/örüntülerle ilgili genellemeler yapması, bu genellemelerden varsayımda bulunma, tartışma ve bunları giderek artan formel bir dil içinde ifade etme süreçleridir (Kaput, 1999).

Sosyo-matematiksel Norm: Cobb vd. (1992) ve Yackel ve Cobb (1996) tarafından öğrenme ortamında öğretmen ve öğrencilerin etkileşimi sonucunda açığa çıkan karşılıklı beklentiler “norm” olarak adlandırılmıştır. Sosyal normlar herhangi bir konu alanının öğretimine uygulanabilirken sosyo-matematiksel normlar öğrencilerin matematiğe özgü etkinliklerine odaklanmaktadır (Yackel ve Cobb, 1996; Cobb, Stephan, McClain ve Gravemeijer, 2001; McClain ve Cobb, 2001). Matematiğe özel normatif anlayışlar sosyo-matematiksel norm olarak adlandırılmıştır (Voigt, 1995; Yackel ve Cobb, 1996; Yackel, 2001).

1.7. Kısaltmalar

MEB:	Milli Eğitim Bakanlığı
NCTM:	National Council of Teachers of Mathematics Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi
NRC:	National Research Council Ulusal Araştırma Konseyi
PISA:	Programme for International Student Assessment Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı
TIMSS:	Thirds/Trends in International Mathematics and Science Study Uluslararası Matematik ve Fen Eğitimi Çalışması
TÜBİTAK:	Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

BÖLÜM II

KURAMSAL ÇERÇEVE / KAVRAMSAL ÇERÇEVE / İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Araştırmanın bu bölümünde sorgulama temelli öğretim, cebir ve cebirsel düşünme, cebirsel düşünme sürecinin oluşumu ve genelleme gibi başlıklara ve araştırmanın kuramsal çerçevesi ile ilgili yayın ve araştırmalara yer verilmektedir. Sorgulama temelli öğretim ve cebirsel düşünmeye ilişkin bir literatür taraması sunulmaktadır. Sunulan taramada, tez için belirlenen araştırma problemleri yön verici olmuştur. İlk olarak ele alınacak sorgulama temelli öğretim ana başlığında, sorgulama temelli öğretiminin ne tür bir yapıya sahip olduğundan, tarihi geçmişinden, sosyo-matematiksel normlarla ilişkisinden ve matematik eğitimi entegre edilmesinden bahsedilmektedir. Bir diğer ana başlıkta ise cebir kavramı ele alınarak cebirsel düşünme ve içeriğine yer verilmektedir. Bu noktada cebirsel düşünmenin gelişiminde önemli bir konuma sahip olan genelleme kavramı üzerinde durulmaktadır. Aynı zamanda araştırmanın kuramsal çerçevesi ve inceleme aracı olarak kullanılan Cebirsel Örüntü Genellemesinin İnşası'na ait içeriği ve kavramlar açıklanmaktadır.

2.1. Sorgulama Temelli Öğretim

“Bilim insanı, doğru cevapları veren değil, doğru soruları soran kişidir.”

Claude Lévi-Strauss

Sorgulama temelli öğretimin ortaya çıkışı genellikle Amerikalı filozof ve eğitimci John Dewey'e (1859-1952) atfedilmektedir. Sorgulama temelli öğretimin temelini oluşturan eğitim felsefesinin ana dayanakları incelendiğinde, eğitimin herkes için olması gerektiğini, öğrencilerin öğrenmeye yönelik isteklerinin arttırılmasını, hayatta aktif rol oynayabilen insanların geliştirilmesinin hedeflendiği görülmektedir (Çoban, 2020). İlk ortaya çıkışından itibaren tanımlanmasında sorunlar yaşanan ve farklı tanımlamaları yapılan (Barrow, 2006) “sorgulama” teriminin ortaya çıkışı aslında fen öğretiminde bilim adamlarının izlediği yolların takip edilerek, hipotezlerin kurulması ve test edilmesi yoluyla problemlerin çözülmesi fikrine dayanmaktadır (Dewey, 1910; Schwab, 1960; akt., Brickman, Gormally, Armstrong & Hallar, 2009). Aynı zamanda sorgulama; düşünme ve araştırma sonucunda yeni fikirlerin yapılandırıldığı bir öğrenme süreci olarak tanımlanmaktadır (Kılıç, 2020). Ancak sorgulama sadece fen eğitimine ait özel bir yöntem değil ayrıca farklı disiplinlerin eğitim ve öğretim sürecinde kullanılabilecek, öğrenenlerin içselleştirilmesi beklenen bir süreçtir (Karademir, 2016). Aynı şekilde sorgulama temelli öğretimin altında yatan eğitim felsefesinin kaynakları,

eğitimin herkes için olması gerektiği, öğrencilerin öğrenme ve özerkliklerinin gelişimi için düşünme becerilerine odaklanması, öğrencinin aktif durumda rol oynaması ve geleneksel öğretimin reddedilmesi gerektiğini göstermektedir (Artigue & Blomhoj, 2013).

Sorgulama temelli öğretimin tarihsel kökenine göre, öğrenme öznesi olan öğrenci, öğrenme sürecinin merkezinde olmalı ve dünyayı anlamlandırmak, aynı zamanda düşünme becerilerini geliştirmek için gerçek hayat problemleriyle meşgul olmalıdır: von Humboldt (1767–1835) and Pestalozzi (1746–1827), himself inspired by Rousseau (1712–1778) and his followers Fro'bel (1782–1852) and Herbart (1776–1841). Aynı şekilde Dewey (1938) için sorgulama hem keşif hem de öğrenmenin temelidir. Dewey öğrenmeyi, deneyimin sorgulama ile duyular ve fikirler arasında bağlantı kurmaya çalışma gücü olarak tanımlar (Artigue & Blomhoj, 2013). Öğrencilerin deneyimlerinin düzenlenmesi ve sorgulama yoluyla öğrenmenin gerçekleşmesi için öğrencilerin genel zihin alışkanlıklarının ve düşünme becerilerinin geliştirilmesi gereklidir (Dewey, 1938). Yaparak yaşayarak öğrenme modelini destekleyen Dewey'in felsefesine göre öğrenme eylemden kaynaklanır. Ancak tüm etkinlikler ve eylemler eşit derecede eğitici değildir. Bu nedenle öğretmenin uygun etkinlikleri seçmesi, etkinliklerin öğrenciler üzerindeki etkilerini yönlendirmesi, böylece verimli eğitim potansiyellerinin ortaya çıkmasıyla konu bilgisinin aşamalı olarak öğrenilmesi için sorgulama ile düşünme becerilerinin geliştirilmesi esastır (Artigue & Blomhoj, 2013). Aynı zamanda sorguma temelli öğretim günlük hayat problemlerini temel alan öğrenci merkezli bir öğretim yöntemidir. Bu öğretim yöntemi, öğretmenlerin öğrencilerin düşünme süreçleri hakkında öngörü kazanma şansına sahip olmaları için öğrenme ortamında öğrencilerin kapasitelerini artırmak için gerçek yaşam problemlerini kullanan bir pedagoji olarak tanımlanmaktadır (Supovitz, Mayer ve Kahle, 2000). Deskins (2012) sorgulamanın öğrencilerin bilgiyi bir öğreticiden direk almak yerine sorular sormasını, cevaplar aramasını ve mevcut bilgilere bir köprü kurmasını gerektirdiğini belirtmektedir. Öğrencilerin içeriği ezberlemek yerine materyalleri ve problem çözme yoluyla bilgiyi araştırmaları gerektiğini önermektedir.

Sorgulamaya temelli öğretim, teorik köklerinin Lev Vygotsky, John Dewey ve Jean Piaget gibi teorisyenlerin inançları üzerine inşa edilmiş olması nedeniyle yeni bir fikir değildir (Doolittle ve Camp, 1999). Bu teorisyenler, öğrenme felsefeleri bazen birbiriyle çelişse de sorgulamaya dayalı öğretimin geliştirilmesine katkıda bulunmuştur. Örneğin, öğretmenin rolü göz önüne alındığında, Vygotsky, öğretmenin daha çok bir mentor gibi olduğu fikrini desteklerken, Dewey, sorgulamaya dayalı öğretim yaklaşımının yaygın olarak kabul ettiği gibi onun daha çok kolaylaştırıcı olduğu fikrini desteklemektedir. Öte yandan, Dewey, Vygotsky

ve Piaget'nin felsefeleri, sorgulama temelli öğretimin amacının sosyal bağlamda bilişsel gelişim olduğu konusunda karar verir. Sorgulama temelli öğretim yaklaşımına göre bilgi, bilginin gelişimi üzerinde dilin merkezi bir etkiye sahip olduğu (Vygotsky) ve deneyim ve bu deneyimler üzerine düşünme (Piaget) yoluyla bireylerin ve toplumun iş birliği yoluyla inşa edilir. Bu nedenle, sorgulamaya dayalı öğretim yönteminin, gerçek dünya (Dewey) içindeki bir sosyal etkileşimde kişisel ilgi ve deneyimle eşzamanlı olarak mevcut bilgi üzerine yeni bilgilerin anlaşılmasını veya inşa edilmesini desteklediği sonucuna varılabilir.

Sorgulama, gözlem yapma; sorular sorma, genellemeler üzerine düşünme; bilinen bilgileri görmek amacıyla birincil kaynakları, kitapları ve kaynakları araştırma, analiz etme; araştırmaları planlama; deneysel kanıtlar ışığında bilinenleri tekrar gözden geçirme, inceleme; verileri toplama, toplanan verileri analiz etme ve yorumlama ve değerlendirme için araçları kullanma; yanıtlar, açıklamalar, gerekçelendirme, tahminde bulunma ve sonuçları paylaşarak müşterek bir anlayışla tartışma aktivitelerini içeren çok yönlü bir etkinliktir. Sorgulama varsayımların tanımlanmasını, eleştirel ve mantıksal düşünmenin kullanımını ve alternatif açıklamaların göz önünde bulundurulmasını gerektirmektedir (NRC, 1996).

Sorgulama temelli öğretimin yaklaşım esası, öğrencilere bilim insanlarının bilimsel araştırmalarda kullandıkları teknikleri kullanarak fiziksel dünyayı anlamalarını sağlamaktır. Sorgulama temelli öğretimde öğrencinin, kendi öğrenmesinden sorumlu olduğu, öğrenme sürecine aktif katılımının sağlandığı, bilgiyi kendi zihninde yapılandırmasına olanak tanıyan araştırma, sorgulamaya dayalı öğrenme stratejisi benimsenir. Öğrenme ve öğretme sürecinde öğretmen, kolaylaştırıcı ve yönlendirici rollerini üstlenirken öğrenci, bilginin kaynağını araştıran, sorgulayan, açıklayan ve tartışan birey rolünü üstlenir. Bu noktada sorgulama temelli öğretimin temel amacı, öğrencilerin sorgulama, araştırma ve süreç becerileri olarak tanımlanan becerileri geliştirmelerine yardımcı olmaktır. Sorgulamaya dayalı öğrenme yönteminde öğretmen sorgulamaya yönelik ders etkinliklerini tasarlar. Böylece öğrencilere araştırmacı bilim insanlarının soru sorma, problemleri tanımlama, tahmin yapma, araştırma yapma ve sonuç çıkartmada kullandıkları süreçleri öğretir (Ardur & Kurbanoglu, 2014).

Sorgulama temelli öğretim, öğrencilerin fikirlerini ifade etmelerini, çözüm üretmelerini, fikirlerini paylaşmalarını, argümantasyon yoluyla genişletmelerini ve gözden geçirmelerini sağlar (Kandil, 2016). Bu nedenle, sorgulama temelli öğretim, sorgulama süreci tarafından yönlendirilen öğrenme ile ilgili stratejileri tanımlamak için genel bir terim olarak kullanılmaktadır. Sorgulama temelli öğretimin niteliklerinin altını çizen güçlü yönlerinin kapsamlı bir keşfi ve anlaşılması için, Ulusal Araştırma Konseyi sorgulama temelli öğretimin

tüm sınıf seviyelerinde uygulanabilecek beş özelliği olduğunu bildirmiştir (NRC, 2000). İlk özellik, öğrencinin bilimsel yönelimli sorularla meşgul olmasıdır (s. 24). Bilimsel yönelimli sorular, sorgulama temelli öğretim ortamında çok önemli bir rol oynar. Bilim adamları, “neden” ve “nasıl” soruları olmak üzere iki ana bilimsel soru türünü vurgulamaktadır (Malley, 1992). Öğrenciler genellikle “Neden bazı kayalar kristal içerir?” gibi “neden” soruları sorma eğilimindedirler. Ancak birçok “neden” sorusu bilimsel olarak açıklanamamaktadır. “Neden” soruları yerine, “nasıl” sorularının, sorgulamayı daraltıp keskinleştirmesi ve bilimsel doğasına katkıda bulunması tavsiye edilir. Bu sorular öğretmen, öğrenci, öğretim materyali veya diğer kaynaklar tarafından sorulabilir. Özellikle öğrencilerden gelen bu sorulara yanıt olarak verilen açıklamalara rehberlik etmede öğretmenlerin önemli bir rolü vardır. Sorgulamaya dayalı öğretimin kalitesi ve verimliliği, soruların anlamlılığına ve uygunluğuna bağlıdır, çünkü soruların ilginç, merak edilmeye ve araştırmaya açık olması gerekir (NRC, 2000). İkinci özellik ise öğrencilerin bilimsel olarak yönlendirilmiş soruları ele alan açıklamaları geliştirmelerine ve değerlendirmelerine izin veren açıklamalara öncelik verilmesidir (s. 25). Bilim ve diğer disiplinler arasındaki fark, doğal dünyadaki fenomenleri açıklamak için ampirik kanıtların kullanılmasıdır. Hayvanlar, organizmalar, kayalar veya mesafe, büyüklük veya zaman ölçümleri gibi gözlemler, araştırmalar ve ölçümler yoluyla doğru verilerin toplanması esastır. Öğrenciler, gerçek yaşam ortamından veya öğretmenlerden, öğretim materyallerinden veya diğer kaynaklardan kanıt elde ederler (NRC, 2000).

Üçüncü özellik, öğrencilerin bilimsel olarak yönlendirilmiş soruları ele almak için kanıtlardan açıklamalar formüle etmeleridir (s. 26). Bu özellik bir öncekine paralel olsa da bir durumu kanıtlamanın önemi ve özelliklerinden ziyade kanıta göre açıklama toplamanın önemine dikkat çekmesi bakımından önceki özellik üzerine inşa edilmiştir. Öğrenciler neden-sonuç ilişkileri kurarak gerekçelere ve kanıtlara dayalı açıklamalar yapar. Açıklamalar, aynı zamanda, gözlemler ve mevcut bilgilerle ilişkiler kurarak, belirsiz bilgilere ilişkin öngörü kazanmanın bir yoludur. Böylece açıklamalar, öğrencilerin önceki bilgilerinin ötesine geçmelerini ve yeni bilgiler oluşturmalarını sağlar (NRC, 2000).

Sorgulama temelli öğretimin dördüncü özelliği, öğrencilerin açıklamalarını, özellikle bilimsel anlayışı yansıtan alternatif açıklamalar ışığında değerlendirmeleridir (s. 27). Öğrenciler, diyaloglara girerek, sonuçlarını karşılaştırarak veya sonuçların eğitmen veya öğretim materyalleri tarafından onaylanmasını sağlayarak açıklamaları gözden geçirebilirler. Bu özelliğin kilit noktası, bulguları ile sınıf seviyelerine uygun bilimsel bilgiler arasında bir

köprü kurmaktır. Bu nedenle öğrencilerin açıklamaları mutlaka güncel bilimsel bilgilerle paralel olmalıdır (NRC, 2000).

Sorgulama temelli öğretimin son özelliği, öğrencilerin iletişim kurmaları ve önerilen açıklamalarını gerekçelendirmeleridir (s. 27). Bu özellik, soru, kanıt, yöntem ve alternatif açıklamaların gözden geçirilmesi arasında açık bir dolaşım gerektirmesi ve diğer bilim adamlarının üzerinde çalışması için yeni sorular ortaya koyması bakımından bilim adamı ve açıklamaları arasındaki iletişim üzerine kuruludur. Öğrencilere sonuçlarını ve açıklamalarını paylaşma şansı vermek, diğerlerine sorular sorma, tartışma ve güncel bilimsel bilgilerle bağlantı kurma fırsatı tanınır. Yani öğrenciler sınıf içi tartışmalarla çelişki yaşamaları durumunda bu durumun üstesinden gelebilirler (NRC, 2000). Bu nedenle, sorular sorma, kanıt toplama, açıklamaları formüle etme, değerlendirme ve iletme süreçleri sorgulama temelli öğretim ortamlarında önemli bir rol oynamaktadır.

Geleneksel öğretim yöntemlerine karşı ortaya çıkan sorgulama temelli öğretim öğrenci merkezli bir yaklaşımı temeline alan bir öğretim modelidir (Gençtürk ve Türkmen, 2007). Öğrencileri bilimsel araştırma süreçlerinin ya da aktivitelerinin herhangi birinde yer alarak araştırmayı, sorgulamayı teşvik eden bir yaklaşımdır. Bunlar arasında gözlem yapmak, tahminde bulunmak, hipotez oluşturmak, hipotezi test etmek, açıklamaları gerekçelendirmek ve kanıtlara dayalı sonuçlar elde etmek bulunmaktadır (PRIMAS Project, 2010). Sorgulama temelli öğrenme, öğrencilerin öğretim süresince problemlerin ortaya konulduğu ve bu problemleri çözmeye ya da yanıt bulmaya çalıştığı bir süreç olarak görülmektedir (Wood, 2003). Bu bağlamda sorgulama temelli öğretimde ana noktalardan biri ilgi çekici bir problem veya sorunla başlaması ve buna ilişkin sürecin devam etmesidir. Capps ve Crawford (2013) bu süreci bilim adamlarının çalışmalarına paralel bir şekilde ilgi çeken bilimsel sorgulamalara benzetmektedir. Maaß ve Artigue (2013) öğrencilerin sorgulamayı öğrendiği, sorgulamanın bilimsel ve matematiksel yollarının tanıtıldığı öğrenci merkezli bir öğrenme öğretme yolu olarak tanımlamışlardır. Bu durumda sürece ilgi çekici bir problem ya da soru ile başlanması ve çözümüne ilişkin sorgulama sürecinin devam etmesi en önemli özellikler arasında yer almaktadır (Ormancı, 2018).

Sorgulama temelli öğretimin özellikleri, bilimsel durum ve fenomenler üzerine kurulan örneklerle fen bilimleri eğitimi kapsamında açıklansa da matematik eğitimi uygulanabilirliği için de geçerlidir. Fen eğitimi kapsamında gerçekleştirilen sorgulamada olduğu gibi matematiksel sorgulama da doğal, sosyal ve kültürel dünyayı anlamak amacıyla gerçek hayattan kaynaklanan sorularla teşvik edilebilmektedir (Artigue ve

Baptist, 2012). Belirli bir problem veya deneyle başlayan öğretim, öğretimin inşa edildiği problemler veya deneyler için açıklamalar ve kanıtlar ortaya çıkarmak için öğrencileri uygulamalı deneylere ve etkinliklere dahil etmenin ötesine geçer. Sorgulama temelli öğretim, öğrencilere sorgulama, keşfetme, gözlemleme, keşfetme ve kanıtlama gibi çeşitli beceriler sunarak (Artigue & Baptist, 2012), öğrencileri problem çözme sırasında yaratıcı olmaya ve matematikte risk almaya teşvik eder (Perez, 2000). Haury'ye (1993) göre sorgulama temelli öğretim, öğrencilerin fen ve matematikteki performansları ve tutumları üzerinde olumlu bir etkiye sahiptir. Saunders-Stewart ve diğerleri (2012) ayrıca sorgulama temelli öğretimin öğrencilerin başarısını, bilgiyi uygulama, düşünme becerilerini ve problem çözme becerilerini ve öğrenmeye yönelik tutumlarını geliştirdiğini vurgulamaktadır. Bu öğretim yöntemi sadece başarı ve tutumu etkilemekle kalmaz, aynı zamanda öğrenenlerin bağımsız öğrenmeye yönelik motivasyonlarını ve özgüvenlerini de destekler (Aulls ve Shore, 2008). Malone (2008) ayrıca, öğrencilerin öz-yeterliliğini, güvenini ve bağımsızlığını geliştirdiğini varsayan sorgulama temelli öğretim modelinin yararlarını vurgulamaktadır.

2.1.1. Sorgulama Temelli Matematik Öğretimi

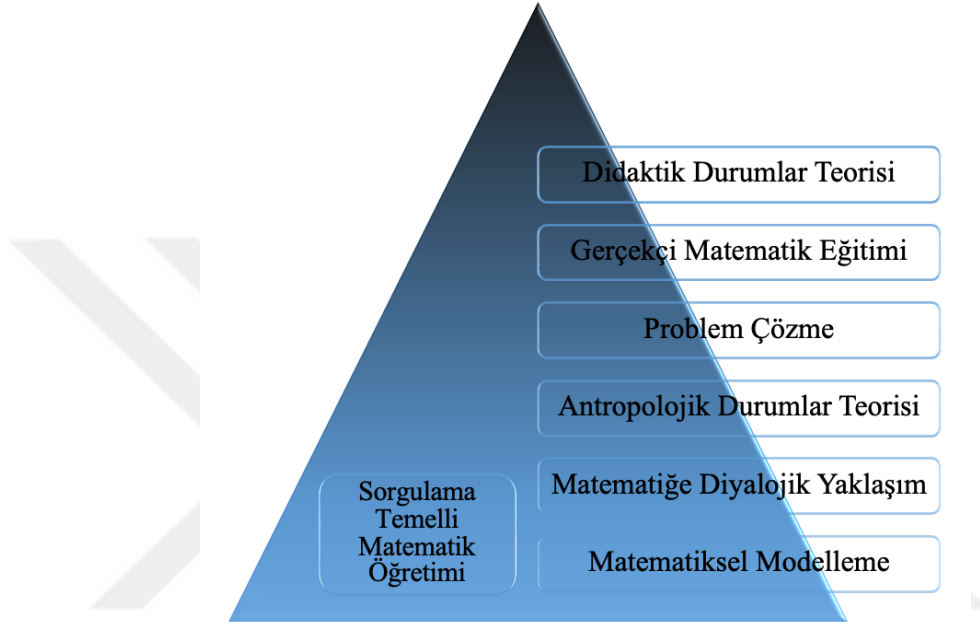
Sorgulama temelli öğretim, bilimsel durumlara entegre edilerek fen eğitimi alanında ortaya çıkmış olsa da yapılan araştırmalar incelendiğinde son 10 yılda matematik eğitime yansımaları artan bir frekans eğrisi göstermektedir. Bilimsel fenomenler kullanılarak gerçekleştirilen sorgulamada olduğu gibi, doğal, sosyal ve kültürel dünyayı anlamak amacıyla gerçek yaşamdan kaynaklanan sorularla matematiksel sorgulama da teşvik edilmektedir (Artigue & Baptist, 2012). Sorgulama temelli öğretim terminolojisinin benimsenmesi matematik ve fen eğitiminin bağlantılı alanlar olduğu, buna bağlı olarak matematiğin tümdengelimli bir bilim olmadığı, aynı zamanda doğa ve yaşam bilimlerine benzer şekilde güçlü bir deneysel bileşene sahip olduğu düşüncesi günümüzde giderek artmaktadır (Artigue & Blomhoj, 2013). Sorgulama temelli öğrenme, öğrencileri bilim insanlarının çalışma prensibine benzer şekilde çalışmaya yönelten bir öğretim yoludur (Artigue & Blomhoj, 2013).

Ortaokul 5-8. Sınıflar matematik dersi öğretim programı da matematik öğrenmeyi aktif bir süreç olarak ele almakta, öğrencilerin öğrenme sürecinde etkin katılımcı olmalarını önem göstermekte ve böylece kendi öğrenme süreçlerinin öznesi olmalarını öngörmektedir. Bu bağlamda öğrencilerin araştırma ve sorgulama yapabilecekleri, iletişim kurabilecekleri, eleştirel düşünebilecekleri, gerekçelendirme yapabilecekleri, fikirlerini rahatlıkla paylaşabilecekleri ve farklı çözüm yöntemlerini sunabilecekleri sınıf ortamları oluşturulması istenmektedir. Matematik öğretim programları kavramsal öğrenmeyi, işlemlerde akılcı

olmayı, matematik bilgileriyle iletişim kurmayı teşvik ederken, öğrencilerin matematiğe değer vermelerine ve problem çözme becerilerinin gelişimine vurgu yapmaktadır. Ayrıca öğrencilerin somut deneyimler yardımıyla matematiksel anlamlar oluşturmalarına, genellemelerine, soyutlama ve ilişkilendirme yapmalarına önem vermektedir. Diğer yandan matematiği öğrenmek; temel kavram ve becerilerin kazanılmasının yanı sıra matematikle ilgili düşünmeyi, problem çözme stratejilerini kavramayı ve matematiğin gerçek yaşamda önemli bir araç olduğunu fark etmeyi de içerir. Öğretim programında belirtilen sorgulama becerileri, bilimsel olarak anlamlı ve uygun sorular sormayı, problemlerin çözümü için stratejiler belirlemeyi ve materyalleri planlamayı, problemlerin sonuçlarını tahmin etmeyi, beklenmedik durumları göz önünde bulundurmayı, sonuçları test etmeyi ve açıklamalarını gerekçelendirmeyi içerir (MEB, 2005).

Artigue ve Blomhoj (2013) çalışmalarında matematik eğitiminde sorgulama temelli öğretimi kavramsallaştırmayı amaçlamışlardır. Bu araştırmada çeşitli sorgulamaya dayalı öğrenme teorileri ele alınarak üzerinde durulan noktalar doğrultusunda sorgulama temelli matematik öğretimi için önemli noktalar belirlenmiştir. Çalışmada, problem çözme, gerçekçi matematik eğitimi, didaktik durumlar teorisi, matematiksel modelleme, matematik eğitimine diyalojik ve eleştirel yaklaşım ve antropolojik didaktik teorisi olarak altı farklı teoriyle sorgulama temelli matematik eğitimine kuramsal bir bakış açısı kazandırmışlardır. Çalışmada üzerinde durulması gereken başlıca konular; soruların ve öğrencilerin etkinliklerinin, öğrencilerin gerçek yaşamlarıyla ve okul dışı problemler ve faaliyetlerle bağları yönünden özgünlüğü, problemlerin matematiksel açıdan epistemolojik alakası ve matematiğin kümülatif boyutu, müfredatta belirtildiği şekli ile bilginin genişletilmesi, ekstra-matematiksel sorular ve sorgulama sürecinin modelleme boyutu, matematiğin deneysel boyutu, problem çözme yeteneklerinin gelişimi ve aklın sorgulama alışkanlıkları, öğrencilere verilen özerklik ve sorumluluk, öğretmen-öğrenci diyalog etkileşimlerinin yönlendirici rolü, sorgulama sürecinin işbirliği boyutu ve sorgulamaya dayalı matematik öğreniminin eleştirel ve demokratik boyutu olarak ele alınmıştır. Artigue ve Blomhoj (2013)'e göre matematik eğitiminde sorgulamaya dayalı öğrenme; öğrencileri düşünmeye ve sorgulamaya yönlendiren çeşitli matematiksel eylemleri içermektedir. Ayrıntı üzerine odaklanılmasını sağlayan matematiksel problemler; problem çözme; modelleme; kaynakları tarayarak bir matematiksel bir düşünce açığa çıkarma; keşfetmek; belirli belgeleri analiz ederek argüman oluşturma; deneme; hipotezde bulunma; açıklama, akıl yürütme, tartışma ve iletişim kurma bu eylemler arasında yer almaktadır. Artigue ve Blomhoj (2013) bu eylemlerin, öğrencilerin matematikse düşünme becerilerine, matematiksel bilgi ve yeterliliklerine katkıda bulunarak aynı zamanda

gerekli sorgulama için zihin alışkanlıklarının oluşumuna katkıda bulunduğunu ifade etmişlerdir. Artigue ve Blomhoj (2013) tarafından gerçekleştirilen çalışmada sorgulama temelli matematik öğretiminin ilişkilendirilen öğrenme teorileriyle ilişkisi Şekil 1’de görülmektedir.



Şekil 1: Sorgulama Temelli Matematik Öğretimine İlişkin Öğrenme Teorileri (Artigue & Blomhoj, 2013)

Geçmişten günümüze matematik eğitimi literatürü incelendiğinde, matematik öğrenimini belirli bir anlayışla kuramlaştırmak ve teşvik etmek için araştırma yaklaşımları ve öğretim uygulamaları geliştirilmiştir. Bu teorik çerçevelere dayalı olarak değişen ve gelişen öğretim programlarında bilimsel araştırmayı ele almak amacıyla belirli hedefler belirleyerek iyileştirmelere gidilmiştir (Kandil, 2019). Bu durum okul matematiğinde, didaktik bir modelden (öğretici merkezli) öğrenen merkezli bir modele geçişi zorunlu kılmaktadır. Bu durum, matematik eğitiminin temelinde sorgulama yatan bir öğretime evrilmesini etkilemektedir. Bu bağlamda aşağıda, belirtilen her bir öğrenme teorisinin sorgulama temelli öğretim ile ilişkisi, matematik eğitimi özelinde açıklamalarına yer verilmektedir.

Problem Çözme Teorisi Perspektifinde Sorgulama Temelli Matematik Öğretimi

Schoenfeld (1992a) tarafından yapılan araştırmada belirtildiği gibi, problem çözme teorisi, öncelikle öğrencilerin problem çözme yeterliliklerinin geliştirilmesini, matematik

içinde ve matematikle ilgili rutin olmayan problemlerle verimli bir şekilde yüzleşebilmelerini sağlayan zihin yeterliliklerinin ve alışkanlıklarının tanımlanması ve geliştirilmesi ile ilgilenmektedir. Teoriye göre, problem çözme yeterliliklerinin geliştirilmesi, genellikle belirli kavramların ve tekniklerin öğretilmesi ve öğrenilmesi ile entegre edilmesi gerekmeyen, kendi başına bir hedef olarak kabul edilmekte ve problem çözme için metabiliş ve buluşsal yöntemlere vurgu yapılmaktadır. Rutin olmayan problemlerle karşılaşan öğrenciler kendi strateji ve tekniklerini geliştirmek zorundadırlar; keşfetmek, tahminde bulunmak, denemek ve değerlendirmek zorundadırlar; öğrencilere belirli matematiksel sorumluluklar verilerek ortaya çıkan problemleri kendi öz düzenleme ve değerlendirmeleri sonucu çözmeye ve elde ettikleri sonuçların olası genellemelerini öngörmeye teşvik edilirler; problem çözme yeterlilikleri ve açıklanan üstbilişsel beceriler, öğrencilerin bir probleme ilişkin zihinlerinde oluşan yapıya dair bir sorgulama gerçekleştirmesini sağlayabilmektedir (Artigue & Blomhoj, 2013). Bu bağlamda Dewey'in felsefesinde açıkladığı yöntemler üzerine düşüncelere yapılan vurgu (1938), matematik öğretiminde problem çözme becerileri ve yöntemleri üzerine bir metayansımaya yol açtığı söylenebilmektedir.

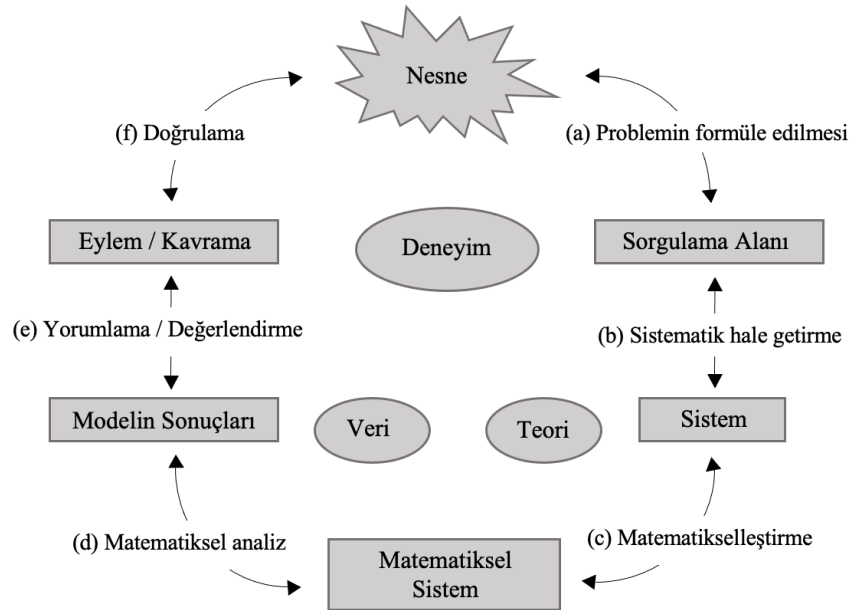
Problem çözme teorisine göre öğretim, öğrencilerin bir kavram ya da fikrin altında yatan matematiksel nedenleri, öğrenmelerine ve anlamalarına olanak sağlayan bir problemi keşfetmeleri ile başlamaktadır (Artigue & Blomhoj, 2013). Problemler açık uçlu olma eğilimindedir ve öğrenciler tarafından birden fazla çözüm stratejisi geliştirilebilmesine fırsat tanımaktadır. Öğrenciler zihinlerinde oluşturdukları çözüm için gerekli matematiksel yapıya dair çözüm stratejileri geliştirmeye çalışırken öğrenme ortamında açığa çıkan farklı matematiksel fikirler, öğrencileri alternatif yolları sorgulamalarına yönlendirmektedir. Bu noktada öğrencilerden, alternatif yaklaşımları ve çözümleri keşfetmelerine, tartışmalarına ve bireysel düşüncelerini netleştirmelerine olanak sağlayan farklı matematiksel çözümlerin öğrenme ortamında toplu olarak tartışılması ve paylaşılması vurgulanmaktadır. Ele alınan problemlerin matematiksel zenginliği, matematiksel fikir ve kavramlarla ilişkileri, öğrencilerin problem çözme etkinliklerine kendi güdülerıyla katılabilmeleri ve farklı matematiksel yolları sorgulayabilmeleri konusunda önem arz etmektedir (Artigue & Blomhoj, 2013).

Matematiksel Modelleme Perspektifinde Sorgulama Temelli Matematik Öğretimi

Modelleme ve özellikle matematikleştirme, matematik dışı durumların matematikleştirilmesi ile matematik içindeki matematikleştirme arasında net bir ayrım yapılmadan amaçlanan kavramsal bilgi için bir araç olarak önemli bir rol oynar. Modelleme

bakış açısı matematik eğitimi araştırmalarında giderek daha etkili hale gelmektedir (Blum ve diğerleri 2007; Kaiser ve diğerleri 2011). Odak noktası, matematik dışı durumlarda matematik uygulamalarıdır ve temel iddia, bu tür uygulamaların her zaman örtük veya açık bir şekilde, bir matematiksel sistem ile matematik dışı durum arasındaki bağlantıları kuran bir tür matematiksel model içerdiğidir. Bu nedenle modelleme, matematiksel bir modelin geliştirildiği veya belirli bir durumun bir modeli olarak anlaşılabilirliği genellikle döngüsel süreci ifade eder. Problem çözme yetkinliği gibi diğer matematiksel yetkinlikler ve matematiksel bilgi ile bağlantılı olmasına rağmen, modelleme kendi başına bir yetkinliği oluşturur ve müfredatta uygun modelleme etkinlikleri yoluyla geliştirilmesi gerekir (Niss ve diğerleri 2007, s. 3-8).

Sorgulama temelli matematik eğitimi ile ilgili olarak, modelleme kavramı, matematik ile problem durumları veya diğer disiplinlerdeki fenomenler ve genel olarak matematik dışı bağlamlar arasındaki ilişkiyi anlamak ve bunlarla çalışmak için sistematik bir yol sunar. Öğrenme perspektifinden bakıldığında modelleme, matematiksel kavramlar ve fikirler ile gerçek yaşam deneyimleri arasında bir köprü olabilir. Modelleme etkinlikleri aracılığıyla, öğrenci kavramları anlamlandırabilir ve modellenen problem durumlarına ilişkin yeni içgörüler kazanabilir. Bir modelleme süreci farklı amaçlar için farklı şekillerde kavramsallaştırılabilir de en az altı alt süreç söz konusudur (Şekil 2).



Şekil 2: Altı alt süreç ve farklı epistemolojik yapıdaki unsurlardan oluşan bir matematiksel modelleme süreci (Blomhøj ve Jensen, 2006, akt. Bukova - Güzel & Hıdıroğlu, 2013).

Sorgulama temelli matematik öğretimine ilişkin modelleme süreci, süreç boyunca açığa çıkan durumların önceki alt süreçlerde değişikliklere yol açabileceği ve böylece modelleme döngüsünde yeni döngüler başlatabileceği bir döngü süreci olarak tanımlanabilmektedir (Artigue & Blomhøj, 2013).

Antropolojik Didaktik Teorisi Perspektifinden Sorgulama Temelli Matematik Öğretimi

Antropolojik didaktik teorisi, ‘‘bir bilginin, öğretilen bir bilgi oluncaya kadar geçirdiği süreçlerin tamamı’’nı ele almaktadır (Şahin & Yıldırım, 2009). Dolayısıyla antropolojik didaktik teorisi, bir bilginin tarihsel, epistemolojik ve sosyolojik boyutlarını ele alarak bilimsel bilginin öğretilen bilgi haline dönüşmesinde açığa çıkan süreçlerin tümünü incelemektedir. Bu teori çerçevesi doğrultusunda, bir bireyin sahip olduğu bilgi ile kurduğu bireysel ilişkisi o bireyin öğrenme sürecinin zaman içerisindeki değişimini etkilemektedir (Şahin & Yıldırım, 2009). Bu doğrultuda bir bireyin bilgisinin o ortamdan etkilenecek şekilde şekillendiği söylenebilmektedir. Şekillenen bu ortam içerisinde var olan bilgiyi ve cevapları bünyesinde barındırırken bulunmayan bilgiyi sorgulama ihtiyacı güdebilmektedir (Artigue & Blomhøj, 2013). Bu bağlamda birey ya da öğrenci bilgiyi öğretilen bilgi şekline dönüştürürken sistematik bir sorgulama süreci geçirmektedir. Sorgulama süreci boyunca ortam, dinamik bir varlık olarak hareket etmektedir (Artigue & Blomhøj, 2013). Ortama katkıda bulunmak ve sorgulama sürecini sonlandıran cevabın detaylandırılmasına katkıda bulunmak için, çevre-ortam diyalektiği açısından neyin teorileştirildiği sorgulanmalı, eleştirel olarak analiz edilmeli ve yeniden çalışılmalıdır (Artigue & Blomhøj, 2013). Bu doğrultuda, antropolojik didaktik teorisi, farklı sorgulama süreçlerinin kavramsallaştırılmasını ve bu doğrultuda bilginin dönüşümünü destekleyebilecek tutarlı bir çerçeve sağlamaktadır.

Didaktik Durumlar Teorisi Perspektifinden Sorgulama Temelli Matematik Öğretimi

Öğrencilere kendi öğrenme süreçlerini yöneterek bireysel öğrenmelerinin öznesi olmaları amacıyla geliştirilmiş olan didaktik durumlar teorisi, yapılandırmacı yaklaşımı temel alan bir öğrenme yaklaşımıdır (Brausseau, 1997). Didaktik durumlar teorisi, bir öğretim sürecinde hedeflenen amaçları ve bu amaçların öğrenenlere bildirilip bildirilmemesi arasındaki ayrıma dikkat çekmektedir. Teoride, *didaktik durum*, *a-didaktik durum* ve *non-didaktik durum* olmak üzere üç farklı matematiksel durum bulunmaktadır. *Didaktik durum* bir öğretimin amaçladığı tüm durumları kapsamaktadır. *A-didaktik durum* ise öğretmenin öğretim sürecinde hedeflenen amaçların var olduğunu bildiği ancak bu amaçlardan öğrenciyi haberdar etmediği durum olarak açıklanmaktadır (Baştürk – Şahin, Şahin, Tapan Broutin, 2017). Bir

öğretim sürecinde öğrenciler, öğretmen ile bazı matematiksel bilgiler arasındaki etkileşim yoluyla hedeflenen amaçları keşfederek ve sorgulayarak öğrenirler. *Non-didaktik durum* olarak açıklanan durum türünde ise herhangi bir öğretim amacı güdülmemektedir. Öğretim süreci plansızdır. Böyle bir durumda öğrencinin hangi hedefleri kazanacağı öngörülememektedir.

A-didaktik ve *didaktik* durumlar arasında yapılan ayrım, bu adaptasyon ve kültürleşme süreçlerini ve bunların etkileşimini kavramsallaştırmaya yardımcı olur. Teoriye göre öğretmen önce problemlerin seçimine ilâştirilen kriterlerle ilgilenmektedir. Sorgulama temelli öğretim bağlamında didaktik durumlar teorisi göz önüne alınırsa, problemlerin üzerine konan koşulların, öğrencilerin değil, esas olarak öğretmenin veya eğitim araştırmacısının kontrolünde olduğu belirtilmelidir (Artigue & Blomhøj, 2013). Bu noktada söz konusu matematiksel kavram(lar)la ilgili önemli fikirleri içeren açık uçlu problemlere vurgu yapılarak öğrenciler tarafından çoklu yaklaşımlara izin verilir. Didaktik durumlar teorisi bağlamında oluşturulan problemlerin özellikleri, öğrenmenin uyarlanabilir boyutunu ve öğrencilerin özerkliğini optimize etmeyi amaçlar. Hedeflenen matematiksel bilgi, ortaya konan probleme en uygun çözüm olarak görünmelidir ve uygun bir ortamla etkileşim yoluyla, öğrencilerin bunu, gerekirse ilk stratejilerini reddederek veya uyarlayarak, toplu olarak aşamalı olarak oluşturmaları beklenir. Bu noktada sorgulama temelli öğretim öğrencilerin bilgiyi kendilerinin keşfetmesi noktasında önemli bir rol oynayabilmektedir. Öğretmen tarafından hazırlanan öğrenme ortamı, farklı eylemler tasarlamak ve gerçekleştirmek ve geri bildirim almak, öğrencilerin stratejilerini ve fikirlerini test etmek ve gerekli uyarlamaları desteklemek için araçlar sunmalıdır (Artigue & Blomhøj, 2013). Bu noktada öğrencinin öğretim sürecinde kazanması hedeflenen amaçları benimsemesi için keşfederek sorgulama veya tartışma yoluyla içselleştirmesi beklenmektedir. Üzerinde durulan ayrım, öğretmen tarafından matematiksel bilginin epistemolojik özelliklerini öğrencilere benimsetmek için pragmatik bir doğrulama ya da onaylamadan ziyade, öğrencilerin kendi öğrenme süreçlerinin sorumluluğunu alarak bilgiye ulaşması ve bu doğrultuda öğretimin hedeflerini kazanması istenmektedir (Artigue & Blomhøj, 2013).

Matematik Eğitime Eleştirel ve Diyalojik Yaklaşım Perspektifinden Sorgulama Temelli Matematik Öğretimi

Dewey'in eğitim vizyonunda, sorgulama sürecinde öğretmen ve öğrenciler arasındaki ve öğrencilerin kendi aralarındaki etkileşime özel önem verildiği görülmektedir. Bu durum, bahsedilen diğer teorik yaklaşımlar için de geçerlidir. Ancak bu teorilerin hiçbirinin altında

diyalojik etkileşimler yer almamaktadır. Bu araştırmacılar, sınıf etkileşimlerini analiz ederek ve elde edilen teorik analizlerden, etkileşimlerin altında yatan durumları inceleme ve müzakere etmek, öğrenme ortamında açığa çıkan düşünceleri teşvik etmek ve paylaşarak eleştiriye teşvik etmek için gerekli olan diyalog unsurlarını belirlemişlerdir. Bu unsurlar; iletişim kurma, yerleştirme, tanımlama, savunma, düşünme, yeniden formüle etme, değiştirme, yeniden düzenleme, değerlendirme şeklinde ifade edilmiştir (Alrø ve Skovsmose, 2002, p. 63). Araştırmacılar sorgulama temelli öğretimin; öğrencileri sorgulamaya, düşünmeye, analiz etmeye, tartışmaya, yeniden değerlendirmeye ve yorumlamaya yönlendirdiğinden sınıf içi etkileşimi üst düzey seviyeye çıkardığını ifade etmektedir (Artigue & Blomhøj, 2013).

Yukarıda analiz edilen bakış açıları ile uyumlu olmakla birlikte, bu model matematik öğretiminde öğretmen ve öğrenciler arasındaki diyalojik etkileşimlerin önemini ve yapısını anlamamıza katkıda bulunmakta ve öğretmenleri öğrencilerle etkileşimlerinde desteklemek için bir araç olarak görülebilecek bir model sağlamaktadır (Artigue & Blomhøj, 2013). Ayrıca, Artigue ve Blomhøj (2013) tarafından yapılan çalışmada, matematikte diyalojik öğrenmede önemli unsurlar olarak yansıtma ve eleştiriye güçlü bir vurgu yapılmaktadır.

Gerçekçi Matematik Eğitimi Teorisi Perspektifinden Sorgulama Temelli Matematik Öğretimi

Gerçekçi matematik eğitiminin ortaya çıkışı incelendiğinde Freudenthal'ın didaktik fenomenolojisi açığa çıkmaktadır (Freudenthal, 1973). Bu teorinin ana teması, matematiği öğrenmeye yönlendiren fenomenlerin, öğrencilerin gerçek hayat tecrübeleri doğrultusunda öğretilmesidir (Akyüz, 2014). Bu sebeple gerçekçi matematik eğitimi gerçek hayat öğelerinin matematikselleştirilmesini içermektedir. Bu bağlamda matematik öğretiminin gerçekliğin bir parçası olması gerekir, ancak gerçeklik farklı şekillerde yorumlanabilmektedir (Freudenthal, 1991, s. 17). Gravemeijer (1994), bu noktada bahsedilen gerçeklik durumunun, mutlaka gerçek dünyada var olmasının gerekmediğini ifade etmiştir. Bu bağlamda bir öğretim sürecinin belirli bir aşamasında bir grup öğrenci tarafından paylaşılan ve gerçek olarak deneyimlenen olaylarda bu gerçeklik algısı bazında kabul edilebilmektedir. Burada önem arz eden nokta, teoriyi öğretime dönüştürebilmek için öğrencilerin hayal edebilecekleri bir senaryo oluşturulmasıdır (Akyüz, 2014).

Gravemeijer (1999, pp. 155-156), matematikleştirme ve ortaya çıkan modelleme için hareket noktası olması gereken gerçekliğin öğretim sürecinde inşa edilebileceğini vurgulamak için kavramı daha fazla detaylandırarak deneyimsel olarak gerçek durumların ortaya konması gerektiğini ifade etmiştir. Matematiksel nesneler aşamalı olarak öğrencilerin gerçekliğinin bir

parçası haline geldiğinden, bu durumlar hem gerçek hayat hem de matematiksel durumlar olabilir. Gerçekçi matematik eğitiminde sözü geçen "Gerçekçi" terimi, soyut matematiğin doğrudan öğrencilere öğretilebileceği, "gerçekçi olmayan" kavramının tersine de anlaşılabilir. Bu doğrultuda Gravemeijer (1999); *‘tüm öğrencilerin matematiği, gerçek yaşam problemleriyle uğraşırken kendileri için yararlı olabilecek ve daha sonraki çalışmalara temel oluşturacak şekilde öğrenmelerini istiyorsak, gerçekçi yaklaşım, soyut kavramların anlamlarını yapılandırılmalarına yardımcı olmaktır’* şeklinde ifade etmiştir.

Matematik eğitime ilişkin ilgili literatür incelendiğinde öğrencilerin somut olarak gözlemleyebildikleri olayları veya kavramları soyut kavramlara nazaran daha fazla sorgulama eğiliminde olduklarını göstermektedir (Karademir, 2017; Younquist ve Ching, 2004; Aktaş – Arnas, 2013; Clements & Sarama, 2008; Delacour, 2016; Griffin, 2004; Young ve Loveridge, 2004). Ancak öğrenciler tarafından somut olarak algılanamayan matematiksel kavramların gerçek hayat durumlarına aktararak somutlaştırılması, öğrencileri matematiksel sorgulamaya yönlendirerek matematiksel bir durumun anlamlandırılması konusunda yardımcı olabilmektedir (Artigue & Blomhøj, 2013). Bu bağlamda sorgulama temelli öğretim sürecinde, GME (Gerçekçi Matematik Eğitimi) teorisi öğrenci merkezli bir anlayış benimseyerek öğretmenin rehber görevi görmesi gerektiğini savunmaktadır (Artigue & Blomhøj, 2013). Bu noktada öğrenilmesi amaçlanan matematiksel bir kavramla ilgili kavramın içerdiği temel bilişsel bilgilerden çok, incelenen durumların ve fenomenlerin gerçekçi doğasına vurgu yapılmaktadır. Matematiksel nesne ve bağlamların aşamalı olarak öğrencilerin gerçeklik algısına girdiği kabul edilse bile, bu durum öğrencilerin zihinlerinde gerçekleştirdikleri tartışma ve çelişki durumları ile yeniden sorgulanarak matematiksel kavram öğrenci tarafından anlamlandırılmalıdır (Artigue & Blomhøj, 2013).

Araştırmacı ders içeriğine ait ders planlarını, bu çerçevede belirtilen sorgulama temelli matematik eğitiminin gerçekçi matematik eğitimi modeli ile ilişkisi üzerine dayandırarak hazırlamıştır. Bu teoriye göre öğrencilere sorgulama temelli öğretim süreci “gerçekçi” problem durumlarının başlangıç noktası olarak sunulmasıdır. Geleneksel öğretime bir meydan okuma olarak ortaya çıkmış olan gerçekçi matematik eğitime göre matematik öğretimi gerçek hayat problemleri ile başlamalı ve matematik yapma gereksinimi öğretimin ana ilkesi olmalıdır (Gravemeijer, 1990, Van den Heuvel-Panhuizen 1996; 2003). Yaşamsal problemten kastedilen, problemin sadece gerçek yaşam durumlarından oluşturulması demek değil, problemin matematiksel olarak organize edilebilir olması ve öğrencinin problemin temellendiği bağlam içinde kendine yer bulabilmesidir (Van den Heuvel-Panhuizen, 1996;

2003). Bu bağlamda gerçekleştirilen öğretim sürecinde öğrenciler problemlerdeki bilgileri önce diyagram, şekil, sayı tablosu ve benzeri kişisel matematiksel yöntemlerle işleyerek kendi zihinlerinde çözüm için gereken matematiksel yapıyı oluşturacaklar, sonra da bunları yine sorgulama yoluyla kendi zihinlerinde formül, teorem, genelleme ve benzeri matematiksel yapılara çevireceklerdir (Artigue & Blomhoj, 2013).

Uluslararası çalışmalarda matematik öğretiminde sorgulamanın etkisi ve gücüne sıklıkla değinilmektedir. Etkili bir matematik öğretimi için öğretmenlerin öğrencilerini matematiksel sorgulamaya teşvik eden öğrenme olanakları ve etkinlikleri hazırlamaları, öğrencilerini sorgulatarak ne bildiklerini ve neye gereksinim duyduklarını anlamaları ve onları öğrenmeye daha iyi bir şekilde teşvik etmeleri gerekmektedir (NCTM, 2000). Sorgulama temelli bir ortam öğrenci-merkezli, araştırma yapılan, sorular sorulan, iletişimin ve iş birliğinin fazla olduğu bir ortamdır (Chapman, 2011). Etkili bir tartışma ortamı öğrencilerin ve öğretmenin doğru ve etkili matematiksel açıklamalar yaptıkları ve gerektiğinde açıklamalarına ilişkin gerekçeleri sunmalarını gerektirmektedir. Öğrenme ortamlarının bu bağlamda şekillenmesi öğretmen ve öğrenciler arasında bir etkileşim oluşturmaktadır. Oluşan bu etkileşimler sınıf mikrokültürünü oluşturan kural, beklenti, zorunluluk ve uygulamaya dair ortak anlayışların ortaya çıkmasına yol açmaktadır (Cobb vd., 1992). Öğrenme ortamında bulunan bir bireyin (öğretmen ya da öğrenci) öğrenme ortamındaki diğer bireylerin ne düşündüğüne dair doğrudan bir erişimi olmadığı için, öğrenme ortamındaki öğrenme ve öğretme etkinliklerinin ilerleyişi her katılımcının, diğerlerinin de kendisi gibi aynı şekilde davranacağını varsayarak -öğrenme ortamındaki ortak anlayıştan yola çıkarak- davranmasına bağlıdır. Katılımcılar bu şekilde öğrenme ortamında ortaya çıkan matematiksel kavram ve durumları birlikte sorgulayabilir, karşılaştırabilir, karşı çıkabilir, uzlaşabilir ve böylece sınıfça ortak anlayışların gelişmesine katkıda bulunabilirler (Uçar, 2016). Bahsedilen bu ortak anlayış sosyo-matematiksel norm kavramını ortaya çıkarmaktadır. Cobb vd. (1992) ve Yackel ve Cobb (1996) öğrenme ortamında matematiksel bir kavram ya da durumu öğretmen ve öğrencilerin etkileşimleri sonucunda ortaya çıkan karşılıklı beklentileri içerisinde ifade etmek için “sosyo-matematiksel norm” kavramını kullanmışlardır.

2.1.1.1. Sosyo-matematiksel Normlar

Öğretmenler matematik disiplininin sınıftaki temsilcileridir ve sınıftaki etkinliklerin matematiksel niteliklerini etkileyen, hatta belirleyen, önemli bir role sahiptir. Öğretmenin sınıfta başlattığı ve yeniden müzakeresini desteklediği sosyo-matematiksel normların doğası öğrencilerin oluşturdıkları matematiksel bilgilerin düzeyini önemli derecede etkilemektedir.

Öğretmenin sınıfında açıklama olarak sadece öğrenilmiş bir çözümün tekrarlanılmasına ve sonucun söylenmesine izin vermesiyle sürekli farklı çözümler istemesi ve neden farklı olduğunu tartışmaya açması ve sorgulatması arasında sınıftaki matematiksel söylemin seviyesini etkilemesi açısından önemli farklar vardır. Açıklamaların işlemsel adımların sıralanması ya da sadece cevapların söylenmesinden ibaret olduğu sınıflarda, öğrencilerin anlatan kişinin nasıl akıl yürüttüğünü anlaması oldukça güçleşecek (Rasmussen, 1998) ve sınıfta daha derin matematiksel tartışmaların gelişmesi engellenecektir. Cevapların gerekçelendirildiği ve farklı çözümlerin sunulduğu sınıflarda ise öğrenciler farklı çözümler sunabilmek için verilen açıklamaları dinlemek ve kendi çözümleriyle karşılaştırma yapmak zorundadır. Aynı zamanda, öğrenciler çözümlerini savunabilmek için hem kendi hem de diğerlerinin çözümlerini değerlendirmesi, daha etkili çözümler bulmaya çalışması ve bütün öğrencilerin bu sürece katılmaya teşvik edilmesi matematiksel anlamının hedeflendiği bir sınıf atmosferi oluşturulmasına katkıda bulunur (Yackel, Rasmussen ve King, 2000). Böyle bir sınıf atmosferi oluşturabilmek için, öğretmen cevaptan veya başka bir çözümü bulmak için gerekli kuraldan daha fazlasını bilmeli ve öğretimin bu yönde şekillenmesinde bir rehber görevi görmelidir (Yackel, 1996). Öğretmen bir çözümün matematiksel açıdan neden meşru ve kullanışlı olduğunu bilmeli ve sınıfında meşru bir açıklama için gerekli normları oturtmalıdır. Öğrencilere bir çözümü açıklarken nasıl yapıldığı kadar neden yapıldığının da önemli olduğunu hissettirmelidir. Öğretmen, öğrencilerine verdikleri açıklamalar ile öğrencilerinin çözümlerinin neden meşru olduğuna arkadaşlarını ikna etmeleri gerektiğini de vurgulamalıdır (Uçar, 2016).

Ortaokul Matematik Dersi Programı (MEB, 2018) matematiksel anlamının yanı sıra, akıl yürütme, problem çözme, matematiksel düşünme, sorgulama gibi önemli becerilerin geliştirilmesini vurgulamaktadır. Matematik programının felsefesine uygun bir öğretim yapabilmek için sınıf ortamlarında aktif öğrenci katılımına fırsat sağlayacak şekilde gerçekleştirilen öğretimin ve öğrenme ortamının düzenlenmesi gerekmektedir. Bu bakımdan sorgulama temelli matematik öğretimi, öğrencilerin araştırma ve sorgulama yapabilecekleri, iletişim kurabilecekleri, eleştirel düşünebilecekleri, gerekçelendirme yapabilecekleri, fikirlerini rahatlıkla paylaşabilecekleri ve farklı çözüm yöntemlerini sunabilecekleri sınıf ortamlarının oluşmasına imkân tanımaktadır. Öğrenciler ve sınıf tarafından müşterek bir anlayışla benimsenen sosyo-matematiksel normlar öğrencileri tartışmaya ve sorgulamaya yönlendirebilmektedir. Bu noktada bir öğrencinin matematiksel çözümünü açıklaması ile çözümüne dair gerekçelendirmelerde bulunması diğer öğrenciler tarafından öğrenme ortamında açığa çıkan matematiksel fikrin sorgulanmasına fırsat tanımaktadır. Bu bağlamda

öğrenciler tarafından öğrenme ortamında oluşan sosyo-matematiksel normların benimsenmesi sorgulama temelli öğrenme ortamını zenginleştirmede önemli olabilmektedir. Bu araştırma da sorgulama temelli öğretim, belirlenen 5 adet sosyo-matematiksel norm ile öğretim sürecine entegre edilerek gerçekleştirilmiştir. Belirlenen bu normlar aşağıda verilmektedir.

Tablo 1

Sosyo-matematiksel normlar (Yackel ve Cobb, 1996)

-
- ⑩ Matematiksel düşünceleri açıklamak,
 - ⑩ Verilen matematiksel bir açıklama anlaşılmadığında arkadaşına ya da öğretmenine soru sormak,
 - ⑩ Verilen matematiksel bir açıklamaya neden katılmadığını gerekçeleriyle birlikte belirtmek,
 - ⑩ Farklı matematiksel çözümler bulmak ve neden farklı olduğunu gerekçeleriyle birlikte sunmak,
 - ⑩ Açıklamalarda matematiksel örüntü ve ilişkileri kullanmak, şeklindedir.
-

Sosyal normlar herhangi bir konu alanının öğretimine uygulanabilirken, sosyo-matematiksel normlar öğrencilerin matematiğe özgü etkinliklerine odaklanmaktadır (Yackel ve Cobb, 1996; Cobb, Stephan, McClain ve Gravemeijer, 2001; McClain ve Cobb, 2001). Sosyo-matematiksel normların örnekleri aşağıda sıralanmıştır.

- ⑩ Farklı bir matematiksel çözüm,
- ⑩ Karmaşık bir çözüm,
- ⑩ Etkili bir çözüm ve
- ⑩ Kabul edilebilir bir matematiksel açıklama için gerekli koşullar.

Sosyo-matematiksel normlar sosyal normlarla yakından ilişkilidir. Sosyal normlar sınıftaki genel kural haline gelen etkileşimlerle ilgiliyken, sosyo-matematiksel normlar özelde matematik çalışma ile ilgili müşterek anlayışlara işaret eder. Yackel ve Cobb analizlerinde sadece matematik dersine özel sınıftaki normatif yönlere odaklanmış ve matematiğe özel bu türden normatif anlayışları sosyo-matematiksel normlar olarak adlandırmışlardır (Voigt, 1995; Yackell ve Cobb, 1996; Yackel, 2001). Yackel ve Cobb'un vermiş oldukları örnekler farklı bir matematiksel çözüm, karmaşık bir çözüm, etkili bir çözüm ve kabul edilebilir bir matematiksel açıklama için gerekli koşullarla ilgili müşterek anlayışları içermektedir. Yackel (2001) bu örneklere ek olarak kabul edilebilir bir matematiksel gerekçe sunmayı da eklemiştir.

Yackel, Ramussen ve King (2000) sosyal normlar ile sosyo-matematiksel normlar arasındaki ince ayrımı şu şekilde açıklamaktadır. Sınıfta bir öğrenciden açıklama vermesini beklemek sosyal norm analizine girerken kabul edilebilir bir matematiksel açıklama için gerekli koşullar sosyo-matematiksel normların analizi kapsamına girmektedir.

Sosyo-matematiksel normların müzakeresi, öğrencilerin bir kavramı sorgulayarak ve tartışarak öğrenmelerine fırsat yaratmaktadır (Yackel ve Cobb, 1996; Cobb, Yackel ve Wood, 1991; McClain ve Cobb, 2001; Yackel, 2001). Öğrenciler akranlarının açıklamalarını anlamaya çalışırken, kendi çözümlerini başka çözümlerle karşılaştırırken, benzerlik ve farklılıklar hakkında yargılarda bulunurken gerekçelendirme yaparak sorgulamanın temel alındığı bir öğrenme ortamı oluştururlar (Yackel ve Cobb, 1996). Benzer şekilde, öğretmenlerin problem çözme odaklı sınıflardaki rolü matematiksel tartışmaya olanak sağlamaktadır. Öğretmen öğrencilerin matematiksel etkinliklerinin bazı yönlerini meşrulaştırırken bazı yönlerini de onaylamayan bir katılımcı olarak davranarak rehber görevi görmektedir. Sınıfta farklı çözümler talep edildiği, önemsendiği, üstün/etkili çözümler benimsendiği sorgulama temelli öğretim ortamında, öğrencilerin çeşitli matematiksel açıklamalar sunmaya devam etmeleri beklenmektedir. Bu durumlar, öğrencilerin mevcut matematiksel anlayışları bağlamında düşünme becerilerinin gelişimine olanak sağlamaktadır (Cobb, Yackel ve Wood, 1991; Wood, Cobb ve Yackel, 1991; Yackel ve Cobb, 1996; Yackel, Cobb ve Wood, 1998).

İlgili literatür incelendiğinde, sosyo-matematiksel normların öğrencilerin matematiksel bir kavramı öğrenmede sınıf tartışmaları ile sorgulama temelli öğrenme ortamı oluşturularak matematiksel ve düşünsel süreçlerini desteklediği görülmektedir (Cobb, Yackel ve Wood, 1991; Wood, Cobb ve Yackel, 1991; Yackel ve Cobb, 1996; Yackel, Cobb ve Wood, 1998). Yackel, Rasmussen ve King (2000) problem merkezli öğretimin bir özelliği olan sosyo-matematiksel normları üniversite düzeyinde ele almışlardır. Çalışma bulgularında Yackel, Rasmussen ve King her sınıfta sosyo-matematiksel normların olduğunu fakat asıl ileri düzey matematiksel düşünmeyi ve anlamayı mümkün kılanın bu normların doğasının olduğunun altını çizmişlerdir. Başka bir çalışmada Yackel (2001) üniversite düzeyinde anlamaya ve problem çözmeye dayalı bir öğretim için açıklama ve gerekçelendirmeye dair sosyal ve sosyo-matematiksel normların bilinçli bir şekilde geliştirilmesinin sınıftaki sorgulama sürecine ve argümantasyonun düzeyine anlamlı bir katkısı olduğunu bulmuştur. Araştırma bulgularında, sosyo-matematiksel normların doğasının matematiksel kavrayışı, argümantasyon, sorgulama ve matematiksel düşünme becerilerini etkilediği elde edilmiştir.

Yackel, Rasmussen ve King'e (2000) göre gerçekleştirilen öğretim, öğrenme ortamındaki açıklama ve gerekçelendirme ile ilgili sosyal etkileşim düzeyini aktif tutmalı ve matematiksel açıdan gelişmiş argümantasyon ve muhakemeyi destekleyici bir etkileşim imkanı sunmalıdır. Matematiksel bir kavramın sorgulama yoluyla anlamlandırılmasını hedefleyen bir matematik öğretimi için öğretmenlerin uygun sosyo-matematiksel normların ortaya çıkmasını ve gelişmesini etkin bir şekilde yönlendirecek şekilde öğrenme ortamlarının düzenlenmesini gerektirmektedir. Sorgulama temelli bir yaklaşım sürecinde hedeflerini, öğrencilerinin düşüncelerini ve matematiği kavrayışlarını sürekli iyileştiren bir öğretimin bu süreçten öğrendikleri, sınıf uygulamalarının iyileştirilmesine katkı sağlamaktadır. Sorgulama temelli öğretim sürecinde öğrencilerin matematiksel bir konu veya kavramı yalnızca bir bilgi olarak almalarını değil, aynı zamanda süreç ve düşünme becerilerini geliştirmeleri de beklenir. Bu bağlamda öğretim sürecine entegre edilen sosyo-matematiksel normların öğrencilerin düşünme becerilerinin gelişiminin incelenmesi bağlamında sorgulama temelli öğretimi desteklediği söylenebilmektedir.

2.1.2. Sorgulama Temelli Öğretim ile İlgili Araştırmalar

Yabancı literatür incelendiğinde matematiksel bir kavramı ya da durumu sorgulama yoluyla öğrenmenin öğrencilerin başarısı, tutumu, öz-yeterliği ve düşünme becerileri ile ilişkisi ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Taylor ve Bilbrey (2012) Alabama'da bir okulda 5. sınıf fen ve matematik derslerinde geleneksel öğretim ile sorgulama temelli öğretimin etkililiğini farklı bir bakış açısıyla analiz etmişlerdir. Çalışmada, 3 yıl süreyle fen ve matematik öğretim programlarını değiştirerek ilk üç yıl süreçte öğretmenin aktif olarak bulunduğu geleneksel öğretime, sonraki üç yıl ise sorgulama temelli öğretime geçilmiştir. Hem matematik hem de fen bilimlerine yönelik veriler, her öğretim döneminde öğrencilere uygulanan SAT-10 alt testleri ile toplanmıştır. Geleneksel öğretim ve sorgulama temelli öğretim uygulanan öğrencilerin performans puanları cinsiyet, ten rengi ve ekonomik durum alt gruplarına göre analiz edilmiştir. Matematik başarısındaki sonuçlara dayalı olarak, matematikte sorgulama temelli öğretimin, özellikle farklı ırka sahip öğrenciler olmak üzere belirli öğrenci alt gruplarında öğrencilerin matematik başarı puanlarını artırmada etkili olduğu sonucuna varılmıştır. Ayrıca fen puanlarına ilişkin sonuçlar, sorgulamaya dayalı fen öğretiminin öğrenci alt gruplarının, özellikle farklı ırka sahip öğrenciler, kız öğrenciler ve yoksulluk içinde yaşayan öğrencilerin başarısını önemli ölçüde etkilediğini ortaya koymuştur.

Kusumawati, Hobri ve Hadi (2019) çalışmalarında, sorgulama temelli öğretim yaklaşımının 8. sınıf öğrencilerinin matematik dersinde yaratıcı düşünme becerilerine olan

etkisinin incelenmesi amaçlanmıştır. Araştırma sonunda, gerçekleştirilen sorgulama temelli öğretim ile birlikte öğrencilerin yaratıcı düşünme becerilerinde gelişim gözlemlendiği ifade edilmiştir.

Menezes, Guerreiro, Martinho ve Ferreira (2013) çalışmalarında, matematik dersinde sorgulama temelli öğretim yaklaşımını uygulayan öğretmenlerin rolleri üzerinde durmuşlardır. Ayrıca çalışmada, öğretmenlerin sorgulama temelli öğretim sürecinde matematiksel bir konunun işlenmesi sürecinde uyguladıkları uygulamalara yer verilmiştir. Çalışmanın sonucunda ise öğretmenlerin sorgulama temelli öğretim yaklaşımını derslerinde kullanmaları durumunda sınıf içi tartışmaların oluşmasıyla beraber bilgi akışının hızlı olacağı ve matematiksel bir bilgiyi anlamlandırmayı ve öğrenmeyi kolaylaştıracağı tespit edilmiştir. Buna bağlı olarak, derslerde sıradan konuşmalarla desteklenen sorular ile derse giriş yapmaktan ziyade uygulamada ilgi çekici, merak uyandırıcı soru veya bir materyal ile derse giriş yapmanın konuyu anlamlandırma da önemini belirtmişlerdir.

Hayward, Kogan ve Laursen (2016) gerçekleştirmiş oldukları çalışmalarında, matematik bölümündeki okuyan öğrencilerin sorgulama temelli öğretim gerçekleştirilerek STEM eğitime bakış açılarını, matematiksel düşünme becerilerini, matematik konularına olan yaklaşımlarını ve sorgulama temelli matematik öğretimi yönteminin etkililiği hakkında öğrencilerin görüşlerini araştırmışlardır. Araştırma bulgularına bakıldığında ise sorgulama temelli öğretimin matematik derslerine olumlu katkısının olduğunu ve öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerine olumlu etkisi olduğu görülmüştür.

Rech, Hodge ve Matthews (2017) çalışmalarında, öncelikle matematik öğretmenlerine sorgulama temelli öğretimi yaklaşımı hakkında bilgi verilmiştir. Ardından bu yaklaşımı sınıflarında uygulamaları istenmiştir. Matematik öğretmenlerinin sınıflarında sorgulama temelli matematik öğretimini uygulamalarının sonucu araştırılmıştır. Araştırma bulguları incelendiğinde ise matematik öğretmenlerine sorgulama temelli öğretim yaklaşımı hakkında bilgi verilmesi ile öğretmenlerin matematiği günlük hayatlarının bir parçası haline getirdikleri ve matematiğin ilke ve amaçlarına uygun bir şekilde düşünmeye başladıklarını ifade etmişlerdir.

Matematik eğitiminde sorgulama temelli öğretimin etkisine ilişkin bir başka çalışma ise Johnston (2014) tarafından yapılmıştır. Araştırmacı, sorgulama temelli öğretim yönteminin ilköğretim matematik sınıflarındaki öğretim uygulamalarını normal matematik öğretimindeki uygulamalarla karşılaştırmıştır. Araştırmaya katılan 24 sınıftan 467 öğrenci; Katılımcıların

113'ü (%24) deney grubunu oluşturmuş ve Pearson's Investigations müfredatı kullanılarak sorgulamaya dayalı matematik eğitimi alırken, 354'ü (%76) kontrol grubunu oluşturmuş ve MacMillan McGraw kullanılarak geleneksel matematik eğitimi almıştır. Deney grubundaki öğrencilerle geleneksel gruptaki öğrencileri karşılaştırmak için gerçekleştirilen matematik başarı testi ve değerlendirme yoluyla toplanan veriler analiz edilmiştir. Araştırma sonunda deney grubundaki öğrencilerin puanları ile kontrol grubundaki öğrencilerin puanları arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark olmadığı matematik başarı testi ile bulunmuştur. Ancak bulgular, sorgulamaya dayalı öğretim programı ile eğitim gören öğrencilerin matematiksel problemleri açıklamada, gerekçelendirme ve değerlendirmede geleneksel matematik programı ile eğitim gören öğrencilere göre puan kazanımlarında istatistiksel olarak anlamlı bir artış gösterdiğini göstermiştir.

Literatürde yapılan çalışmalara ek olarak, ilgili araştırmalarda katılımcılarını ortaokul ve ortaokullardan seçen bazı çalışmalara da yer verilmiştir. Örneğin Ferguson (2010), bir ortaokulda 8. sınıftaki iki sınıftan birini sorgulama temelli matematik öğretiminin uygulandığı elde edilen bilgileri deney grubu, diğerinin ise kontrol grubu olarak geleneksel matematik eğitimi olarak değerlendirmiştir. Veriler, her iki üniteden önce ve sonra ünitelerle ilgili bir başarı testi ile toplanmıştır. Verilerin analizi hem deney hem de kontrol grubunun her iki ünite için verilen talimatlardan sonra ilerleme kaydettiğini göstermiştir. Ancak ikinci ünite, sorgulama temelli öğretim alan deney grubu, kontrol grubuna göre önemli ölçüde daha yüksek bir gelişme düzeyi gösterdiği görülmüştür.

Tiawa ve Salim (2015) çalışmalarında, sorgulama temelli öğretim yöntemini öğrencilerin geometri alanına yönelik algılarının incelemek üzerine gerçekleştirmişlerdir. Çalışmanın deseni olarak, ön test ve son testin uygulandığı yarı deneysel bir model kullanılmıştır. Araştırmanın örneklemini rastgele örnekleme yöntemi ile seçilen 58 tane 10. sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Ölçme aracı olarak araştırmacı tarafından bir test geliştirilerek sorgulama temelli öğretim ile geleneksel öğretim yaklaşımının karşılaştırılması yapılmıştır. Araştırma bulgularına göre, sorgulama temelli öğretim yaklaşımının kullanıldığı grubun geometri öğretimine karşı olumlu yönde algısı olduğu ancak geleneksel yöntemin kullanıldığı diğer grubun ise sorgulama temelli öğretimin gerçekleştirildiği grubuna göre olumsuz algıya sahip olduklarını tespit edilmiştir.

Mindy (2015) gerçekleştirmiş olduğu çalışmasında, matematik derslerinde sorgulama temelli öğretim ile ters-yüz eğitimi birlikte kullanarak öğrencilerin başarılarının nasıl değişeceğini araştırmıştır. Araştırma sonucunda ise, matematik derslerinde sorgulama temelli

öğretime ilişkin önceden hazırlanan videoları izleyip gelen öğrencilerin eğitim sürecinde gerekli zaman ve fırsat verilmesi durumunda matematiğe karşı başarılarının artacağı sonucuna ulaşılmıştır.

Davis (2018) ise çalışmasında, üniversite öğrencileri ile çalışmış ve üniversitelerdeki matematik derslerinde sorgulama temelli öğretimin öğrenci başarısına etkisinin ne düzeyde olduğunu incelemek amaçlamıştır. Araştırma bulguları incelendiğinde ise, matematik derslerinin geleneksel bir yöntem olan sunuş yoluyla anlatılması nedeniyle öğrencilerin dersleri sevmediğini fakat öğrencilerin kendi fikirlerini rahat bir şekilde ifade edebildikleri öğrenme ortamlarını tercih ettikleri için matematik derslerinde sorgulama temelli öğretim yaklaşımının kullanılmasının kendilerinde olumlu etki yarattığını belirtmişlerdir.

Türkçe literatür incelendiğinde sorgulama temelli matematik öğretim üzerine yapılan çalışmalar yabancı literatür kadar zengin olmamakla birlikte yapılan araştırmalar giderek artmaktadır. Yapılan çalışmalardan biri Korkmaz (2017)'ın gerçekleştirdiği çalışmasında, sorgulama temelli etkinliklerin doğal açık alanlarda ve sınıf içi ortamlarda uygulanabilirliğinin incelenmesi amaçlanmıştır. Araştırmanın örneklemini okul öncesi eğitimlerine devam eden 32 çocuk ve 3 öğretmen oluşturmaktadır. Doğal açık alanlarda veya sınıf içerisi öğrenme ortamlarında uygulanabilen Sorgulama Temelli Etkinlik Modülü (SOTEM) süreç içerisinde araştırmacı tarafından geliştirilmiştir. Elde edilen verilerin analizi sonucunda, sınıf içi ortamlarda uygulanan sorgulama temelli etkinliklere ve sorgulama temelli olmayan matematik etkinliklerine göre doğal açık alanlarda gerçekleştirilen sorgulama temelli etkinliklerin, öğrencilerin geometrik düşünme, şekil, alan ve görselleştirme becerileri üzerinde etkili olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Serin ve Korkmaz (2018) çalışmalarında, ilkokul dördüncü sınıf öğrencilerinin problem çözme becerilerine iş birliğini içeren ortamlarda kullanılan üstbilişsel sorgulama temelli öğretim uygulamalarının etkisinin ne olduğunun belirlenmesi amaçlanmıştır. Çalışmanın desenini ön test-son test kontrol gruplu yarı deneysel model oluşturmaktadır. Araştırmanın örneklemini toplam 94 öğrenci oluşturmaktadır. Çalışmada dersler deney-1 (n=33) grubunda iş birliğini içeren ortamlarda kullanılan üstbilişsel sorgulama temelli öğretim yöntemiyle, deney-2 (n=31) grubunda iş birliğine dayalı öğrenme yöntemiyle ve kontrol grubunda (n=30) geleneksel yöntemlerin kullanılmasıyla dersler işlenmiştir. Veriler araştırmacı tarafından hazırlanan Problem Çözme Becerileri Değerlendirme Testi yardımıyla toplanılmıştır. Elde edilen verilerin analizine göre, deney-1 grubundaki öğrenciler problemi anlama ile kontrol ve değerlendirme boyutlarında elde ettikleri puanların her iki gruba göre

daha yüksek olduğu belirtilmiştir. Ancak plan geliştirme, planı uygulama ve problem kurma boyutlarında elde ettikleri puanlar ise sadece kontrol grubundaki öğrencilerden yüksek olduğu görülmüştür.

Yavuz, Arslan ve Batdal Karaduman (2018)'in gerçekleştirdikleri çalışmalarında, matematik öğretmeni adaylarının sahip oldukları sorgulama yetenekleri ile matematik öğretmeye yönelik kaygı düzeylerini saptayıp bu düzeyler arasındaki ilişkinin incelenmesi amacıyla hazırlanmıştır. Araştırma yöntemi betimsel tarama modeli olarak belirlenmiştir. Çalışmaya matematik öğretmenliği bölümünde okuyan toplam 206 öğretmen adayı katılım sağlamıştır. Bu bağlamda katılımcıların sorgulama beceri düzeylerini belirlemek amacıyla Sorgulama Becerileri Ölçeği, kaygı düzeylerini belirlemek amacıyla Matematik Öğretmeye Yönelik Kaygı Ölçeği ve araştırmacılar tarafından geliştirilen Kişisel Bilgi Formu kullanılmıştır. Elde edilen verilerin SPSS programı ile analizi sonucunda, katılımcıların sorgulama düzeylerinin yüksek seviyede fakat matematik öğretmeye yönelik kaygı düzeylerinin ise düşük seviyede olduğu elde edilmiştir. Sonuç olarak da bu düzeyler arasında eksi yönlü bir ilişki olduğu görülmüştür.

Bal İncebacak (2019) araştırmasında, 4. sınıf öğrencilerinin matematik dersinde sorgulama temelli öğretimin öğrencilerin kesir dilini kullanma becerilerine, kesirler alt öğrenme alanına ait başarılarına etkisi ile öğretmen ve öğrencilerin öğrenme-öğretme sürecine yönelik görüşlerini ortaya çıkarmak amaçlanmıştır. Karma model ile hazırlanan çalışmada ön test son test kontrol gruplu yarı deneysel desen kullanılmıştır. Çalışmanın örneklemini deney grubu (N=39), kontrol grubu 1 (N=36) ve kontrol grubu 2 (N=35) olmak üzere toplam 110 öğrenci oluşturmaktadır. Veri toplama araçları araştırmacı tarafından hazırlanarak kesirler başarı testi, kesir dilini kullanma becerisi ölçeği, süreç sonu öğretmen görüşme formu, süreç sonu öğrenci görüşme formları kullanılmıştır. Araştırmada nitel veriler, içerik analizi ve betimsel analiz ile nicel veriler ise IBM-SPSS-22 programı kullanılarak Mann Whitney U-Testi, Kruskal Wallis H-Testi, Wilcoxon Testi analizleri ve Spearman Brown Sıra Farkları Korelasyon Testleri ile analiz edilmiştir. Araştırma bulguları sonucunda sorgulama temelli öğretim yaklaşımının kullanıldığı grubun son test puan ortalamalarında daha başarılı olduğu, ayrıca kesirler konusunu öğrenmede deney grubu lehine anlamlı düzeyde farklılık olduğu tespit edilmiştir. Ek olarak, sorgulamaya dayalı olarak ele alınan matematik eğitiminin kesir dili kullanımını arttırdığı ve öğrencilerin diğer gruplara göre anlamlı düzeyde daha başarılı olduklarına ulaşılmıştır.

Şahin (2019) çalışmasında, sorgulama temelli matematik yaklaşımının kullanılması sonucu öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçlerini geliştirmelerine etkisinin ne denli olduğunun belirlenmesi amaçlanmıştır. Bu çalışmada başka bir araştırmacı tarafından hazırlanan ve PRIMAS projesi kapsamında tasarlanan Sorgulama Temelli Matematik Öğretimi (STMÖ) modeli benimsenmiştir. Çalışmanın katılımcılarını 56 öğrenci oluşturmaktadır. Çalışma sürecinde planlanan STMÖ Temel Matematik 1 dersinin içeriğinde kullanılmış ve süreç sonunda katılımcılardan görüşler alınmıştır. Elde edilen verilerde, ilk olarak katılımcıların uygulamaya negatif tepkiler verdiği daha sonra ise yönetime alıştıkları belirtilmiştir. Ek olarak katılımcılar görüşlerinde matematiğe karşı bakış açılarının değiştiğini, matematiğin mantığını öğrendiklerini, matematiğin ezberlenerek yapılamayacağını ve matematiği öğrenmek için sürecin önemli olduğunu belirtmişlerdir.

Karcı (2019) çalışmasında, sorgulama temelli öğretim yaklaşımının lisans matematik eğitimindeki uygulamalarının değerlendirilmesi amaçlanmıştır. Bu nedenle çalışma iki bölümde ele alınmıştır. Çalışmanın ilk bölümünde, sorgulama temelli öğretim yaklaşımının kavramsal çerçevesi belirtilmiştir. İçerik olarak; sorgulama temelli öğretim kavramının tarihsel gelişimi, öğretmen ve öğrencilere düşen roller ve sorgulamaya dayalı öğrenme modellerinin ne olduğu açıklanmıştır. Çalışmanın ikinci bölümde ise bu yaklaşımın lisans matematik eğitimindeki uygulamaları ele alınarak bu yaklaşımın nasıl uygulanması gerektiği belirtilmiştir.

Bal İncebacak ve Ersoy (2019) çalışmalarında, ilkokul 4. sınıf matematik dersinde kesirler öğrenme alanına ait sorgulama temelli öğretim yöntemine uygun bir ders planı örneği geliştirmek amaçlanmıştır. Geliştirilen ders planının geçerlilik ve güvenilirliği bir ilkokulda öğrenim gören 39 öğrenciye uygulanarak test edilmiştir. Ders planında ele alınan kazanıma ilişkin 5 etkinlik kağıdı geliştirilmiştir. Çalışma sonucunda öğrencilerin, modellenen bir kesri yazabilme, sayı doğrusunda kesirleri ifade etme, kesirleri birbiri ile ilişkilendirme, kesir birimlerine göre ölçümlerin değişeceği anlama, payı ve paydası en çok iki basamaklı olan kesirleri sayı doğrusunda gösterebilme gibi öğrenme çıktılarına ulaştıkları görülmüştür. Ayrıca süreç sonunda yapılan değerlendirme testi sonuçlarına göre öğrencilerin önceki başarı düzeylerine göre olumlu bir artış olduğu tespit edilmiştir.

Sağdıç ve Bakırcı (2020) çalışmalarındaki amaç, rehberli araştırma sorgulama öğretim yöntemine dayalı fen öğretiminin kullanılmasının ortaokul yedinci sınıf öğrencilerinin Fen-Teknoloji-Mühendislik-Matematik (FeTeMM) tutumlarına etkisinin ne olduğunun araştırılması olarak belirtilmiştir. Çalışmada yarı deneysel yöntem kullanılmıştır. Çalışmanın

katılımcılarını rehberli araştırma sorgulama öğretim yönteminin kullanıldığı deney grubu(45) ile 5E öğrenme modelinin kullanıldığı kontrol grubu(40) olmak üzere toplamda 85 öğrenci oluşmaktadır. Veri toplama aracı olarak FeTeMM Tutum Ölçeği kullanılmıştır. Verilerin analizinde ise Wilcoxon İşaretli Sıralar Testi ve Mann Whitney U-testi kullanılmıştır. Elde edilen verilerin analizi sonucunda, deney grubunda ve kontrol grubunda kullanılan yöntemlerin öğrencilerin FeTeMM tutumları üzerinde etkili olduğu görülmüştür. İki grupta yapılan öğretim kıyaslandığında ise deney grubunda yapılan öğretimin FeTeMM tutumları üzerinde daha etkili olduğu tespit edilmiştir.

Akdur ve Kurbanoglu (2014) projelerinde matematik eğitiminde sorgulamaya dayalı öğrenme ortamlarının oluşturulması için öğrencilere özerklik veren açık uçlu soru ve etkinliklere yer verilmesi ve öğrencilerin matematik yapmalarına fırsat tanınmasının öneminden bahsetmektedir. Öğrenci, öğrenme sürecinde etkin katılımcı olmalıdır. Öğrencinin sahip olduğu bilgi, beceri ve düşünceler, yeni deneyim ve durumlara anlam yüklemek için kullanılmalıdır. Öğrencilerin kazandıkları yeni bilgileri, eski bilgilerle ilişkilendirerek yorumlamaları esas alınmalıdır. Bir başka ifadeyle, öğrencilerin bireysel anlamalarını sağlayabilecek ortamlar oluşturulmalıdır. Sınıf içi tartışmalar, ortak matematiksel doğruları ve anlamları oluşturmak için kullanılmalıdır (Akdur & Kurbanoglu, 2014).

Akyüz (2014) çalışmasında, çember özelliklerini öğretmeyi amaçlayan sorgulama tabanlı bir sınıf ortamında ortaya çıkan sosyo-matematiksel normları incelemiştir. Çalışmasında ders içeriğini oluştururken sorgulama tabanlı sınıf ortamını gerçekçi matematik eğitimi (GME) teorisine göre hazırlamıştır. Bu teorinin ana amacı matematiği öğrencilere gerçek hayat tecrübelerine dayandırarak öğretmektir. Bu nedenle, gerçekçi matematik eğitimi, gerçek hayat problemlerinin matematikselleştirilmesini içerir.

Literatür incelendiğinde sorgulama temelli öğretimin hem Türkiye'de hem de diğer ülkelerde etkisi üzerine yapılmış birçok çalışma bulunmaktadır. Tüm bu çalışmalar sorgulama temelli öğretimin öğrencilerin kimya, matematik, fizik, biyoloji gibi birçok alanda ilgili içerikteki başarı düzeylerini artırdığını ve düşünme becerilerini olumlu yönde etkilediğini ortaya koymuştur. Literatür incelendiğinde sorgulama temelli öğretim üzerine yapılan çalışmaların çoğu bilim ve biyoloji ve fizik gibi fen eğitimi dalları ile ilgilidir. Bu alanda matematik eğitimi ile ilgili çalışmalar sınırlıdır; dolayısıyla literatürün bu açıdan zayıf olduğu görülmüştür. Sonuç olarak, sorgulama temelli öğretimin matematikteki etkisi konusunda daha fazla araştırma yapılması gerektiği görülmüştür.

2.2. Cebir ve Cebirsel Düşünme

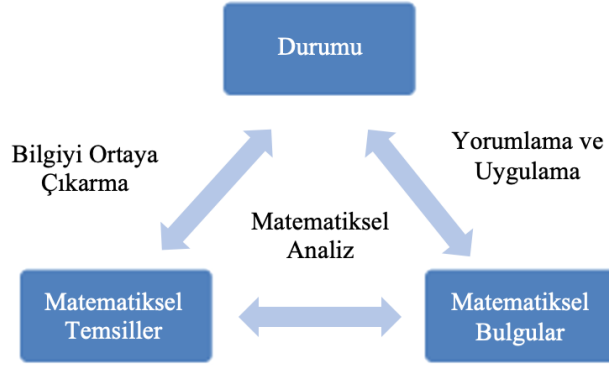
Matematik geçmişten günümüze kadar tüm tarih boyunca insanların yaşadıkları dünyayı anlamlandırmak, günlük hayat ihtiyaçlarını karşılamak ve keşfetme, bilme isteklerine cevap bulabilmek amacıyla bazen bir araç bazen de amaç olmuştur. Günümüzde ise temel bir bilim olarak bulunmakla birlikte matematik diğer fen, mühendislik gibi bilimlerin de ana yapı taşıını oluşturmaktadır. Bundan ötürü matematik yalnızca okulda bir ders olarak okutulan bir bilim olarak algılanmamalıdır. Matematik tüm yaşamımızda farkında olarak veya olmayarak kullandığımız bir düşünce biçimidir (Ataş, 2019). Matematiksel düşünme olarak adlandırdığımız bu düşünce biçimi; genelleme yapma, tahmin etme, hipotez geliştirme, hipotezi test etme, ispat etme, soyutlama, kanıtlama ile bir kanıya ulaşma özellikleriyle diğer düşünce biçimlerinden ayrılmaktadır (Alkan ve Bukova Güzel, 2005). Aritmetik, cebir, geometri, olasılık gibi farklı öğrenme alanlarına sahip olan matematiksel düşünme doğasında bulunan her bir alan için kendine has farklı biçimlerde yer almaktadır (Dindyal, 2003). Bu biçimlerden birisi olan cebirsel düşünme matematiksel düşünmenin alt kümesi olarak ele alınabilir.

Cebir ise matematiğin bir öğrenme alanı olarak bulunmakla birlikte, günlük hayat problemlerimizin çözümünden, farklı bilimlerde kullanılmasına kadar hayatın her alanında önemli bir konuma sahiptir (Yakut Çayır, 2013). Genel olarak cebir, sayılar ve semboller kullanılarak incelenen ilişki veya ilişkileri genelleştirilmiş denklemlere dönüştüren matematiğin önemli dallarından birisidir (Akkaya, 2006). Cebir, genellemeler de ve çıkarımlar da bulunabilmeyi, problem çözme süreçlerini gerçekleştirmeyi, sayılar ve değişkenler arası ilişkileri anlamayı ve soyut yapıları inceleyerek anlamlandırmayı gerektirir (Baki, 2008). Bunların ışığında cebir bir dildir, cebir bir problem çözme aracıdır, cebir bir düşünme aracıdır (Dede ve Argün, 2003, s. 180). Matematiğin özel bir dalı olan cebir muhakeme etmeyi ve beraberinde de cebirsel olarak düşünebilmeyi gerektirir (Kaya, Keşan, İzgiol ve Erkuş, 2016).

Cebir ile ilişkili olmasına rağmen cebirsel düşünme, aslında cebir kavramından daha geniş bir anlama sahiptir. Çünkü cebirsel düşünme matematiksel düşünmenin özel bir formudur ve yalnızca cebir öğrenme alanı ile sınırlı değildir. Cebirsel düşünme, sadece cebir için gerekli olan soyut düşünme yolunu açmakla kalmaz, hem bireylerin matematik ve fen bilimlerindeki gelişimleri için koruyucu bir görev üstlenir (Greenes vd. 2001), hem de günlük hayatta karşılaştıkları sorunlar üzerine düşünmeye, tahminde bulunmalarına ve çözüm yolu üretmelerine yönelik zihinsel aktiviteleri içerir.

Genellikle cebirsel düşünme daha önceki yaşantılarda geliştirilen aritmetik fikirlerle ilişki kurularak yapılandırıldığından (Booth, 1988; Hersovics ve Linchevski, 1994; Stacey ve Macgregor, 1997; Williams ve Cooper, 2001), aritmetik düşünme ile cebirsel düşünme arasındaki bağlantıların kurulması ilişkilendirme becerisi için önemlidir. Swafford ve Langrall (2000) cebirsel düşünmeyi; bilinen niceliklerle yapılan işlemleri içeren aritmetik düşünmenin tersine, bilinmeyen bir nicelik üzerinde sanki nicelik biliniyormuş gibi işlem yapabilme yeteneği olarak ifade etmişlerdir. Radford'a (2006) göre ise, aritmetik düşünme ile cebirsel düşünme arasında ortak bir özellik tanımlanabilir ancak bu doğrudan bir ifade haline dönüştürülemez. Aksine, cebirsel düşünme; ortak bir özelliği/ilişkiyi kavrama, bu özelliği/ilişkiyi genelleme ve genellemeyi harfli sembollerle gösterme ile ilgilidir. Radford (2006), aritmetik düşünme ile cebirsel düşünme arasındaki temel farkı, aritmetik düşünmenin problem veya duruma ilişkin sayısal belirliliği, cebirsel düşünmenin ise sayısal belirsizliği içermesi olarak ifade etmiştir.

Alan yazında cebirsel düşünme ile ilgili birçok tanım yer almaktadır. Cebirsel düşünme, cebirsel ilişkin özel durumlardan matematiksel düşünceleri oluşturduğu ve buna bağlı olarak genellemeye ulaşılan bir süreçtir (Ataş, 2019). Bu süreç sayı ve hesaplamalardan genellemelere ulaşmayı, bu genellemeyi anlamlı bir sembol sistemi içerisinde ifade edebilmeyi, örüntü ve fonksiyonlar arası ilişkileri keşfetmeyi gerektirir (Van de Wall, Karp ve Bay – Williams, 2011). Greenes ve Findell'e (1998) göre ise cebirsel düşünme fikirleri, orantısal akıl yürütmeyi, örüntü ve fonksiyonları, değişken kavramını anlamlandırmayı tümevarımlı ve tümdengelimli akıl yürütmeyi içermektedir. Farklı bir tanımda cebirsel düşünme, değişkenler arasındaki ilişkiyi nicel durumları betimleyerek açık hale getirebilme yeteneği olarak tanımlanmaktadır (Driscoll, 1999). Bir başka tanımda ise, bireyin matematiksel ilişki ya da örüntülerle ilgili genellemeler yapması, bu genellemelerden yola çıkarak varsayım üretmesi, tartışma ve sorgulama süreçlerini geçirmesi ve bunları giderek artan formel bir dil içinde ifade etmesi şeklinde açıklanmaktadır (Kaput, 1999). Şekil 2'de verildiği gibi Herbert ve Brown'a (1997) göre ise cebirsel düşünme, matematiksel sembol ve ilişkileri kullanarak bulunan bir durumdan bilgi çıkarımı yapmak, sözel semboller, diyagramlar, denklemler ya da tablo grafikler kullanarak elde bulunan bilgiyi cebirsel olarak ifade ederek matematiksel bilgiyle bütünleştirmek şeklinde belirtmişlerdir. Söz konusu süreç Şekil 3'te verilmiştir.

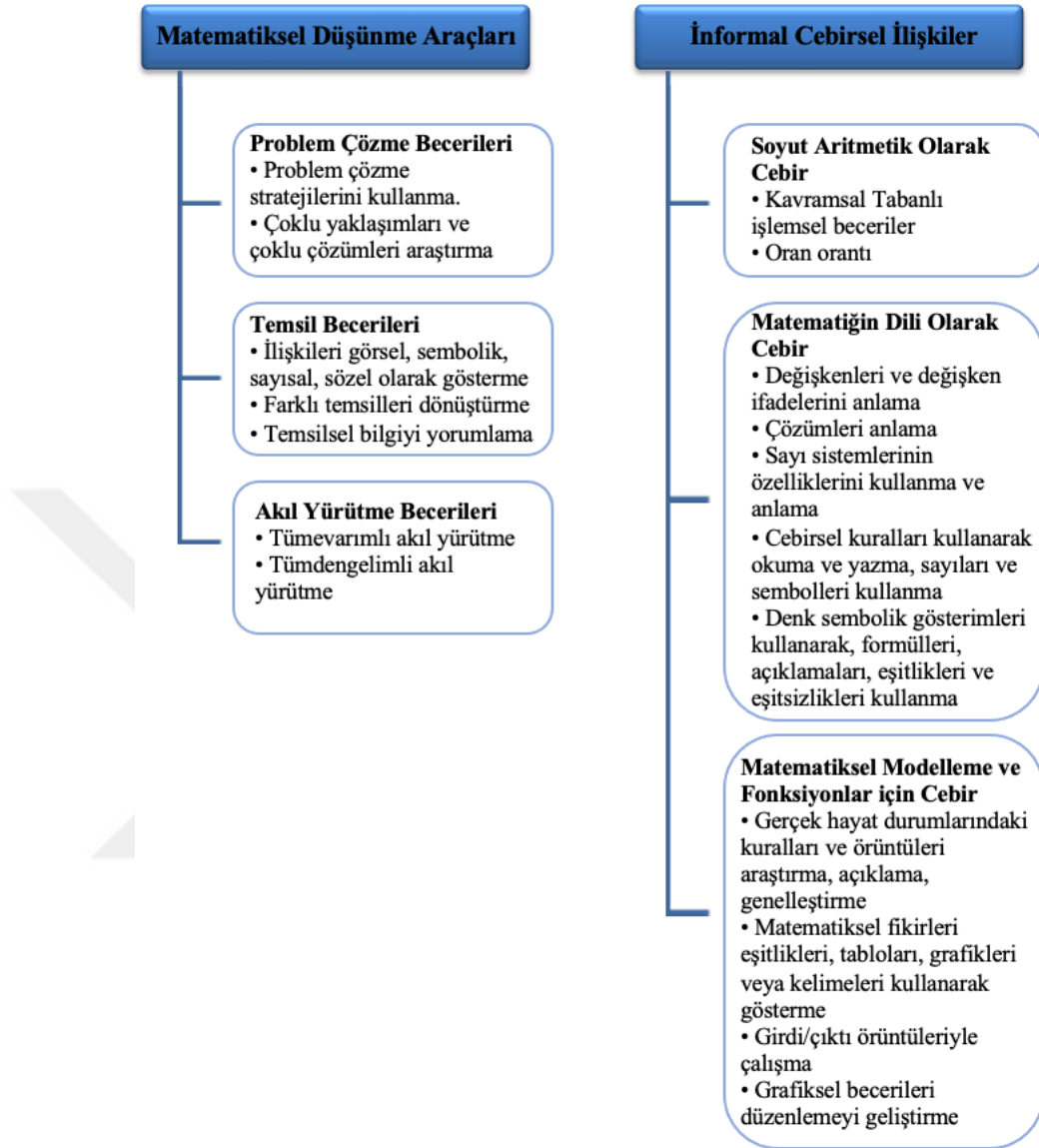


Şekil 3: Cebirsel Düşünmenin Çatısı (Herbert ve Brown, 1997'den uyarlayan Tanışlı, 2008)

Genel bir bakış açısıyla cebirsel düşünme, durumları anlamlandırmak ve açıklamak veya tahmin edebilmek için eldeki bilgi ya da durumları matematiksel dile çevirmek ve dünyayı anlamlandırmak için oluşturulan anlayış kümesidir (Lawrence ve Hennessy, 2002'den aktaran Kaya ve Keşan, 2014). Bu anlayış;

- ⑩ İhtiyaç duyulan matematiksel bilgiyi oluşturma ve transfer etme,
- ⑩ İhtiyaç duyulan veriyi toplama ve kaydetme,
- ⑩ Modeller için veri arama ve düzenleme,
- ⑩ Modelleri anlamlandırma ve genişletme,
- ⑩ Eldeki bulguları bir kural ile genelleme ve
- ⑩ Tahmin için gerekli olan kuralı da içeren bulguları kullanmayı içerir.

Cebirsel düşünmenin bileşenleri birçok araştırmacı tarafından ifade edilmiştir. Kriegler (2008) ise aşağıda görüldüğü gibi cebirsel düşünmeyi iki başlık altında incelemiştir. Ona göre cebirsel düşünme iki ana başlık altında toplanmaktadır. Bahsedilen başlıklar Şekil 4'te görülmektedir.



Şekil 4: Cebirsel Düşünmenin Bileşenleri (Kriegler, 2008; aktaran Ataş, 2019)

Kaput (1999) ise cebirsel düşünmeyi beş maddede açıklayarak aşağıdaki şekilde ifade etmiştir:

1. Aritmetiği ve örüntüleri genelleme,
2. Sayı ve sembolleri anlamlı kullanma,
3. Verilen sayılar arasındaki yapıları ve ilişkileri belirgin kılma ve soyutlama yapma,
4. Fonksiyon, ilişkiler ve ortaklıklar üzerine düşünme,
5. Matematiksel modelleme

süreci olduğu belirtilmiştir.

Kasmer (2008) ise cebirsel düşünme bileşenlerini NCTM (2000) ve TIMSS (2003)'in ifade ettiği yönleriyle ilişkili olacak şekilde geliştirmiştir. Kasmer (2008)'in belirttiği cebirsel düşünme bileşenleri;

- ⑩ Problem durumlarını analiz etme ve değerlendirme,
- ⑩ Matematiksel argümanlar oluşturarak oluşturulan argümanları kanıtlama ve açıklama,
- ⑩ Genellemeleri formel bir biçimde ifade ederek anlamlandırma,
- ⑩ Matematiksel ilişkileri fark etme ve kurma,
- ⑩ Başkalarının düşüncelerini sorgulama ve sorgulayarak anlamlandırma,
- ⑩ Farklı düşünceleri anlamaya çalışma veya tartışma yapma,
- ⑩ Farklı konulara ilişkin elde edilen sonuçları destekleme şeklindedir.

2.3. Cebirsel Düşünme Sürecinin Oluşumu ve Genelleme

Cebir okul matematiğinin özünde bulunur (Otte, Mendonça, Gonzaga & de-Barros, 2015). Harflerin kullanıldığı bir dil olmanın ötesinde cebir, bir düşünce şekli olarak açıklanmakta ve ilişkileri fark etmeyi, yapı ve şekle odaklanmayı, gerekçelendirmeyi, tahmin etmeyi ve genelleme yapmayı gerektiren cebirsel düşünmeyi içerisinde barındırmaktadır (Kieran, 1996). Cebirsel düşünme, içerisinde birçok matematiksel beceriyi bulundurmakla birlikte genel olarak; yapılar arası ilişkiler, farklı gösterimler, harflerin kullanımı, sembolleri anlamlandırma genelleme yapma gibi kavramlarla yakından ilişkili olduğu söylenilebilir (Akkan, 2016). Cebirsel düşünmenin gelişimini destekleyen araştırmalar incelendiğinde örüntüler ve genelleme yapma üzerine odaklanılmış olduğu fark edilmektedir (ör., Ferrara & Sinclair, 2016; Moss & Beatty, 2010; Rivera, 2011). Bu şekilde olmasının ana sebebi, öğrencilerin örüntüleri anlamlandırma ve ilişki kurma ile genelleme yapma becerileri arasında bir ilişkinin olması (Warren, 2000) daha net bir ifade ile örüntü aramanın genelleme yapma sürecinin ilk adımı olmasından kaynaklanmaktadır (Jones, 1993). Cebir'in kalbini genelleme oluştururken (Jones, 1993) genelleme sürecinin kalbini ise örüntü kavramı oluşturmaktadır (Tanışlı ve Özdaş, 2009). Bu nedenle denilebilir ki örüntü kavramı genelleme sürecinin temelini oluşturmaktadır (Tanışlı ve Özdaş, 2009).

İlgili literatür incelendiğinde genelleme kavramının farklı birçok tanımı yapılmıştır. Düşünmenin ve iletişimin hem amacı hem de aracı olan genelleme (Dörfler, 1991), matematiksel anlamlandırma sürecinin ve matematiksel bilginin oluşturulmasının ana yapı taşı olarak belirtilmektedir (Amit ve Neria, 2008). Ayrıca genelleme, öğrenme ve öğretme sürecinin temel bileşenlerinden biri olarak ifade edilmektedir (Lannin, Ellis, Elliott & Zbiek, 2011). Baki (2008) genellemeyi, bir duruma ilişkin örüntülerin fark edilip bir düşüncede

birleştirme veya toplama işi şeklinde açıklamıştır. Lee'ye göre ise (1996) cebir ve tüm matematik eğitimi, ilişkilerin fark edilmesi ve fark edilen ilişkilerin genellenmesi gerektiği şeklindedir. NCTM (National Council of Teacher of Mathematics) (2000) standartları genelleme yapma sürecini, matematik öğretiminin ana hedeflerinden birisi olduğu şeklinde belirtmiştir. Kieran (1989'dan aktaran Radford, 2006)'a göre, örüntüleri genelleme süreci; cebirsel düşünme ve matematiksel genellemeler arasında iletişim kurarak cebirin rotasını belirler. Bu nedenle örüntüler, matematiksel anlamlandırma süreçlerinin ve ilişkilerin genellemesinde, cebirsel düşünme süreçlerinin geliştirilmesinde, farklı gösterimlerin yapılandırılabilmesinde etkili olmakla birlikte; öğrencilerin genellemeler ve matematiksel yapılar üzerine ilişki kurmasını ve o yapılar üzerine düşünmesini sağlayabilir, öğrencilerin düşüncelerini gerekçelendirmelerine, varsayımda bulunmalarına ve bu varsayımları sorgulamalarında da önemli rol oynayabilmektedir (Yakut Çayır, 2013). Yapılan birçok farklı tanımın yanı sıra Mason (1996) ise genellemeyi şu şekilde ifade etmiştir:

“Öğrenenlere genelleme olanağı sunmayan bir ders matematik dersi değildir.”

Uluslararası alanda matematik eğitimi yönlendiren kuruluşlardan olan *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) tarafından matematik eğitime dair ilkeler belirlenmiş, cebir kavramı alan yazına kazandırılmıştır (NCTM, 2000). Cebir alanında öğrencilere kazandırılması amaç edinilen temel becerilerden birisi ise “matematiksel düşünme biçimi geliştirmek için genellemeler, fonksiyon ve örüntüleri inceleme, fark etme” şeklinde ifade edilerek örüntü kavramının genelleme sürecindeki önemli konumuna dikkat çekilmiştir (NCTM, 2000).

Ortaokul Matematik Öğretim Programı (5,6,7,8. sınıflar) incelendiğinde cebir kavramı bir öğrenme alanı olarak karşımıza çıkmaktadır. Cebir öğrenme alanı 5. sınıf kazanımları hariç diğer tüm sınıf kazanımlarında bulunmaktadır (MEB, 2018). 2013 ve 2018 yılında yenilenen öğretim programına bakıldığında öğrencilere kazandırılması öngörülen temel becerilerden biri olarak cebirsel düşünme süreçlerinin gelişiminde genellenmenin önemine vurgu yapılmıştır. Ayrıca literatür incelendiğinde matematik eğitiminde cebirsel düşünmenin incelenmesi üzerine yapılmış birçok araştırma da genellenmenin ortaokul kademesinde bulunan öğrenciler için önem taşıdığı belirtilmiştir (Ayber, 2017; Akkan ve Çakıroğlu, 2012; Armstrong, 1995; Bishop, 1997; Blanton vd., 2015; Çayır ve Akyüz, 2015; Haldar, 2014; Kaput ve Blanton, 2000; Lee ve Lee, 2015; Mason, 2008; Özdemir, Dikici ve Kültür, 2015; Radford, 2011; Rivera ve Becker, 2011; Akkan, 2016). Çünkü cebir ile ilişkili olmasına karşın cebirsel düşünme, aslında cebirden daha geniş bir alana yayılan bir anlam içermektedir (Akkan, 2016).

Bu noktada cebirsel düşünmenin matematiksel düşünmenin özel bir formu olduğu ve yalnızca cebir öğrenme alanı ile sınırlı olmadığı dikkate alındığında, genelleme kavramının tüm öğrenme alanlarına ilişkin matematiksel ilişkileri ve örüntüleri kapsadığı söylenilebilir (Ayber, 2017).

Ortaokul Matematik Öğretim Programı (5,6,7,8. sınıflar) kapsamında örüntü kavramı 5. ila 7. sınıf kazanımlarını içermektedir (MEB, 2018). Örüntü kavramı öğretim programında;

- Eksik bırakılan bir örüntünün tamamlanması / devam ettirilmesi,
- Yeni bir örüntü oluşturulması,
- Bir örüntünün farklı biçimlerde temsil edilmesi,
- Örüntüdeki ilişkilerin keşfedilmesi,
- Örüntüdeki kuralın bulunması,
- Örüntüdeki kuralın genellenmesi,
- Kuralın harfle ifade edilmesi

şeklinde yer almaktadır (MEB, 2018).

Örüntü arama, kavramların birbirine benzer ve birbirinden farklı özelliklerini belirlemeyi ve açıklamayı gerektirdiğinden matematik öğreniminde temel olan becerilerden biridir (Papic, 2007). Matematik eğitimi perspektifinden bakıldığında da ilköğretimin erken basamaklarında somut nesneler arasındaki ilişkilerin örüntü kavramı ile kazandırıldığı görülmektedir (Uygur-Kabael ve Tanışlı, 2010). Ancak örüntüler ve örüntülerin genellenmesi öğrencilerin kavramada güçlük çektiği konular arasında yer almaktadır (Mason, 1996; Orton, 1999). Öğrenciler verilen bir sayı örüntüsünün bir sonraki terimini bulabiliyor ve ardışık terimler arasındaki ilişkiyi keşfedebiliyorken örüntünün kuralını cebirsel olarak ifade etmekte daha da önemlisi örüntünün yapısını cebirsel düşünme sürecinden geçerek keşfedebilmekte zorlanmaktadırlar (Hargreaves, Threlfall, Frobisher, & ShorrocksTaylor, 1999; Orton & Orton, 1999; Stacey, 1989). Kavram oluşturmada önemli bir bilişsel süreç olan genelleme yapmada etkin rol oynaması örüntü kavramının vurgulanması gereken bir başka önemli yönüdür. Genelleme üst düzey bir bilişsel beceri olarak kabul gördüğü için (Krutetskii, 1976) gerek matematikte gerekse matematik eğitiminde önem verilen bir eylemdir. Matematiktekinden farklı olarak matematik eğitiminde önemli olmasının nedeni, genelleme yapan kişinin düşünme şeklinin ve bilişsel süreçlerinin de dikkate alınmasıdır (Carraher, Martinez ve Schliemann, 2008). Daha açık bir ifadeyle genellenmenin yapılması kadar genelleme yapma sürecinin nasıl gerçekleştiği de matematik eğitimi araştırmalarına konu

olmaktadır. Bu bağlamda ‘genelleme’ ve ‘genelleme süreci’ çeşitli araştırmacılar tarafından farklı şekillerde tanımlanmış ve açıklanmıştır. Polya (1957) genellemeyi “‘bir kavrama ilişkin anlayıştan bu kavramı içeren bir kümeye ilişkin anlayışa geçmek veya sınırlı bir kümeye ilişkin kavrayıştan bu sınırlı kümeyi de içeren daha kapsamlı bir kümeye ilişkin kavrayışa geçmek (s. 108)” olarak tanımlamıştır. Carraher, Martinez ve Schliemann’a (2008) göre genelleme “bazı özellik ve tekniklerin, matematiksel kavramların (veya durumların) genişletilmiş kümesi için de geçerli olmasıdır” (s. 3). Kaput (1999) ise genellemeyi, örnek durum veya durumların ötesinde bir akıl yürütme ve iletişim kurma eylemi gerçekleştirerek örnek durumlar arasındaki ortak özelliklerin belirlenmesi veya açığa çıkarılması, ya da akıl yürütme ve iletişim kurma eylemini örnek durumların ötesinde bir seviyeye, örnek durumlar arasındaki bir örüntüye, yapıya veya ilişkiye taşımak şeklinde tanımlar. Genellemenin ifade edilmesi ise belli bir dil kullanmakla mümkündür. Bu dil matematiksel bir dil olabildiği gibi küçük çocuklarda günlük konuşma dili ya da mimik kullanımı şeklinde de olabilir. Krutetskii (1976) ise genellemenin klasik ancak operasyonel bir tanımını yapmıştır. Genellemenin sayı ya da harf sembolleri kullanılarak en azından iki yönü ile dikkate alınabileceğini söyler: benzer durumların fark edilmesi ve genelleştirilmiş bir çözüm yoluna ya da ispat yoluna hâkim olma. Her iki durum da nesneler, ilişkiler veya işlemler arasında benzer, genel veya gerekli olanı seçerek bir soyutlama yapmayı gerektirir.

Genelleme ve örüntüler üzerine yapılan araştırmalar son yıllardan günümüze giderek artış göstermektedir (Yakut Çayır, 2013). Yapılan araştırmaların giderek artmasının sebebi, matematiksel ilişkileri anlamlandırmanın örüntü ve ilişkiler üzerine arayarak gözlemlenebilir ve genelleme yapılabilir, fikrinden dolayı olabilmektedir (Hargreaves, Threlfall, Frobisher ve Shorrocks-Taylor, 1999). Örüntüleri anlama ve örüntü üzerine düşünme, sözel dil ya da notasyonlar kullanılarak genellemeler yapma gerekliliğinden beri aritmetikten cebire geçişte çok büyük bir önem arz etmektedir (English ve Warren, 1998).

Örüntülere ilişkin yapılan araştırmalara bakıldığında APU raporunda (The Assessment and Performance Unit), öğrencilerin örüntüler ile ilgili çalışmaları gerçekleştirirken özellikle örüntü ilişkisini açıklamada örüntüyü devam ettirmeye göre daha çok zorlandıkları görülmüştür. Ayrıca araştırma sonuçlarında, ardışık terimler arasındaki farkın sabit olmayan örüntüleri devam ettirmede daha fazla zorlanma ve ilişkisi zor bulunan örüntülerde, kolay olan terimler üzerine odaklanarak örüntünün belli bir bölümüne göre genelleme yapma eğilimine gitmekte oldukları görülmüştür (Yeşildere - İmre, 2020).

İlgili literatürde matematiğin yapısının anlaşılması ve cebirsel düşünme sürecinin öğrenciler tarafından anlamlandırılması için matematiğin içerdiği örüntülerin ve ilişkilerin incelenmesine teşvik edilmesinin önemi vurgulanmaktadır (Hargreaves ve diğerleri, 1999). Ancak örüntüler ve örüntülerin genellemesi öğrencilerin kavramada güçlük çektiği konular arasında yer aldığından dolayı (Mason, 1996; Orton, 1999), bu durum örüntülerin genellemesi bağlamında cebirsel düşünmeyi anlamlandırma süreçlerinin incelenmesinin gerekliliğini göstermektedir. İlgili literatürde genelleme üzerine yapılan bu tanımlarının yanı sıra, cebirsel düşünme süreçlerinin anlamlandırılmasında genelleme sürecinin üzerinde durulması ile öğrencilerin örüntüleri genelleme sürecindeki zorluklarını irdelemek için işlevsel çerçeveler geliştirilmiştir. Bu yönde bir tanımlama Radford (2008) tarafından yapılmıştır. Araştırmanın alt problemleri ve amacı ışığında öğrencilerin cebirsel düşünme süreçleri incelenirken bahsedilen bu özelliklere sahip bir çerçeve olarak ‘‘Cebirsel Örüntü Genellemesinin İnşası’’ (Radford, 2008) kuramsal çerçevesinin kullanılması gerekli görülmüştür. Bir sonraki alt bölümde genelleme yapma sürecini operasyonel olarak takip edebilmeyi sağlaması ve genelleme türlerini belirlemesi nedeniyle araştırmada kuramsal çerçeve olarak belirlenen ‘‘cebirsal örüntü genellemesinin inşası’’ (Radford, 2008) açıklanmaktadır.

2.3.1. Kuramsal Çerçeve: Cebirsel Örüntü Genellemesinin İnşası

Cebirsel örüntü genellemesi (architecture of algebraic pattern generalization) kuramsal çerçevesi Luis Radford (2008) tarafından geliştirilmiştir. Radford (2008)’a göre cebirsel düşünme, bir ifadeyi matematiksel bir şekilde yansıtabilmenin özel hali olduğundan cebirsel düşünmenin oluşumu genelleme yapılarak sağlanabilirdi. Radford (2008), genellemeye dayalı güçlüklerin genelleme sürecinde meydana gelen sorunlardan kaynaklanabileceğini belirtmektedir. Radford (2008) literatürde bulunan tanımlamalarda yer alan bileşenlerin yanında, genelleme sürecine ilişkin önemli bir noktaya dikkat çekmekte; notasyonların veya harflerin kullanımının cebirsel düşüncenin oluşumunun için asıl gerekli bileşen olmadığını, cebirsel düşünmenin oluşumunun harfler kullanılmadan da gerçekleşebileceğine işaret etmektedir. Bu noktada şu soru kendini göstermektedir: ‘‘eğer cebirsel düşünmenin ana bileşeni notasyon kullanımı değilse cebirsel genellemeyi aritmetik genellemeden ayıran nedir? (Radford, 2008, s. 84).’’ Radford (2006) gerçekleştirdiği uzun süreli araştırmalar sonucunda cebirsel genelleme sürecinin ‘‘örüntüdeki terimlerin sahip olduğu ortak özelliği fark etme yeteneğine, bu ortak özelliğin örüntüdeki tüm terimler için geçerli olduğuna ilişkin farkındalığa ve örüntünün herhangi bir terimini bulmayı sağlayacak bir ifadeyi yazabilme yeteneğine dayandığını (s.4)’’ belirtmektedir. Bu süreç ayrıntılı olarak açıklanacak olursa, cebirsel örüntü genelleme süreci örüntüdeki birkaç terime ait ortak

özelliğın fark edilmesi ile başlamaktadır. Bu ilk adımda örüntüdeki terimlere ait neyin benzer neyin farklı olduğu seçimi yapılmaktadır. İkinci olarak ortak özellik ayırt edilerek örüntüdeki tüm terimlere genellemekte ve bir hipotez oluşturulmaktadır. Son olarak da belirlenen ortak özellikten tüm terimler için geçerli olacak bir genel terim yazılmaktadır. Bu nedenle genelleme sürecinin nasıl gerçekleştiğini incelemiş ve süreci belli adımlara bölmüştür.

Radford (2008) öğrencilerin yapmış olduğu örüntü genellemelerini cebirsel genelleme, aritmetik genelleme ve olgunlaşmamış tümevarım biçiminde ifade etmektedir. Radford (2008)'in belirttiğı genelleme türleri Tablo 2'de görölmektedir.

Tablo 2

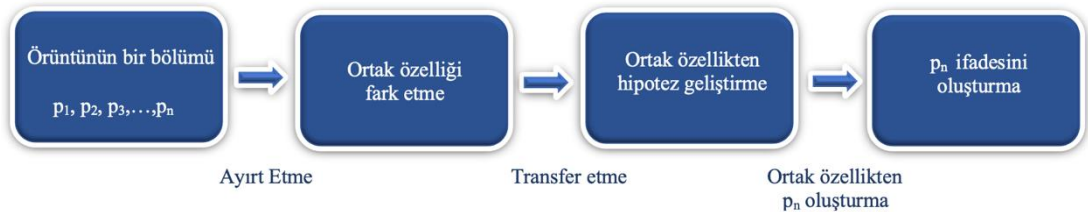
Cebirsel Örüntü Genellemesinin İnşası

Genelleme Türü	Açıklamalar
Cebirsel Genelleme	Örüntünün bir bölümünden ortak özelliğın fark edilmesi, fark edilerek geliştirilen hipotezden p_n elde edilmesi
Aritmetik Genelleme	Örüntünün bir bölümünden ortak özelliğın fark edilerek hipotez geliştirilmesi
Olgunlaşmamış Tümevarım	Örüntünün bir bölümünden p_n elde edilmesi

Cebirsel örüntü genellemeleri;

- (i) Örüntüdeki ortaklığı yakalama, anlama veya idrak etme,
- (ii) Bu ortak özelliğı dikkate alınan örüntünün veya sayı dizisinin tüm terimlerine genelleme ve
- (iii) Örüntünün herhangi bir terimini doğrudan belirtmek için bir kural veya şema şekli belirtme süreciyle meydana gelmektedir.

Söz konusu belirtilen cebirsel genelleme süreci şekil 5'te gösterilmektedir.



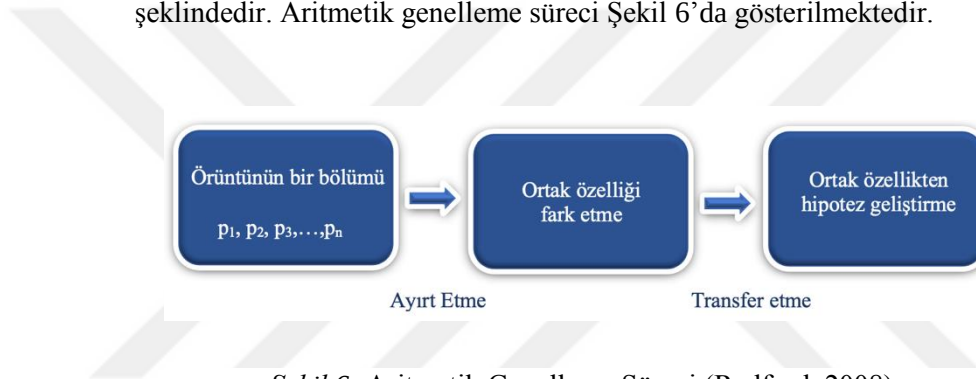
Şekil 5: Cebirsel Örüntü Genellemesinin İnşası (Radford, 2008, s.85)

Aritmetik genelleme ise cebirsel genelleme sürecinin aksine sayı örüntüsünün tamamına değil de belirli bir bölümüne odaklanıldığından dolayı bir başka terimi elde etmeye yönelik değildir ve bu nedenle bu genelleme türünde cebirsel bir yapı söz konusu değildir. Aritmetik genelleme sürecinde elde edilen hipotezden diğer terimlerin bulunması için cebirsel yapıya sahip bir genel kural geliştirilememektedir.

Aritmetik genelleme süreci;

- (i) Sayı örüntüsüne ilişkin ortak özelliği fark etme,
- (ii) Fark edilen ortak özelliğin örüntünün diğer terimlerinin içerip içermediğini inceleme,

şeklindedir. Aritmetik genelleme süreci Şekil 6’da gösterilmektedir.

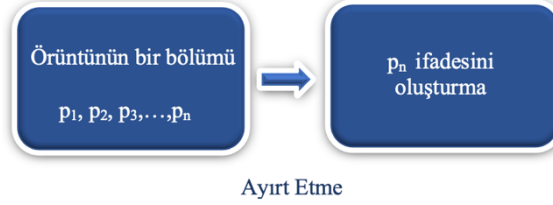


Şekil 6: Aritmetik Genelleme Süreci (Radford, 2008)

Şekil üzerinde görüldüğü üzere cebirsel genelleme sürecinin son adımı olan p_n ifadesini oluşturma, yani cebirsel yapıya sahip bir genel kural elde etme aşaması bulunmamaktadır. Ardışık terimler arası farkı bulma ve bu farka odaklanarak diğer terimleri elde etmeye çalışma, terimler arası ilişkilerin sayılarla belirtilmesi, ardışık terimler arası farkın yapısını inceleme gibi stratejiler, aritmetik genelleme sürecinde öğrencilerin odaklandığı yöntemler arasında yer aldığı söylenilebilir (Yeşildere, Akkoç, Baştürk – Şahin, 2017).

Radford (2008), çerçevesinde genelleme yapma ve tümevarım arasındaki farkın altını çizmektedir. Radford bu iki eylem arasındaki farka dikkat çekilmesinin gerekliliğini belirterek tümevarımın, örüntü üzerinde bulunan ilişki ve yapıların ortak özelliğine odaklanılarak değil, deneme yanılma yolu kullanılarak bulunduğunu belirtmektedir. Bu sebeple tümevarımda bir tahmin etme ya da deneme yanılma durumu söz konusu olduğundan dolayı bu noktada cebirsel düşünmenin varlığına rastlanmadığını ifade etmektedir. Bu nedenle Radford, tümevarımı diğer tümevarım çeşitlerinden ayırmak için *olgunlaşmamış tümevarım* şekliyle ifade etmiştir. Olgunlaşmamış tümevarım; örüntüye ilişkin ortak yapı ve ilişkilerin fark edilerek genelleme yoluyla cebirsel bir kurala ulaşmak yerine kuralın denenmesi ile genellemeye ulaşılması olarak

belirtmektedir (Yeşildere, Akkoç, Baştürk – Şahin, 2017). Bu noktada olgunlaşmamış tümevarım bir genelleme olarak kabul edilemez, şeklinde açıklanmıştır (Radford, 2008). Olgunlaşmamış tümevarım süreci Şekil 7’de görülmektedir.



Şekil 7: Olgunlaşmamış Tümevarım Süreci (Radford, 2008)

Şekil 7 üzerinde de görüldüğü gibi olgunlaşmamış tümevarım süreci, cebirsel genelleme sürecinin ilk ve son adımını içermektedir. Sayı veya şekil örüntüsüne ilişkin terimler arası ortaklık ve ilişkilerin fark edilmeden, deneme – yanılma veya tahmin yoluyla bir sayı örüntüsünün genel kuralının elde edilmesi olgunlaşmamış tümevarım sürecine bir örnektir (Yeşildere – İmre, Akkoç, Baştürk – Şahin, 2017). Aşağıda Radford (2008) tarafından geliştirilen kuramsal çerçevenin içerdiği farklı genelleme türlerine ait süreçler, örnek bir sayı örüntüsü, farklı gösterimler üzerinden açıklanmıştır. Verilen sayı örüntüsü (3, 5, 7, ...) Tablo 3’te gösterilmektedir.

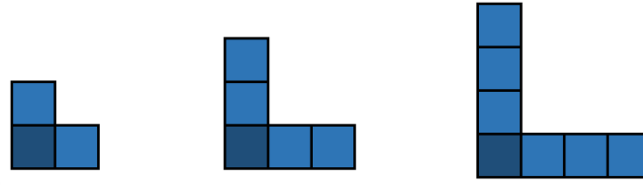
Tablo 3

3, 5, 7, ... Örüntüsünün Tablo ile Gösterimi

<i>Terim Sırası</i>	<i>Terim</i>	<i>Terim sırası ve Terim arasındaki ilişki</i>	
1	3	(2.1) + 1	(1.1) + (1+1)
2	5	(2.2) + 1	(1.2) + (2+1)
3	7	(2.3) + 1	(1.3) + (3+1)
...	...	...	...
n	...	(2.n) + 1	(1.n) + (n+1)

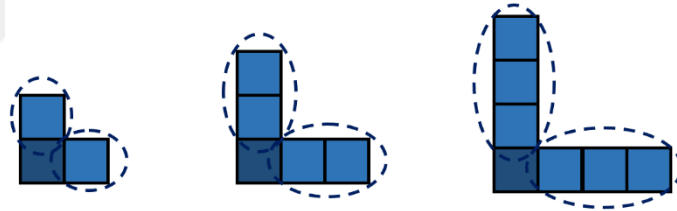
3, 5, 7, ... şeklinde devam eden bir sayı örüntüsü verildiğinde, olgunlaşmamış tümevarım sürecini geçiren öğrenciler, terimler arası ortaklık ya da sayılar arasında bulunan yapı ve ilişkileri dikkate almazlar. Bu ortaklıklara dikkat ederek bir hipotez geliştirilmeden üretilen cebirsel kural olgunlaşmamış tümevarım sürecine örnektir. Öğrencinin örüntüye ilişkin genel kuralı bir düşünsel sürece dayandırmadan örneğin $3n$ olarak belirtmesi, ardından deneme yanılma yoluyla doğruluğunun kontrol edilmesi, elde ettiği sonuca göre genel kuralı belirlemesi olgunlaşmamış tümevarıma örnektir.

Öğrencinin verilen örüntüye ilişkin terimler arasındaki artış miktarına odaklanması ya da artış miktarını belirtmesi aritmetik genelleme sürecine örnektir. Aritmetik genelleme sürecini geçiren öğrenciler adımlar ya da terimler arası ilişkiyi nümerik olarak belirtirler. Hipotezlerini herhangi bir notasyon kullanmadan açıklarlar (Yeşildere – İmre, Akkoç, Baştürk – Şahin, 2017). Sayı örüntüsünün şekil ile modellenmesi aşağıda Şekil 8’de görülmektedir.



Şekil 8: Örnek şekil örüntüsü (F. D. Rivera, 2018)

Şekil 8’de verilen 3, 5, 7, ... örüntüsüne ilişkin şekil incelendiğinde cebirsel genelleme sürecine ilişkin düşünsel süreçleri geçiren bir öğrenci verilen örüntüde bulunan terimler arası ortaklıkları fark ederek genelleme yaparlar.



Şekil 9: Cebirsel genelleme yaklaşımı sergileyen bir öğrencinin olası çözümü

Şekil 9’da bulunan şekil örüntüsü incelendiğinde 1. adımda bir dikey ve bir yatay birim kareden oluşan, 2. adımda iki dikey ve iki yatay birim kareden oluşan, üçüncü adımda ise üç dikey ve üç yatay durumda olan birim kareden oluşan yapının bulunduğu fark edilmesine ve bu durumun dikkate alınarak ortak özelliğin belirlenmesine örnek bir yaklaşımdır. Örüntüde her bir adımın köşesinde tek bir birim kare olduğu belirlenmiştir. Şekil 9’da görüldüğü gibi şekil üzerindeki dikey ve yatay yapıları gruplayarak adım sayısı ile ilişkisini fark eden öğrenci örüntüye ilişkin ortak özelliği idrak etmektedir. Bu noktada her bir adımda adım sayısı kadar dikey ve yatay birim karelerden oluşan yapının bulunduğu söylenebilir. Örüntünün n. adımında ise n kadar dikey birim kare ve n kadar yatay birim kare bulunacağından $(n + n)$ kadar birim kare bulunur. Her bir adımda köşede bir birim kare model üzerinde değişmeyen ortak özellik olarak gözlemlendiğinden n. adımda da yine köşe de bir birim kare bulunacaktır. Bu durumda p_n ifadesi $(n + n) + 1$ şeklinde oluşturulabilir. Bu noktada cebirsel genellemeye ulaşan öğrenci genel kuralı $2n + 1$ olarak bulacaktır.

Yukarıda açıklandığı gibi bir sayı örüntüsüne ilişkin genellemeye belirli düşünsel süreçlerden geçilerek ulaşma ile denem yanılma veya tahmin edilerek ulaşma arasında fark vardır (Yeşildere – İmre, Akkoç, Baştürk – Şahin, 2017). Kuramsal çerçeve de belirtildiği gibi cebirsel genelleme süreci ayırt etme, transfer etme ve fark edilen ortak özellikten yararlanarak p_n genel kuralına ulaşma süreçlerinden geçerek olgunlaşmaktadır.

2.3.2. Cebirsel Düşünme ile İlgili Araştırmalar

İlgili literatür incelendiğinde cebirsel düşünme süreçlerinin örüntü kavramı ve örüntülerin genellemesi üzerinden incelenen birçok çalışma bulunmaktadır. Yeşildere – İmre, Akkoç ve Baştürk – Şahin (2017) çalışmalarında ortaokul öğrencilerinin farklı temsil biçimlerini kullanarak örüntü genelleme sürecine ilişkin matematiksel genelleme yapma becerilerini incelemişlerdir. Araştırma bulgularına göre öğrenciye verilen bir örüntünün tablo veya şekil örüntüsü üzerinden sunulması, öğrenciler tarafından örüntüdeki ortak özelliğin fark edilmesini kolaylaştırdığı görülmüştür. Örüntünün bu şekilde cebirsel genellemeyi destekleyecek şekilde kullanılması terimler arası ortaklığın ve ilişkilerin fark edilmesini desteklediği görülmüştür (Yeşildere – İmre, Akkoç, Baştürk – Şahin, 2017). Özdemir, Dikici ve Kültür (2015) yedinci sınıf öğrencilerinin katılımı ile gerçekleştirdikleri çalışmalarında yedinci sınıf öğrencilerinin örüntüleri genelleme süreçlerini incelemişlerdir. Araştırmadan edinilen bulgulara göre öğrencileri örüntüde verilen şekilleri ya da şekillere ait yapıları dikkate almamışlar, örüntüye ilişkin cebirsel kuralı elde etmek için yalnızca sayısal ilişkilere odaklandıkları görülmüştür. Örüntü kuralını bulmada en yüksek başarı tekrarlı, en düşük başarı ise artarak genişleyen örüntü problemlerinde görülmüştür.

Kocamaz ve İkikardeş (2021) çalışmalarında, yedinci sınıf öğrencilerinin örüntü konusunu öğrenmede karşılaştıkları zorlukları açıklamışlardır. Araştırma 50 yedinci sınıf öğrencisi ile gerçekleştirilmiştir. Araştırma bulguları incelendiğinde öğrencilerin örüntünün herhangi bir elemanının kaçınıcı adımda yer aldığını belirlemede zorlandıkları, örüntüyü modellemede ise en başarılı oldukları görülmüştür. Bu bağlamda örüntüler üzerine yapılan diğer araştırmalar incelendiğinde APU raporunda (The Assessment and Performance Unit), öğrencilerin örüntüler ile ilgili çalışmaları gerçekleştirirken özellikle örüntü ilişkisini açıklamada örüntüyü devam ettirmeye göre daha çok zorlandıkları görülmüştür. Ayrıca araştırma sonuçlarında, ardışık terimler arasındaki farkın sabit olmayan örüntüleri devam ettirmede daha fazla zorlanma ve ilişkisi zor bulunan örüntülerde, kolay olan terimler üzerine odaklanarak örüntünün belli bir bölümüne göre genelleme yapma eğilimine gitmekte oldukları görülmüştür.

Kama (2020) çalışmasında, altıncı, yedinci ve sekizinci sınıf öğrencilerinin doğrusal örüntüleri aritmetik genelleme, cebirsel genelleme ve olgunlaşmamış tümevarım kullanarak genelleme süreçlerini incelemeyi amaçlamıştır. Çalışmada genelleme süreçlerini incelemeye ek olarak, aynı zamanda genelleme süreçlerinin sınıf seviyelerine göre gösterdiği farklılıklara da odaklanılmıştır. Çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması deseni kullanılmıştır. Veriler 2015-2016 akademik yılının bahar döneminde beş altıncı sınıf, dört yedinci sınıf ve beş sekizinci sınıf öğrencisinden toplanmıştır. Veri toplama araçlarını Örüntü Testi ve bireysel görüşmeler oluşturmaktadır. Araştırma bulguları incelendiğinde, (i) sadece cebirsel genelleme stratejileri, (ii) aritmetik genelleme ve cebirsel genelleme stratejilerinin kombinasyonunu, (iii) aritmetik genelleme ve olgunlaşmamış tümevarım stratejilerinin kombinasyonunu ve (iv) aritmetik genelleme, cebirsel genelleme ve olgunlaşmamış tümevarım stratejilerinin kombinasyonunu içeren dört tür genelleme sürecini ortaya çıkardığı elde edilmiştir. Ayrıca bulgular incelendiğinde, öğrencilerin sınıf düzeyine göre incelendiğinde, aritmetik genelleme ve cebirsel genelleme kombinasyonunun tüm sınıf seviyelerinde en sık yapılan genelleme süreci türü olduğunu, aritmetik genelleme, cebirsel genelleme ve olgunlaşmamış tümevarım kombinasyonunun ise en az yapılan genelleme süreci olduğu görülmüştür. Ayrıca sadece cebirsel genelleme stratejilerini içeren genelleme süreci türü yalnızca altıncı sınıf düzeyinde görülmüştür. Ek olarak altıncı, yedinci ve sekizinci sınıf seviyesindeki öğrencilerin örüntünün yakın terimlerini bulmak için aritmetik genelleme stratejisini kullandıkları, uzak terimleri ya da cebirsel bir genel kural elde edebilmek içinse ya cebirsel genelleme stratejileri ya da olgunlaşmamış tümevarım stratejilerini kullandıkları görülmüştür.

F. D. Rivera (2018) çalışmasında, ilkökul öğrencilerinin matematik yapılarının gelişimini ve örüntüleri genelleme süreçlerini etkileyen bilişsel faktörleri ve jest, mimik, kelimeleri ve aritmetik sembolleri nasıl kullandıklarını araştırmışlardır. Araştırmada, cebirsel düşünmenin gelişimine ilişkin genelleme sürecinde örüntülerin genellemesine ilişkin matematiksel yapı ve ilişkilerin fark edilmesini açıklayan üç bilişsel faktör belirlemişlerdir: sayı ve yapılar arası ilişki kurma yeterliliği, şekiller arası benzerlik ve özellikleri fark etme yeterliliği, ayırt etme ve gerekçelendirme yeterliliği. Araştırma bulguları incelendiğinde ise ilkökul öğrencilerinin örüntüleri genelleme sürecinde görsel stratejiler kullanılarak hazırlanan problemleri daha iyi anlamlandırdıkları ve fark ettikleri görülmüştür. Bu bakımdan görsel stratejiler kullanılarak hazırlanan etkinliklerin cebirsel türden yapıları genellemeyi desteklediği bulgusuna ulaşılmıştır. Ancak araştırma sonuçları araştırmaya katılan

öğrencilerin verilen örüntülerde geçirilen genelleme sürecine ilişkin fikirlerini gerekçelendirerek açıklama da yetersiz kaldığını göstermiştir.

Zazkis ve Liljedahl (2002), örüntülerin genellemesine ilişkin cebirsel düşünme ve cebirsel gösterim arasındaki ilişkiyi inceleme amacıyla gerçekleştirdikleri araştırmalarında sınıf öğretmenliği bölümünde okuyan 36 lisans öğrencisiyle çalışmışlardır. Öğrencilerin görsel olarak sunulan sayı örüntülerini genelleme süreçlerini incelemişlerdir. Araştırmada cebirsel düşünme ile cebirsel dil arasındaki ilişki incelemek amaçlanmıştır. Sınıf öğretmenliği öğrencilerine sayı dizisi verilmiş, bu dizideki örüntü ve ilişkileri keşfetmeleri istenmiştir. Örüntüye ilişkin bir sonuç elde etmelerini değil örüntü ile ilgili düşündüklerini ve zihinlerinde yapılandıkları her bir aşama için ifade etmeleri beklenmiştir. Araştırma bulgularına göre katılımcılar cebirsel dil kullandıkları zaman cebirsel düşünme becerisi göstermedikleri, cebirsel dil ile ifade etmeye çalışmadıklarında ise cebirsel düşünme becerisi gösterdikleri sonucuna ulaşılmıştır. Araştırmacılar katılımcıların cebirsel dil ve cebirsel düşünme arasındaki bağlantıyı kurmada zorlandıklarını ifade etmişlerdir. Buradan yola çıkarak cebirsel dil kullanmanın cebirsel düşünmenin ön şartı olamayacağını vurgulamışlardır.

Stacey (1989), lineer örüntülere odaklandığı araştırmasında merdiven veya ağaçların imgesel genişletilmesini sunmuştur. Lineer örüntüler ile ilgili olarak; Stacey (1989) yakın genelleme görevleri ile uzak genelleme görevleri arasında ayrım yapar. Yakın genelleme görevleri, sayarak, çizerek veya bir tablo oluşturarak ulaşılabilen sonraki örüntü veya elemanı bulma; uzak genelleme görevleri ise genel kuralı anlayarak örüntüyü bulmadır. Katılımcılara 20 veya 1000 basamaklı bir merdiven yapmak için veya belirli bir boyuttaki Noel ağacının ışıklarının sayısı için gerekli eşleşme sayısı sorulmuştur. Bu örüntüler lineer örüntülerdir çünkü n . eleman $a+n$ olarak ifade edilebilir. Stacey bu problemleri 9-13 yaş öğrencileri için zorlu bulmuştur. Araştırma sonunda, tüm yaş grubundaki öğrencilerin, genel olarak sayma stratejisi (counting method), farkın çarpım stratejisi (difference method), bütüne genişletme stratejisi (whole-object method) ve lineer yöntem (linear method) olmak üzere dört strateji kullandıkları görülmüştür. Bütün yaş gruplarında genel olarak aynı stratejilerin ve her iki grupta da en çok sayma stratejisinin kullanıldığı belirlenmiştir. Örüntülerde sabit farklılık özelliğinin, genel olarak öğrenciler tarafından fark edildiği ve özellikle 12-13 yaş grubunda yer alan, ilköğretim ikinci basamak öğrencilerinin büyük çoğunluğunun doğru bir şekilde kullandığı görülmüştür. Sabit fark özelliği büyük ölçüde kabul görmüş ve $f(x)$ 'den $f(x+1)$ 'i geçmek için öğrencilerin büyük bir çoğunluğu tarafından doğru olarak kullanılabilmiştir. Ancak, genelleme çabası içinde, öğrencilerin önemli bir kısmı farkın n . katları olarak n .

elemanı belirlemek için hatalı bir orantı yöntemi kullanmıştır. Bazı sorularda ise, öğrencilerin birden fazla strateji kullandıkları da belirlenmiştir. Ayrıca ilköğretim birinci basamak öğrencilerinin genelleme yapmada isteksiz oldukları, onların genelleme yaparken lineer yöntem yerine daha çok doğru orantı yöntemini kullandıkları görülmüştür. Bunların dışında kimi öğrencilerin lineer yöntem olarak tanımlanan “örüntünün son teriminden sonra sonlu terime kadar toplam farkı bulup son terime ekleme” stratejisini kullanarak, örüntülerin 100. ve 1000. adımındaki terimleri buldukları belirlenmiştir. Öğrenciler sayma yöntemini kullanmanın mümkün olmadığına karar verdiklerinde tam bir lineer yöntem kullanmakta veya doğru orantılı durumlarda geçerli, basit ilişkilerin birini genelleme için kullanmayı seçtikleri gözlenmiştir. Genelleme stratejisi seçimindeki tutarsızlık üç doğrusal genelleme probleminde de büyük ölçüde görülmüştür. Öğrenciler basit kuralın çekiciliğine kapılarak, sorunun zorlayıcı bölümünde lineer yöntem yerine doğru orantı yöntemini seçmişlerdir.

Özel (2019) çalışmasında, ortaokul matematik öğretmen adaylarının öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerini fark etme becerilerini örüntü genelleme bağlamında incelemiştir. Araştırma bulgularına göre öğretmen adayları bir öğrencinin örüntü genelleme ile ilgili problem çözümlerini kanıtlar sunarak açıklayabildiklerini ancak öğrenci çözümlerinden yola çıkarak öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerini analiz etme de zorlandıkları sonucuna ulaşılmıştır. Öğretmen adayları öğrencilerin çözümlerini açıklarken yanlış çözümleri açıklama da doğru çözümler üzerine yorum yapma ile karşılaştırıldığında daha çok zorlandıkları elde edilmiştir.

Yakut – Çakır ve Akyüz (2015) çalışmalarında dokuzuncu sınıf öğrencileri ile gerçekleştirdikleri çalışmalarında lineer olarak hazırlanmış şekil örüntülerini genellemeye yönelik problemleri çözerken kullandıkları genelleme stratejilerini incelemiştir. Araştırma sonucu bulgulara bakıldığında ise öğrencilerin yakın terimleri, uzak terimlere göre bulmada daha başarılı oldukları görülmüştür. Örüntüye ilişkin diğer terimleri terimler arası sabit farka odaklanarak ya da terimleri art arda yazarak diğer terimleri elde etmeye çalışmışlardır. Benzer bir konuyu ortaokul öğrencilerinden beşinci sınıf öğrencileriyle inceleyen Tanışlı ve Özdaş (2009) örüntüleri genelleme stratejilerini incelemişler ve araştırma bulgularına göre sabit ve artarak devam eden sayı örüntülerinin genellenmesinde görsel ve cebirsel yaklaşımın sergilendiği örüntüleri görsel olarak sunmanın genelleme sürecini kolaylaştırdığı görülmüştür. 474 ortaokul öğrencisiyle birlikte çalışan Kılıç (2016), araştırma bulgularında öğrencilerin kullandıkları stratejilerin hem görsel hem de görsel olmayan yapıya sahip olan yöntemler olduğu sonucuna ulaşmıştır.

Tanışlı (2008) araştırmasında ilköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin örüntülere ilişkin anlama ve kavrama biçimlerini belirlemeyi amaçlamıştır. Araştırmada verilerin elde edilmesi, analizi ve yorumlanmasında nitel araştırma yöntemi benimsenmiştir. Çalışmaya 12 öğrenci katılmıştır. Araştırma bulguları incelendiğinde tekrarlanan örüntülerde tekrar biriminin belirlenmesinin, örüntünün sonlu bir adıma devam ettirebilmesinde, tekrar biriminde yer alan şekiller arası sayısal ilişkinin bulunmasında ve tekrarlanan bir örüntü oluşturulmasında etkili olduğu elde edilmiştir. Sayı örüntülerinde tüm etkinliklerde, genel olarak örüntüye ilişkin bir terimin bir önceki terimle ilişkilendirildiği ya da örüntüdeki terimlerin doğasına odaklanıldığı, ancak sayı örüntüsü tablo şeklinde verilmişse, bunlara ilaveten terim ve terim sayısı ilişkisinin kurulabildiği şekil örüntülerinde ise, görsel ve cebirsel yaklaşımın belirlenmiştir. Kullanılan örüntü çeşitlerinde tüm etkinliklerde, en çok ‘‘sözlü’’, ‘‘sembol’’ ve ‘‘matematiksel cümle’’ ifade biçimlerinin kullanıldığı elde edilmiştir.

2.4. Sorgulama Temelli Öğretim ve Cebirsel Düşünme

Bireylerin doğuştan sahip olduğu merak duygusu, sorgulama ihtiyacını beraberinde getirmektedir. Bu bağlamda sorgulama, günlük hayatta ihtiyaç duyduğumuz, fark ederek veya etmeyerek kullandığımız bir beceri olma niteliği taşımaktadır. Sorgulama, gözlemde bulunma; soru sorma becerisi edinme; bilinen durumları ve bilinmeyen durumları araştırma, karşılaştırma; açıklamada; tahminde bulunma, genelleme; belirli bir durum özelinde ilişkileri inceleme, araştırma gibi düşünme becerilerini geliştiren aktiviteleri içeren çok yönlü bir etkinliktir (NRC, 1996). Sorgulama ile matematik öğretimi, öğrencilere bilim adamlarının dünyayı anlamlandırmak amacıyla kullandıkları stratejileri benimsemeye yönlendiren bilimsel süreç ve matematiksel becerilerin öğretimini kapsamakta; matematiksel bilgileri anlamlandırırken bu becerileri kullanmalarına yardım ederek (Clements, 2007; NRC, 2005) öğrencilerin matematiksel bilgileri düşünsel becerileri doğrultusunda içselleştirmesini desteklemektedir (Wu & Lin, 2016).

Sorgulama temelli öğretimin bilginin keşfedilmesine yönelik bir strateji olduğunu ifade eden Abdelraheem ve Asan (2006), öğrencilerin yaratıcılıklarını, fark etme ve genelleme becerilerini, problem çözme yeteneklerini ve matematiksel düşünme becerilerinin geliştirilmesi için önemli bir araç görevi gördüğünü ifade etmiştir. Herbert ve Brown (1997) ise matematiksel sembol ve ilişkiler kullanılarak bulunan bir durumdan bilgi çıkarımı yapmanın fark edilen ilişkileri matematiksel bilgiyle bütünleştirmenin düşünme becerilerini desteklediğini belirtmişlerdir. Matematiğin semboller kullanılarak genellemeler yapmayı ve çıkarımlarda bulunabilmeyi destekleyen bir düşünme biçimi ise cebirsel düşünmedir (Akkaya,

2006). Bu süreçte bireyin sorgulayarak analiz etmesi ve yorumlama ve uygulama doğrultusunda kendi bilgisini ortaya çıkarması gerekmektedir. Bu sebeple temelinde sorgulama yatan öğretim planlamaları yapılmalı ve cebirsel düşünmeye katkı sağlanmalıdır. Çünkü cebirsel düşünmeyi asıl açığa çıkaran, matematiksel bir duruma ait keşfedilen ilişki ve bağlantılardır. Sorgulayarak zihinsel süreçlerini aktif tutan bir öğrenci matematiksel bir yapıya ait içerdiği yapı ve ilişkileri cebirsel nedenlere dayandırabilmektedir.

İlgili alanyazın, matematik eğitimi perspektifinden incelendiğinde, öğrencilerin belirli durumlar arası ilişki kurabilme ve genelleme yapabilme becerilerinin örüntü konusu özelinde kazandırılmaya çalışıldığı görülmektedir (Uygur – Kabael ve Tanışlı, 2010; Tanışlı, 2008; Yeşildere – İmre, Akkoç, Baştürk – Şahin, 2017). Ancak incelenen literatür, öğrencilerin cebirsel düşünme becerisi özelinde genelleme süreçlerinde verilen matematiksel bir duruma ait ortak ilişki ve yapıları fark etmekte olduğu kadar bu ilişkileri cebirsel olarak ifade etmekte zorlandıkları ve kavram yanılgısı yaşadıkları rapor edilmiştir (Hargreaves, Threlfall, Frobisher & Shorrocks Taylor, 1999; Orton & Orton, 1999; Stacey, 1989). Ulusal ortaokul matematik dersi öğretim programı incelendiğinde, öğrencilerin cebirsel anlamda düşünsel süreçlerinin farkında olabilmesi için geleneksel öğretim yaklaşımından uzak öğrencilerin sorgulayarak araştırabilecekleri, tartışmalar doğrultusunda iletişim kurabilecekleri ve örüntü konusunu kavramsallaştırabilecekleri tartışmanın ve sorgulamanın fazla olduğu bir ortamla zenginleştirilmiş öğretime odaklanıldığı görülmüştür (MEB, 2005). Bu bağlamda, temeli matematiksel sorgulamaya dayanarak oluşturulmuş bir öğrenme ortamının öğrencileri cebirsel düşünmeye teşvik etmeye imkan sağlaması açısından sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretimin etkili olacağı düşünülmektedir (Cobb, Wood & Yackel, 1990; Glasersfeld, 1984; Jaworski, 1994).

BÖLÜM III

YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın yöntemi ele alınmaktadır. Araştırmanın modeli, katılımcılar, veri toplama yöntemleri, veri toplama araçları ve geliştirilme süreci, veri toplama araçlarının uygulama süreci, verilerin analizi, araştırmanın geçerliği ve güvenilirliği ve araştırmacının rolü ayrıntılı bir şekilde açıklanmaktadır. İlgili başlıklar altında ayrıntılı bilgilere sırasıyla yer verilmektedir.

3.1. Araştırmanın Modeli / Deseni

Sosyal bilimler ve eğitim bilimleri kapsamında araştırma yapma sürecinde kullanılan birçok farklı yöntem bulunmaktadır. Bu yöntemler araştırmanın ortaya çıkış kaynağına, problem durumuna, araştırmacının rolüne, araştırmacının araştırma konusuna yaklaşım biçimine ve konunun içerdiği ana temaya göre şekillenmektedir (Yin, 1994). Araştırma da sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretimin 7. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme süreçlerine etkisi incelendiğinden nitel araştırma yaklaşımı benimsenmiştir. Bu araştırma da nitel araştırma yöntemleri, araştırmanın içeriğinde bulunan problem durumuna ve araştırmanın odak noktasına uygun olacak şekilde kullanılmıştır.

Nitel araştırma yöntemi, disiplinler arasında bütüncül bakış açılarına sahip bir yaklaşım ile araştırma sorularını, yorumlayıcı bir incelemeyle ele almaktadır. Fraenkel ve Wallen (2006) ilişkilerin, etkinliklerin, durumların ya da materyallerin niteliğinin incelendiği çalışmaları nitel araştırmalar olarak tanımlamışlardır. Nitel araştırmacılar, belli bir konu ile ilgili araştırma yaparken o konunun ‘ne kadar’ ya da ‘ne kadar iyi’ olduğunu öğrenmekten çok daha geniş bir bakış açısı elde etmek isterler (Büyüköztürk ve diğerleri, 2008). Başka bir deyişle nitel araştırmalarda amaç; nicel araştırmaların tersine genelleme yapmak değil derinlemesine betimleme yapmaktır (Glesne ve Peskin’den akt. Yıldırım ve Şimşek, 2008). Nitel araştırmalarda olaylar kendi bağlamında incelenerek araştırmacıların bu olaylara ve bulgularına yükledikleri anlamlar neticesinde yorumlanır (Altunışık, Coşkun, Bayraktaroğlu ve Yıldırım, 2010: 302). Denzin ve Lincon (1994) nitel araştırmayı araştırma problemine yorumlayıcı yaklaşımı benimseyen bir yöntem olarak tanımlamaktadır (Akt. Ekiz, 2003).

Nitel araştırma görüşme, gözlem ve doküman incelemesi gibi veri toplama tekniklerinin kullanıldığı, olayların ve algıların doğal ortamdaki biçimlerinin bütüncül ve gerçekçi bir bakış açısıyla ortaya konmasına imkân veren nitel süreçler içeren bir araştırma olarak tanımlanmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2008, s. 39). Wiersma (2000) farklı kuramsal

temellere dayanan nitel ve nicel araştırmalar hakkında, nicel araştırmanın nedenleri, ilişkileri ve sonuçları belirlemek için kullanıldığını; nitel araştırmanın ise bir olayı derinlemesine anlama amacıyla özel bir durumdan yola çıkarak genel bir sonuca ulaşmada tümevarımsal bir süreç içerdüğünü belirtmektedir. Merriam (1998) ise nitel araştırma sürecini birden fazla bilimsel sorunun etrafında toplandığı şemsiye kavram olarak nitelendirmiş ve araştırılan problemin doğal ortamında çok fazla boşluk bırakılmadan açıklanmasını sağlayan araştırmalar olarak tanımlamıştır.

Bu araştırmanın amacı sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretimin 7. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme süreçlerine etkisinin incelenmesidir. Bu noktada burada bir genellemek yapmak söz konusu değildir. Daha çok sorgulama temelli matematik öğretimi öncesi ve sonrası öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerinin nasıl şekillendiğı ile ilgili bir bakış açısı elde edilmesi ve rastlanan durumların derinlemesine incelenmesi söz konusudur. Gerçekleştirilen öğretim öncesi ve sonrasında öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerinin ayrıntılı bir şekilde incelenmesi, öğrencilerin öğretim sürecinde yapılan öğretime ve konuya ilişkin görüş ve yorumları, öğrencilerin cebirsel olarak anlamlandırma süreçlerinin derinlemesine incelenerek ele alınması ve betimlenmesi istenmiştir. Yapılacak yorumlar ve betimlemeler araştırmanın gözlemleriyle yapılacaktır. Sürece ilişkin betimlemeler araştırmanın gözlem, yorum ve incelemeleriyle gerçekleştirilecektir. Nitel araştırma yönteminde yaygın olarak kullanılan üç veri toplama yöntemi vardır. Bunlar; görüşme, gözlem ve yazılı dokümanların incelenmesidir (Yıldırım, 1999). Çalışmada görüşme, gözlem ve yazılı dokümanların incelenmesi veri toplama yöntemi olarak kullanılacaktır. Tüm bu gerekçelerle araştırma yöntemi, nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması olarak benimsenmiştir. Durum çalışmasının bir konunun niteliğini derinlemesine incelemek (Çepni, 2012; Merriam, 1998; Yıldırım ve şimşek, 2011), bir durumu meydana getiren ayrıntıları tanımlamak ve genel hatlarıyla değerlendirmek (Gall, Gall & Borg, 2007); araştırmanın da sürece dahil edilmesi (Hitcock ve Hughes, 1995) gibi özellikleri açısından araştırmanın çerçevesine uygun olacağı düşünülmektedir.

Durum çalışması, ağırlıklı olarak nitel araştırma yöntemi benimsenilen araştırmalarda karşımıza çıkmaktadır. 1980’li yıllardan itibaren eğitim araştırmalarında yaygın olarak kullanılmaya başlanmış olan yöntem araştırmacıya, araştırılan konuyu derinlemesine ve ayrıntılarıyla inceleyebilme imkanı sunmaktadır (Yıldırım & şimşek, 2011). Bununla birlikte durum çalışması, sosyal olguları tekil bir olayın ayrıntılı analizini yaparak araştıran bir yöntemdir ve bir olayı çeşitli yönleriyle değerlendirerek, toplanan verilere bütüncül bir nitelik

kazandırır (Kaleli - Yılmaz, 2019). Aynı zamanda veri toplama sürecinde gözden kaçma ihtimali olan bilgileri ayrıntılı inceleme fırsatı verir (Punch, 2005).

Durum çalışması, bir alanda bulunan kısıtlı durum ve olayları açığa çıkararak, bu olayların gelişimini sağlama imkanı olan zemini oluşturma amacıyla sistematik bir çalışma ortaya çıkarmaktır (Chmiliar, 2010; Akt, Subaşı, 2017). Bu bağlamda araştırmanın odağı ‘ne’, ‘nasıl’ ve ‘niçin’ sorularını yanıtlamak olduğunda, katılımcıların davranışları kontrol altında tutulamadığında, içeriksel koşullar değiştirilmek istendiğinde durum çalışmaları kullanılır (Yin, 2003).

Alanyazın incelendiğinde durum çalışmasının araştırmacılar tarafından farklı türlerde sınıflandırıldığı görülmektedir. Merriam (1988) durum çalışmasını ‘tanımlayıcı’, ‘yorumlayıcı’ ve ‘değerlendirici’ olmak üzere üç türde tanımlamıştır. Davey (1991) ise durum çalışmasını ‘açıklayıcı’, ‘keşfetmeye dayalı’, ‘kritik olay’, ‘program yürütme’, ‘programın etkilerine dayalı’ ve ‘birikimli’ olmak üzere farklı kategoriler altında incelemiştir. Yine Stake (1995) durum çalışmasını, ‘içsel’, ‘enstrumental’, ‘tek-kolektif’ olmak üzere üç farklı kategori altında açıklamıştır. Araştırmacılar arasında durum çalışmasının kategorize edilmesine yönelik oluşan bu farklılık durumlara farklı açılardan bakılmasından kaynaklanmaktadır. Durum çalışması üzerine bazı araştırmacılar tarafından yapılan çeşitli gruplandırma ve sınıflandırmalar Tablo 4’te özetlenmiştir.

Tablo 4

Durum çalışması türleri

Araştırmacı	Durum çalışması türü		
Merriam (1988)	Tanımlayıcı	Yorumlayıcı	Değerlendirici
Stake (1995)	İçsel	Enstrumental	Tek - kolektif
Yin (2003)	Bütüncül tek	İççe geçmiş tek- çoklu	Bütüncül çoklu
Davey (1991)	Açıklayıcı	Keşfetmeye dayalı	Kritik olay

Baxter ve Jack (2008) ise tabloda verilen farklı durum çalışması türlerini bir araya getirerek ‘açıklayıcı’, ‘keşfetmeye dayalı’, ‘tanımlayıcı’, ‘çoklu durum çalışması’, ‘içsel’, ‘enstrumental’, ve ‘kolektif’ olmak üzere yedi farklı türde tanımlamıştır.

Keşfetmeye dayalı durum çalışması, araştırılması açık ve tek bir çıktısı olmayan durumların analiz edilmesi için kullanılmaktadır. Oluşturulan bir durumun amacı, nasıl işlediği ve çıktıları açık olmadığında, durumla ilgili sorular oluşturma, veri toplama araçlarını belirleme ve geliştirmede keşfetmeye dayalı durum çalışması yöntemi kullanılabilir (Kaleli – Yılmaz, 2019). Ayrıca daha büyük örnekleme sahip olan araştırmalar gerçekleştirilmeden önce bu yöntem ile durum hakkında bilgi sahibi olunur.

İçsel durum çalışması, belirli bir kişi, grup, olay ya da kurum hakkında daha fazla veri ve bilgi toplanmak istendiğinde durumu daha ayrıntılı betimlemek için bu yöntem kullanılır. İçsel durum çalışmasında amaç, genel teoriler üretmek veya elde edilen verileri daha geniş bir örnekleme genellemek değil, durumu derinlemesine incelemektir.

Enstrumental durum çalışması ise, belirli bir durumu anlamaktan ziyade, bir problemi açıklamayı sağlar veya bir teoriyi geliştirmeye olanak sağlamaktadır. Bu noktada durum ikinci planda olup destekleyici bir görev üstlenmektedir. Enstrumental durum çalışması yöntemi, geniş bir konu hakkında öngörü kazanabilmek için özel durumları inceler.

Kolektif durum çalışması (karşılaştırmalı durum çalışması), bir problemi anlamak, açıklamak ve değerlendirmek için çoklu durumların karşılaştırılmasının esasına dayanmaktadır. Kolektif durum çalışmasının amacı, belirli durumların ortak özelliklerini analiz etmenin yanı sıra, durumların bireysel özelliklerini de incelemektir.

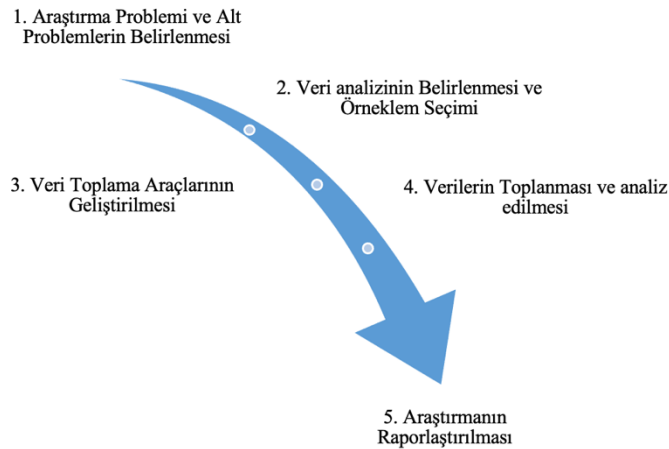
Açıklayıcı durum çalışmasında bir durum hakkında bilgi vermek, aşına olunmayan durumları daha bilinir bir hale getirmek ve gerçek hayat durumları ile ilgili ilişkiler açıklamak için kullanılır (Metin, 2015). Bir araştırmada amaç gerçekleştirilen bir durum ya da öğretimin belirli bir örneklem üzerinde nasıl bir etki oluşturduğu gözlemler ve mülakatlar yoluyla açığa çıkarılması ise bu noktada o araştırmada açıklayıcı durum çalışması yöntemi kullanılması uygundur (Kaleli – Yılmaz, 2019). Bu araştırmada amaç gerçekleştirilmesi planlanan sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretimin yedinci sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme süreçleri üzerinde nasıl bir etki oluşturduğu gözlemler ve mülakatlar yoluyla açığa çıkarılması olduğundan araştırmada, nitel bir yöntem olan *açıklayıcı durum çalışması* deseni kullanılmıştır. Ayrıca araştırmacının sürece dahil olması seçilen yöntemin araştırmaya olan uygunluğunu destekler niteliktedir.

Durum çalışmalarının yürütülmesine yönelik olarak geçmişten günümüze farklı araştırmacılar tarafından farklı modeller öne sürülmüştür. Gilham (2000), durum çalışması sürecinde bir araştırmacının atması gereken ilk adımların; durumla ilgili alanyazını taramak,

durum ya da durumları kendi bağlamlarında tanımlamak, araştırmanın içerdiği incelenecek durumlara ilişkin genel amaçların neler olduğuna karar vermek ve araştırma sorularına şekil vermek olarak ifade etmiştir. Durum çalışmasında gerçekleştirilmeden önce sürecin planlanması araştırmacının çalışmayı belirli bir düzende değerlendirebilmesi açısından önemli bir nokta olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu bağlamda Yıldırım ve Şimşek (2011) tarafından durum çalışması sürecinin ilk adımları gerçekleştirildikten sonra izlenmesi gereken aşamalar sekiz başlık altında ele alınmıştır:

- ⑩ Araştırma problemlerinin tanımlanması
- ⑩ Ana problem ışığında alt problemlerin belirlenmesi
- ⑩ Veri analizi yönteminin belirlenmesi
- ⑩ Çalışılacak olay veya durumların belirlenmesi
- ⑩ Araştırma örnekleminin seçimi
- ⑩ Verilerin toplanması ve toplanan verilerin yorumlanarak alt problemler bağlamında incelenmesi
- ⑩ Verilerin analiz edilmesi ve yorumlanması
- ⑩ Durum çalışmasının raporlaştırılması, şeklindedir.

Durum çalışmalarında, araştırma sürecinin bir planı çıkarılır ve bu plana bağlı kalınır (Yıldırım & Şimşek, 2011). Bu araştırmanın planı, 2021-2022 bahar dönemindeki ortaokula devam eden dokuz yedinci sınıf öğrencisi ile sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretimin cebirsel düşünme süreçlerine etkisinin incelenmesi amacıyla oluşturulmuştur. Uygulama toplamda 4 hafta sürmüştür. Planın uygulanmasını gösteren şema Şekil 10'da görülmektedir.



Şekil 10: Araştırma süreci

Bu araştırmada durum çalışması sürecine sorgulama temelli ğretim ve matematik eğitimine entegre edilmesi, cebir ve cebirsel düşünme, cebirsel düşünme süreçlerinin inşası ve genelleme konuları özelinde literatür taraması ile başlanmıştır. Ardından araştırmanın problem cümlesi belirlenmiş ve gerekli izinler alınmıştır. Bu doğrultuda araştırmanın amacı ve problem durumu ışığında veri toplama araçları belirlenmiş ve araştırmacı tarafından hazırlanmıştır. Öncelikle yapılan literatür taraması ve kullanılan kuramsal ereve doğrultusunda sorgulama temelli öğretime ilişkin ders planları hazırlanmıştır. Ardından araştırma planı çerçevesinde öğrencilerin sorgulama temelli ğretim öncesi ve sonrasında cebirsel düşünme süreçlerinin incelenmesi adına cebirsel düşünme süreçleri n değerlendirme formu ve ğretim sonrası cebirsel düşünme süreçleri değerlendirme formu ve buna ilişkin etkinlikler geliştirilmiştir. Son olarak sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli ğretim sonrası öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerinin daha iyi analiz edilmesi açısından bireysel görüşmelerde kullanılacak olan yarı yapılandırılmış görüşme formu geliştirilmiştir. Bu süreçte geliştirilen ğretim, mülakat formu, problem ve etkinliklere alanında uzman 2 farklı akademisyenlerden uzman görüşü alınarak son verilmiş ve uygulama sürecinde kullanılmıştır. Hazırlanan araştırma planında bulunan uygulama sürecinden sonra uygulama sürecinde gözlenenler ve uygulama sonrasında elde edilen veriler analiz edilerek araştırma raporlaştırılmıştır.

3.2. Katılımcılar

Durum alışmaları, araştırılan konuyu derin bir şekilde incelemeyi amaçladığından katılımcı sayısının az olmasını gerektirir (Kaleli – Yılmaz, 2019). Bunun sebebi, durum çalışmasının araştırılacak olayı ayrıntılı ve derinlemesine incelemeyi planlamasıdır. Bu bağlamda durum çalışmasında var olan sorun ya da problemlerle doğrudan ilişkisi olan kişilerle gerçekleştirilir (Büyüköztürk ve diğer., 2009). Nitel araştırmaların doğası gereği, bir örneklem tüm üyelerinden eşit veriler elde eden bir kaynak olarak değil, zengin durumlar ile ilgili bilgi alınabilecek bir kaynak olarak ele alınır (Wiersma, 2000). Araştırma problemlerine en iyi en iyi cevap alınabilecek katılımcıları veya çalışma koşullarını amaca yönelik seçmek nitel araştırmaların en önemli noktalarındandır (Creswell, 2014). Bu bağlamda araştırma katılımcıları amaçlı örnekleme yöntemi ile belirlenmiştir. Yeterli nitelikte veri elde edilmesinde amaçlı örnekleme yönteminin seçilmesinin ana sebebi; doğal olay ve olgular için çarpıcı, yeterli çeşitlilikteki veriler için de kapsamlı ve yapısal çıkarımlarda bulunabilmektir (Polkinghorne'den akt. Wiersma, 2000). Bu çalışmada sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretime öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerine etkisi incelenmek istendiğinden söz konusu geliştirilen plan doğrultusunda amaçlı örnekleme

yöntemi araştırmanın odak noktasına uygun olduğu düşünülmektedir. Amaçlı örnekleme yöntemlerinden maksimum çeşitlilik örnekleme kullanılmıştır.

Yıldırım ve Şimşek (2008, s. 108); maksimum çeşitlilik örneklemeindeki amacın “göreceli olarak küçük seçilen bir örneklemede problemle doğrudan ilişkisi olan bireylerin çeşitliliğini en üst derecede yansıtmak” olduğunu ifade etmektedir. Bu noktada bahsedilen çeşitliliğin amacı genellemek yapmak değildir. “Maksimum çeşitlilik örnekleme: (1) farklılıkları vurgulanan durumların. Ayrıntılı tanımları ve (2) çeşitlilik göstermelerine rağmen bu durumların ortak yönleri ile ilgili iki tür bilgi üretmek için geliştirilmiştir.” (Wiersma, 2000:286). Bu nedenle söz konusu çalışma; başarı düzeyleri, çalışma şekilleri ve grup çalışmalarına yatkınlıkları birbirinden farklı dokuz öğrencinin katılımıyla gerçekleştirilmiştir.

Araştırmanın katılımcılarını Ordu ilindeki resmi bir ortaokulda aynı sınıfta öğrenim gören 7. sınıf öğrencileri oluşturmaktadır. Araştırmanın katılımcılarının yedinci sınıf öğrencileri arasından seçilmesinin gerekçesi öğrencilerin Liseler Geçiş Sistemi (LGS) sınavı gibi bir kaygılarının olmaması, bu sınıf yetkinliğinde ilgili kazanımlar incelendiğinde cebirsel düşünme süreçlerinin incelenmesine ilişkin ölçülmesi istenen araştırma gerekliliklerine uygun konuların olmasıdır. Öğrencilerin seçimi gönüllülük esas alınarak gerçekleştirilmiş ve öğrencilere gerekli bilgilendirmeler yapılmıştır. Ayrıca araştırmada öğrencilerin isimlerinin gizli tutulması amacıyla başarı düzeyleri de göz önünde bulundurularak akademik açıdan yüksek olan üç öğrenci için Y₁, Y₂ ve Y₃, orta düzeydeki üç öğrenci için O₁, O₂ ve O₃, düşük düzeydeki üç öğrenci için ise D₁, D₂ ve D₃ şeklinde kodlar kullanılmıştır. Bu öğrencilerin akademik başarı ve cinsiyet dağılımları Tablo 5’te belirtildiği gibidir.

Tablo 5

Araştırmaya katılan öğrencilerin akademik başarı ve cinsiyet dağılımı

Öğrenci	Akademik Başarısı	Cinsiyet
Y ₁	Yüksek	Kız
Y ₂	Yüksek	Kız
Y ₃	Yüksek	Erkek
O ₁	Orta	Erkek
O ₂	Orta	Kız
O ₃	Orta	Erkek
D ₁	Düşük	Kız
D ₂	Düşük	Kız
D ₃	Düşük	Erkek

Ayrıca öğrencilerin seçiminde matematik dersine ilişkin akademik başarıları dikkate alınmıştır. Öğrencilerin akademik başarıları belirlenirken 5, 6, ve 7. sınıfın iki döneminde aldıkları matematik karne notları ve notlara ilişkin ortalamaları dikkate alınmıştır. Araştırma 7. sınıfın bahar döneminde gerçekleştirildiği için bahar dönemine ait matematik dersine ilişkin ikinci sınavlar gerçekleştirilmediğinden yalnızca birinci sınavlar referans alınmıştır.

Tablo 6

Öğrencilerin geçmiş dönemlere ait matematik dersi karne notları

Öğrenci	5. Sınıf		6. Sınıf		7. Sınıf		Ortalama
Y ₁	91,6	91,6	90	90	75	100	89,7
Y ₂	82,3	82,3	90	90	81,1	95	86,78
Y ₃	67,1	67,1	90	90	96,1	100	85,05
O ₁	71,5	71,5	95	95	73,3	66	78,71
O ₂	55,1	55,1	85	85	85	61	71,03
O ₃	67,5	67,5	95	95	72,7	72	78,28
D ₁	25,4	25,4	55	55	40,3	28	38,18
D ₂	61,6	61,6	60	60	40	61	57,36
D ₃	51,5	51,5	65	65	70	66	61,5

Çalışmaya katılan öğrencilerin akademik başarıları okul not sistemindeki not aralıklarından yararlanılarak belirlenmiştir. Buna göre matematik dersine ilişkin not ortalaması 70'ten az olan öğrenciler düşük; notu 70 ile 84 arasında olan öğrenciler orta; notu 85 ve üstü olan öğrenciler ise yüksek akademik başarıya sahip öğrenciler olarak nitelendirilmiştir.

3.3. Veri Toplama Araçları

Durum çalışmasında, araştırma sorusunun doğasına göre nitel veya nicel veri toplama araçları kullanılabilir (Ekiz, 2003; Fraenkel & Wallen, 2008; Gay & Airasian, 2000; Mertler, 2011; Mills, 2007). Bu bağlamda durum çalışmalarında veriler toplanırken mümkün olduğunca birden fazla veri toplama aracı kullanılmalıdır (Patton, 1990; Yıldırım & Şimşek, 2011; Yin, 2003). Farklı veri toplama araçları yolu ile toplanan farklı veriler sayesinde araştırmanın veri tabanı zenginleştirilir ve alternatif yorumlar açığa çıkabilir (Yıldırım & Şimşek, 2011). Nitel veri toplama araçlarından bireysel yapılandırılmış veya yarı yapılandırılmış görüşmeler, gözlem, açık uçlu sınavların yanı sıra nicel veri toplama araçlarından anket, ölçek ve çoktan seçmeli testler de kullanılabilir (Gay & Airasian, 2000; Mertler, 2011; Mills, 2007). Veri toplama araçları belirlenirken güçlü ve zayıf yönleri ile

kullanılabilirlikleri bakımından değerlendirilmelidir (Özpınar & Aydoğan – Yenmez, 2016). Bu bağlamda değerlendirme pilot çalışma ya da uzman görüşü alınabilir. Verilerin geçerliğini arttırmak ve sonuçların anlamlılığını güçlendirmek için “veri çeşitleme” stratejisi kullanılabilir (Ferrance, 2000; Fraenkel & Wallen, 2008; Mills, 2007).

Genel olarak alanyazın incelendiğinde durum çalışmalarında kullanılacak veri toplama araçlarının belgeler (dokümanlar), kayıtlar (ses ve video kayıtları), görüşmeler (yapılandırılmış veya yarı yapılandırılmış mülakatlar), katılımsız veya katılımcı gözlem ve fiziksel eserler olmak üzere altı başlık altında toplandığı görülmektedir (Gilham, 2000; Yin, 2003).

Bu bağlamda araştırma yöntemi ve alt problemler ışığında çalışmada dört adet veri toplama aracı araştırmacı tarafından geliştirilmiştir. Bunlardan ilki öğrencilerin sorgulama temelli öğretim öncesi öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerinin analiz edilmesi amacıyla hazırlanan *Cebirsel Düşünme Süreçleri Ön Değerlendirme Formu*’dur. İkinci veri toplama aracı, öğretim sonrası cebirsel düşünme süreçlerinin analiz edilmesi amacıyla araştırmacı tarafından geliştirilen *Öğretim Sonrası Cebirsel Düşünme Süreçleri Değerlendirme Formu*’dur. Gerçekleştirilen sorgulama temelli öğretimin örüntüler konusuna ilişkin cebirsel düşünme süreçleri üzerindeki etkisini görmek amacıyla, sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim öncesinde ve sonrasında uygulanmak üzere toplam 20 adet etkinlik hazırlanmıştır. Üçüncü veri toplama aracı *Sosyo-matematiksel Normlarla Desteklenmiş Sorgulama Temelli Öğretime İlişkin Ders İçeriği*’dir. Ders içeriği oluşturulurken öğretim süreci, 10 adet ders planını kapsayacak şekilde planlanmıştır. Son veri toplama aracı ise yarı yapılandırılmış görüşme sorularının yer aldığı *Cebirsel Düşünme Süreçlerinin Analizine İlişkin Yarı Yapılandırılmış Mülakat Formu*’dur.

3.3.1. Cebirsel Düşünme Süreçleri Ön Değerlendirme Formu’nun Geliştirilmesi

Araştırmada veri toplama aracı olarak, öğrencilerin sorgulama temelli öğretim öncesi cebirsel düşünme süreçlerinin analizi adına “Cebirsel Düşünme Süreçleri Ön Değerlendirme Formu” araştırmacı tarafından geliştirilmiştir. Cebirsel Düşünme Süreçleri Ön Değerlendirme Formu Ek-3’te verilmektedir. Etkinlikler 7. sınıf cebir öğrenme alanında bulunan “örüntü ve ilişkiler” konusuna ilişkin kazanımlar ve araştırmacının hedefleri dikkate alınarak hazırlanmıştır. Hazırlanan tüm etkinlikler öğretim programı kapsamında (MEB, 2018) “M.7.2.1.3. Sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimlerini bulur.” kazanımı dışına çıkmayacak şekilde hazırlanmıştır. Bununla birlikte literatür taraması cebirsel düşünmenin oluşumunda genelleme ve örüntü kavramının

önemi üzerine yapılan birçok araştırmanın varlığını göstermektedir. Bu araştırmalara ikinci bölümde değinilmiştir.

Araştırmada kullanılan etkinliklerin oluşturulmasında Radford (2008) tarafından çalışmasında açıklanan Cebirsel Örüntü Genellemesinin İnşası çerçevesi temel olarak kabul edilmiştir. Bununla birlikte önceki yıllarda yayımlanmış kaynak, PISA soruları, TÜBİTAK tarafından desteklenen projelerde yer alan etkinlikler ve ilgili literatür de dikkate alınarak etkinlikler tekrar geliştirilmiştir. Sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim öncesi öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerinin incelenmesi adına hazırlanan form 10 adet etkinlik içermektedir. On etkinliğin yedisi araştırmacı tarafından hazırlanmıştır. Geriye kalan üç etkinlik ilgili literatür taranarak ve gerekli izinler alınarak hazır olarak alınmıştır. Etkinliklere ilişkin bilgiler aşağıda verilmektedir.

Bu bakımdan örüntü genelleme bağlamında hazırlanan etkinlikler öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerini açığa çıkarmaktadır. Ayrıca etkinlikler örüntüleri genelleme sürecinin nasıl gerçekleştiğini fark edilmesine yönelik öğrencilerin gerçek hayat problemleri ile karşı karşıya kalmasını sağlamaktadır. Bu amaçlar doğrultusunda gerekli kriterler tekrar gözden geçirilmiş ve uzman görüşüne sunularak etkinliklerde gereken düzeltmelerle etkinliklere son hali verilmiştir. Etkinliklere ilişkin ayrıntılı bilgiler aşağıda alt bölüm olarak verilmektedir. Cebirsel düşünme süreçlerinin analizine ilişkin hazırlanan etkinlikler genel olarak,

- ⑩ Etkinlikte verilen örüntünün matematiksel bağlamı anlamalarını ve yorumlamalarını,
- ⑩ Verilen örüntülerdeki ilişkileri aramalarını ve belirlenen ilişkileri ifade etmelerini,
- ⑩ Örüntülerdeki ortaklığı yakalama, anlama ve idrak etmelerini,
- ⑩ Örüntüde fark edilen ortak özelliği başka bir duruma transfer etmelerini,
- ⑩ Bu ortak özelliği dikkate alınan örüntünün veya sayı dizisinin tüm terimlerine genellemelerini,
- ⑩ Örüntünün herhangi bir terimini doğrudan belirtmek için bir kural veya şema belirtme sürecinin fark etmelerini,
- ⑩ Öğrencilerin örüntülerdeki ortaklığı ve ilişkileri fark ederek cebirsel olarak düşünme süreçlerini anlamlandırmalarını, amaçlamaktadır.

Hangi etkinliğin hangi hedefi nasıl amaçladığı ve etkinliğe ilişkin öğrencilerden beklenen davranışlar etkinliğin verildiği bölümde detaylı olarak açıklanmaktadır.

Hedeflenen amaçlar doğrultusunda ilgili literatür taraması ile hazırlanan etkinliklerin kuramsal çerçeveye uygunluğuna ilişkin iki matematik eğitimcisiinden uzman görüşü ve ortaokulda görev yapan üç matematik öğretmenin görüşleri alınmıştır. Bu aşamada hazırlanan etkinliklerin her biri için uzmanların görüşlerini belirtebilecekleri alanların yer aldığı tablolar oluşturulmuş ve Uzman Görüşü Formu şeklinde uzmanlara sunulmuştur. Formda Radford (2008) çalışmasında yer alan Cebirsel Örüntü Genellemesinin İnşası çerçevesinden ve yedinci sınıf cebir öğrenme alanında bulunan “örüntü ve ilişkiler” konusuna ait ‘M.7.2.1.3. Sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimlerini bulur.’ kazanımı doğrultusunda etkinliklerin hazırlanmasında temel alındığı belirtilmiş ve ilgili kuramsal çerçeveden bahsedilerek etkinliklerin uygunluğu konusunda uzmanların görüşlerine başvurulduğu açıklanmıştır. Tablo 7’de Uzman Görüşü Formu’nun genel formatının nasıl olduğu görülmektedir.

Tablo 7

Uzman Görüşü Formu Örneği’

Cebirsel Düşünme Süreçlerini Değerlendirme Formu’na İlişkin Etkinlikler	Görüş/Öneri			
	Hazırlanan Etkinlik Uygun	Hazırlanan Etkinlik Uygun Fakat Gözden Geçirilmeli	Hazırlanan Etkinlik Uygun Değil	Hazırlanan Etkinlik ile İlgili Önerileriniz
Etkinlik-1				
	Açıklama:			

Uzman Görüşü Formu’nda araştırmacı tarafından geliştirilen etkinliklerin uygun olup olmadığına ilişkin uzmanlardan görüş belirtmeleri istenmiştir. Formlar uzmanlara elektronik posta yoluyla ulaştırıldıktan bir ay sonra geri dönüt alınmıştır. Alınan geri dönütlerde uzmanlar tarafından, hazırlanan etkinliklerin uygun olduğunu belirtilmiş ve bazı etkinliklerde bulunan problem maddelerine yönelik önerilerde bulunmuşlardır. Etkinliklere son halinin verilmesi için bu öneriler dikkate alınmıştır.

Alınan geri dönütlerde uzmanlar, Cebirsel Düşünme Süreçleri Ön Değerlendirme Formu’na ilişkin hazırlanan etkinliklerin uygun olduğunu belirtmiş yalnızca bir etkinlik için aynı amacı güdecek şekilde yapısal olarak değişikliğe gidilmesi önerilmiştir. Etkinliklere son halinin verilmesi için bu öneriler dikkate alınmıştır.

Uzmanlar, Etkinlik 6’ da ilk üç adımı verilen örüntü problemine ilişkin örüntüye ait ortaklık ve özelliklerin öğrenciler tarafından daha fark edilebilir olması amacıyla örüntünün bir sonraki adımının da verilmesi gerektiğini önermişlerdir. Uzmanların, *“öğrencilerin örüntünün altında yatan ortak yapı ve ilişkileri doğru bir şekilde anlamlandırabilmesi için örüntünün bir sonraki teriminde verilmesi gerekli gibi duruyor”* dönütü sonrası, Etkinlik 6 yeniden düzenlenerek Cebirsel Düşünme Süreçleri Ön Değerlendirme Formu’na dahil edilmiştir. Etkinlik 6’nın uzman görüşüne gitmeden önce, araştırmacı tarafından hazırlanan hali Şekil 11’de görülmektedir.

Etkinlik 6



Aslı ailesiyle birlikte Kapadokya’daki Yeraltı Şehri’ni gezmeye Ürgüp’e gitmiştir.

Yeraltı mağaralarına giren Aslı dar geçitleri geçip merdivenlerden inerek mağaranın en derin kısmına ulaşmaya çalışmaktadır. Her geçitte giderek artan merdivenler Aslı’nın çok dikkatini çekmiştir. Bir süre sonra, bir sonraki geçitteki merdiven sayısını hesaplamaya başlamıştır.

Aşağıda Yeraltı Şehri’nde bulunan merdivenlerin düzeni ile ilgili örüntü görmektesiniz.



1. Geçit



2. Geçit



3. Geçit

Şekil 11: Uzman görüşü öncesi geliştirilen Etkinlik 6

Bu öneri doğrultusunda başlangıçta; Şekil 8’de görüldüğü üzere ilk üç adımı verilerek geliştirilen örüntü problemi ilk dört adımı içerecek şekilde düzenlenmiştir. Uzmanların geri dönütleri doğrultusunda düzenlenen Etkinlik 6, Şekil 12’de verilmektedir.



1. Geçit



2. Geçit



3. Geçit



4. Geçit

Şekil 12: Uzman görüşü sonrası düzenlenen Etkinlik 6’nın son hali

Son halini alan Cebirsel Düşünme Süreçleri Ön Değerlendirme Formu'na ilişkin etkinlikler aşağıda verilmiştir. Forma ilişkin her bir etkinliğin neyi amaçladığı, öğrencilerden gerçekleştirmesi beklenen eylemler ve öğrencilerin etkinliklere vereceği olası cevaplar karşılığında nasıl bir yol izleneceğine temel teşkil etmesi adına etkinliklere ilişkin açıklamalar yapılmıştır. Ayrıca etkinliklerin ortaokul matematik dersi öğretim programında bulunan hangi kazanımları içerdiği etkinliğin altında verilmiştir.

Etkinlik 1 araştırmacı tarafından ilgili literatür ve kuramsal çerçeve doğrultusunda uzman görüşü alınarak hazırlanmıştır. Alınan uzman görüşü doğrultusunda etkinlikte herhangi bir düzenlemeye gidilmemiştir. Etkinlikte öğrencilere günlük yaşam ile ilişkili bir problem durumu verilmiştir. Geliştirilen etkinlik, *“sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimlerini bulur”* kazanımına yöneliktir.

Etkinlik 1

Halı ve kilimlerdeki simge ve sembolere motif, bunların tamamına ise **desen** adı verilmektedir.



Ülkemizdeki halı, kilim, çanta, heybe gibi dokuma ürünlerinde çok sayıda geleneksel motifler ve desen bulunmaktadır.

Bu motiflerden bir tanesi yanda görseli verilen “Göz Motifi” dir. Bu motifte iç içe geçmiş dört adet eşkenar dörtgenden yararlanılmıştır.

Aşağıda “Göz Motifi” ile yapılmış bir halı deseninin ilk üç adımı verilmiştir.



1. Adım



2. Adım



3. Adım

- a) Desenin adım sayısı ile eşkenar dörtgen sayısını gösteren tabloyu doldurunuz. Çözümünüzü açıklayınız.

Adım sayısı	1	2	3	4	5
Eşkenar dörtgen sayısı					

- b) Sizce halı deseninin 10. adımında eşkenar dörtgen sayısı kaç olur? Çözümünüzü gerekçeleriyle açıklayınız.
- c) 55. adımında eşkenar dörtgen sayısı kaç olur? Çözümünüzü gerekçeleriyle açıklayınız.
- d) Herhangi bir adımdaki eşkenar dörtgen sayısını veren bir kural bulunuz. Çözümünüzü gerekçeleriyle açıklayınız.

Etkinliğin (a) maddesinde öğrencilerden örüntü de bulunan ilişkiyi keşfeden öğrencilerin bunu tablo, şekil gibi farklı temsillerle göstermeleri beklenmektedir. Öğrencilere verilen tablonun örüntüye ilişkin ortaklıkları fark etmeyi kolaylaştırması beklenmektedir.

Etkinliğin (b) maddesinde öğrenciler 10. adımda bulunacak eşkenar dörtgen sayısına teker teker sayarak yani adımlar arasındaki sabit artış miktarına odaklanarak ulaşabilirler. Bu noktada (c) maddesi üzerinden 55. adım sorularak bir hipotez geliştirme ihtiyacı duymaları beklenmektedir.

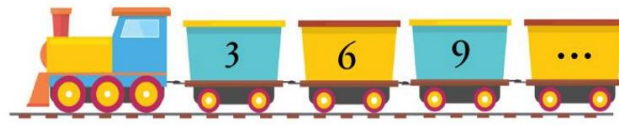
(d) maddesinde ise, örüntünün herhangi bir adımını bulmada öğrencilerin hangi tür genelleme gerçekleştireceklerini yansıtmakla ilgilidir. Öğrencilerden örüntüye ilişkin ortaklıkları fark ederek örüntünün sonraki terimlerine genellemeleri ve bu doğrultuda cebirsel olarak anlamlı bir genel kural oluşturmaları beklenmektedir. Adım sayısı ile eşkenar dörtgen sayısı arasındaki ortaklıkların fark edilerek genellenin gerçekleştirilmesi beklenmektedir.

Etkinlik 2

İlke'nin babası makinisttir. Ancak babası Kars'a doğru çıkacağı uzun yolculuk için endişelenmektedir. Çünkü zorlu yollardan geçerken trendeki yüklerin devrilmesinden dolayı tedirgindir.

Bu işe el atmak isteyen ilke 5. Sınıfta öğrendiği örüntüler konusunu kullanarak yüklerin kurallı bir şekilde yerleştirmesine yardım edeceğine söz vermiştir. İlke'ye babasının trene yük kutularını yerleştirmesine yardım eder misin? Sence İlke kutularda nasıl bir modelleme yaparsa kurallı bir şekilde örüntü elde eder?

(Not: Her vagona kaç kutu olacağı vagonların üzerinde yazmaktadır.)



1. Vagon 2. Vagon 3. Vagon

- Kutuların modellemesini aşağıda bulunan alana yapabilirsin. 
- İlke'nin babası 4. Ve 5. Vagonlarda kaç kutu olacağını merak etmektedir. 4. Ve 5. Vagonlarda kaç kutu bulunacağı ile ilgili İlke ve babasına yardım et! Çözümünü ayrıntılı bir şekilde açıkla.
- Herhangi bir vagondaki kutu sayısını veren bir kural bulunuz ve bulduğunuz kuralı açıklayınız.

Etkinlik 2 araştırmacı tarafından ilgili literatür ve kuramsal çerçeve doğrultusunda uzman görüşü alınarak hazırlanmıştır. Alınan uzman görüşü doğrultusunda etkinlikte herhangi bir düzenlemeye gidilmemiştir. Etkinlikte öğrencilere günlük yaşam ile ilişkili bir problem

durumu verilmiştir. Geliştirilen etkinlik, “sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimlerini bulur” kazanımına yöneliktir.

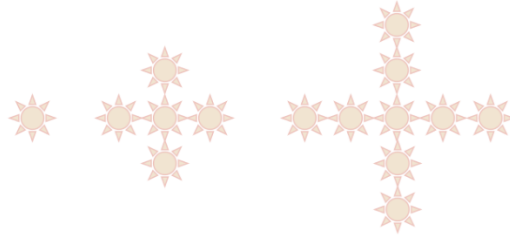
Etkinliğin (a) maddesi olarak yöneltilen soru, öğrencilerin soru bağlamını ve “örüntü” kavramını nasıl anlamlandırdığını irdeleme ihtiyacından dolayı bağlama ilişkin bir soru yöneltilmiştir. Burada amaç soruya doğru cevap verilmesi ya da doğru bir cevabın varlığı değildir. Amaç öğrencinin bu soruya karşılık vereceği cevabı nasıl bir mantık süzgecinden geçireceğidir.

Etkinliğin (b) maddesinde ise örüntünün verilen terimleri üzerinden adım sayısı ile kutu sayısı arasındaki ortaklıklar keşfedilerek bir hipotez geliştirmeleri beklenmektedir. Ayrıca öğrencilerden çözümlerini ayrıntılı bir şekilde açıklamaları istenerek cebirsel anlamda geçirilen düşünsel süreçlerin açığa çıkarılması planlanmaktadır.

Etkinliğin (c) maddesi ise öğrencilerden fark edilen ortaklıkların örüntünün sonraki terimlerine genelleyerek cebirsel olarak anlamlı bir genel kural oluşturmaları beklenmektedir.

Etkinlik 3

Aylin bir mimardır. Kendisine dekorasyon için verilen bir evin bebek odasının duvarlarına, duvar etiketlerini kullanarak aşağıdaki süslemeyi yapacaktır.



1. Adım 2. Adım 3. Adım

Buna göre;

5. adımda Aylin'in kaç adet güneş sembolüne ihtiyacı vardır? Çözümünüzü gerekçeleriyle açıklayınız.
10. adımda Aylin'in kaç adet güneş sembolüne ihtiyacı vardır? Çözümünüzü gerekçeleriyle açıklayınız.
- Aylin'in herhangi bir adımdaki ihtiyacı olan güneş sembolü sayısını veren bir kural bulunuz ve bulduğunuz kuralı gerekçeleriyle açıklayınız.

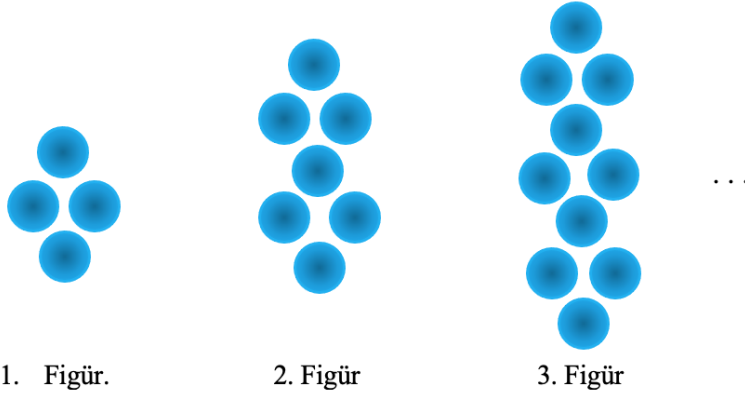
Etkinlik 3 araştırmacı tarafından ilgili literatür ve kuramsal çerçeve doğrultusunda uzman görüşü alınarak hazırlanmıştır. Alınan uzman görüşü doğrultusunda etkinlikte herhangi bir düzenlemeye gidilmemiştir. Etkinlikte öğrencilere günlük yaşam ile ilişkili bir problem

durumu verilmiştir. Geliştirilen etkinlik, “sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimlerini bulur” kazanımına yöneliktir.

Etkinliğin (a) ve (b) maddesinde öğrencilerden örüntünün terimleri üzerinden bir ortaklık keşfederek verilen terimlere yakın bir terim olan 5. terimi elde etmeleri istenmektedir. Bu noktada öğrencilerin nasıl bir strateji geliştireceği önem arz etmektedir. Öğrenciler verilen şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne dönüştürerek ardışık terimler arası artış miktarını kullanarak 5. ve 10. terime ulaşabilirler. Bu noktada öğrenciler terimler arasında nümerik ilişkiler kurarak örüntünün belirli bir bölümü üzerine odaklanmaya yönelik aritmetik bir genelleme gerçekleştirebilirler. Etkinliğin (c) maddesinde ise, örüntüye dair herhangi bir terimi doğrudan belirtebilmek için anlamlı ve geçerli bir cebirsel kural oluşturmaları beklenmektedir. Bu noktada öğrencilerin kuralı elde etme sürecinde örüntüye dair hangi ilişkileri referans alarak cebirsel kuralı oluşturdıkları incelenmek istenmektedir. Öğrencilerin belirlediği yöntem veya stratejiler genelleme süreçlerinin incelenmesi adına önem arz etmektedir.

Etkinlik 4

Bir dans yarışmasına hazırlanan Eylül, dans figürlerinin adım sayısını ve adımların yerini sık sık unutmaktadır. Gösteriye yakın bir zaman kala Eylül’ün aklına bir fikir gelmiştir. Dans figürlerini aşağıdaki gibi örüntüye dökünce çok daha kurallı çalışabildiğini fark etmiştir.



Buna göre;

- Eylül’ün 4. Figüründe basması gereken kaç daire vardır? Çözümünüzü açıklayınız.
- Eylül’ün 10. Figüründe basması gereken kaç daire vardır? Çözümünüzü açıklayınız.
- Eylül’ün herhangi bir adımında basması gereken daire sayısını veren bir kural bulunuz ve bulduğunuz kuralı açıklayınız.

Etkinlik 4, araştırmacı tarafından ilgili literatür ve kuramsal çerçeve doğrultusunda uzman görüşü alınarak hazırlanmıştır. Alınan uzman görüşü doğrultusunda etkinlikte herhangi

bir düzenlemeye gidilmemiştir. Etkinlikte öğrencilere günlük yaşam ile ilişkili bir problem durumu verilmiştir. Geliştirilen etkinlik, “sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimlerini bulur” kazanımına yöneliktir.

Etkinliğin (a) ve (b) maddesi öğrencilerin şekil temsili olarak verilen örüntüye dair ortak özellikleri belirleyerek bu doğrultuda örüntünün diğer terimlerini elde etmelerine yöneliktir. Etkinliğin (c) maddesinde ise öğrencilerden herhangi bir terimi doğrudan belirtmek için genel bir kural oluşturmaları istenmektedir. Bu noktada öğrencilerin bir genelleme gerçekleştirmeleri için örüntüye dair belirledikleri ortak özellik üzerinden anlamlı ve geçerli bir hipotez geliştirmeleri ve bu hipotezi cebirsel bir yapıda ifade etmeleri beklenmektedir. Öğrencilerden çözümlerini gerekçeleriyle açıklamaları istenerek örüntüye dair çözümlerinin altında yatan cebirsel nedenleri açığa çıkarmaları beklenmektedir. Bu noktada anlamlı ve geçerli ilişkiler kurarak örüntüye ait ortak özellikleri belirleyebilen bir öğrenci genelleme sürecini cebirsel genelleme sürecinin ilk bileşeni olan “örüntüdeki ortaklığı yakalama, anlama veya idrak etme” eylemini sergileyebilmektedir.

Etkinlik 5

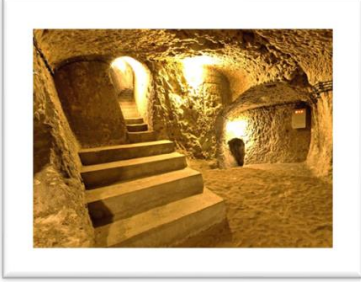
Beren belli bir kurala göre giderek artan 2, 4, 6, 8,... sayı örüntüsünü kullanarak masa örtüsüne desen oluşturacaktır. Ancak bir türlü örüntüyü hangi modeli kullanarak yapacağını karar verememektedir. Beren’e yaşadığı problemde yardımcı olunuz.

- Masa örtüsünün örüntüsüne uygun bir model oluşturarak çiziniz.
- Örüntünün 8. ve 16. adımıdaki sayıyı bulunuz. Çözümünüzü açıklayınız.
- Herhangi bir adımdaki bulunacak sayıyı veren bir kural geliştiriniz ve bulduğunuz kuralı açıklayınız.

Etkinlik 5, araştırmacı tarafından ilgili literatür ve kuramsal çerçeve doğrultusunda uzman görüşü alınarak hazırlanmıştır. Alınan uzman görüşü doğrultusunda etkinlikte herhangi bir düzenlemeye gidilmemiştir. Etkinlikte öğrencilere günlük yaşam ile ilişkili bir problem durumu verilmiştir. Geliştirilen etkinlik, “sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimlerini bulur” kazanımına yöneliktir. Etkinlik 5, genel kuralı “ $2n$ ” olan bir sayı örüntüsü olarak geliştirilmiştir. Bu etkinlikte öğrencilerden örüntüye uygun bir model oluşturmaları (a), verilen terimler arasında bir ilişki ve ortaklık belirleyerek örüntüyü sonlu terimlere devam ettirmeleri (b) ve belirledikleri ilişkiyi notasyon kullanarak ifade etmeleri beklenmektedir (c). Bu noktada burada öğrencilerin cebirsel genelleme sürecinin bileşenleri olan “örüntüdeki ortak özelliği yakalama, anlama veya idrak etme (i), “belirlenen ortak özelliği dikkate alınan örüntünün diğer terimlerine genelleme (ii)”

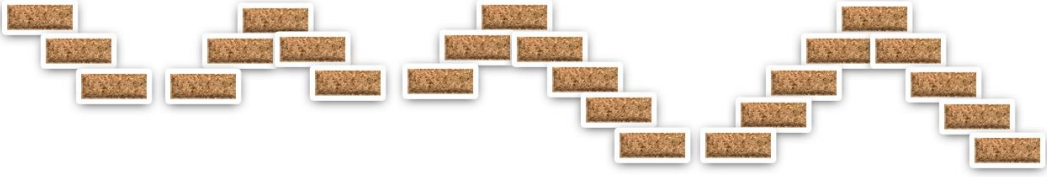
ve “örüntünün herhangi bir terimini doğrudan belirtmek için cebirsel bir kural elde etme (iii)” bileşenlerini nasıl sergiledikleri ve düşünme biçimleri ilgili bileşenler üzerinden incelenmek istenmektedir. Ayrıca öğrencilerden verilen sayı örüntüsüne ilişkin anlamlı ve geçerli bir model oluşturmaları, bu doğrultuda öğretim öncesi “örüntü” kavramını zihinlerinde nasıl yapılandırdıkları açığa çıkarılmak istenmiştir.

Etkinlik 6



Aslı ailesiyle birlikte Kapadokya'daki Yeraltı Şehri'ni gezmeye Ürgüp'e girmiştir. Yeraltı mağaralarına giren Aslı dar geçitleri geçip merdivenlerden inerek mağaranın en derin kısmına ulaşmaya çalışmaktadır. Her geçitte giderek artan merdivenler Aslı'nın çok dikkatini çekmiştir. Bir süre sonra, bir sonraki geçitteki merdiven sayısını hesaplamaya başlamıştır.

Aşağıda Yeraltı Şehri'nde bulunan merdivenlerin düzeni ile ilgili örüntü görmektesiniz.



1. Geçit 2. Geçit 3. Geçit 4. Geçit

Buna göre;

- Aslı 4. Geçitten geçerken kaç adet merdivene basacaktır? Cözümünüzü gerekçeleriyle açıklayınız.
- Aslı 12. Geçitten geçerken kaç adet merdivene basacaktır? Cözümünüzü gerekçeleriyle açıklayınız.
- Aslı'nın herhangi bir geçitten geçerken basacağı merdiven sayısını veren bir kural bulunuz ve bulduğunuz kuralı gerekçeleriyle açıklayınız.

Etkinlik 6, araştırmacı tarafından ilgili literatür ve kuramsal çerçeve doğrultusunda uzman görüşü alınarak hazırlanmıştır. Alınan uzman görüşü doğrultusunda etkinlikte herhangi bir düzenlemeye gidilmemiştir. Etkinlikte öğrencilere günlük yaşam ile ilişkili bir problem durumu verilmiştir. Geliştirilen etkinlik, “sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimlerini bulur” kazanımına yöneliktir.

Etkinliğin (a) ve (b) maddeleri, gözlemlenmek istenen hedef dahilinde yapısal olarak birbirlerine benzemektedir. Öğrencilerden verilen şekil örüntüsüne dair model üzerinden değişen veya değişmeyen kısımlar doğrultusunda bir ortak özellik belirlemeleri ve bu ortak

özellği gerekçelendirmeleri beklenmektedir. Diğer etkinliklerden farklı olarak bu etkinlikte verilen örüntü her bir adımda farklı bir yöne büyümektedir. Öğrencilerden ilk terimi inceledikten sonra ikinci terim ile arasında ‘*merdivenin sol tarafına 2 merdiven daha eklenmiş*’ gibi bir çıkarım yapmaları; ikinci terim ile üçüncü terim arasında ‘*merdivenin sağ tarafına 2 merdiven daha eklenmiş*’ çıkarımı doğrultusunda ‘*her bir adımda farklı taraflara 2 merdiven ekleniyor*’ şeklinde bir hipotez geliştirmeleri beklenmektedir. Bu bağlamda verilen şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne dönüştürerek ardışık terimler arası artış miktarına odaklanan öğrenciler nümerik ilişkilere odaklanarak bir genelleme gerçekleştireceklerinden düşünsel süreçlerini aritmetik genelleme bağlamında olgunlaştıracaklardır. Bu yaklaşımdan farklı olarak şekil üzerinde oluşan değişimleri adım sayısı ile ilişkilendirerek bir yaklaşım sergileyen öğrencilerin, düşünsel süreçlerini cebirsel genelleme bağlamında yapılandırıldığı söylenebilir. Etkinliğin (c) maddesinde ise, öğrencilerden fark ettikleri ortak özellik doğrultusunda cebirsel olarak anlamlı ve geçerli bir kural elde etmeleri istenmektedir.

Etkinlik 7

Ailesiyle birlikte bilgisayarından ilk astronotlu roketin uzaya fırlatılışını canlı yayın olarak izleyen Aslan, yeryüzünden yükseldikçe hava sıcaklığının düştüğünü bilmektedir. Bunun sonucundan fırlatılışla ilgili bilgileri araştıran Aslan, roketin yeryüzünden 20 °C hava sıcaklığı ile atıldığını öğrenmiştir.

Roket her 1 km yükseldiğinde sıcaklık 5 derece düştüğüne göre;

- Roket yerden 3 km yükseldiğinde hava sıcaklığı kaç derece olacaktır? Çözümünüzü gerekçeleriyle açıklayınız.
- Roket yerden 100 km yükseldiğinde hava sıcaklığı kaç derece olacaktır? Çözümünüzü gerekçeleriyle açıklayınız.
- Roketin herhangi bir kilometredeki hava sıcaklığının kaç derece olacağını veren genel bir kural bulunuz ve bulduğunuz kuralı açıklayınız.

Etkinlik 7, araştırmacı tarafından ilgili literatür ve kuramsal çerçeve doğrultusunda uzman görüşü alınarak hazırlanmıştır. Alınan uzman görüşü doğrultusunda etkinlikte herhangi bir düzenlemeye gidilmemiştir. Etkinlikte öğrencilere günlük yaşam ile ilişkili bir problem durumu verilmiştir. Geliştirilen etkinlik, ‘*sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimlerini bulur*’ kazanımına yöneliktir. Etkinlik 7,

genel kuralı “ $-5n+20$ ” olan bir sayı örüntüsü olarak geliştirilmiştir. Diğer etkinliklerden farklı olarak bu etkinlikte, herhangi bir şekil veya sayı örüntüsü sunulmadan bir günlük hayat durumu problem üzerine aktarılmıştır. Ayrıca bu etkinlikte önem arz eden bir diğer nokta ise öğrenciler tarafından “örüntü” kavramının öğretim öncesi zihinlerinde nasıl yapılandırıldığına analiz edilmesidir. Yapılan araştırmalar incelendiğinde öğrencilerin örüntülerin her zaman “artarak” devam etmesi gerektiği ile ilgili bir kavram yanılgısına sahip oldukları tespit edilmiştir. Bu bağlamda öğrencilerin problemi zihinlerinde yapılandırma süreçleri incelenerek gerçekleştirilecek öğretimle bu yanılgının öğrenciler tarafından açığa çıkan durumları sorgulama yoluyla çelişkiye düşürülerek yok edilmesi amaçlanmaktadır. Etkinliğin (a) maddesinde, öğrencilerden yalnızca ilk terimi verilen örüntünün diğer terimlerini açıklanan “her 1 km yükseldiğinde sıcaklık 5 derece düştüğüne göre” hipotezi üzerinden elde etmeleri beklenmektedir. Etkinliğin (b) maddesinde ise, örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirmede daha kısa ve mantıklı bir çözüm yolu (cebirsel bir kural elde etme) bulma ihtiyacı hissedip hissetmediklerinin gözlemlenmesi amaçlanmıştır.

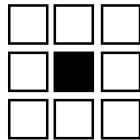
Etkinlik 8

Aşağıdaki resimde siyah kutucuklar bahçeyi, etrafındaki beyaz kutucuklar ise tuğlaları göstermektedir. Her bir bahçenin etrafı bir sıra tuğla ile örülmüştür (Örneğin, 3. Şekildeki uzun kenarı 3 br olan bahçe için 12 tane tuğla kullanılmıştır).

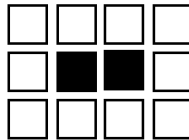
Buna göre;

- Uzun kenarı 12 br olan bahçe için kaç tane tuğla kullanılır?
- Toplam 152 tane tuğla kullanılan bahçenin uzun ve kısa kenarını nasıl bulduğunuzu gösteriniz.
- Herhangi bir şekilde kullanılması gereken toplam tuğla sayısını veren bir kural geliştiriniz ve geliştirdiğiniz kuralı açıklayınız.

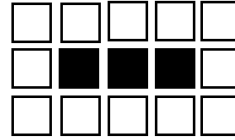
(a ve b sorularının çözümlerini çizerek, tablo yaparak, sayısal ifade kullanarak yapınız.)



Şekil 1



Şekil 2



Şekil 3

Kriegler (2008) tarafından geliştirilen etkinlik araştırmanın kuramsal çerçevesine uygun olduğundan dolayı Cebirsel Düşünme Süreçleri Ön Değerlendirme Formu'na dahil edilmiştir. Problem teması, “gerçekçi” problem durumlarının başlangıç noktası olarak sunulması amacıyla dahil edilen etkinlikte bahçede bulunan birim kare sayısı ile etrafında bulunması gereken tuğla (birim kare) sayısı arasında ilişki kurulması beklenmektedir. Ayrıca öğrencilerden çözümlerinin altında yatan cebirsel nedenleri gerekçelendirmeleri istenerek düşünsel süreçlerinin açığa çıkarılması hedeflenmektedir. Bu noktada öğrencilerden matematiksel çözümlerini tablo, şekil veya model gibi farklı temsiller üzerinden açıklayarak matematiksel fikirlerini derinleştirmeleri istenmektedir.

Etkinlik 9

Derya Öğretmen, öğrencilerine bir başarı testi uygulamaktadır. Öğrencilerine yapabildiği doğru sayısına göre çikolata verecektir. Örneğin; 2 soruyu doğru yapan 9 adet, 3 soruyu doğru yapan 11 adet, 4 soruyu doğru yapan 13 adet çikolata alacaktır.

Buna göre;

- 6 soruyu ve 13 soruyu doğru yapan öğrenciler kaç tane çikolata alacaktır? Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.
- 60 soruyu ve 80 soruyu doğru yapan öğrenciler kaç adet çikolata alabilir? Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.
- Herhangi bir sayıda soruyu (n tane soru) doğru cevaplayan öğrencilerin kaç adet çikolata alacağını veren bir kural bulunuz ve bulduğunuz kuralı açıklayınız.

Ek Soru?

Yukarıda verilen probleme dair bir örüntü modeli geliştiriniz. Modeli geliştirirken neleri dikkate aldığınızı açıklayınız.

Etkinlik 9 ilgili ve gerekli izinler alınarak hazır alınmıştır. Etkinlik Rukiye Aslan (2011) tarafından yazılan “Örüntü Kavramına İlişkin Öğrenci Güçlüklerini Gidermeye Yönelik Bir Ders Tasarımı” adlı yüksek lisans tezinden alınmıştır. Çalışmanın örneklemini yedinci sınıf öğrencileri oluşturmaktadır. Etkinlik, genel terimi “ $n+7$ ” olan bir örüntünün günlük yaşam problemi bağlamına entegre edilmiş halidir. Öğrencilerin günlük yaşamlarında karşılarına çıkabilecek bir problem durumu bağlamında örüntüleri keşfetme ve ilişkileri fark etme ve yorumlama yaklaşımları incelenecektir. Bu problemde diğer etkinliklerden farklı olarak örüntü ikinci terimden başlatılmıştır. Bu noktada amaç, öğrencilerin örüntüye dair ilişki ve yapıları algılama durumlarını ve oluşan bu algıda belirli bir esneklik durumunun olup olmadığının incelenmesidir. Ayrıca çalışma da öğrencilerin örüntü genelleme süreçlerinin analiz edilmesi adına Radford (2008) tarafından geliştirilen çerçeve kullanılmıştır.

Etkinliğin Öğretim Sonrası Cebirsel Düşünme Süreçleri Formu'na dahil edilmesinin sebebi ilgili yüksek lisans tezi kapsamında aynı öğrenci seviyesine uygun olarak geliştirilip uygulanması ve çalışmanın (Aslan, 2011) amacının ve konusunun yedinci sınıf öğrencilerinin örüntü genelleme süreçleri incelenmesi olmasından dolayı araştırmanın amacı ve kuramsal çerçevesine uygunluğu doğrultusunda etkinliğin dahil edilmesi uygun görülmüştür.

Etkinlik 10



1. adım



2. adım



3. adım

...

Aşağıdaki soruları modelden yararlanarak cevaplayınız.

- Şekilde verilen örüntüye göre 8 tane kare için kaç tane çubuk kullanılır? Çubuk sayısını bulurken hangi işlem yollarını izlediniz?
- 50 tane kare oluşturmak için kaç tane çubuk kullanılır? Çubuk sayısını bulurken hangi işlem yollarını izlediniz? 50 tane kare oluşturmak için kullanılan çubukların sayısını bulabilmek için daha çabuk ve kısa bir yol bulabilir miyiz?
- 8^{20} tane kare kaç tane çubuk ile yapılabilir?
- n tane kare oluşturmak için kaç çubuk kullanılacağını veren bir kural bulunuz ve bulduğunuz kuralı açıklayınız.

Etkinlik 10 ilgili ve gerekli izinler alınarak hazır alınmıştır. Etkinlik Rukiye Aslan (2011) tarafından yazılan “Örüntü Kavramına İlişkin Öğrenci Güçlüklerini Gidermeye Yönelik Bir Ders Tasarımı” adlı yüksek lisans tezinden alınmıştır. Çalışmanın örneklemini yedinci sınıf öğrencileri oluşturmaktadır. Etkinlikte genel kuralı “ $3n+1$ ” olan bir şekil örüntüsü verilmiştir. Etkinliğin (a), (b) ve (c) maddeleri yapı itibarıyla birbirine benzetmektedir ve örüntünün diğer terimlerinin elde edilmesi ile ilgilidir. (d) maddesinde ise şekil üzerinden belirlenen ortak özelliğin cebirsel olarak ifade edilmesi beklenmektedir.

Etkinliğin Öğretim Sonrası Cebirsel Düşünme Süreçleri Formu'na dahil edilmesinin sebebi ilgili yüksek lisans tezi kapsamında aynı öğrenci seviyesine uygun olarak geliştirilip uygulanması ve çalışmanın (Aslan, 2011) amacının ve konusunun yedinci sınıf öğrencilerinin örüntü genelleme süreçleri incelenmesi olmasından dolayı araştırmanın amacı ve kuramsal çerçevesine uygunluğu doğrultusunda etkinliğin dahil edilmesi uygun görülmüştür.

3.3.2. Öğretim Sonrası Cebirsel Düşünme Süreçleri Değerlendirme Formu'nun Geliştirilmesi

Araştırmada veri toplama aracı olarak öğrencilerin öğretim sonrası cebirsel düşünme süreçlerinin analizi adına geliştirilen “Öğretim Sonrası Cebirsel Düşünme Süreçleri Değerlendirme Formu” 10 adet etkinlik içermektedir. On etkinliğin altısı araştırmacı tarafından hazırlanmıştır. Geriye kalan dört etkinlik ilgili literatür taranarak ve gerekli izinler alınarak hazır alınmıştır. Öğretim Sonrası Cebirsel Düşünme Süreçleri Değerlendirme Formu Ek-4’te verilmiştir. Etkinliklere ilişkin bilgiler aşağıda verilmektedir.

Genel olarak etkinlikler örüntü konusu bağlamında cebirsel genelleme yapmayı destekleyecek şekilde hazırlanmıştır. Bu çalışma kapsamında gerçekleştirilen öğretim sonrası, öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerinin incelenmesine ilişkin hazırlanan etkinliklerin cebirsel genellemeye ulaşma sürecinin ana bileşenleri olan; örüntülerdeki ilişkileri arama, ilişkileri ifade etme, başka bir duruma transfer etme ve bu durumu genelleme becerilerini irdelemek amacıyla hazırlanmıştır. Forma ilişkin her bir etkinliğin neyi amaçladığı, öğrencilerden gerçekleştirmesi beklenen eylemler ve öğrencilerin etkinliklere vereceği olası cevaplar karşılığında nasıl bir yol izleneceğine temel teşkil etmesi adına etkinliklere ilişkin açıklamalar yapılmıştır. Ayrıca etkinliklerin ortaokul matematik dersi öğretim programında bulunan hangi kazanımları içerdiği etkinliğin altında verilmiştir. Öğretim sonrası cebirsel düşünme süreçlerinin analizine ilişkin hazırlanan etkinlikler genel olarak,

- ⑩ Etkinlikte verilen örüntünün matematiksel bağlamı anlamalarını ve yorumlamalarını,
- ⑩ Verilen örüntülerdeki ilişkileri aramalarını ve belirlenen ilişkileri ifade etmelerini,
- ⑩ Örüntülerdeki ortaklığı yakalama, anlama ve idrak etmelerini,
- ⑩ Örüntüde fark edilen ortak özelliği başka bir duruma transfer etmelerini,
- ⑩ Bu ortak özelliği dikkate alınan örüntünün veya sayı dizisinin tüm terimlerine genellemelerini,
- ⑩ Örüntünün herhangi bir terimini doğrudan belirtmek için bir kural veya şema belirtme sürecinin fark etmelerini,
- ⑩ Öğrencilerin örüntülerdeki ortaklığı ve ilişkileri fark ederek cebirsel olarak düşünme süreçlerini anlamlandırmalarını, amaçlamaktadır.

Hangi etkinliğin hangi hedefi nasıl amaçladığı ve etkinliğe ilişkin öğrencilerden beklenen davranışlar etkinliğin verildiği bölümde detaylı olarak açıklanmaktadır.

Hedeflenen amaçlar doğrultusunda ilgili literatür taraması ile hazırlanan etkinliklerin kuramsal çerçeveye uygunluğuna ilişkin iki matematik eğitimcisiinden uzman görüşü ve ortaokulda görev yapan üç matematik öğretmenin görüşleri alınmıştır. Alınan uzman görüşü sonrası uzmanların “Öğretim Sonrası Cebirsel Düşünme Süreçleri Değerlendirme Formu’nda bulunan etkinliklerin araştırmanın amacına ve ilgili kazanımlara uygun olduğunu düşünüyorum” dönütü sonrası, Öğretim Sonrası Cebirsel Düşünme Süreçleri Değerlendirme Formu’nda bulunan etkinliklerde herhangi bir düzenlemeye gidilmemiştir.

Etkinlik 1



Ailesi bir haftalık tatile giden Aslan bir hafta boyunca evde yalnız kalacağı için her gün en sevdiği akşam öğünlerinde pizza yemeye karar vermiştir.

- 1) Yukarıda Aslan’ın ilk 3 gün boyunca yediği pizza miktarlarını görmektesiniz.
 - a) Aslan her gün pizzaları belli bir kurala göre yediğine göre, gün sayısı ile yediği pizza dilim miktarı arasında nasıl bir ilişki vardır?
 - b) Buna göre Aslan 7. gün pizzanın kaçta kaçını yemiştir?
- 2) Yukarıda verilen probleme göre tablodaki boşlukları doldurunuz.

Terim (Gün)	1.	2.	3.	4.
Kesir	$\frac{1}{2}$			

- a) Doldurduğunuz tabloda dikkatinizi çeken bir nokta var mı? Açıklayınız.
- b) Yukarıdaki kesirlerin listesi aynı örüntüyle devam ederse 0.95’e eşit olan terim kaçınıcı terim olur?
- c) Buna göre herhangi bir terimde (n. terim) bulunacak kesrin değerini veren bir kural bulunuz. Çözümünüzü gerekçelendirerek açıklayınız.

Etkinlik 1 araştırmacı tarafından ilgili literatür ve kuramsal çerçeve doğrultusunda uzman görüşü alınarak hazırlanmıştır. Alınan uzman görüşü doğrultusunda etkinlikte herhangi bir düzenlemeye gidilmemiştir. Etkinlikte öğrencilere günlük yaşam ile ilişkili bir problem durumu verilmiştir. Öğrencilerden bir bölümü verilen örüntüye ait ortak özelliğin fark edilerek örüntü de bulunan ilişkilerin keşfedilmesi beklenmektedir. Örüntü de bulunan ilişkiyi keşfeden

öğrencilerin bunu tablo, şekil gibi farklı temsillerle göstermeleri beklenmektedir. Öğrencilere verilen tablonun örüntüye ilişkin ortaklıkları fark etmeyi kolaylaştırması beklenmektedir. Ayrıca öğrencilere herhangi bir terimde bulunacak kesrin değeri sorularak fark edilen ortak özelliğin transfer edilerek hipotez geliştirme ihtiyacı duymaları beklenmektedir. Geliştirilen etkinlik, *“sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimlerini bulur”* kazanımına yöneliktir.

Etkinliğin 1) öncülüne ait (a) maddesi ile 2) öncülüne ait (a) ve (c) maddeleri yapı itibariyle birbirine benzemektedir ve örüntünün herhangi bir adımını bulmada öğrencilerin hangi tür genelleme gerçekleştireceklerini yansıtmakla ilgilidir. Her iki maddede de öğrencilerden örüntüye ilişkin ortaklıkları fark ederek örüntünün sonraki terimlerine genellemeleri ve bu doğrultuda cebirsel olarak anlamlı bir genel kural oluşturmaları beklenmektedir. Örüntüde öğrencilerin görsel ve gerçek hayat problemi olarak sunulan örüntünün gün sayısı ile yenilen pizza dilim miktarı arasında, gün sayısı ile pay ve payda arasındaki ilişki ve ortaklığın fark edilerek cebirsel genelleme gerçekleştirmesi beklenmektedir. Örüntünün bu şekilde sunulmasının sebebi öğrencilere cebirsel genelleme sürecine yönlendirerek sayarak ilerleme ya da terimler arası sabit farka odaklanma stratejilerine engel olmaktır. Cebirsel genelleme süreci geçiren öğrenciler, örüntüdeki gömülü matematiği keşfederek örüntüde yer alan miktarları belirleyebilir, cebirsel sembollerden yararlanarak şekil üzerinde ilişkileri fark edebilir ve genel kuralı bulup bu kuralı cebirsel bir gösterimle ifade ederek genelleme sürecini tamamlayabilirler. Aynı amacın farklı alt maddelerle sorulmasının sebebi ise, birine doğru cevap verip diğerine yanlış cevap veren öğrencilerin çözüme ilişkin düşünsel süreçlerini tekrar gözden geçirerek farklı alt maddelere ait çözümlerini tekrar sorgulamaya yönlendirilmelerini sağlamaktır.

Etkinliğin 1) öncülüne ait (b) maddesi ve 2) öncülüne ait (b) maddesi yapı itibariyle birbirine benzemektedir ve örüntüye ilişkin ortaklıkları farklı temsiller üzerinden fark etmesi ile ilgilidir. 1) öncülüne ait (b) maddesinde öğrenci, modelleyerek örüntünün 7. adımına ulaşabilir veya 2) öncülünde tablo üzerinden örüntüye ilişkin ortaklıkları fark edebilir.

Ayrıca problemin tüm maddelerinde öğrencilerden çözümlerini gerekçelendirerek açıklamaları istenmiştir. Bu bakımdan öğrencilerin tüm maddelere yapacakları açıklamaların ikna ediciliği genelleme süreçlerinin analiz edilmesi bakımından önem arz etmektedir. Öğrencilerin cebirsel genelleme sürecini gerçekleştirebilmeleri için kuramsal çerçeve doğrultusunda açıklamalarının gerekçelerini ve cebirsel nedenlerini barındırması gerekmektedir.

Etkinlik 2

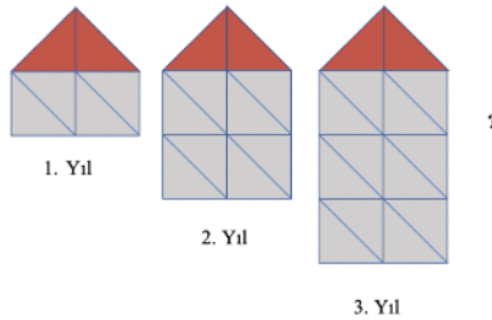


Mevcut depreme dayanıksız, ekonomik ömrünü tamamlamış binaların yaşanabilir, depreme dayanıklı, sosyal donatıları otoparkı, yeşil alanları olan kaliteli yaşam alanlarına dönüştürme sürecine (projesine) **kentsel dönüşüm** denir. Kentsel dönüşümün bu tür yararları olmasına rağmen bu süreç içinde bazı ailelerin mahallelerinden başka yerlere de taşınması gerekmektedir.

- 1) İstanbul'da kentsel dönüşüme girecek mahallelerden biri de Kayışdağı mahallesidir. Bu süreçte mahalleden taşınacak aile sayısı aşağıdaki tabloda verilmiştir. **Yıl sayısı** ile **taşınan aile sayısı** arasındaki ilişkiyi (örüntü kuralını) bulabilir misin?

Yıl Sayısı	Taşınan Aile Sayısı
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15
.	.
.	.
Y	?

- 2) Kentsel dönüşüm projesi kapsamında inşa edilen apartmanlar şekildeki gibidir. **Yeni yapılan apartmanların yüksekliği her yıl biraz daha artmaktadır.**



Şekildeki üçgenler (çatıdakiler de dahil) apartmandaki daireleri göstermektedir. **Örneğin**, 1. Yıl yapılan 6 daire vardır.

- a) 4. yılda yapılan bir apartman nasıl olacaktır? Örüntü blokları yardımıyla oluşturunuz.
- b) Apartmanların her yıl 1 kat yükseldiğini düşünürsek, 2., 3. ve 4. yılda apartmanda kaç daire olacaktır? Peki ya n yıl sonra? (Örüntü kuralını bulunuz.)

Yıl Sayısı	Daire Sayısı
1	6
2	
3	
4	
.	.
.	.
.	.

- 3) Ataşehir Belediyesi tarafından hazırlanan kentsel dönüşüm planına göre hangi haftada kaç sokakta dönüşüm gerçekleştirileceği tabloda gösterilmektedir.

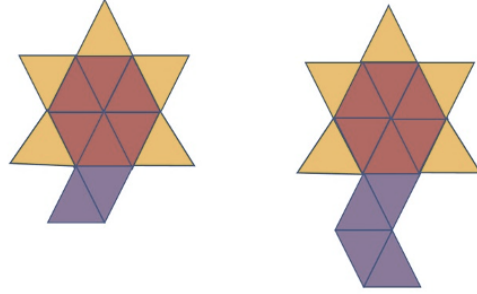
- a) Bu plana göre 4. ve 5. Hafta da düzenlenen sokak sayısı kaç olacaktır?
- b) Peki ‘’m’’ hafta sonra kaç olacaktır? (Örüntü kuralını bulunuz.)

Hafta Sayısı	Sokak Sayısı
1	3
2	5
3	7
4	
5	
.	
.	
M	...

Ek sorular:

1) Kentsel dönüşüm projesinde bahçe düzenlemesi için çiçeklendirme yapılacaktır. Ekilen çiçeğin sapının günlük uzama miktarı aşağıda gösterildiği gibidir.

3. ve 4. Günde çiçeği oluşturmak için kaç üçgen kullanmak gerekir? Peki ya s gün sonra?



Gün Sayısı	Kullanılan Üçgen Sayısı
1	
2	
3	
4	
.	
.	
s	...

Etkinlik 2 ilgili ve gerekli izinler alınarak hazır alınmıştır. Etkinlik Nil Arabacı (2016) tarafından yazılan ‘*Matematik Etkinliklerinin Yedinci Sınıf Öğrencilerinin Cebirsel Düşünme ve Öğrenmesine Etkileri*’ adlı yüksek lisans tezinden alınmıştır. Bu etkinlik (Kentsel Dönüşüm) TUBİTAK destekli 215K049 numaralı proje kapsamında geliştirilip uygulanmıştır. Araştırma örneklemini İstanbul ili Kayışdağı ilçesindeki bir devlet ortaokulunun 7. sınıflarından toplam 56 öğrenci oluşturmaktadır. Etkinliğin geçerliliği sağlamak amacıyla araştırmacı TUBİTAK Proje Ekip Üyelerine danışılmıştır. Güvenirliği sağlamak içinse Paralel (Eşdeğer) Testler Yöntemi uygulanmıştır. Asıl uygulama öncesi hem deney hem kontrol grubuna pilot çalışma yapılmıştır. Yapılan uygulamalar doğrultusunda güvenirlilik katsayısı 0.795 olarak elde edilmiştir. Pilot çalışmadan 3 ay sonra kontrol ve deney grubuna etkinlik tekrar uygulanmıştır. Bu noktada güvenirlilik katsayısı 0.954 olarak elde edilmiştir.

Etkinliğin Öğretim Sonrası Cebirsel Düşünme Süreçleri Formu’na dahil edilmesinin sebebi ilgili yüksek lisans tezi kapsamında aynı öğrenci seviyesine uygun olarak geliştirilip uygulanması ve çalışmanın (Arabacı, 2016) amacının ve konusunun yedinci sınıf

öğrencilerinin cebirsel düşünme süreçlerinin incelenmesi olmasından dolayı araştırmanın amacı ve kuramsal çerçevesine uygunluğu doğrultusunda etkinliğin dahil edilmesi uygun görülmüştür.

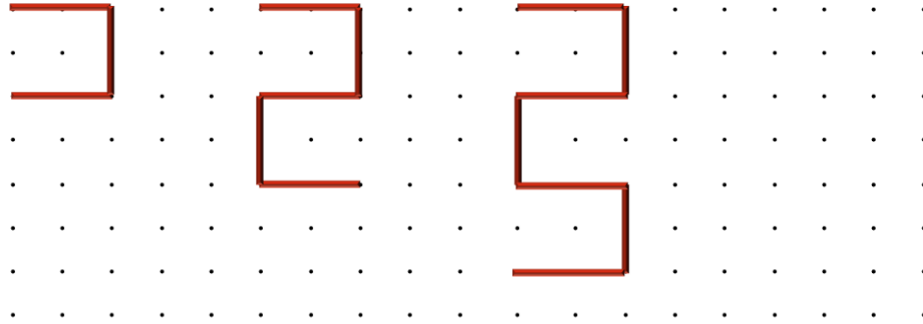
Etkinlik 3

Restorasyon, kültürel hazinelerin korunması, geleceğe aktarılmasını ve tarihi yapıların harap olan bölümlerinin daha fazla tahrip olmasını önlemek için aslına uygun biçimde yenilemek amacıyla yapılan çalışmalardır.

Namazgah Hamamı Restorasyon Projesi

Antik Smyrna Agorası kazı alanının güneyinde, birinci derece arkeolojik sit alanı içerisinde yer alan ve 17. yüzyıla tarihlenen Namazgah Hamamı, soyunmalık, ılık ve sıcaklık (çift halvetli) ana bölümlerinden oluşan bir çift hamamdır. Bölge içerisinde yer alan birçok hamam yapısı arasında, büyüklüğü ve korunmuş özgün nitelikleri ile ön plana çıkmaktadır.

1) Hamama ait tarihi eserler kapalı bir alanda sergilenmektedir. Sergiye girişler bir şifre yardımıyla olmaktadır. Ancak güvenlik açısından şifre her deneme de belli bir kurala göre değişmektedir. Aşağıda ilk üç denemedeki şifreler görülmektedir.



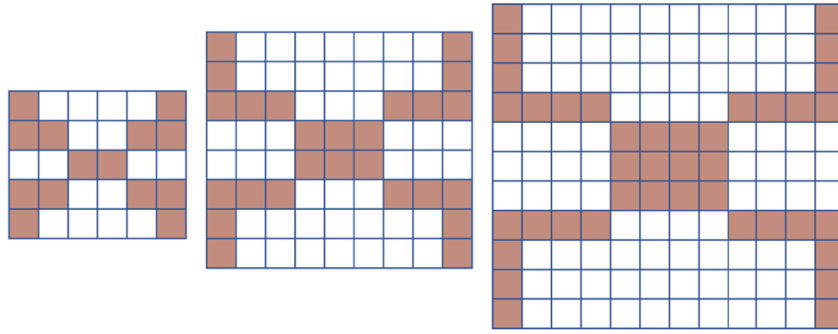
- Buna göre tarihi hamama gelen 20. kişi şifre girerken kaç adet çubuk kullanılmalıdır?
Çözümünüzü açıklayınız.
- Hamama gelen n. kişinin şifreyi girerken kaç çubuk kullanacağına dair kuralı yazınız.
Çözümünüzü açıklayınız.

Etkinlik 3 araştırmacı tarafından ilgili literatür ve kuramsal çerçeve doğrultusunda uzman görüşüne başvurularak hazırlanmıştır. Uzman görüşü sonrası etkinlikte herhangi bir düzenlemeye gidilmemiştir. Etkinlik 1) ve 2) olmak üzere iki öncülünden oluşmaktadır. Her bir öncülün kendi içerisinde alt maddeleri bulunmaktadır.

2) Kamulaştırma çalışmaları kapsamında İzmir Büyükşehir Belediyesi mülkiyetine geçen hamam yapısının, özgün işlevinde yerli ve yabancı ziyaretçilere hizmet vermek üzere restore edilmesi kararlaştırılmış ve restorasyon yapım çalışmaları 2016 yılının sonunda başlamış ve 2019 yılında tamamlanmıştır.

Namazgah Hamamı yanındaki konumlanan ve iç avlusu bir dönem açık hava sineması olarak hizmet vermiş olan eski bir han kalıntısı da yapım çalışmaları kapsamında koruma altına alınmıştır.

Aşağıda hamamın avlusunda kullanılacak olan duvar motiflerinden birinin ilk 3 adımını görmektesiniz.



- Buna göre duvar motifinin 5. Adımında;
 - Toplam kaç adet kare bulunur? Çözümünüzü açıklayınız.
 - Taralı kaç adet kare bulunur? Çözümünüzü açıklayınız.
- Duvar motifinin n. adımındaki **toplam kare sayısını** veren kuralı bulunuz. Çözümünüzü açıklayınız.
- Duvar motifinin n. adımındaki **taralı kare sayısını** veren kuralı bulunuz. Çözümünüzü açıklayınız.

Etkinlik 3 şekil örüntüsü olarak hazırlanmış problemlerden biridir. Etkinlik aynı günlük yaşam durumu üzerinden sunulan iki farklı problemi içermektedir. Bu problemde öğrencilerin, modelden yararlanarak yakın ve uzak terimleri hesaplamaları ve örüntüye ait genel bir kural oluşturmaları beklenmektedir. Ayrıca öğrencilerden bir bölümü verilen örüntüye ait ortak özelliğin fark edilerek örüntü de bulunan ilişkilerin keşfedilmesi beklenmektedir. Geliştirilen etkinlik, ‘‘sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimlerini bulur’’ kazanımına yöneliktir.

Etkinliğin 1) öncülü, cebirsel genel kuralı $2n+1$ olan bir örüntü olarak hazırlanarak noktalı kağıt üzerine çubuklar ile modellenmiştir. 1) öncüle ait (a) maddesi örüntünün sonlu bir adıma devam ettirilmesinde ve genel kuralın bulunmasında kullanılma durumu incelenmek istenmektedir. Örüntüye ait ortak özelliğin fark edilme durumunun belirlenmesi ve fark edilen ortak özelliğin diğer terimlere genellenmesi beklenmektedir. Her bir alt maddede öğrencilerin çözümlerini açıklamaları istenmiştir. Bu bağlamda örüntüye ilişkin diğer terimlerin

bulunmasında kullanılan süreçler incelenecektir. Bu süreç içerisinde öğrencilerin daha kısa ve kullanışlı bir çözüm yolu bulma arayışında olup olmadıkları kullanılan stratejiler ile gözlemlenecektir.

Aynı öncüle ait (b) maddesinde ise öğrencilerden, örüntüye ilişkin ortaklıkları fark ederek örüntünün sonraki terimlerine genellemeleri ve bu doğrultuda cebirsel olarak anlamlı bir genel kural oluşturmaları beklenmektedir. Örüntüde öğrencilerin görsel ve gerçek hayat problemi olarak sunulan örüntünün hamama kaçınıcı kişi olarak girildiği ile çubuk sayısı arasındaki ilişki ve ortaklığın şekil üzerinden fark edilerek cebirsel genelleme sürecinin gerçekleştirilmesi beklenmektedir. Cebirsel genelleme sürecini geçiren bir öğrenci bu noktada kişi numarası ile yatay ve dikey pozisyonda bulunan çubuklar arasında bir ilişki kurabilir ve yapıya ilişkin ortaklıkları fark ederek cebirsel olarak anlamlandırabilir.

Etkinliğe ait 2) öncülünde ise bir duvar motif problemi gerçek yaşamla ilişkilendirilerek sunulmuştur. Bu problem de bir öncekinden farklı olarak iki farklı örüntü birbirini ile ilişkilendirilerek aynı örüntü problemi üzerinden sunulmuştur. Aynı örüntü iki farklı alt madde içermektedir. Bu problem, örüntüyü oluşturan toplam kare sayısı ve taralı kare sayısı üzerinden yapılandırılmıştır. a) maddesinde 5. adımda bulunacak toplam kare sayısı ve taralı kare sayısı sorularak öğrencinin diğer terimleri elde edebilmek için hipotez geliştirme ihtiyacı duyması beklenmektedir. Bu nokta da adım sayısı ile toplam ve taralı kare sayısı arasındaki ilişki, şekil üzerinden ortaklıkların fark edilerek açıklanması beklenmektedir. Bu maddeyi cebirsel olarak anlamlandıran öğrencinin, (b) ve (c) maddelerine ilişkin genel kuralı bulma süreci kolaylaşacaktır. Çünkü (b) ve (c) maddelerini oluşturan herhangi bir adımda bulunan kare sayısı (a) maddesinde bulunan terim ile diğer terimler arasındaki ortaklıkları fark eden öğrenci hipotez geliştirerek geliştirdiği hipotezi kullanarak cebirsel bir kural elde edebilecektir. Cebirsel genelleme sürecini geçiren bir öğrenci bu noktada toplam kare sayısına dikdörtgenin alanı yardımıyla ulaşabilir. Dikdörtgenin kısa ve uzun kenarında bulunan kare sayısını adım sayısı ile ilişkilendirerek bunu diğer terimlere genelleyebilir ve n. adımda bulunacak kare sayısına genelleme yoluyla ulaşabilir.

Cebirsel genelleme sürecini geçirmeyen öğrencilerin, örüntüdeki ortaklığı farklı algılayarak aşırı genelleme yapma olasılıkları vardır. Öğrencide n notasyonunu kavrayamama durumu varsa aritmetik genelleme yaparken cebirsel genelleme yapamayabilir. Ya da örüntüdeki ilişki ve ortaklıkları fark edip bu ilişkiyi sözel olarak ifade edebilirken cebirsel olarak ifade edemeyebilirler. Etkinliği oluşturan tüm problem ve maddeler cebirsel olarak genel bir kuralın bulunmasında öğrencilerin cebirsel, aritmetik genelleme ya da

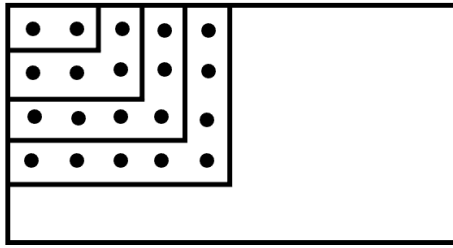
olgunlaşmamış tümevarım süreçlerinin gözlemlenmesi ve değerlendirilmesi amacıyla hazırlanmıştır.

Etkinlik 4

Bodrum Antik Tiyatrosu veya kısaca **Antik Tiyatro**, Klasik Antik Çağ'da, Satrap Mausolos'un hüküm sürdüğü MÖ 4. yüzyılda inşa ettirilmiş ve Türkiye'nin Bodrum şehrinde yer alan bir tiyatro binasıdır. Bodrum şehir merkezinin kuzeyinde bulunan tiyatro, Anadolu'nun en eski tiyatroları arasında yer almaktadır. Yapı günümüzde Bodrum'da gerçekleştirilen pek çok kültürel etkinliğe ev sahipliği yapmaktadır.

Yaz konserleri için mimari adına yeni yapılacak olan tiyatro alanlarında merdivenlere ışıklandırma çalışmaları yapılacaktır.

Mimar Volkan Bey, ışıklandırma çalışmalarının tasarımını aşağıdaki gibi çizmiştir.



Her bir merdivendeki kaç ışık olacağı ve yeri yukarıdaki görselde belirtilmiştir. Örneğin en üst merdivende (1. merdiven) 2 adet ışık kullanılacaktır.

- Buna göre 5. merdivende kaç adet ışık olmalıdır? Çözümünüzü açıklayınız.
100. merdivende kaç adet ışık olmalıdır? Çözümünüzü açıklayınız.
- n. merdivende kaç adet ışık olacağına dair cebirsel kuralı bulunuz. Çözümünüzü açıklayınız.

Etkinlik 4 araştırmacı tarafından ilgili literatür ve kuramsal çerçeve doğrultusunda uzman görüşüne başvurularak hazırlanmıştır. Uzman görüşü sonrası etkinlikte herhangi bir düzenlemeye gidilmemiştir.

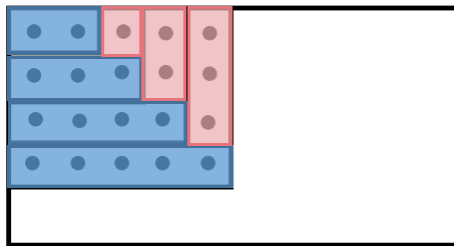
Etkinlik 4 kuralı $2n$ olan şekil örüntüsü olarak hazırlanmış problemlerden biridir. Etkinlik aynı günlük yaşam durumu üzerinden sunulan üç farklı alt madde içermektedir. Bu problemde öğrencilerin, modelden yararlanarak yakın ve uzak terimleri hesaplamaları ve örüntüye ait genel bir kural oluşturmaları beklenmektedir. Ayrıca öğrencilerden bir bölümü verilen örüntüye ait ortak özelliğin fark edilerek örüntü de bulunan ilişkilerin keşfedilmesi beklenmektedir. Geliştirilen etkinlik, *“sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimlerini bulur”* kazanımına yöneliktir.

Etkinliğin (a) maddesinde ilk dört adımı verilen örüntünün bir sonraki adımına ulaşmaları istenmektedir. Araştırma sonuçlarına bakıldığında, öğrencilerin ardışık terimler arasındaki farkı sabit olan örüntüleri devam ettirirken terimler arası sabit farka odaklanarak kolay olan terimler üzerine odaklanarak örüntünün belli bir bölümüne göre genelleme yapma eğilimine gitmekte oldukları görülmüştür (Yeşildere - İmre, 2020). Bu bakımdan öğrenci (a) maddesini cevaplandırırken şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne dönüştürerek ilerleyebilir. Bu bağlamda 2, 4, 6, 8, ... şeklinde giden bir sayı örüntüsü elde edecektir ki; terimler arası sabit farkın 2 olduğunu elde ederek 5. terimi bir önceki terimin üzerine 2 ekleyerek elde edebilir. Bu noktada bu şekilde düşünen bir öğrencinin düşünsel süreçlerinin cebirsel genelleme bağlamında şekillenmediği söylenebilir.

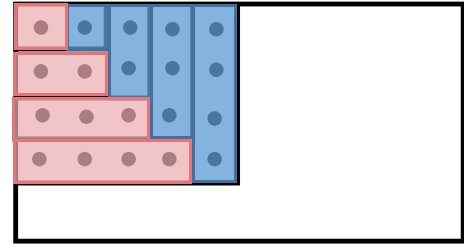
Etkinliğin (b) maddesinde örüntünün uzak bir terimi olan 100. terim sorularak öğrencinin hipotez geliştirme ihtiyacı duyması beklenmektedir. Bu bakımdan sabit farka odaklanarak diğer terimlere ulaşan bir öğrencinin sayma stratejisini kullanmak yerine alternatif yolları sorgulamaya başlayarak örüntüye ait ortaklık ve ilişkileri fark etmesi, bu ortak özelliği dikkate alınan örüntünün veya sayı dizisinin tüm terimlerine genellemesi beklenmektedir.

Etkinliğin (c) maddesinde örüntüyü keşfeden öğrenciler için ise ortaklıkları / ilişkileri belirlediklerine (eğer belirleyebildilerse) dair kanıtlar istenerek ve bu ilişkileri ifade etmeleri beklenmektedir. Örüntünün herhangi bir terimini doğrudan belirtmek için bir kural veya şema şekli belirten bir öğrencinin düşünsel sürecini cebirsel genelleme bağlamında yapılandığı söylenebilir.

Bu bağlamda düşünsel süreçlerini cebirsel genelleme ile şekillendiren bir öğrencinin olası çözümü Şekil 13 ve Şekil 14'teki gibi olabilir.



Şekil 13: Cebirsel genelleme sergileyen bir öğrencinin olası çözümü-1



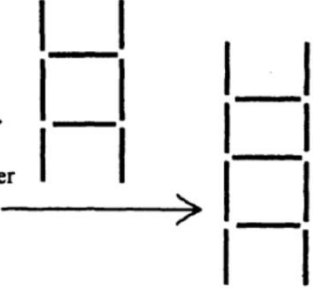
Şekil 14: Cebirsel genelleme sergileyen bir öğrencinin olası çözümü-2

Cebirsel düşünme süreçlerinin analizine ilişkin geliştirilen bir diğer etkinlik Stacey (1989)'den uyarlanmıştır. Soru teması Şekil 15'te görüldüğü gibi kibrit kullanılarak inşa edilen bir merdiven yapımını içermektedir. Stacey (1989) tarafından geliştirilen örüntü, bir şekil örüntüsüdür. Ayrıca her bir terim için "adım sayısı" kavramı "basamak sayısı" olarak ifade edilmiştir. Şekil 15'te orijinal hali verilen örüntü probleminde, yakın ve uzak terimlerin bulunmasını istenirken cebirsel bir kural bulunması istenmemiştir. Sorunun orijinal versiyonu Şekil 15'te görülmektedir.

LADDERS

With 8 matches, I can make a ladder with 2 rungs like this

With 11 matches, I can make this ladder with 3 rungs.



How many matches are needed to make the same sort of ladder with 4 rungs?
 How many matches are needed to make a ladder with 5 rungs?
 I know that it takes 335 matches to make a ladder with 111 rungs. How many matches would be needed to make a ladder with 112 rungs?
 How many matches would you need to make a ladder with 20 rungs?
 How many matches are needed for a ladder with 1000 rungs?

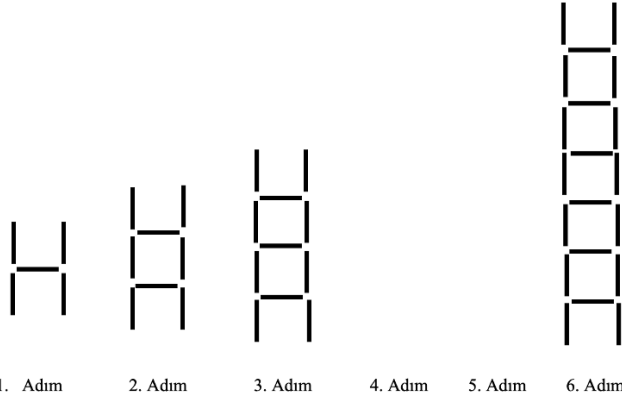
Şekil 15: Etkinlik 5'in orijinal versiyonu (Stacey, 1989, p.148)

Stacey (1989) tarafından geliştirilen etkinlik araştırmanın kuramsal çerçevesine uygun olacak şekilde uyarlanmıştır. Problem teması, "gerçekçi" problem durumlarının başlangıç noktası olarak sunulması amacıyla yeniden düzenlenmiştir. Etkinlikte adım sayısı ile merdivenin oluşturulması için gereken çubuk sayısı arasında ilişki kurulması beklenmektedir. Ayrıca araştırmanın amacı ve kuramsal çerçevesine uygun olarak örüntüyü herhangi bir adıma genelleme süreçlerini inceleyebilme adına örüntünün genel kuralının bulunması beklenen bir alt madde daha eklenmiştir. Yapılan uyarlama sonrasında etkinlik üzerine uzman görüşüne başvurulmuştur. Uzman görüşü sonrası alınan geri dönütler doğrultusunda herhangi bir düzenlemeye gidilmemiştir.

Araştırmacı tarafından ilgili uzman görüşü ve kuramsal çerçeve doğrultusunda uyarlanan sorunun son hali aşağıda verilmektedir.

Etkinlik 5

Azra kitap okumayı çok seven bir çocuktur. Yatmadan her gece masal okumayı ve dinlemeyi de ihmal etmez. Azra'nın o gece okuduğu masalda yeryüzünden gökyüzüne doğru sonsuz giden bir merdivenden bahsedilmektedir.



Azra okuduğu masaldan etkilenecek şekilde sırayla sonsuza giden merdivenler çizmeye çalışmıştır. Aşağıda Azra'nın çizdiği ilk üç ve altıncı merdiveni görmektesiniz.

a) Buna göre Azra'nın 4. ve 5. adımı çizebilmesi için kaç adet çubuk gereklidir? Cözümünüzü açıklayınız.

b) Azra'nın n. adımında çizeceği merdiven için kaç adet çubuk gerekli olduğunu veren cebirsel kuralı bulunuz. Cözümünüzü açıklayınız.

Cebirsel düşünme süreçlerinin analizine ilişkin geliştirilen bir diğer etkinlik ise Van de Walle ve ark. (2007) tarafından geliştirilen problem üzerinden uyarlanmıştır. Etkinliğin orijinal versiyonunda (bkz. Şekil 16), öğrencilerden örüntünün yakın ve uzak terimleri için verilen tabloda boşlukları doldurmaları istenmiştir. Ayrıca örüntüye ilişkin cebirsel bir genel kural bulunmasına ilişkin alt madde içermektedir.

Step 1 Step 2 Step 3

• Complete a table that shows number of triangles for each step.

Step Number	1	2	3	4	5...	10	20
Number of Triangles							

• How many triangles are needed for step 10? Step 20? Step 100? Explain your reasoning.

• Write a rule (in words and/or symbols) that gives the total number of pieces to build any step number (n).

Şekil 16: Etkinlik 6'nın orijinal versiyonu

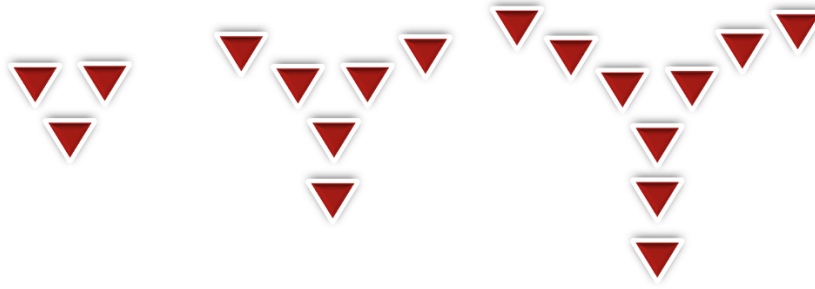
(Van de Walle ve ark., 2007)

Araştırmacı, öğrencileri belirli bir çözüm yönüne yönlendirmemek amacıyla tablo kısmını etkinlikten çıkarmıştır. Ayrıca öğrencilerden kelime veya sembol kullanmaları istenmeden genel kural sorulmuştur. Bunun nedeni, öğrencilerin cevaplarını tablo, kelime ve sembol kullanımı ile sınırlamamaktır. Bunun yerine örüntünün verilen terimler üzerinden ortaklıkların fark edilerek diğer terimlerin elde edilmesi beklenmektedir. Geliştirilen problemin orijinal halindeki şekle bağlı kalınmış ve etkinliği bu şekil üzerinden bir ‘gerçek’ hayat problemi olarak sunmak hedeflenmiştir.

Etkinlik 6

Türkiye bulunan ünlü bir inşaat şirketinin projesi kapsamında önce ülke içerisinde başlayarak daha sonra ülke dışına yayılacak olan bir konut yerleşkesi geliştirilecektir. Projenin amacı konutların plansız yerleşmeye engel olması, görsel anlamda estetik durması ve belli bir düzen oluşturmaktır. Ancak kapladığı alana göre yerleşkeler farklı büyüklükte olacaktır.

Aşağıda projedeki yerleşkelerin belli bir düzen dahilinde kuş bakışı yapılandırıldığını görmekteyiz.



1. Yerleşke

2. Yerleşke

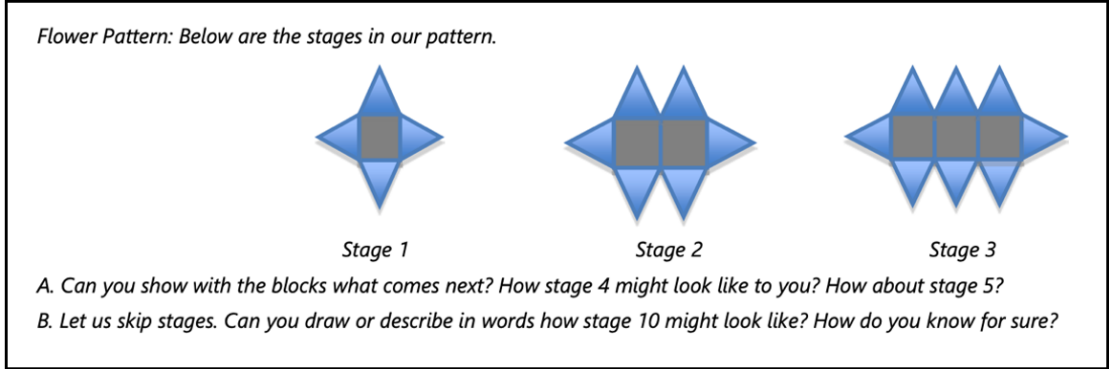
3. Yerleşke

Projedeki her bir yerleşkedeki üçgen sayısı o yerleşkede bulunacak ev sayısını vermektedir. Örneğin 1. yerleşke de 3 adet ev bulunacaktır. Buna göre;

- 10., 20. ve 100. yerleşkelerde kaç adet eve ihtiyaç vardır? Çözümünüzü açıklayınız.
- Yerleşke numarası ile o yerleşke de bulunan ev sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır? Çözümünüzü açıklayınız.
- Yurt dışına yayılması planlanan projede n. yerleşke için kaç adet ev olması gerektiğini veren cebirsel kuralı bulunuz. Çözümünüzü açıklayınız.

Bir diğer etkinlik ise Rivera (2018) tarafından geliştirilen problem üzerinden uyarlanmıştır. Problemin orijinal versiyonunda (bkz. Şekil 17) sunulan şekil örüntüsünün (a) maddesinde verilen terimler üzerinden yakın ve uzak terimlerin elde edilmesi istenmiştir. Bu bağlamda 4. ve 5. adımının örüntü blokları kullanılarak nasıl gözükeceğinin belirlenmesi beklenmiştir. Problemin (b) maddesi ise ‘‘Hadi bir sonraki adımlara geçelim. 10. adımının

nasıl görüldüğünü çizebilir veya kelimelerle anlatabilir misiniz? Nasıl eminsen?’’ sorularını içermektedir.



Şekil 17: Etkinlik 7’nin orijinal versiyonu (F. D. Rivera, 2018)

Araştırmacı tarafından uyarlanan Etkinlik 7’nin son hali aşağıda görülmektedir.

Etkinlik 7

Asuman hanım bir açık hava organizasyonu için dört kişilik masaları birleştirerek büyük bir şölen masası oluşturmak istiyor.

1 Masa 2 Masa 3 Masa

Asuman hanım şölen masası için bir organizasyon şirketinden destek almaktadır. Yukarıda organizasyon şirketinin yaptığı düzenleme örneklerini görmektesiniz. Örneğin 1 masaya dört kişi oturmakta, 2 masaya ise altı kişi oturmaktadır.

Buna göre;

a) Asuman hanımın hazırladığı organizasyon için 10 masa birleştirilirse masada toplam kaç kişi bulunur? Çözümünüzü açıklayınız.

b) Organizasyona 76 kişinin katılabilmesi için kaç masanın birleştirilmesi gerekmektedir? Çözümünüzü açıklayınız.

c) Birleştirilen masa sayısı ile masada bulunan toplam kişi sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır? Çözümünüzü açıklayınız.

d) Eğer n masa birleştirilirse masada bulunacak toplam kişi sayısını veren cebirsel kuralı bulunuz. Çözümünüzü açıklayınız.

Rivera (2018) tarafından geliştirilen etkinlik araştırmanın kuramsal çerçevesine uygun olacak şekilde uyarlanmıştır. Problem teması, “gerçekçi” problem durumlarının başlangıç noktası olarak sunulması amacıyla yeniden düzenlenmiştir. Etkinlikte birleştirilen masa sayısı ile masada bulunan toplam kişi sayısı şekil üzerinden ilgili ortaklık ve özellikler üzerinden ilişki kurularak elde edilmesi beklenmektedir ((c) maddesi). Şekil üzerinde değişen ve değişmeyen kısımların belirlenerek diğer terimlerin elde edilmesine ilişkin bir hipotez geliştirilmesi beklenmektedir. Ayrıca araştırmanın amacı ve kuramsal çerçevesine uygun olarak örüntüyü herhangi bir adıma genelleme süreçlerini inceleyebilme adına örüntünün genel kuralının bulunması beklenen bir alt madde ((d) maddesi) daha eklenmiştir. Yapılan uyarlama sonrasında etkinlik üzerine uzman görüşüne başvurulmuştur. Uzman görüşü sonrası alınan geri dönütler doğrultusunda herhangi bir düzenlemeye gidilmemiştir.

Etkinlik 8

Sıra No	Model	Çubuk Sayısı	Örüntünün Kuralı
1		4	
2			
3			
4			
5			
6			

- Bir örüntüye ait ilk 6 adım ile ilgili verilen tabloyu uygun şekilde doldurunuz.
11. ve 85. Adımda kullanılan çubuk sayısı kaç tanedir? 11. ve 85. adımdaki modeller ne yönde değişir?
- Oluşturduğunuz örüntünün kuralını bulunuz.

d) Verilen örüntünün modelinde değişmeyen veya sabit kalan kısımlar var mı? Modeller üzerinde değişmeyen kısımları işaretleyiniz. Bu kısımlarda kaç tane çubuk kullanılmıştır? Değişmeyen kısımlardaki çubuk sayısı ile kural sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır?

e) Modellerde her seferinde yeni eklenen çubukları işaretleyiniz. Her seferinde kaç çubuk eklenmiştir? Örüntünün terimleri arasındaki fark kaçtır? Modelde her seferinde eklenen çubukların sayısı, terimler arasındaki fark ve kural arasında bir ilişki var mıdır?

Etkinlik 8 ilgili ve gerekli izinler alınarak hazır alınmıştır. Etkinlik Rukiye Aslan (2011) tarafından yazılan “*Örüntü Kavramına İlişkin Öğrenci Güçlüklerini Gidermeye Yönelik Bir Ders Tasarımı*” adlı yüksek lisans tezinden alınmıştır. Çalışmanın örneklemini yedinci sınıf öğrencileri oluşturmaktadır. Bu etkinliğin geliştirilmesinde Swan (2007)’ın çoklu temsiller etkinliği temel alınmıştır. Bu doğrultuda genel terimi “ $n+3$ ” olan bir örüntünün ilk iki adımı verilmiş ve (a) maddesinde örüntünün 6. terimine kadar örüntüyü devam ettirmeleri ve bu bağlamda tabloyu doldurmaları istenmiştir. Etkinliğin (b) maddesi ise bir önceki maddede model üzerinden ortaklığın idrak edilerek diğer terimlerin bu ortaklığın aktarılması üzerinden elde edilmesini içermektedir. (c) maddesinde, verilen örüntüye ait cebirsel bir genel kuralın bulunması istenmiştir. (d) ve (e) maddelerinde ise idrak edilmesi beklenen ortaklığın öğrenciler tarafından sorgulanarak ifade edilmesi istenmiştir.

Steele (2008), cebirsel durumlarda farklı dışsal temsiller arasındaki ilişkinin fark edilmesinin ve anlaşılmasının öğrenciler tarafından örüntülerin genellemesini ve belirlenmesini kolaylaştıracağını ifade etmiştir. Bu öneriden hareketle örüntülerin sayısal, görsel model ve tablo gösterimleri arasında ilişki kurularak etkinliğin tasarlanması amaçlanmıştır. Ayrıca çalışma da öğrencilerin örüntü genelleme süreçlerinin analiz edilmesi adına Radford (2008) tarafından geliştirilen çerçeve kullanılmıştır.

Etkinliğin Öğretim Sonrası Cebirsel Düşünme Süreçleri Formu’na dahil edilmesinin sebebi ilgili yüksek lisans tezi kapsamında aynı öğrenci seviyesine uygun olarak geliştirilip uygulanması ve çalışmanın (Aslan, 2011) amacının ve konusunun yedinci sınıf öğrencilerinin örüntü genelleme süreçleri incelenmesi olmasından dolayı araştırmanın amacı ve kuramsal çerçevesine uygunluğu doğrultusunda etkinliğin dahil edilmesi uygun görülmüştür.

Etkinlik 9

Bir taksici 2 km'lik mesafe için 7 TL, 3 km'lik mesafe için 9 TL, 5 km'lik mesafe için 13 TL ücret almaktadır. Buna göre;

- Taksi şoförünün 1 km'lik ve 10 km'lik mesafeler için müşteriden alacağı ücretleri bulunuz.
- 50 km'lik ve 75 km'lik mesafeler için müşteri kaç TL ücret ödeyecektir? Bu değerleri nasıl buldunuz? Açıklayınız.
- Gidilen mesafenin herhangi bir km'si için müşterinin kaç TL ödeyeceğini nasıl buluruz? Belirlemek için bir kural yazınız. n km yol gidildiğinde müşteri kaç TL öder?
- Kuralı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

Ek Soru?

Yukarıda verilen probleme dair bir örüntü modeli geliştiriniz. Modeli geliştirirken bozuk para modellerinden yararlanabilirsiniz.

Aşağıdaki alana hazırladığınız örüntü modelini çizin. Modeli geliştirirken neleri dikkate aldığınızı açıklayınız.



Etkinlik 9 ilgili ve gerekli izinler alınarak hazır alınmıştır. Etkinlik Rukiye Aslan (2011) tarafından yazılan “Örüntü Kavramına İlişkin Öğrenci Güçlüklerini Gidermeye Yönelik Bir Ders Tasarımı” adlı yüksek lisans tezinden alınmıştır. Çalışmanın örneklemini yedinci sınıf öğrencileri oluşturmaktadır.

Bu problemde kuralı $2n+3$ olan bir örüntü “gerçek” yaşam durumu üzerinden verilmiştir. Literatür incelendiğinde öğrencilerin genel olarak örüntüleri sadece art arda gelen ve sabit miktarla artan sayı veya şekil örüntüsü olarak algıladıkları görülmüştür (Doerr, 2006; Aslan, 2011; Yeşildere – İmre, Akkoç, Baştürk – Şahin, 2017). Etkinlik, öğrencilerin örüntüleri, günlük hayatta ve çevresinde bulunan ilişkilerin ve düzenin bir ifadesi şeklinde görebilmelerini fark etmeleri amacıyla geliştirilmiştir. (a) ve (b) maddeleri örüntünün verilen terimlerine yakın ve uzak terimleri elde ederken geçirilen düşünsel süreçleri inceleme amacıyla hazırlanmıştır. (c) maddesinde ise örüntüye ilişkin ortaklıkları fark ederek örüntünün sonraki terimlerine genellemeleri ve bu doğrultuda cebirsel olarak anlamlı bir genel kural oluşturmaları beklenmektedir. (d) maddesinde ise öğrenciler tarafından sözel veya sembol kullanılarak açıklanan genel kuralın, genelleme sürecini nasıl şekillendirildiğinin incelenmesi hedeflenmiştir.

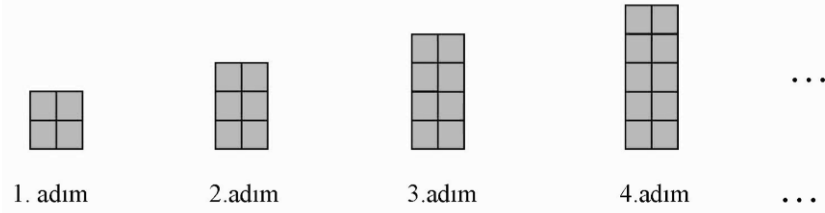
Ek soru olarak yöneltilen alt maddede ise daha çok öğrencilerin soru bağlamını ve “örüntü” kavramını nasıl anlamlandırdığını irdeleme ihtiyacından dolayı bağlama ilişkin bir soru yöneltilmiştir. Burada amaç soruya doğru cevap verilmesi ya da doğru bir cevabın varlığı değildir. Amaç öğrencinin bu soruya karşılık vereceği cevabı nasıl bir mantık süzgecinden geçireceğidir.

Etkinliğin Öğretim Sonrası Cebirsel Düşünme Süreçleri Formu’na dahil edilmesinin sebebi ilgili yüksek lisans tezi kapsamında aynı öğrenci seviyesine uygun olarak geliştirilip uygulanması ve çalışmanın (Aslan, 2011) amacının ve konusunun yedinci sınıf öğrencilerinin örüntü genelleme süreçleri incelenmesi olmasından dolayı araştırmanın amacı ve kuramsal çerçevesine uygunluğu doğrultusunda etkinliğin dahil edilmesi uygun görülmüştür.

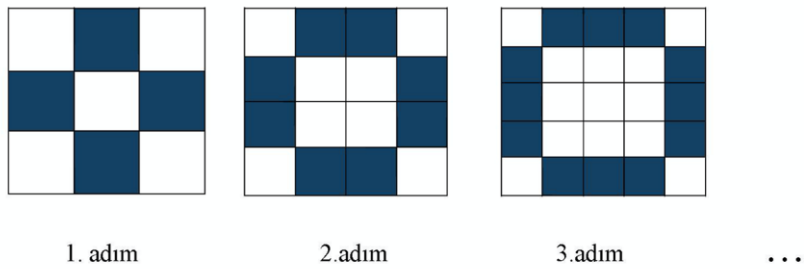
Etkinlik 10

Aşağıdaki örüntülerin kuralını sadece model üzerinden bulunuz. Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

- a) Her bir adımda kullanılan birim kare sayısını veren bir kural geliştiriniz.



- b) Her bir adımda kutular içindeki beyaz karelerin sayısını veren bir kural geliştiriniz.



Ek Soru?

Banyo ustası olan Levent beyin evinde bir ebeveyn banyosu, bir tane de çocuk banyosu bulunmaktadır.

Levent bey yukarıda verilen örüntülere göre evindeki banyoların dizaynını düzenleyecektir. Buna göre her iki örüntüde 50. ve 75. Adımda dizayn için kullanılması gereken kaç taralı kareye ihtiyacı vardır?

Etkinlik 10 ilgili ve gerekli izinler alınarak hazır alınmıştır. Etkinlik Rukiye Aslan (2011) tarafından yazılan “Örüntü Kavramına İlişkin Öğrenci Güçlüklerini Gidermeye

Yönelik Bir Ders Tasarımı'' adlı yüksek lisans tezinden alınmıştır. Çalışmanın örneklemini yedinci sınıf öğrencileri oluşturmaktadır.

Bu problemde iki farklı örüntü modeli aynı ''gerçek'' yaşam problemi üzerinden sunulmaktadır. Bunun için kuralı ' $2n+2$ ' ve ' $n.n+4$ ' olan iki şekil örüntüsü verilmiştir. Öğrencilerin örüntülere ilişkin cebirsel kurala ulaşma süreçlerinde yalnız modeli kullanmaları istenmektedir.

Problemin orijinal halinde ek soru bulunmamaktadır. Araştırmacı tarafından sorunun alt madde olarak eklenmesinin sebebi ise öğrencilerin soru bağlamını ve örüntünün diğer terimlerini elde ederken modeli nasıl anlamlandırdığını irdeleme ihtiyacından dolayı bağlama ilişkin bir soru yöneltilmiştir.

Etkinliğin Öğretim Sonrası Cebirsel Düşünme Süreçleri Formu'na dahil edilmesinin sebebi ilgili yüksek lisans tezi kapsamında aynı öğrenci seviyesine uygun olarak geliştirilip uygulanması ve çalışmanın (Aslan, 2011) amacının ve konusunun yedinci sınıf öğrencilerinin örüntü genelleme süreçleri incelenmesi olmasından dolayı araştırmanın amacı ve kuramsal çerçevesine uygunluğu doğrultusunda etkinliğin dahil edilmesi uygun görülmüştür.

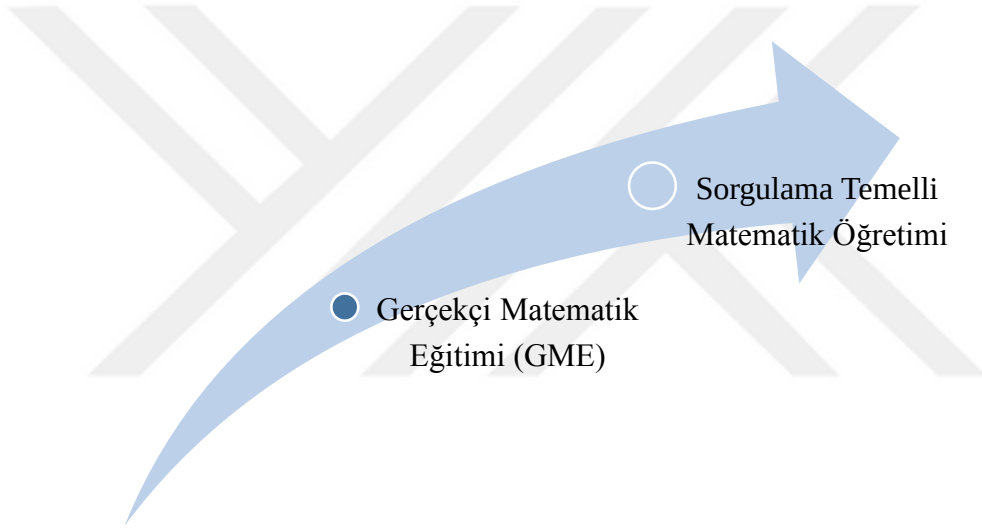
3.3.3. Sosyo-matematiksel Normlarla Desteklenmiş Sorgulama Temelli Öğretime İlişkin Ders İçeriğinin Geliştirilmesi

Sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim sürecine ait 10 adet ders planı araştırmacı tarafından ilgili literatür ve kuramsal çerçeve ışığında geliştirilmiştir. Her bir ders planı bir ders saatini (30 dk.) kapsamaktadır.

Sorgulama temelli öğretime ait ders içeriğini geliştirirken Artigue ve Blomhoj (2013) tarafından geliştirilen çerçeve kullanılmıştır. Bu çalışmada sorgulama temelli öğretimin matematik eğitime entegre edilmesine yönelik kuramsal bir çerçeve geliştirilmiştir. Çerçeve de sorgulama temelli matematik öğretimi altı farklı modelle ilişkilendirilmiştir. Bunlardan bazıları; problem çözme, didaktik durumlar teorisi ve gerçekçi matematik eğitimidir. İlgili kuramsal çerçeve ikinci bölümde ayrıntılarıyla açıklanmaktadır.

Araştırmacı ders içeriğine ait ders planlarını, bu çerçevede belirtilen sorgulama temelli matematik eğitiminin gerçekçi matematik eğitimi modeli ile ilişkisi üzerine dayandırarak hazırlamıştır. Bu teoriye göre öğrencilere sorgulama temelli öğretim süreci ''gerçekçi'' problem durumlarının başlangıç noktası olarak sunulmasıdır. Geleneksel öğretime bir meydan okuma olarak ortaya çıkmış olan gerçekçi matematik eğitime göre matematik öğretimi

gerçek hayat problemleri ile başlamalı ve matematik yapma gereksinimi öğretimin ana ilkesi olmalıdır (Gravemeijer, 1990, Van den Heuvel-Panhuizen 1996; 2003). Yaşamsal problemde kastedilen, problemin sadece gerçek yaşam durumlarından oluşturulması demek değil, problemin matematiksel olarak organize edilebilir olması ve öğrencinin problemin temellendiği bağlam içinde kendine yer bulabilmesidir (Van den Heuvel-Panhuizen, 1996; 2003). Bu bağlamda gerçekleştirilen öğretim sürecinde öğrenciler problemlerdeki bilgileri önce diyagram, şekil, sayı tablosu ve benzeri kişisel matematiksel yöntemlerle işleyerek kendi zihinlerinde çözüm için gereken matematiksel yapıyı oluşturacaklar, sonra da bunları yine sorgulama yoluyla kendi zihinlerinde formül, teorem, genelleme ve benzeri matematiksel yapılara çevireceklerdir (Artigue & Blomhoj, 2013).



Şekil 18: Sorgulama Temelli Ders İçeriğine İlişkin Kuramsal Çerçeve (Artigue & Blomhoj, 2013)

Sorgulama temelli öğretim süreci ve sürece ilişkin etkinlikler, sorgulama temelli öğretim stratejileri göz önünde bulundurularak hazırlanmış ve ders planı olarak sunulmuştur. Öğrencilere soru sorabilecekleri, sorgulayabilecekleri, kanıt sunabilecekleri, açıklama geliştirebilecekleri, eleştirel düşünebilecekleri, başkalarının açıklamaları doğrultusunda kendi açıklamalarını değerlendirebilecekleri ve yeni bilgiye ulaşabilecekleri bir öğretim ortamı sunmak hedeflenmiştir. Sorgulama temelli matematik öğretimi genel olarak;

- ⑩ Öğrencilerin problemlerdeki bilgileri önce diyagram, şekil, sayı tablosu ve benzeri kişisel matematiksel yöntemlerle işleyerek kendi zihinlerinde çözüm için gereken matematiksel yapıyı oluşturmalarını, sonra da bunları sorgulama yoluyla kendi zihinlerinde formül, teorem, genelleme ve benzeri matematiksel yapılara çevirmelerini gerektirir.

- ⑩ Süreçte alınan matematiksel bilgilerin sorgulanarak, tartışılarak, gerekçelendirme yapılarak anlamlandırılmasını gerektirir.
- ⑩ Öğrenme öznesi olan öğrencilerin, öğrenme sürecinin merkezinde olmasını ve dünyayı anlamlandırmak aynı zamanda düşünme becerilerini geliştirmek için gerçek hayat problemleriyle meşgul olmasını gerektirir.
- ⑩ Öğrencilerin, bilim insanlarının matematiksel anlamda soru sorma, problemleri, tanımlama, tahmin yapma, genellemeler yapma ve sonuç çıkartmada kullandıkları stratejileri kullanmasını gerektirir.
- ⑩ Öğrencilerin somut deneyimler yardımıyla matematiksel anlamlar oluşturmalarını, genellemelerini, soyutlama ve ilişkilendirme yapmalarını gerektirir.
- ⑩ Problem çözme, meta biliş, modelleme, akıl yürütme, tartışma ve kanıtlama, genelleme, bağlantı kurma ve temsil etme, iletişim kurma gibi farklı matematiksel düşünme süreçlerinin kullanılmasını gerektirir (Artigue & Blomhoj, 2013).

Bu bağlamda Artigue ve Blomhoj (2013) tarafından gerçekçi matematik eğitimi ile ilişkilendirilmiş sorgulama temelli öğretimin öğrencilerin düşünsel süreçleri üzerinde etkide bulunması amacıyla belirli kriterler belirlenmiştir. Bu kriterler ışığında öğretim süreci yeniden düzenlenmiştir. Öğretim sürecinin yapılandırılmasında temel alınan kriterler aşağıda görülmektedir.

- ⑩ Öğretim sürecinin günlük hayattaki “gerçekçi” problem durumlarının başlangıç noktası olarak sunulması,
- ⑩ Öğrencilerin aktif durumda bulunması ve geleneksel öğretimin reddedilmesi,
- ⑩ Etkili bir matematik öğretimi için öğretmenlerin öğrencilerini matematiksel sorgulamaya teşvik eden öğrenme olanakları ve etkinlikleri hazırlamaları, öğrencilerini sorgulatarak ne bildiklerini ve neye gereksinim duyduklarını anlamaları ve onları öğrenmeye daha iyi bir şekilde teşvik etmeleri,
- ⑩ Öğretim sürecine ait etkinliklerin günlük hayat problemlerine yönelik hazırlanarak matematiksel anlamda sorgulama sürecinin desteklenmesi,
- ⑩ Öğrencilerin araştırma ve sorgulama yapabilecekleri, iletişim kurabilecekleri, eleştirel düşünebilecekleri, gerekçelendirme yapabilecekleri, fikirlerini rahatlıkla paylaşabilecekleri ve farklı çözüm yöntemlerini sunabilecekleri sınıf ortamları oluşturulması,
- ⑩ Öğretmenin, öğrencilerin nasıl düşündüğünü anlayıp anlamadıklarını sorarak, kabul edilebilir bir matematiksel açıklamanın anlaşılabilir ve anlamlı olması için sosyo-

matematiksel normları kullanarak öğrenme-öğretme sürecini yönlendirmesi, şeklindedir.

Araştırmacı sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretime ait ders içeriğini geliştirirken sorgulama temelli ders sürecini yönetmek adına 5 farklı sosyo-matematiksel norm belirlemiştir. Normların belirlenmesinde Cobb ve Yackel (1996) tarafından Yorumlayıcı Çerçeve de açıklanan sosyo-matematiksel normlar kullanılmıştır. Cobb ve Yackel (1996) çalışmalarında sosyo-matematiksel normların sınıf tartışmalarına ve sorgulama sürecine katkıda bulunduğunu belirtmişlerdir. Yackel ve Cobb'a göre sosyomatematiksel normların, tartışmalara katılımı düzenlediği gibi üst düzey bilişsel etkinliği desteklediğini ifade etmişlerdir. Aşağıda öğretim sürecinde belirlenen sosyo-matematiksel normlar görülmektedir.

- ⑩ Matematiksel düşünceleri açıklamak,
- ⑩ Farklı matematiksel çözümler bulmak ve neden farklı olduğunu gerekçeleriyle birlikte sunmak,
- ⑩ Açıklamalarda matematiksel örüntü ve ilişkileri kullanmak,
- ⑩ Verilen matematiksel bir açıklamaya neden katılmadığını gerekçeleriyle birlikte belirtmek,
- ⑩ Verilen matematiksel bir açıklama anlaşılmadığında arkadaşına ya da öğretmenine soru sormak, şeklindedir.

Bu normların geliştirilmesi başlangıçta zor olsa da, bilgi ve deneyimle birlikte zamanla kolaylaşır. Öğretmen, öğrenciler arasındaki sosyal etkileşimi kolaylaştırmak için zengin içerikli açık uçlu problemler üzerine grup çalışması ya da bireysel çalışma yaptırdıktan sonra, elde edilen çözümlerin sınıfta paylaşılması ve tartışılmasını sağlayabilir. Öğretmen bu süreçte sınıf tartışmasını yönlendirmeli ve yargılayıcı olmamalıdır. Öğretmen, öğrencilerin düşüncelerini rahatça açıklayabilmeleri, sorgulayabilmeleri ve tartışabilmeleri için güvenli bir sınıf atmosferi oluşturmalıdır. Programda da altı çizildiği gibi öğrenciler arkadaşları ya da öğretmen tarafından sunulan düşünce ve açıklamaları daha iyi anlayabilmek için sorular sorabilmeli ve aynı zamanda da sorulan soruları cevaplama fırsatı bulabilmelidirler. Öğretmen öğrencilere “nasıl buldun?”, “çözümünün doğru olduğundan nasıl emin olabilirsin?”, “farklı bir çözüm bulabilir misin?”, çözümünün neden farklı olduğunu bize nasıl açıklarsın?” gibi sorular sorarak ve sorgulatarak matematiksel düşüncelerini paylaşmalarını sağlamalıdır.

Bu bağlamda belirlenen sosyo-matematiksel normlar öğretim sürecine entegre edilmiştir. Hedeflenen amaçlar ve ilgili kuramsal çerçeve doğrultusunda hazırlanan ders planlarının çerçevenin kriterlerine uygunluğuna ilişkin iki matematik eğitimcisiinden uzman görüşleri alınmıştır. Bu aşamada hazırlanan ders planlarının her biri için uzmanların görüşlerini belirtebilecekleri alanların yer aldığı tablolar oluşturulmuş ve Uzman Görüşü Formu şeklinde uzmanlara sunulmuştur. Formda Artigue ve Blomhoj (2013) çalışmasında yer alan çerçeveden yararlanıldığı belirtilmiş ve geliştirilen ders planları ve planlara ilişkin problemlerin çerçeveye uygunluğu konusunda uzmanların görüşlerine başvurulduğu açıklanmıştır. Tablo 8’de bu Uzman Görüşü Formu’nun genel formatının nasıl olduğu örnek form üzerinden gösterilmiştir.

Tablo 8

Uzman Görüşü Formu Örneği

Sosyo-Matematiksel Normlarla Desteklenmiş Sorgulama Temelli Öğretime İlişkin Ders Planları ve Planlara ait Problemler	Görüş/ öneri			
	Ders Planı / Problem Uygun	Ders Planı / Problem Uygun Fakat Gözden Geçirilmeli	Ders Planı / Problem Uygun Değil	Ders Planı / Problem ile İlgili Önerileriniz
Ders Planı-1 (Problem 1)				
	Açıklama:			

Uzman Görüşü Formu’nda araştırmacı tarafından hazırlanan tüm ders planları ve planlara ilişkin problemler açıklanmış, ilgili kuramsal çerçeveye uygunluğu konusunda uzman görüşlerine başvurulduğu belirtilmiştir. Formlar uzmanlara elektronik posta yoluyla ulaştırıldıktan yaklaşık 2 hafta kadar sonra geri dönüt alınmıştır.

Alınan geri dönütler doğrultusunda uzmanlar, ders planlarının ve planlara ait problemlerin uygun olduğunu belirtmişler ve herhangi bir düzenlemeye gerek olmadığını bildirmişlerdir. Uzmanlar “*Ders planlarının içeriği ve problemlerin tezinin amacına uygun olduğunu düşünüyorum. Özellikle sosyo-matematiksel normları teşvik etmek için kullanacağın kartlar çok etkili olacaktır.*” şeklinde düzeltmeye gerek olmadığını belirtmişlerdir. Uzmanlardan alınan geri dönütler doğrultusunda ders planları ve problemlerde herhangi bir düzenlemeye gidilmemiştir. Bu bağlamda ders planları ve etkinliklere son hali verilmiştir. Ders planlarının tamamı ve son hali ek’lerde mevcuttur.

Araştırmada, sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretime ilişkin on adet ders planı geliştirilmiştir. Her bir ders planında, uzmanların geri dönütleri ve ilgili kuramsal çerçeve ve literatür ışığında, öğrencilere soru sorabilecekleri, sorgulayabilecekleri, kanıt sunabilecekleri, açıklama geliştirebilecekleri, eleştirel düşünebilecekleri, başkalarının açıklamaları doğrultusunda kendi açıklamalarını değerlendirebilecekleri, matematiksel düşüncelerini gerekçelendirebilecekleri ve kendi yapılandırmaları ışığında yeni bilgiye ulaşabilecekleri bir öğretim ortamı sunmak hedeflenmiştir. Bu bağlamda gerçekleşmesi hedeflenen öğretim ortamının oluşturulmasında sosyo-matematiksel normlar, grup tartışmalarını aktif kılması amacıyla öğrencileri yönlendiren ifadelerin yer aldığı kartlar üzerinden hazırlanarak öğretime dahil edilmiştir. Hazırlanan kartlar aşağıda görülmektedir.

Arkadaşının açıklamasını anlamaya çalış.	Arkadaşının çözümünü açıklamasında ona yardımcı ol.	Arkadaşlarının matematiksel açıklamalarını dinle.	Verilen matematiksel bir açıklamayı anlamadığında arkadaşına veya öğretmenine sor.	Matematiksel bir açıklamaya neden katılmadığını gerekçeleriyle belirt.
Çözümünü gerekçeleriyle açıkla.	Çözümlerde çelişki yaşadığında alternatif yolları sorgula.	Açıklamaların da farklı temsil biçimlerini kullan.	Matematiksel çözümlerini savun.	Açıklamalarında matematiksel örüntü ve ilişkileri kullan.
Arkadaşının çözümünü sorgula.	Grup arkadaşlarıyla tartışarak çözüm önerisi geliştir.	Farklı matematiksel bir çözüm bul.	Başka bir arkadaşınla konuş.	Yaptığımız sorgulamanın amacını anlamaya çalış.

Tüm sınıf fikir alışverişinden sonra öğrenciler her derste, farklı öğrenciler ile eşleşme şartıyla üç kişilik üç gruba ayrılmışlardır. Ardından her bir gruba araştırmanın çerçevesi doğrultusunda grup tartışmalarını yönlendirmesi ve aktif kılması amacıyla belirlenen sosyo-matematiksel normların yer aldığı kartlar dağıtılmıştır. Öğretmen bu süreçte sınıf tartışmasını yönlendiren ve yargılayıcı olmayan bir yaklaşım sergilemektedir. Öğretmen, öğrencilerin düşüncelerini rahatça açıklayabilmeleri, sorgulayabilmeleri ve tartışabilmeleri için güvenli bir sınıf atmosferi oluşturma konusunda bir rehber görevi görmektedir. Sosyo-matematiksel Normlarla Desteklenmiş Sorgulama Temelli Öğretime İlişkin Ders İçeriği'ne ait ders planlarının tamamı Ek-5'te verilmektedir. Araştırmacı tarafından geliştirilen ve çalışmada veri toplama aracı olarak kullanılan örnek ders planı (Ders Planı-5) aşağıda verilmektedir.

Ders Planı-5	
Sınıf:	7 Süre: 1 ders saati (30 dk.)
Öğrenme Alanı:	Cebir
Alt Öğrenme Alanı:	Cebirsel İfadeler
Kazanım(lar):	M.7.2.1.3. Sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimini bulur.
Açıklamalar:	a) Adımlar arasındaki farkı sabit olan örüntülerle sınırlı kalınır. b) Değişken kullanımının önemi ve gerekliliği vurgulanır. c) Sayı örüntüleri incelenerek örüntünün kuralını bir değişken ile (örneğin n cinsinden) yazmaya yönelik çalışmalar yapılır. Örneğin ilk dört terimi 3, 9, 15 ve 21 olan bir aritmetik örüntünün kuralı $6n-3$ olarak ifade edilir. ç) Günlük hayat durumlarında veya şekil örüntülerindeki ilişkileri örüntüye dönüştürerek kuralı bulmaya yönelik çalışmalara da yer verilir.
Gerekli Ön Bilgiler:	M.6.2.1.1. Sözel olarak verilen bir duruma uygun cebirsel ifade ve verilen bir cebirsel ifadeye uygun sözel bir durum yazar. M.6.2.1.2. Cebirsel ifadenin değerini değişkenin alacağı farklı doğal sayı değerleri için hesaplar. M.6.2.1.3. Basit cebirsel ifadelerin anlamını açıklar. M.7.2.1.1. Cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemleri yapar. M.7.2.1.2. Bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarpar.
Öğretme-Öğrenme Yöntem ve Teknikleri:	Soru-cevap Tartışma Grup Çalışması Grup Tartışması Bireysel Çalışma
Beceriler:	İletişim, İlişkilendirme, Cebirsel Düşünme, Sorgulama, Genelleme
Materyaller:	Etkinlik Kağıtları, Sorgulama Temelli Öğretime İlişkin Kartlar

Öğrenme ve Öğretme Etkinlikleri

Öğretmen elinde etkinlik kağıtları ve sorgulama temelli öğretime ilişkin kartlar ile sınıfa girer.

Öğretmen tahtaya $\frac{1}{2}$ ve $\frac{2}{3}$ kesirlerini yazar.

Öğretmen: "Tahtaya yazdığım kesirler sizin için ne ifade ediyor? Bu kesirleri nasıl açıklarsınız veya modellersiniz?" sorusu ile derse giriş yapılır. Öğrenciler tartışarak yorumlamaya başlar.

Ardından öğretmen tahtaya $\frac{5}{2}$ ve $\frac{5}{4}$ kesirlerini yazar.

Öğretmen: "Peki ya bu kesirleri nasıl açıklarsınız ya da modellersiniz?" sorusu ile öğrencileri bir önceki tartışmada verdikleri cevaplar doğrultusunda sorgulamaya yönlendirerek çelişkiye düşürür. Öğrenciler tekrar bireysel düşünerek kesirleri ilişkilendirmeye çalışır.

Öğretmen: "Bu dersimizde birlikte bir etkinlik üzerine düşüneceğiz." Diyerek öğrencileri ders içeriği hakkında bilgilendirir. Öğrencilere **Problem-5** dağıtılır.

Öğretmen: "Etkinlik kağıdını herkes bireysel bir şekilde incelesin.

Öğretmen öğrencilere aşağıdaki soruları yöneltir:

Problem-5

Yedikçe Küçülen Serkan

Obezite genel olarak bedenin yağ kütlesinin yağsız kütleyle oranının aşırı artması sonucu boy uzunluğuna göre vücut ağırlığının arzu edilen düzeyin üstüne çıkması durumuna obezite adı verilmektedir. Obezite günümüzde gelişmiş ve gelişmekte olan ülkelerin en önemli sağlık sorunları arasında yer almaktadır.



Obezite problemi yaşayan Serkan bu hastalıkla mücadele edebilmek için düzenli doktora gitmeye başlamıştır. Doktoru diyetisyeni ile birlikte Serkan'a uzun soluklu bir beslenme planı hazırlamıştır. Bu plana göre Serkan'ın her gün yediği çikolata miktarı belli bir düzene göre azaltılacaktır. Aşağıdaki tabloda doktorunun Serkan'a verdiği beslenme planını görmekteyiz.

Örneğin birinci gün serhat 2 bütün çikolata yiyebilirken ikinci gün bu sayı 3'te 2'sine düşecektir. Aşağıdaki tabloda ilk iki gün yediği çikolata miktarını görmekteyiz.

Gün Sayısı	Miktar	Çikolata Miktarının Modellenmesi
1. Gün	$\frac{2}{1}$	
2. Gün	$\frac{3}{2}$	
3. Gün	$\frac{4}{3}$	
4. Gün	$\frac{5}{4}$	
5. Gün	$\frac{6}{5}$	
6. Gün	$\frac{7}{6}$	

- Serkan'ın günden güne yediği çikolata miktarı hakkında neler söyleyebilirsiniz?

- Serkan 12. ve 17. günlerde çikolatanın kaçta kaçını yeme hakkına sahip olacaktır?

- Peki ya 100. günde?

- Gün sayısı ile yediği çikolata miktarı arasında bir ilişki var mıdır?

- Varsa/yoksa neden var/yok? Düşünceni gerekçelendirir misin?

- Serkan bir günde $\frac{11}{10}$ dilim çikolata yediğine göre bu miktarı kaçınıcı gün yediğini bulabilir misin? Nasıl bulduğunu açıklar mısın?

- Serkan bir günde 1,01 dilim çikolata yediğine göre bu miktarı kaçınıcı gün yediğini bulabilir misin? Nasıl bulduğunu açıklar mısın?

- Herhangi bir günde yenilmesi gereken çikolata miktarını veren cebirsel bir kural bulunuz ve kuralı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

Öğrenciler üç kişilik dört gruba ayrılır. Oluşan gruplara öğrencileri yönlendirecek komutların bulunduğu kartlar dağıtılır.

Arkadaşının matematiksel açıklamasını anlamaya çalış.	Arkadaşının matematiksel çözümünü açıklamasında ona yardımcı ol.	Arkadaşlarının matematiksel açıklamalarını dinle.	Verilen matematiksel bir açıklamayı anlamadığında arkadaşına veya öğretmenine sor.	Matematiksel bir açıklamaya neden katılmadığını gerekçeleriyle belirt.
Matematiksel çözümünü gerekçelendir.	Matematiksel çözümlerinde çelişki yaşadığında alternatif yolları sorgula.	Açıklamaların da farklı temsil biçimlerini kullan.	Matematiksel çözümlerini savun.	Açıklamalarında matematiksel örüntü ve ilişkileri kullan.
Arkadaşının matematiksel çözümünü sorgula.	Grup arkadaşlarıyla tartışarak matematiksel bir çözüm geliştir.	Farklı matematiksel bir çözüm bul.	Başka bir arkadaşınla konuş.	Yaptığımız sorgulamanın amacını anlamaya çalış.

Bu etkinlikte öğrencilerden bir örüntüde adımlar arası artış veya azalış olabileceğini gözlemlemeleri beklenmektedir. Öğretmen dersin girişinde öğrencilere öncelikle bir basit kesir sunarak onu modellemelerini istemiş (örneğin bu noktada öğrencilerden bir bütün çizip 2 eş parçaya ayırıp 1'ini belirtmesi (taraması, boyaması, çizmesi vs.) beklenmektedir, ardından bileşik kesir verilerek öğrencilerin çelişkiye düşürülmesi hedeflenmektedir. Bu noktada öğrenciler bir bütünü 3 eş parçaya ayırıp 5 parçayı belirtme ihtiyacı güdecek ancak 5 parçaya sahip olmadığını fark eden öğrencilerin çelişkiye düşerek sorgulama ihtiyacı duyması beklenmektedir. Öğrencilerin bu noktada bir bileşik kesri modelleme de alternatif yolları sorgulaması gerekmektedir. Öğretmen dersin devamında kesirler ile ilgili bir örüntü etkinliği sunarak verilen örüntüye ait ortak özelliğin (gün sayısı ile yenilen çikolata miktarı arasındaki ilişki) fark edilerek diğer günlerde yenmesi gereken çikolata miktarını kesirler konusu ile ilişkilendirmesi beklenmektedir. 100. ve n. günde yenilmesi gereken çikolata miktarı sorularak fark edilen ortak özelliğin transfer edilerek hipotez geliştirme ihtiyacı duymaları beklenmektedir. Ayrıca hipotez geliştirmenin gerekliliğini fark eden öğrencilerin çözüm stratejilerini ve geliştirdikleri cebirsel kuralı nasıl geliştirdiklerini matematiksel olarak gerekçelendirmeleri beklenmektedir. Daha sonra “**neden**” ve “**nasıl**” sorularıyla öğrencilerin düşünmeye ve sorgulamaya yönlendirilmesi gerekir. Bu nedenle öğretmen sorgulama temelli öğretimin gereği ile, gözlemci ve yol gösterici olarak öğrencilere gerektiği yerde kendi çözümlerini ve başkalarının çözümlerini sorgulamalarını gerektirecek sorular yöneltilmektedir.

Örneğin,

- “Nasıl modelledin?”
- “100. Günde yenilmesi gereken çikolata miktarını nasıl belirleyebilirsin?”
- “Çözümünün doğru olduğuna nasıl emin oldun, örüntüye ilişkin farklı bir matematiksel çözümü olan var mı?”,
- “Matematiksel çözümünün neden farklı olduğunu düşünüyorsun? Bunu bize nasıl açıklarsın?”,
- “Arkadaşınızın matematiksel düşüncesine katılıyor musunuz? Neden katılıyorsunuz/katılmıyorsunuz?”,
- “Arkadaşınızın çözümünü açıklamak isteyen var mı?”,
- “Düşünceni gerekçelendirir misin?”,
- “Matematiksel düşüncenin doğru olduğundan nasıl emin olabilirsiniz?”,
- “Modellerken nelere dikkat ettin, modeller arasında bir ortaklık var mıdır?”,
- “Sizce gün sayısı ile yenilmesi gereken çikolata miktarı arasında bir ilişki var mıdır? Eğer bir ilişki varsa, nasıl bir ilişki vardır?”,
- “Serkan’ın n. günde yiyeceği çikolata miktarını veren kuralı nasıl geliştirdiğini açıklar mısın? Bu kuralı geliştirirken etkinlikte verilen hangi bilgileri kullandın, açıklar mısın?”,
- “Bulduğunuz genel kuralın geçerli olduğundan nasıl emin olabiliyorsunuz?” gibi sorularla öğrenciler örüntüleri kullanarak aritmetik genellemeden cebirsel genellemeye geçmesi hedeflenmektedir.

Öğrenciler komut kartlarını kullanarak önce grup arkadaşları ile daha sonra tüm sınıf ile tartışmaya girerek ders bitirilir.

Her bir ders planı sorgulama temelli matematik öğretimi hedefleri ve öğretim sürecinin yapılandırılmasında temel alınan kriterler ışığında şekillendirilmiştir. Araştırmada, Artigue ve Blomhoj (2013) tarafından gerçekçi matematik eğitimi ile ilişkilendirilmiş sorgulama temelli öğretimin öğrencilerin düşünsel süreçleri üzerinde etkide bulunması amacıyla belirli kriterler belirlenmiştir. Bu kriterler ışığında öğretim süreci yeniden düzenlenmiştir. Aşağıda öğretim sürecinin yapılandırılmasında temel alınan kriterler doğrultusunda düzenlenen öğretim, örnek ders planı (Ders Planı-5) üzerinden açıklanmaktadır.

Öğretim sürecinin ‘‘gerçekçi’’ problem durumlarının başlangıç noktası olarak sunulması: Bu noktada öncelikle öğretmenin sorgulama temelli öğretimin gerçekçi matematik eğitimine entegre edilmesinin bir gereği olarak süreç, ‘‘gerçekçi’’ problem durumları üzerinden başlatılmıştır. Bu ders planı (Ders Planı-5) bir obezite problemi senaryosu ile başlamış, örüntüleri genellemeye yönelik farklı, öğrencileri sorgulamaya yönlendiren alt maddelerin sunulması ile devam etmiştir. Etkinliğe ilişkin alt maddeler belirlenirken örüntü konusu özelinde ilgili kazanım göz önün ve Gerçekçi Matematik Eğitimi’ne uygun olacak şekilde hazırlanmıştır.

Öğrencilerin aktif bir rol üstlenmesi: Etkinlikte, sorgulama temelli öğretimin bir gereği olarak, öğrencilerden sorgulamaları, çözümlerine gerekçelendirme üretmeleri, arkadaşlarının açıklamaları doğrultusunda kendi çözümlerini değerlendirmeleri ve tartışma ortamında verilen bilgileri kullanarak günlük hayat probleminin bağlamına ilişkin herhangi bir günde yemesi gereken çikolata miktarına ait bir genellemeye ulaşmaları istenmektedir. Bu ilişkiye nasıl karar verdikleri sorularak öğrencilerin tartışması ve örüntüye ait değişen veya değişmeyen kısımları matematiksel olarak yorumlamaları beklenmektedir. Her bir aşamanın sonunda öğrencilerin gerekçelendirme yapmaları, matematiksel olarak çözümlerini desteklemeleri ve kendi matematiksel bilgilerini kendilerinin elde etmeleri beklenmektedir. Tüm bu süreç öğrencilerin kendi öğrenme sürecinin farkında olacak ve yönetecek şekilde planlanmıştır. Öğretmen yalnızca öğrencileri sorgulamaya yönlendiren bir rehber görevi görmektedir.

Öğretmenin öğrencileri sorgulamaya ve tartışmaya yönlendiren öğrenme ortamlarının oluşturması: Öğretmen, öğrenciler arasındaki sosyal etkileşimi kolaylaştırmak için zengin içerikli açık uçlu problemler üzerine grup çalışması ya da bireysel çalışma yaptırdıktan sonra, elde edilen çözümlerin sınıfta paylaşılması ve tartışılmasını sağlamaktadır.

Sunulan günlük hayat problemleri doğrultusunda öğrencilerin matematiksel sorgulamaya yönlendirilmesi: Etkinlik esnasında, öğrencilere obezite problemi bağlamında sunulan

örüntünün ‘‘azalan bir sekans’’ gösterdiği söylenmemektedir. Öğrencilerin örüntünün azalarak devam ettiğini kendilerinin keşfetmesi beklenmektedir. Örüntülerin ‘‘her zaman artarak devam ettiği’’ kavram yanlışlığına sahip bir öğrenci karşılaştığı durumu sorgulayarak çelişkiye düşecektir.

Öğretmenin öğrencileri sorgulamaya yönlendirmesi: Programda da altı çizildiği gibi öğrenciler arkadaşları ya da öğretmen tarafından sunulan düşünce ve açıklamaları daha iyi anlayabilmek için sorular sorabilmeli ve aynı zamanda da sorulan soruları cevaplama fırsatı bulabilmelidirler. Öğretmen öğrencilere ‘‘nasıl buldun?’’, ‘‘çözümünün doğru olduğundan nasıl emin olabilirsin?’’, ‘‘farklı bir çözüm bulabilir misin?’’, ‘‘çözümünün neden farklı olduğunu bize nasıl açıklarsın?’’ gibi sorular sorarak ve sorgulatarak matematiksel düşüncelerini paylaşmaları sağlanmaya ve bu bağlamda cebirsel süreçleri açığa çıkarmaya çalışılmıştır. Öğretmenin ‘‘çözümünün doğru olduğuna nasıl emin oldun?’’, ‘‘bulduğun genel kural sence geçerli mi?’’ gibi sorular ile de öğrencilerin probleme ait geliştirdikleri stratejileri sorgulayarak yeniden değerlendirmelerini sağlamaktadır.

3.3.4. Cebirsel Düşünme Süreçlerinin Analizine İlişkin Yarı Yapılandırılmış Mülakat Formu’nun Geliştirilmesi

Yarı yapılandırılmış mülakatlar, araştırmacı tarafından önceden belirlenmiş ya da görüşme esnasında ortaya çıkan araştırma konusu ile ilgili direk ya da dolaylı ilişkili olabilecek durumlara göre değişiklik yapabilme ve yeni sorular sorabilme imkânı veren esnek bir veri toplama yöntemidir (Güler, Taşgın, & Halıcıoğlu, 2013). Durum çalışması yönteminde yaygın olarak kullanılan mülakat yöntemi öğrencilerin düşüncelerini ifade etmelerine, yaptıkları işlemleri ve kullandıkları stratejileri açıklamalarına ve kendi gerekçelerini ikna edici bir şekilde sunmalarına fırsat vermektedir. Bu yönleriyle araştırmanın amacı ve problem durumu doğrultusunda öğrencilerin uygulama sürecinde etkinliklere verdikleri yanıtlar üzerinden geçirdikleri düşünsel süreçlerin incelenmesine yardımcı olan bir yöntemdir. Yarı yapılandırılmış mülakatlar, araştırmacının önceden belirlediği sorularla birlikte mülakat sırasında ortaya çıkan durumlara ve konuya ilişkin düşüncelerin oluşturduğu değişiklikler neticesinde yeni sorular yöneltmeye fırsat veren esnekliklere sahiptir. Araştırmacı görüşmeler esnasında öğrencinin çözümünü takip ederek, ‘‘Neden böyle düşünüyorsun?’’, ‘‘Yaptığın işlemlerin doğru olduğundan nasıl emin oluyorsun?’’, ‘‘Yaptığın işlemin ne anlama geldiğini açıklar mısın?’’ gibi sorularla da öğrencilerin cebirsel anlamda düşünsel süreçlerini açığa çıkarmak amaçlanmaktadır.

Cebirsel Düşünme Süreçlerinin Analizine İlişkin Yarı Yapılandırılmış Mülakat Formu'nda uygulanan etkinlikler üzerinden çözümlerinin daha iyi analiz edilmesi ve cebirsel düşünme süreçlerinin daha açık bir şekilde irdelenmesi amacıyla sorulan 9 adet soru bulunmaktadır (Bkz. Ek: 6). Hazırlanan mülakat sorularının; öğrencilerin etkinliklere verdikleri yanıtların ve çözüm stratejilerini seçme nedenlerinin ve sonuçlarının doğruluğundan emin olup olmadıklarını anlamaya yönelik olmasına dikkat edilmiştir. Ayrıca mülakat sorularında; gerçekleştirilen öğretim öncesi ve sonrası verilen bir örüntünün diğer terimlerinin elde edilmesi, buna ilişkin hipotez geliştirilerek genel kural elde edilmesi gibi cebirsel düşünmeye ilişkin bileşenlerin nasıl gerçekleştiğine ait sorular yer almaktadır. Hedeflenen amaçlar doğrultusunda ilgili literatür desteğiyle hazırlanan soruların araştırmanın amacı ve çerçevesine uygunluğu için iki matematik eğitimcisiinden uzman görüşü alınmıştır. Bu aşamada hazırlanan mülakat sorularına uzmanların görüşlerini belirtebilecekleri Uzman Görüşü Formu hazırlanmış ve uzmanlara sunulmuştur. Formda ön bilgi olarak araştırmanın amacı ve kuramsal çerçevesinden bahsedilmiş ve mülakat sorularının belirtilen kriterlere uygun olup olmadığı konusunda uzmanların görüşlerine başvurulduğu açıklanmıştır. Formlar uzmanlara elektronik posta yoluyla ulaştırıldıktan 2 hafta kadar sonra geri dönüt alınmıştır.

Alınan geri dönütler doğrultusunda uzmanlar, mülakat sorularının genel anlamda olumlu olduğu kanısına vardıklarını ifade etmişlerdir. Yalnızca bazı sorular ile ilgili *“hazırlanan soru uygun fakat gözden geçirilmeli”* seçeneğini işaretlemiş ve buna ilişkin fikirlerini beyan etmişlerdir. Bu bağlamda, Soru-4 ve Soru-7 de düzenlemeye gidilmesini gerekli görmüşlerdir. Bu görüşler doğrultusunda bu sorular ile ilgili tekrar düzenlemeye gidilmiştir.

Alınan geri dönütler sonucunda, *“Yapılan öğretim, örüntü konusunun senin için daha anlamlı/anlaşılır olmasına katkı sağladı mı? Biraz açar mısın bu kısmı? Eğer sağlamadıysa neden sağlamadığını düşünüyorsun? Biraz açıklar mısın?”* şeklinde yapılandırılan Soru-4, öğrencinin yalnızca “evet” veya “hayır” cevabını verebilmesi riskini taşıması sebebiyle, sorunun amacına sadık kalınarak *“Öğretim öncesinde örüntü konusunu nasıl öğreniyordun, şimdi nasıl öğreniyorsun? Örneğin 1, 3, 5, 7, ... şeklinde giden bir şekil örüntüsü olduğunu varsayalım. Örüntüye odaklandığında ilk neleri inceliyordun? Şimdi nelere dikkat ediyorsun?”* şeklinde düzenlenmiştir.

Uzmanlar tarafından yapılan bir diğer öneri ise Soru-7'ye ilişkindir. Soru-7 uzman görüşü öncesi *“Cebirsel olarak düşünme senin için ne ifade ediyor? Cebirsel olarak düşündüğünü kanıtlayan bir örnek sunabilir misin?”* şeklinde hazırlanmıştır. Uzmanların

verdiği “Öğrenciler cebirsel düşünmeyi bir kavram olarak anlamamış olabilirler, yaşları gereği. Soru öncesinde derste yapılan etkinliklerin cebirsel düşünmelerini geliştirmeyi hedeflediği ve anlayabilecekleri şekilde cebirsel düşünmenin ne olduğu açıklanırsa, bu soruya daha rahat yanıt verebilirler diye düşünüyorum.” dönütü sonrası soru; “ Derste yaptığımız etkinlikler ve geçirdiğimiz öğretim süresince grup ve sınıf arkadaşlarınız ile tartışarak size verilen örüntülerin diğer adımlarını elde etmeye çalıştınız. Örüntüye ilişkin şekil ve model üzerinde fark ettiğiniz noktalar ya da ortaklıklar oldu mu?” şeklinde düzenlenmiştir. Uzmanların verdiği dönütler sonrasında yarı yapılandırılmış mülakat sorularına son hali verilmiştir.

3.4. Uygulama Süreci

Veri toplama araçlarına son halinin verilmesinin ardından araştırmanın uygulama süreci başlatılmıştır. Uygulama süreci öncesi etik kurul izni başvurusu yapılmış ve veri toplama araçlarının uygulama izni alınmıştır. Uygulama izni Ek 3’te verilmiştir.

Araştırmanın uygulama süreci 25 Nisan 2022 ile 25 Mayıs 2022 tarihleri aralığında gerçekleştirilmiştir. Tüm uygulama sürecinin tamamlanması 4 haftayı kapsamaktadır. İlk hafta öğrencilere öğretim öncesi cebirsel düşünme süreçlerini ilgili kuramsal çerçeve bağlamında analiz edebilmek amacıyla Cebirsel Düşünme Süreçleri Ön Değerlendirme Formu uygulanmıştır. Ardından iki hafta boyunca on ders saati tamamlanarak öğretim süreci gerçekleştirilmiştir. Öğretim sonrasında cebirsel düşünme süreçlerinin analizine ilişkin Öğretim Sonrası Cebirsel Düşünme Süreçleri Değerlendirme Formu uygulanmıştır.

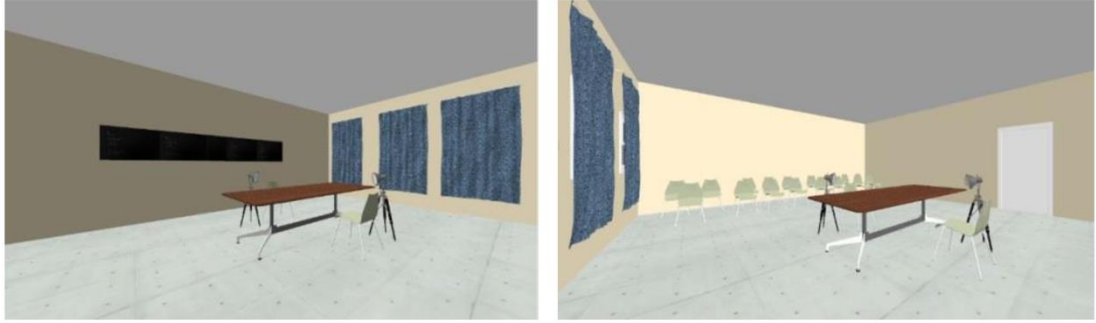
Öğretim öncesi ve sonrası uygulanan etkinlikler, öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerini açığa çıkarmayı hedeflediğinden, öğretim öncesi 10 ve öğretim sonrası 10 problemi içermektedir. Bu bağlamda öğrenciler toplamda 20 soruyu yazılı olarak yanıtlamalıdır. Etkinlikler, öğrencinin yazılı çözümlerinden veri toplamayı amaçladığı için, öğrencilerin zaman bakımından sınırlandırılmamasına dikkat edilmiştir. Bu nedenle her bir form için 2 ders saati (60 dakika) soruların yanıtlanma süresi için uygun görülmüştür. Öğrencilerden 2 tanesi bu süre içerisinde etkinliklerin yanıtlarını yetiştiremeyip ek süre talep etmişlerdir. İki öğrenciye de ek süre vermenin araştırmanın amaçlarına aykırı olmaması sebebiyle 10 dakikalık ek süre verilmiştir. İki öğrenci de verilen ek süreyi kullanarak yazılı materyalleri araştırmacıya teslim etmiştir.

Öğrencilere öğretim öncesi ve sonrası cebirsel düşünme süreçleri değerlendirme formları verilmeden önce gerekli bilgilendirme yapılarak; etkinlikleri cevaplarken işlem ve

çözümlerini ayrıntılarıyla sözel olarak ifade etmelerinin ve çözümlerinin yanlış olduğunu düşünseler bile silmeden yeni çözümlerini de yazarak devam etmelerinin araştırma için önemli olduğu bilgisi verilmiştir. Çalışmanın başlamasından hemen önce öğrenciye aşağıdaki yönerge doğrultusunda bilgilendirme yapılmış ve “evet” yanıtını vermelerinin ardından süreç başlatılmıştır.

Sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim süreci aynı sınıf ortamında öğrenim gören ve farklı başarı düzeylerine sahip 9 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Tüm öğretim süreci iki hafta sürerek on ders saatini (30 dakika) kapsamaktadır. Öğrenciler ikili eğitim gerçekleştirilen bir okulun sabah 08.00-12.30 saatleri arasında eğitim öğretim faaliyetlerini sürdürmektedirler. Bu bakımdan ikili eğitim gerçekleştirildiği için okulda bulunan tüm öğrenciler bir ders saatini 30 dakika olacak şekilde tamamlamaktadırlar. Bu bağlamda araştırmacı öğretim sürecini her bir ders planı bir ders saati (30 dakika olacak) şekilde planlamıştır. Tüm öğretim süreci öğrencilerin yüzleri gözükmek ve şartıyla ses ve video kaydına alınmıştır. Süreç öncesi velilerden yazılı izinler alınmıştır. Her bir ders planının gerçekleştirilme sürecinde sorgulama ve tartışmayı aktif tutması amacıyla bir yuvarlak masa etrafına öğrenciler, üç kişilik üç farklı grup oluşturmuştur. Gruplarda eşleşen öğrencilerin tüm sorgulama temelli öğretim sürecinde birbirleriyle iletişim kurabilmesi ve farklı fikir ve düşüncelerin öğrenme ortamında açığa çıkarabilmesi adına her ders öğrenciler farklı öğrenciler ile eşleşmiştir.

Yarı yapılandırılmış mülakatlar öğretim süreci tamamlandıktan ve Öğretim Sonrası Cebirsel Düşünme Süreçleri Değerlendirme Formu uygulandıktan sonra yapılmış ve etkinlikleri cevaplandırırken yaşadıkları düşünsel süreçlerini anlamaya yönelik sorular eşliğinde gerçekleştirilmiştir. Yarı yapılandırılmış mülakatlar, her bir öğrenci için 15 dakika sürenin yeterli olacağı düşünülmüş ve mülakatların toplam sürelerine bakıldığında bu sürenin aşılmadığı görülmüştür. Bu bağlamda her bir ders saati (30 dakika) iki öğrenci ile mülakat gerçekleştirilmiş ve tüm süreç bir hafta içerisinde tamamlanmıştır. Mülakatlar sırasında bulunan ortamın sessiz olmasına dikkat edilmiş, öğrenci çalışma odasında yapılan mülakatlarda sadece araştırmacı ve katılımcı öğrenci bulunmasına dikkat edilmiştir. Araştırmacı ve katılımcı öğrenci aynı masada karşılıklı olarak oturmuşlardır. Örnek mülakat ortamı Şekil 19’da verilmektedir.



Şekil 19: Yarı yapılandırılmış görüşmelerin gerçekleştirildiği örnek mülakat ortamı

Öğrencinin kullanması için masada çalışma kâğıdı ve kalem bırakılmış, öğrencilerin rahat hissedebilmesi için masaya yedek maske ve su bırakılmıştır. Ayrıca öğrencilerin mülakat sorularında yer alan çözümlerini hatırlamaları için yazılı çözümleri araştırmacıda bulundurulmuştur. Mülakatlar ses ve video kaydına alınırken öğrencinin yüzünün gösterilmemesine özen gösterilmiş, kamera sadece öğrencinin yaptığı işlemlerin görülmesini sağlayacak ve öğrencinin dikkatini dağıtmayacak şekilde yerleştirilmiştir. Ayrıca mülakatlara başlamadan önce öğrencilerin rahat olmalarını sağlayacak bir konuşma yapılmış ve düşüncelerini sesli olarak belirtmenin önemli olduğu vurgulanmıştır.

Öğrencilerle cebirsel düşünme süreçlerinin analizine yönelik cevaplandırıdıkları etkinlikler üzerine yapılan yarı yapılandırılmış mülakat süreleri ve gerçekleştirildiği tarihler Tablo 9’da verilmiştir.

Tablo 9

Öğrencilerle yapılan mülakatların tarih ve süreleri

Mülakatlar	Y1	Y2	Y3	O1	O2	O3	D1	D2	D3
Mülakat Tarihleri	16.05.2022	17.05.2022	18.05.2022					23.05.2022	
Mülakat Süresi	07:16	11:33	09:27	14:32	12:45	11:03	15:00	13:25	14.10

Tablo 9’da her bir öğrenciyle yapılan mülakat tarihi ve mülakat süresi verilmektedir. Örneğin akademik açıdan düşük başarıya sahip D2 ile yapılan mülakatın tarihi 23.05.2022’dir ve mülakat süresi 13 dakika 25 saniyedir.

Araştırmacı tarafından bu mülakatların ses kayıtlarına ek olarak bazı notlar tutulmuştur. Bu notlarda öğrencilerin davranışları ve sorulara verdikleri cevaplara ilişkin alınan notların tarafsızca yazılmasına dikkat edilmiş ve video kayıtlarını inceleme esnasında bu notların yararlı olabileceği düşünülmüştür.

3.5. Verilerin Analizi

Bu bölümde öğretim öncesi ve sonrası öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerinin analizine ilişkin geliştirilen formlar kullanılarak toplanan verilerin nasıl analiz edildiği belirtilmektedir. Bununla birlikte sorgulama temelli öğretim sürecine ilişkin elde edilen öğrenci eylemlerinin analizi bağlamında ortaya çıkan verilerin nasıl analiz edildiği belirtilmektedir. Ayrıca sorgulama temelli öğretim sonrası gerçekleştirilen yarı yapılandırılmış mülakatlardan elde edilen verilerin analizinin yapılma şekli açıklanmaktadır.

3.5.1. Cebirsel Düşünme Süreçleri Ön Değerlendirme Formu ve Öğretim Sonrası Cebirsel Düşünme Süreçleri Değerlendirme Formu Verilerinin Analizi

Cebirsel Düşünme Süreçleri Ön Değerlendirme Formu ve Öğretim Sonrası Cebirsel Düşünme Süreçleri Değerlendirme Formu'na ilişkin etkinliklere verilen her bir yanıtın nitel analizinde; öğrencilerin kullandıkları çözüm stratejileri, çözüme ilişkin açıklamaları, sergiledikleri eylem ve yaklaşımlar, örüntü genelleme bağlamında genelleme süreçleri gibi yönler üzerine odaklanılmıştır. Nitel analiz, Radford (2008) tarafından genelleme süreçlerinin analizine ilişkin oluşturulan kuramsal çerçeveye ilişkin kategoriler doğrultusunda yapılmıştır. Bu kategoriler; *verilen örüntüye ilişkin ortak özelliği yakalama, anlama veya idrak etme, fark edilen ortak özelliği örüntünün diğer terimlerine genelleme, ortak özelliğe ilişkin hipotez geliştirme ve geliştirilen hipotez üzerinden cebirsel bir genel terim elde etme* şeklindedir. Öğrencilerin düşünsel süreçleri, farklı çözüm stratejileri, sözel ifadeleri ve cebirsel dili kullanma biçimleri ve çözümlerini açıklamaları ya da gerekçelendirmeleri üzerinde durularak cebirsel genelleme, aritmetik genelleme ve olgunlaşmamış tümevarım süreçlerine yönelik kanıtlar aranmıştır. Öğrenci yanıtlarının birçok kez baştan okunarak derinlemesine incelenmesinin ardından, öğrencilerin cebirsel anlamda geçirdikleri düşünsel süreçleri belirtilen kategoriler doğrultusunda veriler incelenmiştir. Bu bağlamda elde edilen verilerin analizinin belli bir sistematiklik içerisinde sunulması amaçlanmıştır. Öğrencilerin genelleme süreçleri ve genelleme süreçlerini açığa çıkaran bileşenler Tablo 10'da verilmiştir.

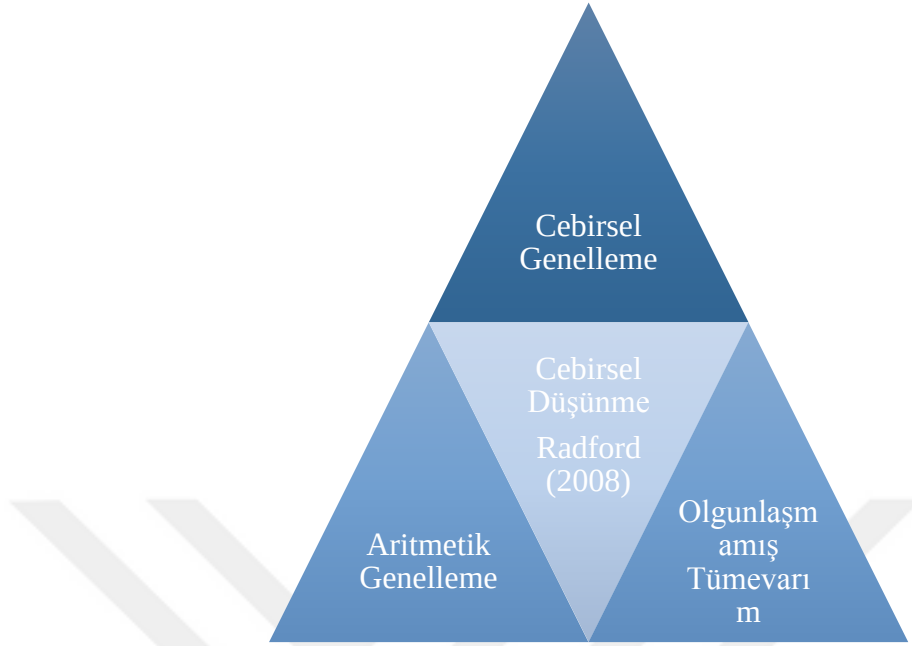
Tablo 10

Cebirsel Örüntü Genellemesinin İnşası

Genelleme Türü	Açıklamalar
Cebirsel Genelleme	Örüntünün bir bölümünden ortak özelliğin fark edilmesi, fark edilerek geliştirilen hipotezden p_n elde edilmesi
Aritmetik Genelleme	Örüntünün bir bölümünden ortak özelliğin fark edilerek hipotez geliştirilmesi
Olgunlaşmamış Tümevarım	Örüntünün bir bölümünden p_n elde edilmesi

Tablo 10’da görüldüğü gibi öğrencilerin yazılı çözümleri incelenirken hangi genelleme sürecini gerçekleştirdikleri, açıklanan bileşenler dikkate alınarak belirlenmiştir.

Nitel analiz, Radford (2008) tarafından öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerini örüntü genelleme bağlamında incelenmesi amacıyla belirtilen cebirsel genelleme, aritmetik genelleme ve olgunlaşmamış tümevarım süreçlerinin belirlenmesine ilişkin bileşenler doğrultusunda gerçekleştirilmiştir. Bu bileşenler; *örüntünün bir bölümünden ortak özelliğin fark edilmesi, fark edilerek geliştirilen hipotezden p_n elde edilmesi (cebirsel genelleme), örüntünün bir bölümünden ortak özelliğin fark edilerek hipotez geliştirilmesi (aritmetik genelleme), örüntünün bir bölümünden p_n elde edilmesi (olgunlaşmamış tümevarım)* şeklindedir. Öğrencilerin cebirsel düşünme süreçleri belirtilen bileşenler bağlamında incelenmiştir. Etkinliklere verilen çözümler ve çözümlerin açıklamaları doğrultusunda öğrencilerin cebirsel düşünme süreçleri hakkında ilgili bileşenler üzerinden incelemeler yapılarak gerekli yorumların yapılabileceği düşünülmektedir. Bu bağlamda Radford (2008), öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerinin genelleme bağlamında olgunlaşmasında üç farklı genelleme türü olduğunu belirtmiştir. Bu genellemeler Şekil 20’de görülmektedir.



Şekil 20: Cebirsel düşünmenin inşasında açığa çıkan genelleme süreçleri (Radford, 2008)

3.5.2. Sorgulama Temelli Öğretim Sürecinde Elde Edilen Verilerin Analizi

Durum çalışmasında, veriler araştırma başlangıcında oluşturulan alt problemler ışığında düzenlenip, yorumlanmaktadır (Kaleli – Yılmaz, 2019). Bu sayede araştırma ile ilgili olamayan veriler analiz dışında tutulmuş olur. Verilerin analizi ve yorumlanmasında araştırmacının literatürü etkili bir şekilde kullanması ve elde ettiği bulguları diğer araştırmalarla ne şekilde örtüştüğünü analiz ederek bu bağlamda yorumlaması gerekmektedir. Bu bağlamda gerçekleştirilen sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim süreci araştırmacı tarafından ses ve video kaydına alındıktan sonra transkript edilmiştir. Bu süreç toplanacak verilerin şekillenmesine yardımcı olmaktadır (Özpınar & Aydoğan – Yenmez, 2016). Toplanan veriler öncelikli olarak düzenlenir ve problem durumu ve ilgili kuramsal çerçeve doğrultusunda incelendikten sonra yorumlanır (Ferrance, 2000; Mertler, 2011). Bu yorumlar çerçevesinde uygulamanın anlaşılması sağlanır ve araştırmaya ilişkin öneriler sunulur (Gay & Airasian, 2000; Mills, 2007).

Sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim sürecinde, öğrencilerin cebirsel anlamaları üzerinde durulurken, cebirsel anlamda geçirdikleri düşünsel süreçleri öğretim programında belirtilen sorgulama becerileri bağlamında nasıl açıkladıklarına dikkat edilmiştir. Belirtilen sorgulama becerileri, bilimsel olarak anlamlı ve uygun sorular sormayı, problemlerin çözümü için stratejiler geliştirmeyi ve materyalleri planlamayı, problemlerin sonuçlarını tahmin etmeyi, beklenmedik durumları göz önünde bulundurmayı,

gerekelendirme yapmayı, farklı matematiksel çözüm stratejilerini sunmayı ve stratejileri sorgulayarak test etmeyi içermektedir.

3.5.3. Yarı Yapılandırılmış Mülakatlardan Elde Edilen Verilerin Analizi

Öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerinin analiz edilmesi bağlamında öğretim sonrası gerçekleştirilen yarı yapılandırılmış mülakat sürecinde öğrencilerin etkinlikleri nasıl anlamlandırdıklarının üzerinde durulurken, mülakat sürecindeki sözlü söylemlerinden cebirsel olarak düşünsel süreçlerinin nasıl değiştiğinin incelenmesine yönelik kanıtlar aranmıştır. Bu bağlamda ses ve video ile kayıt altına alınan mülakat süreci, nitel veri analizi yöntemlerinden betimsel analiz yöntemi ile analiz edilmiştir. Betimsel analiz yapılırken mülakat sürecinin transkriptlerinden elde edilen veriler diyaloglar halinde ayrıntılı bir şekilde sunularak öğrencilerin yanıtları derinlemesine incelenmiş ve yorumlanarak raporlaştırılmıştır. Betimsel analiz sürecinde, görüşülen ya da gözlemlenen bireylerin görüşlerini dikkat çekici bir şekilde yansıtmak için doğrudan alıntılara sık sık yer verilebilmektedir (Yıldırım & Şimşek, 2011). Bu bağlamda bu araştırmada mülakat süreci verileri analiz edilirken öğrencilerin açıklamalarına ilişkin doğrudan alıntılar yapılmıştır. Ardından öğrencilerin mülakat sürecindeki yanıtları Radford (2008) tarafından geliştirilen “Örüntü Genellemesinin İnşası” çerçevesi doğrultusunda yorumlanarak raporlaştırılmıştır.

3.6. Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği

Nitel araştırmalarda geçerlik ve güvenirlik, aktarılabilirlik, tutarlılık, inandırıcılık ve teyit edilebilirlik kavramları ile açıklanmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2011). İç geçerlik “inandırıcılık” (credibility) terimi ile, dış geçerlik “aktarılabilirlik” (transferability) terimi ile, güvenirlik “güvenirlik” (dependability) terimi ile, tarafsızlık “onaylanabilirlik” terimi ile karşılanmaktadır (Erlandson, Harris, Skipper, & Allen, 1993; Lincoln & Guba, 1985). Gerçekleştirilen araştırmada geçerlik ve güvenirliğin sağlanmasında kullanılabilecek stratejiler Tablo 11’de gösterilmektedir.

Tablo 11

Durum Çalışmasında Kullanılan Geçerlik ve Güvenirlik Stratejileri

Kriterler	Kullanılan Stratejiler
İnandırıcılık (İç geçerlik)	Uzun süreli etkileşim, derin odaklı veri toplama, uzman incelemesi
Aktarılabilirlik (Dış geçerlik)	Ayrıntılı betimleme, amaçlı örnekleme

Tutarlık (İç güvenirlik)	Tutarlık incelemesi
Onaylanabilirlik (Dış güvenirlik)	Kıyaslama yapılarak teyit incelemesi

Araştırmanın *inandırıcılığını* arttırabilmek için araştırma ortamında uzun süreli bulunarak veri doyumunu sağlama, uzman ve meslektaş görüşü alınarak görüşlerin doğruluğunu sınıama ve veri çeşitlemesini sağlama stratejilerine başvurulabilir (Özpınar & Aydoğan -Yenmez, 2016). Ayrıca inandırıcılık, araştırma sürecinin ve sonucunun açık ve tutarlı bir uyumda olmasını gerektirmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Bu bakımdan bu araştırmanın inandırıcılığını sağlamada araştırmacının uygulayıcı konumunda olmasıyla araştırma ortamında veri doyumunu sağlama; derin odaklı veri toplama ve uzman görüşü alma stratejileri kullanılmıştır.

Bu çalışma da derin odaklı veri toplama stratejisi için araştırma süresince ortaya çıkan durumlar ve ilişkiler ayrıntılı bir şekilde yorumlanmaya ve değerlendirilmeye çalışılmıştır. Uzman incelemesi ise, araştırma konusu ve veri toplama araçları hakkında araştırmacının tarafsız bir akranı ile araştırmanın başlangıcından sonuna kadar geçen süreci boyutlarıyla tartışmasına dayanır (Mertens, 1998). Bu bağlamda araştırmada veri toplama araçlarının geliştirilme sürecinde ve araştırma süresince 2 farklı uzman ve 2 matematik öğretmeninden uzman görüşü alınmıştır.

Aktarılabilirlik ya da transfer edilebilirlik ölçütü için ise problem durumu ile ilgili ayrıntılı betimsel veri toplama ve raporlaştırmada sürecin ayrıntılı olarak aktarılması önerilmektedir (Özpınar & Aydoğan – Yenmez, 2016). Bu stratejide diğer araştırmacıların sonuçları anlaması ve benzer ortamda benzer çalışmaları yapabilmelerini kolaylaştırabilmek için verilerin, bulguların, analizlerin kısacası her aşamanın ayrıntılı olarak tanımlaması yapılmaktadır (Büyüköztürk ve diğer., 2009; 266). Ayrıca aktarılabilirliği sağlamada kullanılabilecek stratejilerden biri amaçlı örneklemedir. Çünkü nitel araştırmalar da hem görülme sıklığı fazla olan hem de özel olan bilgilere ulaşma eğilimi vardır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Bu durumda veri kaynaklarının, zenginliğin ve farklılığın yansıtılması amacıyla amaçlı örnekleme yöntemine göre belirlenmesi gerekmektedir. Bu araştırmada aktarılabilirliğin sağlanması amacıyla katılımcıların belirlenmesinde amaçlı örnekleme yöntemi benimsenmiştir.

Güvenilmeye layık olma kavramı ise araştırma verisinin tutarlılığı ile ilgilidir. Bu ölçütün arttırılması için veri çeşitlemesinde olduğu gibi iki ya da daha fazla veri toplama aracı

kullanılmalı ya da verilerin kontrolünü yapan araştırmacı ile eldeki yazılı dokümanlardaki, alan notlarındaki, video, resim ve arşiv verilerindeki her sürecin nasıl tanımlanıp yorumlandığı incelenmelidir (Özpınar & Aydoğan – Yenmez, 2016). Bu bakımdan *‘nitel araştırmalarda tutarlık, ulaşılan sonuçların verilerle takip ve kontrol edilebilmesi ile sağlanmaktadır’* (Yeşildere, 2006; 65). Verilerin takip edilebilmesi için bu araştırmada tüm öğretim süreci ses ve görüntü kaydına alınmıştır. Ses ve görüntü kayıtları çözümlenmiş ve raporlandırılmıştır. Böylece öğrencilere ait etkinliklere verilen çözümlerin ve açıklamaların bulunduğu dokümanlar ve çalışma kağıtları, orijinal ses ve görüntü kayıtları ile araştırmacı raporlarından istenildiği zaman tutarlık incelemesi yapılabilecektir.

Nitel araştırmalarda nesnellik yerine teyit edilebilirlik ya da onaylanabilirlik kavramı kullanılmaktadır. Teyit edilebilirlik, elde edilen verilerin ve yapılan yorumların araştırmacının kurgusu olmaması gerektiği anlamına gelmektedir. Araştırmada teyit edilebilirliği sağlamak amacıyla teyit inceleme stratejisi kullanılarak, elde edilen ham veriler, veri toplama araçları, analiz aşamasında gerçekleşen süreçler, görüntü ve ses kayıtları gerektiğinde incelemeye sunulması amacıyla saklanmaktadır.

3.7. Araştırmacının Rolü

Nitel araştırmalarda araştırmacının kendisinin de bir veri toplama aracı olarak düşünülmesi, bu araştırma türlerinde araştırmacının rolünü oldukça önemli kılmaktadır. Araştırmacının araştırma yaptığı alanda zaman geçirmesi, araştırmayı yaptığı katılımcılarıyla doğrudan bir etkileşim halinde bulunması, katılımcılarla birlikte süreci deneyimlemesi, bu deneyimlerle yeni bakış açıları kazanması ve hatta yeni edindiği bakış açılarını verilerini analiz ederken kullanması yönleriyle nitel araştırmalar nicel araştırmalardan çok daha farklıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2005).

Araştırmacının nesnelliği bu tür araştırmalarda tartışma konusu olabilmektedir. Bununla birlikte nitel araştırmalarda araştırmacının nesnelliği yakalayabilme uğruna, veri kaynaklarına/katılımcılara yakın olduğu için elde edebileceği geçerli bilgileri kaybetmemesi de önemlidir (Şimşek ve Yıldırım, 2000). Durum çalışması araştırmalarında araştırmacının objektif olması, araştırma konusuna ve sürecine hakim olması, gerektiğinde esneklik sağlayabilmesi, geçerli gözlem ve yorumlarda bulunabilmesi, yorum ve değerlendirme sürecine önyargıları aktarmama gibi becerilere sahip olması önem arz etmektedir (Yin, 1994: 56).

Araştırmacının araştırma konusuna hâkim olması, araştırma konusuna ilişkin kavram yanılgılarına sahip olmaması ve konuya ilişkin sağlam bir kavrayışının olması araştırmanın verimliliği ve amaca uygunluğu açısından oldukça önemlidir. Araştırmacının esnek olması, yeni karşılaştığı durumlara açık olması, bu durumları tehdit ya da problem olarak görmesi yerine bir fırsat olarak değerlendirebilmesi ile ilgilidir. Bu bağlamda araştırmacının araştırma konusuna hakim olması ve yetkinliklerini genişleterek araştırmanın geçerliliğini arttırması amacıyla araştırmacı, TÜBİTAK 4005- Bilim ve Toplum Yenilikçi Eğitim Uygulamaları Destekleme Programı tarafından desteklenerek 31 Mayıs – 5 Haziran 2021 tarihleri arasında Kocaeli’nde gerçekleştirilen 119b148 no’lu ‘‘Özel Yetenekli Öğrencilerin Eğitiminde Sorgulama Temelli Matematik Uygulamaları Eğitimci Eğitimi’’ projesine katılım sağlamıştır.

Bu çalışma da araştırmacı; öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerinin incelenmesinde ve sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim sürecinde tümüyle tarafsız bir rol üstlenmiştir. Bunun sağlanabilmesi için öğretim sırasında öğrencilerin cebirsel anlam da düşünsel süreçlerini açığa çıkarmak ve öğretim sürecini yönlendirmek adına rehber görevi görmektedir. Bu çalışmada araştırmacı tarafsız bir rol üstlenerek, katılımcıların düşünme ve akıl yürütme süreçlerini etkilemeyecek kadar uzak, araştırma için önemli olan bilgileri kaybetmeyecek kadar yakın bir tavır sergilemektedir.

BÖLÜM IV

BULGULAR

Bu bölümde öğretim öncesi ve sonrası cebirsel düşünme süreçlerinin incelenmesine yönelik uygulanan etkinliklerden, öğretim sürecinde açığa çıkan norm ve becerilerden ve yarı yapılandırılmış mülakat sürecinde elde edilen bulgular ve yorumlar yer almaktadır.

Cebirsel düşünme süreçlerinin incelenmesine yönelik uygulanan etkinlikler; 10 öğretim öncesi ve 10 öğretim sonrası olmak üzere toplam 20 etkinlikten oluşmaktadır. Bağlı kalınan araştırma planı bağlamında öğretim öncesi ve sonrası cebirsel düşünme süreçlerinin analizine ilişkin uygulanan etkinlikler sonrasında öğrencilerin cebirsel anlamda düşünsel süreçlerini açığa çıkarmada yardımcı olması amacıyla yarı yapılandırılmış mülakatlar gerçekleştirilmektedir. Öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerinin açığa çıkarılması amacıyla uygulanan etkinliklere ilişkin yazılı çözümleri ile mülakatlarda bu problemlere uyguladıkları stratejilere ilişkin açıklamaları birlikte incelenerek araştırmanın alt problemlerine yanıt aranmaktadır.

Bulguların incelenmesi, araştırmanın alt problemlerine ilişkin başlıklar altında sunulmaktadır. Araştırmanın amacı ve kuramsal çerçevesi ışığında hazırlanan veri toplama araçları ile araştırmanın alt problemlerine yanıt aranmaktadır. Öğrencilere, cebirsel düşünme süreçlerinin analizine yönelik uygulanan etkinliklerin *genelleme* bağlamında incelenmesi amaçlanmaktadır. Aynı zamanda sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretimin gerçekleştirildiği on oturum süresince neler gözlemlendiğine, sınıf içi diyalog, sorgulama ve tartışma sürecinde hangi norm ve becerilerin açığa çıktığına, gerçekleştirilen öğretim öncesi ve sonrasında öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerindeki değişimi incelemeye, araştırmanın alt problemleri ile ilişkili olan bu başlıkların çalışmayı daha anlamlı kılacağı düşünülmektedir.

4.1. Öğrencilerin Öğretim Öncesi Cebirsel Düşünme Süreçlerine İlişkin Bulgular

Bu bölümde araştırmanın birinci alt problemi olan “*sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim öncesi öğrencilerin cebirsel düşünme süreçleri nasıldır?*” sorusuna yanıt aranmaktadır. Öğrencilerin cebirsel düşünme süreçleri Radford (2008)’un cebirsel genelleme inşası kuramsal çerçevesi bağlamında incelenmektedir.

Öğrencilerin genelleme süreçleri;

- (i) Örüntüdeki ortaklığı yakalama, anlama veya idrak etme,
- (ii) Bu ortak özelliği dikkate alınan örüntünün veya sayı dizisinin tüm terimlerine genelleme ve
- (iii) Örüntünün herhangi bir terimini doğrudan belirtmek için bir kural veya şema şekli belirtme

alt bileşenlerinin ele alınmasıyla incelenecektir.

Tablo 12

İlgili Bileşenler Bağlamında Oluşan Genelleme Türleri

Genelleme Türü	Açıklamalar
Cebirsel Genelleme	Örüntünün bir bölümünden ortak özelliğin fark edilmesi, fark edilerek geliştirilen hipotezden p_n elde edilmesi
Aritmetik Genelleme	Örüntünün bir bölümünden ortak özelliğin fark edilerek hipotez geliştirilmesi
Olgunlaşmamış Tümevarım	Örüntünün bir bölümünden p_n elde edilmesi

Öğrencilerin sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim öncesi cebirsel düşünme süreçlerinin incelenmesi adına “*Cebirsel Düşünme Süreçleri Ön Değerlendirme Formu*” uygulanmıştır. Uygulanan form 10 adet alt etkinlikten oluşmaktadır. Öğrencilerin öğretim öncesi cebirsel düşünme süreçleri bu etkinliklere ait yazılı çözümler, çözümlere ilişkin açıklamalar ve yarı yapılandırılmış mülakatlardan elde edilen veriler ışığında açıklanacaktır.

İlgili veri toplama aracı ışığında elde edilen bulgular incelendiğinde öğrenciler öğretim öncesi cebirsel düşünme süreçlerini; aritmetik genelleme ve olgunlaşmamış tümevarım bağlamında iki farklı genelleme türüyle olgunlaştırdıkları görülmektedir.

Etkinliklere ilişkin yazılı çözümler ve mülakat sürecindeki açıklamalar incelendiğinde öğrencilerin en çok olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı sergilediği bulgusuna ulaşılmıştır. Araştırma bulgularına göre birkaç öğrenci aritmetik genelleme yaklaşımı sergilerken cebirsel genelleme yaklaşımı sergileyen öğrenci bulunamamıştır.

4.1.1. Olgunlaşmamış Tümevarım Sergileyen Öğrenci Yaklaşımı

Olgunlaşmamış tümevarım; örüntüye ilişkin ortak yapı ve ilişkilerin fark edilerek genelleme yoluyla cebirsel bir kurala ulaşmak yerine kuralın denenmesi ile genellemeye ulaşılması olarak belirtilmektedir. Bu noktada olgunlaşmamış tümevarım bir genelleme olarak kabul edilemez, şeklinde açıklanmıştır. Olgunlaşmamış tümevarım süreci, cebirsel genelleme sürecinin ilk ve son adımını içermektedir. Sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim öncesinde öğrencilerin yazılı çözümleri ve mülakat sürecindeki açıklamaları incelendiğinde en çok olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı sergilediği bulgusuna ulaşılmıştır. Öğrencilerin yazılı çözümlerinden olgunlaşmamış tümevarım sürecini nasıl şekillendirdikleri, aşağıdaki bileşenler doğrultusunda incelenmektedir.

- (i) Örüntünün bir bölümü ($p_1, p_2, p_3, \dots$): *deneme - yanılma veya tahmin*
- (ii) P_n ifadesinin oluşturulması: *belirlenen kuralın denenmesi*, şeklindedir.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

Sayı veya şekil örüntüsüne ilişkin terimler arası ortaklık ve ilişkilerin fark edilmeden, deneme – yanılma veya tahmin yoluyla bir sayı örüntüsünün genel kuralının elde edilmesi olgunlaşmamış tümevarım sürecine bir örnektir. Olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı sergileyen öğrenciler, verilen örüntüye ilişkin terimler arası ortaklık ya da sayılar arasında bulunan yapı ve ilişkileri dikkate almazlar. Bu ortaklıklara dikkat edilerek bir hipotez geliştirilmeden üretilen cebirsel kural olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımına örnektir. Etkinlik 4'e ilişkin bu şekilde bir yaklaşım sergileyen D_3 'ün çözüm süreci Şekil 21'de görülmektedir.

Buna göre;

$$4 \cdot 5 - 3 = 17$$

a) 5. adımda Aylin'in kaç adet güneş sembolüne ihtiyacı vardır? Çözümün gerekçeleriyle açıklayınız.

1. adım	2. adım	3. adım	4. adım	5. adım
4	5	9	13	17
	+4	+4	+4	+4

Şekil 21: D_3 'ün örüntünün belirli bir bölümünü inceleme süreci (i)

D_3 , etkinlik 4'te örüntüdeki nümerik ilişkileri ardışık terimler arası farka odaklanarak açıklamaktadır. Verilen şekil örüntüsünü 1, 5, 9, 13, ... şeklinde sayı örüntüsüne dönüştürerek genel bir kural elde etmeyi amaçlamaktadır. Ardışık terimler arasındaki fark 4 olduğundan kuralda " $4n$ " ifadesinin kullanılması gerektiğini belirtmiştir.

$$\begin{array}{l}
 \text{kural} = 4n \\
 \text{örüntü} = 4' \text{er } 4' \text{et} \\
 \text{artmaktadır} \\
 \text{adın} \\
 17 \\
 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25
 \end{array}$$

Şekil 22: D₃ tarafından P_n ifadesinin oluşturulması (ii)

D₃ tarafından verilen şekil örüntüsüne ilişkin nümerik ilişkilere odaklanarak geliştirilen genel kuralın belirli bir işlem mantığına dayanmayan hesaplamalar sonucunda yapılandırıldığı görülmektedir. Ortak bir noktadan hareket ederek örüntüye ait ortak özellikler üzerinden bir ilişki belirlemekten çok olası durumlar üzerine bir genel kural oluşturma yönüne gidilmiştir. Bu bağlamda D₃, belirli bir strateji ile hareket etmemiş ve olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı sergilemiştir.

Yarı Yapılandırılmış Mülakatlardan Elde Edilen Bulgular

Etkinlik 4'e ilişkin olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı sergileyen D₃'ün yazılı açıklamalarına ek olarak süreci nasıl yapılandırıldığını incelemek ve düşünsel süreçlerini açığa çıkarmak amacıyla yarı yapılandırılmış mülakat gerçekleştirilmiştir.

D₃ yazılı açıklamalarında örüntünün terimleri arası farka odaklanarak bir genel kural oluşturma yöneliminde bulunmuştur. Gerçekleştirilen mülakat sonrasında, öğrencinin çözümleri ile mülakat sürecindeki açıklamaları arasında herhangi bir farklılığın olmadığı görülmüştür. Öğrencinin çözümlerinden gözlenebilen süreçlerini mülakatlarda da benzer olarak açıkladığı görülmektedir.

8A: Örüntüye ilişkin genel kurala nasıl ulaştın? Anlatır mısın?

6D₃: Şekilde verilen güneşleri tek tek saydım. Sonra onları yan yana yazdım. Hep dörder dörder artıyordu. Bende ondan genel kuralı 4n olarak seçtim.

9A: Peki, 4n olarak seçtiğin cebirsel kural sence neyi ifade ediyor?

7D₃: Sadece artışa baktım ve saydım. Hepsinde genel kuralı böyle bulabiliriz.

10A: O zaman artış miktarı eşit olan bütün örüntülerin genel kuralı aynı mı olmak zorunda sence?

8D₃: Nasıl yani anlayamadım öğretmenim.

11A: Mesela şöyle düşünelim. Şimdi bu örüntümüz 1, 5, 9, 13, ... şeklinde dörder artarak devam ediyor değil mi?

9D₃: Evet.

12A: Bu nedenle sen *genel kural $4n$ 'dir* şeklinde belirttin.

10D₃: Evet.

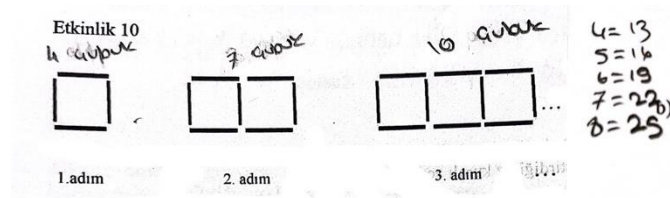
13A: Peki 2, 6, 10, 14, ... şeklinde devam eden farklı bir sayı örüntüsü üzerine düşünelim. Bu örüntü de dörder artıyor. Yani o zaman bu örüntünün kuralı da $4n$ mi olur?

(öğrenciye birkaç dakika düşünmesi için süre verilir)

11D₃: Bilemiyorum öğretmenim galiba.

D₃'ün ardışık terimler arası farka odaklanarak herhangi bir ortaklık ya da ilişkiye dayandırmadan genel kuralı elde etmesi olgunlaşmamış tümevarım gerçekleştirdiğini destekler niteliktedir. Öğrencinin mülakat sürecindeki "*sadece artışı baktım ve saydım*" açıklaması ve cebirsel kuralı hiçbir düşünsel sürece dayandırmadan yapılandırması olgunlaşmamış tümevarımda bulunduğunu ortaya koyan bir açıklama olmuştur. Ayrıca öğrencinin bir örüntünün genel kuralının *yalnızca artış miktarına* göre belirleneceğini düşünmesi; belirli ilişki ve ortaklıkları barındıran bir örüntüye ait genel kuralı oluşturan cebirsel ifadeyi bir kavram olarak anlamlandırmada yetersiz seviyede olduğu görülmektedir.

Benzer bir strateji geliştirerek düşünsel süreçlerini bu şekilde yapılandıran O₁'in Etkinlik 10'a ait yazılı çözümleri ve çözüme ilişkin açıklamaları Şekil 23'te görülmektedir.



Şekil 23: O₁'in örüntünün belirli bir bölümünü inceleme süreci (i)

O₁, etkinlik 10'da verilen şekil örüntüsünü nümerik olarak 4, 7, 10, ... şeklinde giden sayı örüntüsüne dönüştürerek genel bir cebirsel kural elde etmeyi amaçlamaktadır. Ardışık terimler arası farka odaklanarak örüntüye ilişkin yakın ve uzak terimleri bir önceki terime ekleyerek elde etmektedir (Şekil 23).

c) 8^{20} tane kare kaç tane çubuk ile yapılabilir?

$$\begin{array}{r} 20 \\ + 8 \\ \hline 160 \end{array}$$

$160 + 1 = 161$ Çubuk

d) n tane kare oluşturmak için kaç çubuk kullanılacağını veren bir kural bulunuz ve bulduğunuz kuralı açıklayınız.

3'er 3'er artıyor $3n + 1$ 4 çıkması için 1 ekledim

Şekil 24: O₁ tarafından P_n ifadesinin oluşturulması (ii)

O₁, verilen şekil örüntüsü üzerindeki ilişki ve ortaklıkların keşfedilmesi amacıyla hazırlanan Etkinlik 10'te ardışık terimler arasındaki fark ile örüntüye ait cebirsel kuralda bulunan katsayı arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Öğrencinin bu eylemi (d) maddesine verdiği açıklama ve yazılı ifadelerden gözlemlenmiştir. Öğrencinin (c) maddesine verdiği yazılı açıklamalarda ise belirli bir işlem mantığına dayanmayan olası durumlar üzerine hesaplamalar yaptığı görülmektedir.

Örüntüye ilişkin P_n ifadesinin oluşturulma sürecinde ise terim sırası ile terim arasındaki ilişki, deneme-yanılma stratejisi kullanılarak elde edilmiştir. Öğrencinin “üçer üçer artıyor” söylemi, terimler arası artış miktarı belirlenerek örüntünün genel kuralında “3n” ifadesinin bulunması gerektiğini göstermektedir. Ayrıca “ $3n + 1$, 4 çıkması için 1 ekledim” söylemi, öğrencinin verilen terimler üzerinden deneme-yanılma stratejisini kullanarak cebirsel kurala ulaştığını kanıtlar niteliktedir. Deneme-yanılma yöntemi öğrenci tarafından herhangi bir genellemede bulunmaksızın genel kurala ulaştığı bir yöntem olduğundan bu bağlamda öğrencinin olgunlaşmamış tümevarım gerçekleştirdiği görülmektedir.

Yarı Yapılandırılmış Mülakatlardan Elde Edilen Bulgular

Etkinlik 10'a ilişkin olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı sergileyen O₁'in yazılı açıklamalarına ek olarak süreci nasıl yapılandırıldığını incelemek ve düşünsel süreçlerini açığa çıkarmak amacıyla yarı yapılandırılmış mülakat gerçekleştirilmiştir.

O₁ yazılı açıklamalarında deneme-yanılma yoluyla genel bir kural oluşturma yöneliminde bulunmuştur. Gerçekleştirilen mülakat sonrasında, öğrencinin çözümleri ile mülakat sürecindeki açıklamaları arasında herhangi bir farklılığın olmadığı görülmüştür. Öğrencinin çözümlerinden gözlenebilen süreçlerini mülakatlarda da benzer olarak açıkladığı görülmektedir.

46A: Örüntüye ilk odaklandığında neleri inceledin?

52O₁: Kutular vardı ve bizden kaç çubuk kullanılması gerektiği isteniyordu, bende her bir adımda kaç çubuk olduğunu saydım.

47A: Etkinliğe ilişkin (a) maddesini hatırlıyor musun? Verilen örüntüye göre 8 tane kare oluşturulması için kaç tane çubuk kullanılması gerektiği soruluyordu. Çubuk sayısını bulurken hangi işlem yollarını izledin?

53O₁: Her bir adımdaki çubuk sayısını saydıktan sonra kaçar kaçar arttığına baktım. Sonra sırayla ekleyerek diğer terimleri elde ettim.

48A: Mesela 8. adımı nasıl buldun? Açıklar mısın?

54O₁: 3. Adımda 10 çubuk var sonra ekleyerek devam ettim. 13, 16, 19, ... en son da 25'e ulaştım.

49A: Daha çok karenin birleştirildiği bir örüntü için ne yapabiliriz? Örneğin (b) maddesinde 50 tane kare oluşturmak için kaç çubuk kullanılması gerektiğine $50 \times 3 = 150$ ve $150 + 1 = 151$ işlemlerini yaparak ulaşmışsın. 151'i nasıl elde ettin açıklar mısın?

55O₁: Orada ekleyerek devam etmek çok zordu. Bende genel kural çıkararak yerine yazdım ve hemen çıktı.

50A: Genel kurala nasıl ulaştın?

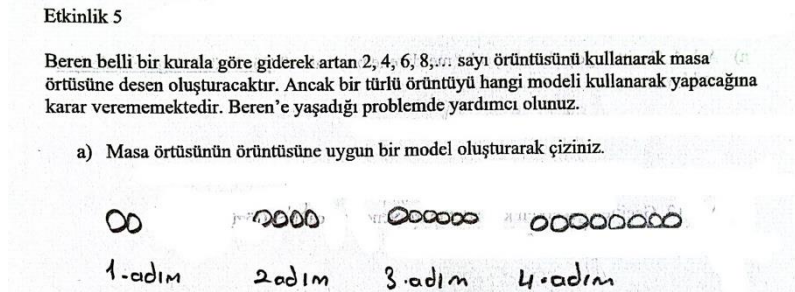
56O₁: Artış miktarı 3 olduğu için ilk 3n olmak zorunda. Sonra deneyerek rastgele birinci terimi seçtim ve elde etmek için 1 eklemem gerekiyordu.

51A: Neden 1 eklemen gerekiyordu?

57O₁: Çünkü birinci terim 4 çıkması için 3'e 1 eklemek gerek.

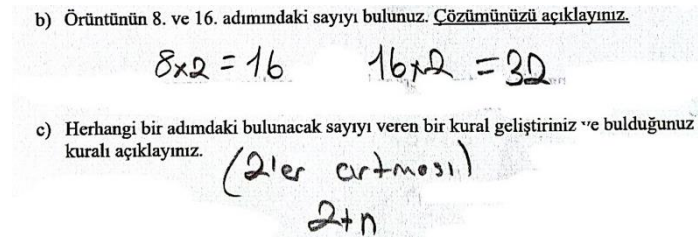
O₁'in ardışık terimler arası farka odaklanarak herhangi bir ortaklık ya da ilişkiye dayandırmadan deneme-yanılma yöntemi ile genel kuralı elde etmesi olgunlaşmamış tümevarım gerçekleştirdiğini destekler niteliktedir. Öğrencinin mülakat sürecindeki *'artış miktarı 3 olduğu için ilk 3n olmak zorunda, sonra deneyerek rastgele birinci terimi seçtim ve elde etmek için 1 eklemem gerekiyordu'* açıklaması ulaştığı cebirsel kuralı hiçbir düşünsel sürece dayandırmadan yapılandırıldığını göstermektedir. Bu bağlamda öğrencinin yazılı açıklamaları ve mülakat sürecindeki ifadeleri olgunlaşmamış tümevarımda bulunduğunu kanıtlar niteliktedir.

Bir başka benzer bir yaklaşım sergileyerek düşünsel süreçlerini olgunlaştıran O₃'ün Etkinlik 5'e ilişkin açıklamaları Şekil 25'te görülmektedir.



Şekil 25: O₃'ün örüntünün belirli bir bölümünü inceleme süreci (i)

Etkinlik 5'te kuralı " $2n$ " olan bir sayı örüntüsü için (a) maddesinde öğrencilerden örüntüye ait model oluşturmaları istenmiştir. Bu bağlamda bu maddede öğrencilerin "örüntü" kavramını nasıl anlamlandırdıklarının incelenmesi amaçlanmaktadır. O₃, örüntüye ilişkin model oluşturmaya yönelik anlamlı ve geçerli bir model geliştirmiştir. Bu bağlamda Şekil 25'te öğrencinin oluşturduğu model, örüntü kavramını doğru bir şekilde zihninde yapılandırdığını destekler niteliktedir. Ancak sonrasında öğrencinin gerçekleştirdiği problem çözme adımları ve açıklamaları incelendiğinde genel kuralın elde edilmesinde oluşturduğu modelden yararlanamadığı bulgusu elde edilmiştir. Açıklamalarında örüntüye ait ilişkilerin nümerik olarak ele alındığı görülmektedir.



Şekil 26: O₃ tarafından P_n ifadesinin oluşturulması (ii)

Etkinlik 5'in (b) maddesinde O₃'ün, örüntünün diğer terimlerini genel kural üzerinden elde ettiği görülmektedir. Ancak yaptığı işlemlere ilişkin geçerli bir açıklamada bulunmadığından dolayı ve (c) maddesinde örüntünün genel kuralını "ikişer artması ve $2+n$ " olarak ifade etmesi öğrencinin bulduğu genel kuralın ve işlemlerinin cebirsel olarak anlamlandırma süreci dahilinde yapılandırılmadan oluşturulduğu görülmektedir. Bu bağlamda öğrencinin olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı sergilediği görülmektedir.

Yarı Yapılandırılmış Mülakatlardan Elde Edilen Bulgular

Etkinlik 5'e ilişkin olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı sergileyen O₃'ün yazılı açıklamalarına ek olarak süreci nasıl yapılandırıldığını incelemek ve düşünsel süreçlerini açığa çıkarmak amacıyla yarı yapılandırılmış mülakat gerçekleştirilmiştir.

O₃ yazılı açıklamalarında nümerik olarak sunulan örüntüye ilişkin geçerli bir model geliştirmiş olsa da deneme-yanılma yoluyla genel bir kural oluşturma yöneliminde bulunmuştur. Gerçekleştirilen mülakat sonrasında, öğrencinin çözümleri ile mülakat sürecindeki açıklamaları arasında herhangi bir farklılığın olmadığı görülmüştür. Öğrencinin çözümlerinden gözlenebilen süreçlerini mülakatlarda da benzer olarak açıkladığı görülmektedir.

42A: Örüntüye ait modeli oluştururken nelere dikkat ettin? Hangi noktaları dikkate aldın?

44O₃: Hangi sayı yazıyorsa o kadar top çizdim yan yana. Örneğin ilk terim 2 top, ondan iki top çizdim. İkinci terim 4 top, bende dört top çizdim.

43A: Topları yan yana çizmenin bir sebebi var mıydı? Sence topların her bir adımdaki konumunun bir önemi var mıdır?

45O₃: Evet karışık yapsaydım örüntü olmazdı ki.

44A: Sence neden olmazdı? Oluşturduğun modelin geçerli bir örüntü olabilmesi için neleri referans aldın?

46O₃: Mesela ilk adımda iki topu yan yana, ikinci adımdaki dört topu da alt alta, üçüncü adımdakini de çapraz falan yapsaydım o zaman örüntü gibi devam etmezdi ki. Hep incelediğimiz örüntüler belirli bir düzene ve kurala göre devam ediyor. Bende buna dikkat ettim.

O₃'ün yazılı açıklamalarına ek mülakat sürecindeki açıklamaları "örüntü" kavramını doğru bir şekilde anlamlandırdığını destekler niteliktedir. Öğrencinin "*incelediğimiz örüntüler belirli bir düzene ve kurala göre devam ediyor, bende buna dikkat ettim*" söylemleri modeli oluştururken her bir terim için belirli ortaklıkların bulunmasına dikkat ettiğini göstermektedir.

58A: Örüntünün kuralını neden “2+n” olarak belirledin? Kurala ulaşırken nelere dikkat ettin?

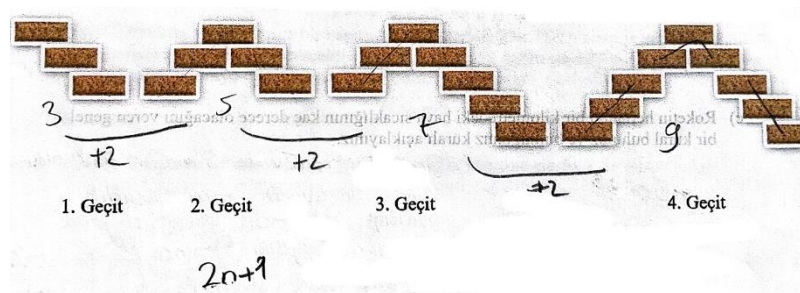
57O₃: Çünkü ikişer ikişer artıyordu. Bu nedenle bende artması için toplama yaparak n ile 2'yi topladım.

59A: n belirlediğin kuralda neyi ifade ediyor?

58O₃: Çok hatırlamıyorum. Top sayısını galiba.

Yukarıdaki dialogta görüldüğü gibi O_3 , oluşturduğu model veya sayı örüntüsü üzerinden geçerli bir kural elde edememektedir. Oluşturduğu ‘ $2+n$ ’ kuralında artış miktarı 2 olduğundan dolayı, herhangi bir bilinmeyene 2 ekleme gereği hissederek genel kuralı oluşturmuştur. Ayrıca örüntünün yakın ve uzak terimlerini geliştirdiği kural üzerinden değil, belirli bir mantığa dayanmayan hesaplamalar üzerinden elde etmiştir. Bu bağlamda O_3 ’ün düşünsel süreçlerini genelleme bağlamında yapılandırmadığı olgunlaşmamış tümevarımlar üzerinden gerçekleştirdiği görülmektedir.

Yazılı çözümleri ve açıklamalarında benzer bir yaklaşım göstererek olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı sergileyen Y₁'in Etkinlik 6'ya ilişkin yazılı çözümleri ve çözüme ait açıklamaları Şekil 27'de görülmektedir.



Şekil 27: Y_1 'in örüntünün belirli bir bölümünü inceleme süreci (i)

Y₁'in diğer etkinliklerde gerçekleştirdiği işlem ve açıklamalara benzer bir yaklaşım sergileyerek verilen şekil örüntüsünü nümerik olarak ifade ederek sayı örüntüsüne dönüştürdüğü Şekil 27'de görülmektedir. Ardışık terimler arası farkı "2" olarak belirlemiş ve bu doğrultuda genel kuralı " $2n+1$ " olarak belirlemiştir.

merdivenler 2'şer arttığı için kural $2n$ dir. n yerine adım sayısını yazınca 1 tane eksik kalıyor. Yani kural $2n+1$

$(2n = 2 \cdot 1 = 2 \quad 2+1=3 \quad \text{Ama 3 tane var.})$

Şekil 28: Y_1 tarafından P_n ifadesinin oluşturulması (ii)

Y_1 'in Etkinlik 6'daki yanıtlarında, verilen şekil örüntüsüne ilişkin model üzerinden ortaklık ve ilişkileri idrak etmediği gözlemlenmiştir. Örüntü üzerinde değişen veya değişmeyen kısımları inceleyerek örüntüyü anlamlandırmak yerine ardışık terimler arası farka odaklanarak kuralda " $2n$ " ifadesinin bulunması gerektiğini belirtmiştir. Öğrencinin "merdivenler ikişer arttığı için kural $2n$ 'dir, n yerine adım sayısını yazınca 1 tane eksik kalıyor, yani kural $2n+1$ " söylemi, deneme-yanılma stratejisinin kullanılarak genel bir kural elde etme yöneliminde olduğunu göstermektedir. Bu bağlamda öğrencinin cebirsel anlamda düşünsel süreçlerini olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı bağlamında yapılandığı söylenebilir. Ayrıca Y_1 'in, örüntünün verilen terimlerine ilişkin yakın ve uzak terimleri de bu genel kural üzerinden elde ettiği gözlemlenmiştir (Şekil 29).

a) Aslı 4. Geçitten geçerken kaç adet merdivene basacaktır? açıklayınız.
 $2n+1 \quad 2 \cdot 4 = 8+1$
 9

b) Aslı 12. Geçitten geçerken kaç adet merdivene basacaktır? gerekçeleriyle açıklayınız.
 $2 \cdot 12 = 24+1$
 25

Şekil 29: Y_1 'in örüntünün terimlerini elde etme süreci

Yarı Yapılandırılmış Mülakatlardan Elde Edilen Bulgular

Etkinlik 6'ya ilişkin olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı sergileyen Y_1 'in yazılı açıklamalarına ek olarak süreci nasıl yapılandırıldığını incelemek ve düşünsel süreçlerini açığa çıkarmak amacıyla yarı yapılandırılmış mülakat gerçekleştirilmiştir.

Y_1 yazılı açıklamalarında deneme-yanılma yoluyla genel bir kural oluşturma yöneliminde bulunmuştur. Gerçekleştirilen mülakat sonrasında, öğrencinin çözümleri ile mülakat sürecindeki açıklamaları arasında herhangi bir farklılığın olmadığı görülmüştür. Öğrencinin çözümlerinden gözlenebilen süreçlerini mülakatlarda da benzer olarak açıkladığı görülmektedir.

34A: Verilen örüntüye ilişkin genel kurala nasıl ulaştın? Ne şekilde düşündün?

29Y₁: Terimler arası farka baktım öğretmenim. O zaten bizim genel kuralımızın katsayısı oluyor. Sonra deneyerek birinci ya da ikinci terimi elde etmeye çalıştım. Böylece kaç ekleyip çıkarmam gerektiğini buldum.

35A: Artış miktarı hep genel kuralın katsayısı mı olmak zorunda?

30Y₁: Evet hep öyle oluyor.

36A: Neden, bu genellemeye nereden ulaştın?

31Y₁: Birkaç örüntünün genel kuralını incelediğimde artış miktarının hep örüntünün genel kuralının katsayısı olduğunu farkettim. Mesela 2, 4, 6, ... şeklinde giden bir örüntünün genel kuralı $2n$. Artış miktarı da 2. Bu hep öyle olmak zorunda.

37A: Peki, sence artış miktarının örüntünün genel kuralına ait katsayı olmasının bir sebebi olabilir mi? Neden katsayı olduğunu hiç sorguladın mı?

32Y₁: 5. sınıfta bir örüntünün kuralı hep *ikişer artıyor, üçer azalıyor* şeklinde sözel olarak ifade ederdik. Demek ki örüntünün artış miktarı kuralı bulmada gereklidir, şeklinde düşünüyorum. Ondan olabilir.

Öğrencinin mülakat sürecindeki açıklamaları ve söylemleri, cebirsel bir kurala ulaşma sürecindeki gerekçelendirmeleri, örüntüyü cebirsel olarak anlamlandırma sürecinden uzak, sorgulama ve düşünmenin aksine ezber bir yöntem benimsenerek yapılandırıldığını gösterir niteliktedir. Öğrenci tarafından benimsenen strateji sorgulatıldığında açıklama ve gerekçelerinin doğrultusunda öğrencinin, belirli bir mantığa dayanmayan çıkarımlarda bulunduğu görülmektedir.

41A: Etkinliğin (a) ve (b) maddelerini cevaplarken nasıl bir yol izledin? Örüntüye ilişkin diğer terimleri elde ederken ne şekilde düşündün?

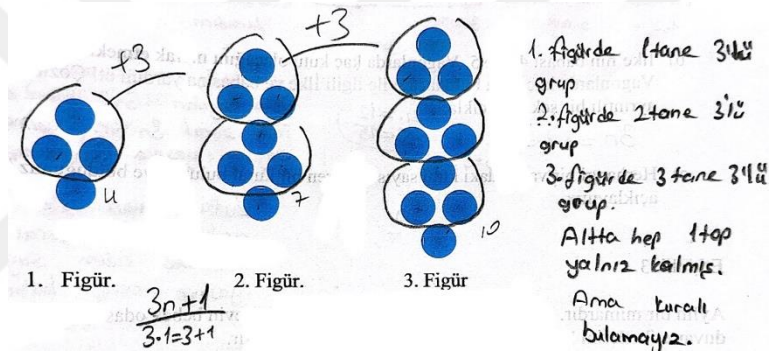
44Y₁: Genel kuralı bulduktan sonra deneyerek yerine koydum. Sonra tekrar doğru yapıp yapmadığımı kontrol etmek için artış miktarını verilen terimlere ekledim. Aynı çıkınca doğru olduğundan emin oldum.

Y₁'in '*kuralı bulduktan sonra deneyerek yerine koydum, sonra tekrar doğru yapıp yapmadığımı kontrol etmek için artış miktarını terimlere ekledim*' söylemleri, örüntünün

yakın ve uzak terimlerini kural üzerinden deneyerek elde ettiğini ve elde ettiği terimlerin doğruluğunu örüntüyü devam ettirerek kontrol ettiği gözlemlenmiştir.

Yapılan açıklamalar ve yazılı çözümler doğrultusunda öğrencinin deneme-yanılma yaklaşımı benimseyerek olgunlaşmamış tümevarım sergilediği bulgusu elde edilmiştir. Bu bağlamda öğrencinin geçirdiği düşünsel süreçlere ilişkin cebirsel düşünmenin ve genellenmenin varlığından söz edilemeyeceği görülmektedir.

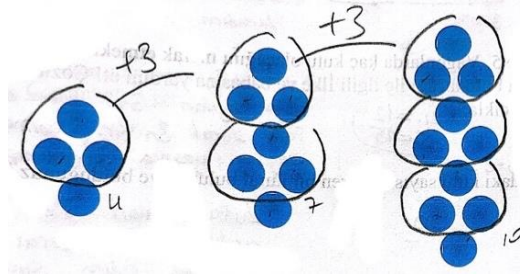
Şekil 30’da Etkinlik 4’e ilişkin olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı sergileyen Y₂’nin verilen örüntüye ilişkin şekil üzerinden ortaklıkları fark ettiği ancak fark edilen ortaklığı örüntünün diğer terimlerine genellemediği, bu bağlamda düşünsel süreçlerini olgunlaşmamış tümevarım bağlamında yapılandığı görülmektedir.



Şekil 30: Y₂'nin örüntüye ilişkin ortaklıkları keşfetme süreci

Y₂'nin etkinlik 4'e ilişkin yazılı açıklamalarından problem çözme adımlarına geçmeden önce şekil üzerinden örüntünün terimleri arasındaki ilişki ve ortaklıkları anlama çabasında olduğu görülmektedir. Her adımda bulunan daire sayısını üçerli olarak gruplandırmıştır. Ayrıca öğrencinin "birinci figürde bir tane üçlü grup, ikinci figürde iki tane üçlü grup, üçüncü figürde üç tane üçlü grup" söylemleri, her bir figürde bulunması gereken grup sayısını adım sayısı ile ilişkilendirdiğini göstermektedir. Öğrencinin yazılı çözümleri ve çözüme ilişkin açıklamaları örüntüye ilişkin ortaklıkları model üzerinden anlamlandırdığını ve fark ettiğini destekler niteliktedir. Ayrıca Y₂, "altta hep 1 top yalnız kalmış" şeklinde açıklamada bulunarak modelin değişen ve değişmeyen kısımlarını fark ettiğini kanıtlamaktadır. Ancak bu noktada öğrencinin "ama kuralı bulamıyoruz" açıklaması, fark edilen ortaklığın örüntünün diğer terimlerine genellemediğini gösterir niteliktedir. Bu bağlamda öğrenci problem çözme sürecini geliştirdiği hipotez üzerinden yapılandıramayacağını fark ederek olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımına yönelmiştir.

Y_2 'nin tümevarım sürecine ilişkin sergilediği açıklama ve çözümler Şekil 31'de görülmektedir.



Şekil 31: Y_2 'in örüntünün belirli bir bölümünü inceleme süreci (i)

Y_2 , örüntüye ilişkin ortaklıkları şekil üzerinden fark etmiş olsa da buna ilişkin bir hipotez geliştirememiş ve genelleme sürecini cebirsel genelleme bağlamında olgunlaştıramamıştır. Y_2 'nin her bir adımdaki bulunan daire sayısını belirleyerek ve şekil örüntüsünü 4, 7, 10, ... şeklinde devam eden sayı örüntüsüne dönüştürdüğü görülmektedir. Bu noktada Y_2 'nin, ardışık her bir terim arası farka odaklanarak genel bir kural elde etme çabasında olduğu görülmektedir.

Figürler 3'er 3'er arttığı için
kural $3n$ 'dir. n yerine adım sayısını yazınca
1 tane eksik kalıyor. Bu yüzden kural $3n+1$ 'dir

Şekil 32: Y_2 tarafından P_n ifadesinin oluşturulması (ii)

Y_2 , ardışık terimler arası farka odaklanarak kuralda " $3n$ " ifadesinin bulunması gerektiğini belirtmiştir. Öğrencinin "figürler üçer üçer arttığı için kural $3n$ 'dir, n yerine adım sayısını yazınca 1 tane eksik kalıyor, bu yüzden kural $3n+1$ 'dir" söylemi, deneme-yanılma stratejisinin kullanılarak genel bir kural elde etme yöneliminde olduğunu göstermektedir. Bu bağlamda öğrencinin cebirsel anlamda düşünsel süreçlerini olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı bağlamında yapılandığı söylenebilir.

Yarı Yapılandırılmış Mülakatlardan Elde Edilen Bulgular

Etkinlik 4'e ilişkin olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı sergileyen Y_2 'nin yazılı açıklamalarına ek olarak süreci nasıl yapılandığını incelemek ve düşünsel süreçlerini açığa çıkarmak amacıyla yarı yapılandırılmış mülakat gerçekleştirilmiştir.

Y₂ yazılı açıklamalarında şekil üzerinden örüntüye ilişkin ortaklıkları fak etmiş olsa da deneme-yanılma yoluyla genel bir kural oluşturma yöneliminde bulunmuştur. Gerçekleştirilen mülakat sonrasında, öğrencinin çözümleri ile mülakat sürecindeki açıklamaları arasında herhangi bir farklılığın olmadığı görülmüştür. Öğrencinin çözümlerinden gözlenebilen süreçlerini mülakatlarda da benzer olarak açıkladığı görülmektedir.

34A: Verilen örüntüye ilk olarak odaklandığında ne şekilde düşündün? Örüntüye ilişkin neleri gözlemledin?

37Y₂: İlk baktığımda şekil üzerinden gruplamaya başlamıştım. Çünkü üçlü gruplar vardı ve sürekli tekrar ediyordu. Onlar dikkatimi çekmişti.

35A: Sonrasında bazı açıklamalarda bulunmuşsun. Mesela *“birinci figürde bir tane üçlü grup, ikinci figürde iki tane üçlü grup, üçüncü figürde üç tane üçlü grup”* şeklinde ifade etmişsin. Bu açıklamaları yazarken örüntüye ilişkin hangi özelliklere dikkat ettin?

38Y₂: Evet çünkü grupladıktan sonra hep adım sayısı kadar üçlü grup vardı. Hep altta da bir tane daire yalnız kalıyordu. Ama bunları fark etmemin beni genel kurala götürmeyeceğini düşündüm.

36A: Neden genel kurala ulaşamayacağını düşündün?

39Y₂: Çünkü şekil üzerinden bir kural elde edilemez ki. Ancak sayısal bir şeylerin olması gerekli.

37A: Açıklamaların üzerinden ilerleyecek olursak, üçüncü figürde üç tane üçlü grup olursa sence dördüncü figürde kaç kaç tane üçlü grup olur?

40Y₂: Bu sefer dört tane üçlü grup olacak. Aaa tamam öğretmenim 3x4 işlemi 12 eder. Birde 1 eklersek 13 tane daire olmuş olur dördüncü adımda. Vay be.

38A: Neden bir eklemen gerektiğini düşündün?

41Y₂: Çünkü gruplayınca her adımda en altta bir daire yalnız kalıyordu. Bu bir örüntü olduğuna göre diğer adımlarda da değişmemesi ve en alttaki dairenin yalnız tek kalması gerekli. O nedenle 1 ekledim en son. O zaman bütün terimleri böyle elde edebiliriz.

39A: Sence örüntünün bütün terimlerini bu şekilde düşünerek nasıl elde edebiliriz?

42Y₂: Kaçınıcı adımda ise adım sayısıyla 3'ü çarparım ve en son kalan 1 daireyi eklerim.

40A: Peki sözel bir ifadeden nasıl matematiksel bir ifadeye dönüştürebiliriz sence?

43Y₂: Kaçınıcı adım olduğunu bilmediğimiz için dönüştüremeyiz. Ama mesela 100. Adım bile olsa 100×3 işlemi 300 eder. $300 + 1$ 'den 301 daire çıkar.

Y₂'nin yazılı açıklamaları incelendiğinde örüntüye ilişkin ortaklıkları fark ettiği ancak fark ettiği ortak özelliği örüntünün diğer terimlerine genelleyemediği bulgusuna ulaşılmıştır. Ancak mülakat sürecindeki açıklamaları yazılı açıklamalarından farklı olarak geliştirdiği hipotezi anlamlandırarak örüntünün diğer terimlerine ulaşabildiği görülmektedir. Ancak mülakatın devamında örüntüye ilişkin genel bir kural oluşturamadığı bulgusu elde edilmiştir.

41A: Peki geliştirdiğin hipotez üzerinden devam edecek olursak herhangi bir terime ulaşmamızı sağlayan genel bir kural elde edebilir miyiz?

44Y₂: Bilmiyorum bence edemeyiz. Böyle hepsini söyleyerek yapabiliriz. Zaten ben şekil üzerinden çıkmayacağını anladığımda tekrar artış miktarına odaklanarak deneyerek hemen buldum.

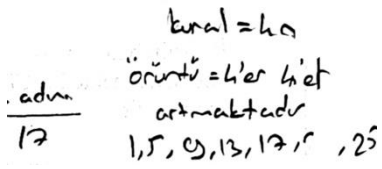
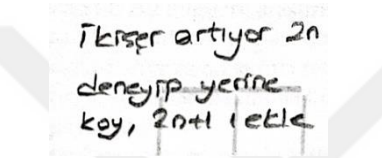
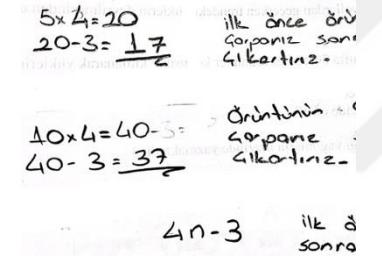
Y₂'nin *“şekil üzerinden çıkmayacağını anladığımda tekrar artış miktarına odaklanarak deneyerek hemen buldum”* söylemi, öğrencinin deneme-yanılma stratejisine yöneldiğini ve olgunlaşmamış tümevarım gerçekleştirdiğini kanıtlar niteliktedir. Her ne kadar örüntüye ilişkin ortaklık ve ilişkileri anlamlandırmış olsa da fark ettiği ortaklıklar üzerinden genel bir kural elde edememiştir. Bu bağlamda tekrar deneme-yanılma yoluyla bir genel kural elde ederek ardışık terimler arası farka odaklanmaya yönelmiştir. Öğrencinin yazılı çözümleri ve mülakat sürecindeki açıklamaları doğrultusunda olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı sergilediği görülmektedir.

Olgunlaşmamış Tümevarım Yaklaşımı Sergileyen Öğrencilere İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Yazılı çözümlerinin incelenmesinin ardından yapılan yarı yapılandırılmış mülakat çalışmaları ile öğrencilerin olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı gerçekleştirme süreçlerine ilişkin sonuçlara ulaşılmaktadır. Öğrencilerin olgunlaşmamış tümevarım sürecinde benzer gerekçelendirme ve açıklamalarda bulunduğu görülmektedir. Öğrencilerin olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı sergileme süreçlerini gösteren ortak açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 13'te görülmektedir.

Tablo 13

Olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı sergileyen öğrenci açıklamaları

Örnek Çözüm	Yazılı Açıklamalar	Öğrenci
	"sadece artışa baktım ve saydım" "dörder dörder arttığı için kural $4n$ olmalı" "her bir terim arasındaki fark 3, bu nedenle kuralda $3n$ bulunmak zorunda" "ikişer arttığı için kural $2n$'dir"	D₃ Y₁ O₃
	"n yerine adım sayısını yazınca 1 tane eksik kalıyor, bu yüzden kural $3n+1$'dir" "deneyerek rastgele birinci terimi seçtim ve elde etmek için 1 eklemem gerekiyordu"	Y₁ O₁ D₂
	"ilk önce kaçar arttığını buluruz sonra da 1. adımdaki halini bulmak için ne kadar çıkarmamız gerektiğini deneriz" "$3n+1$, 4 çıkması için 1 ekledim, sonra istenen terimleri bulmak için yerine koydum ve kural üzerinden elde ettim"	Y₃ O₂ D₁ Y₂

Öğrencilerin olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı sergileme süreçlerini gösteren ortak açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 13'te görülmektedir. Sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim öncesinde öğrencilerin yazılı çözümleri ve mülakat sürecindeki açıklamaları incelendiğinde en çok olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı sergilediği bulgusuna ulaşılmıştır.

Olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı benimseyen öğrencilerin, örüntüye ilişkin ortak yapı ve ilişkilerin fark edilerek genelleme yoluyla cebirsel bir kurala ulaşmak yerine kuralın deneme-yanılma stratejisi kullanılarak elde edildiği görülmektedir. Olgunlaşmamış tümevarım süreci, cebirsel genelleme sürecinin ilk ve son adımını içermektedir. Bu bağlamda öğrencilerin örüntüye ait terimler arası ortaklık ya da sayılar arasında bulunan yapı ve ilişkileri dikkate almadıkları bulgusuna ulaşılmıştır.

4.1.2. Aritmetik Genelleme Sergileyen Öğrenci Yaklaşımı

Aritmetik genelleme; sayı veya şekil örüntüsünün tamamına değil de belirli bir bölümüne odaklanıldığından dolayı bir başka terimi elde etmeye yönelik değildir ve bu nedenle bu genelleme türünde cebirsel bir yapı söz konusu değildir. Aritmetik genelleme sürecinde elde edilen hipotezden diğer terimlerin bulunması için cebirsel yapıya sahip bir genel kural geliştirilememektedir. Cebirsel genelleme sürecinin son adımı olan p_n ifadesini oluşturma, yani cebirsel yapıya sahip bir genel kural elde etme aşaması aritmetik genelleme sürecinde bulunmamaktadır. Öğrencilerin ardışık terimler arası farkı bulma ve bu farka odaklanarak diğer terimleri elde etmeye çalışma, terimler arası ilişkilerin sayılarla belirtilmesi, ardışık terimler arası farkın yapısını inceleme gibi stratejiler benimsemesi, aritmetik genelleme sürecinde öğrencilerin odaklandığı yöntemler arasında yer aldığı söylenilebilir (Yeşildere, Akkoç, Baştürk – Şahin, 2017).

Sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim öncesi öğrencilerin yazılı çözümleri ve mülakat sürecindeki açıklamaları incelendiğinde olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımının yanı sıra aritmetik genelleme yaklaşımının da ortaya çıktığı bulgusuna ulaşılmıştır.

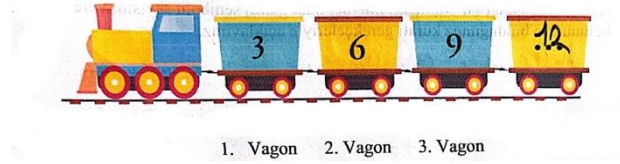
Öğrencilerin yazılı çözümlerinden aritmetik genelleme sürecini nasıl şekillendirdikleri aşağıdaki bileşenler doğrultusunda incelenmektedir.

- (i) Sayı örüntüsüne ilişkin ortak özelliği fark etme,
- (ii) Fark edilen ortak özelliğin örüntünün diğer terimlerinin içerip içermediğini inceleme, şeklindedir.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

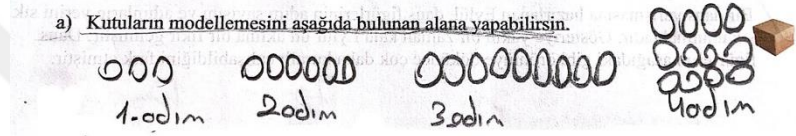
Aritmetik genelleme gerçekleştiren öğrenciler, verilen sayı veya şekil örüntüsüne ilişkin ortaklıkları aritmetik veya nümerik veriler kullanarak ifade ederler. Yani örüntüye ilişkin ortaklıkları aritmetik düzeyde açıklama yeteneği gösterirler. Cebirsel kuralı “ $an+b$ ” şeklinde yapıya sahip olan bir örüntünün genel kuralını “ $an + \text{ortak fark}$ ” şeklinde özyinelemeli bir ifade ile belirtirler. Ancak cebirsel olarak genel bir ifade sağlamazlar. Örneğin öğrencilere 5, 7, 9, ... şeklinde devam eden bir örüntü verilerek 100. terimi sorulduğunda, örüntünün terimini terim terim 100’e genişletme ve ilerletme gibi çözüm stratejileri aritmetik genelleme sürecine bir örnektir. Aritmetik genellemenin en önemli özelliği analitik eksikliğidir (Radford, 2012).

Etkinlik 2'ye ilişkin bu şekilde bir yaklaşım sergileyen D₂'nin çözüm süreci ve çözüme ilişkin açıklamaları Şekil 33'te görülmektedir.



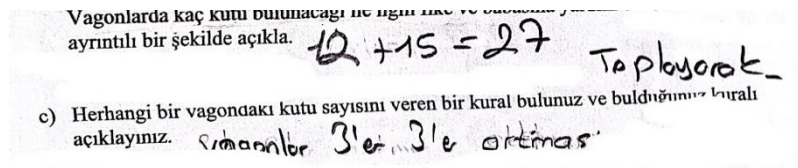
Şekil 33: D₂'nin sayı örüntüsüne ilişkin ortak özelliği fark etme süreci (i)

Şekil 33'te D₂'nin kuralı "3n" olan sayı örüntüsüne ait ortak özelliği fark etmesine ilişkin stratejisini "ardışık terimler arasındaki ilişkiyi inceleme" olarak seçtiği görülmüştür. Bu strateji ile örüntünün verilen terimlerine yönelik yakın ve uzak terimlere ulaşabildiği görülmektedir.



Şekil 34: D₂ tarafından örüntünün anlamlandırılma süreci

Şekil 34'te etkinliğin (a) maddesinde öğrencilerden örüntüye ait anlamlı bir model oluşturmaları istenmiştir. Bu bağlamda bu maddede öğrenci tarafından "örüntü" kavramının nasıl anlamlandırıldığının incelenmesi amaçlanmaktadır. Ancak D₂, örüntüyü anlamlandırma ve genel bir kural elde etmeye yönelik geçerli bir model oluşturamamıştır. D₂'nin geliştirdiği model şekil üzerinden incelendiğinde ilk üç adımı belirli bir ilişki ve düzen dahilinde oluşturulduğu görülmektedir. Ancak öğrencinin dördüncü terim için geliştirdiği model incelendiğinde modelin diğer terimlerle ortak bir ilişki içerisinde olmadığı görülmektedir. Örneğin 3. terimden 4. terime geçişte belirli bir düzen mevcut değildir. Öğrenci ilk üç adımda yan yana konumda bulunan çemberlerden oluşan bir model oluştururken 4. terimde rastgele çemberleri alt alta konumlandırmaktadır. 4. terimdeki model, diğer terimlerden bağımsız bir şekilde oluşturulmuştur. Ayrıca örüntüye ait genel bir kural elde etme de D₂'nin oluşturduğu modeli nasıl kullanacağını bilgisinin bulunmadığı açıklamalarından gözlemlenmektedir.



Şekil 35: D₂'nin fark edilen ortak özelliğin örüntünün diğer terimlerinin içerip içermediğini inceleme süreci (ii)

D₂, etkinlik 2’de yazılı çözüm ve açıklamalarında genel kuralı “ $3n$ ” olan sayı örüntüsü için ardışık terimler arası miktara odaklandığı görülmektedir. Bu strateji ile örüntünün verilen terimlerine ilişkin yakın ve uzak terimlerini hesaplayabildiği bulgusu (b) maddesinden elde edilmektedir. Ancak öğrencinin 12 ve 15 sayılarını neden topladığına ilişkin geçerli bir açıklama bulunmamaktadır. Öğrencinin “*vagonlar üçer üçer artması*” söylemi terimler arası ilişki ve ortaklıkları aritmetik olarak ifade ettiğini gösterir niteliktedir. D₂’nin ardışık terimler arası farkı bulma ve bu farka odaklanarak diğer terimleri elde etmeye çalışma, terimler arası ilişkilerin sayılarla belirtilmesi, ardışık terimler arası farkın yapısını inceleme gibi stratejiler benimsemesi, aritmetik genelleme yaptığını göstermektedir.

Yarı Yapılandırılmış Mülakatlardan Elde Edilen Bulgular

Etkinlik 2’ye ilişkin aritmetik genelleme yaklaşımı sergileyen D₂’nin yazılı açıklamalarına ek olarak süreci nasıl yapılandırıldığını incelemek ve düşünsel süreçlerini açığa çıkarmak amacıyla yarı yapılandırılmış mülakat gerçekleştirilmiştir.

D₂ yazılı açıklamalarında ardışık terimler arası farkı bulma ve bu farka odaklanarak diğer terimleri elde etmeye çalışmış ancak belirlediği ilişkiye yönelik cebirsel bir kural elde edememiştir. Gerçekleştirilen mülakat sonrasında, öğrencinin çözümleri ile mülakat sürecindeki açıklamaları arasında herhangi bir farklılığın olmadığı görülmüştür. Öğrencinin çözümlerinden gözlenebilen süreçlerini mülakatlarda da benzer olarak açıkladığı görülmektedir.

18A: Örüntüye ilk odaklandığında nelere dikkat ettin? Nasıl düşündün?

20D₂: Üçer üçer artarak devam ediyordu. Bu nedenle bende diğer terimleri önceki terimlere üç ekleyerek elde ettim. Mesela üçüncü terim 9 olduğu için bir sonraki $9+3$ ’ten 12 buldum ve vagona yazdım.

19A: Peki neden 12 ile 15’i toplayarak 27 elde ettin?

21D₂: Çünkü 4. ve 5. terimi soruyordu. Dördüncü terim 12 olunca bir kere daha 3 ekledim 15, o da beşinci terimi vermiş oldu.

20A: Peki neden onları topladın?

22D₂: Çünkü örüntü artarak ilerliyordu. Artış olduğu için toplama yapmak gerekli bende ondan topladım.

21A: Peki, toplayarak bulduğun 27 sayısı neyi ifade ediyor?

23D₂: Sadece toplama yapmamız istendiğini düşündüğüm için toplama yaptım.

D₂'nin mülakat sürecindeki açıklamaları yazılı açıklamalarını destekler niteliktedir. Öğrencinin *“diğer terimleri önceki terimlere üç ekleyerek elde ettim”* söylemi, ardışık terimler arası farkın yapısını incelemesi, ardışık terimler arası farkı bularak ve bu farka odaklanarak diğer terimleri elde etmeye çalıştığını gösterir niteliktedir.

25A: Örüntüye ilişkin model oluşturulması istendiğinde dördüncü terimde oluşturduğun çemberleri ilk üç adımdaki çemberlerden farklı şekilde konumlandırmışsın. Neden dördüncü terimi bu şekilde modelleme gereği hissettin?

28D₂: Ne şekilde olduğuna dikkat etmedim ki. Sadece ilk vagonda 3 sayısı vardı, ondan 3 top çizdim. İkinci vagonda 6 sayısı olduğundan 6 top çizdim. Dördüncü vagonda da 12 top olacağından 12 tane topu çizdim. Doğru yapmamış mıyım?

26A: Sence sayı örüntüsünden şekil örüntüsüne aktarılan bir modelin anlamlı ve geçerli bir *“örüntü”* olabilmesi için yalnızca terimde hangi sayının bulunduğuna dikkat etmek yeterli midir?

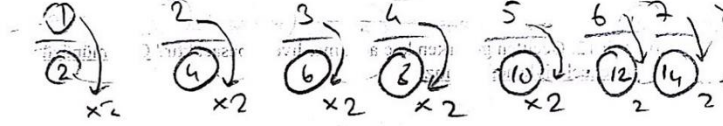
29D₂: Bilmiyorum ben yeterli olacağını düşünmüştüm.

Öğrencinin *“ne şekilde olduğuna dikkat etmedim, sadece ilk vagonda 3 sayısı vardı, ondan 3 top çizdim, ikinci vagonda 6 sayısı olduğundan 6 top çizdim, dördüncü vagonda da 12 top olacağından 12 tane topu çizdim”* söylemleri *“örüntü”* kavramını anlamlandırırken herhangi bir düşünsel süreç gerçekleştirmeden rastgele bir şekilde modelin oluşturulduğunu destekler niteliktedir. Bu bağlamda öğrencinin ardışık terimler arası farkı bulma ve bu farka odaklanarak diğer terimleri elde etmeye çalışması, yazılı açıklamaları ve mülakat sürecinde bulunduğu açıklamalar düşünsel süreçlerini aritmetik genelleme bağlamında yapılandırıldığını göstermektedir.

Yazılı çözümleri ve açıklamalarında benzer bir yaklaşım göstererek aritmetik genelleme yaklaşımı sergileyen Y₁'in Etkinlik 6'ya ilişkin yazılı çözümleri ve çözüme ait açıklamaları Şekil 36'da görülmektedir.

Beren belli bir kurala göre giderek artan 2, 4, 6, 8, ... sayı örüntüsünü kullanarak masa örtüsüne desen oluşturacaktır. Ancak bir türlü örüntüyü hangi modeli kullanarak yapacağına karar verememektedir. Beren'e yaşadığı problemde yardımcı olunuz.

a) Masa örtüsünün örüntüsüne uygun bir model oluşturarak çiziniz.



Şekil 36: Y₁'in sayı örüntüsüne ilişkin ortak özelliği fark etme süreci (i)

Y₁, (a) maddesinde örüntüye ilişkin bir model oluşturmak yerine, verilen sayı örüntüsüne ilişkin terim ile terim sayısı arasındaki ilişkiye odaklanmıştır. Y₁'in her bir terimin adım sayısının iki katı olduğunu fark etme ve örüntüye ilişkin ortaklıkları belirleme süreci Şekil 35'te görülmektedir. Y₁, her bir terimin adım sayısının iki katı olduğunu ayırt etmiştir. Belirlediği ortak özelliği örüntünün diğer terimlerine genelleyerek örüntüye ilişkin yakın ve uzak terimleri bu şekilde elde etmektedir (Şekil 36).

b) Örüntünün 8. ve 16. adımındaki sayıyı bulunuz. Cözümünüzü açıklayınız.

adım sayısının
iki katı
n = adım sayısı
 $2 \cdot 8 = 16$
8. adımda 16 olur
 $2 \cdot 16 = 32$
16. adımda 32 olur

Şekil 37: Y₁'in fark edilen ortak özelliğin örüntünün diğer terimlerinin içerip içermediğini inceleme süreci (ii)

Y₁, belirlediği ortak özelliğin, örüntünün 8. ve 16. Adımları içinde geçerli olacağını fark etmiştir. 8. ve 16. Adımlar için de bulunacak terim adım sayısının iki katı olacağından "2.8" ve "2.16" ilişkisini kurabilmesi ile örüntüye ilişkin belirlenen ortak özelliğin örüntünün diğer terimlerine transfer etme aşamasına kadar geldiği görülmektedir. Fakat oluşturduğu hipotezden bir sonuç çıkaramamıştır. Dolayısıyla cebirsel genelleme gerçekleştirememiştir. Ancak örüntünün genel kuralını "her adım sayısının iki katı olmalı" şeklinde ifade ettiğinden dolayı aritmetik genelleme yapabildiğini gösterir niteliktedir. Bu bağlamda öğrencinin aritmetik genelleme yaklaşımı gerçekleştirdiği bulgusuna ulaşılmaktadır.

Yarı Yapılandırılmış Mülakatlardan Elde Edilen Bulgular

Etkinlik 5'e ilişkin aritmetik genelleme yaklaşımı sergileyen Y₁'in yazılı açıklamalarına ek olarak süreci nasıl yapılandırıldığını incelemek ve düşünsel süreçlerini açığa çıkarmak amacıyla yarı yapılandırılmış mülakat gerçekleştirilmiştir.

Y₁ yazılı açıklamalarında verilen sayı örüntüsü üzerinden örüntüye ilişkin ortaklıkları fak etmiş olsa da cebirsel bir genel kural elde edememiştir. Gerçekleştirilen mülakat sonrasında, öğrencinin çözümleri ile mülakat sürecindeki açıklamaları arasında herhangi bir farklılığın olmadığı görülmüştür. Öğrencinin çözümlerinden gözlenebilen süreçlerini mülakatlarda da benzer olarak açıkladığı görülmektedir.

42A: Örüntüye ilişkin genel kuralı “*hep adım sayısının iki katı olmalı*” şeklinde ifade etmişsin. Bu açıklamayı yaparken ne şekilde düşündün?

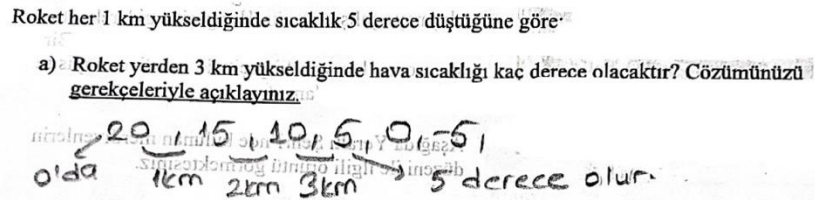
38Y₁: 2, 4, 6, 8, ... şeklinde devam ediyordu. İlk 2, daha sonra 4 vardı. Yani birinci terimde 2 sayısı, ikinci terimde 4 sayısı vardı. Hangi sayının olacağına hep adım sayısının iki ile çarpılarak ulaşıldığını fark ettim. Bu nedenle hangi adımdaki sayıyı bulmak istersek onu 2 ile çarpmamız yeterli olacaktır.

43A: İlişkilendirdiğin ortaklıklar üzerinden ilerleyecek olursak sence örüntünün herhangi bir adımını doğrudan elde edebileceğimiz cebirsel bir kural oluşturabilir miyiz?

39Y₁: İşte az önce oluşturdum. Hangi adım isteniyorsa onun iki katını alırsak ya da 2’yle çarpabiliriz.

Y₁’in mülakat sürecindeki söylemleri incelendiğinde fark ettiği ortak özellikler üzerinden hipotez geliştirerek cebirsel bir kural oluşturmak yerine kuralı sözel ifadeler kullanarak açıklaması cebirsel genelleme gerçekleştiremediğini göstermektedir. Bu bağlamda Y₁, adım sayısı ile terim arasında bir ilişki kurmuş ancak bu ilişkiyi notasyon kullanarak cebirsel bir şekilde ifade edemediğinden dolayı aritmetik genelleme yaklaşımı sergilemiştir.

Benzer bir strateji geliştirerek düşünsel süreçlerini bu şekilde yapılandıran Y₃’ün Etkinlik 7’ye ait yazılı çözümleri ve çözüme ilişkin açıklamaları Şekil 38’de görülmektedir.



Şekil 38: Y₃’ün sayı örüntüsüne ilişkin ortak özelliği fark etme süreci (i)

Y₃’ün, cebirsel anlamda düşünsel süreçlerini aritmetik genelleme bağlamında olgunlaştırdığı Şekil 38’de görülmektedir. Y₃, etkinlik 7’de yazılı çözüm ve açıklamalarında genel kuralı “ $-5n+20$ ” olan sayı örüntüsü için ardışık terimler arası miktara odaklandığı

görülmektedir. Bu strateji ile örüntünün verilen terimlerine ilişkin yakın ve uzak terimlerini hesaplayabildiği bulgusu (a) maddesinden elde edilmektedir. Ayrıca öğrencinin problem çözme adımları incelendiğinde örüntünün diğer terimlerine verilen terimler üzerinden azaltarak ulaşması problemin bağlamını anlamlandırdığını gösterir niteliktedir.

b) Roket yerden 100 km yükseldiğinde hava sıcaklığı kaç derece olacaktır? Çözümünüzü gerekçeleriyle açıklayınız.

Başta hep 20 olmalı. azaldığı için -5 ile çarpılır.

$$100 \cdot (-5) = -500$$

Başta hep 20 olmalı. azaldığı için -5 ile çarpılır.

$$-500 + 20 = -480$$

Şekil 39: Y₃'ün fark edilen ortak özelliğin örüntünün diğer terimlerinin içerip içermediğini inceleme süreci (ii)

Öğrencinin ‘‘başta hep 20 olmalı, azaldığı için -5 ile çarpılır’’ söylemi terimler arası ilişki ve ortaklıkları sözel olarak ifade ettiğini gösterir niteliktedir. Y₃'ün ‘‘20 derecenin’’ hep sabit olacağını fark etmesi ve örüntünün terimlerinin adım sayısının ‘‘-5’’ katı alınarak ulaşılacağına ilişkin açıklaması verilen probleme ilişkin değişen veya değişmeyen kısımları anlamlandırdığı bulgusunu göstermektedir. Y₃, belirlediği ortak özelliğin, örüntünün 100. adım içinde geçerli olacağını fark etmiştir. 100. adım için de bulunacak terim, adım sayısının -5 katının 20 fazlası olacağından ‘‘100.(-5) = - 500’’ ve ‘‘(-500) + (20) = - 480’’ ilişkisini kurabilmesi ile örüntüye ilişkin belirlenen ortak özelliğin örüntünün diğer terimlerine transfer etme aşamasına kadar geldiği görülmektedir. Fakat oluşturduğu hipotezden bir sonuç çıkaramamıştır. Dolayısıyla cebirsel genelleme gerçekleştirememiştir. Ancak örüntünün genel kuralını ‘‘azaldığı için adım sayısı ile -5’i çarpılır, başta hep 20 olacağından en son hep 20’yi ekleriz’’ şeklinde bulunduğu söylemler aritmetik genelleme yapabildiğini gösterir niteliktedir. Bu bağlamda öğrencinin aritmetik genelleme yaklaşımı gerçekleştirdiği bulgusuna ulaşılmaktadır.

Yarı Yapılandırılmış Mülakatlardan Elde Edilen Bulgular

Etkinlik 7’ye ilişkin aritmetik genelleme yaklaşımı sergileyen Y₃'ün yazılı açıklamalarına ek olarak süreci nasıl yapılandığını incelemek ve düşünsel süreçlerini açığa çıkarmak amacıyla yarı yapılandırılmış mülakat gerçekleştirilmiştir.

Y₃ yazılı açıklamalarında verilen sayı örüntüsü üzerinden örüntüye ilişkin ortaklıkları fark etmiş olsa da cebirsel bir genel kural elde edememiştir. Gerçekleştirilen mülakat sonrasında, öğrencinin çözümleri ile mülakat sürecindeki açıklamaları arasında herhangi bir

farklılığın olmadığı görülmüştür. Öğrencinin çözümlerinden gözlenebilen süreçlerini mülakatlarda da benzer olarak açıkladığı görülmektedir.

50A: Etkinlik 7’de probleme odaklandığında ilk olarak ne düşündün? Çözüm sürecini nasıl şekillendirdin?

53Y₃: Önce verilen problemi anlamaya çalıştım. Bu önceki çözdüklerimden farklı bir soruydu. Hatta ilk örüntü olmadığını düşündüm.

51A: Neden farklı olduğunu düşündün?

54Y₃: Çünkü bu sefer bir şekil yoktu ya da sayıların bulunduğu düzenli bir örüntü. Normal günlük hayattaki bir problemi çözüyormuş gibi hissettim. O yüzden normal bir problem çözer gibi işlemleri yapmaya başlamıştım. Ancak sonra problemi anlayınca hava sıcaklığının belirli bir düzene göre azaldığını fark ettim. Her adımda ya da her kilometre de 5 derece azalıyordu.

52A: Sence bir durumun “örüntü” olarak ifade edilebilmesi için şekil ya da yan yana sıralı sayılar olmak zorunda mı?

55Y₃: Hayır aslında içerisinde belirli bir düzene sahip olan her durum örüntü olabilir bence. Ama günlük hayatta normal bir problemin örüntü olabileceğini düşünmüyordum.

53A: Etkinliğin (b) maddesindeki işlemlerin üzerine konuşalım. Neden 100 km’yi -5 ile çarptın? Sonrasında da 20 eklemiştin.

56Y₃: Çünkü 5 ile çarpmak anlamsız olurdu onu daha fazla arttırırdı. Bizim derecemizin düşmesi gerekiyordu. Bir azalış gözlemlendiği için – ile çarptım. Sonra 20’yi eklememin sebebi 20 derecenin başta hep olması gerektiği idi.

54A: Etkinliğin (a) maddesinde azalış miktarını belirleyerek sayıları belirli bir düzende yazmışsın. Mesela örüntün 20, 15, 10, 5, 0, -5, ... şeklinde devam ediyor? O zaman örüntünün ilk terimi 20 mi oluyor?

57Y₃: Hayır, 20 zemin gibi düşündüm yani daha 0 km de. 1 km yükseldiğinde 5 derece düştüğü için 15 derece olmalı, o zaman ilk 15 derece olmalı. Orada tam açıklayamamışım galiba. Aslında tamamen şu: 20 derece ilk derecemiz, sonrasında hep adım sayısının 5 katı kadar azalıyor.

Y_3 'ün mülakat sürecindeki açıklamaları yazılı çözümlerini destekler niteliktedir. Y_3 , problemin bağlamını anlamlandırmış ve örüntüye ilişkin ortaklıkları fark etmiştir. "her adımda ya da kilometre de 5 derece azalıyordu" ve "20 derece ilk derecemiz: sonrasında hep adım sayısının 5 katı kadar azalıyor" söylemleri örüntünün diğer terimlerinin adım sayısı ile ilişki kurularak elde edildiğini gösterir niteliktedir. Ayrıca Y_3 , "baştaki 20 derecenin hep sabit kalacağı" fikrini savunarak günlük hayat problemi bağlamında sunulan örüntüye ilişkin değişmeyen kısımları fark etmiştir. Ancak Y_3 , örüntüye ilişkin ortaklıkları fark etse de cebirsel bir kural elde edememiştir. Bu bağlamda Y_3 'ün aritmetik genelleme gerçekleştirdiği yazılı çözümleri ve mülakat sürecindeki açıklamalarında görülmektedir.

Ardışık terimler arası farkı elde ederek ve bu farka odaklanarak diğer terimlere ulaşarak düşünsel süreçlerini aritmetik genelleme bağlamında olgunlaştıran başka bir öğrenci çözümü ise O_1 tarafından Etkinlik 1'de gözlemlenmiştir.

- a) Desenin adım sayısı ile eşkenar dörtgen sayısını gösteren tabloyu doldurunuz.
Çözümünüzü gerekçeleriyle açıklayınız.

Adım sayısı	1	2	3	4	5
Eşkenar dörtgen sayısı	4...	8...	12	16.	20

Şekil 40: O_1 'in sayı örüntüsüne ilişkin ortak özelliği fark etme süreci (i)

O_1 , etkinlik 1'de yazılı çözüm ve açıklamalarında genel kuralı " $4n$ " olan sayı örüntüsü için ardışık terimler arası miktara odaklandığı görülmektedir. Bu strateji ile örüntünün verilen terimlerine ilişkin yakın ve uzak terimlerini hesaplayabildiği bulgusu (a), (b) ve (c) maddelerinden elde edilmektedir. Öğrencinin her bir adımda bulunması gereken eşkenar dörtgen sayısına şekil üzerinden sayarak ulaştığı görülmektedir. Bu bağlamda doldurulması istenen tabloyu amacına uygun bir şekilde tamamladığı görülmektedir.

- b) Sizce halı deseninin 10. adımında eşkenar dörtgen sayısı kaç olur? Çözümünüzü gerekçeleriyle açıklayınız. 10. adımında 40 olur çünkü 1'e 1'e gidiyor ve $10 \times 4 = 40$
- c) 55. adımında eşkenar dörtgen sayısı kaç olur? Çözümünüzü gerekçeleriyle açıklayınız. 55. adımında 220 olur çünkü $55 \times 4 = 220$ a

Şekil 41: O_1 'ün fark edilen ortak özelliğin örüntünün diğer terimlerinin içerip içermediğini inceleme süreci (ii)

d) Herhangi bir adımdaki eşkenar dörtgen sayısını veren bir kural bulunuz. Çözümünüzü gerekçeleriyle açıklayınız.

Ödümbr 4'e 4'e artması

Şekil 42: O_1 'in örüntünün genel kuralını ifade etmeye yönelik sözel açıklaması

Öğrencinin 'adımların dörder dörder artması'' söylemi terimler arası ilişki ve ortaklıkları aritmetik olarak ifade ettiğini gösterir niteliktedir. O_1 'in ardışık terimler arası farkı bulma ve bu farka odaklanarak diğer terimleri elde etmeye çalışması, terimler arası ilişkileri sayılarla nümerik olarak belirtmesi, verilen şekil örüntüsü üzerinden ortaklıkları incelemek ve anlamlandırmak yerine ardışık terimler arası farkın yapısını inceleme gibi stratejiler benimsemesi, aritmetik genelleme yaptığını gösterir niteliktedir.

Yarı Yapılandırılmış Mülakatlardan Elde Edilen Bulgular

3A: Örüntüye ilk odaklandığında nelere dikkat ettin? Nasıl düşündün?

2O₁: Kaç tane eşkenar dörtgen var saydım. Saydıktan sonra tabloyu doldurdum.

4A: Örüntüde verilmeyen terimleri nasıl elde ettin?

3O₁: Saydıktan sonra dörder dörder artarak devam ettiğini gördüm. Bende ondan bir önceki terime 4 ekledim, sonra bulduğum sayıya bir kere daha 4 ekleyerek bir sonraki terimi elde ettim. Böyle böyle doldurdum.

5A: 55. Adımı elde etmeye yönelik yaptığın işlemleri incelediğimde 55 ile 4'ü çarptığını ve 220 bulduğunu görüyorum. Neden 55 ile 4'ü çarptın?

4O₁: Çünkü dörder gidiyordu ve ekleyerek devam etmek çok zor olacaktı. 55'e kadar dörder ekleyerek devam edemezdik ki. Bende bir şey fark ettim. Hep adım sayısının 4 katı kadar eşkenar dörtgen bulunuyordu. Ondan oraya yazmamışım ama 55 ile 4 ü bu yüzden çarptım. 55. adımın 4 katı kadar eşkenar dörtgen bulunması gerektiğinden dolayı.

Öğrencinin örüntünün verilen terimlerine ilişkin yakın terimleri elde ederken terimler arası nümerik ilişkileri inceleyerek artış miktarına odaklanması aritmetik genelleme gerçekleştirdiğini göstermektedir. Ancak O_1 'in, ''çünkü dörder gidiyordu ve ekleyerek devam etmek zor olacaktı, 55'e kadar ekleyerek devam edemezdik, bende bir şey fark ettim, hep adım sayısının 4 katı kadar eşkenar dörtgen bulunuyordu, ondan 55 ile 4'ü çarptım'' söylemleri

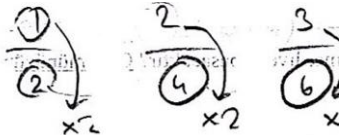
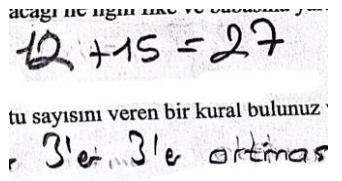
örüntüye ilişkin adım sayısı ile o adımda bulunan terim arasındaki ortaklığı fark ederek bir ilişki kurduğunu gösterir niteliktedir. Etkinliğin (c) maddesinin sorulmasının sebebi artış miktarına odaklanarak çözüm sürecini ilerleten öğrencilerin hipotez geliştirme ihtiyacı duymalarının beklenmesidir. Bu bağlamda O₁, belirlediği ortak özelliğin, örüntünün diğer adımları içinde geçerli olacağını fark etmiştir. 10. ve 5. adımlar için de bulunacak terim adım sayısının iki katı olacağından “10.4” ve “55.4” ilişkisini kurabilmesi ile örüntüye ilişkin belirlenen ortak özelliğin örüntünün diğer terimlerine transfer etme aşamasına kadar geldiği görülmektedir. Fakat oluşturduğu hipotezden bir sonuç çıkaramamıştır. Dolayısıyla cebirsel genelleme gerçekleştirememiştir. Ancak örüntünün genel kuralını “*hep adım sayısının dört katı olmalı*” şeklinde ifade ettiğinden dolayı aritmetik genelleme yapabildiğini gösterir niteliktedir. Bu bağlamda öğrencinin aritmetik genelleme yaklaşımı gerçekleştirdiği bulgusuna ulaşılmaktadır.

Aritmetik Genelleme Yaklaşımı Sergileyen Öğrencilere İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Yazılı çözümlerinin incelenmesinin ardından yapılan yarı yapılandırılmış mülakat çalışmaları ile öğrencilerin aritmetik genelleme yaklaşımı gerçekleştirme süreçlerine ilişkin sonuçlara ulaşılmaktadır. Öğrencilerin aritmetik genelleme sürecinde benzer gerekçeleştirme ve açıklamalarda bulunduğu görülmektedir. Öğrencilerin aritmetik genelleme yaklaşımı sergileme süreçlerini gösteren ortak açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 14’te görülmektedir.

Tablo 14

Aritmetik genelleme yaklaşımı sergileyen öğrenci açıklamaları

Örnek Çözüm	Yazılı Açıklamalar	Öğrenci
	“bende bir şey fark ettim, hep adım sayısının 4 katı kadar eşkenar dörtgen bulunuyordu, ondan 55 ile 4’ü çarptım” “hep adım sayısının iki katı olmalı” “20 derece ilk derecemiz: sonrasında hep adım sayısının 5 katı kadar azalıyor”	Y₁ Y₃ O₁
	“diğer terimleri önceki terimlere üç ekleyerek elde ettim” “adımların dörder dörder artması” “beşer beşer azalar gidiyordu, bende hep beş azaltarak yakın terimlere ulaştım”	O₃ D₂

Sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim öncesinde öğrencilerin yazılı çözümleri ve mülakat sürecindeki açıklamaları incelendiğinde olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımının yanında öğrencilerin aritmetik genelleme de gerçekleştirdikleri bulgusuna ulaşılmıştır. Öğrencilerin aritmetik genelleme yaklaşımı sergileme süreçlerini gösteren ortak açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 21’de görülmektedir. Aritmetik genelleme gerçekleştiren öğrencilerin iki farklı çözüm stratejisiyle genelleme süreçlerini yapılandıkları görülmektedir:

- (i) Terimler arası ilişkilerin sayılarla belirtilmesi, ardışık terimler arası farkın yapısının incelenmesi, ardışık terimler arası farkı bulma ve bu farka odaklanarak diğer terimleri elde etmeye çalışma, genel kuralı sözel ifadeler ile açıklama,
- (ii) Terim ile adım sayısı arasındaki ortaklıkları fark etme, fark edilen ortaklıkları örüntünün diğer terimlerine genelleme, genel kuralı cebirsel bir yapıya sahip olmayan sözel ifadelerle açıklama.

Aritmetik genelleme yaklaşımı benimseyen öğrencilerin yazılı çözümleri ve mülakat sürecindeki açıklamaları incelendiğinde, öğrencilerin sayı veya şekil örüntüsünün tamamına değil de belirli bir bölümüne odaklandığı görülmektedir. Bu bağlamda öğrencilerin işlemlerinin herhangi bir terimi elde etmeye yönelik olmadığı söylenilebilir. Bu nedenle aritmetik genelleme gerçekleştiren öğrencilerin yazılı çözümlerinde cebirsel bir yapı ortaya çıkmadığı bulgusuna ulaşılmıştır.

Araştırma bulguları incelendiğinde öğrenciler, aritmetik genelleme sürecinde elde edilen hipotezden diğer terimlerin bulunması için cebirsel yapıya sahip bir genel kural geliştirilememektedir. Cebirsel genelleme sürecinin son adımı olan p_n ifadesini oluşturma, yani cebirsel yapıya sahip bir genel kural elde etme aşaması aritmetik genelleme sürecinde bulunmamaktadır. Öğrencilerin ardışık terimler arası farkı bulma ve bu farka odaklanarak diğer terimleri elde etmeye çalışma, terimler arası ilişkilerin sayılarla belirtilmesi, ardışık terimler arası farkın yapısını inceleme gibi stratejiler benimsemesi, aritmetik genelleme yaklaşımını sergilediklerini göstermektedir.

4.2. Sorgulama Temelli Öğretim Sürecinde Açığa Çıkan Sosyo-matematiksel Norm ve Beceriler

Bu bölümde araştırmanın ikinci alt problemi olan ‘‘sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim sürecinde hangi sosyo-matematiksel normlar ve

beceriler gözlemlenmiştir?’’ sorusuna yanıt aranmaktadır. Araştırmacı araştırma sürecini ve öğretime ait ders içeriğini planlarken sorgulama temelli öğretim sürecini yönetmek adına 5 farklı sosyo- matematiksel norm belirlemiştir. Bu bağlamda sosyo-matematiksel normları sorgulama temelli öğretim ile birlikte kullanmanın öğrencilerin cebirsel düşünme süreçleri üzerindeki etkisinin incelenmesi amaçlanmıştır. Belirlenen her bir norm öğretim sürecine dahil edilerek ders planları oluşturulmuştur. Ayrıntılı öğretim planları *‘‘sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretime ilişkin ders içeriğinin geliştirilmesi’’* adlı bölüm 3.3.1.’de açıklanmaktadır. Normların belirlenmesinde Cobb ve Yackel (1996) tarafından Yorumlayıcı Çerçeve’de açıklanan sosyo-matematiksel normlar kullanılmıştır. Aşağıda öğretim sürecinde belirlenen sosyo-matematiksel normlar görülmektedir.

- ⑩ Matematiksel düşünceleri açıklamak,
- ⑩ Farklı matematiksel çözümler bulmak ve neden farklı olduğunu gerekçeleriyle birlikte sunmak,
- ⑩ Açıklamalarda matematiksel örüntü ve ilişkileri kullanmak,
- ⑩ Verilen matematiksel bir açıklamaya neden katılmadığını gerekçeleriyle birlikte belirtmek,
- ⑩ Verilen matematiksel bir açıklama anlaşılmadığında arkadaşına ya da öğretmenine soru sormak şeklindedir.

Bu bölümde, belirlenen sosyo-matematiksel normların sorgulama temelli öğretime nasıl entegre edildiği ifade edilmektedir. Ayrıca öğretim sürecinde açığa çıkan norm ve beceriler ses ve video kayıtları, sınıf içi diyaloglar ışığında açıklanmaktadır. Öğretim sürecinde, ses ve video kayıtlarından elde edilen verilerin yazıya dökülerek analiz edilmesi, belirlenen normların öğrencilerin sınıf içi etkileşimleri doğrultusunda gözlemlenmesine yardımcı olmuştur. Öğretim sırasında sosyo-matematiksel normlar nitel olarak analiz edilmiştir. Sosyo-matematiksel normların açığa çıkma düzeylerini yorumlayabilmek adına her ders için normların frekansları tablo şeklinde belirlenmiştir. Tablo 15’te her bir ders sürecinde oluşan normların frekansları görülmektedir. Matematiksel düşünceleri açıklamak, farklı matematiksel çözümler bulmak ve neden farklı olduğunu gerekçeleriyle birlikte sunmak, açıklamalarda matematiksel örüntü ve ilişkileri kullanmak, verilen matematiksel bir açıklamaya neden katılmadığını gerekçeleriyle birlikte belirtmek, verilen matematiksel bir açıklama anlaşılmadığında arkadaşına ya da öğretmenine soru sormak olmak üzere beş sosyo-matematiksel norm sırasıyla N₁, N₂, N₃, N₄ ve N₅ olarak kodlanmıştır.

Tablo 15

Sorgulama temelli öğretim sürecinde açığa çıkan sosyo-matematiksel norm düzeyleri

Öğretim Planı	Açığa Çıkan Sosyo-Matematiksel Norm Frekansları
Ders Planı-1 (1. ders saati / 30 dk)	N ₁ : 15 N ₂ : 5 N ₃ : 0 N ₄ : 3 N ₅ : 8
Ders Planı-2 (2. ders saati / 30 dk)	N ₁ : 28 N ₂ : 8 N ₃ : 3 N ₄ : 9 N ₅ : 18
Ders Planı-3 (3. ders saati / 30 dk)	N ₁ : 49 N ₂ : 5 N ₃ : 9 N ₄ : 8 N ₅ : 16
Ders Planı-4 (4. ders saati / 30 dk)	N ₁ : 65 N ₂ : 9 N ₃ : 18 N ₄ : 6 N ₅ : 23
Ders Planı-5 (5. ders saati / 30 dk)	N ₁ : 68 N ₂ : 7 N ₃ : 15 N ₄ : 12 N ₅ : 22
Ders Planı-6 (6. ders saati / 30 dk)	N ₁ : 66 N ₂ : 11 N ₃ : 21 N ₄ : 10 N ₅ : 17
Ders Planı-7 (7. ders saati / 30 dk)	N ₁ : 87 N ₂ : 13 N ₃ : 16 N ₄ : 11 N ₅ : 15
Ders Planı-8 (8. ders saati / 30 dk)	N ₁ : 95 N ₂ : 16 N ₃ : 29 N ₄ : 13 N ₅ : 23
Ders Planı-9 (9. ders saati / 30 dk)	N ₁ : 85 N ₂ : 14 N ₃ : 33 N ₄ : 12 N ₅ : 18
Ders Planı-10 (10. ders saati / 30 dk)	N ₁ : 75 N ₂ : 18 N ₃ : 26 N ₄ : 10 N ₅ : 17
N₁: Matematiksel düşünceleri açıklamak, N₂: Farklı matematiksel çözümler bulmak ve neden farklı olduğunu gerekçeleriyle birlikte sunmak, N₃: Açıklamalarda matematiksel örüntü ve ilişkileri kullanmak, N₄: Verilen matematiksel bir açıklamaya neden katılmadığını gerekçeleriyle birlikte belirtmek,	

N₅: Verilen matematiksel bir açıklama anlaşılmadığında arkadaşına ya da öğretmenine soru sormak,

Sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim sürecinin tamamlanması 10 ders saati sürmüştür. Araştırma bulguları incelendiğinde öğretimin başında N₃ ve N₆ normlarının açığa çıkmadığı görülmektedir. N₁, N₂, N₄ ve N₅ normları ise zayıf düzeyde kendini göstermektedir. Gerçekleştirilen öğretimin sonlarına doğru ise açığa çıkan normların frekanslarının arttığı bulgusuna ulaşılmıştır. Öğrenciler cebirsel düşünme süreçlerini örüntü konusu özelinde şekillendirirken matematiksel düşüncelerine ilişkin açıklama ve gerekçelendirmelerde bulunmuşlardır.

Öğretime entegre edilen 5 sosyo-matematiksel normun frekansları, ses ve video kayıtlarından ulaşılan sınıf içi diyaloglar ve öğretmen gözlemleri sonucunda yukarıdaki tablo ve grafiklerle analiz edilmiş ve açıklanmıştır. Bu altı normun öğretim sürecine entegre edilme ve açığa çıkma süreci her bir sosyo-matematiksel norm için birer örnek diyalog ile açıklanmaktadır.

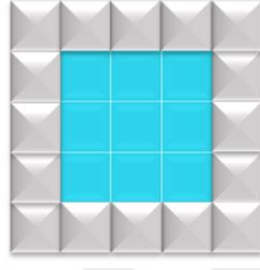
⑩ *Matematiksel düşünceleri açıklamak (N₁):*

Kabul edilebilir bir matematiksel açıklama normu, öğrencinin matematiksel düşüncesine ilişkin fikrini, çözüm süreçlerini açıklaması ve ifade etmesi anlamına gelmektedir. Bu süreçte öğrencinin, zihninde yapılandığı matematiksel kavrama ilişkin bir şema ya da yapı oluşturarak düşüncesini öğrenme ortamına aktarması gerekmektedir. Öğrencilerin düşüncelerini ifade etmesi, matematiksel bir problem veya kavrama ilişkin kendi düşüncesini sorgulamasına olanak sağlamaktadır. Ayrıca öğrenme ortamında açığa çıkan matematiksel bir düşünce, diğer öğrencilerin inanç ve düşünceleri hakkında bir diyalog ve tartışma ortamı başlatması için fırsat oluşturmaktadır. Bu bağlamda öğrenciler öğretim sürecinde, düşüncelerini sorgulayarak açıklamaya ve ifade etmeye çalışmışlardır. Tablo 15 incelendiğinde N₁ normunun öğretim süresince artışa sahip bir frekans sergilediği görülmektedir. Bu bağlamda belirlenen normun öğretim süreciyle eş zamanlı bir şekilde sınıf tarafından benimsendiği bulgusuna ulaşılmıştır.

Öğrenciler öğretimin başında örüntü kavramını öğrenmeye ve anlamlandırmaya çalışırken kabul edilebilir açıklamalar yapmakta zorlanmışlardır. Öğretim başında öğrenme ortamında oluşan açıklamalar incelendiğinde, öğrencilerin matematiksel düşüncelerini ifade etmekten çok cevaplarının doğru ya da yanlış olup olmadığıyla ilgilendikleri görülmüştür. Örneğin

aşağıdaki diyalogda sorgulayarak anlamlandırması istenen bir örüntü üzerine yürütülen tartışma kabul edilebilir bir matematiksel açıklamaya dair sosyo-matematiksel normun nasıl müzakere edildiği görülmektedir.

Problem-1’de öğrencilerden mavi karoların etrafında bulunan karo sayısına ulaşmaları istenmiştir. Öğrencilerin şeklin etrafında bulunması gereken karo sayısına ‘teker teker saymadan’ nasıl ulaşabileceklerine dair bir sorgulama gerçekleştirmeleri beklenmiştir. Bu bağlamda öğrenciler zihinlerinde oluşan matematiksel yapıya ek olarak alternatif bir yol sorgulama ihtiyacı hissetmişlerdir.



Şekil 43: Problem-1 Kenarlık Problemi

8A: Sizce havuzun etrafında bulunan karo sayısını teker teker saymadan nasıl bulabiliriz? Ya da bulabilir miyiz?

6D₁: Hayır bulamayız. Neden teker teker saymıyoruz, böyle daha kolay sonucu bulabiliriz bence.

7O₂: Cevap 16 olur.

9A: Bunu nasıl buldun? Nasıl elde ettiğini açıklar mısın?

8O₂: 3 ve 3, 5 ve 5.

10Y₁: Nasıl 3 ve 3, 5 ve 5 nereden buldun onları?

9O₂: İşte şeyle bakınca gözüküyor, öğretmenim yanlarda 3 ve 3 var. Diğer yerler de 5 ve 5, topladım 16, cevabım doğru değil mi?

10A: Ne demek istediğini biraz daha açar mısın? Arkadaşınızın çözümünü açıklamak isteyen var mı?

Yukarıdaki diyalog, O₂’nin verilen probleme ilişkin matematiksel bir düşüncesinin olduğunu ancak bunu ifade etmekte zorlandığını gösterir niteliktedir. O₂, düşüncesini

gerekçelendirerek açıklamak yerine cevabının doğru olup olmadığıyla ilgilenmiştir. Matematiksel bir probleme yalnızca cevabı vermek kabul edilebilir bir matematiksel açıklama niteliği taşımamaktadır. Bu noktada öğretmen sınıfa O_2 'nin nasıl düşündüğünü anlayıp anlamadıklarını sorarak, kabul edilebilir bir matematiksel açıklamanın anlaşılabilir ve anlamlı olması yani açıklamanın altında yatan matematiksel nedenlerini sunması gerektiğini vurgulamaktadır. Ayrıca sınıf arkadaşlarının O_2 'nin çözümünü sorgulayarak gerekçelendirmesini istemeleri, O_2 'nin örüntüye ilişkin zihninde yapılandığı ortaklıkları açığa çıkarmasına neden olmuştur. Bu noktada öğretmen sorgulama temelli öğretimin bir gereği olarak öğrenme ortamında öğrencilere, “nasıl buldun?”, “bunu nasıl keşfettin?”, “düşünceni gerekçelendirir misin?” sorularını yönlendirerek matematiksel çözümlerini açıklama ve gerekçelendirmeye ait sosyo-matematiksel normun pekişmesini sağlamaktadır.

10A: Ne demek istediğini biraz daha açar mısın? Arkadaşınızın çözümünü açıklamak isteyen var mı?

12Y₃: Öğretmenim bence şöyle düşünmüş. 3x3 boyutundaki havuzun sol ve sağında yine 3 karo bulunacak. Üstte kalan karo 5. Altta kalan karo da 5. 3 artı 3 artı 5 artı 5 eşittir 16 yapıyor.

10Y₂: Aaa yani sen gruplandırıdın. O zaman bende gruplandırarak yaparım. Bu sefer de üstte 3 altta 3. Sol ve sağda 5'er oluyor. Yine buradan da 16.

10O₂: Benim çözümümüne çok benziyor.

11A: Peki sizce aynı sonuca farklı bir çözüm stratejisi benimsenerek ulaşılabilir mi?

Yukarıdaki diyalogda görüldüğü üzere öğretmen verilen cevabı doğru veya yanlış olarak değerlendirmek yerine “ne demek istediğini biraz daha açar mısın?” sorusu ile öğrencilerin matematiksel düşüncelerini sorgulayarak ifade etmesini sağlamıştır. Bu noktada öğrencinin cebirsel anlamda düşünsel süreçlerinin açığa çıkarılması amacıyla öğrenciden örüntüye ait belirlediği ortaklıkları nasıl fark ettiğini açıklaması beklenmektedir. Ayrıca öğretmenin “aynı sonuca farklı bir çözüm stratejisi benimsenerek ulaşılabilir mi?” sorusu, *farklı matematiksel çözümler bulmak* (N_2) normunun açığa çıkmasını desteklemektedir. Bu bağlamda sınıf tarafından benimsenen bir sosyo-matematiksel normun başka bir normun oluşmasına ortam hazırladığı söylenilebilir.

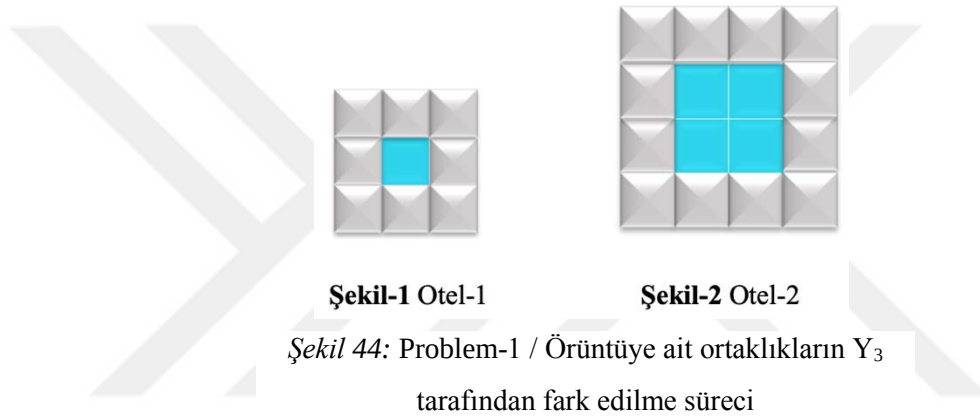
12A: Neden 3x3 boyutundaki bir havuzun sol ve sağında üçer karo bulunmak zorunda?

11O₂: Çünkü şekle bakınca öyle gözüküyor.

13A: Az önce verilen şekle ait açıkladığın 3 ve 3, 5 ve 5, topladım 16 oldu açıklamasını neye dayanarak yaptın? Şekle ait nelere dikkat ettin?

12O₂: Öğretmenim çünkü şekil 3'e 3 boyutunda olduğundan dolayı mecburen bir kenarında üçer karo bulunmak zorunda.

14A: Peki 1000x1000 boyutundaki bir havuzun etrafında bulunacak karo sayısını nasıl bulabiliriz? (Öncesinde örüntünün 1. ve 2. adımı tahtaya yansıtılır, soru tüm sınıfa yöneltilir)



16Y₃: 1000 kere 4, 4000 eder. 4 ekledim 4004 yaptı.

15A: Neden 1000 kere 4'ü bulup 4 ekledin?

17Y₃: Çünkü mavi karolardan yola çıkarak yaptım öğretmenim. Verilen terimlerdeki ilişkileri anlamaya çalıştım. Mavi karoların tepesinde 3 tane, sağında 3 tane, solunda 3 tane ve altında 3 tane var. 3,6,9 etti. 4 tane olduğu için 12 edecek öğretmenim. Köşeler de de birer karo kaldı. 4 tane köşe var. 12'ye 4 ekledim 16 yaptı. Sonra bulduğum bu yöntemi 1000x1000 boyutundaki havuz için yorumladım (tahtaya kalkar ve şekil üzerinden fark ettiği ortaklıkları açıklar).

26O₂: Öğretmenim şuradan da bulabiliriz. Her kenarda 5 karo var. 4 kenar var. 5 kere 4, 20 eder. 20'den de 4 çıksak yine 16'ya ulaşırız.

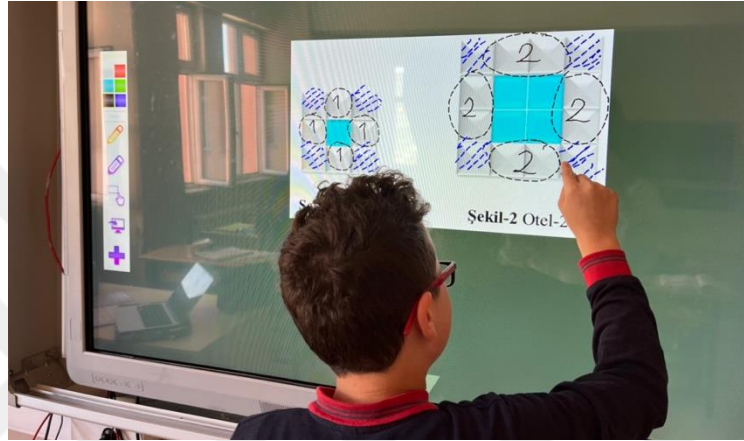
17A: Neden 4 çıkarıyoruz?

22Y₁: Köşeleri saymamamız lazım.

18A: Neden köşeleri saymıyoruz?

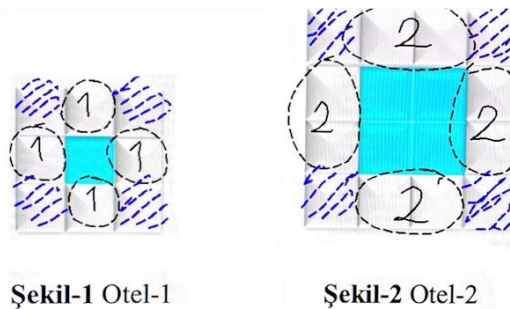
23Y₁: Çünkü iki kere saymış oluyoruz. Fazladan elimizde 4 var onu çıkartmamız gerekiyor.

Y₃'ün akıllı tahta üzerinde fark ettiği ortak özelliğe ilişkin gerekçelendirme süreci Şekil 45'te görülmektedir. Bu bağlamda Y₃, sözel olarak ifade ettiği açıklamasını, uygulayarak açıklamış ve bu doğrultuda matematiksel açıklamasını derinleştirerek sınıf tarafından daha kabul edilebilir olması konusunda desteklemiştir.



Şekil 45: Y₃'ün fark ettiği ortak özelliğe ilişkin matematiksel açıklamasını gerekçelendirme süreci

Şekil 45'te Y₃'ün verilen örüntüye ilişkin idrak ettiği ortak özelliği açıklama ve gerekçelendirme süreci görülmektedir. Öğrencinin yalnızca problemin cevabı ya da çözüm yolunu ifade etmesi, kabul edilebilir bir matematiksel açıklama niteliği taşımamaktadır. Bu bağlamda Y₃, düşüncesinin altında yatan cebirsel nedenleri açıklayarak açıklamasına kabul edilebilir bir açıklama niteliği kazandırmıştır. Ayrıca şekil üzerinden belirlediği ortaklıkları göstererek açıklamasının diğer öğrenciler tarafından anlamlandırılmasına yardımcı olmuştur. Yapılan açıklamalar ve sınıf içi diyalogların öğretim sürecinde N₁ normunun açığa çıkmasını desteklediği görülmektedir.



Şekil-1 Otel-1

Şekil-2 Otel-2

Şekil 46: Y₃'ün Problem-1'e ait fark ettiği ortak özellik

Bir açıklamanın ve gerekçelendirmenin kabul edilebilir olması için matematiksel ilişkilerin nasıl kullanıldığının ve nedenlerinin belirtilmesi gerekmektedir (McClain ve Cobb, 2001). Öğrencilere 1000x1000 boyutundaki bir havuzun etrafında bulunması gereken karo sayısı sorularak havuzun boyutu ile bulunması gereken karo sayısı arasındaki ilişkiyi sorgulayarak verilen örüntüye ait bir hipotez geliştirme ihtiyacı duymaları beklenmektedir. Bu bağlamda öğrenciler sınıf tartışması yoluyla sorgulayarak örüntüye ait ortak yapı ve ilişkileri açıklamışlardır. Öğrencilerin cebirsel anlamda düşünsel süreçlerini açıklarken örüntüye ait nicelikler arası ilişkileri nasıl kullandıklarını açıklaması öğrenme ortamında kabul edilebilir bir matematiksel açıklamaya dair sosyo-matematiksel normun gelişmesine katkıda bulunduğunu göstermektedir. Bu noktada sorgulama temelli öğretimin bir gereği olarak öğrenci aktif durumdadır, öğretmen otoriter ve yargılayıcı olmayan bir tavır benimseyerek rehber görevi görmektedir. Öğrencinin matematiksel düşüncesini ifade etmesine ve gerekçelendirmesine yönlendiren soruların sorulması, öğrencilerin örüntü hakkında düşünmelerine ve çözümlerini rahatça açıklamalarına fırsat oluşturduğu görülmektedir.

Tablo 15 incelendiğinde N_1 normunun sorgulama temelli öğretim sürecinde artışa sahip bir frekans sergilediği görülmektedir. Gerçekleştirilen öğretimin sonlarına doğru öğrenciler herhangi bir öğretmen yönlendirmesi olmaksızın verilen örüntülere ilişkin matematiksel fikirlerini açıkladıkları bulgusuna ulaşılmıştır. Tablo 15'te N_1 normuna ait frekans değerleri görülmektedir. Öğretim sürecinde öğrencilerin gruplara ayrılarak önce grup arkadaşları, daha sonra tüm sınıf arkadaşları ile problemlere ilişkin sorgulama süreci geçirmeleri matematiksel düşünceleri açıklama (N_1) sosyo-matematiksel normunun gelişmesine imkân tanıdığı bulgusuna ulaşılmıştır. Ayrıca gruplara dağıtılan sosyo-matematiksel norm kartları öğrencilerin sorgulama ve düşünme süreçlerinin aktif tutulmasına olanak sağlamıştır.

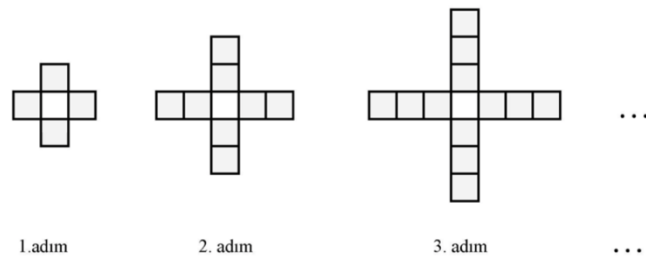
⑩ *Farklı matematiksel bir çözüm bulmak ve neden farklı olduğunu gerekçeleriyle birlikte sunmak (N_2):*

Farklı matematiksel bir çözüm bulma ve neden farklı olduğunu gerekçeleriyle birlikte açıklama normu, öğrencinin çözüme ilişkin zihninde yapılandığı matematiksel yapıyı sorgulayarak alternatif stratejiler geliştirmesi anlamına gelmektedir. Sorgulama temelli öğretimin bir gereği olarak öğrencilerden, çözüm stratejilerini nasıl olgunlaştırdıklarını ve stratejilerinin altında yatan cebirsel nedenleri matematiksel olarak gerekçelendirmeleri

beklenmektedir. Bu noktada öğrenme ortamında açığa çıkan matematiksel bir düşüncenin farklı olduğunun ifade edilmesinden çok, “neden” farklı olduğunun öğrenci tarafından aktarılması, düşünsel süreçlerinin açığa çıkarılmasında önem arz etmektedir. Araştırma bulguları ve sınıf içi tartışma sürecinde açığa çıkan diyaloglar incelendiğinde öğrenciler örüntü ve ilişkiler konusu özelinde farklı matematiksel bir çözüm oluşturma (N_2) normunun, ‘genelleme süreçlerini, benimsenen farklı bir ortak özellik doğrultusunda yapılandırma’, ‘aynı cebirsel kurala ait farklı örüntüler oluşturma’ gibi eylemler üzerinden açığa çıktığı bulgusuna ulaşılmıştır. Ayrıca öğrenme ortamında açığa çıkan farklı matematiksel bir düşünce, diğer öğrencilerin alternatif yolları sorgulaması hakkında bir diyalog ve tartışma ortamı başlatması için fırsat oluşturmaktadır. Bu bağlamda öğrenciler öğretim sürecinde, düşüncelerini sorgulayarak açıklamaya ve ifade etmeye çalışmışlardır. Tablo 15 incelendiğinde N_2 normunun öğretimin başında zayıf düzeyde kendini gösterdiği görülmektedir. İlgili frekanslar incelendiğinde N_2 normunun öğretim süresince artışa sahip bir frekans sergilediği görülmektedir.

Araştırma bulgularına incelendiğinde, öğretimin başında öğrencilerin farklı bir matematiksel çözüm geliştirme ihtiyacı duymadıkları gözlemlenmektedir. Bu noktada öğretmen, sorgulama temelli öğretimin bir gereği olarak öğrencileri alternatif yolları sorgulamaya yönlendiren sorular sormaktadır. Derste oluşması desteklenen bir norm ile sorgulama sürecinin aktif olması sağlanmaktadır. Örneğin aşağıdaki diyalog incelendiğinde, öğretmenin, matematiksel farklılığın müşterek oluşturulması sürecini nasıl başlattığı görülmektedir.

Problem-3’te öğrencilerden her bir adımda bulunması gereken birim kare sayısına ulaşmaları istenmiştir. Öğrencilerin şekil üzerinde örüntüye dair değişen veya değişmeyen kısımları idrak ederek ortak özellikleri açıklamaları beklenmektedir.



Şekil 47: Problem-3

29A: Verilen örüntünün 6. adımında kaç adet birim kare bulunur sizce çocuklar? Grup arkadaşlarınızla tartışarak fikrinizi açıklamanızı istiyorum. Nasıl bulabiliriz?

28Y₂: Bana sorarsanız önemli olan örüntüde değişen veya değişmeyen yerlere odaklanmak. Ortadaki birim kare hep sabit. Örüntüyü değişen veya değişmeyenler olarak iki kategoriye ayırırsak değişmeyen olan ortadaki birim kare 1 tane hep duracak ama değişen kısım etraftaki dörder artan birim kareler hep dörder artarak değişecek. Yani etrafını bulup hep değişmeyen kısım olan 1 birim kareyi eklersek zaten tak diye buluruz. Ama yine de iki türlü bir şey fark etmez.

35A: Nasıl yani biraz açıkla mısın?

29Y₂: Şöyle. Modellerde değişmeyen kısım hep sabit ortadaki 1 birim kare bundan herkes hem fikir. Değişen kısımlar yani ortadaki karenin etrafında ise 1. adımda her tarafında 1 birim toplam 4 birim kare, 2. adımda sağ sol alt ve üstte ikişer birim kare, üçüncü adımda ise etrafta yani sağ sol alt ve üstte üçer birim kare var. Yani ortada bir tane ve onun etrafında sağını solunu üst ve altını adım sayısı kadar kare sarmış durumda. O zaman altıncı adımda da altıncı adım olduğu için 6 tane altta üstte sağ ve solda toplam 24 tane yapar. Ortadaki bir taneyi de eklersek 25 taneyi buluruz.

33O₂: Öğretmenim bizim de aklımıza başka farklı bir fikir geldi ama emin değiliz.

36A: Tamam arkadaşlarınızla birlikte fikrinizi gerekçelendirerek açıkla mısınız?

38Y₁: Biz şöyle düşündük. 3. adımda yukarıdan aşağıya 7 tane var soldan sağa da 7 tane var. 7 ile 7'yi topluyoruz. 14 yapıyor. Ortadakini iki kere saydığımız için 1 tane çıkarırız 13 olur. 6. adıma geldiğimizde ise 6'. adıma ulaşmak için 3 adımımız var ve her seferinde 4 ekleniyor. 3 kere 4'ten 12 birim kare ile toplamamız gerekiyor.

37A: Neden düşüncenizin farklı olduğunu düşünüyorsunuz?

34Y₂: Bence onlar örüntüyü dikey ve yatay yapılar olarak gruplandırarak yaptılar öğretmenim, bir de diğer terimleri elde ederken hep verilen terimlerden yararlandılar, biz ise şekilde değişen veya değişmeyen kısımlara odaklanarak yapmıştık.

Yukarıdaki diyalog, matematiksel farklılığın şartlarına dair sosyo-matematiksel normların tartışmalara katılımı düzenlediği gibi öğrencilerin üst düzey bilişsel etkinliği de desteklediğini göstermektedir. Öğrencinin örüntüye ilişkin farklı bir ortaklık benimsendiğine ilişkin bir tepki oluşturabilmesi için, önce arkadaşının çözümüyle kendisinin çözümünü karşılaştırması daha

sonra da benzerlik ve farklılıklara karar vermesi gerekmektedir. Yapılan tartışmalar doğrultusunda, öğrencinin kendi çözümünün kendi kavrayışının nesnesi haline geldiği görülmektedir. Bu bağlamda öğrencinin açığa çıkan alternatif yolları sorgulamasının cebirsel anlamda düşünsel süreçlerinin gelişimine katkıda bulunduğu söylenebilir.

38A: Neden 12 birim kare eklememiz gerekiyor? Neyin üzerine ekliyorsun? (öğretmen diğer gruba döner)

39Y₁: Çünkü 3. adıma kadar var elimizde zaten ve o 13 o nedenle elimizde var olan 13'ün üzerine ekliyoruz. Ne kadar ekleyeceğimizi de bize kaçınıcı adımı sorduklarından yola çıkıyoruz. 6. adımla 3. adım arasında 3 adım var ve her adımda 4 artıyor. 3 kere 4'ten 12 yapar. 13'e de 12 eklersek 6. adımı 25 buluruz. Aslında bize kaçınıcı adım sorulursa sorulsun 3. adımdan yola çıkarak bütün diğer adımları bulabiliriz.

39A: Neden, nasıl diğer adımları bulabiliriz?

35O₂: Çünkü artış miktarını biliyoruz. Hep aynı mantık verilen 3. adımı ve artış miktarını kullanarak diğer adımları bulmak.

40A: Peki neden bulduğunuz yoldan emin değildiniz? Size bulduğunuz çözüm yolunu sorgulatan düşünce ney?

36O₂: Öğretmenim çünkü biz hep 3. adımdan yola çıkarak diğer adımları bulduk. Ama başka bir adımla da yapsaydık aynı sonucu elde eder miydik bilemedik. Ondan dolayı emin olamadık.

Yukarıdaki diyalog incelendiğinde, öğretmenin öğrenme ortamında açığa çıkan matematiksel bir düşünceyi daha önce anlatılan bir çözümünden neden farklı olduğunu sorgulayarak tartışmaya açması, öğrencilerin matematiksel farklılığa dair kendi yorumlarını geliştirmelerine neden olduğu görülmektedir. Bir çözüm stratejisinin matematiksel olarak diğer yöntemlerden farklı niteliği taşıması, neden farklı olduğunun gerekçelendirilmesiyle anlam kazanmaktadır. Örüntüye ilişkin öğrencilerin açıklamaları incelendiğinde, öğretmenin çözümlerdeki matematiksel farklılığa dair tartışma ortamı oluşturması, sınıftaki tüm öğrencilerin sorgulayarak açığa çıkan yeni düşüncenin neden farklı olduğuna, birlikte karar vermesini desteklediği görülmektedir. Bu bağlamda öğretmenin öğrencilerden gelen her bir çözümü kabul etmeyerek sorgulamaya açması ve öğrencilerden çözümünün neden farklı olduğuna ilişkin düşüncesinin altında yatan nedenleri açıklamasını istemesi, diğer öğrencilerin sorgulama sürecine katılımını desteklemektedir. Aynı zamanda öğretmen bu tür durumlarda

matematiksel açıdan neyin meşru olduğuna dair ortak anlayışın gelişimini yani matematiksel farklılığa dair sosyo-matematiksel normu desteklemekte ve yönlendirmektedir.

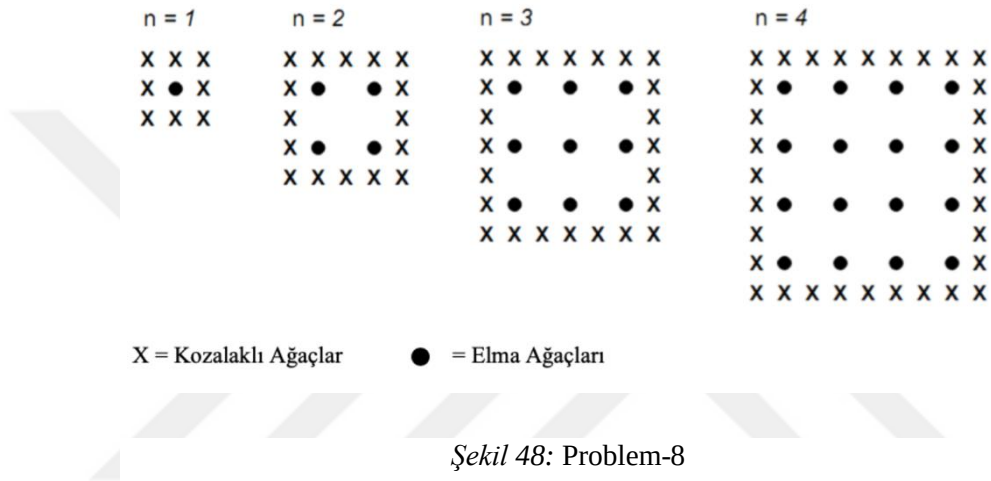
Öğretmenin yönlendirmeleri ve öğrencilerin açıklamaları doğrultusunda matematiksel bir çözümün neden farklı olduğunun gerekçelendirilmesi (N_2) sosyo-matematiksel normunun öğrenme ortamında açığa çıktığı görülmektedir. Bu noktada açığa çıkan doğru ya da yanlış matematiksel bir düşüncenin öğretmen tarafından sınıfta açıklama olarak sadece öğrenilmiş bir çözümün tekrarlanmasına ve sonucun söylenmesine izin vermesiyle, öğrencilerden açığa çıkan çözüm stratejilerini sürekli sorgulayarak farklı çözümler istemesi ve neden farklı olduğunu tartışmaya açması arasında sınıftaki matematiksel söylemin seviyesini etkilemesi konusunda fark olduğu görülmektedir. Ayrıca öğretmenin öğrencilere “*neden bulduğunuz yoldan emin değildiniz? Size bulduğunuz çözüm yolunu sorgulatan düşünce ney?*” sorusunu yönlendirmesi kabul edilebilir matematiksel bir açıklama (N_1) normunun açığa çıkmasını destekler niteliktedir.

⑩ *Açıklamalarda matematiksel örüntü ve ilişkileri kullanmak (N_3):*

Matematik, bünyesinde örüntüleri barındıran bir bilimdir. Matematiksel bir yapıda örüntü aramak, örüntüyü açıklamayı, başka durumlara genellemeyi öğrenme matematik yapmanın ve cebirsel düşünmenin bir parçası olarak ifade edilmektedir (Van de Walle vd., 2010). Dolayısıyla öğrenciler tarafından ortak bir anlayışla açıklamalarda matematiksel örüntü ve ilişkileri kullanma (N_3) normunun açığa çıkarılması öğrencilerin cebirsel düşünme becerilerinin kazandırılmasında önem arz etmektedir (MEB, 2013b, s, V). Bu bağlamda açıklamalarda matematiksel örüntü ve ilişkileri kullanma normu, sayılar ve işlemler arasındaki ilişkileri fark ederek genellemeler yapma, belirlenen bu ilişkilerin anlamlı cebirsel yapılara dönüştürebilme becerisi anlamına gelmektedir. Öğrencilerin cebirsel düşünme süreçleri, örüntü konusu özelinde ve genelleme becerileri bağlamında incelendiğinden verilen bir yapıya ilişkin matematiksel örüntü ve ilişkilerin altında yatan cebirsel nedenlerinin anlamlı bir şekilde ifade edilmesi gerekmektedir. Öğrenme ortamında sınıf tarafından müşterek bir anlayışla açıklanan normun benimsenmesi, öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerinin gelişimine katkı sağlamaktadır.

Tablo 15 incelendiğinde N_3 normunun öğretimin başında öğrenciler tarafından benimsenmediği görülmektedir. Ancak öğretim süresince ilgili frekanslar incelendiğinde N_3 normunun artışa sahip bir frekans sergilediği görülmektedir.

Araştırma bulgularına incelendiğinde, öğretim başında öğrencilerin matematiksel yapı ve ilişkilere sahip bir örüntüde; şekil örüntüsü olarak sunulmuşsa örüntüyü sayı örüntüsüne dönüştürerek ardışık terimler arası sabit farka odaklanma, sayı örüntüsü olarak sunulmuşsa deneme-yanılma yoluyla cebirsel bir kural elde etme yöneliminde oldukları gözlemlenmiştir. Şekil 48’de görülen Problem-8’de öğrencilerden her bir n değeri için elma ve kozalaklı ağaç sayısına probleme ait matematiksel ilişki ve örüntülerin keşfedilerek ulaşılması beklenmektedir.



132A: Verilen örüntüyü grup arkadaşlarınızla tartışarak inceleyiniz. Terimler arası ne gibi ortaklıklar gözlemlediniz?

128O₁: Kozalaklı ağaçların sayısı her bir n değeri için 8’er artıyor öğretmenim.

133Y₃: Artış miktarına odaklanarak diğer terimleri elde etmemiz çok zor. Biz şekle odaklanarak inceledik öğretmenim. Şunu fark ettik, elma ağaçlarının sayısı hep n değerinin karesi kadar. Yani kendisiyle çarpmamız gerekiyor.

133A: Nasıl yani, düşüncenizi örüntünün verilen terimleri üzerinden açıklayabilir misiniz?

129O₃: Şu şekilde, n 1 iken 1 tane kozalaklı ağaç, n değeri 2 iken 4 çünkü ikinin karesi, n değeri 3 iken 9 çünkü dokuzun karesi alınmış, yani biz her bir n değeriyle kozalaklı ağaç sayısını ilişkilendirmeye çalıştık ve hep karesinin alındığını fark ettik.

134A: Elma ağacı sayısını bulmak için n değerinin karesi alınmak zorunda mı?

130O₃: Evet zorunda.

135A: Neden zorunda? Açıklamanızı gerekçelendirir misiniz? Tamam her bir n değeri için n 'in karesi elma ağaçlarının sayısını veriyor. Sizce sırf adım sayısı ile o adımda bulunan terim ilişkilensin diye sayısal bir açıklama yapmak örüntünün altında yatan cebirsel yapıyı analiz edebilmemiz için yeterli mi? Neden kare alma işlemi yapıyoruz?

134Y₃: Tabi ya bu doğru. Ama şuradan geliyor tamamen problemin başında ‘*bir çiftçi kare bir alan içinde elma ağaçları dikmiştir*’” zaten bize başta söylüyor. Kare bir alandan bahsediyoruz. Karenin alanı bir kenar uzunluğunun karesini alma ile elde edilir. Örneğin n 1 iken 1 elma ağacı olmasının sebebi aslında n karenin bir kenarı. Karenin bir kenarı 2 birim olduğunda 2×2 'den 4 oluyor. 3 olduğunda 3×3 'ten 9 oluyor. Yani alandan bahsettiği için karenin alanıyla ilişkilendirerek kare alma işlemi yapıyoruz.

Yukarıdaki diyalog incelendiğinde öğrencilerin adım sayısı ile o adımda bulunan terim arasında bir ilişki kurdukları görülmektedir. Öğrenciler elma ağaçlarının sayısını n değerinin karesi olduğu yönünde bir ortaklık fark etmişlerdir. Ancak öğretmenin ‘*neden zorunda, açıklamanızı gerekçelendirir misiniz, sırf adım sayısı ile o adımda bulunan terim ilişkilensin diye sayısal bir açıklama yapmak örüntünün altında yatan cebirsel yapıyı analiz edebilmemiz için yeterli mi, neden kare alma işlemi yapıyoruz?*’” söylemi, öğrencileri belirttikleri matematiksel açıklamaya dair bir sorgulama gerçekleştirmesine sebep olmuştur. Öğretmenin yönlendirmesi ile öğrencilerin örüntünün altında yatan ilişki ve ortaklıkları cebirsel gerekçeleriyle açıklamaları, açıklamalarında matematiksel örüntü ve ilişkileri kullanma (N_3) normunun açığa çıkmasını sağlamıştır.

⑩ Verilen matematiksel bir açıklamaya neden katılmadığını gerekçeleriyle birlikte belirtmek (N_4):

N_4 normu, öğrencinin öğrenme ortamında açığa çıkan matematiksel bir açıklama ya da ifadenin kendi zihninde yapılandığı açıklama ile çelişmesi sonucu açığa çıkan matematiksel açıklamayı kabul etmemesi anlamına gelmektedir. Bu noktada öğrencinin matematiksel bir açıklamaya yalnızca katılmadığını belirtmesi normun oluşması için yeterli olmamaktadır. Öğrenci öğrenme ortamında oluşan bir duruma neden katılmadığını gerekçeleriyle ifade etmelidir. Bu bağlamda açığa çıkan matematiksel düşünce ile ilgili zihninde yapılandığı açıklamayı öğrenme ortamına aktarmalıdır. Öğretim başında öğrenciler, ‘*bence doğru değil*’, ‘*hayır yanlış düşünüyorsun*’ gibi söylemler kullanarak katılmadıklarını ifade etmişler ancak neden katılmadıklarını gerekçelendirmemişlerdir. Araştırma bulguları incelendiğinde ise açıklanan sosyo-matematiksel normun öğretim süresince öğrenciler tarafından benimsendiği

görülmektedir. Örneğin aşağıdaki diyalog incelendiğinde öğrencilerin, arkadaşları tarafından ortaya atılan matematiksel açıklamaların neden meşru olmadığına arkadaşlarını ikna edici tavırlar sergilediği görülmektedir.



Gösteri Perdesi

Şekil 49: Problem-4

49A: Yukarıdaki diyagram da bir amfi tiyatronun ilk üç sırası görülmektedir. Örneğin dikkatle incelediğinizde ilk sırada (gösteri perdesinin önü) izleyiciler için 6 oturma koltuğu bulunmaktadır. Sizden grup arkadaşlarınızla birlikte arka sıralarda oturması gereken kaç izleyici olabileceği üzerine düşünmenizi ve birlikte tartışmanızı istiyorum.

58D₂: Öğretmenim dörder artarak devam ediyor. İlk sırada 6, sonra 10, sonra da 14 koltuk var.

63D₁: Böyle ekleyerek devam ederek diğer terimleri bulabiliriz. Mesela 4. Sıraya 18 kişi oturacaktır. Çünkü 14+4 olduğundan dolayı.

56Y₂: Sürekli ekleyerek devam edilmez ki, bence böyle yapmak çok zor olur ve uzun sürer. Ben söylediğine katılmıyorum.

50A: Neden arkadaşının düşüncesine katılmıyorsun? Sizce 4. sırayı bulurken izlediğimiz yolu 104. sırada da kullanmak mantıklı mıdır?

57Y₂: Bence şekle odaklanarak ilerlemek lazım. Mesela ilk sırada 6 koltuk var. Sonra 10 olmuş çünkü sol ve sağa ikişer koltuk daha eklenmiş. Toplam 4 koltuk eklenmiş. Yani modelde değişen veya değişmeyen yerlere odaklanırsak 6 koltuk hep var.

55D₁: Evet doğru, şekli inceleyerek her bir adım için ortak olan bir şey bulsak daha kolay olur sanki. Yoksa 104. adıma kadar gitmemiz çok uzun sürecektir gibi duruyor.

58Y₂: İşte 6 koltuk hep olduğundan ve dörder arttığından önce adım sayısının 4 katını alıp sonra hep 6 eklememiz gerek, yani cebirsel kural $4n+6$ olur.

67O₃: Bence bu kural doğru değil, ben katılmıyorum.

59Y₂: Neden katılmıyorsun neresi yanlış?

68O₃: Kuralı $4n+6$ olarak ifade ettin. Yani ilk sıra için n yerine 1 yazınca 6 koltuk çıkmalı ama $4.1+6$ 'dan 10 koltuk çıkıyor. Yani yanlış.

60Y₂: Aa neden böyle oldu acaba? İlk sıra değil de ikinci sıra çıktı. n yerine 2 yazsak $4.2+6$ bu sefer de 14 yani üçüncü sıra çıkıyor.

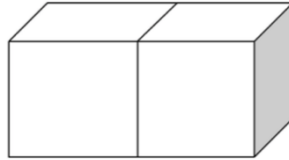
51A: Sizce neden farklı?

68O₃: Çünkü sen adım sayısının 4 katını aldın, ilk terimde zaten 6 koltuk sabit geriye 0 koltuk kalıyor yani senin dediğine göre 1'in 4 katı 0 çıkmalı sonra 6 eklememiz gerek bu da çok saçma ve imkânsız.

Yukarıdaki diyalog incelendiğinde öğrencilerin ortaklaşa sınıfta başlattığı ve yeniden müzakeresini desteklediği sosyo-matematiksel normun doğasının açığa çıkan matematiksel bilginin düzeyini etkilediği görülmektedir. Açığa çıkan açıklamaların işlemsel adımların sıralanması veya yalnızca cevapların söylenmesinden ibaret olan sınıflarda, öğrencilerin ya da öğretmenin yalnızca çözümü reddetmesi anlatan kişinin nasıl düşündüğünün anlaşılmasını oldukça güçleştirmekte ve sınıfta daha derin matematiksel tartışmaların oluşmasını engellemektedir. O₃'ün "*bence bu kural doğru değil, ben katılmıyorum*" açıklamasıyla açığa çıkan matematiksel açıklamaya katılmadığını belirtmesi ve sonrasında neden katılmadığını açıklaması N₄ normunun açığa çıktığını göstermektedir. Ayrıca D₁'in "*böyle ekleyerek devam ederek diğer terimleri bulabiliriz, mesela 4. sıraya 18 kişi oturacaktır*" matematiksel açıklamasının ardından "*çünkü $14+4$ olduğundan dolayı*" söylemi ile açıklamasını ifade etmesi, matematiksel düşünceleri açıklama (N₁) normunun da açığa çıktığını göstermektedir. Bu bağlamda araştırmadan elde edilen bulgular ışığında öğrenme ortamında oluşan bir sorgulama ve tartışma sürecinde birden fazla normun birbirini destekleyerek açığa çıktığı yorumu yapılabilir.

⑩ Verilen matematiksel bir açıklama anlaşılmadığında arkadaşına ya da öğretmene soru sormak (N₅):

Verilen matematiksel bir açıklama anlaşılmadığında arkadaşına ya da öğretmenine sorma normu, açığa çıkan matematiksel düşüncenin öğrencinin zihninde yapılandırılmaması sonucu matematiksel açıklamaya ilişkin sorgulama gerçekleştirilmesi anlamına gelmektedir. Bu noktada öğrenci, akran öğretimi ile başka bir arkadaşından veya öğretmeninden destek almaktadır. Öğrenme ortamında açıklanan sosyo-matematiksel normun benimsenmesi, öğrencilerin düşüncelerini ifade edebilmek için verilen açıklamaları dinlemelerini ve kendi çözümleriyle karşılaştırma yapmalarını sağlamaktadır. Aynı zamanda, öğrenciler çözümlerini savunabilmek için hem kendi hem de diğer öğrencilerin muhakeme süreçlerini sorgulayarak anlamlandırmak zorunda olmaktadır. Öğrencinin anlamadığını düşündüğü bir açıklamayı sorgulaması, kendi çözümünü savunması, diğer öğrencinin çözümünü değerlendirmesi, ortaya çıkan çözümü derinleştirerek zihni tarafından anlaşılmadığını fark etmesi, bütün öğrencilerin bu sürece katılmasını teşvik ederek matematiksel sorgulamanın gerçekleşmesi hedeflenen bir sınıf atmosferinin oluşmasına katkıda bulunmaktadır. Bu noktada öğrencinin yalnızca “*ben katılmıyorum, anlamadım, bence doğru değil*” şeklinde açıklamalarda bulunması normun açığa çıkması için yeterli olmamaktadır. Öğrencilerin açıklamayı anlamadığını ifade etmesinden ziyade neden anlamadığını açıklaması ve bunu sorgulaması önem arz etmektedir. Araştırma bulguları doğrultusunda sorgulama temelli öğretim sürecinde, aşağıdaki diyalogda, açıklanan sosyo-matematiksel normun nasıl müzakere edildiği görülmektedir.



Şekil 50: Problem-9

163A: Bir şirket, küpleri bir sırada birleştirerek çubuklar üretmektedir. Sonrasında ise oluşan çubuklara ait her bir küpün görünen bir yüzünü etiket makinesi ile etiketlemektedir. Çubuğun dışında kalan tüm yüzleri etiketlenmek zorundadır. Örneğin tahtada gördüğünüz uzunluğu 2 birim olan çubuğun tüm yüzeylerini kaplamak için 10 etiket yaptırılmak zorundadır. Sizce uzunluğu 7 birim olan bir çubuk için kaç etikete ihtiyaç vardır?

170D₃: Öğretmenim ama ben sadece şekilde 5 yüzünü görebiliyorum. Başka yüz yok ki.

164A: Sizce uzunluğu 2 birim olan çubuğun yalnızca 5 yüzü mü vardır? Neden başka yüzlerinin olmadığını düşünüyorsun? Arkadaşınızın düşüncesine katılıyor musunuz?

165Y₂: Hayır gözükmeyen 5 yüzü daha var, havada kalıyormuş gibi düşün. Siyah taralı yerin karşısında da var mesela görmediğimiz.

165A: Peki sizce kaç yüzü vardır? Nasıl bulabiliriz?

145O₁: Şimdi bu çubukları birleştirdikçe kare prizma oluşuyor. Zaten ilk başta küp şekli vardı.

171D₃: Nasıl kare prizma oldu? Bir kere kare prizma olması için dik bir şekilde olması gerekirdi. Bu yan yatmış bir şekil.

166A: Sizce yalnızca dik konumda bulunan geometrik cisimler mi kare prizma olarak adlandırılır?

146O₂: Hayır tabi ki de. Bu bir kare prizma.

172D₃: Nasıl yani öğretmenim ben anlamadım.

167A: Neyi anlayamadın, biraz açıklar mısın?

173D₃: Biz prizmaları tabanlarına göre adlandırıyorduk ya, e bu prizmanın tabanı dikdörtgen neden kare prizma olsun?

168A: Evet arkadaşınız prizmaları tabanlarına göre adlandırdığınızı söylüyor, düşüncesine katılıyor musunuz? O zaman bu şekil tabanı dikdörtgen olduğu için dikdörtgenler prizması, öyle mi?

166Y₂: Hayır, yani evet. Tabanlarına göre adlandırıyoruz ama prizmaların yan yüzeyleri dikdörtgen olmak zorunda o zaman bu prizmanın yan yüzeyi tabana denk gelmiş yani yan yatmış taralı kısımlar da alt taban ve üst taban. Zaten buradan hemen 7 birim uzunluğundaki çubuğun yüz sayısını bulabiliriz.

169A: Nasıl buluruz açıklar mısın?

167Y₂: Her bir birim eklense de yani çubuk bir birim uzasa da alt taban ve üst taban sabit olmak zorunda. Çünkü bunu boyu uzayan bir kare prizma gibi düşünebiliriz. Yana doğru boyu uzuyor ama alt tabanı ve üst tabanı hep sabit, yani 2 yüz her adımda var. Birleştirilen birim küp sayısı da yan yüzleri veriyor. Ama bir kare prizmanın 4 adet yan yüzü olduğundan örneğin 7 birim birleşince 4×7 'den 28 yüz yan yüzlerden geliyor. 2 tane de alt taban ve üst taban toplam 30 yüz yapar.

170A: Arkadaşınız açıklamasında prizmalara ait hangi ortak özellikler üzerinde durdu? Bu ortak özellikleri daha fazla çubuk sayısı için genelleleyebilir miyiz?

Yukarıdaki diyalog incelendiğinde öğrencinin açığa çıkan matematiksel bir düşünceyi anlamadığını ifade etmesi ve sonrasında neden anlamadığının altında yatan nedenleri açıklaması N_5 normunun sınıf tarafından müşterek bir anlayışla geliştirildiğini gösterir niteliktedir. Bu noktada öğretmenin “anlayamadığın yeri açıklar mısın, neden anlamadığını düşünüyorsun” gibi söylemleri öğrencinin kendi matematiksel düşüncesini açıklama ihtiyacı duymalarına fırsat tanımaktadır.

4.3. Öğrencilerin Öğretim Sonrası Cebirsel Düşünme Süreçlerine İlişkin Bulgular

Bu bölümde araştırmanın üçüncü alt problemi olan “*sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim sonrası öğrencilerin cebirsel düşünme süreçleri nasıldır?*” sorusuna yanıt aranmaktadır. Öğrencilerin cebirsel düşünme süreçleri Radford (2008)’un cebirsel genelleme inşası kuramsal çerçevesi bağlamında incelenmektedir.

Öğrencilerin genelleme süreçleri;

- (i) Örüntüdeki ortaklığı yakalama, anlama veya idrak etme,
- (ii) Bu ortak özelliği dikkate alınan örüntünün veya sayı dizisinin tüm terimlerine genelleme ve
- (iii) Örüntünün herhangi bir terimini doğrudan belirtmek için bir kural veya şema şekli belirtme

alt bileşenlerinin ele alınmasıyla incelenecektir.

Tablo 16

İlgili Bileşenler Bağlamında Oluşan Genelleme Türleri

Genelleme Türü	Açıklamalar
Cebirsel Genelleme	Örüntünün bir bölümünden ortak özelliğin fark edilmesi, fark edilerek geliştirilen hipotezden p_n elde edilmesi
Aritmetik Genelleme	Örüntünün bir bölümünden ortak özelliğin fark edilerek hipotez geliştirilmesi
Olgunlaşmamış Tümevarım	Örüntünün bir bölümünden p_n elde edilmesi

Öğrencilerin sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim sonrası cebirsel düşünme süreçlerinin incelenmesi adına “*Öğretim Sonrası Cebirsel Düşünme*

Değerlendirme Formu'' uygulanmıştır. Uygulanan form 10 adet alt etkinlikten oluşmaktadır. Öğrencilerin öğretim öncesi cebirsel düşünme süreçleri bu etkinliklere ait yazılı çözümler, çözümlere ilişkin açıklamalar ve yarı yapılandırılmış mülakatlardan elde edilen veriler ışığında açıklanacaktır.

İlgili veri toplama aracı ışığında elde edilen bulgular incelendiğinde öğrenciler öğretim sonrası cebirsel düşünme süreçlerini; cebirsel genelleme ve aritmetik genelleme bağlamında iki farklı genelleme türüyle olgunlaştırdıkları görülmektedir.

Etkinliklere ilişkin yazılı çözümler ve mülakat sürecindeki açıklamalar incelendiğinde öğrencilerin en çok cebirsel genelleme yaklaşımı sergilediği bulgusuna ulaşılmıştır. Araştırma bulgularına göre birkaç öğrenci aritmetik genelleme yaklaşımı sergilerken olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı gösteren öğrenci bulunamamıştır.

4.3.1. Cebirsel Genelleme Sergileyen Öğrenci Yaklaşımı

Öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerini *cebirsel genelleme* bağlamında olgunlaştırmaları; örüntüyü problem bağlamında verilen bilgiler ile ilişkilendirerek ortaklıkların fark edilmesi ve fark edilen bu ortaklığın örüntünün diğer bölümlerine genellemesi yeteneğine dayanmaktadır. Öğrencilerin yazılı çözümlerinden öğretim sonrası genelleme süreçlerini nasıl şekillendirdikleri, aşağıdaki bileşenler doğrultusunda incelenmektedir.

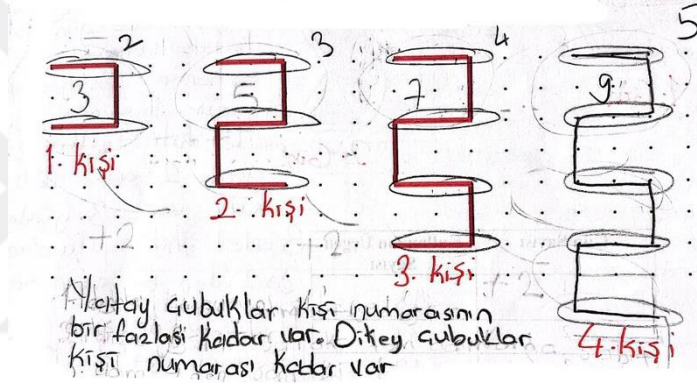
- (i) Örüntüdeki ortaklığı yakalama, anlama veya idrak etme,
- (ii) Bu ortak özelliği dikkate alınan örüntünün veya sayı dizisinin tüm terimlerine genelleme ve
- (iii) Örüntünün herhangi bir terimini doğrudan belirtmek için bir kural veya şema şekli belirtme, şeklindedir.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

Cebirsel genelleme gerçekleştiren öğrenciler, cebirsel olarak anlamlandırma sürecinde örüntüye ilişkin ortaklık ve ilişkileri fark ederler. Bu ilk adımda örüntüdeki terimlere ait neyin benzer neyin farklı olduğu seçimi yapılmaktadır. İkinci olarak ortak özellik ayırt edilerek örüntüdeki tüm terimlere genellemekte ve bir hipotez oluşturulmaktadır. Genelleme sürecini bu şekilde olgunlaştıran öğrencilerin problem çözme adımlarına geçmeden önce örüntünün terimleri arasındaki ilişki ve ortaklıkları anlama çabasında oldukları ve terimler arası sabit farka odaklanmadıkları görülmektedir.

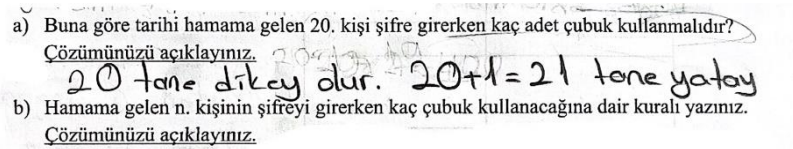
Sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim sonrası genelleme sürecini bu şekilde yapılandıran Y_3 'ün Etkinlik 3'e ilişkin verilen örüntünün terimlerine ait ortaklıkları anlamlandırma süreci Şekil 51'de görülmektedir. Öğretim öncesi öğrencilerin yazılı çözümleri ve mülakat sürecindeki açıklamaları doğrultusunda Y_2 'nin düşünsel süreçlerini *aritmetik genelleme* ve *olgunlaşmamış tümevarım* bağlamında yapılandırdığı bulgusuna ulaşılmıştır. Sorgulama temelli öğretim sonrasında ise öğrencinin tüm etkinliklerde *cebirsel genelleme* yaklaşımı sergilediği görülmektedir.

Etkinlik 3; iki farklı örüntünün aynı günlük hayat problemi üzerinden sunulmasıyla oluşturulmuştur. Etkinliğin iki farklı bölümü vardır. Y_3 'ün Etkinlik 3'ün ilk bölümüne ilişkin yazılı çözümleri Şekil 51'de görülmektedir.



Şekil 51: Y_3 'ün Etkinlik 3'e (1) ilişkin ortaklıkları fark etme süreci (i)

Y_3 'ün, verilen şekil örüntüsüne ilişkin modeli; yatay ve dikey yapılar olarak ele aldığı Şekil 51'de görülmektedir. Y_3 'ün “yatay çubuklar kişi numarasının bir fazlası kadar var, dikey çubuklar kişi numarası kadar” söylemi verilen şekil örüntüsüne ait ortaklık özellikleri fark ettiğini destekler niteliktedir. Her adımda bulunan yatay ve dikey çubukları gruplandırarak adım sayısı ile ilişkilendirmiştir. Böylece her adımda bulunması gereken yatay ve dikey çubukların sayısının adım sayısı ile ilişkisini ayırt edebilmiştir.



Şekil 52: Y_3 'ün fark edilen ortaklığı örüntünün diğer terimlerine genelleme süreci (ii)

Öğrencinin geliştirdiği “dikey çubuklar kişi numarası kadar, yatay çubuklar kişi numarasının bir fazlası kadar” hipotezi ışığında, fark edilen ortaklığın örüntünün diğer terimlerine genelleme süreci Şekil 36'da görülmektedir. Bu bağlamda geliştirilen hipotez, 20.

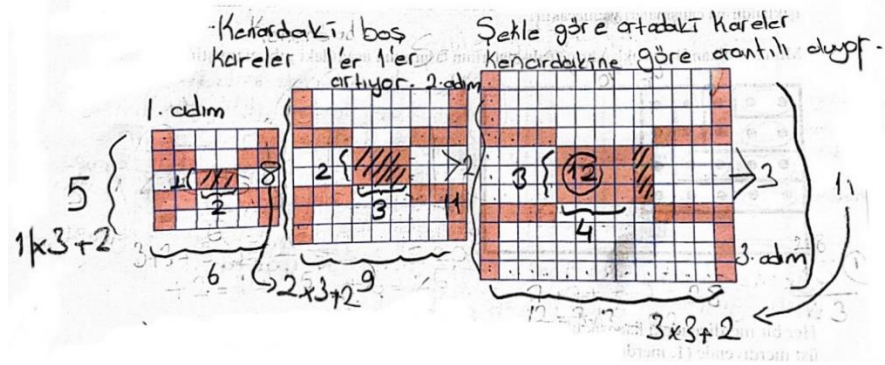
adım için “20 dikey olur” ve “ $20+1=21$ tane yatay” çubuk bulunması gerektiği çıkarımını yapmasını sağlamıştır. Bu şekilde Y_3 tarafından idrak edilen ortak özellik örüntünün diğer terimlerine genellenerek 20. adımda kullanılması gereken çubuk sayısını “ $20+21$ ” işlemi ile 41 olarak elde edilmiştir.

Y_3 , verilen şekil örüntüsü üzerinden ortaklıkları yatay ve dikey yapılar olarak ele alıp modeli doğru bir şekilde yorumlayarak cebirsel bir genellemede bulunmuştur. Y_3 'ün örüntünün herhangi bir terimini doğrudan belirtmek için cebirsel bir kural elde etme süreci Şekil 53'te görülmektedir.

Örneğin ikinci kişi geldiğinde 2 dikey, $3(2+1)$ 3 yatay çubuk olur. Çünkü kişi numarası kadar dikey, kişi numarasının 1 fazlası kadar yatay çubuk olduğundandır. Bu nedenle n . kişi geldiğinde n tane dikey, $n+1$ tane yatay çubuk olur. Toplam $n+n+1=2n+1$ çubuk olur.

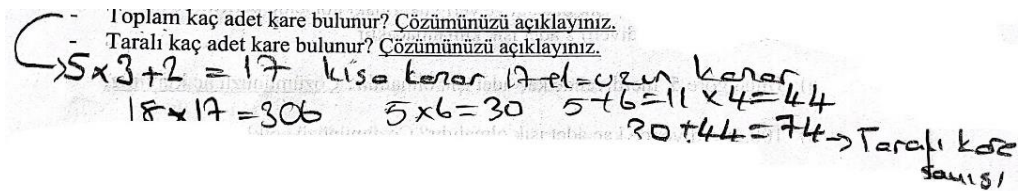
Şekil 53: Y_3 'ün örüntünün herhangi bir terimini doğrudan belirtmek için cebirsel bir kural elde etme süreci (iii)

Y_3 'ün “örneğin ikinci kişi geldiğinde 2 dikey, $3(2+1)$ yatay çubuk olur, çünkü kişi numarası kadar dikey, kişi numarasının 1 fazlası kadar yatay çubuk olduğundandır, bu nedenle n . kişi geldiğinde n tane dikey, $n+1$ tane yatay çubuk olur, toplam $n+n+1=2n+1$ çubuk olur” açıklamaları, fark ettiği ortaklığı örüntünün diğer terimlerine genellediği ve bu genelleme doğrultusunda cebirsel olarak anlamlı bir kural elde ettiğini gösterir niteliktedir. Y_3 , adım sayısını kişi numarası ile ilişkilendirerek dikey yapıların adım sayısı kadar, yatay yapıların ise adım sayısının 1 fazlası kadar olduğu çıkarımını yapmıştır. Bu bağlamda n bilinmeyenine “kişi numarası” ya da “adım sayısı” kavramlarını atfederek toplam çubuk sayısını “ $n+n+1$ ” şeklinde elde etmiştir. Y_3 'ün Etkinlik 3'ün ikinci bölümüne ilişkin yazılı çözümleri Şekil 53'te görülmektedir.



Şekil 54: Y₃'ün Etkinlik 3'e (2) ilişkin ortaklıkları keşfetme süreci (i)

Öğretim sonrası öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerinin incelenmesi adına uygulanan Etkinlik 3'ün ikinci bölümünde öğrencilerden verilen şekil örüntüsüne ilişkin yakın ve uzak terimlerini elde etmeleri ve genel bir kural elde etmeleri istenmektedir. Y₃, öncelikle örüntünün verilen terimlerine ait ortaklık ve ilişkileri belirlemeye yönelik stratejiler geliştirmiştir. Taralı kare sayısını incelemek için, modelde bulunan taralı kısımları iki parçaya ayırmıştır. Şekil 35'te ortada taralı halde bulunan kareleri dikdörtgenin alanı ile ilişkilendirdiği görülmektedir. Y₃'ün birinci adım için "1.2", ikinci adım için "2.3" ve üçüncü adım için "3.4" işlemlerini gerçekleştirmesi ortada bulunan kare sayısını dikdörtgenin alanıyla ilişkilendirerek açıkladığını destekler niteliktedir. Toplam kare sayısını ise yine dikdörtgenin alanını kullanarak açıklamıştır. Birinci adım için "5.6", ikinci adım için "8.9" ve üçüncü adım için "11.12" işlemlerini gerçekleştirerek toplam kare sayısını dikdörtgenin alanı üzerinden elde etmektedir. Dikdörtgenin kısa kenarını ise birinci adım için "1.3+2", ikinci adım için "2.3+2" ve üçüncü adım için "3.3+2" işlemleri üzerinden belirlediği görülmektedir.



Şekil 55: Y₃'ün fark edilen ortaklığı örüntünün diğer terimlerine genelleme süreci (ii)

Etkinliğin (a) maddesinde öğrencilerden 5. adımdaki taralı ve toplam kare sayısını bulmaları istenmektedir. Verilen şekil örüntüsüne ait değişen veya değişmeyen kısımları adım sayısı ile ilişkilendirerek Y₃'ün fark ettiği ortak özelliği örüntünün diğer terimlerine genelleme süreci Şekil 55'te görülmektedir. Öğrencinin geliştirdiği "taralı kare sayısını bulmak için

ortadaki kareleri buluruz, ortada hep adım sayısı ve adım sayısının bir fazlası kadar dikdörtgenin kenarları var'' hipotezi; 5. adımdaki ortadaki dikdörtgenin kısa kenarının adım sayısı kadar, uzun kenarının ise kısa kenarın bir fazlası kadar kare olduğunu fark etmesi ''5.6'' işlemini yaparak 30'u elde etmesini sağlamıştır. Şeklin köşelerinde bulunan taralı kareleri ise '' köşelerde adım sayısı kadar ve adım sayısının bir fazlası kadar birim karenin toplamı var, bunu 4 ile çarpalım'' hipotezi üzerinden elde etmiştir. Bu bağlamda geliştirdiği hipotez 5. adımda bir köşe de yatay 5 ve dikey 5+1 tane kare olacağından toplam ''5+6'' kadar kare olacağı çıkarımını yapmasını sağlamıştır. Taralı kareler şeklin dört köşesinde bulunacağından dolayı ''11.4'' işlemi ile köşelerde bulunması gereken taralı kare sayısını elde etmiştir. Bu bağlamda geliştirdiği hipotezler ve belirlediği ortaklıklar ışığında 5. adımın taralı kare sayısını ''30+4'' işlemi ile 74 olarak bulmuştur.

Toplam kare sayısını dikdörtgenin alanından bulabiliriz. Dikdörtgenin alanını bulabilmek için kısa ve uzun kenarı bilmemiz gerekir. Dikdörtgenin kısa kenarı her adım için adım sayısını 3 katının 2 fazlası kadardır. Uzun kenarda kısa kenarın 1 fazlasıdır.

Şekil 56: Y₃'ün belirlediği ortaklıklara ilişkin açıklamaları

Y₃ tarafından toplam kare sayısının elde edilmesine yönelik geliştirilen hipotez Şekil 56'da görülmektedir. Açıklamalar incelendiğinde Y₃'ün toplam kare sayısını dikdörtgenin alanıyla ilişkilendirdiği görülmektedir. ''dikdörtgenin kısa kenarı her adım için adım sayısının 3 katının 2 fazlası kadardır, uzun kenarı da kısa kenarın 1 fazlasıdır'' söylemi, 5. Adımı istenen örüntü için ''5.3+2'' işlemini gerçekleştirmesini sağlamıştır. Bu bağlamda kısa kenarı 17 kare elde ederek uzun kenarı ''17+1'' olarak elde etmiştir. Dikdörtgenin alanı kullanılmalı hipotezinin; ''17.18=306'' çıkarımını yapmasını sağladığı görülmektedir. Bu bağlamda Y₃ tarafından geliştirilen hipotezler ışığında idrak edilen ortak özellikler diğer terimlere genellenerek örüntünün anlamlandırıldığı anlaşılmaktadır.

b) Duvar motifinin n. adımındaki toplam kare sayısını veren kuralı bulunuz. Cözümünüzü açıklayınız.
 n. adımda $n \times 3 + 2$ kısa kenar olur $(3n+2) + 1$ uzun kenar olur $(3n+2) \times (3n+3)$ toplam kare sayısı:
 c) Duvar motifinin n. adımındaki taralı kare sayısını veren kuralı bulunuz. Cözümünüzü açıklayınız. $n \times (n+1) + 4 \times (n+n+1)$

Şekil 57: Y₃'ün örüntünün herhangi bir terimini doğrudan belirtmek için cebirsel bir kural elde etme süreci (iii)

Y₃, şekil örüntüsüne ilişkin verilen modeli doğru bir şekilde yorumlayarak cebirsel bir genellemede bulunmuştur. İşlemsel olarak yaptığı çözümün yanı sıra, sorunun altında yapmış

olduğu açıklamalarda öğrencinin taralı ve toplam kare sayısını dikdörtgenin alanı ve adım sayısı ile ilişkilendirmesi cebirsel genelleme yaptığını gösterir niteliktedir. Bu bağlamda dikdörtgenin kısa kenarını *adım sayısının 3 katının 2 fazlası şeklinde* $(3.n+2)$; uzun kenarını ise *kısa kenarın bir fazlası* $(3.n+2+1=3n+1)$ olarak belirterek “ $(3n+2).(3n+1)$ ” cebirsel kuralına ulaşmıştır. “Bu bağlamda geliştirilen hipotez ışığında örüntünün herhangi bir terimini doğrudan belirtmek için cebirsel bir kural elde etmiştir.

Yarı Yapılandırılmış Mülakatlardan Elde Edilen Bulgular

Etkinlik 3’e ilişkin cebirsel genelleme yaklaşımı sergileyen Y₃’ün yazılı çözüm ve açıklamalarına ek olarak genelleme sürecini nasıl yapılandığı ve düşünsel süreçlerini derinlemesine incelemek amacıyla yarı yapılandırılmış mülakat gerçekleştirilmiştir.

Y₃, yazılı açıklamalarında, örüntüye ilişkin ortaklıkları şekil üzerinden tespit ederek bir hipotez geliştirmiş ve buna ilişkin cebirsel bir kural elde ederek genelleme sürecini tamamlamıştır. Gerçekleştirilen mülakat sonrasında, öğrencinin çözümleri ile mülakat sürecindeki açıklamaları arasında herhangi bir farklılığın olmadığı görülmüştür. Öğrencinin çözümlerinden gözlemlenebilen süreçlerin mülakatlarda da benzer olarak açıkladığı görülmektedir.

98A: Verilen örüntüye ilk olarak odaklandığında ne şekilde düşündün? Nelere dikkat ettin? Örüntüye ilişkin neleri gözlemledin?

102Y₃: Şekle ilk odaklandığımda örüntü biraz karmaşık geldi. Ancak sonrasında toplam kare sayısına dikdörtgenin alanından ulaşabileceğimi fark ettim.

100A: Taralı kare sayısına nasıl ulaştın?

105Y₃: Şekilde taralı olan iki farklı kısım vardı. Birincisi ortada bulunan dikdörtgendi. Dikdörtgen için kenar uzunlukları adım sayısı kadar ve adım sayısının bir fazlası kadar oluyordu her bir adımda. Bu nedenle n. adımda kısa kenar n ve uzun kenar n+1 olacağından ortadaki kare sayısı “ $n.(n+1)$ ” olarak elde ettim. Köşelerde ise dört tane aynı şekil harfi vardı. L harfi gibi süreli döndürülmüş diye düşündüm. Mesela birinci adımda 1 tane dikey 2 tane yatay kare toplam bir köşede 3 tane kare oluyor. İkinci adımda da 2 tane dikey 3 tane yatay kare toplam bir köşede 5 tane kare olmuş oluyor. Her adım için böyle ortak olduğunu fark ettim. Sonra yatay ve dikey yapıları adım sayısı ile ilişkilendirdim. Genel kurala öyle ulaştım.

101A: $n.(n+1)$ ortadakini ifade ediyor. Yazılı açıklamalarında belirttiğin $4.(n+n+1)$ neyi ifade ediyor?

106Y₃: Köşelerde bulunan taralı kare sayısını ifade ediyor öğretmenim. 4 ile çarpmamın sebebi döndürülmüş dört aynı L harfinin olması. Hepsinde aynı sayıda taralı kare var zaten. Bir tanesini bulup 4 ile çarparsak tamamını buluruz diye düşündüm.

Y₃, verilen şekil örüntüsüne ilişkin ortaklıkları fark ederek fark ettiği ortaklık üzerine bir hipotez geliştirmiştir. Bu bağlamda geliştirdiği hipotezi örüntünün diğer terimlerine genelleyerek cebirsel bir kural elde etmiştir. Y₃'ün yazılı çözümleri ve mülakatlarda verdiği yanıtlar ışığında ilgili bileşenleri sağlaması (*örüntüdeki ortaklığı yakalama, anlama veya idrak etme, bu ortak özelliği dikkate alınan örüntünün veya sayı dizisinin tüm terimlerine genelleme ve örüntünün herhangi bir terimini doğrudan belirtmek için bir kural veya şema şekli belirtme*) etkinlik 3'e ilişkin düşünsel süreçlerini cebirsel genelleme bağlamında yapılandığı görülmektedir.

159A: Öğretim öncesinde örüntüye odaklandığında ilk neleri inceliyordun? Şimdi nelere dikkat ediyorsun?

165Y₃: Öncelikle bir örüntü gördüğümde ilk olarak hep terimleri sayarak ya da terimler arasındaki farkı tespit ederek başlıyordum.

160A: Mesela 1, 3, 5, 7, ... şeklinde devam eden bir sayı ya da şekil örüntüsü verildiğini varsayalım. Örüntünün diğer terimlerine nasıl ulaşıyordun?

166Y₃: Eğer verilen terimlere yakın bir terim isteniyorsa üzerine ekleyerek devam ediyordum. Hep bir önceki terime artış miktarını ekleyerek bir sonraki terime ulaşıyordum. Mesela söylediğiniz ikişer artıyor. Şekilde olsa sayı da olsa ekleyerek diğer terimleri buluyordum. Ama eğer uzak bir terimse genel kuralı deneyerek bulup sonra yerine yazıyordum, öyle buluyordum. Mesela bunun artışı 2, o zaman kuralda $2n$ olmalı birinci adımı elde etmek için 1 çıkarmalıyım $2n-1$.

161A: Peki şimdi nasıl buluyorsun?

167Y₃: Şimdi hiçbir örüntüyü saymıyorum. Çünkü zaten hiç ekleyerek ya da deneyerek uğraşmadan şekle odaklandığımda hemen ortak yerleri görebiliyorum. Böyle hem daha zevkli oluyor hem de neyi neden yaptığımı kendim belirliyorum ve bir anlamı oluyor.

162A: Bir anlamı oluyor derken ne demek istiyorsun?

168Y₃: Mesela iki eklememiz gerek çünkü adım sayısının iki fazlası dediğimde neden iki eklememiz gerek dediğimi açıklayabiliyorum ya da gerekçelendirebiliyorum. Öncesinde ise ezbere ya da deneyerek sorgulamadan yapıyordum.

163A: Şimdi?

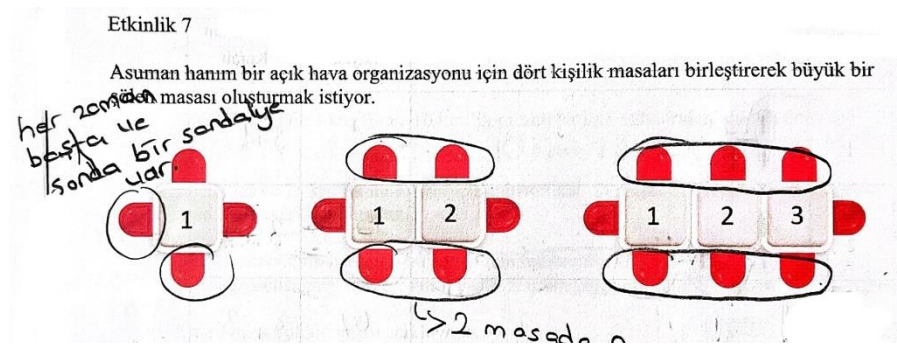
169Y₃: Şimdi sorgulayarak önce örüntü üzerine düşünüyorum. Sonra örüntüye ilişkin ortaklıkları fark ediyorum. Fark ettiğim şeye ulaştığımda ise zaten diğer terimler ve genel kural çok kolay ortaya çıkıyor.

164A: Mesela 4, 8, 12, 16, ... şeklinde devam eden bir sayı örüntüsünü ele alalım. Öğretim öncesinde genel kurala nasıl ulaşıyordun? Şu an nasıl ulaşıyorsun?

170Y₃: Önceden dediğim gibi dörder arttığı için kural $4n$ ilk terim 4 olduğu için eklemeye gerek yok. Bunları neden böyle yaptığımı bile bilmiyordum. Ama şu an her terim adım sayısının 4 katı olduğu için, bunu farkedebiliyorum. Herhangi bir adım için adım sayısına n dersek adım sayısının 4 katından $4n$ oluyor. Aslında öğretim sürecinde şekil örüntüsü de olsa sayı örüntüsü de olsa örüntüye ait yapı ve ilişkileri sorgulayarak incelediğimizi fark ettim. Neyi neden yapıyoruz sürekli açıklıyorduk. Zaten önceden çözdüğümüz etkinliklerde sadece işlem var. Şimdi ise bir sürü şey yazmışım.

Y₃'ün mülakat sürecindeki açıklamaları incelendiğinde cebirsel düşünme süreçlerini cebirsel genelleme bağlamında yapılandığı görülmektedir. Bunun yanı sıra sorgulama temelli öğretim sürecinde öğrencilerin matematiksel çözüm ya da fikirlerini sürekli gerekçelendirmelerinin ve açıklamalarının öğretim sonrasında etkinliklere ilişkin yazılı çözüm ve açıklamalarına yansıdığı görülmektedir.

Öğretim sonrası genelleme sürecini benzer şekilde yapılandıran Y₂'nin Etkinlik 7'ye ilişkin verilen örüntünün terimlerine ait ortaklıkları anlamlandırma süreci Şekil 58'de



Şekil 58: Y₂'nin Etkinlik 7'ye ilişkin ortaklıkları keşfetme süreci (i)

görülmektedir. Öğretim öncesi öğrencilerin yazılı çözümleri ve mülakat sürecindeki açıklamaları doğrultusunda Y_2 'nin düşünsel süreçlerini *aritmetik genelleme ve olgunlaşmamış tümevarım* bağlamında yapılandığı bulgusuna ulaşılmıştır. Sorgulama temelli öğretim sonrasında ise öğrencinin tüm etkinliklerde *cebirsal genelleme* yaklaşımı sergilediği görülmektedir.

Problem teması, "gerçekçi" problem durumlarının başlangıç noktası olarak sunulması amacıyla hazırlanan Etkinlik 7'de öğrencilerden, birleştirilen masa sayısı ile masada bulunan toplam kişi sayısı verilen şekil üzerinden ilgili ortaklık ve özellikler üzerinden ilişki kurularak elde edilmesi beklenmektedir. Bu bağlamda Y_2 , model üzerinde belirtilen ortaklıkları anlamlı bir şekilde ifade etmiştir. Y_2 , şekil üzerinde değişen ve değişmeyen kısımlara odaklanarak diğer terimleri elde etmeye yönelik hipotezler geliştirmiştir. "her zaman başta ve sonda bir sandalye var" hipotezi; örüntünün her adımı için geçerli olan ve değişmeyen ortak özellikleri idrak ettiğini göstermektedir. Bu bağlamda geliştirdiği hipotez ile, birleştirilen masa sayısı değişse bile başta ve sondaki sandalyenin hep sabit kalacağını ayırt etmiştir. Geriye kalan sandalyeleri; birleştirilen masa sayısı ile ilişkilendirerek gruplandırmıştır.

Her masanın Sağ ve Solunda 1 tane sandalye bulunuyor. Üst ve alt tarafında ise Masa sayısı kadar bulunuyor. Örneğin 3 masa olduğu zaman üst ve altta 3'er sandalye olur. $3+3=6$ tane üst ve altta var. Sağ ve solda 1'er tane $1+1=2$ tane olur. Toplamda ise $6+2=8$ tane sandalye Etkinlik 7 olur.

Şekil 59: Y_2 'nin fark edilen ortaklığı örüntünün diğer terimlerine genelleme süreci (ii)

Y_2 , örüntüye ait ortak özellikleri belirleyerek geliştirdiği hipotez doğrultusunda örüntünün diğer terimlerini elde etmiştir. Şekil 58'de bulunan ifadeler, belirlediği ortak özelliği örüntünün herhangi bir terimi üzerinden açıklayarak geçerliliğini kanıtladığını gösterir niteliktedir. Bu bağlamda etkinliğin (a) maddesini, 10 masa birleştirilmesi durumunda kaç sandalye gerektiğini "10 masa olduğunda üst ve altta 10'ar yani $10+10$ toplam 20 sandalye olur, sol ve sağda birer tane sandalye sabit olduğundan $20+2$ işleminden 22 tane sandalye olmalı" şeklinde açıklamaktadır. Y_2 'nin model üzerinden fark ettiği ortak özelliği örüntünün diğer terimlerine entegre etmesi, verilen örüntüyü cebirsal olarak anlamlandırdığını göstermektedir.

Etkinliğin (b) maddesinde öğrencilerden, organizasyona 76 kişinin katılması durumunda kaç masanın birleştirilmesi gerektiğini elde etmeleri beklenmektedir. Bu bağlamda Y_2 , örüntünün değişen veya değişmeyen kısımlarını sorgulayarak problem çözme adımlarını

geliştirdiği hipotezler doğrultusunda olgunlaştırmıştır. “birleştirilen masa sayısı değişse de başta ve sonda birer masa sabit kalmalı” hipotezi; “ $76-2$ ” işlemini yaparak “baş ve sondakiler sabit olduğu için çıkarmalıyız” çıkarımını yapmasını sağlamıştır. Geriye kalan 74 sandalye eşit bir şekilde üst ve altta gruplandırıldığı için “ $74/2$ ” işlemi ile birleştirilen masa sayısını 37 olarak elde etmiştir.

Eğer n . masada üst ve altta n 'er tane toplam $2n$ tane olur. Sağ ve solda da 1'er tane var. Yani 2 tane var. Alt, üst, sağ ve solu toplayınca n . masada $2n+2$ tane sandalye olur. $2n+2$ hem de genel kural olur.

Şekil 60: Y_2 'nin örüntünün herhangi bir terimini doğrudan belirtmek için cebirsel bir kural elde etme süreci (iii)

Y_2 fark ettiği ortak özellik doğrultusunda “eğer n . masada üst ve altta n 'er tane olursa toplam $2n$ tane olur, sağ ve solda da 1'er tane var, yani 2 tane var, alt, üst, sağ ve solu toplayınca n . masada $2n+2$ tane sandalye olur, $2n+2$ hem de genel kural olur” hipotezini geliştirerek cebirsel olarak anlamlı ve geçerli bir genel kural elde etmiştir. Öğrencinin yazılı açıklama ve söylemleri cebirsel genelleme gerçekleştirdiğini destekler niteliktedir.

Yarı Yapılandırılmış Mülakatlardan Elde Edilen Bulgular

Etkinlik 7'ye ilişkin cebirsel genelleme yaklaşımı sergileyen Y_2 'nin yazılı çözüm ve açıklamalarına ek olarak genelleme sürecini nasıl yapılandığı ve düşünsel süreçlerini derinlemesine incelemek amacıyla yarı yapılandırılmış mülakat gerçekleştirilmiştir.

Y_2 , yazılı açıklamalarında, örüntüye ilişkin ortaklıkları şekil üzerinden tespit ederek bir hipotez geliştirmiş ve buna ilişkin cebirsel bir kural elde ederek genelleme sürecini tamamlamıştır. Gerçekleştirilen mülakat sonrasında, öğrencinin çözümleri ile mülakat sürecindeki açıklamaları arasında herhangi bir farklılığın olmadığı görülmüştür. Öğrencinin çözümlerinden gözlemlenebilen süreçlerin mülakatlarda da benzer olarak açıkladığı görülmektedir.

198A: Verilen örüntüye ilk olarak odaklandığında nelere dikkat ettin? Ne şekilde düşündün?

196Y₂: Masanın etrafındaki sandalyeleri sorduğunu okuyunca sandalyeleri inceledim. Her adımda baş ve sondaki sandalyenin sabit kalarak değişmediğini fark ettim. Sonra diğer sandalyeleri inceledim.

199A: Bazı sandalyeleri gruplayarak çember içine almışsın, onları neden diğerlerinden ayırdın?

197Y₂: Çünkü onlar belli bir düzene göre ilerliyordu ve artıyordu, diğerleri gibi sabit değildi.

200A: Neye göre gruplandırдың peki?

198Y₂: Şunu fark ettim, mesela 2 masa birleştirilince üstte 2 tane sandalye ve altta iki tane sandalye oluyordu. Zaten böyle olması çok mantıklıydı çünkü her masanın bir kenarına yalnız bir kişi oturabiliyor. Otomatik o zaman birleştirilen masa sayısı oturacak kişi sayısı ile orantılı olmuş oluyor.

200Y₂: Aslında şöyle de yapabilirmişim şimdi fark ettim, baştaki ve sondaki masanın etrafında 3 sandalye var. Ortada kalan masaların hep 2 sandalye olmak zorunda çünkü iki kenarını hep diğer masalar kapatıyor.

202A: Nasıl yani, düşünceni bir örnek üzerinden açıklar mısın?

201Y₂: Mesela şöyle 10 tane masa birleştirildiğini varsayalım. En baştaki masanın etrafına 3 sandalye, en sondakinin etrafına da 3 sandalye konacak. Ancak arada kalan 8 masanın her birinin etrafına 2 sandalye konulabilecek. $3+3$ toplam 6 yapar. 8 ile 2'yi çarparsak 16 ediyor. Baş ve sonu eklersek $16+6$ 'dan 22 olmuş oluyor. O zaman da 22 bulmuştum yani doğru.

203A: Bunu cebirsel olarak nasıl ifade edersin? Mesela fark ettiğin ortak özelliği ilk terim için nasıl açıklarsın?

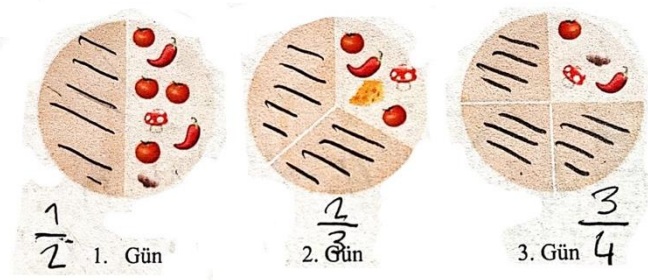
202Y₂: İlk terim 1 masa var demek onun otomatik etrafında zaten 4 sandalye oluyor. İki masa içinde $3+3$ toplam 6 yapıyor zaten. Aa aslında farklı bir şekilde yine aynı sonuçlara ulaştım aslında.

204A: Peki bu belirttiğin ortaklığı genelleyerek herhangi bir terimi doğrudan belirtmek için nasıl cebirsel bir kural nasıl geliştirebiliriz?

203Y₂: Yani aslında bunu düşünmedim. 6 hep sabit olarak alsak ama o zaman ilk terim için olmaz. Şimdi genel kurala ulaşamadım ama aynı örüntüde illa bir tane ortak ilişki olmak zorunda değilmiş. Yani bir örüntüye ait genel kurala farklı yollardan ulaşabiliyoruz.

Y₂'nin yazılı ve mülakat sürecindeki açıklamaları, cebirsel genelleme gerçekleştirdiğini gösterir niteliktedir. Ayrıca mülakat bulguları incelendiğinde, öğrencinin *“aslında şöyle de yapabilirmişim şimdi fark ettim, baştaki ve sondaki masanın etrafında 3 sandalye var, ortada kalan masaların hep 2 sandalye olmak zorunda çünkü iki kenarını hep diğer masalar kapatıyor”* söylemi örüntüye ilişkin farklı bir ortak özellik fark ettiğini gösterir niteliktedir. Y₂'nin mülakat sürecinde ve yazılı çözümlerinde modeli farklı şekillerde ele alma durumu, genel bir kurala ulaşma konusunda bir esneklik ve zenginlik sağlamıştır. Dolayısıyla Y₂'nin, verilen şekil örüntüsünden yararlanarak aynı genel kurala farklı yol ve stratejiler ile ulaşabileceği konusunda bir yaklaşım kazandığı gözlemlenmiştir.

Düşünsel süreçlerini cebirsel genelleme bağlamında olgunlaştıran bir başka öğrenci ise Y₁'dir. Sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim öncesi Y₁'in yazılı çözümleri ve mülakat sürecindeki açıklamaları incelendiğinde *olgunlaşmamış tümevarım* ve *aritmetik genelleme* gerçekleştirdiği bulgusuna ulaşılmıştır. Öğretim sonrası uygulanan tüm etkinliklerde Y₁'in cebirsel düşünme süreçlerini *cebirsel genelleme* bağlamında yapılandığı görülmektedir. Etkinlik 1'de benzer bir yaklaşım gösteren Y₁'in örüntüyü anlamlandırma ve örüntüye ilişkin ortaklıkları fark etme süreci Şekil 61'de görülmektedir.



Şekil 61: Y₁'in Etkinlik 1'e ilişkin ortaklıkları fark etme süreci (i)

Etkinlik 1’de öğrencilerden görsel ve gerçek hayat problemi olarak sunulan örüntünün adım sayısı ile yenilen pizza dilim miktarı arasında, adım sayısı ile pay ve payda arasındaki ilişki ve ortaklığın fark edilerek bir genelleme de bulunulması ve bu genelleme üzerinden genel bir kural elde edilmesi beklenmektedir. Genelleme sürecini bu bağlamda şekillendiren Y_1 ’in örüntüye ilişkin ortaklıkları fark etme süreci Şekil 61’de görülmektedir. Etkinliğin ilk bölümünün (a) maddesinde öğrencilerden adım sayısı ile yenilen pizza miktarı arasındaki ilişkiyi keşfetmeleri beklenmektedir. ‘‘gün sayısı kadar dilim pizza yiyor, bu bana pay kısmını verir, 1 fazlası da paydayı verir, çünkü incelendiğimde birinci gün pizzanın 2’de birini yemiş, ikinci gün 3’te ikisini ve üçüncü gün 4’te üçünü yemiş’’ söylemleri adım sayısı ile pizza miktarı arasındaki ilişkiyi cebirsel nedenlerini inceleyerek açıkladığını göstermektedir. Etkinliğin ikinci bölümü, öğrencilerden verilen tabloyu doldurarak herhangi bir terimi elde etme de ne tür bir genelleme gerçekleştireceklerini yansıtılması amacıyla hazırlanmıştır. Bu bağlamda Y_1 , anlamlı ve geçerli açıklamalar yaparak örüntünün diğer terimlerini fark ettiği ortak özellik üzerinden açıklamıştır. Y_1 ’in açıklamaları Şekil 62’de görülmektedir.

GÜN sayısı kadar dilim pizza yiyor bu bana pay kısmını verir 1 fazlası da paydayı verir

b) Buna göre Aslan 7. gün pizzanın kaçta kaçını yemiştir?

$\frac{7}{8} \rightarrow$ Çünkü 7. gün 7 parça yer 1 fazlası paydayı verdiği için $\frac{7}{8}$ olur

2) Yukarıda verilen probleme göre tablodaki boşlukları doldurunuz.

Terim (Gün)	1.	2.	3.	4.
Kesir	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$

a) Doldurduğunuz tabloda dikkatinizi çeken bir nokta var mı? Açıklayınız.

1. adım ile kesrin payı aynı

Şekil 62: Y_1 ’in fark edilen ortaklığı örüntünün diğer terimlerine genelleme süreci (ii)

Tabloyu doğru bir şekilde dolduran Y_1 ’in örüntüye ilişkin ortaklıkları fark ederek bir genelleme gerçekleştirdiği Şekil 62’de görülmektedir. Y_1 , ‘‘birinci adım ile kesrin payı aynı’’ şeklinde bir açıklama yaparak adım sayısı ile kesrin pay ve paydası arasındaki ilişkiyi kurduğunu kanıtlamaktadır. Bu bağlamda Y_1 , hipotezleri doğrultusunda 7. gün pizzanın 8’de 7’sinin yenmesi gerektiğini ‘‘çünkü yedinci gün 7 parça yer 1 fazlası paydayı verdiği için $\frac{7}{8}$ olur’’ söylemleri ile açıklamaktadır.

- b) Yukarıdaki kesirlerin listesi aynı örüntüyle devam ederse 0.95'e eşit olan terim kaçınıcı terim olur?
- $$\frac{95:5}{100:5} = \frac{19}{20}$$
19. gün olur adım ile payın sayısı aynı olur
- c) Buna göre herhangi bir terimde (n. terim) bulunacak kesrin değerini veren bir kural bulunuz. Çözümünüzü gerekçelendirerek açıklayınız
- $$n:n+1 = \frac{n}{n+1}$$
- n gün Sayısı ise pay n olur 1 paidir olur

Şekil 63: Y_1 'in örüntünün herhangi bir terimini doğrudan belirtmek için cebirsel bir kural elde etme süreci (iii)

Y_1 'in Şekil 63'te (b) maddesindeki çözüm stratejisine ilişkin anlamlı gerekçelendirme ve açıklamalar yapması örüntünün altında yatan cebirsel nedenleri ve ilişkileri anlamlandırdığını gösterir niteliktedir. Bu bağlamda 0.95'e eşit olan terimi, ondalık sayıyı kesre dönüştürüp sadeleştirme işlemi yaparak elde ettiği görülmektedir. Öğrencinin geliştirdiği "kesrin payı kaçınıcı gün olduğunu verir, adım ile pay aynı olur" hipotezi, 20'de 19'unu yenilen pizza miktarının 19. güne eşit olacağı çıkarımını yapmasını sağlamıştır. Fark ettiği ortak özellikleri örüntünün diğer terimlerine genelleyerek anlamlı ve doğru bir çıkarım yapan Y_1 , çıkarımı doğrultusunda herhangi bir terimde bulunacak kesrin değerini veren cebirsel bir kural elde etmiştir.

Yarı Yapılandırılmış Mülakatlardan Elde Edilen Bulgular

Etkinlik 1'e ilişkin cebirsel genelleme yaklaşımı sergileyen Y_1 'in yazılı çözüm ve açıklamalarına ek olarak genelleme sürecini nasıl yapılandığı ve düşünsel süreçlerini derinlemesine incelemek amacıyla yarı yapılandırılmış mülakat gerçekleştirilmiştir.

Y_1 , yazılı açıklamalarında, örüntüye ilişkin ortaklıkları şekil üzerinden tespit ederek bir hipotez geliştirmiş ve buna ilişkin cebirsel bir kural elde ederek genelleme sürecini tamamlamıştır. Gerçekleştirilen mülakat sonrasında, öğrencinin çözümleri ile mülakat sürecindeki açıklamaları arasında herhangi bir farklılığın olmadığı görülmüştür. Öğrencinin çözümlerinden gözlemlenebilen süreçlerin mülakatlarda da benzer olarak açıkladığı görülmektedir.

77A: 3, 6, 9, ... şeklinde devam eden bir sayı örüntüsü bulunduğunu varsayalım. Örüntünün kuralını nasıl elde edersin?

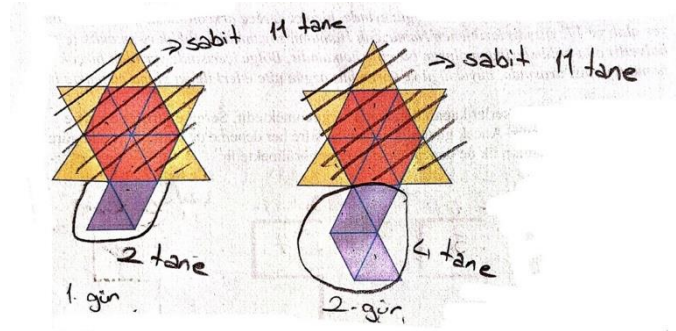
80Y₁: İlk terim 3, ikinci terim 6 ise demek ki adım sayısının üç katı oluyor. Mesela 10. terim 30 olacak 3 kat ilişkisi olduğu için, o zaman n bilinmeyen adım sayısı olursa genel kural n 'in 3 katı $3n$ olur.

78A: Peki gerçekleştirilen öğretim öncesini düşünecek olursak örüntünün 7. Terimine nasıl ulaşıyordun?

81Y₁: Ya hep bir önceki terime ekleyerek devam ediyor öyle buluyordum, ya da deneyerek genel kuralı bulup sonra yerine yazıyordum.

Öğrencinin mülakat sürecindeki açıklamaları incelendiğinde *“hep bir önceki terime ekleyerek devam ediyordum, ya da deneyerek kuralı bulup sonra yerine yazıyordum”* söylemleri öğretim öncesinde düşünsel süreçlerini *aritmetik genelleme* ve *olgunlaşmamış tümevarım* bağlamında olgunlaştırdığını destekler niteliktedir. Sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli matematik öğretim sonrasında ise öğrencinin kuralı *“ $3n$ ”* olan sayı örüntüsüne ilişkin genel kuralı, adım sayısı ile o adımda bulunan terim arasında bir ilişki ve ortaklık kurarak elde ettiği görülmektedir. Bu bağlamda yazılı çözümleri ve açıklamaları doğrultusunda öğrencinin öğretim sonrasındaki tüm etkinliklerde *cebirsal genelleme* gerçekleştirdiği görülmektedir.

Düşünsel süreçlerini cebirsal genelleme bağlamında yapılandıran bir başka öğrenci ise D₃'tür. Sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim öncesi D₃'ün yazılı çözümleri ve mülakat sürecindeki açıklamaları incelendiğinde *olgunlaşmamış tümevarım* ve *aritmetik genelleme* gerçekleştirdiği bulgusuna ulaşılmıştır. Öğretim sonrası uygulanan etkinliklerde D₃'ün cebirsal düşünme süreçlerini *cebirsal genelleme* bağlamında yapılandığı görülmektedir. Etkinlik 2'de benzer bir yaklaşım gösteren D₃'ün örüntüyü anlamlandırma ve örüntüye ilişkin ortaklıkları fark etme süreci Şekil 64'te görülmektedir.



Şekil 64: D₃'ün Etkinlik 2'ye ilişkin ortaklıkları fark etme süreci (i)

D₃, örüntüde bulunan ortak ilişki ve yapıları modelin değişen veya değişmeyen kısımlarına odaklanarak açıklamaktadır. Her bir adım için ortak olan kısımları gruplandırarak incelemektedir. Öğrencinin *“her zaman sarı ve kırmızı üçgenler sabit kalır, mor üçgenler ise önceki adımlarına 2 eklenerek artarak devam eder, yani var olan üçgen sayısında 11 olmak zorundadır”* söylemi çiçek örüntüsünde sarı ve kırmızı karelerin hep sabit olduğunu bu bağlamda 11 karenin her adımda sabit kalarak değişmeyeceğini idrak ettiğini göstermektedir. *“sapına geldiğimizde ise gün sayısının 2 katı kadar üçgen var, yani birinci gün $1 \times 2 = 2$ mor üçgen, ikinci gün $2 \times 2 = 4$ mor üçgen olduğunu gördüm, ancak sarı ve kırmızı olan 11 üçgen her zaman var, zaten çiçeğin sapı uzar ondan sapının artması yaprakların aynı kalması çok mantıklı”* açıklamasında bulunarak örüntüyü günlük hayat bağlamında anlamlandırmıştır. Ayrıca çiçeğin sapının her adımda gün sayısının iki katı kadar olacağını fark etmesi, örüntüye ilişkin değişen kısımları idrak ettiğini göstermektedir. Bu bağlamda D₃, örüntüye ait cebirsel nedenleri fark ettiği ortak özellikler üzerinden inceleyerek açıklamıştır. Örüntünün diğer terimlerini elde etme sürecinin incelenmesi adına gün sayısına göre kullanılan üçgen sayısının ilişkilendirildiği bir tablo öğrencilere sunularak doldurulması istenmiştir. Ayrıca öğrencilerden her bir alt maddeye ilişkin yanıtlarını gerekçelendirerek açıklamaları istenmiştir.

Gün Sayısı	Kullanılan Üçgen Sayısı
1	13
2	15
3	17
4	19
5	21
6	23
7	25
8	27

Şekil 65: D₃'ün fark edilen ortaklığı örüntünün diğer terimlerine genelleme süreci (ii)

D₃, tabloyu doğru bir şekilde doldurmuş ancak örüntünün diğer terimlerini nasıl elde ettiğine ilişkin geçerli bir açıklama da bulunmamıştır. Bu bağlamda öğrencinin düşünsel süreçlerinin derinlemesine analiz edilmesi adına bu bölüme ilişkin yarı yapılandırılmış olarak mülakat gerçekleştirilmiştir.

3. gün için $3 \times 2 = 6$ mor üçgen $+ 11 = 17$ üçgen
 4. gün için $4 \times 2 = 8$ mor üçgen $+ 11 = 19$ üçgen
 5. gün için $5 \times 2 = 10$ mor üçgen $+ 11 = 21$ üçgen

Şekil 66: D₃'ün örüntünün herhangi bir terimini doğrudan belirtmek için cebirsel bir kural elde etme süreci (iii)

D₃, üçüncü ve dördüncü günde çiçeği oluşturmak için gereken üçgen sayısına ilişkin geliştirdiği hipotezi genelleyerek cebirsel bir kural elde etmiştir. Öğrencinin yazılı açıklamaları incelendiğinde genellemeye ulaşma sürecinde “sarı ve kırmızı üçgenlerin toplamı olan 11 üçgeni” her zaman sabit tuttuğu görülmektedir. D₃ tarafından geliştirilen “çiçeğin sapı gün sayısının iki katı kadar olmalı” hipotezi, s gün geçtikten sonra çiçeğin sapının $s \times 2$ kadar olması gerektiği farkındalığının oluşmasını sağlamıştır. Şeklin değişmeyen kısımlarını oluşturan çiçeğin yaprakları, 11 üçgenden oluştuğundan dolayı her adım için sabit kalacaktır. Bu bağlamda cebirsel genelleme gerçekleştiren D₃, $2s + 11$ genel kuralına ulaşmıştır.

Yarı Yapılandırılmış Mülakatlardan Elde Edilen Bulgular

Etkinlik 2'ye ilişkin cebirsel genelleme yaklaşımı sergileyen D₃'ün yazılı çözüm ve açıklamalarına ek olarak genelleme sürecini nasıl yapılandığı ve düşünsel süreçlerini derinlemesine incelemek amacıyla yarı yapılandırılmış mülakat gerçekleştirilmiştir.

D₃, yazılı açıklamalarında, örüntüye ilişkin ortaklıkları şekil üzerinden tespit ederek bir hipotez geliştirmiş ve buna ilişkin cebirsel bir kural elde ederek genelleme sürecini tamamlamıştır. Ancak yazılı açıklamalarında örüntünün diğer terimlerinin nasıl elde edildiğine yönelik geçerli bir işlem ya da açıklama bulunmamaktadır. Bu bağlamda D₃'ün cebirsel genelleme sürecinin derinlemesine incelenmesi adına ve araştırmanın sonuçlarının güvenilirliği adına yarı yapılandırılmış olarak mülakat gerçekleştirilmiştir. Gerçekleştirilen mülakat sonrasında, öğrencinin çözümleri ile mülakat sürecindeki açıklamaları arasında herhangi bir farklılığın olmadığı görülmüştür. Öğrencinin çözümlerinden gözlemlenebilen süreçlerin mülakatlarda da benzer olarak açıkladığı görülmektedir.

92A: Etkinlik 2'ye ilişkin çiçek problemini hatırlıyor musun? Çiçek belirli bir düzen ve ilişkiye göre büyüyordu.

95D₃: Aa evet hatırlıyorum, çiçeğin yaprakları hep aynı kalıyordu, sadece sapa bakmamız yeterliydi.

93A: Çiçeği oluşturmak için gereken üçgen miktarının günlere göre nasıl değiştiğini inceliyorduk aslında, tabloyu doldururken ne şekilde düşündün? Diğer terimleri elde etme sürecinde nasıl bir yol izledin?

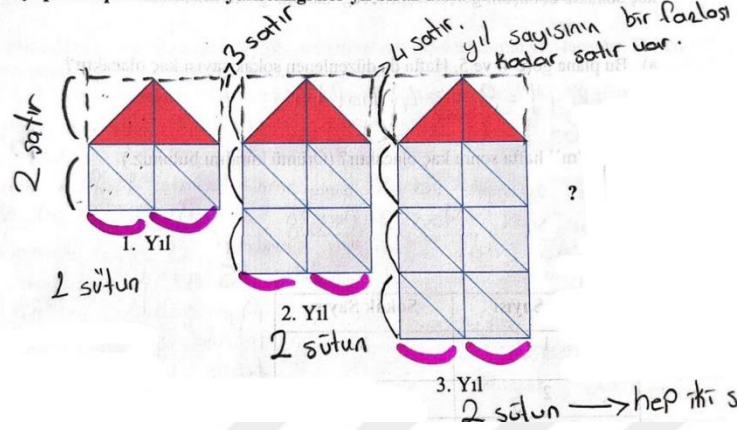
96D₃: İlk şekle hiç bakmamıştım, direk kaç üçgen var saydım sonra tablo verildiği için hemen doldurmaya başladım, zaten ikiye artarak gidiyordu. Sonra şekilde aynı renk olarak verilen üçgenler dikkatimi çekti ve şekil üzerinden ortak olan yerleri inceledim, sonrasında zaten 11 tane üçgen her adımda oluyordu, sapta gün sayısı ile orantılı bir şekilde oluşunca genel kuralı hemen elde ettim.

D₃'ün mülakat sürecindeki açıklamaları incelendiğinde öncelikle şekil üzerindeki ilişki ve yapıları incelemekten artış miktarına odaklanarak diğer terimleri elde etmesi aritmetik genelleme gerçekleştirdiğini destekler niteliktedir. Ancak sonrasında model üzerinde değişen veya değişmeyen kısımlara odaklanarak bir hipotez geliştirmesi ve geliştirdiği hipotez doğrultusunda geçerli ve anlamlı bir cebirsel kural elde etmesi, cebirsel genelleme gerçekleştirdiğini göstermektedir.

Cebirsel genelleme gerçekleştiren bir başka öğrenci ise D₂'dir. Sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim öncesi D₂'nin yazılı çözümleri ve mülakat sürecindeki açıklamaları incelendiğinde *olgunlaşmamış tümevarım* ve *aritmetik genelleme* gerçekleştirdiği bulgusuna ulaşılmıştır. Öğretim sonrası uygulanan etkinliklerde D₂'nin cebirsel düşünme süreçlerini *cebirsel genelleme* bağlamında yapılandığı görülmektedir. Etkinlik 2'ye ilişkin cebirsel genelleme gerçekleştiren D₂'nin verilen örüntünün terimlerine ait ortaklıkları idrak etme süreci yazılı çözümleri ve mülakat sürecindeki açıklamaları doğrultusunda incelenmektedir.

Etkinlik 2; üç farklı örüntünün aynı günlük hayat problemi üzerinden sunulmasıyla oluşturulmuştur. Etkinliğin üç farklı alt maddesi bulunmaktadır. D₂'nin, Etkinlik 2'nin ikinci alt maddesine (2) ilişkin yazılı çözümleri Şekil 67'de görülmektedir.

- 2) Kentsel dönüşüm projesi kapsamında inşa edilen apartmanlar şekildeki gibidir. Yeni yapılan apartmanların yüksekliği her yıl biraz daha artmaktadır.



Şekil 67: D₂'nin Etkinlik 2'ye (2) ilişkin ortaklıkları keşfetme süreci (i)

Etkinlik 2'ye ilişkin ikinci alt maddede (2) öğrencilerden her yıl yüksekliği artan bir apartmana ait değişim üzerine düşünceleri beklenmektedir. Öğrencilerden, geçen yıl sayısı ile apartmanda bulunması gereken daire sayısı arasında ilişki kurmaları istenmektedir. Apartmanda bulunan her bir üçgen bir daireyi temsil etmektedir. Bu bağlamda birinci yılda apartmanda 6 daire, ikinci yılda ise apartmanda 10 daire olduğu şekil üzerinden görülmektedir.

D₂'nin verilen şekil örüntüsüne ilişkin modeli; satır ve sütun gruplamaları yaparak ele aldığı görülmektedir. Bu etkinliğe ilişkin bulgular incelendiğinde, D₂'nin diğer öğrencilerden farklı olarak örüntüye ait farklı bir strateji geliştirdiği görülmektedir. Öğrencilerin büyük bir çoğunluğu verilen şekil örüntüsüne ait ortaklıklar üzerinden genelleme gerçekleştirirken, D₂ problem çözme adımlarını “şekli tamamlayarak ilerleme” stratejisi doğrultusunda şekillendirmiştir. Bu bağlamda her bir apartmana 2 daire daha ekleyerek örüntüye ait ortaklıkları analiz etmiştir. D₂, örüntüye ilişkin yapıları satır ve sütun olarak ele almaktadır. Her adımda 2 sütun olduğunu fark eden D₂, “yıl sayısının 1 fazlası kadar satır var” söylemi ile örüntünün terimleri arasındaki ortak özellikleri ayırt ettiğini kanıtlamaktadır.

Şekildeki üçgenler (çatıdakiler de dahil) apartmandaki daireleri göstermektedir.

Örneğin, 1. Yıl yapılan 6 daire vardır.

Her zaman yıl sayısının bir fazlası kadar satır var.

- a) 4. yılda yapılan bir apartman nasıl olacaktır? Örüntü blokları yardımıyla oluşturunuz.

4. yılda 5 satır olur. $5 \times 4 = 20$
iki taneyi ben eklediğim için $20 - 2 = 18$

Şekil 68: D₂'nin fark edilen ortaklığı örüntünün diğer terimlerine genelleme süreci (ii)

D_2 'nin geliştirdiği "her zaman yıl sayısının bir fazlası kadar satır var, ancak her adım için hep 2 sütun var" hipotezi, 4. yılda bulunacak apartmanın yine iki sütun içereceği, satır sayısının ise yıl sayısından 1 fazla olması gerektiği çıkarımını yapmasını sağlamıştır. Bu bağlamda 4. yılda 2 sütun ve 5 (4+1) tane satır bulunması gerektiğini elde etmiştir. 4. yılda oluşacak apartmanda bulunması gereken daire sayısını ise dikdörtgenin alanından 5×4 işlemi ile 20 daire olarak elde etmiştir. Ayrıca öğrencinin "iki taneyi ben eklediğim için $20-2=18$ daire olmalı" açıklaması, 4. yılda bulunacak toplam daire sayısını geliştirdiği hipotez üzerinden elde ettiğini göstermektedir. Bu bağlamda fark ettiği ortak özelliği anlamlı bir şekilde örüntünün diğer terimlerine genellemiştir.

Yıl Sayısı	Daire Sayısı
1	6
2	10
3	14
4	18
5	22
6	26
7	30

n . yılda $n+1$ tane satır olur.
Her satırda 4 daire olduğu için şeklin tamamında $4 \times (n+1) = 4n+4$ tane daire olur. Ama başta iki daireyi ben fazladan eklediğim için onu çıkarırız.
 $4n+4-2 = 4n+2$ genel kural olur.

Şekil 69: D_2 'nin örüntünün herhangi bir terimini doğrudan belirtmek için cebirsel bir kural elde etme süreci (iii)

Şekil 69'da D_2 'nin fark ettiği ortak özelliğe ilişkin geliştirdiği hipotez doğrultusunda, örüntünün herhangi bir terimini doğrudan belirtmek için cebirsel bir kural elde etmeye yönelik gerçekleştirdiği genelleme görülmektedir. Öğrencinin " n . yılda $n+1$ tane satır olur, her satırda 4 daire olduğu için şeklin tamamında $4x(n+1) = 4n+4$ tane daire olur, ama başta iki daireyi ben fazladan eklediğim için onu çıkarırız, $4n+4-2 = 4n+2$ genel kural olur" söylemi cebirsel kuralı elde etmeye yönelik genelleme sürecinde farklı bir ortaklık keşfettiğini gösterir niteliktedir. Öğrencinin fark ettiği ortaklıklar üzerine cebirsel bir kural elde ederek cebirsel genelleme gerçekleştirdiği yazılı çözüm ve açıklamalarında görülmektedir. Ancak öğrencinin cebirsel düşünme süreçlerinin daha derinlemesine incelenmesi adına yarı yapılandırılmış olarak mülakat gerçekleştirilmiştir.

Yarı Yapılandırılmış Mülakatlardan Elde Edilen Bulgular

Etkinlik 2'nin ikinci alt maddesine ilişkin cebirsel genelleme yaklaşımı sergileyen D_2 'nin yazılı çözüm ve açıklamalarına ek olarak genelleme sürecini nasıl yapılandığı ve düşünsel süreçlerini derinlemesine incelemek amacıyla yarı yapılandırılmış mülakat gerçekleştirilmiştir.

D₂, yazılı açıklamalarında, diğer öğrencilerden farklı bir strateji benimseyerek örüntüye ilişkin ortaklıkları şekli tamamlayarak incelemiştir. Herhangi bir yılda apartmanda bulunması gereken daire sayısını öncelikle ‘*dikdörtgenin alanı*’ üzerinden açıklarken daha sonra ‘*yalnızca satır da bulunan daire sayısı (4 daire)*’ ilişkilendirerek bir genelleme gerçekleştirmiştir. Ancak yazılı açıklamalarında öğrencinin hangi ortaklık üzerine bir genelleme gerçekleştirdiğini açıklayan geçerli bir açıklama bulunmamaktadır. Bu bağlamda D₂’nin cebirsel genelleme sürecinin derinlemesine incelenmesi adına ve araştırmanın sonuçlarının güvenilirliği adına yarı yapılandırılmış olarak mülakat gerçekleştirilmiştir.

72A: Kentsel Dönüşüm etkinliğinde gerçekleştirdiğin işlemler ve açıklamaların üzerine konuşacak olursak, örüntüye ilk olarak odaklandığında nelere dikkat ettin?

75D₂: Şekli çizerek tamamladığımı hatırlıyorum öğretmenim, dikdörtgen şekline tamamlamıştım. Soruları da öyle cevapladım.

73A: Neden şekli tamamlama gereği hissettin?

76D₂: Çünkü hep birbirine eşit kareler her bir karenin içinde de eşit üçgenler vardı. Direkt birleştirirsem daire sayısına daha kolay ulaşabileceğimi düşündüm, öbür türlü biraz karışık geldi.

74A: Peki, şekli tamamladıktan sonra oluşan yeni şekil üzerinde nelere dikkat ettin? Belirlediğin değişen veya değişmeyen kısımlar nelerdi?

77D₂: Öğretmenim orada ilk dikdörtgene tamamlayınca şekli dikdörtgenin alanından ilerlemek istedim. Yani mesela hep 2 sütun olduğu için yıl sayısının 1 fazlası kadar da satır var bunları çarparsam çıkar diye düşündüm ama sonra çıkaramadım diye hatırlıyorum.

75A: Neden? Sence fark ettiğin ortaklık geçerli değil mi? Dikdörtgenin alanı için satır ve sütun sayısını çarptığında elde ettiğin sayı şekil üzerinde neye denk ya da karşılık geliyor?

78D₂: Aa aslında ben sütun ve satırı çarparak içerisinde kaç kare bulunacağına ulaşmışım, e her kare de 2 üçgen var, buradan zaten çıkar.

76A: Nasıl yani? Düşünceni biraz gerekçelendirerek açar mısın?

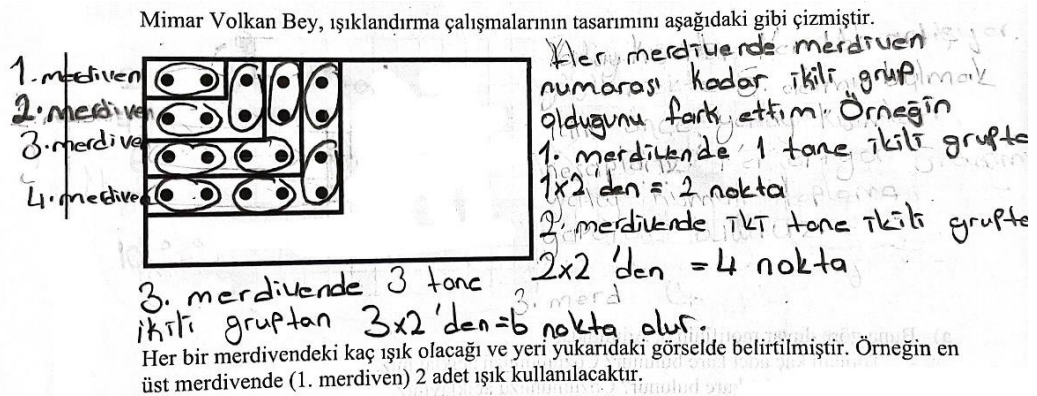
79D₂: Mesela 4. yılda hep 2 sütun olacak, 1 fazlası yani 5 tane satır, $5 \times 2 = 10$ kare yapar, her karenin içerisinde de 2 üçgen var, $10 \times 2 = 20$ üçgen olur, baştaki 2 taneyi ben eklemiştim, işte buradan da 18 buldum.

77A: Peki geliştirdiğin bu hipotezle cebirsel bir kural elde edebilir miyiz sence?

80D₂: n. yılda (n+1) tane satır olacak, 2 sütunla çarparsam $2x(n+1) = 2n+2$ yapar, ancak bu bulduğum şekildeki kare sayısı, yani az önce sizin bana sorduğunuz şey bu satır ve sütunu çarpmak kare sayısını veriyor, ama her karede 2 üçgen yani 2 daire olduğundan bir kere daha 2 ile çarpmamız gerek, $2x(2n+2) = 4n+4$ olur, baştaki eklediğim 2'yi çıkarırsam $4n+4-2=4n+2$ işte bu, aynı cebirsel kurala ilk düşündüğüm üzerinden ulaştım. Oysa çözerken buradan çıkmaz diye düşündüm ve sadece satır sayısına odaklanarak her satırda bulunan 4 daire ile işlemlerimi yaptım.

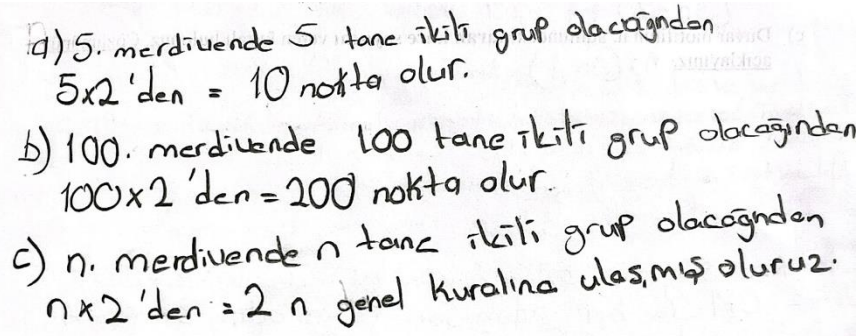
Öğrencinin mülakat sürecindeki açıklamaları cebirsel genelleme gerçekleştirdiğini göstermektedir. Öğrenci tarafından yazılı açıklamalarında farklı bir ortak özellik üzerinden genelleme süreci yapılandırılırken mülakat sürecinde farklı bir ortak özellik benimsenmiştir. Gerçekleştirilen mülakat sonrasında, öğrencinin çözümleri ile mülakat sürecindeki açıklamaları arasında herhangi bir farklılığın olmadığı görülmüştür. Öğrencinin çözümlerinden gözlemlenebilen süreçlerin mülakatlarda da benzer olarak açıkladığı görülmektedir.

Sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim sonrası uygulanan tüm etkinlikler de cebirsel genelleme gerçekleştiren bir başka öğrenci ise O₃'tür. Öğretim öncesi O₃'ün yazılı çözümleri ve mülakat sürecindeki açıklamaları incelendiğinde cebirsel düşünme süreçlerini *olgunlaşmamış tümevarım* ve *aritmetik genelleme* bağlamında yapılandığı görülmektedir. Öğretim sonrası ise O₃, uygulanan tüm etkinliklerde *cebirsel genelleme* gerçekleştirmiştir. Etkinlik 4'te düşünsel süreçlerini cebirsel genelleme bağlamında olgunlaştıran O₃'ün örüntüye ilişkin ortaklıkları fark etme süreci Şekil 70'te görülmektedir.



Şekil 70: O₃'ün Etkinlik 4'e ilişkin ortaklıkları fark etme süreci (i)

Etkinlik 4'te öğrencilerden örüntüye ilişkin ortaklıkları anlamlandırarak bir hipotez geliştirmeleri ve geliştirilen hipotezi örüntünün diğer terimlerine genelleyerek cebirsel olarak anlamlı bir kural elde etmeleri beklenmektedir. Bu bağlamda örüntüyü inceleyen O_3 , her merdivende bulunması gereken ışık sayısını (nokta sayısı) ikili yapılar oluşturarak elde etmektedir. "her merdivende, merdiven numarası kadar ikili grup olduğunu fark ettim, örneğin birinci merdivende 1 tane ikili grup olduğundan 1×2 'den 2 nokta, ikinci merdivende 2×2 'den 4 nokta, üçüncü merdivende ise 3 tane ikili gruptan 3×2 'den 6 nokta olur" söylemleri örüntüye ilişkin ortak yapı ve özellikleri fark ettiğini gösterir niteliktedir.

- 
- a) 5. merdivende 5 tane ikili grup olduğundan
 5×2 'den = 10 nokta olur.
- b) 100. merdivende 100 tane ikili grup olduğundan
 100×2 'den = 200 nokta olur.
- c) n. merdivende n tane ikili grup olduğundan
 $n \times 2$ 'den = $2n$ genel kuralına ulaşmış oluruz.

Şekil 71: O_3 'ün fark edilen ortaklığı örüntünün diğer terimlerine genelleyerek cebirsel bir kural elde etme süreci (ii) / (iii)

Etkinliğin (a) maddesinde öğrencilerden 5. merdivende kaç nokta kullanılması gerektiğini bulmaları istenmektedir. Verilen şekil örüntüsüne ait her bir adım için, merdiven numarasını bulunan ikili grup sayısı ile ilişkilendiren O_3 'ün fark ettiği ortak özelliği örüntünün diğer terimlerine genelleme süreci Şekil 71'de görülmektedir. Öğrenci tarafından geliştirilen "her merdivende, merdiven numarası kadar ikili grup var" hipotezi; 5. merdivende "5 tane ikili grup olduğundan 5×2 'den 10 nokta olur" çıkarımını yapmasını sağlamıştır. Bu bağlamda aynı ortaklık üzerinden 100. merdivende bulunması gereken nokta sayısına ulaşmıştır. Etkinliğin (c) maddesinde ise öğrencilerden, fark ettikleri ortak özellik üzerinden bir genelleme gerçekleştirerek cebirsel bir kural elde etmeleri beklenmektedir. Bu noktada anlamlı ve geçerli bir kural elde eden O_3 'ün hipotezi doğrultusunda "n. merdivende n tane ikili grup olduğundan $n \times 2$ 'den $2n$ genel kuralına ulaşmış oluruz" çıkarımı yapılmıştır. O_3 'ün etkinliklere ilişkin yazılı çözümleri ve mülakat sürecindeki açıklamaları incelendiğinde düşünsel süreçlerini cebirsel genelleme bağlamında olgunlaştırdığı görülmektedir.

Yarı Yapılandırılmış Mülakatlardan Elde Edilen Bulgular

93A: Geçirdiğimiz öğretim öncesi, bir örüntü verildiğinde ilk olarak ne yapıyordun? Bir örüntüye ait ilk nelere dikkat ediyordun?

90O₃: İlk baktığımda artış miktarına bakıyordum öğretmenim, sonra hep tek tek ekleyerek diğer terimleri buluyordum, bazen de mesela üçer üçer artıyorsa kural $3n$ olmalı diyordum, deneyerek yerine koyunca doğru ya da yanlış çıkma durumuna göre kuralı değiştiriyordum. Ama tabi her zaman kural bulamadığımda oluyordu.

94A: Genel kurala ulaşmak için neden artış miktarına odaklanıyordun?

91O₃: Çünkü diğer terimlere artış miktarını bularak ulaşabiliyorsak, herhangi bir terimi doğrudan elde etmek için de yine genel kural da artış miktarı bulunmalı diye düşünüyordum. Ama şimdi ona hiç gerek kalmıyor.

95A: Şu an bir örüntünün genel kuralına nasıl ulaşıyorsun?

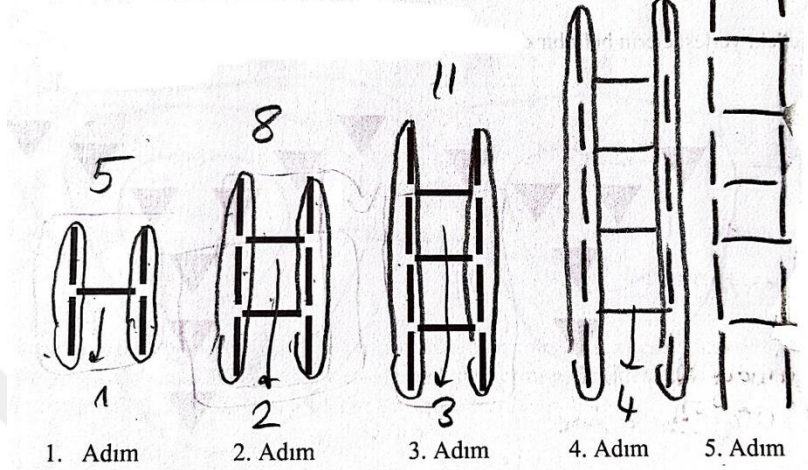
92O₃: Şimdi sayı veya şekil örüntüsü olması fark etmeksizin, ilişki kurmaya çalışıyorum. Şekil örüntüsüyse ne değişmiş ya da ne aynı kalmış diye inceliyorum, sayı örüntüsüyse adım sayısı ve diğer terimlerle bir ilişki kurmaya çalışıyorum.

Mülakat sürecindeki açıklamalar incelendiğinde, cebir özelinde örüntü konusunda geçirilen sorgulama temelli öğretim öncesinde öğrencinin *“ilk artış miktarına bakıyordum, sonra tek tek ekleyerek diğer terimleri buluyordum”* söylemi aritmetik genelleme sürecinde öğrencilerin benimseyeceği stratejiler arasında yer almaktadır. Öğrencinin *“bazen de mesela üçer üçer artıyorsa kural $3n$ olmalı, deneyerek yerine koyunca doğru ya da yanlış çıkma durumuna göre kuralı değiştiriyordum”* söylemi ise olgunlaşmamış tümevarım gerçekleştirdiğini destekler niteliktedir. Ancak öğrencinin *“sayı veya şekil örüntüsü olması fark etmeksizin, ilişki kurmaya çalışıyorum, şekil örüntüsüyse ne değişmiş ya da ne aynı kalmış diye inceliyorum, sayı örüntüsüyse adım sayısı ve diğer terimlerle bir ilişki kurmaya çalışıyorum”* söylemi, öğretim sonrasında cebirsel düşünme süreçlerini cebirsel genelleme bağlamında olgunlaştırdığını göstermektedir. Araştırma bulguları doğrultusunda öğrencinin Öğretim Sonrası Cebirsel Düşünme Süreçleri Değerlendirme Formu’na ilişkin tüm etkinliklere verdiği yanıt ve açıklamalar incelendiğinde cebirsel genelleme gerçekleştirdiği bulgusu elde edilmiştir.

Düşünsel süreçlerini cebirsel genelleme bağlamında yapılandıran bir başka öğrenci ise O₂’dir. Sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim öncesi O₂’nin yazılı çözümleri ve mülakat sürecindeki açıklamaları incelendiğinde *olgunlaşmamış tümevarım* ve *aritmetik genelleme* gerçekleştirdiği bulgusuna ulaşılmıştır. Öğretim sonrası uygulanan etkinliklerde O₂’nin cebirsel düşünme süreçlerini *cebirsel genelleme* bağlamında

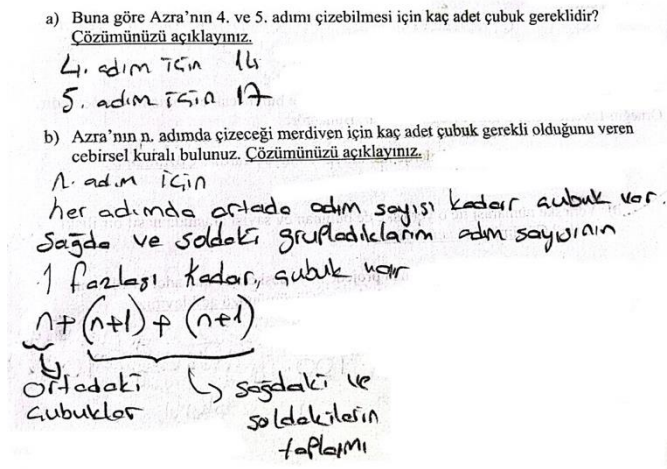
yapılandırdığı görülmektedir. Etkinlik 5'te benzer bir yaklaşım gösteren O₂'nin örüntüyü anlamlandırma ve örüntüye ilişkin ortaklıkları fark etme süreci Şekil 72'de görülmektedir.

Azra okuduğu masaldan etkilenecek sırayla sonsuza giden merdivenler çizmeye çalışmıştı. Aşağıda Azra'nın çizdiği ilk üç ve altıncı merdiveni görmekteyiz.



Şekil 72: O₂'nin Etkinlik 5'e ilişkin ortaklıkları fark etme süreci (i)

Şekil 72'de bulunan yazılı çözümler öğrencinin örüntüde bulunan çubukları adım sayısı ile ilişkilendirerek grupladığını göstermektedir. Ancak öğrencinin nasıl bir ortaklık idrak ettiğini gösteren geçerli bir açıklama bulunmamaktadır. Öğrencinin öncelikle her bir adımda bulunan çubuk sayısını incelediği görülmektedir. Her bir adım için 5, 8, 11, şeklinde giden bir sayı örüntüsü elde ederek 4. ve 5. terimde bulunacak çubuk sayısını anlamlı ve geçerli bir şekilde modellemiştir. Bu bağlamda öğrencinin örüntüye ait yapısal ilişkileri anlamlandırdığı söylenebilir.



Şekil 73: O₂'nin fark edilen ortaklığı örüntünün diğer terimlerine genelleyerek cebirsel bir kural elde etme süreci (ii) / (iii)

O₂'nin fark ettiği ortaklık üzerine geçerli bir açıklama bulunmadığı için öğrencinin, örüntünün diğer terimini elde ederken geçirdiği düşünsel süreçler adına yorum yapılamamaktadır. Ancak herhangi bir terimi doğrudan elde etmek için cebirsel bir kural istenen (b) maddesinde öğrenci genel kuralı, fark ettiği ortak özellik üzerinden açıklamaktadır. Öğrencinin *“n. adım için her adımda ortada adım sayısı kadar çubuk var, sağda ve soldaki grupladıklarım adım sayısının 1 fazlası kadar çubuk var”* şeklinde fark ettiği ortak özelliği genelleyerek *“ $n+(n+1)+(n+1)$ ”* cebirsel kuralını elde etmiştir. Öğrenci genel kuralı elde ettiği işlem bileşenleri incelendiğinde (n adım sayısı olmak üzere), adım sayısı kadar çubuk olduğundan *“n”* bileşenini ortadaki çubuk, adım sayısının birer fazlası kadar sağ ve solda oluşan gruplarda *“(n+1)+(n+1)”* bileşenini ise geriye kalan sağdaki ve soldakilerin toplamı şeklinde ifade ettiği görülmektedir. Öğrencinin diğer cebirsel düşünme süreçlerinin derinlemesine incelenmesi ve araştırmanın bulgularının güvenilirliğinin sağlanması adına yarı yapılandırılmış olarak mülakat gerçekleştirilmiştir.

Yarı Yapılandırılmış Mülakatlardan Elde Edilen Bulgular

Etkinlik 5'e ilişkin cebirsel genelleme yaklaşımı sergileyen O₂'nin yazılı çözüm ve açıklamalarına ek olarak genelleme sürecini nasıl yapılandığı ve düşünsel süreçlerini derinlemesine incelemek amacıyla yarı yapılandırılmış mülakat gerçekleştirilmiştir.

O₂'nin yazılı açıklamaları incelendiğinde örüntünün diğer terimlerini nasıl elde ettiğine yönelik bir açıklama bulunmamaktadır. Bu bağlamda öğrenci, terimler arası artış miktarına odaklanarak diğer terimleri elde etmiş olabilir. Öğrencilerin ardışık terimler arası farkı bulma ve bu farka odaklanarak diğer terimleri elde etmeye çalışma gibi stratejiler *aritmetik genelleme* gerçekleştiren öğrenciler tarafından benimsenen stratejiler arasında bulunmaktadır. Bu bağlamda öğrencinin ne tür bir genelleme gerçekleştirdiğinin derinlemesine incelenmesi adına yarı yapılandırılmış mülakat gerçekleştirilmiştir.

117A: Etkinlik 5'e ait yazılı açıklamaların incelendiğinde örüntünün diğer terimlerini nasıl elde ettiğine ilişkin bir açıklamada bulunmamışsın. Mesela örüntünün 4. ve 5. terimlerine nasıl ulaştın?

110O₂: İlk terimlere göre yapınca elde ettim öğretmenim.

118A: Nasıl yani, ilk terimleri incelerken nelere dikkat ettin?

111O₂: Şekil üzerinde çubukları gruplamıştım diye hatırlıyorum, sağ grup, sol grup, ve ortadaki çubuklar olarak ayırmıştım. Ortada kalan çubuk sayısı adım sayısına eşit oluyordu.

Sol ve sağda oluşturduğum gruplar ise adım sayısının birer fazlası kadar oluyordu, buna dikkat ettim.

119A: Peki dördüncü terime nasıl ulaştın?

112O₂: Onlara çizerek ulaştım, mesela şekle baktığımızda sanki kareler var gibiydi, o kare sayısı da adım sayısının bir fazlası kadar oluyordu, buna dikkat ederek çizdim.

120A: Örüntüye ilişkin çubukları gruplama stratejisini kullanarak bir hipotez geliştirmişsin, bana bu hipotez doğrultusunda 20. Terimi elde edebilir misin?

113O₂: Mesela 20. Terim olduğu için ortada 20 tane çubuk olacak, sol ve sağda birer tane fazla olması gerektiği için “20+1’den” 21 tane sol ve 21 tane de sağda çubuk grubu olacak, bunların hepsini toplarsak eğer “20+21+21” toplam 62 çubuk olması gerektiği sonucuna ulaşırım.

Gerçekleştirilen mülakat sonrasında, öğrencinin çözümleri ile mülakat sürecindeki açıklamaları arasında herhangi bir farklılığın olmadığı görülmüştür. Öğrencinin çözümlerinden gözlemlenebilen süreçlerin mülakatlarda da benzer olarak açıkladığı görülmektedir.

Sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim sonrası bir başka cebirsel genelleme gerçekleştiren öğrenci ise O₁’dir. Öğretim öncesi uygulanan etkinlikler ve mülakat süreci açıklamaları incelendiğinde öğrencinin düşünsel süreçlerini *olgunlaşmamış tümevarım* ve *aritmetik genelleme* yaklaşımı ile şekillendirdiği görülmektedir. Öğretim sonrasında ise öğrencinin uygulanan tüm etkinliklerde *cebirsel genelleme* gerçekleştirdiği bulgusuna ulaşılmıştır. Örnek olması açısından O₁’in Etkinlik 8’e ait çözüm süreçleri Şekil 74’te görülmektedir.

Sıra No	Model	Çubuk Sayısı	Örüntünün Kuralı
1		4	
2		5	
3		6	
4		7	

Şekil 74: O₁’in Etkinlik 8’e ilişkin ortaklıkları fark etme süreci (i)

Şekil 74'te O_1 'in verilen şekil örüntüsüne ait ortak ilişki ve yapıları idrak etme süreci görülmektedir. O_1 verilen modeli analiz etme sürecinde modele ait değişen kısımları adım sayısı ile ilişkilendirerek pembe renk ile gruplandırmıştır. Benimsediği bu strateji, gruplandırılan çubukların adım sayısına bağlı olarak değiştiğini görebilmesine yardımcı olmuştur. Fark ettiği ortak özellik bağlamında bir hipotez geliştirerek örüntünün diğer terimlerini geliştirdiği hipotez doğrultusunda elde etmiştir. Öğrencinin "örüntüde her zaman iki dikey çubuk solda var ve her zaman bir tane dikey çubuk en sağda var, toplam üç tane çubuk her adımda kesinlikle var" açıklaması, örüntünün değişmeyen kısımları fark ettiğini göstermektedir. Geriye kalan çubuk sayısını ise "her adımda, adım sayısı kadar çubuk var, yani adım sayısı 1 ise toplamda $3+1$ yani 4 tane çubuk, ikinci adımda $3+2$ yani 5 tane çubuk, üçüncü adımda $3+3$ yani 6 çubuk olmalı" şeklinde ifade ederek model ile adım sayısı arasında bir ilişki kurabilmiştir.

11. adımda
iki tane
dikey solda,
bir tane dikey
sağda yani
3 tane var.
Yatay olarak da
adım sayısı
kadar olduğu
için 11 tane
olur. Toplamda
 $11+3=14$ tane
çubuk olur.
85. adımda ise sağ, sol
dikeylerden 3 tane yatay
olarak 85 tane toplamda
 $85+3=88$ tane
çubuk olur.

a) Bir örüntüye ait ilk 6 adım ile ilgili verilen tabloyu uygun şekilde doldurunuz.

b) 11. ve 85. Adımda kullanılan çubuk sayısı kaç tane? 11. ve 85. adımdaki modeller ne yönde değişir?

c) Oluşturduğunuz örüntünün kuralını bulunuz.

d) Verilen örüntünün modelinde değişmeyen veya sabit kalan kısımlar var mı? Modeller üzerinde değişmeyen kısımları işaretleyiniz. Bu kısımlarda kaç tane çubuk kullanılmıştır? Değişmeyen kısımlardaki çubuk sayısı ile kural sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır?

e) Modellerde her seferinde yeni eklenen çubukları işaretleyiniz. Her seferinde kaç çubuk eklenmiştir? Örüntünün terimleri arasındaki fark kaçtır? Modelde her seferinde eklenen çubukların sayısı, terimler arasındaki fark ve kural arasında bir ilişki var mıdır?

3 + n

1 tane 2 tane 3 tane 4 tane 5 tane 6 tane

Her zaman 3 tane çubuk her zaman eklenir.

Şekil 75: O_1 'in fark edilen ortaklığı örüntünün diğer terimlerine genelleme süreci (ii)

Örüntünün 11. ve 85. adımında kullanılması gereken çubuk sayısını O_1 , "11. adımda iki tane dikey solda ve bir tane dikey sağda yani 3 tane var, yatay olarak da adım sayısı kadar olduğu için 11 tane olur, toplamda $11+3$ yani 14 tane çubuk olur, 85. adımda ise sağ ve sol dikeylerden 3 tane yatay olarak 85 tane toplam 88 tane çubuk olur" açıklamaları üzerinden elde etmiştir. Model üzerinde verilen şekli yatay ve dikey yapılar olarak gruplayan O_1 , adım sayısı ile yatay çubuk sayısı arasında bir ortaklık keşfetmiştir. O_1 , örüntüde sabit olarak kabul ettiği çubukların değişmemesinin altında yatan cebirsel nedenlerine ilişkin açıklamaları Şekil 75'te görülmektedir. Bu bağlamda O_1 , fark ettiği ortak özelliği örüntünün diğer terimlerine genellemektedir.

Genelleme sürecini cebirsel bir kural elde ederek tamamlayan O_1 , genel kurala örüntünün terimleri üzerinde keşfettiği ortak özelliği genelleyerek ulaşmıştır. Bu bağlamda O_1 'in *“her adımda adım sayısı kadar yatay çubuk var ve 3 çubuk hep sabit, yani birinci adımda 3 sabit 1 yatay çubuktan 3+1, ikinci adımda 3 sabit 2 yatay çubuktan 3+2, üçüncü adımda 3 sabit 3 yatay çubuktan 3+3 çubuk bulunur, n. adımda ise yine 3 çubuk sabit n yatay çubuk olacağından n+3 tane çubuk olmuş olur”* açıklaması fark edilen ortak özelliğe ilişkin anlamlı ve geçerli bir genel kural elde ettiğini destekler niteliktedir. Bu bağlamda O_1 , bu etkinliğe ilişkin cebirsel genelleme gerçekleştirmiştir.

Yarı Yapılandırılmış Mülakatlardan Elde Edilen Bulgular

Etkinlik 8'e ilişkin cebirsel genelleme yaklaşımı sergileyen O_1 'in yazılı çözüm ve açıklamalarına ek olarak genelleme sürecini nasıl yapılandığı ve düşünsel süreçlerini derinlemesine incelemek amacıyla yarı yapılandırılmış mülakat gerçekleştirilmiştir.

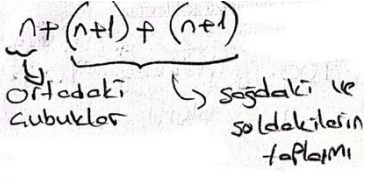
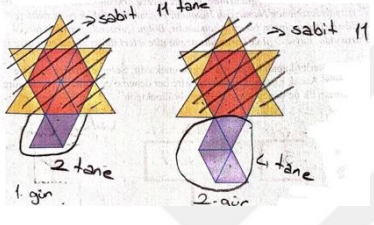
O_1 , yazılı açıklamalarında, örüntüye ilişkin ortaklıkları şekil üzerinden tespit ederek bir hipotez geliştirmiş ve buna ilişkin cebirsel bir kural elde ederek genelleme sürecini tamamlamıştır. Gerçekleştirilen mülakat sonrasında, öğrencinin çözümleri ile mülakat sürecindeki açıklamaları arasında herhangi bir farklılığın olmadığı görülmüştür. Öğrencinin çözümlerinden gözlemlenebilen süreçlerin mülakatlarda da benzer olarak açıkladığı görülmektedir.

Cebirsel Genelleme Yaklaşımı Sergileyen Öğrencilere İlişkin Bütüncül Değerlendirme

Yazılı çözümlerinin incelenmesinin ardından yapılan yarı yapılandırılmış mülakat çalışmaları ile öğrencilerin cebirsel genelleme yaklaşımı gerçekleştirme süreçlerine ilişkin sonuçlara ulaşılmaktadır. Öğrencilerin cebirsel genelleme sürecinde benzer gerekçelendirme ve açıklamalarda bulunduğu görülmektedir. Öğrencilerin cebirsel genelleme yaklaşımı sergileme süreçlerini gösteren ortak açıklamalarına ilişkin bulgular Tablo 17'de görülmektedir.

Tablo 17

Cebirsel genelleme yaklaşımı sergileyen öğrenci açıklamaları

Örnek Çözüm	Yazılı Açıklamalar	Öğrenci
	“adım sayısına n dersek n kadar ortada, sol ve sağda $n+1$ kadar, yani $3n+2$” “terimler arası ortak ilişkilerden yola çıkıyorum”	Y₁ Y₃ O₁
	“her bir terimle, adım sayısı arasında ilişki var ve bu ilişki her bir terimde aynı” “modelde değişen ve değişmeyen kısımlara odaklandım, sabit 11 tane sarı ve kırmızı üçgen hep var, çiçeğin sapı ise adım sayısının 2 katı kadar var”	O₃ O₂ Y₂

4.3.2. Aritmetik Genelleme Sergileyen Öğrenci Yaklaşımı

Aritmetik genelleme; sayı veya şekil örüntüsünün tamamına değil de belirli bir bölümüne odaklanıldığından dolayı bir başka terimi elde etmeye yönelik değildir ve bu nedenle bu genelleme türünde cebirsel bir yapı söz konusu değildir. Aritmetik genelleme sürecinde elde edilen hipotezden diğer terimlerin bulunması için cebirsel yapıya sahip bir genel kural geliştirilememektedir. Cebirsel genelleme sürecinin son adımı olan p_n ifadesini oluşturma, yani cebirsel yapıya sahip bir genel kural elde etme aşaması aritmetik genelleme sürecinde bulunmamaktadır.

Sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim sonrası öğrencilerin yazılı çözümleri ve mülakat sürecindeki açıklamaları incelendiğinde cebirsel genelleme yaklaşımının yanı sıra aritmetik genelleme yaklaşımının da ortaya çıktığı bulgusuna ulaşılmıştır.

Öğrencilerin yazılı çözümlerinden aritmetik genelleme sürecini nasıl şekillendirdikleri aşağıdaki bileşenler doğrultusunda incelenmektedir.

- (i) Sayı örüntüsüne ilişkin ortak özelliği fark etme,

- (ii) Fark edilen ortak özelliğin örüntünün diğer terimlerinin içerip içermediğini inceleme, şeklindedir.

Öğrencilerin Yazılı Çözümlerinden Elde Edilen Bulgular

Öğrencilerin sayı veya şekil örüntüsüne ilişkin, ardışık terimler arası farkı bulma ve bu farka odaklanarak diğer terimleri elde etmeye çalışma, terimler arası ilişkilerin sayılarla belirtilmesi, ardışık terimler arası farkın yapısını inceleme gibi stratejiler geliştirerek genelleme sürecini yapılandırması aritmetik genelleme sürecinde benimsenen yaklaşımlara bir örnektir. Aritmetik genelleme yaklaşımı sergileyen öğrenciler örüntüye ilişkin ortak özellikleri fark etse de cebirsel bir kural elde etmezler. Cebirsel bir kural elde etmek yerine örüntünün kuralını sözel ifadelerle ya da örüntüye ait nümerik ilişkilere odaklanarak açıklarlar.

Sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim sonrası Etkinlik 9'a ilişkin bu şekilde bir yaklaşım sergileyen D₁'in çözüm süreci ve çözüme ilişkin açıklamaları Şekil 76'da görülmektedir. Öğretim öncesi öğrencilerin yazılı çözümleri ve mülakat sürecindeki açıklamaları doğrultusunda D₁'in düşünsel süreçlerini *olgunlaşmamış tümevarım* bağlamında yapılandığı bulgusuna ulaşılmıştır. Sorgulama temelli öğretim sonrasında ise öğrencinin tüm etkinliklerde *aritmetik genelleme* yaklaşımı sergilediği görülmektedir.

Etkinlik 9

Bir taksici 2 km'lik mesafe için 7 TL, 3 km'lik mesafe için 9 TL, 5 km'lik mesafe için 13 TL ücret almaktadır. Buna göre;

- a) Taksi şoförünün 1 km'lik ve 10 km'lik mesafeler için müşteriden alacağı ücretleri bulunuz. *Taksi şoförü 1 km'lik yol için = 5 TL
10 km'lik yol için = 23 TL alır.*
- b) 50 km'lik ve 75 km'lik mesafeler için müşteri kaç TL ücret ödeyecektir? Bu değerleri nasıl buldunuz? Açıklayınız. *50 km'lik yol için = 103 TL
75 km'lik yol için = 153 TL*

Şekil 76: D₁'in Etkinlik 9'a ilişkin ortak özelliği fark etme süreci (i)

D₁'in Şekil 76'da bulunan yazılı çözüm ve açıklamaları incelendiğinde terimler arası nümerik ilişkilere odaklandığı görülmektedir. Öğrencinin Etkinlik 9'da örüntünün diğer terimlerine ulaştığı görülmekte ancak nasıl elde ettiğine yönelik geçerli bir açıklama bulunmamaktadır. Genel kuralı " $2n+3$ " olan ve günlük hayat problemi bağlamında sunulan örüntüsü için ardışık terimler arası miktara odaklandığı görülmektedir. Bu stratejiyi kullanarak örüntünün verilen terimlerine ilişkin yakın ve uzak terimleri hesaplayabildiği bulgusu (a) ve

(b) maddelerinden elde edilmektedir. Öğrencinin her bir adımda bulunması gereken terime ardışık terimler arası farkın yapısını inceleyerek ulaştığı görülmektedir. Öğrencinin fark edilen ortak özelliği kullanarak örüntünün diğer terimlerini elde etme süreci Şekil 76'da görülmektedir.

Görünler - a)

1-km	2-km	3-km	4-km	5-km	6-km	7-km	8-km	9-km	10-km
5 TL	7 TL	9 TL	11 TL	13 TL	15 TL	17 TL	19 TL	21 TL	23 TL
2x	2x	2x	2x	2x	2x	2x	2x	2x	2x

Öğrenci b)

Şekil 77: D₁'in fark edilen ortak özelliği örüntünün diğer terimlerinin içerip içermediğini inceleme süreci (ii)

Şekil 77'de D₁'in örüntünün diğer terimlerini artış miktarına odaklanarak elde ettiği görülmektedir. Öğrenci tarafından benimsenen bu strateji, aritmetik genelleme gerçekleştiren öğrencilerin kullandığı stratejiler arasında yer almaktadır. Öğrenci, örüntüye ait genel bir kural elde edilmesine ilişkin yanıtlaması gereken (c) ve (d) maddelerine "kilometreyi *n* olarak görürsek, *n*'in 2 katını alır 3 ekleriz" şeklinde cevap verdiği görülmektedir. Öğrenci örüntüye ait ortaklıkları artış miktarına odaklanarak açıklasa da cebirsel bir kural elde edememiştir. Bu bağlamda öğrencinin aritmetik genelleme gerçekleştirdiği görülmektedir.

Yarı Yapılandırılmış Mülakatlardan Elde Edilen Bulgular

168A: Etkinlik 9'a verdiğin yanıtları hatırlıyor musun? Bir taksicinin belli bir kilometreye göre müşteriden aldığı ücret ile ilgili bir problemdi.

164D₁: Evet hatırlıyorum öğretmenim, diğer terimleri soruyordunuz yine.

169A: Taksicinin 1 km ve 10 km'lik mesafeler için kaç TL alacağını doğru bir şekilde cevaplandırmışsın. Ancak nasıl bulduğuna ilişkin bir gerekçelendirme yapmamışsın. Taksicinin 1 km'lik yol için kaç TL alacağına nasıl ulaştın?

165D₁: 1 kilometre için 5 TL ödemesi gerekir.

170A: Bundan nasıl emin oluyorsun? Yanıtını gerekçelendirir misin?

166D₁: Çünkü 2 kilometrelik yol için 7 TL, 3 kilometrelik yol için 9TL veriyormuş, yani kilometre başına 2 TL alıyor. O zaman 1 kilometre için 7'den 2 azaltırız, 7-2'den 5 TL elde etmiş oluruz.

Öğrencinin mülakat sürecinde bulunduğu açıklamaları, yazılı açıklamalarını destekler niteliktedir. D_1 , ardışık terimler arası artış miktarına odaklanarak diğer terimleri elde ettiğini açıklamaları ile göstermektedir. Bu bağlamda terimler arası sabit farkı tespit etme, bu fark doğrultusunda diğer terimleri elde etme gibi stratejiler aritmetik genelleme yaklaşımı sergileyen öğrencilerin kullandığı stratejiler olduğundan öğrencinin aritmetik genelleme gerçekleştirdiği bulgusuna ulaşılmaktadır. Ayrıca D_1 'in öğretim sonrası uygulanan etkinliklerin tamamında benzer stratejiler kullanarak örüntünün genel kuralını “ikişer artarak gidiyor”, “sekizer sekizer artıyor” gibi sözel ifadeler kullanarak açıkladığı görülmektedir. Bu bağlamda D_1 , öğretim sonrasında uygulanan etkinliklerin tamamında aritmetik genelleme yaklaşımı göstermiştir.

4.4. Öğrencilerin Cebirsel Düşünme Süreçlerinin Değişimine İlişkin Bulgular

Bu bölümde araştırmanın dördüncü alt problemi olan “*sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim öncesi ve sonrasında öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerinde farklılık var mıdır?*” sorusuna yanıt aranmaktadır. Öğrencilerin cebirsel düşünme süreçleri öğretim öncesi ve sonrasında Radford (2008)’un cebirsel genelleme inşası kuramsal çerçevesi bağlamında analiz edilmiştir.

Öğrencilerin genelleme süreçleri;

- (i) Örüntüdeki ortaklığı yakalama, anlama veya idrak etme,
- (ii) Bu ortak özelliği dikkate alınan örüntünün veya sayı dizisinin tüm terimlerine genelleme ve
- (iii) Örüntünün herhangi bir terimini doğrudan belirtmek için bir kural veya şema şekli belirtme

alt bileşenlerinin ele alınmasıyla incelenmiş ve yorumlanmıştır.

Tablo 18

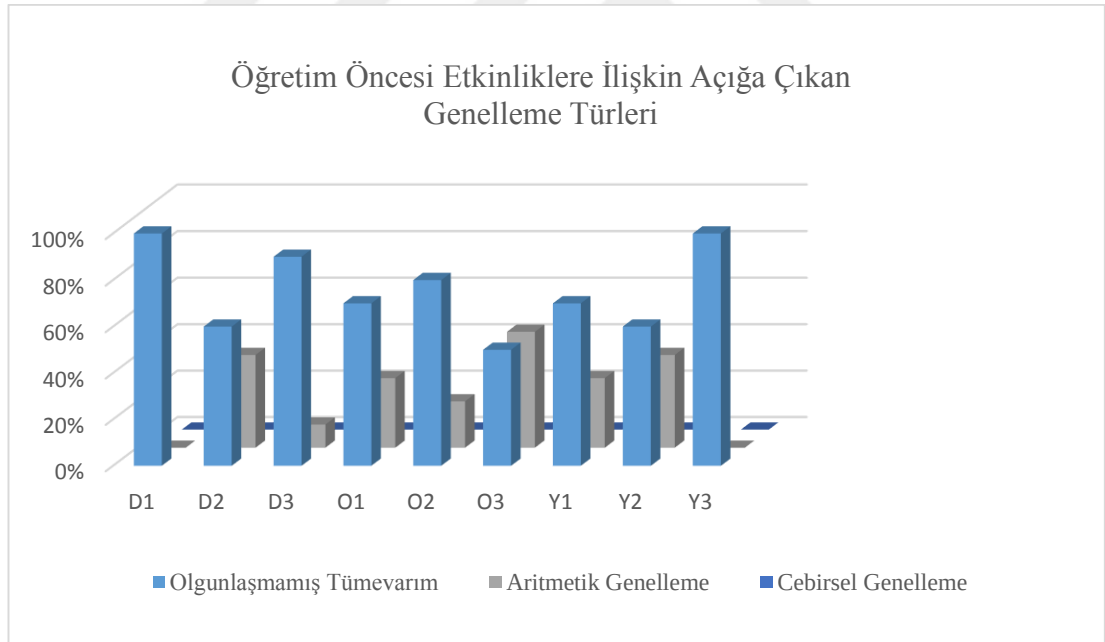
İlgili Bileşenler Bağlamında Oluşan Genelleme Türleri

Genelleme Türü	Açıklamalar
Cebirsel Genelleme	Örüntünün bir bölümünden ortak özelliğin fark edilmesi, fark edilerek geliştirilen hipotezden p_n elde edilmesi
Aritmetik Genelleme	Örüntünün bir bölümünden ortak özelliğin fark edilerek hipotez geliştirilmesi
Olgunlaşmamış Tümevarım	Örüntünün bir bölümünden p_n elde edilmesi

Araştırma bulguları incelendiğinde, sorgulama temelli öğretim öncesinde öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerini aritmetik genelleme ve olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı bağlamında olgunlaştırdıkları görülmektedir. Öğretim öncesinde öğrenciler toplam 90 genelleme etkinliğinin 68'inde olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı sergilerken 22'sinde aritmetik genelleme gerçekleştirmişlerdir. Bu sonuçlar doğrultusunda tüm etkinlikler genelinde %75,5 oranında olgunlaşmamış tümevarım, %24,5 oranında aritmetik genelleme gerçekleştirildiği söylenebilir. Araştırmadan elde edilen bulgular doğrultusunda sorgulama temelli öğretim öncesinde düşünsel süreçlerini cebirsel genelleme bağlamında yapılandıran öğrenci bulgusuna ulaşılmamıştır.

Öğrenciler bazında ulaşılan veriler ele alındığında, sorgulama temelli öğretim öncesi cebirsel düşünme süreçleri analizi bağlamında uygulanan etkinliklere ilişkin açığa çıkan genelleme türleri Grafik 2'de görülmektedir.

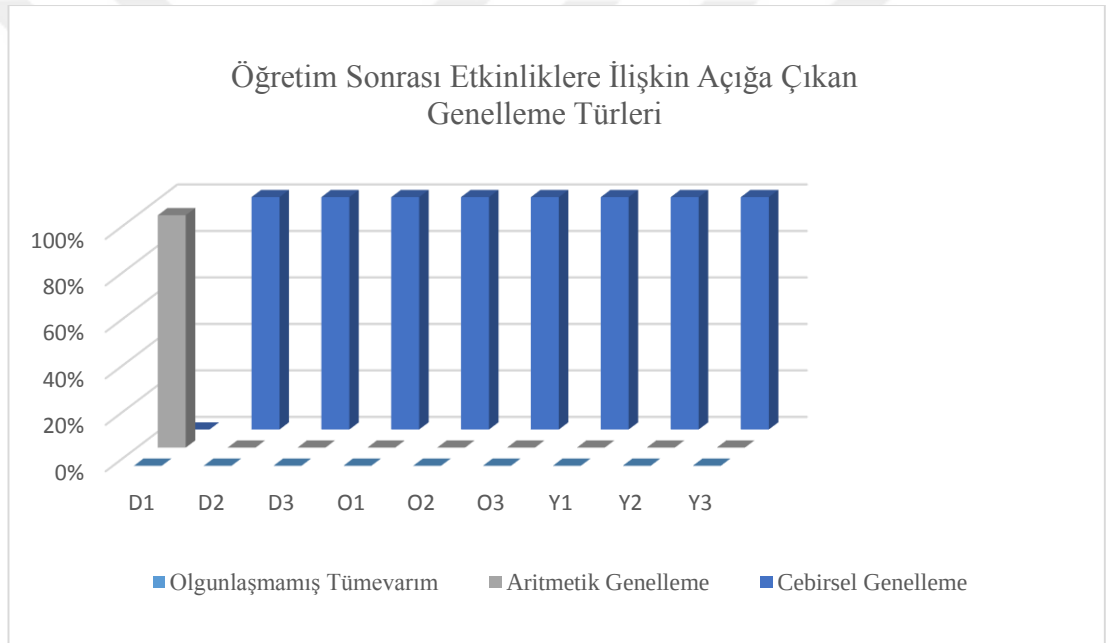
Grafik 2



Öğretim sonrasında uygulanan ilgili veri toplama aracı ışığında elde edilen bulgular incelendiğinde ise öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerini; cebirsel genelleme ve aritmetik genelleme bağlamında iki farklı genelleme türü ile yapılandırdıkları görülmektedir. Etkinliklere ait yazılı çözümler ve yarı yapılandırılmış mülakat sürecinde yapılan açıklamalar doğrultusunda öğrencilerin en çok cebirsel genelleme gerçekleştirdiği bulgusuna ulaşılmıştır. Elde edilen verilere göre, birkaç öğrenci aritmetik genelleme yaklaşımı sergilerken

olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı gösteren öğrenci bulunamamıştır. Öğretim sonrasında öğrencilerin yanıtladıkları 90 etkinliğin 80'inde cebirsel genelleme gerçekleştiren 10'unda aritmetik genelleme gerçekleştirdikleri bulgusuna ulaşılmıştır. Elde edilen sonuçlar doğrultusunda öğretim sonrasında öğrencilerin %88,8 oranında cebirsel genelleme, %11,2 oranında aritmetik genelleme yaklaşımı sergiledikleri görülmektedir. Araştırmanın bulguları ışığında olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı sergileyen öğrenci bulunmamaktadır.

Öğrenciler özelinde elde edilen veriler incelendiğinde, sorgulama temelli öğretim sonrası cebirsel düşünme süreçleri analizi bağlamında uygulanan etkinliklere ilişkin açığa çıkan genelleme türleri Grafik 3'te görülmektedir.

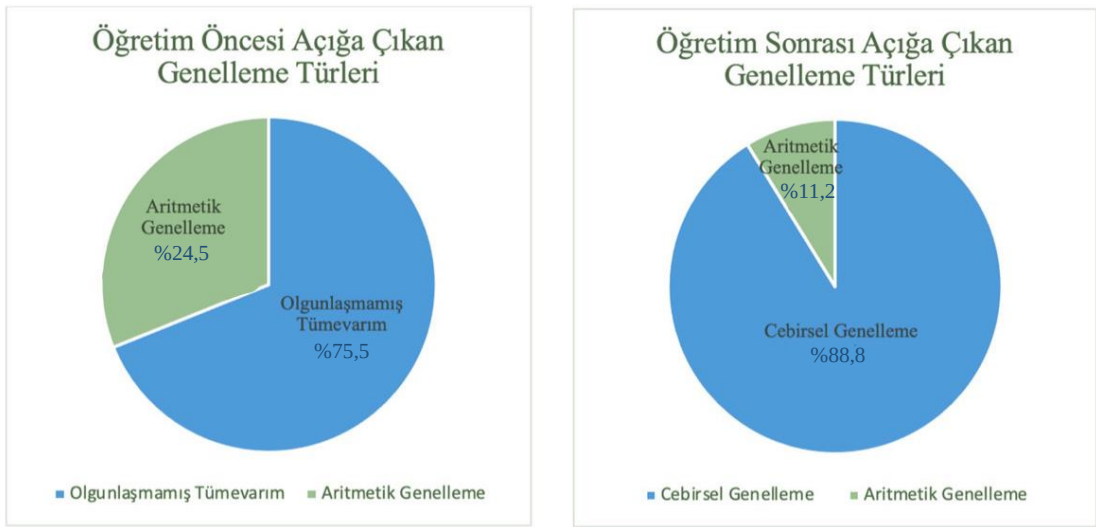


Sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim öncesinde toplanan veriler ışığında cebirsel genelleme gerçekleştiren öğrenci bulunmazken; öğretim sonrasında ise %88,8 oranında cebirsel genelleme gerçekleştirildiği bulgusuna ulaşılmıştır. Bu bağlamda öğrencilerin genelleme yapma becerisi;

- (i) Örüntüdeki ortaklığı yakalama, anlama veya idrak etme,
- (ii) Bu ortak özelliği dikkate alınan örüntünün veya sayı dizisinin tüm terimlerine genelleme ve
- (iii) Örüntünün herhangi bir terimini doğrudan belirtmek için bir kural veya şema şekli belirtme

süreçleri bağlamında yapılandırıldığından, öğretim sonrasında ilgili bileşenlerin %88,8 oranında gerçekleştirildiği söylenebilir.

Genelleme türleri kategorisine bakıldığında Radford'un (2008) kuramsal çerçevesi doğrultusunda aritmetik genelleme, cebirsel genelleme ve olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı bağlamında üç alt kategori barındırdığı görülmektedir. Öğrenciler tarafından öğretim öncesi ve sonrası açıklanan genelleme türlerinin daire grafiği bazında oranları Grafik 4 ve Grafik 5'te görülmektedir.



Sorgulama temelli öğretim öncesi (10) ve sonrasında (10) öğrencilere yöneltilen toplam 20 etkinlik; tablo, şekil veya sayı içeren örüntülere ait ilişkileri fark etmeleri ve fark ettikleri ortak özellik doğrultusunda bir hipotez geliştirerek genel bir kural elde etmelerini içermektedir. Bu bağlamda yukarıda özet olarak açıklanan alt problem; her bir öğrenci özelinde, yazılı çözümleri ve mülakat sürecindeki açıklamaları doğrultusunda derinleştirilmektedir.

Y₁'in Cebirsel Düşünme Süreçlerinin Değişimine İlişkin Bulgular

Sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim öncesi Y₁'in etkinliklere verdiği yazılı yanıtları ve yarı yapılandırılmış mülakat sürecindeki açıklamaları incelendiğinde *olgunlaşmamış tümevarım* ve *aritmetik genelleme* gerçekleştirdiği bulgusuna ulaşılmıştır. Öğretim öncesinde Y₁ tarafından yanıtlandırılan 10 etkinliğin 7'sinde olgunlaşmamış tümevarım, 3'ünde ise aritmetik genelleme gerçekleştirdiği görülmektedir.

Öğretim sonrasında ise Y_1 'in uygulanan tüm etkinliklerde *cebirsal genelleme* yaklaşımı sergilediği tespit edilmiştir.

Sorgulama temelli öğretim öncesinde Y_1 , etkinliklere ilişkin yazılı açıklamalarında deneme-yanılma yoluyla bir kural elde etme ve ardışık terimler arası artış miktarına odaklanma olarak iki farklı strateji üzerinden düşünsel süreçlerini yapılandığı bulgusuna ulaşılmıştır. Öğretim sonrasında tüm etkinliklerde fark ettiği ortak özellikleri örüntünün diğer terimlerine genelleyerek anlamlı ve doğru çıkarımlar yaptığı tespit edilmiştir. Bu bağlamda Y_1 , örüntüye ait ortaklıkları tespit ederek bir hipotez geliştirmiş ve her bir etkinliğe ilişkin genel bir kural elde ederek genelleme sürecini tamamlamıştır. Öğrencinin çözümlerinden gözlemlenebilen cebirsal düşünme süreçlerine ilişkin farklılığın mülakatlarda da benzer olarak açığa çıktığı görülmektedir.

Y_1 'in Mülakat Sürecinde Açığa Çıkan Açıklamaları

92A: Örüntü konusunu öğrenmekte güçlük çektiğin noktalar olduğunu düşünüyor musun?

88 Y_1 : Zorlanmak değil de öğretim öncesinde neyi neden yaptığımızı pek anlamıyordum.

93A: Sana bu şekilde düşündürten durum neydi peki?

89 Y_1 : Yani sabit farkı bulup önüne bir x veya n koyuyorduk, sonra da herhangi bir terimi elde etmek için deneyerek ekleyip çıkarıyorduk. Evet bir genel kural elde ediyorduk ama neden o şekilde yapıldığına bir anlam veremiyordum.

94A: Mesela 2, 4, 6, 8, ... şeklinde devam eden bir örüntü olduğunu varsayalım. Önceden diğer terimlere ya da genel bir kurala nasıl ulaşıyordun?

90 Y_1 : İkişer artıyor. O zaman kural $2n$ ya da $2x$ olmalı.

95A: Neden kural $2n$ ya da $2x$ olmak zorunda?

91 Y_1 : Çünkü artış miktarını bulup sonra da bilinmeyenin önüne yazmamız gerekiyor. Oysa bir ilişki kurmuyoruz. Ama şimdi yine aynı cebirsal kurala farklı şeylere dikkat ederek ulaşıyorum.

96A: Mesela nelere dikkat ettin bu örüntüde? İlk ne dikkatini çekti?

92Y₁: Her terim adım sayısının iki katı. Yani birinci terim 1'in 2 katı, ikinci terim 2'nin 2 katı olduğu için 4, bu nedenle genel kural $2n$ olmalı. Her terim adım sayısının iki katı olduğu için.

97A: Peki belirlediğin genel kuralda n veya x olarak kullandığın bilinmeyen ne ifade ediyor?

93Y₁: Terim veya adım sayısını. Çünkü adım sayısının iki katı diyorum, yani n burada adım sayısıysa 2 katı 2 çarpı n yani $2n$ olmalı.

Öğrencinin mülakat sürecindeki açıklamaları incelendiğinde, öğretim öncesi cebirsel düşünme süreçlerini aritmetik genelleme ve olgunlaşmamış tümevarım bağlamında yapılandığı görülmektedir. Öğrencinin "*neyi neden yaptığımı anlamıyordum*" söylemi, düşünsel süreçlerinin ezber veya taklit yoluyla olgunlaştırıldığını açıklar niteliktedir. Öğrenci verilen örüntünün altında yatan cebirsel nedenleri incelemek yerine genel bir kural elde etmeye yönelik strateji ve açıklamalar geliştirmiştir. Öğretim sonrasında ise öğrencinin her bir etkinlik için örüntünün verilen terimlerine ait ortaklıkları fark ederek kurduğu ilişki üzerinden cebirsel kurala ulaştığı görülmektedir. Öğrencinin "*birinci terim 1'in 2 katı, ikinci terim 2'nin 2 katı olduğu için 4, bu nedenle genel kural $2n$ olmalı, her terim adım sayısının iki katı olduğu için*" ve "*adım sayısının iki katı diyorum, yani n burada adım sayısıysa 2 katı 2 çarpı n yani $2n$ olmalı*" açıklamaları örüntüye ait anlamlı ve geçerli bir cebirsel kural elde etmesi, cebirsel anlamda düşünsel süreçlerini cebirsel genelleme bağlamında yapılandığını destekler niteliktedir.

Tablo 19

Y₁'in Genelleme Türlerinde Açığa Çıkan Alt Kategoriler

Alt Kategoriler	Öğretim Öncesi Frekans	Öğretim Sonrası Frekans
Cebirsel Genelleme	0	10 (%100)
Aritmetik Genelleme	3 (%30)	0
Olgunlaşmamış Tümevarım	7 (%70)	0

Y₂'nin Cebirsel Düşünme Süreçlerinin Değişimine İlişkin Bulgular

Sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim öncesi Y₂'nin etkinliklere verdiği yazılı yanıtları ve yarı yapılandırılmış mülakat sürecindeki açıklamaları

incelendiğinde *olgunlaşmamış tümevarım* ve *aritmetik genelleme* gerçekleştirdiği bulgusuna ulaşılmıştır. Öğretim öncesinde 10 etkinliğin 6'sında olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı sergileyen Y₂'nin bazı şekil örüntülerine ilişkin ortaklıkları fark ettiği ancak fark edilen ortaklığı örüntünün diğer terimlerine genelleyemediği bulgusuna ulaşılmıştır. Öğrencinin yazılı açıklamaları incelendiğinde şekil üzerinden sunulan örüntülerin terimlerine ait ortak özellikleri anlamlandırma çabasında olduğu görülmektedir. Örüntünün içerdiği yapı ve ilişkileri fark etmiş olsa da bu özelliğe ait bir hipotez geliştirememiş ve cebirsel bir kural elde edememiştir. Araştırma bulgularına göre uygulanan etkinliklerin 4'ünde ise aritmetik genelleme gerçekleştirdiği görülmektedir. Öğretim sonrasında ise Y₂ uygulanan tüm etkinliklerde terimler arası yapı ve ilişkileri inceleyerek fark ettiği ortak özellik üzerinden anlamlı bir genel kural elde ettiği görülmektedir. Ayrıca Y₂, her bir etkinliğe ait geçerli açıklamalarda bulunmuş, yazılı çözümlerinde geçirdiği düşünsel süreçleri anlamlı bir şekilde ifade etmiştir. Örüntülerin altında yatan her bir ilişkiyi geçerli cebirsel nedenlere dayandırarak genelleme süreçlerini tamamlamıştır. Bu bağlamda Y₂'nin öğretim sonrasında uygulanan tüm etkinliklerde *cebirsel genelleme* yaklaşımı sergilediği tespit edilmiştir.

Gerçekleştirilen yarı yapılandırılmış mülakatlar sonrasında Y₂'nin yazılı açıklamalarında incelenen düşünsel süreçlerin mülakatlarda da benzer şekilde açığa çıktığı görülmektedir.

Yarı Yapılandırılmış Mülakatlardan Elde Edilen Bulgular

102Y₂: Aslında önceden bazı şekil örüntülerinde gruplayarak diğer adımlara ulaşmaya çalışıyordum ama bulduğum şeyi gerekçelendiremiyordum.

110A: Öğretim sonrasında çözdüğün tüm etkinliklerde her bir işlemin için geçerli açıklamalarda bulunmuşsun. Öncesinden farklı olmasına sebep olan şey ne sence?

103Y₂: Öğretmenim örüntü konusunu öğrenirken ilk dersimizde bir havuz problemi vardı, onu sormuştunuz bize, '*teker teker saymadan nasıl bulabiliriz*' diye. Aslında alternatif yolları aramaya başladığımda bizi düşünmeye zorladığınızı fark ettim. Yani teker teker saymadan nasıl yapabiliriz aslında. Evet diğer terimlere sayarak ulaşabiliriz üzerine ekleyerek ama bu sefer de çok uzak bir terimi soruyordunuz, ekleyerek devam etmek çok uzun süreceği için mecburen başka yollar bulmaya çalışıyorduk.

Öğrencinin mülakat sürecindeki açıklamaları incelendiğinde Y₂, bir çözümü sorgulamanın, alternatif çözüm stratejileri geliştirmeye çalışmanın öğrencileri sorgulamaya

ittiğini belirtmektedir. Öğrenci öğretim öncesinde, elde ettiği genel kurala ulaşma sürecinde zihninde yapılandığı düşünsel süreçleri, anlamlı cebirsel açıklamalara dayandıramamaktadır. Sorgulama temelli öğretim sonrasında ise tüm çözüm stratejilerini cebirsel nedenleri üzerinden açıklayarak yapılandırmaktadır. Tablo 20’de Y₂’nin genelleme süreçlerinin öğretim öncesi ve sonrasına bağlı olarak değişimi görülmektedir. Bu bağlamda Y₂’nin öğretim sonrasında genelleme stratejilerinde cebirsel düşünmenin varlığından söz edildiği söylenebilir.

Tablo 20

Y₂’nin Genelleme Türlerinde Açığa Çıkan Alt Kategoriler

Alt Kategoriler	Öğretim Öncesi Frekans	Öğretim Sonrası Frekans
Cebirsel Genelleme	0	10 (%100)
Aritmetik Genelleme	4 (%40)	0
Olgunlaşmamış Tümevarım	6 (%60)	0

Y₃’ün Cebirsel Düşünme Süreçlerinin Değişimine İlişkin Bulgular

Sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim öncesi Y₃’ün etkinliklere verdiği yazılı yanıtları ve yarı yapılandırılmış mülakat sürecindeki açıklamaları incelendiğinde tüm etkinliklerde *olgunlaşmamış tümevarım* yaklaşımı sergilediği bulgusuna ulaşılmıştır. Öğretim öncesinde Y₃ tarafından yanıtlandırılan 10 etkinliğin tamamında olgunlaşmamış tümevarım gerçekleştirdiği görülmektedir. Y₃’ün etkinliklere verdiği yazılı yanıtlarda örüntünün diğer terimlerini, artış miktarı üzerinden önceki terimlerin üzerine ekleme stratejisi kullanarak elde ettiği bulgusuna ulaşılmıştır. Örüntüye ait ilişki ve yapıların ortak özelliklerine dikkat etmeden tahmin yoluyla genel bir kural elde etme yoluna gitmiştir. Bu sebeple öğretim öncesinde olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı sergileyen Y₃’ün verdiği yazılı yanıtlara ilişkin düşünsel süreçlerinde cebirsel düşünmenin varlığına rastlanmadığı söylenebilmektedir.

Öğretim sonrasında ise Y₃’ün uygulanan tüm etkinliklerde *cebirsel genelleme* yaklaşımı sergilediği tespit edilmiştir. Verilen her bir etkinliğe ait problemin bağlamını anlamlandırarak örüntülere ait ortak özellikleri fark etmiştir. Örüntünün diğer terimlerini, fark ettiği ortak özelliği diğer terimlere genelleyerek elde ettiği bulgusuna ulaşılmıştır. Sonuç olarak Y₃’ün, uygulanan etkinliklerin tamamında yazılı çözüm ve açıklamaları doğrultusunda

anlamlı ve geçerli bir cebirsel kural elde ettiği tespit edilmiştir. Y_3 'ün mülakat sürecindeki açıklamaları incelendiğinde yazılı açıklamalarını destekler nitelikte ifadeler kullandığı görülmektedir.

Yarı Yapılandırılmış Mülakatlardan Elde Edilen Bulgular

109A: Öğretim öncesinde tüm etkinliklere verdiğin yanıtları incelediğimde hepsinde genel bir cebirsel kural elde etmişsin. Ancak yaptığın işlemlere yönelik açıklamalarda bulunmamışsın.

114Y₃: Evet çünkü o zaman da genel bir kural bulabiliyordum zaten.

110A: Peki şöyle düşünelim, 4, 7, 10, ... şeklinde devam eden bir örüntü olduğunu varsayalım. Genel kuralına nasıl ulaşırsın? Ne düşünürsün ilk odaklandığında?

115Y₃: Aslında ilk aklıma üçer üçer arttığından dolayı kurala $3n$ demek geliyordu. Sonra da deneyerek bakıp ona göre kuralı değiştiriyordum. Ama aslında öyle değil.

111A: Peki, sayı örüntüsünde şu an ne fark ediyorsun? Bana bu örüntünün genel kuralını düşünceni gerekçelendirerek anlatabilir misin?

Öğrenci önündeki boş kâğıda Şekil 78'i çizer.



Şekil 78: Y_3 'ün verilen sayı örüntüsüne ilişkin yaptığı modelleme

112A: Yaptığın model neyi ifade ediyor?

118Y₃: Söylediğiniz sayı örüntüsünü modelledim öğretmenim.

113A: Sence oluşturduğun örüntüye ait geçerli bir model sayılabilir mi? Nelere dikkat ederek modelini oluşturdun?

119Y₃: Aslında ilk şunu fark ettim. Terimler 3, 6, 9, ... şeklinde devam etseydi kural $3n$ olurdu çünkü her terim adım sayısının 3 katı. Ama 4, 7, 10, ... şeklinde gidiyor. Yani her terimde 1 fazlalık var. Bu nedenle kuralda da 1 fazlalık olmalı $3n+1$. Evet modelim bence geçerli, çünkü birincisinde adım sayısı kadar üçlü grup var, ikincisinde iki tane üçlü grup,

üçüncüsünde üç tane üçlü grup. Ancak 1 hep sabit her terimde olmak zorunda çünkü kuralda da n 'in alacağı her bir değer için $3n$ değişse de eklenen hep 1 sabit olmak zorunda. Modelin değişen kısmı $3n$ iken değişmeyen kısmı 1 eklenmesi oluyor. Ama bu ilişkiyi örüntüyü sayısal olarak verdiğiniz için böyle kurmak zorunda kaldım. Şekil olsaydı direk ortak olan şeyleri dikkat ederek açığa çıkıyordum zaten.

Öğrencinin mülakat sürecindeki açıklamaları incelediğinde öğretim öncesinde geçirdiği düşünsel süreçlerden farklı olarak öğretim sonrasında, örüntünün her bir terimine ait ilişki ve ortaklıkları belirleyebildiği, verilen sayı örüntüsüne ait anlamlı ve geçerli bir model oluşturabildiği, fark ettiği ortak özellik üzerinden genel bir cebirsel kural elde edebildiği görülmektedir. Y_3 , öğretim öncesinde her bir etkinliğe ait genel kurala deneme-yanılma yoluyla ulaşırken öğretim sonrasında örüntünün içerdiği cebirsel yapılarak odaklanmaktadır. Olgunlaşmamış tümevarım, bir genelleme anlamı taşımadığından dolayı öğrencinin öğretim öncesinde düşünsel süreçlerinde cebirsel düşünmenin varlığından söz edilememektedir. Ancak öğretim sonrasında tüm etkinliklerde terimler arası ilişkileri fark ederek cebirsel genelleme sürecinin ilgili bileşenlerini ortaya koyarak genelleme süreçlerini tamamladığı bulgusuna ulaşılmıştır. Tablo 21'de Y_3 'ün açığa çıkardığı genelleme türlerinin değişimine ait frekans değerleri ve yüzdeleri görülmektedir.

Tablo 21

Y_3 'ün Genelleme Türlerinde Açığa Çıkan Alt Kategoriler

Alt Kategoriler	Öğretim Öncesi Frekans	Öğretim Sonrası Frekans
Cebirsel Genelleme	0	10 (%100)
Aritmetik Genelleme	0	0
Olgunlaşmamış Tümevarım	10 (%100)	0

O_1 'in Cebirsel Düşünme Süreçlerinin Değişimine İlişkin Bulgular

Orta düzeyde bir akademik başarıya sahip olan O_1 'in sorgulama temelli matematik öğretimi öncesi düşünsel süreçleri incelendiğinde, uygulanan etkinliklerde *aritmetik genelleme* ve *olgunlaşmamış tümevarım* yaklaşımı sergilediği bulgusuna ulaşılmıştır. Uygulanan 10 etkinliğin 7'sinde olgunlaşmamış tümevarım, 3'ünde ise aritmetik genelleme yaklaşımı sergilediği bulgusuna ulaşılmıştır. O_1 'in yazılı yanıtları doğrultusunda şekil olarak sunulan örüntülerini, sayı örüntüsüne dönüştürdüğü ve bu bağlamda artış miktarını tespit

ederek diğer terimleri elde ettiği görülmektedir. O_1 'in yazılı yanıtlarında “örüntü ikişer ikişer arttığı için genel kural $2n$ 'dir”, “örüntü birer birer arttığı için kural $1n$ ” gibi açıklamalarda bulunması, ardışık terimler arası artış miktarı üzerinden cebirsel bir kural oluşturma eğiliminde olduğunu gösterir niteliktedir. Ulaştığı genel kuralı, herhangi bir cebirsel yapı ve ilişkiye dayandırmadan açıklaması öğrencinin öğretim öncesi düşünsel süreçlerinde üst düzey bilişsel bir beceri olan genellemenin varlığından söz edilememektedir. Gerçek hayat durumlarının başlangıç noktası olarak sunulan sayı örüntüsü içeren problemlerde ise genel kuralı “örüntünün kuralı: üçer üçer artıyor”, “adımların dörder dörder artması” sözel ifadeler kullanarak açıklamıştır. Bu bağlamda örüntüye ait yapı ve ortaklıkları nümerik ilişkiler üzerinden ifade etmesi aritmetik genelleme gerçekleştirdiğini göstermektedir.

Sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim sonrası, O_1 'in örüntüleri genelleme süreçleri bağlamında açığa çıkan kategoriler incelendiğinde, uygulanan tüm etkinliklerde *cebirsel genelleme* gerçekleştirdiği bulgusuna ulaşılmıştır. Ayrıca Tablo 22 incelendiğinde, O_1 'in genelleme süreçlerinde olgunlaşmamış tümevarım ve aritmetik genelleme yaklaşımından cebirsel genellemeye bir yönelim gösterdiği görülmektedir. O_1 'in yarı yapılandırılmış mülakat sürecindeki açıklamaları yazılı çözümlerini destekler niteliktedir.

Yarı Yapılandırılmış Mülakatlardan Elde Edilen Bulgular

112A: 8, 11, 14, 17, ... şeklinde devam eden bir sayı örüntüsü üzerine düşünelim. İlk neye dikkat ediyorsun?

120 O_1 : Üçer üçer artıyor öğretmenim.

113A: Tamam, 8. terime nasıl ulaşırsın?

121 O_1 : Aslında şekil olsaydı daha iyi olurdu, bunda hemen ilişki kuramıyorum ondan üzerine beşer beşer ekleyerek 8. terime ulaşırım. $17+3$, $20+3$, $23+3$, $26+3$ 'ten 29 olur.

114A: Peki ya 100. terime nasıl ulaşırsın?

Öğrenciye düşünmesi için 3 dakika süre verilir, öğrenci bu süre zarfında önündeki kâğıda aşağıdaki işlemleri aktarır.

O_1 , 8, 11, 14, 17, ... şeklinde verilen sayı örüntüsünü başka bir forma aktararak yazmıştır. Aşağıda O_1 'in yazılı açıklamaları görülmektedir:

$$\begin{array}{cccc}
 3+5 & 6+5 & 9+5 & 12+5 \\
 \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow \\
 (3.1)+5 & (3.2)+5 & (3.3)+5 & (3.4)+5
 \end{array}$$

O_1 'in açıklamaları incelendiğinde, her bir terim ile terim sayısı arasında bir ilişki kurabildiği görülmektedir. Her bir terimi, adım sayısının 3 katının 5 fazlası hipotezi üzerinden analiz etmiş ve bunun doğrultusunda cebirsel bir kural elde etmiştir. Bu bağlamda öğretim sonrasında düşünsel süreçlerini cebirsel genelleme süreci doğrultusunda olgunlaştırdığı söylenebilir.

Tablo 22

 O_1 'in Genelleme Türlerinde Açığa Çıkan Alt Kategoriler

Alt Kategoriler	Öğretim Öncesi Frekans	Öğretim Sonrası Frekans
Cebirsel Genelleme	0	10 (%100)
Aritmetik Genelleme	3 (%30)	0
Olgunlaşmamış Tümevarım	7 (%70)	0

 O_2 'nin Cebirsel Düşünme Süreçlerinin Değişimine İlişkin Bulgular

Akademik açıdan orta düzey başarıya sahip diğer bir öğrenci olan O_2 'nin öğretim öncesi etkinliklere verdiği yanıtlarda örüntünün altında yatan cebirsel yapı ve ilişkileri belirleyemediği için *aritmetik genelleme* ve *olgunlaşmamış tümevarım* yaklaşımı sergilerken, öğretim sürecinde ve sonrasında uygulanan 10 örüntü etkinliğinin tamamında *cebirsel genelleme* gerçekleştirdiği belirlenmiştir. Öğretim öncesi uygulanan 10 etkinliğin 8'inde olgunlaşmamış tümevarım, 2'sinde ise aritmetik genelleme gerçekleştirdiği bulgusuna ulaşılmıştır. Bu bağlamda öğrencinin sorgulama temelli öğretim öncesinde düşünsel süreçlerini olgunlaşmamış tümevarımlar doğrultusunda olgunlaştırdığı söylenebilmektedir. Olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı açığa çıkarken, öğrenci tarafından örüntüye ait yapı ve ilişkilere odaklanmadan bir genel kural elde edildiğinden cebirsel genellemeye ait geçirilen süreçlerin varlığına rastlanmamaktadır.

Sorgulama temelli öğretim sürecinde öğrencilerin genelleme becerisini geliştirici ve düşünsel süreçlerini açığa çıkarmaya yardımcı sorular yönlendirildiğinde, zihinlerinde

probleme ilişkin çözüm için gerekli olan matematiksel yapıyı oluşturma ve öğrenme ortamına aktarma ihtiyacı duydukları görülmüştür. Öğrencinin öğretim sürecinde verilen bir probleme ilişkin alternatif yolları sorgulaması ve bu yolları arkadaşları ile birlikte tartışarak yapılandırması, örüntüye ait ortak özellikleri açığa çıkarmasına ve bu bağlamda düşünsel süreçlerinin cebirsel bir temel kazanarak şekillenmesine yardımcı olmuştur.

Yarı Yapılandırılmış Mülakatlardan Elde Edilen Bulgular

104A: Sence neden ortaokulda örüntü konusunu öğreniyorsunuz?

98O₂: Aslında neden öğrendiğimizi diğer konulara geçince daha iyi anladım öğretmenim. Yani bence örüntü konusuyla belirli durumlar arasında bir ilişki kurabilme yeteneği kazanıyoruz gibi bir şey.

105A: Nasıl yani ne demek istediğini biraz açıkla mısın?

99O₂: Mesela örüntü konusunu öğrendikten sonra eşitlik denklem, oran orantı gibi konulara geçtik. Mesela doğru orantı kurarken aslında yine farklı durumlar arasında ilişki kurmaya çalışıyorduk. Orantılı iki çokluk var evet ilişki var ama nasıl bir ilişki var, bunu fark ettiğimizde aralarında bulunan orantıyı da belirleyebiliyorduk. Aslında bence örüntü konusu bizim farklı durumlar arası ilişki kurmamıza yardımcı oluyor.

106A: Bir örnek verebilir misin nasıl yardımcı olduğunu anlatan?

100O₂: Mesela en basitinden bir taksi 1 km gidilen bir uzaklık için 5 TL yazsın. İşte 10 km sonra kaç TL olmuş olur diye sorsak, 1 km için 5 TL, 2 km için 10 TL olacak.

107A: Nasıl 10 TL oluyor açıkla mısın? Bunu belirlerken nasıl düşündün?

101O₂: Çünkü hep km sayısının 5 katı kadar ücret yazılıyor, yani burada da bir örüntü var aynı zamanda da doğru orantılı. 1 için 5, 2 için 10, 3 için 15 ve 10 km için 50 TL olacak. Her terim adım sayısının 5 katı olduğundan x dersek kaç km gidildiğine 5x kadar para yazılması gerekir.

Öğrencinin mülakat sürecindeki açıklamaları incelendiğinde, “örüntü konusuyla belirli durumlar arası ilişki kurabilme yeteneği kazanıyoruz gibi bir şey”, “örüntü konusu bizim farklı durumlar arasında bir ilişki kurabilmemize yardımcı oluyor” gibi söylemleri ve sonrasında kendi oluşturduğu probleme ait bir belirlediği ortaklık üzerinden cebirsel bir ifade elde etmesi, düşünsel süreçlerini cebirsel genelleme bağlamında olgunlaştırdığını destekler

niteliktedir. O_2 , oluşturduğu problemdeki bilgileri kendi kişisel belirlediği matematiksel yöntemlerle işleyerek zihninde çözüm için gerekli matematiksel yapıyı oluşturarak örüntü konusuyla ilişkilendirmiş ve bu doğrultuda oluşturduğu yapıyı genelleyerek cebirsel bir kural elde etmiştir.

Tablo 23'te O_2 'nin öğretim öncesi ve sonrası genelleme türlerine ait ortaya çıkan frekans değerleri görülmektedir. Yarı yapılandırılmış mülakat sürecindeki açıklamaları incelendiğinde öğrencinin cebirsel düşünme süreçlerinin değişimine ilişkin ortaya çıkan farklılığı destekler açıklamalar yaptığı görülmektedir.

Tablo 23

O_2 'nin Genelleme Türlerinde Açığa Çıkan Alt Kategoriler

Alt Kategoriler	Öğretim Öncesi Frekans	Öğretim Sonrası Frekans
Cebirsel Genelleme	0	10 (% 100)
Aritmetik Genelleme	2 (% 20)	0
Olgunlaşmamış Tümevarım	8 (% 80)	0

O_3 'ün Cebirsel Düşünme Süreçlerinin Değişimine İlişkin Bulgular

Sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim öncesi O_3 'ün uygulanan etkinliklere verdiği yazılı yanıtlar incelendiğinde, *olgunlaşmamış tümevarım* ve *aritmetik genelleme* yaklaşımı sergilediği bulgusuna ulaşılmıştır. Orta düzey akademik bir başarıya sahip olan O_3 'ün öğretim sonrasında ise uygulanan tüm etkinliklerde *cebirsel genelleme* gerçekleştirdiği tespit edilmiştir. Öğretim öncesi uygulanan etkinliklerin 5'inde aritmetik genelleme gerçekleştirirken 5'inde olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı sergilediği bulgusuna ulaşılmıştır. O_3 , cebirsel kuralı " $2n$ ", " $3n$ ", " $5n$ ", ... gibi sabit terim içermeyen örüntü problemlerinde olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı sergilerken genel kuralı " $2n+1$ ", " $3n-7$ ", ... gibi sabit terim içeren örüntülerde ise aritmetik genelleme gerçekleştirmiştir. Örneğin 2, 4, 6, 8, ... şeklinde devam eden bir sayı örüntüsünün cebirsel kuralını " $2n$ " olarak herhangi cebirsel bir nedene dayandırmadan elde etmiştir. Terimleri 3, 5, 7, 9, ... şeklinde devam eden sayı örüntüsüne ait ilişkileri nümerik ifadelerle açıklayarak "ikişer artarak gidiyor", "terimlere 2 ekleyerek diğer terimleri bulmalıyız" gibi açıklamaları kullanarak genel kuralı, sözel cümleler ile ifade etmiştir.

O₃, sorgulama temelli öğretim sürecinde arkadaşları ile tartışarak, genel terimi elde etmek ve sayısal ilişkilere odaklanmak yerine, örüntünün içerdiği ilişkileri fark etme ve gerekçelendirebilme becerisi kazanmıştır. Arkadaşlarının fark ettiği ortak özellik üzerine düşünüp alternatif yolları sorgulayarak örüntüye ait farklı yapı ve ilişkiler belirlemiştir. Ayrıca O₃, ders sürecinde cebirsel kuralı öğrencilere verilen bir kurala ait anlamlı bir örüntü problemi oluşturulması istenen Etkinlik 10 da oluşturduğu problemin bağlamını anlamlandırarak geçerli bir örüntü etkinliği oluşturabilmiştir. Ayrıca kurduğu probleme, örüntüye ait belirlediği ortak özellik üzerinden bir çözüm stratejisi geliştirebilmiştir.

Yarı Yapılandırılmış Mülakatlardan Elde Edilen Bulgular

101A: Cebirsel kuralı " $2n+3$ " olan bir örüntü üzerine düşünelim. Sence bu örüntüyü nasıl modelleyebiliriz?

112O₃: n yerine değer verdiğimizde terimler için sırasıyla 5, 7, 9, ... diye devam ediyor. Terim sayılarına ilişkin bir model oluşturabiliriz.

102A: Önündeki kâğıda bir model oluşturabilir misin?

Öğrenciye işlemleri için 3 ila 5 dakika aralığında süre verilir. Öğrencinin oluşturduğu model aşağıda görülmektedir.

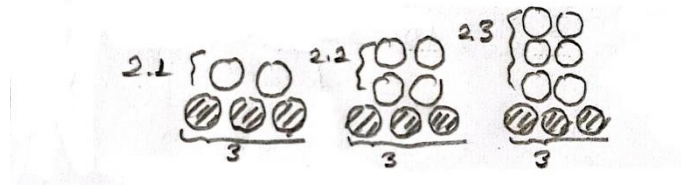


105A: Oluşturduğun modeli biraz açıklar mısın? Çemberleri yerleştirirken nelere dikkat ettin?

115O₃: Şimdi $2n+3$ genel kuralında $+3$ sabit terim olduğundan dolayı her adımda değişmeyen olarak kalacak. Diğer $2n$ de her bir terim için değişen kısımları ifade ediyor bana göre. Yani birinci terim için $2+3$, ikinci terim için $2.2+3$, üçüncü terim için $2.3+3$ şeklinde devam ediyor. Yani değişen $2n$.

106A: $2n$ oluşturduğun modelin hangi kısımlarını temsil ediyor peki? $+3$?

Öğrenci oluşturduğu model üzerinde genel kurala karşılık gelen yerleri gösterir.



116O₃: Bu taradığım çemberler sabit değişmeyenleri temsil ediyor yani +3'ü. Geriye kalan çemberler de hep ikili gruplar halinde yaptım. Mesela birinci terimde 1 tane ikili grup, ikinci terimde 2 tane ikili grup, üçüncü terimde 3 tane ikili grup oldu. 3 çember de hep sabit. n. terimde n tane ikili grup olacağından 2n, sabit değişmeyen çemberleri de ekleyince 2n+3 genel kuralı açığa çıkmış oluyor.

O₃, örüntünün değişen veya değişmeyen kısımlarına üzerinden bir ilişki kurmaya çalışmıştır. O₃'ün cebirsel kuralı verilen örüntüye uygun bir model oluşturabilmesi, oluşturduğu model üzerinde belirlediği ortak özellikleri örüntünün genel kuralıyla ilişkilendirebilmesi, problemin bağlamını anlamlandırması, öğrencinin düşünsel süreçlerini cebirsel genelleme bağlamında olgunlaştırdığını gösterir niteliktedir. Öğretim öncesinde terimler arası nümerik ilişkilere odaklanarak genel kuralı elde etmeye çalışan O₃, öğretim sonrasında örüntünün altında yatan cebirsel yapı ve ilişkileri analiz ederek genelleme sürecini tamamlamıştır. Tablo 24'te O₃'ün cebirsel düşünme süreçlerinde açığa çıkan değişimi gösteren genelleme türlerine ait frekans değerleri görülmektedir.

Tablo 24

O₃'ün Genelleme Türlerinde Açığa Çıkan Alt Kategoriler

Alt Kategoriler	Öğretim Öncesi Frekans	Öğretim Sonrası Frekans
Cebirsel Genelleme	0	10 (% 100)
Aritmetik Genelleme	5 (% 50)	0
Olgunlaşmamış Tümevarım	5 (% 50)	0

D₁'in Cebirsel Düşünme Süreçlerinin Değişimine İlişkin Bulgular

Düşük düzeyde akademik bir başarıya sahip olan D₁, sorgulama temelli öğretim öncesi uygulanan tüm etkinliklerde *olgunlaşmamış tümevarım* yaklaşımı sergilemiştir. Elde ettiği genel kuralları herhangi bir cebirsel nedene dayandırmadan rastgele bir şekilde tahmin yoluyla oluşturmuştur. Öğrencinin etkinliklerde uyguladığı yazılı açıklamalar incelendiğinde

problemin bağlamının dışında kalan ve belirli bir anlam taşımayan işlemler gerçekleştirdiği görülmektedir. Örneğin 3, 7, 11, 15, ... şeklinde devam eden bir sayı ya da şekil örüntüsünün genel terimini $7n$ olarak belirtmiştir. Öğrencinin elde ettiği genel kurala nasıl ulaştığına dair geçerli herhangi bir açıklama bulunmamaktadır. Öğretim sonrasında ise öğrencinin tüm etkinliklerde *aritmetik genelleme* gerçekleştirdiği bulgusuna ulaşılmıştır.

Aritmetik genelleme, cebirsel genellemeden farklı olarak verilen örüntünün tamamını incelemenin aksine belirli bir bölümünü analiz etmeye yöneliktir. Bu sebeple aritmetik genelleme süreci, cebirsel bir yapı taşımamaktadır. Örüntünün diğer terimlerine, verilen terimler arası artış miktarına odaklanılarak ulaşılmaktadır. D₁, öğretim sonrasında tüm etkinliklerde terimler arası ilişkiyi sayısal miktarlara odaklanarak sözel ifadeler kullanarak açıklamıştır. Örneğin 5, 9, 13, 17, ... şeklinde giden sayı örüntüsünün terimleri arasındaki artış miktarının 4 olduğunu belirleyerek diğer terimleri belirlediği artış miktarı üzerinden elde etmeye çalışmıştır. Bu kullanıma bir örnek olarak öğrencinin “*bu örüntüde sayılar dörder dörder artmıştır*” cevabı verilebilir.

Yarı Yapılandırılmış Mülakatlardan Elde Edilen Bulgular

97A: Mesela 2, 4, 6, 8, ... şeklinde devam eden bir sayı örüntüsü üzerine konuşacak olursak örüntünün ilk teriminde hangi sayı var?

75D₁: 2 sayısı var öğretmenim.

98A: İkinci teriminde peki?

76D₁: 4 var öğretmenim.

99A: Peki, örüntünün 6. teriminde hangi sayı olması gerektiğini nasıl bulabiliriz?

77D₁: İkişer ikişer artarak devam ediyor. Dördüncü sayı 8 olduğuna göre 2 ekleriz 10 olur bu beşinci aklımda tuttu. 10’a bir tane daha 2 eklerim 12 olur işte bu da altıncı sayı olur. 12’yi böyle buldum ben.

100A: 25. terimine nasıl ulaşabiliriz peki?

78D₁: Bu biraz zor olur eklemem. Çok uzun sürer öğretmenim. Ama yapabilirim biraz zaman vererseniz eğer. Aslında hep iki kat gidiyor sanki. Birin 2 katı 2 olmuş gibi, ondan 25’in katı 50 olabilir mi?

Öğrencinin yarı yapılandırılmış mülakat sürecindeki açıklamaları, yazılı açıklamalarında açığa çıkan değişimi kanıtlar niteliktedir. D_1 , verilen bir örüntünün terimleri arasında bulunan artış miktarını belirleyebilmiş ve diğer terimleri belirlediği miktar üzerinden elde edebilmiştir. Ayrıca terim ile terim sayısı arasında bir kat ilişkisi fark ederek bir ortak özellik belirleyebilmiştir. Bu bağlamda fark ettiği ortak özelliği diğer bir terime aktararak 25. terimi elde etmiştir. Ancak cebirsel bir yapı taşıyan genel kural oluşturamamıştır. Bu bağlamda öğretim öncesinde tüm etkinliklerde bir genelleme anlamı taşımayan olgunlaşmamış tümevarımlar gerçekleştiren D_1 'in öğretim sonrasında aritmetik genelleme gerçekleştirdiği bulgusuna ulaşılmıştır. Tablo 25'te D_1 'in açığa çıkardığı genelleme türlerine ait frekans değerleri görülmektedir.

Tablo 25

 D_1 'in Genelleme Türlerinde Açığa Çıkan Alt Kategoriler

Alt Kategoriler	Öğretim Öncesi Frekans	Öğretim Sonrası Frekans
Cebirsel Genelleme	-	-
Aritmetik Genelleme	0	10 (% 100)
Olgunlaşmamış Tümevarım	10 (% 100)	0

 D_2 'nin Cebirsel Düşünme Süreçlerinin Değişimine İlişkin Bulgular

Akademik açıdan düşük düzey başarıya sahip bir diğer öğrenci olan D_2 'nin öğretim öncesi etkinliklere verdiği yazılı yanıtlarda örüntünün altında yatan yapı ve ilişkileri belirleyemediği için *aritmetik genelleme* ve *olgunlaşmamış tümevarım* yaklaşımı sergilerken, öğretim sürecinde ve sonrasında uygulanan 10 örüntü etkinliğinin tamamında *cebirsel genelleme* gerçekleştirdiği belirlenmiştir. Yarı yapılandırılmış mülakat sürecindeki açıklamaları incelendiğinde öğrencinin cebirsel düşünme süreçlerinin değişimine ilişkin ortaya çıkan farklılığı destekler açıklamalar yaptığı görülmektedir.

Yarı Yapılandırılmış Mülakatlardan Elde Edilen Bulgular

96A: 2, 7, 12, 17, ... şeklinde devam eden bir sayı örüntüsü olduğunu varsayalım. Örüntünün genel kuralını nasıl elde edebiliriz, açıkla mısın?

100D₂: İlk odaklandığımda aklıma 5, 10, 15 diye devam etmesi geldi. Eğer 5, 10, 15 şeklinde gitseydi genel kural $5n$ olacaktı.

97A: Neden $5n$ olmak zorunda? Nasıl düşündüğünü gerekçelendirir misin?

101D₂: Çünkü 5, 10, 15 örüntüsünde her terim, terim sayısının 5 katı kadar. N bilinmeyenine adım sayısı dersek n . adımda $5n$ sayısı bulunmak zorunda. Ama bizim örüntümüz 5-3, 10-3, 15-3, 20-3, ... şeklinde devam ediyor. Yani 5.1-3, 5.2-3, 5.3-3 şeklinde...

98A: Düşüncenin doğru olduğundan emin misin?

102D₂: Evet eminim.

99A: Nasıl emin oluyorsun? Biraz daha açıklar mısın?

103D₂: Normalde 5, 10, 15 olarak gitseydi genel kural $5n$ olması gerekirken bizim terimlerimiz 3 eksiği kadar oluyor. Ondan genel terimin de 3 eksiği olacak. $5n-3$ bu örüntünün genel kuralı.

D₂, örüntünün genel kuralını nasıl elde ettiğini açıklarken örüntüye ait belirlediği yapı ve ilişkileri açıkça ifade etmektedir (101D₂). Öğrencinin bu açıklamaları cebirsel genelleme sürecinin “örüntüdeki ortaklığı anlama, yakalama veya idrak etme” bileşenini yansıtabildiğini göstermektedir. Ayrıca fark ettiği ortak özellik üzerinden bir hipotez geliştirerek hipotezi doğrultusunda cebirsel olarak anlamlı ve geçerli bir cebirsel kural elde etmektedir (103D₂). Bu bağlamda cebirsel genelleme sürecinin “örüntünün herhangi bir terimini doğrudan belirtmek için bir kural veya şema şekli belirtme” bileşenini de yansıtarak genelleme sürecini tamamlamaktadır. Tablo 26’da D₂’nin cebirsel düşünme süreçlerinde açığa çıkan değişimi gösteren genelleme türlerine ait frekans değerleri görülmektedir.

Tablo 26

D₂’nin Genelleme Türlerinde Açığa Çıkan Alt Kategoriler

Alt Kategoriler	Öğretim Öncesi Frekans	Öğretim Sonrası Frekans
Cebirsel Genelleme	-	10
Aritmetik Genelleme	4 (% 40)	0
Olgunlaşmamış Tümevarım	6 (% 60)	0

D₃'ün Cebirsel Düşünme Süreçlerinin Değişimine İlişkin Bulgular

Akademik olarak düşük düzeyde bir başarı grafiği olan D₃'ün öğretim öncesinde uygulanan etkinliklerin çoğunda *olgunlaşmamış tümevarım* yaklaşımı sergilediği bulgusuna ulaşılmıştır. D₃, etkinliklerin 9'unda olgunlaşmamış tümevarım gerçekleştirirken 1 etkinlikte aritmetik genelleme gerçekleştirmiştir. Öğretim sonrasında ise uygulanan tüm etkinliklerde cebirsel genelleme gerçekleştirdiği bulgusu tespit edilmiştir. D₃, öğretim öncesinde verilen örüntüye ait genel kuralı deneme-yanılma stratejisi kullanarak elde etmiştir. Örneğin 1, 6, 11, ... şeklinde devam eden sayı örüntüsünün genel kuralını artış miktarına odaklanarak “5n” olarak belirlemiş, sonrasında kuralı deneyerek yeniden şekillendirmiştir. Öğretim sonrasında D₃'ün uygulanan etkinliklerin tamamında örüntünün altında yatan yapı ve ilişkilere odaklanarak anlamlı cebirsel nedenlere dayanan açıklama ve gerekçelendirmeler yaptığı görülmektedir. Bu kullanıma bir örnek olarak öğrencinin yarı yapılandırılmış mülakat sürecinde ifade ettiği “*adım sayısının iki katı kadar yatay ve dikey grup var*”, “*her zaman baştaki ve sondaki sandalyeler sabit, ortada kalanlar adım sayısının 2 katı kadar var*” açıklamaları verilebilir.

Tablo 27’de D₃'ün cebirsel düşünme süreçlerinde açığa çıkan değişimi gösteren genelleme türlerine ait frekans değerleri görülmektedir.

Tablo 27

D₃'ün Genelleme Türlerinde Açığa Çıkan Alt Kategoriler

Alt Kategoriler	Öğretim Öncesi Frekans	Öğretim Sonrası Frekans
Cebirsel Genelleme	-	10
Aritmetik Genelleme	1 (% 40)	0
Olgunlaşmamış Tümevarım	9 (% 60)	0

BÖLÜM V

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez kapsamında sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretimin yedinci sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme süreçlerine etkisinin incelenmesi amaçlanmaktadır. Gerçekleştirilen araştırmada birbirinden farklı başarılarla sahip, aynı sınıf ortamında öğrenim gören 7. sınıf öğrencilerinin sorgulama temelli matematik öğretimi öncesi ve sonrasında cebirsel düşünme süreçlerinde oluşan değişim karşılaştırılmaktadır. Cebirsel düşünme süreçleri, farklı akademik başarıya sahip öğrencilerin etkinliklere verdiği yazılı cevaplar ile yarı yapılandırılmış mülakatlar doğrultusunda elde edilen bulgular ışığında incelenmektedir. Bu bölümde, araştırmanın alt problemlerine yanıt aranırken elde edilen bulgular ile birlikte tartışma ve yorumlara yer verilmekte ve alt problemler doğrultusunda ana probleme verilebilecek yanıtlar tartışılmaktadır. Araştırmanın sonuçları, öğrencileri değerlendirmekten ya da kesin yargılar açığa çıkarmaktan çok öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerinin gerçekleştirilen öğretim bağlamında nasıl değiştiğini incelemeye ve öğretimin niteliği üzerine odaklanmaktadır.

Araştırmanın ilk alt problemi, ‘‘Sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim öncesi öğrencilerin cebirsel düşünme süreçleri nasıldır?’’ şeklinde belirlenmiştir. Öğrencilerin cebirsel düşünme süreçleri, araştırmanın temel aldığı Radford (2008)’un cebirsel genelleme inşası kuramsal çerçevesi bağlamında incelenmiş ve analiz edilmiştir. Gerçekleştirilen sorgulama temelli öğretim öncesinde 7. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme süreçleri incelendiğinde öğrencilerin genel olarak olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı sergilediği tespit edilmiştir. Birkaç öğrenci cebirsel düşünme süreçlerini aritmetik genelleme bağlamında yapılandırırken cebirsel genelleme yaklaşımı sergileyen öğrenci bulunamamıştır. Bu öğrencilerden yalnızca Y_2 bir etkinlikte (Etkinlik 4), cebirsel genelleme sürecinin ‘‘örüntüdeki ortaklığı anlama, yakalama veya idrak etme’’ bileşenini yansıtabildiğini yüksek düzeyde göstermiştir. Ancak Y_2 , fark ettiği ortak özelliğe ilişkin bir hipotez geliştirememiş ve genelleme sürecini cebirsel genelleme bağlamında olgunlaştıramamıştır. Benzer şekilde yapılan araştırmalar incelendiğinde, öğrencilerin verilen bir sayı örüntüsüne ait terimler arası ilişkileri keşfedebiliyorken örüntüye ait kuralı cebirsel olarak ifade etmekte zorlandıkları gözlemlenmiştir (Hargreaves, Threlfall, Frobisher & ShorrocksTaylor, 1999; Orton & Orton, 1999; Stacey, 1989). Y_2 ’nin de sorgulama temelli öğretim öncesinde yazılı yanıtlarında fark ettiği ortaklığa yönelik cebirsel bir kural elde edememesi bu durumu destekler niteliktedir.

Araştırma bulguları, öğrencilerin öğretim öncesinde örüntülerin altında yatan yapı ve ilişkileri, nümerik ifadeler kullanarak açıkladıklarını göstermektedir. Öğrencilerin ardışık terimler arası farkı inceleme ve bu fark özelinde diğer terimleri elde etmeye çalışma, ardışık terimler arası farkın yapısını cebirsel ilişkilere odaklanmadan analiz etme, şekil veya tablo olarak sunulan örüntüleri sayı örüntüsüne dönüştürme gibi stratejiler kullandıkları görülmüştür. Öğrencilerin düşünsel süreçlerini cebirsel genelleme bağlamında yapılandırmalarına engel olan stratejilerden biri, ardışık terimler arası farkı tespit ederek bu farkı, bilinmeyen katsayısı olarak kullanarak bir cebirsel kural oluşturma eğilimi göstermeleridir. Bu bulgu Radford (2008)'in çalışmasında elde ettiği sonuçlarla paralellik göstermektedir. Radford (2008) araştırmasında, fark edilen ortak özellik doğrultusunda tümevarım yoluyla ulaşılan cebirsel kuralın basit tümevarımlar sonucu elde edildiğini ifade etmiştir. Stacey (1989) ve Carraher ve arkadaşları (2008) da ardışık terimler arası farkın elde edilerek bilinmeyen ile çarpılmasının öğrencilerin genelleme yapma sürecinde sıklıkla kullandıkları bir yöntem olduğunu ifade ederek benzer bir sonuç elde etmişlerdir.

Radford (2008) açıkladığı çerçevesinde, bu şekilde bir strateji benimseyerek genel kuralı elde etme ile genelleme yapma arasındaki farkın önemini vurgulamaktadır. Olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı, bir örüntünün içerdiği yapı ve ilişkileri cebirsel nedenlere dayandırmadan deneme-yanılma veya tahmin gibi stratejiler benimsenerek gerçekleştirilmektedir. Bu noktada sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim öncesinde öğrencilerin düşünsel süreçlerinde cebirsel düşünmenin varlığına rastlanmadığı söylenebilmektedir. Öğretim öncesi uygulanan etkinliklerde öğrencilerin ortak olarak benimsediği bir diğer düşünme şekli ise örüntüde fark edilen ortak özelliği sözel olarak ifade etme şeklindedir. Öğrenciler terimler arası ilişkileri nümerik veriler dahilinde analiz ederek aritmetik genelleme yaklaşımı sergilemişlerdir. Benzer bir bulgu Kama (2020)'nin çalışmasından elde edilmiştir. Farklı kademelerde öğrenim gören toplam 14 altıncı, yedinci ve sekizinci sınıf öğrencilerinin genelleme süreçlerini incelemeye yönelik örüntü testi uygulayan araştırmacı, öğrencilerin örüntünün diğer terimlerini elde etmek için en çok aritmetik genelleme yaklaşımı kullandıklarını belirtmiştir. Öğrencilerin bu şekilde stratejiler benimsemelerinin sebebi, örüntünün altında yatan ilişkileri fark etseler bile cebirsel olarak nasıl ifade edeceklerini bilmemelerinden kaynaklanabilir. Diğer bir deyişle öğrenciler, örüntünün içerdiği yapı ve ilişkileri cebirsel nedenlere odaklanarak genel terimi elde etmekle tahmin, deneme-yanılma veya terimler arası ortaklığı sözel ifadeler kullanarak açıklama arasındaki farkı idrak edememektedirler.

Araştırmanın ikinci alt problemi, ‘‘Sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim sürecinde hangi sosyo-matematiksel norm ve beceriler gözlemlenmiştir?’’ şeklinde belirlenmiştir. Öğretim sürecinde ‘‘kabul edilebilir matematiksel açıklamalar yapma (N₁)’’, ‘‘ farklı matematiksel bir çözüm bulma ve neden farklı olduğunu gerekçeleriyle açıklama (N₂)’’, ‘‘açıklamalarda matematiksel örüntü ve ilişkileri kullanma (N₃)’’, ‘‘ öğrenme ortamında açığa çıkan matematiksel bir açıklamaya neden katılmadığını gerekçeleriyle ifade etmek (N₄)’’ ve ‘‘matematiksel bir açıklama anlaşılmadığında arkadaşına veya öğretmenine sorma (N₅)’’ olmak üzere sorgulama temelli öğretim ile desteklenerek sunulan beş farklı sosyo-matematiksel norm ve becerinin sınıf tarafından müşterek bir anlayışla benimsendiği tespit edilmiştir. Sorgulama temelli öğretim sürecinde açığa çıkan sınıf içi tartışma ve diyaloglar ile öğretime dahil edilen normların frekans değerleri incelendiğinde, öğrencilerin öğretim başında belirlenen normları kabul etmekte zorlandıkları tespit edilmiştir. Öğrenciler verilen örüntülere ait cebirsel yapı ve ilişkileri analiz ederken kabul edilebilir açıklamalar yapmakta zorlanmışlardır. Öğrencilerin matematiksel çözümlerini açıklama, alternatif stratejiler geliştirme, matematiksel örüntü ve ilişkileri analiz etme, açığa çıkan düşünceleri sorgulama gibi düşünsel süreçlere odaklanmaktan çok cevaplarının doğru ya da yanlış olup olmadığıyla ilgilendikleri görülmüştür.

Araştırma bulguları, öğretime entegre edilen normların öğretim süreci boyunca eş zamanlı bir şekilde sınıf tarafından benimsendiğini göstermektedir. Benzer bir şekilde Cobb ve Yackel (1996) araştırmalarında ikinci sınıf öğrencilerinin süreç içerisinde matematiksel açıklamalarının daha kavramsal ve kabul edilebilir hale geldiği bulgusunu elde etmiştir. Cobb ve Yackel (1996) öğretim sürecinde belirlenen normların açığa çıkmasının ve geliştirilmesinin belirli bir süreç dahilinde sınıf tarafından ortak bir anlayış ile olgunlaştırıldığını ifade etmektedir. Bu bağlamda öğretim sürecinde öğrenciler sınıf içi tartışmalar yoluyla düşüncelerini açıklamaya, alternatif yolları sorgulamaya ve açığa çıkan matematiksel ifadeleri kendi düşünsel süzgeçlerinden geçirerek anlamlandırmaya çalışmışlardır. Araştırma sonuçlarına göre ilgili alt problem ışığında elde edilen bir diğer bulgu ise her bir normun diğer bir sosyo-matematiksel normun açığa çıkmasına katkıda bulunduğu elde edilmiştir. Öğrenciler matematiksel çözümlerinin neden farklı olduğuna dair gerekçelendirmeler yaparken (N₂) aynı zamanda açıklamalarının kabul edilebilir olması için (N₁) açıklamalarını derinleştirerek sorgulama gerçekleştirmişlerdir. Bu bağlamda sınıf tarafından benimsenen bir normun başka bir sosyo-matematiksel normun oluşmasına ortam hazırladığı yorumu yapılabilmektedir. Benzer bir bulgu McClain ve Cobb (2001) 4 ay boyunca 1. sınıf öğrencileri ile sosyo-matematiksel normların ortaya çıkışını inceledikleri çalışmalarında elde edilmiştir. Öğrenme

ortamında oluşan bir sınıf tartışmasında, bir sosyo-matematiksel normdan başka bir normun açığa çıkmasına kadar geçen süreçteki norm oluşum sürecini analiz etmişlerdir. Bu bağlamda, bir sosyo-matematiksel normun oluşmasının başka sosyo-matematiksel normların doğmasına temel oluşturduğu tespit edilmiştir. Bu noktada McClain ve Cobb (2001)'un bulguları mevcut çalışmanın sonuçları ile paralellik gösterdiği görülmektedir.

Araştırmanın bulguları kapsamında sorgulama temelli öğrenme ortamında, öğrencilerin düşüncelerini açıklamakta, rahat ve baskı altında hissetmedikleri ve hata yapmaktan çekinmedikleri görülmektedir. Bu noktada düşük bir akademik başarıya sahip olan D₂, verilen bir örüntüye ilişkin yapı ve ilişkileri incelemeye çalışırken zayıf düzeyde açıklamalar yapmasına rağmen çözüme ulaşmaya ve düşüncesini gerekçelendirmeye çalışmıştır. Bu durum öğrenme ortamında açığa çıkan düşüncenin diğer öğrenciler tarafından sorgulanmasına fırsat tanıyarak farklı matematiksel düşüncelerin açığa çıkmasını desteklemiştir. Benzer şekilde Senger (2014) çalışmasında, sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş teknoloji kullanılarak oluşturulmuş öğrenme ortamının matematiksel bir kavramın öğrenimine etkisini incelemiştir. 5 hafta boyunca 48 altıncı sınıf öğrencisiyle gerçekleştirilen çalışmada, ‘‘hata yapmaktan çekinmeden düşüncelerini ifade edebilme ve matematiksel açıklamalar yapabilme’’ normunun yüksek düzeyde açığa çıktığı elde edilmiştir. Ayrıca araştırmada, öğrencilerin matematiksel açıklamaları sorgulama yoluyla öğrenilen bilişsel kavrama ilişkin matematiksel düşünme becerilerini geliştirdiği tespit edilmiştir. Sonuçlar, farklı matematiksel fikirleri sorgulamanın, öğrencilerin cebirsel anlamda kendi düşünsel süreçlerinin farkında olmasına ve örüntü konusu özelinde kavramsal anlayış oluşturmalarına fırsat tanıdığını göstermektedir.

Araştırmanın üçüncü alt problemi, ‘‘Sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim sonrasında öğrencilerin cebirsel düşünme süreçleri nasıldır?’’ şeklinde belirlenmiştir. Sorgulama temelli öğretim sonrası öğrencilerin cebirsel düşünme süreçleri, araştırmanın kuramsal olarak temel aldığı Radford (2008)'un cebirsel genelleme inşası çerçevesi bağlamında incelenmiştir. Gerçekleştirilen öğretim sonrasında 7. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme süreçleri incelendiğinde öğrencilerin yüksek düzeyde cebirsel genelleme gerçekleştirdiği tespit edilmiştir. Uygulanan etkinliklerde öğrenciler, örüntüye ait ortak özellikleri analiz ederken modeli etkili bir şekilde kullanarak anlamlı ve geçerli açıklamalarda bulunmuşlardır. Bu noktada sorgulama temelli öğretim sürecinde öğrencileri örüntünün altında yatan cebirsel ilişkileri fark etmelerine ve sorgulamalarına yönlendirecek sınıf içi tartışma ortamları yaratılmıştır. Bu durum her bir öğrencinin verilen bir örüntüye ait neyin farkında olduğunu ve neye gereksinim duyduğunu sorgulamalarını sağlayarak

genellemeye ulaşmalarına yardımcı olmuştur. Elde edilen bu bulgu Warren (2006)'ın araştırması ile tutarlılık göstermektedir. Warren (2006), öğrenme ortamında açığa çıkan fikirleri sorgulayıcı bir sınıf atmosferi oluşturulmasının öğrencilerin genelleme yapabilme yeteneklerini geliştirdiğini ifade etmiştir. Bu bağlamda öğrenciler örüntüye ait bilgileri diyagram, şekil, tablo ve benzeri kişisel matematiksel stratejilerle işleyerek kendi zihinlerinde genellemeye ulaşmalarını sağlayan matematiksel yapılaraya dönüştürmeye çalışmışlardır. Öğrencilerin çoğu örüntüye ait yapı ve ilişkileri belirlemede her bir terimde ortak olarak değişen veya değişmeyen kısımlara odaklanarak terim ile adım sayısı arasındaki ilişkiyi incelerken, ardışık terimler arası sabit farka odaklanan öğrenci sayısının oldukça az olduğu tespit edilmiştir. Benzer bir bulgu Aslan (2011)'ın 13 yedinci sınıf öğrencisi ile örüntü kavramının öğretime yönelik bir ders planı tasarladığı çalışmasında elde edilmiştir. Planlanan öğretim öncesi öğrenciler örüntüye ait ortak özellikleri terimler arası nümerik ilişkilere odaklanarak açıklarken öğretim sonrasında örüntünün altında yatan cebirsel ilişkilere odaklanarak bir ortak özellik belirleme çabası gösterdikleri tespit edilmiştir. Bu bağlamda literatürden elde edilen bulguların mevcut araştırmanın sonuçlarıyla tutarlılık gösterdiği görölmektedir.

Araştırma bulguları kapsamında, sorgulama temelli öğretim sonrasında olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı sergileyen öğrenci bulunamamıştır. Bu öğrencilerden yalnızca akademik olarak düşük düzeyde bir başarı grafiğine sahip olan D₁'in, öğretim sonrasında uygulanan tüm etkinliklerde aritmetik genelleme gerçekleştirdiğine ulaşılmıştır. D₁, cebirsel genelleme sürecinin temeli olan “örüntüdeki ortaklığı anlama, yakalama veya idrak etme” bileşenini yüksek düzeyde açığa çıkarabildiğini yazılı çözümlerinde ve mülakat açıklamalarında göstermiştir. Ancak belirlediği ortak özellikleri nümerik ilişkilere odaklanarak sözel ifadeler kullanarak açıklamıştır. Radford (2008)'a göre öğrenciler genelleme süreçlerini yapılandırırken örüntünün terimlerine ait belirlenen ortak yapı ve ilişkilere yönelik cebirsel bir kural elde edemeyebilirler. Bu noktada genelleme sürecinin varlığından söz edilebilse de öğrenciler genellemelerini, aritmetik işlem becerisi gerektiren ve nümerik ilişkiler üzerinden ifade edilen stratejiler geliştirirler. D₁'in benimsediği stratejiler, aritmetik genelleme gerçekleştiren öğrencilerin kullandığı stratejiler arasında yer almaktadır. Açığa çıkan bu bulgu, Lannin, Barker ve Townsend (2006)'ında ifade ettiği gibi öğrencilerin bilişsel olarak hazırbulunuşluk seviyelerinden, öğrencinin önceki deneyimlerinden, akademik öz geçmişinden veya Yeap ve Kaur (2008)'in değindiği gibi matematiksel yapı ve ilişkileri görebilme yeteneğinden kaynaklanabilmektedir.

Araştırmanın dördüncü alt problemi, ‘‘Sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim öncesi ve sonrasında öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerinde farklılık var mıdır?’’ şeklinde belirlenmiştir. Öğretim öncesi ve sonrasında yedinci sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme süreçleri örüntü genelleme yapma becerileri bağlamında analiz edilmiştir. Radford (2008), öğrencilerin genelleme süreçlerini belirli kategoriler altında incelemiştir. Bu bağlamda sorgulama temelli öğretim öncesi uygulanan etkinliklere ilişkin yazılı yanıtlarında öğrencilerin %75,5 oranında olgunlaşmamış tümevarım yaklaşımı sergilediği tespit edilmiştir. Öğretim öncesi genelleme sürecini cebirsel genelleme bağlamında yapılandıran öğrenci verisine ulaşılmazken öğretim sonrasında ise öğrencilerin %88,8 oranında cebirsel genelleme gerçekleştirdiği bulgusu elde edilmiştir. Öğrenciler, öğretim öncesi verilen bir örüntüye ait elde ettikleri genel kuralı cebirsel nedenlere dayandırmadan açıklarken öğretim sonrasında örüntünün altında yatan ortak yapı ve ilişkilere ait anlamlı ve geçerli cebirsel bir kural elde ederek genelleme sürecini tamamlamışlardır. Elde edilen bulgular, temelinde sorgulama yatan bir öğretim sürecinin ve bu doğrultuda oluşturulan öğrenme ortamının; öğrencilerin örüntünün altında yatan ilişkileri sorgulamasında, cebirsel olarak bir genelleme yapabilmesinde, verilen örüntüyü cebirsel bir kural elde etme yönünde etkili kullanabilmesinde gelişim sağladığı tespit edilmiştir.

Araştırmanın önemli bulgularından bir diğeri ise, öğrencilerin sorgulama temelli öğretim sonrasında etkinliklerde bulunan yazılı yanıtları ve mülakat sürecindeki açıklamalarında düşünsel süreçlerine ilişkin anlamlı ve geçerli söylemlerde bulunmalarıdır. Bu şekilde bir sonuç elde edilmesinin sebebi, öğrencilerin öğretim sürecinde sorgulayarak örüntü kavramına dair kendi kavramsal anlayışlarını oluşturmaya çalışmalarının bir durumu gerekçelendirebilme ve ifade edebilme becerilerine katkı sağladığından kaynaklanabilir. Öğrencinin sorgulama temelli öğrenme ortamında kendi düşüncesini gerekçelendirmesi, farklı matematiksel çözümleri sorgulayarak zihninde yapılandırmaya çalışmasına ve bu doğrultuda açığa çıkan matematiksel fikirleri kendisinin içselleştirmesine sebep olmaktadır. Bu noktada öğrencinin genelleme sürecine ait doğru ya da yanlış bir strateji benimsemesi önem arz etmemektedir. Sorgulama temelli öğrenme ortamında öğrenciler neyin kabul edilebilir, neyin kabul edilemez olduğunu kendileri bir sorgulama süreci ile düşünsel süzgeçlerinden geçirerek karar verirler. Daha açık bir ifadeyle, sınıf tarafından müşterek bir anlayışla açığa çıkarılan matematiksel normlar, öğrencilerin sorgulamalarına ve düşünmelerine fırsat oluşturmaktadır. Öğrencilerin birbirlerinin düşünsel süreçlerini sorgulaması ve analiz etmesine imkân sağlayarak öğrenme ortamında açığa çıkan sosyo-matematiksel normlar genelleme yapmayı sağlama yönünde kullanıldığında öğrencilerin cebirsel düşünmelerinin gelişimine hizmet

edebilir. Bu duruma vurgu yapan Aslan (2010), öğrencilerin genelleme yapma becerilerini etkileyen bir diğer faktörün grup içi tartışmalar yoluyla oluşturulan ve öğrencileri sorgulamaya yönlendiren soruların varlığından kaynaklanabileceğini ifade etmiştir. Gerçekleştirilen öğretim öncesi öğrenciler düşünsel süreçlerini basit tümevarımlar yoluyla olgunlaştırırken öğretim sonrası cebirsel olarak derin ilişkiler barındıran bir genel kural elde ederek cebirsel genelleme sürecini tamamlamışlardır. Araştırmanın sonuçları bağlamında, sorgulama temelli öğretimin öğrencilerin düşünme becerilerine mevcut araştırma özelinde cebirsel düşünme becerileri üzerinde olumlu bir etki oluşturduğu görülmüştür. Araştırmada açığa çıkan bu durum ilgili alan yazında bulunan araştırmalar ile benzerlik göstermektedir (Tatar, 2006; Türkmen, 2009; Sağlamer-Yazgan, 2013; Sakar, 2010; Çelik, 2012; Akpullukçu, 2013; Sarı, Bakır-Güven, 2013; Kandil, 2016; Taylor & Bilbrey, 2012; Johnston, 2014; Abdi, 2014; Ferguson, 2010; Maxwell, Lambeth & Cox, 2015). Sonuç olarak yapılan araştırmalar ışında, düşünme becerilerini geliştirdiği göz önünde bulundurulan sorgulama temelli öğretim yaklaşımının cebirsel düşünme ve genelleme yapma becerileri özelinde etkili bir yöntem olduğu kabul edilmektedir.

Sorgulama temelli matematik öğretiminin öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerini olumlu yönde etkilemesinin çeşitli olası nedenleri olabilir. Matematik öğretim programları öğrencilerin sorgulama yapabilecekleri, ortaya çıkan tartışmalar vasıtasıyla gerekçelendirmelerde bulunabilecekleri, matematiksel düşüncelerini rahat bir şekilde ifade edebilmelerine imkân verecek şekilde öğrenme ortamlarının düzenlenmesi gerektiğine vurgu yapmaktadır (MEB, 2018). Bu doğrultuda gerçekleştirilen öğretimlerde öğrenciler, öğrenme ortamının aktif bir nesnesi konumundadır. Bu durum sorgulama temelli öğretimin doğasından kaynaklanmaktadır. Çünkü sorgulama yaklaşımı öğrencilerin analiz etme, gözlem yapma, problem üzerine düşünme, soru sorma, alternatif yolları tartışma, varsayımda bulunma, genelleme yapma, gerekçelendirerek elde ettiği bulguları sunma ve bilgiyi önceki bilgileriyle ilişkilendirerek yeniden oluşturmayı gerektirir (Artigue & Blomhoj, 2013). Bu şekilde, öğrencilerin ezber veya deneme-yanılma yoluyla genelleme yapmaya çalışmaktan ziyade, öğretim sırasında açığa çıkan matematiksel bir fikri zihinlerinde sorgulamaları öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerinin gelişimine katkı sağlamış olabilir. Buna ek olarak sorgulama temelli öğretimin gerektirdiği gibi öğrencilerden ders esnasında matematiksel çözümlerini açıklamaları, anlamlı gerekçeler sunarak açıklamalarını derinleştirmeleri, arkadaşlarının açıklamaları ışında kendi açıklamalarını yeniden gözden geçirmeleri, tartışarak ortak bir anlayış geliştirmeleri beklenmiştir. Sınıfça müşterek bir şekilde geliştirilen bu anlayış desteklenen sosyo-matematiksel normların sınıf tarafından eş zamanlı bir şekilde kabul

edilmesine neden olmuştur. Öğrencilerin ders esnasında aktif konumda bulunması, öğrenciler arası iletişimin artarak farklı matematiksel fikirlerin açığa çıkmasını desteklemiştir. Matematiksel gerekçeler kullanarak öğrenciler tarafından bir tartışma ortamının oluşturulması cebirsel anlamda düşünsel süreçlerinin gelişimine katkıda bulunmuş olabilir.

Elde edilen bulguların yanı sıra, sorgulama temelli öğretim ile iç içe oldukları savunulan gerçekçi matematik eğitimi yaklaşımı (Artigue & Blomhoj, 2013) da mevcut araştırmanın bir diğer boyutudur. Literatür de yapılan çalışmalar incelendiğinde, problem durumlarının gerçek yaşam üzerinden aktarılmasının temeli sorgulama olan bir öğretim de etkili bir yöntem olduğu görülmektedir (Kandil, 2016). Böylece, öğrencilerden doğrudan bir sayı örüntüsüne ait cebirsel bir kural elde etmelerini istemek yerine, örüntüler günlük hayat problemi bağlamında sunularak bu doğrultuda genel bir kural oluşturma ihtiyacı duymaları sağlanmıştır. Bundan dolayı araştırmada, etkinlikler günlük hayat durumları üzerine kurularak sunulmuştur. Tandoğan ve Akınoğlu (2006), gerçek yaşam durumu bağlamında sunulan problemlerin, öğrencilerin zihinsel süreçlerinin daha aktif olmasını sağlayarak matematiksel bir durumu sorgulamalarını kolaylaştırdığını ifade etmiştir. Artigue ve Blomhoj (2013) benzer bir açıklamada bulunarak gerçek yaşam durumları üzerine kurulmuş problem durumlarının matematiksel sorgulamayı desteklediğini belirtmişlerdir.

Bu araştırmada, sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretimin yedinci sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme süreçlerine etkisi incelenmiştir. Araştırma bulguları kapsamında öğrencilerin cebirsel düşünme süreçleri ‘‘Cebirsel Örüntü Genellemesinin İnşası (Radford, 2008)’’ çerçevesi özelinde analiz edilmiştir. Araştırma sonuçlarının geçerliliğini arttırmak için farklı öğrenme alanları ve sınıf düzeylerinde sorgulama temelli matematik öğretiminin etkililiği test edilebilir.

Ek olarak bu araştırmada, öğretim programında bulunan ilgili kazanım doğrultusunda (M.7.2.1.3. Sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimlerini bulur) ardışık terimler arası farkı sabit olan örüntü etkinlikleri ile sınırlı kalmıştır. Öğrencilere terimler arası farkı sabit olmayan bir örüntü etkinliği sunulması örüntüye ait nümerik ilişkilerden uzaklaşarak alternatif yolları sorgulamaları konusunda yönlendirici olabilir. Bu nedenle, gelecek araştırmalarda, genelleme etkinlikleri sabit artış miktarı içeren terimler ile sınırlı olmayabilir. Bu bağlamda ardışık terimler arası farkı sabit olmayan örüntü etkinlikleri (1, 4, 9, 16, ...), öğrencileri örüntüye ait yinelemeli ilişkileri kullanma konusunda caydırıcı olabilir.

KAYNAKÇA

- Abdelraheem, A.Y., & Asan, A. (2006). The effectiveness of inquiry-based technology enhanced collaborative learning environment. *International Journal of Technology in Teaching and Learning*, 2(2), 65-87.
- Akdur, T. E. ve Kurbanoglu, H. M. (2014, Eylül). *Scientix Projesi: Sorgulamaya dayalı fen ve matematik eğitimi* [Öz]. 11. Ulusal Fen ve Matematik Eğitimi Kongresinde sunulan bildiri, Çukurova Üniversitesi, Adana. Erişim adresi: <http://aves.cu.edu.tr/YayinGoster.aspx?ID=2610&NO=17>.
- Akkan, Y. (2016). Cebirsel Düşünme. E. Bingölbali, S. Arslan, ve İ. Zembat (Eds). Matematik eğitiminde teoriler içinde (s. 43-63). Ankara: Pegem Akademi Yayınları.
- Akkan, Y. ve Çakiroğlu, Ü. (2012). Doğrusal ve İkinci Dereceden Örüntüleri Genelleştirme Stratejileri: 6-8. Sınıf Öğrencilerinin Karşılaştırılması. *Eğitim ve Bilim*, 37 (165), 104-120.
- Akkaya, R., & Durmuş, S. (2006). İlköğretim 6-8. Sınıf Öğrencilerinin Cebir Öğrenme Alanındaki Kavram Yanılgıları. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 31(31), 1-12.
- Aktaş- Arnas. Y. (2013). *Okul öncesi dönemde matematik eğitimi*. (2.Baskı). Ankara: Vize
- Akyüz, D. (2014). Çember özelliklerini öğretmeyi amaçlayan teknoloji ve sorgulama tabanlı bir sınıfta oluşan sosyomatematiksel normların incelenmesi. *Eğitim ve Bilim*, 175 58-72.
- Altıparmak, K. ve Öziş, T. (2005). Matematiksel İspat ve Matematiksel Muhakemenin Gelişimi Üzerine Bir İnceleme, *Ege Eğitim Dergisi*, 6 (1), 25- 37.
- Altunışık, R., Coşkun, R., Bayraktaroğlu, S., ve Yıldırım, E. (2010). Sosyal Bilimlerde Araştırma Yöntemleri SPSS Uygulamalı (6. Baskı). Sakarya: Sakarya Yayıncılık.
- Amit, M., & Neria, D. (2008). Rising to challenge: Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM*, 40, 111-129.
- Arabacı, N. (2018). The effects of mathematical tasks on the seventh grade students' algebraic thinking and learning. (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Boğaziçi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

- Armstrong, B. (1995). Teaching patterns, relationships, and multiplication as worthwhile mathematical tasks. *Teaching Children Mathematics*, 1(7), 446-450.
- Artigue, M., & Baptist, P. (2012). Inquiry in mathematics education (Resources for implementing inquiry in science and in mathematics at school). Retrieved from <http://www.fibonacci-project.eu/>.
- Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 45:797-810.
- Aslan, R. (2011). *Örüntü kavramına ilişkin öğrenci güçlüklerini gidermeye yönelik bir ders tasarımı*. (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- Aulls, M. W. ve Shore, B. M. (2008). *Inquiry in education: The conceptual foundations for research as a curricular imperative*. New York: Erlbaum.
- Baki, A. (2008). Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi. Harf eğitim yayıncılığı.
- Bal İncebacak, B. (2019). *Sorgulama Temelli Öğretimin 4. Sınıf Öğrencilerinin Kesir Dilini Kullanma Becerilerine Ve Akademik Başarılarına Etkisi*. (Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü). Yüksek Öğretim Kurulu tez merkezi veri tabanından erişildi (600095).
- Bal İncebacak, B., & Ersoy, E. (2019). Sorgulama Temelli Öğretim Yaklaşımıyla Matematik Dersine Yönelik Plan Örneği Uygulaması. *Turkish Journal of Primary Education*, 4(1), 15-39.
- Barrow, L. H. (2006). A brief history of inquiry: From dewey to standards. *Journal of Science Teacher Education*, 17(3), 265-278.
- Baştürk Şahin, B. N., Şahin, G., & Tapan Broutin, M. S. (2017). Didaktik Durumlar Teorisi Işığında Asal Sayılar Kavramının Öğretimi: Bir Eylem Araştırması. *Necatibey Faculty of Education Electronic Journal of Science and Mathematics Education*, 11(2), 156-171.
- Baxter, P. ve Jack, S. (2008). Qualitative case study methodology: Study design and implementation for novice researchers. *The Qualitative Report*, 13(4), 544-559. Retrieved from <http://www.nova.edu/ssss/QR/QR13-4/baxter.pdf>

- Berg, B. L. (2001). *Qualitative Research Methods for the Social Sciences* (4th ed.). Boston: Allyn and Bacon.
- Bishop, J. W. (1997). *Middle school students' understanding of mathematical patterns and their symbolic representations*. Annual Meeting of the American Educational Research Association, Chicago.
- Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability* (formerly: *Journal of Personnel Evaluation in Education*), 21(1), 5-31.
- Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for research in mathematics education*, 36(5), 412-446.
- Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., & Kim, J. S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(1), 39-87.
- Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2006). What's all the fuss about competencies?. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education*. (pp. 45-56). New York: Springer.
- Blum, W., Galbraith, P., Henn, H.-W., & Niss, M. (Eds.). (2007). *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study* (pp. 3–32). New York: Springer.
- Booth, L. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford (Ed.). *The ideas of algebra, K-12* (pp. 20-32). Reston, VA: NCTM.
- Bracey, G. W. (1991-1998). Why Can't They Be Like We Were? *Phi Delta Kappan* (Oct.), pp. 104-117, annual Bracey Report on the Condition of American Education, 1992- 1998.
- Brickman, P., Gormally, C., Armstrong, N., & Hallar, B. (2009). Effects of inquiry-based learning on students' science literacy skills and confidence. *International Journal for the Scholarship of Teaching and Learning*, 3 (2), 1-22.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer.
- Büyüköztürk, Ş. (2009). *Sosyal Bilimler İçin Veri Analizi El Kitabı*. Ankara: Pegem Akademi.

- Büyüköztürk, Ş., Çakmak, E. K., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş., & Demirel, F. (2008). Bilimsel araştırma yöntemleri. Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.
- Büyüköztürk, Ş., Çakmak, E. K., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş., & Demirel, F. (2009). Bilimsel araştırma yöntemleri (4. baskı). Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.
- Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, 40(1), 3-22.
- Chapman, O. (2011). Elementary school teachers' growth in inquiry-based teaching of mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 43(6), 951-963.
- Chin C. ve Osborne J., (2008). Students' Questions: A Potential Resource For Teaching And Learning Science, *Studies In Science Education*, 44:1, 1-39, DOI: 10.1080/03057260701828101
- Clements, D. H. (2007). Curriculum research: Toward a framework for Research-Based Curricula. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1, 35-70.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2008). Experimental evaluation of the effects of a research-based preschool mathematics curriculum. *American educational research journal*, 45(2), 443-494.
- Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., & McNeal, B. (1992). Characteristics of classroom mathematics traditions: An interactional analysis. *American Educational Research Journal*, 29, 573-604.
- Cobb, P., & Bauersfeld, H. (Eds.). (1995). Emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Cobb, P., Gravemeijer, K., Yackel, E., McClain, K., & Whitenack, J. (1997). Mathematizing and symbolizing: The emergence of chains of signification in one first-grade classroom. In D. Kirshner, & J.A. Whitson (Eds.), *Situated cognition, social, semiotic, and psychological perspectives* (pp. 151-233). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *The Journal of the Learning Sciences*, 10(1&2), 113-163.

- Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 458-477.
- Cobb, P., McClain, K., Stephan, M., & Gravemeijer, K. (2011). Participating in classroom mathematical practices. *A journey in mathematics education research*, pp.117-163.
- Cobb, P., Wood, T., & Yackel, E. (1990). *Classrooms as learning environments for teachers and researchers*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Creswell, J. W. (2014). *Qualitative, quantitative and mixed methods approaches*. London: Sage.
- Çayır, M. Y. ve Akyüz, G. (2015). 9. sınıf öğrencilerinin örüntü genelleme problemlerini çözme stratejilerinin belirlenmesi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 9(2).
- Çelik, D., (2016). *Matematik eğitiminde teoriler* (1. baskı). Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.
- Çepni, S. (2012). *Araştırma ve Proje Çalışmalarına Giriş*, Geliştirilmiş 6. Baskı, Trabzon: Celepler Matbaacılık.
- Çoban, Ö. (2020). *10. sınıf öğrencilerinin özel dörtgenlerin hiyerarşik ilişki kurma sürecinde sorgulamalarının incelenmesi*. (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- Davey, L. (1991). The Application of Case Study Evaluations, *Practical Assesment, Research & Evaluation*, ISSN: 1531-7714.
- Davis, D. (2018). Inquiry-based learning in a first-year honors course. *PRIMUS*, 28(5),387-408. Erişim adresi: <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/10511970.2017.1386746>.
- Dede, Y. ve Argün, Z. (2003). Cebir, öğrencilere niçin zor gelmektedir.Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 24(24), 180-185.
- Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (1994). *The Sage handbook of qualitative research*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Deskins, L. (2012). Inquiry studies: Needed skills. *School Library Monthly*, 28(5), 20-23.

- Dewey J. (1910) How we think. D.C. Heath, Lexington, MA. Reprinted in 1991 by Prometheus Books, Buffalo, NY.
- Dewey, J. (1938). *Logic: The theory of inquiry*. New York: Holt.
- Dindyal, J. (2003). Algebraic Thinking in Geometry at High School Level. Unpublished Doctoral Dissertations, Illinois State University.
- Doerr, H.M. (2006). Examining the tasks of teaching when using students' mathematical thinking. *Educational Studies in Mathematics*. 62. 3-24
- Doolittle, P. E., & Camp, W. G. (1999). Constructivism: The career and technical education perspective. *Journal of Career and Technical Education*, 16(1). <http://dx.doi.org/10.21061/jcte.v16i1.706>.
- Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization. In. A. Bishop & S. Mellin-Olsen (Ed.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching*, (pp. 63-85). Netherlands: Kluwer.
- Driscoll, M. J. (1999). The Fostering Algebraic Thinking Toolkit: Asking questions of students.
- Ekiz, D. (2003). Eğitimde araştırma yöntem ve metodlarına giriş: Nitel, nicel ve eleştirel kuram metodolojileri. Ankara: Anı Yayıncılık.
- Elder, L. and Paul, R. (2003). Critical thinking: Teaching students how to study and learn. *Journal of Developmental Education*, 27 (2), 36-38.
- English, L. D., & Warren, E. A. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The mathematics teacher*, 91(2), 166-170.
- Erlandson, D. A., Harris, E. L., Skipper, B. L. & Allen, S. T. (1993). *Doing Naturalistic Inquiry: A Guide to Methods*, Beverly Hills, CA: Sage.
- Ferguson, K. (2010). *Inquiry based mathematics instruction versus traditional mathematics instruction: The effect on student understanding and comprehension in an eighth grade pre-algebra classroom*. Retrieved from http://digitalcommons.cedarville.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1025&context=education_theses.

- Ferrance, E. (2000). *Action Research*. https://www.brown.edu/academics/education-alliance/sites/brown.edu/academics/education-alliance/files/publications/act_research.pdf [18.03.2019].
- Ferrara, F., & Sinclair, N. (2016). An early algebra approach to pattern generalisation: Actualising the virtual through words, gestures and toilet paper. *Educational Studies in Mathematics*, 92(1), 1–19.
- Fraenkel, J. R., & Wallen, N. E. (2006). How to design and evaluate research in education.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education. China lectures*. Dordrecht: Kluwer.
- Gall, D.M., Gall, P.J., ve Borg, W.R. (2007). *Educational Research: An Introduction*. Boston, MA: Pearson.
- Gay, L. R. & Airasian, P. (2000). *Educational Research: Competencies for Analysis and Application*. (6th ed.). Upper Saddle River, NJ: Merrill/Prentice Hall.
- Gençtürk, H. A. ve Türkmen, L. (2007). İlköğretim 4. sınıf fen bilgisi dersinde sorgulama yöntemi ve etkinliği üzerine bir çalışma. GÜ, *Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 27 (1), 277-292.
- Gillham, B. (2000). Case Study Research Methods, *British Library Cataloguing-in-Publication Data*, ISBN 0 8264 4796 1, Typeset by Paston Pre Press Ltd, Beccles, Suffolk Printed and bound in Great Britain by TJ International Ltd., Padstow, Cornwall.
- Glaserfeld, E.Y. (1984). An introduction to radical constructivism. In P. Watzlawick (Ed.) *The invented reality* (pp. 17-40). New York: Norton.
- Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 1, 155–177.
- Greenes, C., Canavagh, M., Dacey, L., Findell, C., & Small, M. (2001). *Navigating through algebra in Prekindergarten – Grade 2*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Greenes, C. E., & Findell, C. R. (1999). *Groundworks: Algebraic Thinking, Grade 1*, [teachers Book]. Creative Publications.
- Griffin, S. (2004b). Teaching number sense: The cognitive sciences offer insights into how young students can best learn math. *Educational Leadership*, 61, 39–42.
- Grundy, S. (1987). *Curriculum: Productor Praxis?* London: Falmer Press.
- Güler, A., Taşğın, S., & Halıcıoğlu, M. B. (2013). Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri. Ankara: Seçkin Yayıncılık. İncebacak, B, B. (2019). Sorgulama temelli öğretimin 4. sınıf öğrencilerinin kesir dilini kullanma becerilerine ve akademik başarılarına etkisi. (Yayımlanmamış doktora tezi). Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Samsun.
- Haldar, L. C. (2014). *Students' Understandings of Arithmetic Generalizations*. Doctoral Dissertation. Berkeley: University of California.
- Hargreaves, M., Shorrocks-Taylor, D. and Threlfall, J. (1999). Children's strategies with number patterns. (ed: A. Orton), *Pattern in the teaching and learning of mathematics*, London and New York: Cassell, 67-83.
- Haury, D. L. (1993). Teaching Science Through Inquiry. *ERIC CSMEEDigest* (March Ed 359 048).
- Hayward, C. N., Kogan, M., & Laursen, S. L. (2016). Facilitating instructor adoption of inquiry-based learning in college mathematics. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics*, 2, 59–82. Erişim adresi: <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2Fs40753-015-0021-y.pdf>
- Herbert, K., & Brown, R. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning. *Teaching Children Mathematics*, 3, 340-344.
- Hersovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*. 27(1), 59-78.
- Hıdıroğlu, Ç. N., & Bukova Güzel, E. (2013). Teknoloji destekli ortamda matematiksel modellemede modelin doğrulanmasındaki yaklaşımların ve düşünme süreçlerinin kavramsallaştırılması. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri Dergisi*, 13(4), 2487-2508.

- Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching. A constructivist enquiry*. London: The Falmer Press.
- Jones, L. (1993). Algebra in primary school. *Education*, 3-13, 21(2). doi: 10.1080/03004279385200181.
- Johnston, K. M. (2014). *Rethinking mathematics curriculum in a K-5 rural setting: Comparing inquiry-based to traditional approaches*. Unpublished doctoral dissertation, University of South Dakota.
- Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R., & Stillman, G. (Eds.). (2011). *Trends in teaching and learning of mathematical modelling*. Dordrecht: Springer.
- Kama, Z. (2020). *Ortaokul öğrencilerinin doğrusal örüntüleri genellemelerinin incelenmesi*. (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Orta Doğu Teknik Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.
- Kandil, S. (2016). *Origami etkinlikleriyle zenginleştirilmiş sorgulama temelli öğretimin ortaokul yedinci sınıf öğrencilerinin yansıma simetrisi konusundaki başarıları, geometri dersine yönelik tutumları ve geometriye yönelik öz yeterlik algıları üzerine etkisinin incelenmesi*. (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Orta Doğu Teknik Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.
- Karademir, A. (2017). *Sorgulama temelli matematik etkinliklerinin çocukların matematiksel becerilerine etkisi*. (Yayınlanmamış doktora tezi). Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Karasar, N. (2005). *Bilimsel araştırma yöntemleri*. Ankara: Nobel Yayın Dağıtım, 15.
- Kartal, P. B. (2019). *İlköğretim matematik eğitiminde origami destekli rehberli sorgulamaya dayalı öğretimin öğrenme sürecine etkisi*. (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Bilimleri Üniversitesi, Samsun.
- Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T.A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra (pp. 145-168). Routledge.

- Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 235-272). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kaput, J. J. ve Blanton, M. L. (2000). Algebraic Reasoning in the Context of Elementary Mathematics: Making It Implementable on a Massive Scale. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Karcı, E. (2019). *Sorgulama Temelli Yaklaşım ve Lisans Matematik Eğitimindeki Uygulamaları*. (Yüksek Lisans Tezi, Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü). Yüksek Öğretim Kurulu tez merkezi veri tabanından erişildi (557886).
- Kasmer, L. (2008). The role of prediction in the teaching and learning of algebra. Western Michigan University.
- Kaya, D., ve Keşan, C. (2014). İlköğretim seviyesindeki öğrenciler için cebirsel düşünme ve cebirsel muhakeme becerisinin önemi. *International Journal of New Trends in Arts, Sports & Science Education*, 3(2), 38-47.
- Kaya, D., Keşan, C., İzgiol, D., & Erkuş, Y. (2016). Yedinci sınıf öğrencilerinin cebirsel muhakeme becerilerine yönelik başarı düzeyi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 7(1), 142-163.
- Kılıç, Ç. (2016). Ortaokul öğrencilerinin lineer sayı örüntüsüne bağlı olarak şekil örüntüsü oluşturma stratejilerinin analizi. *Eğitimde Kuram ve Uygulama*, 12(6), 1205-1230.
- Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde, & A. Pérez (Eds.), 8th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures (pp. 271-290). Sevilla, Spain: S.A.E.M. Thaïes.
- Kieran, C. (2004). The core of algebra: Reflections on its main activities. In *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12thICMI Study* (pp. 21-33). Springer, Dordrecht: Kluwer.
- Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. S. Wagner ve C. Kieran (Ed.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* içinde (s. 33-56). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Kriegler, S. (2008). Just what is algebraic thinking. *UCLA: Department of Mathematics*. Available online also at: <http://www.math.ucla.edu/~kriegler/pub/algebrat.html> [accessed in Manila, Philippines: December 5, 2015].
- Kocamaz, B., İkikardeş, N. Y. (2021). Örüntüler konusunda 7. sınıf öğrencilerinin karşılaştıkları zorlukların incelenmesi. *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 23(2), 831-849.
- Korkmaz, H. İ. (2017). *Doğal Açık Alanlarda Uygulanan Sorgulama Temelli Etkinliklerin Çocukların Geometrik ve Uzamsal Düşünme Becerilerine Etkisi*. (Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü). Yüksek Öğretim Kurulu tez merkezi veri tabanından erişildi (484097).
- Köhler, H. (1997). Acting artist-like in the classroom. *International Reviews on Mathematical Education*, 29(3), 88–93.
- Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*, (translated from the Russian by J. Teller). Chicago, IL: University of Chicago Press.
- Kusumawati, R., Hobri ve Hadi, A. F. (2019). *Implementation of integrated inquiry collaborative learning based on the lesson study for learning community to improve students' creative thinking skill*, IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1211 (2019) 012097, ICCGANT 2018 doi:10.1088/1742-6596/1211/1/012097
- Lannin, J., Barker, D. ve Townsend, B. (2006). Algebraic Generalisation Strategies: factors Influencing Student Strategy Selection. *Mathematics Education Research Journal*. Vol.18, No.3: 3-28
- Lannin, J., Ellis, A., Elliott, R., & Zbiek, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in grades pre-K-8*. Reston: NCTM.
- Lee, C. ve Lee, S. Y. (2015). The process of pattern generalization and the pattern generalization strategies of the early 7th grade students in Korea. *Far East Journal of Mathematical Education*, 14(2), 137.
- Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities 87-106. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (pp. 87-106). Dordrecht: Kluwer.

- Levenson, E., Tirosh, D., & Tsamir, P. (2009). Students' perceived sociomathematical norms: The missing paradigm. *The Journal of Mathematical Behavior*, 28(2), 171-187.
- Lincoln, Y. S., & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Beverly Hills, CA: Sage.
- Maaß, K. ve Artigue, M. (2013). Implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching: asynthesis. *ZDM: The International Journal of Mathematics Education*, 45(6), 779-795.
- Malley, M. (1992). *The Nature and History of Science. Chapter V in Teaching About the History and Nature of Science and Technology: Background Papers* (pp. 67-80). Colorado Springs: Biological Sciences Curriculum Study (BSCS).
- Malone, D. M. (2008). Inquiry-based early childhood teacher preparation: The personal learning plan method. *Early Childhood Education Journal*, 35, 531- 542.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bernarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (pp. 65-86). Dordrecht, Netherlands: Springer.
- Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 57-94). New York: Lawrence Erlbaum.
- McClain, K. ve Cobb, P. (2001). An analysis of development of sociomathematical norms in one first-grade classroom. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(3), 236-266.
- Mehan, H. (1979). *Learning lessons: Social organization in the classroom*. Cambridge: MA: Harvard University Press.
- Menezes, L., Guerreiro, A., Martinho, M. H. ve Ferreira, R. A. T. (2013). Essay on the role of teachers' questioning in inquiry-based mathematics teaching. *Journal of Education*, 1(3), 44-75.
- Merriam, S. B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education* (Rev. ed.). San Francisco, CA: Jossey-Bass.
- Mertens, D. (1998). *Research Methods in Education and Psychology*. London: Sage Publications.

- Mertler, C. A. (2009). *Action Research: Teachers as Researchers in the Classroom*. (2nd ed.). Inc, Thousand Oaks, CA: Sage.
- Mertler, C. A. (2011). *Action Research: Improving Schools and Empowering Educators*. (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2005). *İlköğretim matematik dersi 6-8 öğretim programı*. Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2013). *Ortaokul matematik dersi (5, 6, 7 ve 8. sınıflar) öğretim programı*. Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2018). *Ortaokul matematik dersi (5, 6, 7 ve 8. sınıflar) öğretim programı*. Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı.
- Mills, G. E. (2007). *Action Research: A Guide for the Teacher Researcher*. (3rd ed.). Upper Saddle River, New Jersey: Merrill Prentice Hall.
- Mindy, C. (2015). Including inquiry-based learning in a flipped class, *PRIMUS*, 25(8), 736-744 doi: 10.1080/10511970.2015.1031303
- Moss, J., & Beatty, R. (2010). Knowledge building and mathematics: Shifting the responsibility for knowledge advancement and engagement. *Canadian Journal of Learning and Technology*, 36(1), 22–54.
- Mottier Lopez, L., & Allal, L. (2007). Sociomathematical norms and the regulation of problem solving in classroom microcultures. *International Journal of Educational Research*, 46, 252-265.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston: Virginia.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- National Research Council. (2000). *Inquiry and the national science education standards: A guide for teaching and learning*. National Academies Press.

- Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Introduction. In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study* (pp. 3–32). New York: Springer.
- NRC. (1996). *National science education standards*. Washington DC: National Academy Press.
- Orton, A. & Orton, J. (1999). Pattern and the approach to algebra. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 104-120). London: Cassell.
- Otte, M. F., Mendonça, T. M., Gonzaga, L., & de Barros, L. (2015). Generalizing is necessary or even unavoidable. *PNA*, 9(3), 143-164.
- Özdemir, E., Dikici, R., & Kültür, M. N. (2015). Students' pattern Generalization Process: The 7th Grade Sample. *Kastamonu Education Journal*, 23(2), 523- 548. Retrieved from <https://kefdergi.kastamonu.edu.tr/index.php/Kefdergi/article/view/566/221>.
- Özel, Z. (2019). *Ortaokul matematik öğretmen adaylarının öğrencilerin cebirsel düşüncelerini fark etme becerilerinin örüntü genelleme bağlamında incelenmesi*. (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Orta Doğu Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Özpınar, İ. ve Aydoğan Yenmez, A. (2016). *Matematik eğitiminde teoriler* (1. baskı). Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.
- Papic, M. (2007). Promoting repeating patterns with young children. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 12(3), 8-13.
- Patton, M. (1990). *Qualitative evaluation and research methods* (2nd ed.). Newbury Park, CA: Sage.
- Perez, C. (2000). Equity in the standards-based elementary mathematics classroom. *ENC Focus*, 7(4), 29-31.
- Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, N.J: Princeton University Press.
- Primas (2011). Promoting inquiry in mathematics and science education across Europe. Professional Development Providers (Guide for). 31 March, Version 1. 1-72. Erişim

adresi(07.12.2015):

[http://www.primas-](http://www.primas-project.eu/servlet/supportBinaryFiles?referenceId=2&supportId=1300)

[project.eu/servlet/supportBinaryFiles?referenceId=2&supportId=1300](http://www.primas-project.eu/servlet/supportBinaryFiles?referenceId=2&supportId=1300).

Punch, F.K. (2005). Çev: Bayrak, D., Arslan, H.B. ve Akyüz, Z. *Sosyal Araştırmalara Giriş Nicel ve Nitel Yaklaşımlar*. Sayısal Kitabevi, Ankara.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In J. L. C. S. Alatorre, M. Sa'iz, A. Me'ndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, North American Chapter, Vol. 1 (pp. 2-21). Mexico: Me'rida.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A Global Dialogue From Multiple Perspectives* (pp. 303-22). Berlin: Springer-Verlag.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM*, 40(1), 83-96. doi: 10.1007/s11858-007-0061-0

Rech, J., Hodge, A., & Matthews, M. (2017). Proceedings of the sixth annual Mathematics Teacher Education Partnership Conference Smith. W. M., 238 Lawler, B. R., Bowers, J. ve Augustyn, L. (Ed.), *Inquiry-based learning in lower division undergraduate mathematics courses as a recruiting tool for future* (s. 129-136) içinde. Washington, DC: Association of Public and Landgrant Universities. Erişim adresi: <https://www.aplu.org/projects-and-initiatives/stem-education/mathematics-teacher-education-partnership/mtep-conferences-meetings/mtep6-materials/24-Inquiry-based-Learning.pdf>

Rivera, F. D. (2011). *Toward a visually-oriented school mathematics curriculum*. New York: Springer.

Rivera, F. D. (2018). Pattern Generalization Processing of Elementary Students: Cognitive Factors Affecting the Development of Exact Mathematical Structures. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(9).

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2011). Formation of pattern generalization involving linear figural patterns among middle school students: Results of a three-year study. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 323-366). Berlin Heidelberg: Springer.

- Sağdıç, M., & Bakırcı, H. (2020). Rehberli Araştırma Sorgulama Öğretim Yönteminin 7. Sınıf Öğrencilerinin FeTeMM Tutumları Üzerindeki Etkisi. *Afyon Kocatepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 22(2), 363-376.
- Salim, K., & Tiawa D.H. (2015). Implementation of structured inquiry based model learning toward students' understanding of geometry. *International Journal of Research in Education and Science*, 1(1), 75-83.
- Saunders-Stewart, K. S., Gyles, P. D., & Shore, B. M. (2012). Student outcomes in inquiry instruction a literature-derived inventory. *Journal of Advanced Academics*, 23(1), 5-31.
- Schoenfeld, A. H. (1992a). Learning to think mathematically: Problem solving, meta-cognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). New York: MacMillan.
- Senger, E. (2019). *The effect of sociomathematical norms and technology integrated instruction on 6th grade students' understanding of altitude*. (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Boğaziçi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Serin, M. K., & Korkmaz, İ. (2018). İşbirliğine Dayalı Ortamlarda Gerçekleştirilen Üstbilişsel Sorgulama Temelli Öğretimin İlkokul 4. Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Problem Çözme Becerilerine Etkisi. *Elementary Education Online*, 17(2), 510-531. DOI: 10.17051/ilkonline.2018.418893
- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20(2), 147-164. doi: 10.1007/BF00579460
- Stacey, K., & MacGregor, M. (1997). Ideas about symbolism that students bring to algebra. *The Mathematics Teacher*, 90(2), 110-113.
- Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Stephan, M., & Akyüz, D. (2012). A proposed instructional theory for integer addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43 (4), 428-464.

- Stephan, M., Bowers, J., Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2003). Supporting students' development of measuring conceptions: Analyzing students' learning in social context. *Research in Mathematics Education Monograph No. 12*.
- Supovitz, J. A., Mayer, D. P., & Kahle, J. B. (2000). Promoting inquiry-based instructional practice: The longitudinal impact of professional development in the context of systemic reform. *Educational Policy*, 14(3), 331-356.
- Swafford, J. O., & Langrall, C. W. (2000). Grade 6 students' preinstructional use of equation to describe and represent problem situations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 89-112.
- Şahin, B. (2019). Sorgulama temelli matematik yaklaşımının, öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçlerini geliştirmelerine etkisi: Bir eylem araştırması. *Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 19(4), 1620-1636. <https://dx.doi.org/10.17240/aibuefd.2019..-527052>.
- Tandoğan, Ö.R., & Akinoglu, O. (2007). The Effects of problem-based active learning in science education on students' academic achievement, attitude and concept learning. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 3(1), 71-81.
- Tanışlı, D. (2008). İlköğretim Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Örüntülere ilişkin Anlama ve Kavrama Biçimlerinin Belirlenmesi. Doktora Tezi, *Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü*, Eskişehir.
- Tanışlı, D. Ve Özdaş, A. (2009). İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin örüntüleri genellemelerde kullandıkları stratejiler. *Educational Sciences: Theory & Practice*, 9(3), 1453-1497.
- Taylor, J., & Bilbrey, J. (2012). Effectiveness of inquiry-based and teacher-directed instruction in an Alabama elementary school. *Journal of Instructional Pedagogies*, 8, 1-7.
- Van de Walle, J. A., Karp, K., & Bay-Williams, J. M. (2011). *İlkokul ve ortaokul matematiği: Gelişimsel yaklaşımla öğretim (7. baskı)*. (Çev. Edit. S. Durmuş). Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık.
- Voigt, J. (1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *Emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 163-201). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

- Warren, E. (2000). Visualisation and the development of early understanding in algebra. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. IV, pp. 273-280). Hiroshima, Japan.
- Wells, G. (1999). Dialogic inquiry: Towards a socio-cultural practice and theory of education. Cambridge University Press.
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2008). Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri. Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Wiersma, W., (2000). Research Methods in Education: An Introduction. USA: Allyn and Bacon.
- Williams, A., & Cooper, T. (2001). Moving from arithmetic to algebra under the time pressures of real classrooms. In H. Chick, K. Stacey, Jill Vincent, & John Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI study conference: The future of the teaching and learning algebra*, (pp. 665-662). Melbourne: University of Melbourne.
- Wu, S. C. & Lin, F. L. (2016). Inquiry-based mathematics curriculum design for young children-teaching experiment and reflection. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*. 12(4), 843-860.
- Yackel, E., (2001). Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. In M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1 (pp. 9-24). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.
- Yackel, E., Rasmussen, C., & King, K. (2000). Social and sociomathematical norms in an advanced undergraduate mathematics course. *The Journal of Mathematical Behavior*, 19(3), 275-287.
- Yakut Çayır, M. (2013). 9. Sınıf öğrencilerinin örüntü genelleme problemlerini çözme başarılarının ve kullandıkları genelleme stratejilerinin belirlenmesi. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.
- Yakut-Çakır, M. Ve Akyüz, G. (2015). 9. sınıf öğrencilerinin örüntü genelleme problemlerini çözme stratejilerinin belirlenmesi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 9(2), 205-229.

- Yavuz, G., Arslan, Ç., & Batdal Karaduman, G. (2018). Matematik Öğretmeni Adaylarının Sorgulama Becerileri İle Matematik Öğretmeye Yönelik Kaygıları Arasındaki İlişki. *Turkish Studies Educational Sciences*, 13(11), 1461-1471. DOI Number: <http://dx.doi.org/10.7827/TurkishStudies.13360>
- Yeap, B.H. ve Kaur, B. (2008). Elementary school students engaging in making generalisation: a glimpse from a Singapore classroom. *ZDM Mathematics Education*. 40: 55-64
- Yeşildere-İmre, S., Akkoç, H. ve Baştürk-Şahin, B. N. (2017). Ortaokul öğrencilerinin farklı temsil biçimlerini kullanarak matematiksel genelleme yapma becerileri. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 8(1), 103- 129.
- Yeşildere, S., (2006). *Farklı matematiksel güce sahip ilköğretim 6, 7 ve 8 sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme ve bilgiyi oluşturma süreçlerinin incelenmesi* (Doctoral dissertation, DEÜ Eğitim Bilimleri Enstitüsü).
- Yıldırım, A. (1999). Nitel araştırma yöntemlerinin temel özellikleri ve eğitim araştırmalarındaki yeri ve önemi. *Eğitim ve Bilim*, 23(112).
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H., (2000). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayınları.
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H., (2005). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayınları.
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2008). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2011). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*.
- Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2016). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri (10. bs.)*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Yin, R. K. (2003). *Case study research: Design and methods* (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Yin, R. K., (1994). Discovering the future of the case study. Method in evaluation research. *Evaluation practice*, 15(3), 283-290.

- Young-Loveridge, J. M. (2004). Effects on early numeracy of a program using number books and games. *Early Childhood Research Quarterly*, 19(1), 82-98.
- Youngquist, J., & Pataray-Ching, J. (2004). Revisiting “play”: Analyzing and articulating acts of inquiry. *Early Childhood Education Journal*, 31(3), 171–178.
- Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational studies in mathematics*, 49(3), 379-402. doi: 10.1023/A:1020291317178.



EKLER

EK 1.

ÖĞRENCİNİN AKADEMİK ÖZGEÇMİŞİ

Kişisel Bilgiler			
Adı ve Soyadı	Sümeysra Köken		
E-postası/Web Sayfası			
Bildiği Yabancı Diller	İngilizce		
Uzmanlık Alanı	Matematik Eğitimi		
Öğrenim Bilgileri			
	Üniversite	Bölüm	Yıl
Lisans	Dokuz Eylül Üniversitesi	İlköğretim Matematik Öğretmenliği	2019
Tez Başlığı	Sosyo-matematiksel Normlarla Desteklenmiş Sorgulama Temelli Öğretimin Öğrencilerin Cebirsel Düşünme Süreçlerine Etkisi		
Tez Danışmanı	Prof. Dr. Sibel Yeşildere İmre		
Akademik Eserler			
(Makale, kitap, kitap bölümü, bildiri, poster, sergi, konser vb. eserlerden kaynakça yazım kurallarına göre en fazla 10 eser yazılmalıdır.) Tezden üretilen yayınlar * ile işaretlenmelidir.			
-			
Alanıyla İlgili Bilimsel Kuruluşlara Üyelikler			
-			
Alanıyla İlgili Aldığı Ödüller			
-			

EK 2. Uygulama İzinleri



T.C.
ORDU VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Sayı : E-18802389-605.01-46982305
Konu : Araştırma İzni
(Sümeyra KÖKEN)

01.04.2022

VALİLİK MAKAMINA

İlgi : a) Millî Eğitim Bakanlığı Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğünün 21.01.2020 tarihli ve 1563890 sayılı yazısı (Genelge 2020/2)
b) Dokuz Eylül Üniversitesi Rektörlüğü Hukuk Müşavirliğinin 22.01.2022 tarihli ve 222993 sayılı yazısı.

Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Anabilim Dalı İlköğretim Matematik Öğretmenliği Yüksek Lisans Programı öğrencisi Sümeyra KÖKEN'in "Sosyo-Matematiksel Normlarla Desteklenmiş Sorgulama Temelli Öğretimin Öğrencilerin Cebirsel Düşünme Süreçlerine Etkisi" konulu bilimsel çalışmasına veri sağlamak amacıyla anket çalışması yapma izin talebine ilişkin ilgi (b) yazı ve ekleri, Müdürlüğümüz Araştırma Değerlendirme Komisyonu tarafından ilgi (a) genelge hükümleri doğrultusunda incelenmiş olup, uygulanmasında sakınca görülmemiştir.

Söz konusu anket çalışmasının, pandemi koşulları göz önünde bulundurularak eğitim öğretim faaliyetlerini aksatmayacak şekilde olur ekinde yer alan imzalı ve mühürlü formun kullanılarak, öğrencilere ait çalışmaların veli izni doğrultusunda ve elde edilen verilerin herhangi bir haber, resmi özel web sayfaları, yerel ve ulusal basında paylaşılmaması kaydıyla, Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Anabilim Dalı İlköğretim Matematik Öğretmenliği Yüksek Lisans Programı öğrencisi Sümeyra KÖKEN tarafından; İlimiz resmi Ortaokullarında 2021-2022 eğitim ve öğretim yılı içinde okul ve kurum müdürlüğünün sorumluluğunda gönüllülük esasına göre uygulanması Müdürlüğümüzce uygun görülmektedir.

Makamlarınızca da uygun görülmesi halinde Olur 'larınıza arz ederim.

Yusuf ACAR
Müdür a.
Şube Müdürü

OLUR
Mehmet Fatih VARGELOĞLU
Vali a.
İl Millî Eğitim Müdürü

Ek :
1-Komisyon Kontrol Tutanağı (2 Sayfa)
2-Anket Formu ve Ekleri (57 Sayfa)

Bu belge güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.

Adres : Karşıyaka Mah. Atatürk Bulvarı No:336/B Altınordu/ORDU

Dahili :

Telefon No : 0 (452) 223 16 29

E-Posta: arge52@meb.gov.tr

Kep Adresi : meb@hs01.kep.tr

Belge Doğrulama Adresi : <https://www.turkiye.gov.tr/meb-ebys>

Bilgi için: Mustafa KURUL VHKİ (Strateji Geliştirme Şub.Müd.)

Unvan : Veri Hazırlama ve Kontrol İşletmeni

İnternet Adresi: ordu.meb.gov.tr

Faks:4522250144

Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır. <https://evraksorgu.meb.gov.tr> adresinden 5218-54db-3db7-be92-c0fb kodu ile teyit edilebilir.

ETİK İZİN



T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ
HUKUK MÜŞAVİRLİĞİ

Sayı : E-87347630-659-232422

ACELE
05.04.2022

Konu : ARAŞTIRMA İZNİ- SÜMEYRA KÖKEN

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

İlgi : a) 11.03.2022 tarihli ve E-67493393-302.08.01-214628 sayılı yazınız.
b) Ordu Valiliği İl Milli Eğitim Müdürlüğü'nün 01.04.2022 tarihli ve E-18802389-605.01-47010591 sayılı yazısı.

İlgi (a)'da kayıtlı yazınız ile bildirilen Enstitünüz Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı İlköğretim Matematik Öğretmenliği Yüksek Lisans programı öğrencisi Sümeyra KÖKEN'in, "Sosyo-Matematiksel Normlarla Desteklenmiş Sorgulama Temelli Öğretimin Öğrencilerin Cebirsel Düşünme Süreçlerine Etkisi" konulu tez çalışması kapsamında uygulama yapma talebine ilişkin Ordu Valiliği İl Milli Eğitim Müdürlüğü'nden alınan ilgi (b)'de kayıtlı yazı, işbu yazımız ekinde sunulmaktadır.

Bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.

Prof.Dr. Nükhet HOTAR
Rektör

Ek: İlgi (b)'de kayıtlı yazı ve ekleri.

Bu belge, güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.
Doğrulama Kodu: B0F9B5FF-B88E-4056-98B4-E7C4067BF878 Doğrulama Adresi: <https://turkiye.gov.tr/dokuz-eylul-universitesi-ebys>
Adres: Kültür Mahallesi, Cumhuriyet Blv No:144, 35220 Konak/İzmir
KEP Adresi : dokuzeyluluniversitesi@hs01.kep.tr Bilgi için: Gülcan TOPÇU
Sürekli İşçi



OKUL İZİNLERİ



T.C.
ORDU VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Sayı : E-18802389-605.01-46982305
Konu : Araştırma İzni
(Sümeysa KÖKEN)

01.04.2022

VALİLİK MAKAMINA

- İlgi : a) Millî Eğitim Bakanlığı Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğünün 21.01.2020 tarihli ve 1563890 sayılı yazısı (Genelge 2020/2)
b) Dokuz Eylül Üniversitesi Rektörlüğü Hukuk Müşavirliğinin 21.01.2020 tarihli ve 222993 sayılı yazısı.

Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Anabilim Dalı İlköğretim Matematik Öğretmenliği Yüksek Lisans Programı öğrencisi Sümeysa KÖKEN'in "Sosyo-Matematiksel Normlarla Desteklenmiş Sorgulama Temelli Öğretimin Öğrencilerin Cebirsel Düşünme Süreçlerine Etkisi" konulu bilimsel çalışmasına veri sağlamak amacıyla anket çalışması yapma izin talebine ilişkin ilgi (b) yazı ve ekleri, Müdürlüğümüz Araştırma Değerlendirme Komisyonu tarafından ilgi (a) genelge hükümleri doğrultusunda incelenmiş olup, uygulanmasında sakınca görülmemiştir.

Söz konusu anket çalışmasının, pandemi koşulları göz önünde bulundurularak eğitim öğretim faaliyetlerini aksatmayacak şekilde olur ekinde yer alan imzalı ve mühürlü formun kullanılarak, öğrencilere ait çalışmaların veli izni doğrultusunda ve elde edilen verilerin herhangi bir haber, resmi özel web sayfaları, yerel ve ulusal basında paylaşılmaması kaydıyla, Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Anabilim Dalı İlköğretim Matematik Öğretmenliği Yüksek Lisans Programı öğrencisi Sümeysa KÖKEN tarafından; İlimiz resmi Ortaokullarında 2021-2022 eğitim ve öğretim yılı içinde okul ve kurum müdürlüğünün sorumluluğunda gönüllülük esasına göre uygulanması Müdürlüğümüzce uygun görülmektedir.

Makamlarınızca da uygun görülmesi halinde Olur 'larınıza arz ederim.

Yusuf ACAR
Müdür a.
Şube Müdürü

OLUR
Mehmet Fatih VARGELOĞLU
Vali a.
İl Millî Eğitim Müdürü

Ek :
1-Komisyon Kontrol Tutanağı (2 Sayfa)
2-Anket Formu ve Ekleri (57 Sayfa)

Bu belge güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.

Adres : Karşıyaka Mah. Atatürk Bulvarı No:336/B Altınordu/ORDU

Dahili :

Telefon No : 0 (452) 223 16 29

E-Posta: arge52@meh.gov.tr

Kep Adresi : meb@hs01.kep.tr

Belge Doğrulama Adresi : <https://www.turkiye.gov.tr/meb-ebys>

Bilgi için: Mustafa KURUL VHKİ (Strateji Geliştirme Şub.Müd.)

Unvan : Veri Hazırlama ve Kontrol İşletmeni

İnternet Adresi: ordu.meb.gov.tr

Faks:4522250144

Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır. <https://evraksorgu.meb.gov.tr> adresinden 5218-54db-3db7-be92-c0fb kodu ile teyit edilebilir.

EK 3. Cebirsel Düşünme Süreçleri Ön Değerlendirme Formu

Cebirsel Düşünme Süreçleri Ön Değerlendirme Formu

Etkinlik 1

Halı ve kilimlerdeki simge ve sembollere motif, bunların tamamına ise **desen** adı verilmektedir. Ülkemizdeki halı, kilim, çanta, heybe gibi dokuma ürünlerinde çok sayıda geleneksel motifler ve desen bulunmaktadır.



Bu motiflerden bir tanesi yanda görseli verilen ‘‘Göz Motifi’’ dir. Bu motifte iç içe geçmiş dört adet eşkenar dörtgenden yararlanılmıştır. Aşağıda ‘‘Göz Motifi’’ ile yapılmış bir halı deseninin ilk üç adımı verilmiştir.



1. Adım



2. Adım



3. Adım

- a) Desenin adım sayısı ile eşkenar dörtgen sayısını gösteren tabloyu doldurunuz. Çözümünüzü gerekçeleriyle açıklayınız.

Adım sayısı	1	2	3	4	5
Eşkenar dörtgen sayısı					

- b) Sizce halı deseninin 10. adımında eşkenar dörtgen sayısı kaç olur? Çözümünüzü gerekçeleriyle açıklayınız.
- c) 55. adımında eşkenar dörtgen sayısı kaç olur? Çözümünüzü gerekçeleriyle açıklayınız.
- d) Herhangi bir adımdaki eşkenar dörtgen sayısını veren bir kural bulunuz. Çözümünüzü gerekçeleriyle açıklayınız.

Etkinlik 2

İlke'nin babası makinisttir. Ancak babası Kars'a doğru çıkacağı uzun yolculuk için endişelenmektedir. Çünkü zorlu yollardan geçerken trendeki yüklerin devrilmesinden dolayı tedirgindir.

Bu işe el atmak isteyen ilke 5. Sınıfta öğrendiği örüntüler konusunu kullanarak yüklerin kurallı bir şekilde yerleştirmesine yardım edeceğine söz vermiştir. İlke'ye babasının trene yük kutularını yerleştirmesine yardım eder misin? Sence İlke kutularda nasıl bir modelleme yaparsa kurallı bir şekilde örüntü elde eder?

(Not: Her vagona kaç kutu olacağı vagonların üzerinde yazmaktadır.)



1. Vagon 2. Vagon 3. Vagon

a) Kutuların modellemesini aşağıda bulunan alana yapabilirsin.



b) İlke'nin babası 4. Ve 5. Vagonlarda kaç kutu olacağını merak etmektedir. 4. Ve 5. Vagonlarda kaç kutu bulunacağı ile ilgili İlke ve babasına yardım et! Çözümünü ayrıntılı bir şekilde açıkla.

c) Herhangi bir vagondaki kutu sayısını veren bir kural bulunuz ve bulduğunuz kuralı açıklayınız.

Etkinlik 3

Aylin bir mimardır. Kendisine dekorasyon için verilen bir evin bebek odasının duvarlarına, duvar etiketlerini kullanarak aşağıdaki süslemeyi yapacaktır.



1. Adım

2. Adım

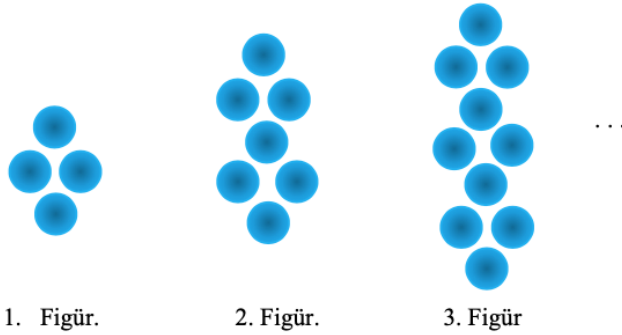
3. Adım

Buna göre;

- a) 5. adımda Aylin'in kaç adet güneş sembolüne ihtiyacı vardır? Çözümünüzü gerekçeleriyle açıklayınız.
- b) 10. adımda Aylin'in kaç adet güneş sembolüne ihtiyacı vardır? Çözümünüzü gerekçeleriyle açıklayınız.
- c) Aylin'in herhangi bir adımdaki ihtiyacı olan güneş sembolü sayısını veren bir kural bulunuz ve bulduğunuz kuralı gerekçeleriyle açıklayınız.

Etkinlik 4

Bir dans yarışmasına hazırlanan Eylül, dans figürlerinin adım sayısını ve adımların yerini sık sık unutmaktadır. Gösteriye yakın bir zaman kala Eylül'ün aklına bir fikir gelmiştir. Dans figürlerini aşağıdaki gibi örüntüye dökünce çok daha kurallı çalışabildiğini fark etmiştir.



Buna göre;

- a) Eylül'ün 4. Figüründe basması gereken kaç daire vardır? Çözümünüzü açıklayınız.
- b) Eylül'ün 10. Figüründe basması gereken kaç daire vardır? Çözümünüzü açıklayınız.
- c) Eylül'ün herhangi bir adımında basması gereken daire sayısını veren bir kural bulunuz ve bulduğunuz kuralı açıklayınız.

Etkinlik 5

Beren belli bir kurala göre giderek artan 2, 4, 6, 8, ... sayı örüntüsünü kullanarak masa örtüsüne desen oluşturacaktır. Ancak bir türlü örüntüyü hangi modeli kullanarak yapacağına karar verememektedir. Beren'e yaşadığı problemde yardımcı olunuz.

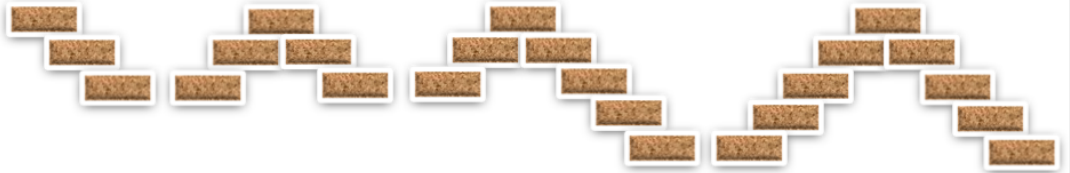
- Masa örtüsünün örüntüsüne uygun bir model oluşturarak çiziniz.
- Örüntünün 8. ve 16. adımıdaki sayıyı bulunuz. Cözümünüzü açıklayınız.
- Herhangi bir adımdaki bulunacak sayıyı veren bir kural geliştiriniz ve bulduğunuz kuralı açıklayınız.

Etkinlik 6



Aslı ailesiyle birlikte Kapadokya'daki Yeraltı Şehri'ni gezmeye Ürgüp'e girmiştir. Yeraltı mağaralarına giren Aslı dar geçitleri geçip merdivenlerden inerek mağaranın en derin kısmına ulaşmaya çalışmaktadır. Her geçitte giderek artan merdivenler Aslı'nın çok dikkatini çekmiştir. Bir süre sonra, bir sonraki geçitteki merdiven sayısını hesaplamaya başlamıştır.

Aşağıda Yeraltı Şehri'nde bulunan merdivenlerin düzeni ile ilgili örüntü görmektesiniz.



1. Geçit

2. Geçit

3. Geçit

4. Geçit

Buna göre;

- a) Aslı 4. Geçitten geçerken kaç adet merdivene basacaktır? Cözümünüzü gerekçeleriyle açıklayınız.
- b) Aslı 12. Geçitten geçerken kaç adet merdivene basacaktır? Cözümünüzü gerekçeleriyle açıklayınız.
- c) Aslı'nın herhangi bir geçitten geçerken basacağı merdiven sayısını veren bir kural bulunuz ve bulduğunuz kuralı gerekçeleriyle açıklayınız.

Etkinlik 7

Ailesiyle birlikte bilgisayarından ilk astronotlu roketin uzaya fırlatılışını canlı yayın olarak izleyen Aslan, yeryüzünden yükseldikçe hava sıcaklığının düştüğünü bilmektedir. Bunun sonucunda fırlatılışla ilgili bilgileri araştıran Aslan, roketin yeryüzünden 20°C hava sıcaklığı ile atıldığını öğrenmiştir.

Roket her 1 km yükseldiğinde sıcaklık 5 derece düştüğüne göre;

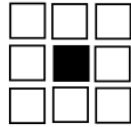
- a) Roket yerden 3 km yükseldiğinde hava sıcaklığı kaç derece olacaktır? Cözümünüzü gerekçeleriyle açıklayınız.
- b) Roket yerden 100 km yükseldiğinde hava sıcaklığı kaç derece olacaktır? Cözümünüzü gerekçeleriyle açıklayınız.
- c) Roketin herhangi bir kilometredeki hava sıcaklığının kaç derece olacağını veren genel bir kural bulunuz ve bulduğunuz kuralı açıklayınız.

Etkinlik 8

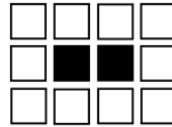
Aşağıdaki resimde siyah kutucuklar bahçeyi, etrafındaki beyaz kutucuklar ise tuğlaları göstermektedir. Her bir bahçenin etrafı bir sıra tuğla ile örülmüştür (Örneğin, 3. Şekildeki uzun kenarı 3 br olan bahçe için 12 tane tuğla kullanılmıştır).

Buna göre;

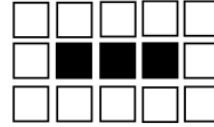
- Uzun kenarı 12 br olan bahçe için kaç tane tuğla kullanılır?
 - Toplam 152 tane tuğla kullanılan bahçenin uzun ve kısa kenarını nasıl bulduğunuzu gösteriniz.
 - Herhangi bir şekilde kullanılması gereken toplam tuğla sayısını veren bir kural geliştiriniz ve geliştirdiğiniz kuralı açıklayınız.
- (a ve b sorularının çözümlerini çizerek, tablo yaparak, sayısal ifade kullanarak yapınız.)



Şekil 1



Şekil 2



Şekil 3

Etkinlik 9

Derya Öğretmen, öğrencilerine bir başarı testi uygulamaktadır. Öğrencilerine yapabildiği doğru sayısına göre çikolata verecektir. Örneğin; 2 soruyu doğru yapan 9 adet, 3 soruyu doğru yapan 11 adet, 4 soruyu doğru yapan 13 adet çikolata alacaktır.

Buna göre;

- 6 soruyu ve 13 soruyu doğru yapan öğrenciler kaç tane çikolata alacaktır? Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

- b) 60 soruyu ve 80 soruyu doğru yapan öğrenciler kaç adet çikolata alabilir? Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.
- c) Herhangi bir sayıda soruyu (n tane soru) doğru cevaplayan öğrencilerin kaç adet çikolata alacağını veren bir kural bulunuz ve bulduğunuz kuralı açıklayınız.

Ek Soru?

Yukarıda verilen probleme dair bir örüntü modeli geliştiriniz. Modeli geliştirirken neleri dikkate aldığınızı açıklayınız.

Etkinlik 10



1. adım

2. adım

3. adım

...

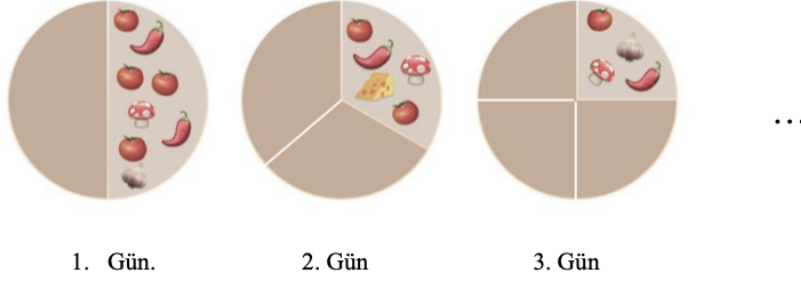
Aşağıdaki soruları modelden yararlanarak cevaplayınız.

- a) Şekilde verilen örüntüye göre 8 tane kare için kaç tane çubuk kullanılır? Çubuk sayısını bulurken hangi işlem yollarını izlediniz?
- b) 50 tane kare oluşturmak için kaç tane çubuk kullanılır? Çubuk sayısını bulurken hangi işlem yollarını izlediniz? 50 tane kare oluşturmak için kullanılan çubukların sayısını bulabilmek için daha çabuk ve kısa bir yol bulabilir miyiz?
- c) 8^{20} tane kare kaç tane çubuk ile yapılabilir?
- d) n tane kare oluşturmak için kaç çubuk kullanılacağını veren bir kural bulunuz ve bulduğunuz kuralı açıklayınız.

EK 4. Öğretim Sonrası Cebirsel Düşünme Süreçleri Değerlendirme Formu

Öğretim Sonrası Cebirsel Düşünme Süreçleri Değerlendirme Formu

Etkinlik 1



Ailesi bir haftalık tatile giden Aslan bir hafta boyunca evde yalnız kalacağı için her gün en sevdiği akşam öğünlerinde pizza yemeye karar vermiştir.

- 1) Yukarıda Aslan'ın ilk 3 gün boyunca yediği pizza miktarlarını görmekteyiz.
 - a) Aslan her gün pizzaları belli bir kurala göre yediğine göre, gün sayısı ile yediği pizza dilim miktarı arasında nasıl bir ilişki vardır?
 - b) Buna göre Aslan 7. gün pizzanın kaçta kaçını yemiştir?

- 2) Yukarıda verilen probleme göre tablodaki boşlukları doldurunuz.

Terim (Gün)	1.	2.	3.	4.
Kesir	$\frac{1}{2}$			

- a) Doldurduğunuz tabloda dikkatinizi çeken bir nokta var mı? Açıklayınız.
- b) Yukarıdaki kesirlerin listesi aynı örüntüyle devam ederse 0.95'e eşit olan terim kaçınıcı terim olur?
- c) Buna göre herhangi bir terimde (n. terim) bulunacak kesrin değerini veren bir kural bulunuz. Çözümünüzü gerekçelendirerek açıklayınız.

Etkinlik 2

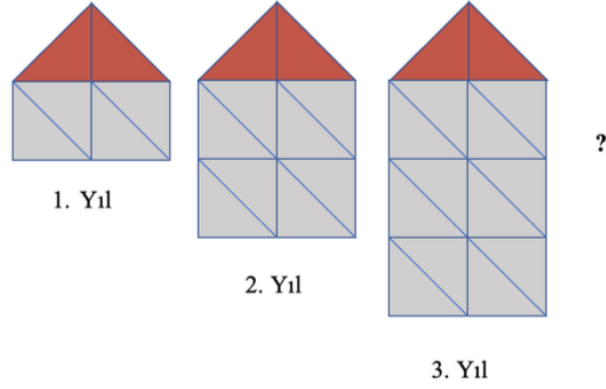


Mevcut depreme dayanıksız, ekonomik ömrünü tamamlamış binaların yaşanabilir, depreme dayanıklı, sosyal donatıları otoparkı, yeşil alanları olan kaliteli yaşam alanlarına dönüştürme sürecine (projesine) **kentsel dönüşüm** denir. Kentsel dönüşümün bu tür yararları olmasına rağmen bu süreç içinde bazı ailelerin mahallelerinden başka yerlere de taşınması gerekmektedir.

- 1) İstanbul'da kentsel dönüşüme girecek mahallelerden biri de Kayışdağı mahallesidir. Bu süreçte mahalleden taşınacak aile sayısı aşağıdaki tabloda verilmiştir. **Yıl sayısı** ile **taşınan aile sayısı** arasındaki ilişkiyi (örüntü kuralını) bulabilir misin?

Yıl Sayısı	Taşınan Aile Sayısı
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15
.	.
.	.
.	.
Y	?

- 2) Kentsel dönüşüm projesi kapsamında inşa edilen apartmanlar şekildeki gibidir. **Yeni yapılan apartmanların yüksekliği her yıl biraz daha artmaktadır.**



Şekildeki üçgenler (çatıdakiler de dahil) apartmandaki daireleri göstermektedir.
Örneğin, 1. Yıl yapılan 6 daire vardır.

- a) 4. yılda yapılan bir apartman nasıl olacaktır? Örüntü blokları yardımıyla oluşturunuz.
- b) Apartmanların her yıl 1 kat yükseldiğini düşünürsek, 2., 3. ve 4. yılda apartmanda kaç daire olacaktır? Peki ya n yıl sonra? (Örüntü kuralını bulunuz.)

Yıl Sayısı	Daire Sayısı
1	6
2	
3	
4	
.	.
.	.
.	.

3) Ataşehir Belediyesi tarafından hazırlanan kentsel dönüşüm planına göre hangi haftada kaç sokakta dönüşüm gerçekleştirileceği tabloda gösterilmektedir.

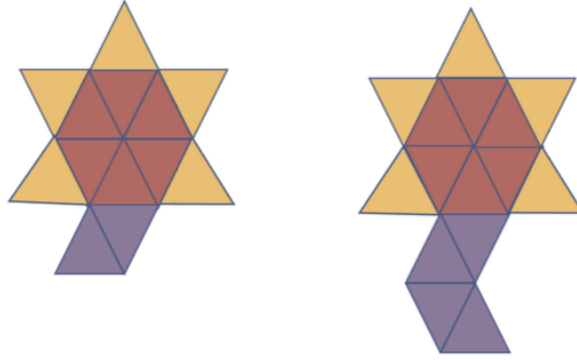
a) Bu plana göre 4. ve 5. Hafta da düzenlenen sokak sayısı kaç olacaktır?

b) Peki ‘‘m’’ hafta sonra kaç olacaktır? (Örüntü kuralını bulunuz.)

Hafta Sayısı	Sokak Sayısı
1	3
2	5
3	7
4	
5	
·	
·	
·	
M	...

Ek sorular:

- 1) Kentsel dönüşüm projesinde bahçe düzenlemesi için çiçeklendirme yapılacaktır. Ekilen çiçeğin sapının günlük uzama miktarı aşağıda gösterildiği gibidir.
3. ve 4. Günde çiçeği oluşturmak için kaç üçgen kullanmak gerekir? Peki ya s gün sonra?



Gün Sayısı	Kullanılan Üçgen Sayısı
1	
2	
3	
4	
.	
.	
.	
s	...

- 2) Örüntü bloklarıyla bir örüntü oluşturarak arkadaşınızdan oluşturduğunuz örüntünün kuralını bulmasını isteyiniz.

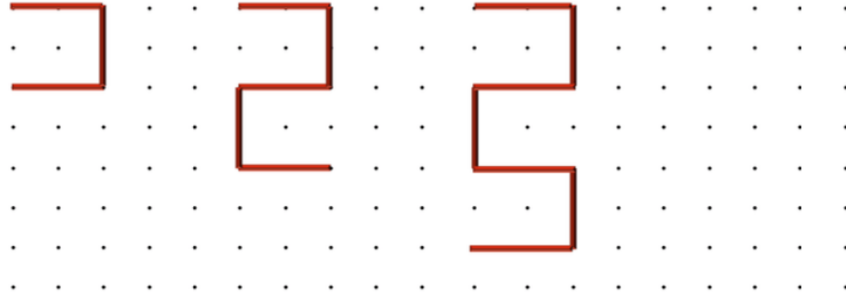
Etkinlik 3

Restorasyon, kültürel hazinelerin korunması, geleceğe aktarılmasını ve tarihi yapıların harap olan bölümlerinin daha fazla tahrip olmasını önlemek için aslına uygun biçimde yenilemek amacıyla yapılan çalışmalardır.

Namazgah Hamamı Restorasyon Projesi

Antik Smyrna Agorası kazı alanının güneyinde, birinci derece arkeolojik sit alanı içerisinde yer alan ve 17. yüzyıla tarihlenen Namazgah Hamamı, soyunmalık, ılıkılık ve sıcaklık (çift halvetli) ana bölümlerinden oluşan bir çift hamamdır. Bölge içerisinde yer alan birçok hamam yapısı arasında, büyüklüğü ve korunmuş özgün nitelikleri ile ön plana çıkmaktadır.

1) Hamama ait tarihi eserler kapalı bir alanda sergilenmektedir. Sergiye girişler bir şifre yardımıyla olmaktadır. Ancak güvenlik açısından şifre her deneme de belli bir kurala göre değişmektedir. Aşağıda ilk üç denemedeki şifreler görülmektedir.

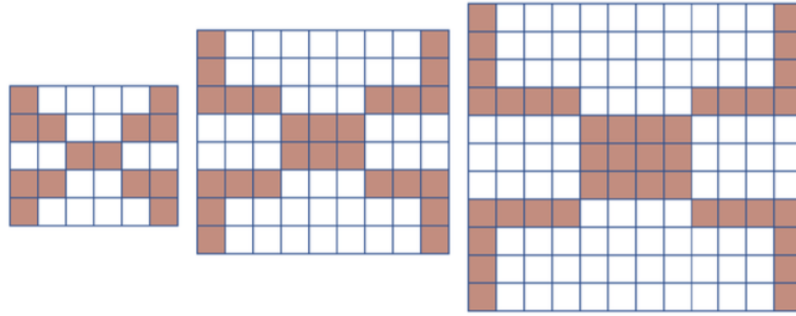


- Buna göre tarihi hamama gelen 20. kişi şifre girerken kaç adet çubuk kullanmalıdır?
Çözümünüzü açıklayınız.
- Hamama gelen n. kişinin şifreyi girerken kaç çubuk kullanacağına dair kuralı yazınız.
Çözümünüzü açıklayınız.

2) Kamulaştırma çalışmaları kapsamında İzmir Büyükşehir Belediyesi mülkiyetine geçen hamam yapısının, özgün işlevinde yerli ve yabancı ziyaretçilere hizmet vermek üzere restore edilmesi kararlaştırılmış ve restorasyon yapım çalışmaları 2016 yılının sonunda başlamış ve 2019 yılında tamamlanmıştır.

Namazgah Hamamı yanındaki konumlanan ve iç avlusu bir dönem açık hava sineması olarak hizmet vermiş olan eski bir han kalıntısı da yapım çalışmaları kapsamında koruma altına alınmıştır.

Aşağıda hamamın avlusunda kullanılacak olan duvar motiflerinden birinin ilk 3 adımını görmektesiniz.



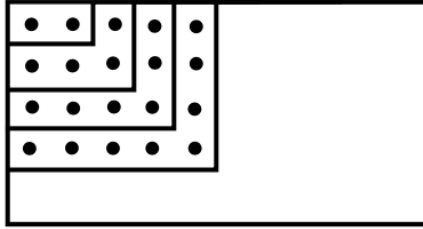
- Buna göre duvar motifinin 5. Adımında;
 - Toplam kaç adet kare bulunur? Çözümünüzü açıklayınız.
 - Taralı kaç adet kare bulunur? Çözümünüzü açıklayınız.
- Duvar motifinin n. adımındaki **toplam kare sayısını** veren kuralı bulunuz. Çözümünüzü açıklayınız.
- Duvar motifinin n. adımındaki **taralı kare sayısını** veren kuralı bulunuz. Çözümünüzü açıklayınız.

Etkinlik 4

Bodrum Antik Tiyatrosu veya kısaca **Antik Tiyatro**, Klasik Antik Çağ'da, Satrap Mausolos'un hüküm sürdüğü MÖ 4. yüzyılda inşa ettirilmiş ve Türkiye'nin Bodrum şehrinde yer alan bir tiyatro binasıdır. Bodrum şehir merkezinin kuzeyinde bulunan tiyatro, Anadolu'nun en eski tiyatroları arasında yer almaktadır. Yapı günümüzde Bodrum'da gerçekleştirilen pek çok kültürel etkinliğe ev sahipliği yapmaktadır.

Yaz konserleri için mimari adına yeni yapılacak olan tiyatro alanlarında merdivenlere ışıklandırma çalışmaları yapılacaktır.

Mimar Volkan Bey, ışıklandırma çalışmalarının tasarımını aşağıdaki gibi çizmiştir.



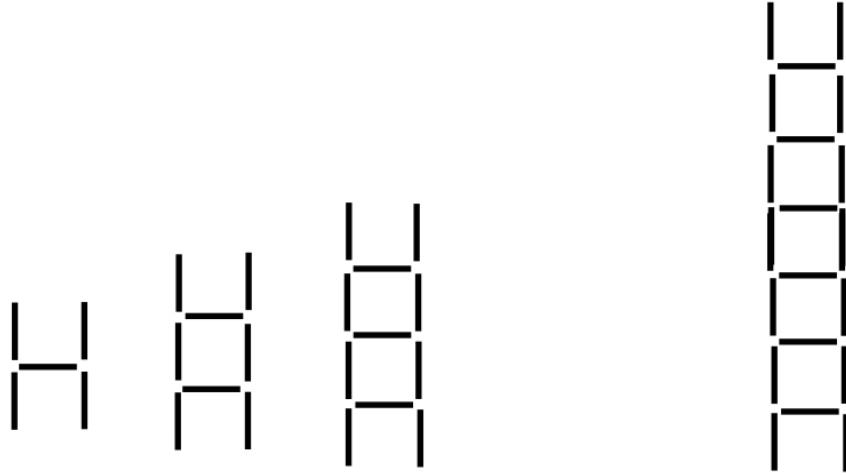
Her bir merdivendeki kaç ışık olacağı ve yeri yukarıdaki görselde belirtilmiştir. Örneğin en üst merdivende (1. merdiven) 2 adet ışık kullanılacaktır.

- Buna göre 5. merdivende kaç adet ışık olmalıdır? Cözümünüzü açıklayınız.
100. merdivende kaç adet ışık olmalıdır? Cözümünüzü açıklayınız.
- n. merdivende kaç adet ışık olacağına dair cebirsel kuralı bulunuz. Cözümünüzü açıklayınız.

Etkinlik 5

Azra kitap okumayı çok seven bir çocuktur. Yatmadan her gece masal okumayı ve dinlemeyi de ihmal etmez. Azra'nın o gece okuduğu masalda yeryüzünden gökyüzüne doğru sonsuz giden bir merdivenden bahsedilmektedir.

Azra okuduğu masaldan etkilenecek şekilde sırayla sonsuza giden merdivenler çizmeye çalışmıştır. Aşağıda Azra'nın çizdiği ilk üç ve altıncı merdiveni görmekteyiz.



1. Adım

2. Adım

3. Adım

4. Adım

5. Adım

6. Adım

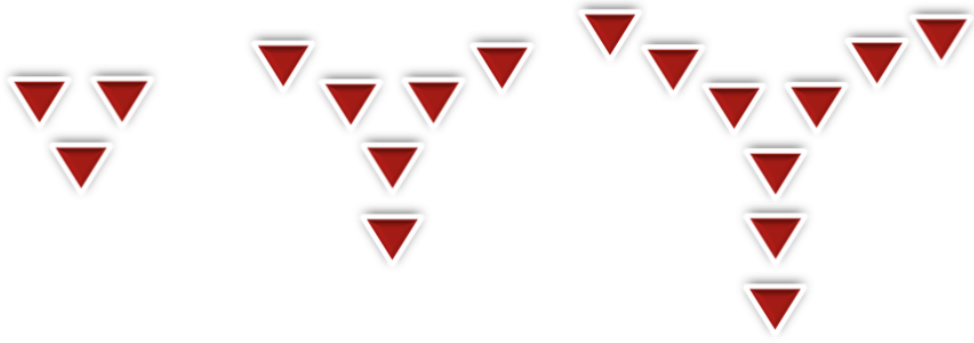
a) Buna göre Azra'nın 4. ve 5. adımı çizebilmesi için kaç adet çubuk gereklidir?
Çözümünüzü açıklayınız.

b) Azra'nın n. adımda çizeceği merdiven için kaç adet çubuk gerekli olduğunu veren cebirsel kuralı bulunuz. Çözümünüzü açıklayınız.

Etkinlik 6

Türkiye bulunan ünlü bir inşaat şirketinin projesi kapsamında önce ülke içerisinde başlayarak daha sonra ülke dışına yayılacak olan bir konut yerleşkesi geliştirilecektir. Projenin amacı konutların plansız yerleşmeye engel olması, görsel anlamda estetik durması ve belli bir düzen oluşturmaktır. Ancak kapladığı alana göre yerleşkeler farklı büyüklükte olacaktır.

Aşağıda projedeki yerleşkelerin belli bir düzen dahilinde kuş bakışı yapılandırıldığını görmekteyiz.



1. Yerleşke

2. Yerleşke

3. Yerleşke

Projedeki her bir yerleşkedeki üçgen sayısı o yerleşkede bulunacak ev sayısını vermektedir. Örneğin 1. yerleşke de 3 adet ev bulunacaktır. Buna göre;

- 10., 20. ve 100. yerleşkelerde kaç adet eve ihtiyaç vardır? Cözümünüzü açıklayınız.
- Yerleşke numarası ile o yerleşke de bulunan ev sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır? Cözümünüzü açıklayınız.
- Yurt dışına yayılması planlanan projede n. yerleşke için kaç adet ev olması gerektiğini veren cebirsel kuralı bulunuz. Cözümünüzü açıklayınız.

Etkinlik 7

Asuman hanım bir açık hava organizasyonu için dört kişilik masaları birleştirerek büyük bir şölen masası oluşturmak istiyor.



1 Masa



2 Masa



3 Masa

Asuman hanım şölen masası için bir organizasyon şirketinden destek almaktadır. Yukarıda organizasyon şirketinin yaptığı düzenleme örneklerini görmekteyiz. Örneğin 1 masaya dört kişi oturmakta, 2 masaya ise altı kişi oturmaktadır.

Buna göre;

- Asuman hanımın hazırladığı organizasyon için 10 masa birleştirilirse masada toplam kaç kişi bulunur? Cözümünüzü açıklayınız.
- Organizasyona 76 kişinin katılabilmesi için kaç masanın birleştirilmesi gerekmektedir? Cözümünüzü açıklayınız.
- Birleştirilen masa sayısı ile masada bulunan toplam kişi sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır? Cözümünüzü açıklayınız.
- Eğer n masa birleştirilirse masada bulunacak toplam kişi sayısını veren cebirsel kuralı bulunuz. Cözümünüzü açıklayınız.

Etkinlik 8

Sıra No	Model	Çubuk Sayısı	Örüntünün Kuralı
1		4	
2			
3			
4			
5			
6			

- Bir örüntüye ait ilk 6 adım ile ilgili verilen tabloyu uygun şekilde doldurunuz.
11. ve 85. Adımda kullanılan çubuk sayısı kaç tanedir? 11. ve 85. adımdaki modeller ne yönde değişir?
- Oluşturduğunuz örüntünün kuralını bulunuz.
- Verilen örüntünün modelinde değişmeyen veya sabit kalan kısımlar var mı? Modeller üzerinde değişmeyen kısımları işaretleyiniz. Bu kısımlarda kaç tane çubuk kullanılmıştır? Değişmeyen kısımlardaki çubuk sayısı ile kural sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır?
- Modellerde her seferinde yeni eklenen çubukları işaretleyiniz. Her seferinde kaç çubuk eklenmiştir? Örüntünün terimleri arasındaki fark kaçtır? Modelde her seferinde eklenen çubukların sayısı, terimler arasındaki fark ve kural arasında bir ilişki var mıdır?

Etkinlik 9

Bir taksici 2 km'lik mesafe için 7 TL, 3 km'lik mesafe için 9 TL, 5 km'lik mesafe için 13 TL ücret almaktadır. Buna göre;

- Taksi şoförünün 1 km'lik ve 10 km'lik mesafeler için müşteriden alacağı ücretleri bulunuz.
- 50 km'lik ve 75 km'lik mesafeler için müşteri kaç TL ücret ödeyecektir? Bu değerleri nasıl buldunuz? Açıklayınız.
- Gidilen mesafenin herhangi bir km'si için müşterinin kaç TL ödeyeceğini nasıl buluruz? Belirlemek için bir kural yazınız. n km yol gidildiğinde müşteri kaç TL öder?
- Kuralı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

Ek Soru?

Yukarıda verilen probleme dair bir örüntü modeli geliştiriniz. Modeli geliştirirken bozuk para modellerinden yararlanabilirsiniz.

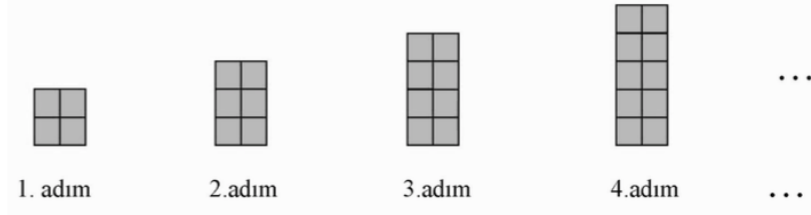
Aşağıdaki alana hazırladığınız örüntü modelini çizin.
Modeli geliştirirken neleri dikkate aldığınızı açıklayınız.



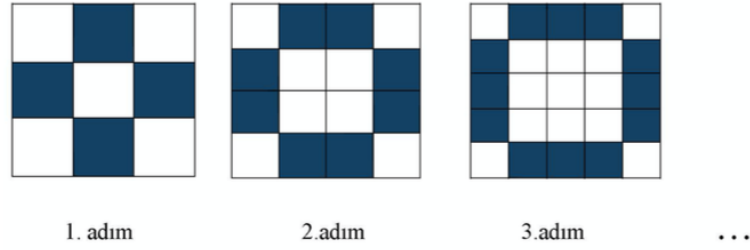
Etkinlik 10

Aşağıdaki örüntülerin kuralını sadece model üzerinden bulunuz. Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

a) Her bir adımda kullanılan birim kare sayısını veren bir kural geliştiriniz.



b) Her bir adımda kutular içindeki beyaz karelerin sayısını veren bir kural geliştiriniz.



Ek Soru?

Banyo ustası olan Levent beyin evinde bir ebeveyn banyosu, bir tane de çocuk banyosu bulunmaktadır.

Levent bey yukarıda verilen örüntülere göre evindeki banyoların dizaynını düzenleyecektir. Buna göre her iki örüntüde 50. ve 75. Adımda dizayn için kullanılması gereken kaç taralı kareye ihtiyacı vardır?

EK 5. Sosyo-matematiksel Normlarla Desteklenmiş Sorgulama Temelli

Öğretime İlişkin Ders İçeriği

Ders Planı-1	
Sınıf:	7 Süre: 1 ders saati (30 dk.)
Öğrenme Alanı:	Cebir
Alt Öğrenme Alanı:	Cebirsel İfadeler
Kazanım(lar):	M.7.2.1.3. Sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimini bulur.
Açıklamalar:	a) Adımlar arasındaki farkı sabit olan örüntülerle sınırlı kalınır. b) Değişken kullanımının önemi ve gerekliliği vurgulanır. c) Sayı örüntüleri incelenerek örüntünün kuralını bir değişken ile (örneğin n cinsinden) yazmaya yönelik çalışmalar yapılır. Örneğin ilk dört terimi 3, 9, 15 ve 21 olan bir aritmetik örüntünün kuralı $6n-3$ olarak ifade edilir. ç) Günlük hayat durumlarında veya şekil örüntülerindeki ilişkileri örüntüye dönüştürerek kuralı bulmaya yönelik çalışmalara da yer verilir.
Gerekli Ön Bilgiler:	M.6.2.1.1. Sözel olarak verilen bir duruma uygun cebirsel ifade ve verilen bir cebirsel ifadeye uygun sözel bir durum yazar. M.6.2.1.2. Cebirsel ifadenin değerini değişkenin alacağı farklı doğal sayı değerleri için hesaplar. M.6.2.1.3. Basit cebirsel ifadelerin anlamını açıklar. M.7.2.1.1. Cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemleri yapar. M.7.2.1.2. Bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarpar.
Öğretme-Öğrenme Yöntem ve Teknikleri:	Soru-cevap Tartışma Grup Çalışması Grup Tartışması Bireysel Çalışma
Beceriler:	İletişim, İlişkilendirme, Cebirsel Düşünme, Sorgulama, Genelleme
Materyaller:	Etkinlik Kağıtları, Sorgulama Temelli Öğretime İlişkin Kartlar

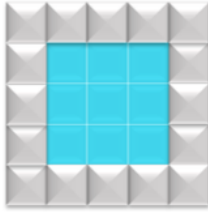
Öğrenme ve Öğretme Etkinlikleri

Öğretmen elinde etkinlik kağıtları ve kartlar ile sınıfa girer.

Öğretmen: Sınıfa sırasıyla aşağıdaki soruları yöneltir.

- Örüntü kavramı size ne çağırıyor?
- Günlük hayatınızda örüntü oluşturduğunu düşündüğünüz durumlara örnek verebilir misiniz?
- Mevsimler, haftanın günleri, aylar sizce örüntü oluşturur mu?
- Dünya çapında olimpiyatlar belirli yıllarda gerçekleştirilir. Örneğin Yaz Olimpiyatları 2008, 2012 gibi her dört yılda bir düzenlenir. Kış Olimpiyatları ise 2010, 2014 şeklindeki yıllarda düzenlenir. 2008 yılından başlayarak hangi yılda hangi olimpiyat gerçekleştirilmiş açıklayabilir misiniz? Sizce bu durum bir örüntü oluşturur mu?

Bu sorular ile sınıfta tartışma ortamı oluşturulur. Öğrenciler sorular üzerine bireysel düşünerek örüntü konusuna giriş yapılır.



Öğretmen tahtaya **Problem-1**'i yapıştırır.

Öğrencilere; “Kaç farklı yolla 3x3 boyutundaki bir havuzun etrafındaki karo ların sayısını, birer birer saymadan, hesaplayabilirsiniz?” sorusunu yöneltir.

Öğrenciler bir günlük hayat problemi ile sorgulama sürecine davet edilir.

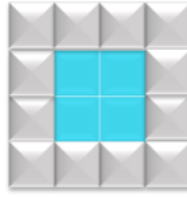
Problem-1 Kenarlık Problemi

“Bir mimar olduğunuzu düşünün. Sizden farklı yüz ölçümüne sahip otellere havuz tasarlanmanız isteniyor.

Örneğin; 1. Otele Şekil-1’deki havuz tasarlanırken, 2. Otele Şekil-2’deki havuz tasarlanıyor.



Şekil-1 Otel-1



Şekil-2 Otel-2

Buna göre;

- 6x6 boyutundaki bir havuz için havuzun etrafında kaç karo bulunması gerekir? Modeli çizerek gösterebilir misiniz?
- 7x7 boyutundaki bir havuz için havuzun etrafında kaç karo bulunması gerekir?
- Peki ya 1000x1000?
- 1000x1000 boyutundaki bir havuz kaç adet mavi karoya sahip olur?

Ardından öğrenciler grupça çalışmaları için üç kişilik dört gruba ayrılır. Oluşan gruplara öğrencileri yönlendirecek komutların bulunduğu kartlar dağıtılır.

Arkadaşının matematiksel açıklamasını anlamaya çalış.	Arkadaşının matematiksel çözümünü açıklamasında ona yardımcı ol.	Arkadaşlarının matematiksel açıklamalarını dinle.	Verilen matematiksel bir açıklamayı anlamadığında arkadaşına veya öğretmenine sor.	Matematiksel bir açıklamaya neden katılmadığını gerekçeleriyle belirt.
Matematiksel çözümünü gerekçelendir.	Matematiksel çözümlerinde çelişki yaşadığında alternatif yolları sorgula.	Açıklamaların da farklı temsil biçimlerini kullan.	Matematiksel çözümlerini savun.	Açıklamalarında matematiksel örüntü ve ilişkileri kullan.
Arkadaşının matematiksel çözümünü sorgula.	Grup arkadaşlarıyla tartışarak matematiksel bir çözüm geliştir.	Farklı matematiksel bir çözüm bul.	Başka bir arkadaşınla konuş.	Yaptığımız sorgulamanın amacını anlamaya çalış.

Bu etkinlikte öğrencilerden bir bölümü verilen örüntüye ait ortak özelliğin fark edilerek örüntüde bulunan ilişkilerin keşfedilmesi beklenmektedir. Öğrencilere 1000 x 1000 boyutundaki bir havuzun etrafında bulunan karo sayısı ile mavi karo sayısı sorularak fark edilen ortak özelliğin transfer edilerek hipotez geliştirme ihtiyacı duymaları beklenmektedir. Ayrıca hipotez geliştirmenin gerekliliğini fark eden öğrencilerin çözüm stratejilerini matematiksel olarak gerekçelendirmeleri beklenmektedir. Ders içeriğine ait her bir sorunun sonunda öğrencilerin açıklamalarda bulunmaları, matematiksel olarak çözümlerini desteklemeleri ve kendi matematiksel bilgilerini kendilerinin elde etmeleri beklenmektedir. Bu etkinliğin en dikkat çeken aşamalarından biri de öğrencilerin farklı cevaplar bulabilecek olması ve tartışma ortamına elverişli olmasıdır. Bu sırada öğretmen, gözlemci ve yol gösterici olarak öğrencilere gerektiği yerde kendi çözümlerini ve başkalarının çözümlerini sorgulamalarını gerektirecek sorular yöneltmektedir.

Örneğin,

- “Nasıl modelledin?”
- “1000x1000 boyutundaki bir havuzun etrafındaki karo sayısını nasıl belirledin? Modelleyerek mi ulaştın? Sence de modellemek zor olmaz mı?”
- “Çözümünün doğru olduğuna nasıl emin oldun, örüntüye ilişkin farklı bir matematiksel çözümü olan var mı?”,
- “Matematiksel çözümünün neden farklı olduğunu düşünüyorsun? Bunu bize nasıl açıklarsın?”,
- “Arkadaşınızın matematiksel düşüncesine katılıyor musunuz? Neden katılıyorsunuz/katılmıyorsunuz?”,
- “Arkadaşınızın çözümünü açıklamak isteyen var mı?”,
- “Düşünceni gerekçelendirir misin?”,
- “Matematiksel düşüncenin doğru olduğundan nasıl emin olabiliyorsun?”,
- “Modellerken nelere dikkat ettin, modeller arasında bir ortaklık var mıdır?”,
- “Sizce otel numarası ile havuzu oluşturan mavi karolar arasında bir ilişki var mıdır? Eğer bir ilişki varsa, nasıl bir ilişki vardır? ”,
- “Çizdiğiniz modeller sizce bir örüntü oluşturur mu? Buna ilişkin düşüncenizi açıkla mısınız?” gibi sorularla öğrenciler örüntüye ilişkin ortak özelliklerin fark edilmesine yönlendirilecektir.

Öğrenciler komut kartlarını kullanarak önce grup arkadaşları ile daha sonra tüm sınıf ile tartışmaya girerek ders bitirilir.

Ders Planı-2	
Sınıf:	7 Süre: 1 ders saati (30 dk.)
Öğrenme Alanı:	Cebir
Alt Öğrenme Alanı:	Cebirsel İfadeler
Kazanım(lar):	M.7.2.1.3. Sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimini bulur.
Açıklamalar:	a) Adımlar arasındaki farkı sabit olan örüntülerle sınırlı kalınır. b) Değişken kullanımının önemi ve gerekliliği vurgulanır. c) Sayı örüntüleri incelenerek örüntünün kuralını bir değişken ile (örneğin n cinsinden) yazmaya yönelik çalışmalar yapılır. Örneğin ilk dört terimi 3, 9, 15 ve 21 olan bir aritmetik örüntünün kuralı $6n-3$ olarak ifade edilir. ç) Günlük hayat durumlarında veya şekil örüntülerindeki ilişkileri örüntüye dönüştürerek kuralı bulmaya yönelik çalışmalara da yer verilir.
Gerekli Ön Bilgiler:	M.6.2.1.1. Sözel olarak verilen bir duruma uygun cebirsel ifade ve verilen bir cebirsel ifadeye uygun sözel bir durum yazar. M.6.2.1.2. Cebirsel ifadenin değerini değişkenin alacağı farklı doğal sayı değerleri için hesaplar. M.6.2.1.3. Basit cebirsel ifadelerin anlamını açıklar. M.7.2.1.1. Cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemleri yapar. M.7.2.1.2. Bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarpar.
Öğretme-Öğrenme Yöntem ve Teknikleri:	Soru-cevap Tartışma Grup Çalışması Bireysel Çalışma
Beceriler:	İletişim, İlişkilendirme, Cebirsel Düşünme, Sorgulama, Genelleme
Materyaller:	Etkinlik Kağıtları, Sorgulama Temelli Öğretime İlişkin Kartlar

Öğrenme ve Öğretme Etkinlikleri

Öğretmen elinde etkinlik kağıtları ve sorgulama temelli öğretime ilişkin kartlar ile sınıfa girer. Ardından tahtaya, getirdiği bal peteği, ayçiçeği ve tavus kuşu görselini yapıştırır.

Öğretmen: Sınıfa sırasıyla aşağıdaki soruları yöneltir.

- Tahtadaki görseller size ne çağırıyor?
- Hiç günlük hayatınızda bal peteği veya tavus kuşu gördünüz mü?
- Ayçiçeğinde dikkatinizi çeken bir nokta var mı?
- Bu üç görsel arasında dikkatinizi çeken ortak bir özellik var mı?

Bu sorular ile sınıfta tartışma ortamı oluşturulur. Örüntü konusunun öneminden bahsedilir.

Öğrencilerin 5. Sınıfta öğrendikleri örüntü konusunun cebirsel düşünme süreçlerine geçişte nasıl kullanılacağını fark etmelerine yönelik sorular sorularak sınıfta bir tartışma ortamı yaratılır.

Örneğin; “Bir arı bal peteğine istediği kadar altıgen şekli ekleyebilir mi? Peki ya arının herhangi bir anda ürettiği altıgen sayısını nasıl bulabiliriz? Buna ulaşmak için hangi bilgileri kullanabiliriz?”

Öğretmen tahtaya artan bir şekil örüntüsü modeli (Problem-2) çizer.

Problem-2



Öğretmen öğrencilere:

- “Tahtada bir arının günden güne ürettiği bal peteklerini görmektesiniz. Şekiller arasında dikkatinizi çeken ortak bir özellik var mıdır?”
- “Neden belirttiğiniz kısımların ortak olduğunu düşünüyorsunuz?”
- “Arı, her bir altıgenini neden farklı renkte üretmiş olabilir?”
- “Sizce gün sayısı ile toplam altıgen sayısı arasında bir ilişki var mıdır?”
- “Sizce altıgen sayısı ile şeklin toplam kenar sayısı arasında bir ilişki var mıdır, varsa nasıl bir ilişki vardır?”
- “4 ve 5. günde petekte bulunan altıgen sayısı kaç adet olur? Çözümünüzü ve buna ilişkin fikrinizi açıklayınız?”
- “115. günde petekte kaç adet altıgen bulunur?”
- “Petekte 115 adet altıgen bulunduğunda arı bal üretmede kaçınıcı günündedir? Çözümünüze ilişkin fikrinizi açıklayınız?” sorularını yöneltir.

Ardından öğrenciler grupça çalışmaları için üç kişilik üç gruba ayrılır. Oluşan gruplara öğrencileri yönlendirecek komutların bulunduğu kartlar dağıtılır.

Arkadaşının matematiksel açıklamasını anlamaya çalış.	Arkadaşının matematiksel çözümünü açıklamasında ona yardımcı ol.	Arkadaşlarının matematiksel açıklamalarını dinle.	Verilen matematiksel bir açıklamayı anlamadığında arkadaşına veya öğretmenine sor.	Matematiksel bir açıklamaya neden katılmadığını gerekçeleriyle belirt.
Matematiksel çözümünü gerekçelendir.	Matematiksel çözümlerinde çelişki yaşadığında alternatif yolları sorgula.	Açıklamaların da farklı temsil biçimlerini kullan.	Matematiksel çözümlerini savun.	Açıklamalarında matematiksel örüntü ve ilişkileri kullan.
Arkadaşının matematiksel çözümünü sorgula.	Grup arkadaşlarıyla tartışarak matematiksel bir çözüm geliştir.	Farklı matematiksel bir çözüm bul.	Başka bir arkadaşınla konuş.	Yaptığımız sorgulamanın amacını anlamaya çalış.

Bu etkinlikte öğrencilerden belirli bir bölümü verilen örüntüdeki adımlar arası ortak özelliklerin fark edilerek transfer edilmesi sonuç olarak bir cebirsel kural bulma ihtiyacı duymaları beklenmektedir. Daha önceki yıllarda örüntü konusunu öğrenmiş olan öğrencilerin, adımlar arasındaki ilişkiyi ortaklıkları fark ederek açıklamaları beklenmektedir. Bu ilişkiye nasıl karar verdikleri sorularak öğrencilerin tartışması ve bunun sonucunda örüntüde bulunan ilişkileri matematiksel olarak açıklamaları beklenmektedir. Öğrencilere problem durumları günlük hayata entegre edilip sunularak sorgulama süreci ile örüntüyü cebirsel olarak anlamlandırmaları beklenmektedir. Ayrıca öğrencilere verilen kartların grup içi tartışmayı sürekli kılması ve bu şekilde sorgulama sürecini aktif tutması amaçlanmaktadır. Bu süreçte öğretmen, gözlemci ve yol gösterici olarak öğrencilere gerektiği yerde kendi çözümlerini ve başkalarının çözümlerini sorgulamalarını gerektirecek sorular yöneltecektir.

Örneğin,

- “Örüntüye ilişkin adımlar arasında fark ettiğin bir ortak özellik var mı?”
- “115. günde petekte bulunacak olan altıgen sayısını nasıl belirledin? Modelleyerek mi ulaştın? Sence de modellemek zor olmaz mı? Buna ilişkin düşünceni açıklar mısın?”
- “Çözümünün doğru olduğuna nasıl emin oldun, örüntüye ilişkin farklı bir matematiksel çözümü olan var mı?”,
- “Matematiksel çözümünün neden farklı olduğunu düşünüyorsun? Bunu bize nasıl açıklarsın?”,
- “Arkadaşınızın matematiksel düşüncesine katılıyor musunuz? Neden katılıyorsun/katılmıyorsun?”,
- “Arkadaşınızın çözümünü açıklamak isteyen var mı?”,
- “Düşünceni gerekçelendirir misin?”,
- “Matematiksel düşüncenin doğru olduğundan nasıl emin olabilirsin?”

Öğrenciler komut kartlarını kullanarak önce grup arkadaşları ile daha sonra tüm sınıf ile tartışmaya girerek ders bitirilir.

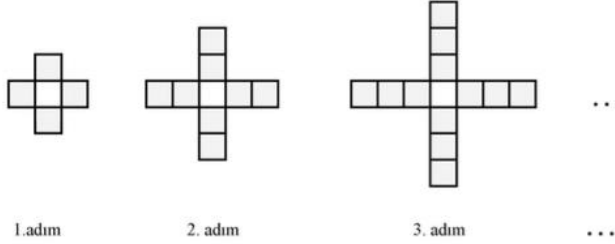
Ders Planı-3	
Sınıf:	7 Süre: 1 ders saati (30 dk.)
Öğrenme Alanı:	Cebir
Alt Öğrenme Alanı:	Cebirsel İfadeler
Kazanım(lar):	M.7.2.1.3. Sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimini bulur.
Açıklamalar:	a) Adımlar arasındaki farkı sabit olan örüntülerle sınırlı kalınır. b) Değişken kullanımının önemi ve gerekliliği vurgulanır. c) Sayı örüntüleri incelenerek örüntünün kuralını bir değişken ile (örneğin n cinsinden) yazmaya yönelik çalışmalar yapılır. Örneğin ilk dört terimi 3, 9, 15 ve 21 olan bir aritmetik örüntünün kuralı $6n-3$ olarak ifade edilir. ç) Günlük hayat durumlarında veya şekil örüntülerindeki ilişkileri örüntüye dönüştürerek kuralı bulmaya yönelik çalışmalara da yer verilir.
Gerekli Ön Bilgiler:	M.6.2.1.1. Sözel olarak verilen bir duruma uygun cebirsel ifade ve verilen bir cebirsel ifadeye uygun sözel bir durum yazar. M.6.2.1.2. Cebirsel ifadenin değerini değişkenin alacağı farklı doğal sayı değerleri için hesaplar. M.6.2.1.3. Basit cebirsel ifadelerin anlamını açıklar. M.7.2.1.1. Cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemleri yapar. M.7.2.1.2. Bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarpar.
Öğretme-Öğrenme Yöntem ve Teknikleri:	Soru-cevap Tartışma Grup Çalışması Grup Tartışması Bireysel Çalışma
Beceriler:	İletişim, İlişkilendirme, Cebirsel Düşünme, Sorgulama, Genelleme
Materyaller:	Etkinlik Kağıtları, Sorgulama Temelli Öğretime İlişkin Kartlar

Öğrenme ve Öğretme Etkinlikleri

Öğretmen elinde etkinlik kağıtları ve sorgulama temelli öğretime ilişkin kartlar ile sınıfa girer.

Öğretmen tahtaya dörder olarak artan bir şekil örüntüsü modeli (Problem-3) çizer.

Problem-3



Öğretmen öğrencilere:

- "Tahtada ilk üç adımı verilen bir şekil örüntüsü görmektesiniz. Şekiller arasında dikkatinizi çeken ortak bir özellik var mıdır?"
- "Örüntünün ne gibi özelliklerini gözlemlediniz?"
- "Verilen örüntünün 6. adımında kaç adet kare bulunacaktır? Nasıl bulabiliriz?"
- "45. Adımında kaç adet birimkare bulunacaktır? Sizce 6. adımda izlediğimiz yolu 45. adımda da kullanmak mantıklı mıdır?"
- "Model üzerinde ortak olarak neyi gözlemlediniz? Her adımdaki modellerin ortak ya da değişmeyen kısımları var mıdır? Bu kısımlarla birimkare sayısı arasında bir ilişki olabilir mi?"
- "Örüntünün 100. adımında kaç adet birimkare olacaktır? Teker teker saymak yerine model üzerinden bunu nasıl bulabiliriz?"
- "Birimkare sayısını bulurken hangi işlem yollarını izlediniz?"
- "Örüntünün diğer adımlarında bulunacak birimkare sayısını bulmak için daha çabuk ve kısa bir yol bulabilir miyiz?" sorularını yönlendirir.

Ardından öğrenciler grupça çalışmaları için üç kişilik üç gruba ayrılır. Oluşan gruplara öğrencileri yönlendirecek komutların bulunduğu kartlar dağıtılır.

Arkadaşının matematiksel açıklamasını anlamaya çalış.	Arkadaşının matematiksel çözümünü açıklamasında ona yardımcı ol.	Arkadaşlarının matematiksel açıklamalarını dinle.	Verilen matematiksel bir açıklamayı anlamadığında arkadaşına veya öğretmenine sor.	Matematiksel bir açıklamaya neden katılmadığını gerekçeleriyle belirt.
Matematiksel çözümünü gerekçelendir.	Matematiksel çözümlerinde çelişki yaşadığında alternatif yolları sorgula.	Açıklamaların da farklı temsil biçimlerini kullan.	Matematiksel çözümünü savun.	Açıklamalarında matematiksel örüntü ve ilişkileri kullan.
Arkadaşının matematiksel çözümünü sorgula.	Grup arkadaşlarıyla tartışarak matematiksel bir çözüm geliştir.	Farklı matematiksel bir çözüm bul.	Başka bir arkadaşınla konuş.	Yaptığımız sorgulamanın amacını anlamaya çalış.

Bu etkinlikte öğrencilerden belirli bir bölümü verilen örüntüdeki adımlar arası ortak özelliklerin fark edilerek transfer edilmesi sonuç olarak bir cebirsel kural bulma ihtiyacı duymaları beklenmektedir. Daha önceki yıllarda örüntü konusunu öğrenmiş olan öğrencilerin, adımlar arasındaki ilişkiyi ortaklıkları fark ederek açıklamaları

beklenmektedir. Bu ilişkiye nasıl karar verdikleri sorularak öğrencilerin tartışması ve bunun sonucunda örüntüde bulunan ilişkileri matematiksel olarak açıklamaları beklenmektedir. Öğrencilere problem durumları günlük hayata entegre edilip sunularak sorgulama süreci ile örüntüyü cebirsel olarak anlamlandırmaları beklenmektedir. Ayrıca öğrencilere verilen kartların grup içi tartışmayı sürekli kılması ve bu şekilde sorgulama sürecini aktif tutması amaçlanmaktadır. Bu süreçte öğretmen, gözlemci ve yol gösterici olarak öğrencilere gerektiği yerde kendi çözümlerini ve başkalarının çözümlerini sorgulamalarını gerektirecek sorular yöneltmektedir.

Örneğin,

- “Örüntüye ilişkin adımlar arasında fark ettiğin bir ortak özellik var mı?”
- “Örüntünün 6. Adımına nasıl ulaştın, çözümünü gerekçelendirerek açıklar mısın?”
- “100. günde bulunacak olan birimkare sayısını nasıl belirledin? Modelleyerek mi ulaştın? Nasıl modelledin? Sence de modellemek zor olmaz mı? Buna ilişkin düşünceni açıklar mısın?”
- “Çözümünün doğru olduğuna nasıl emin oldun, örüntüye ilişkin farklı bir matematiksel çözümü olan var mı?”,
- “Matematiksel çözümünün neden farklı olduğunu düşünüyorsun? Bunu bize nasıl açıklarsın?”,
- “Arkadaşınızın matematiksel düşüncesine katılıyor musunuz? Neden katılıyorsun/katılmıyorsun?”,
- “Arkadaşınızın çözümünü açıklamak isteyen var mı?”,
- “Düşünceni gerekçelendirir misin?”,
- “Matematiksel düşüncenin doğru olduğundan nasıl emin olabilirsin?”

Öğrenciler komut kartlarını kullanarak önce grup arkadaşları ile daha sonra tüm sınıf ile tartışmaya girerek ders bitirilir.

Ders Planı-4	
Sınıf:	7 Süre: 1 ders saati (30 dk.)
Öğrenme Alanı:	Cebir
Alt Öğrenme Alanı:	Cebirsel İfadeler
Kazanım(lar):	M.7.2.1.3. Sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimini bulur.
Açıklamalar:	a) Adımlar arasındaki farkı sabit olan örüntülerle sınırlı kalınır. b) Değişken kullanımının önemi ve gerekliliği vurgulanır. c) Sayı örüntüleri incelenerek örüntünün kuralını bir değişken ile (örneğin n cinsinden) yazmaya yönelik çalışmalar yapılır. Örneğin ilk dört terimi 3, 9, 15 ve 21 olan bir aritmetik örüntünün kuralı $6n-3$ olarak ifade edilir. ç) Günlük hayat durumlarında veya şekil örüntülerindeki ilişkileri örüntüye dönüştürerek kuralı bulmaya yönelik çalışmalara da yer verilir.
Gerekli Ön Bilgiler:	M.6.2.1.1. Sözel olarak verilen bir duruma uygun cebirsel ifade ve verilen bir cebirsel ifadeye uygun sözel bir durum yazar. M.6.2.1.2. Cebirsel ifadenin değerini değişkenin alacağı farklı doğal sayı değerleri için hesaplar. M.6.2.1.3. Basit cebirsel ifadelerin anlamını açıklar. M.7.2.1.1. Cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemleri yapar. M.7.2.1.2. Bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarpar.
Öğretme-Öğrenme Yöntem ve Teknikleri:	Soru-cevap Tartışma Grup Çalışması Grup Tartışması Bireysel Çalışma
Beceriler:	İletişim, İlişkilendirme, Cebirsel Düşünme, Sorgulama, Genelleme
Materyaller:	Etkinlik Kağıtları, Sorgulama Temelli Öğretime İlişkin Kartlar

Öğrenme ve Öğretme Etkinlikleri

Öğretmen elinde etkinlik kağıtları ve sorgulama temelli öğretime ilişkin kartlar ile sınıfa girer.

Problem-4

Bir organizasyon şirketinde çalışan Hande Hanım Ayvalık Amfi Tiyatroda gerçekleştirilecek olan bir etkinliği düzenlemek üzere görevlendirilmiştir. Ordu'dan Balıkesir'e yola çıkan Hande Hanım ertesi gün Ayvalık'a varmıştır. Aşağıdaki diyagramda tiyatronun ilk üç sırası gösterilmiştir. Örneğin ilk sırada (gösteri perdesinin önü) 6 koltuk vardır.



GÖSTERİ PERDESİ

Öğretmen öğrencilere: "Evet çocuklar, tiyatronun oturma düzeninin ayarlanmasında Hande hanıma yardım etmemiz gerekiyor. Önce grup arkadaşlarınızla ardından tüm sınıf ile tartışarak Hande hanımın koltukları düzenlemesinde kafasına takılan aşağıdaki sorulara çözüm üretmeye çalışalım."

- "Tiyatronun 4. sırasında kaç adet koltuk bulunacaktır? Nasıl bulabiliriz?"
- "Nasıl buldun? Biraz daha açıkla mısın? Çizerek mi buldun?"
- "Çizerken nelere dikkat ettin, neye göre çizdin?"
- "Çözümünün doğru olduğuna nasıl emin oldun?"
- "7. Sırada kaç adet koltuk bulunacaktır?"
- "Neden, açıkla mısınız?"
- "12. sırada kaç adet koltuk bulunacaktır?"
- "7. ve 12. Sırada kaç adet koltuk bulunduğunu bulabilmek için şekil üzerinde nelere dikkat ettiniz?"
- "104. sırada kaç adet koltuk bulunacaktır? Sizce 4. sırayı bulurken izlediğimiz yolu 104. sırada da kullanmak mantıklı mıdır?"
- "Model üzerinde ortak olarak neyi gözlemlediniz? Her adımdaki modellerin ortak ya da değişmeyen kısımları var mıdır?"
- "Koltuk sayılarına sayarak mı ulaştınız? O zaman tiyatronun 378. sırasında kaç adet koltuk bulunacaktır, sayabilir misiniz? Teker teker saymak yerine model üzerinden bunu nasıl bulabiliriz?"
- "Koltuk sayısını bulurken hangi işlem yollarını izlediniz?"
- "Herhangi bir sırada bulunacak olan koltuk sayısını bulmak için daha çabuk ve kısa bir yol bulabilir miyiz, yoksa teker teker sayarak devam etmek mi mantıklı?"
- "Bulduğunuz yolu açıkla mısınız?"
- "Bulduğunuz genel kuralın geçerli olduğundan nasıl emin olabiliyorsunuz?"
- "Bulduğunuz genel kural üzerine düşününüz. Aynı genel kurala sahip farklı örüntüler oluşturulabilir mi?"
- "Ulaştığınız genel kurala sahip, yeni bir problem durumu ortaya koyun ve modelleyin." sorularını yönlendirir.

Ardından öğrenciler grupça çalışmaları için üç kişilik üç gruba ayrılır. Oluşan gruplara öğrencileri yönlendirecek komutların bulunduğu kartlar dağıtılır.

Arkadaşının matematiksel açıklamasını anlamaya çalış.	Arkadaşının matematiksel çözümünü açıklamasında ona yardımcı ol.	Arkadaşlarının matematiksel açıklamalarını dinle.	Verilen matematiksel bir açıklamayı anlamadığında arkadaşına veya öğretmene sor.	Matematiksel bir açıklamaya neden katılmadığını gerekçelerine belirt.
Matematiksel çözümünü gerekçelendir.	Matematiksel çözümlerinde çelişki yaşadığında alternatif yolları sorgula.	Açıklamaların da farklı temsil biçimlerini kullan.	Matematiksel çözümlerini savun.	Açıklamalarında matematiksel örüntü ve ilişkileri kullan.
Arkadaşının matematiksel çözümünü sorgula.	Grup arkadaşlarıyla tartışarak matematiksel bir çözüm geliştir.	Farklı matematiksel bir çözüm bul.	Başka bir arkadaşınla konuş.	Yaptığımız sorgulamanın amacını anlamaya çalış.

Bu etkinlikte öğrencilerden belirli bir bölümü verilen örüntüdeki adımlar arası ortak özelliklerin fark edilerek transfer edilmesi sonuç olarak bir cebirsel kural bulma ihtiyacı duymaları beklenmektedir. Daha önceki yıllarda örüntü konusunu öğrenmiş olan öğrencilerin, adımlar arasındaki ilişkiyi ortaklıkları fark ederek açıklamaları beklenmektedir. Bu ilişkiye nasıl karar verdikleri sorularak öğrencilerin tartışması ve bunun sonucunda örüntüde bulunan ilişkileri matematiksel olarak açıklamaları beklenmektedir. Öğrencilere problem durumları günlük hayata entegre edilip sunularak sorgulama süreci ile örüntüyü cebirsel olarak anlamlandırmaları beklenmektedir. Ayrıca öğrencilere verilen kartların grup içi tartışmayı sürekli kılması ve bu şekilde sorgulama sürecini aktif tutması amaçlanmaktadır. Bu süreçte öğretmen, gözlemci ve yol gösterici olarak öğrencilere gerektiği yerde kendi çözümlerini ve başkalarının çözümlerini sorgulamalarını gerektirecek sorular yöneltilmektedir.

Örneğin,

- “Çözümünün doğru olduğuna nasıl emin oldun, örüntüye ilişkin farklı bir matematiksel çözümü olan var mı?”,
- “Matematiksel çözümünün neden farklı olduğunu düşünüyorsun? Bunu bize nasıl açıklarsın?”,
- “Arkadaşınızın matematiksel düşüncesine katılıyor musunuz? Neden katılıyorsun/katılmıyorsun?”,
- “Arkadaşınızın çözümünü açıklamak isteyen var mı?”,
- “Düşünceni gerekçelendirir misin?”,
- “Matematiksel düşüncenin doğru olduğundan nasıl emin olabilirsin?”

Öğrenciler komut kartlarını kullanarak önce grup arkadaşları ile daha sonra tüm sınıf ile tartışmaya girerek ders bitirilir.

Ders Planı-5	
Sınıf:	7 Süre: 1 ders saati (30 dk.)
Öğrenme Alanı:	Cebir
Alt Öğrenme Alanı:	Cebirsel İfadeler
Kazanım(lar):	M.7.2.1.3. Sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimini bulur.
Açıklamalar:	a) Adımlar arasındaki farkı sabit olan örüntülerle sınırlı kalınır. b) Değişken kullanımının önemi ve gerekliliği vurgulanır. c) Sayı örüntüleri incelenerek örüntünün kuralını bir değişken ile (örneğin n cinsinden) yazmaya yönelik çalışmalar yapılır. Örneğin ilk dört terimi 3, 9, 15 ve 21 olan bir aritmetik örüntünün kuralı $6n-3$ olarak ifade edilir. ç) Günlük hayat durumlarında veya şekil örüntülerindeki ilişkileri örüntüye dönüştürerek kuralı bulmaya yönelik çalışmalara da yer verilir.
Gerekli Ön Bilgiler:	M.6.2.1.1. Sözel olarak verilen bir duruma uygun cebirsel ifade ve verilen bir cebirsel ifadeye uygun sözel bir durum yazar. M.6.2.1.2. Cebirsel ifadenin değerini değişkenin alacağı farklı doğal sayı değerleri için hesaplar. M.6.2.1.3. Basit cebirsel ifadelerin anlamını açıklar. M.7.2.1.1. Cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemleri yapar. M.7.2.1.2. Bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarpar.
Öğretme-Öğrenme Yöntem ve Teknikleri:	Soru-cevap Tartışma Grup Çalışması Grup Tartışması Bireysel Çalışma
Beceriler:	İletişim, İlişkilendirme, Cebirsel Düşünme, Sorgulama, Genelleme
Materyaller:	Etkinlik Kağıtları, Sorgulama Temelli Öğretime İlişkin Kartlar

Öğrenme ve Öğretme Etkinlikleri

Öğretmen elinde etkinlik kağıtları ve sorgulama temelli öğretime ilişkin kartlar ile sınıfa girer.

Öğretmen tahtaya $\frac{1}{2}$ ve $\frac{2}{3}$ kesirlerini yazar.

Öğretmen: “Tahtaya yazdığım kesirler sizin için ne ifade ediyor? Bu kesirleri nasıl açıklarsınız veya modellersiniz?” sorusu ile derse giriş yapılır. Öğrenciler tartışarak yorumlamaya başlar.

Ardından öğretmen tahtaya $\frac{5}{2}$ ve $\frac{5}{4}$ kesirlerini yazar.

Öğretmen: “Peki ya bu kesirleri nasıl açıklarsınız ya da modellersiniz?” sorusu ile öğrencileri bir önceki tartışmada verdikleri cevaplar doğrultusunda sorgulamaya yönlendirerek çelişkiye düşürür. Öğrenciler tekrar bireysel düşünerek kesirleri ilişkilendirmeye çalışır.

Öğretmen: “Bu dersimizde birlikte bir etkinlik üzerine düşüneceğiz.” Diyerek öğrencileri ders içeriği hakkında bilgilendirir. Öğrencilere **Problem-5** dağıtılır.

Öğretmen: “Etkinlik kağıdını herkes bireysel bir şekilde incelesin.

Öğretmen öğrencilere aşağıdaki soruları yöneltir:

Problem-5

Yedikçe Küçülen Serkan

Obezite genel olarak bedenin yağ kütlelerinin yağsız kütle oranının aşırı artması sonucu boy uzunluğuna göre vücut ağırlığının arzu edilen düzeyin üstüne çıkması durumuna obezite adı verilmektedir. Obezite günümüzde gelişmiş ve gelişmekte olan ülkelerin en önemli sağlık sorunları arasında yer almaktadır.



Obezite problemi yaşayan Serkan bu hastalıkla mücadele edebilmek için düzenli doktora gitmeye başlamıştır. Doktoru diyetisyeni ile birlikte Serkan'a uzun soluklu bir beslenme planı hazırlamıştır. Bu plana göre Serkan'ın her gün yediği çikolata miktarı belli bir düzene göre azaltılacaktır. Aşağıdaki tabloda doktorunun Serkan'a verdiği beslenme planını görmekteyiz.

Örneğin birinci gün serhat 2 bütün çikolata yiyebilirken ikinci gün bu sayı 3'te 2'sine düşecektir. Aşağıdaki tabloda ilk iki gün yediği çikolata miktarını görmekteyiz.

Gün Sayısı	Miktar	Çikolata Miktarının Modellenmesi
1. Gün	$2\frac{2}{1}$	
2. Gün	$3\frac{3}{2}$	
3. Gün	$4\frac{4}{3}$	
4. Gün	$5\frac{5}{4}$	
5. Gün	$6\frac{6}{5}$	
6. Gün	$7\frac{7}{6}$	

- Serkan'ın günden güne yediği çikolata miktarı hakkında neler söyleyebilirsiniz?

- Serkan 12. ve 17. günlerde çikolatanın kaçta kaçını yeme hakkına sahip olacaktır?

- Peki ya 100. günde?

- Gün sayısı ile yediği çikolata miktarı arasında bir ilişki var mıdır?

- Varsa/yoksa neden var/yok? Düşünceni gerekçelendirir misin?

- Serkan bir günde $\frac{11}{10}$ dilim çikolata yediğine göre bu miktarı kaçınıcı gün yediğini bulabilir misin? Nasıl bulduğunu açıklar mısın?

- Serkan bir günde 1,01 dilim çikolata yediğine göre bu miktarı kaçınıcı gün yediğini bulabilir misin? Nasıl bulduğunu açıklar mısın?

- Herhangi bir günde yenilmesi gereken çikolata miktarını veren cebirsel bir kural bulunuz ve kuralı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

Öğrenciler üç kişilik dört gruba ayrılır. Oluşan gruplara öğrencileri yönlendirecek komutların bulunduğu kartlar dağıtılır.

Arkadaşının matematiksel açıklamasını anlamaya çalış.	Arkadaşının matematiksel çözümünü açıklamasında ona yardımcı ol.	Arkadaşlarının matematiksel açıklamalarını dinle.	Verilen matematiksel bir açıklamayı anlamadığında arkadaşına veya öğretmene sor.	Matematiksel bir açıklamaya neden katılmadığını gerekçelerle belirt.
Matematiksel çözümünü gerekçelendir.	Matematiksel çözümünde çelişki yaşadığında alternatif yolları sorgula.	Açıklamaların da farklı temsil biçimlerini kullan.	Matematiksel çözümünü savun.	Açıklamalarında matematiksel örüntü ve ilişkileri kullan.
Arkadaşının matematiksel çözümünü sorgula.	Grup arkadaşlarıyla tartışarak matematiksel bir çözüm geliştir.	Farklı matematiksel bir çözüm bul.	Başka bir arkadaşınla konuş.	Yaptığımız sorgulamanın amacını anlamaya çalış.

Bu etkinlikte öğrencilerden bir örüntüde adımlar arası artış veya azalış olabileceğini gözlemlemeleri beklenmektedir. Öğretmen dersin girişinde öğrencilere öncelikle bir basit kesir sunarak onu modellemelerini istemiş (örneğin bu noktada öğrencilerden bir bütün çizip 2 eş parçaya ayırıp 1'ini belirtmesi (taraması, boyaması, çizmesi vs.) beklenmektedir, ardından bileşik kesir verilerek öğrencilerin çelişkiye düşürülmesi hedeflenmektedir. Bu noktada öğrenciler bir bütünü 3 eş parçaya ayırıp 5 parçayı belirtme ihtiyacı güdecek ancak 5 parçaya sahip olmadığını fark eden öğrencilerin çelişkiye düşerek sorgulama ihtiyacı duyması beklenmektedir. Öğrencilerin bu noktada bir bileşik kesri modelleme de alternatif yolları sorgulaması gerekmektedir. Öğretmen dersin devamında kesirler ile ilgili bir örüntü etkinliği sunarak verilen örüntüye ait ortak özelliğin (gün sayısı ile yenilen çikolata miktarı arasındaki ilişki) fark edilerek diğer günlerde yenmesi gereken çikolata miktarını kesirler konusu ile ilişkilendirmesi beklenmektedir. 100. ve n. günde yenilmesi gereken çikolata miktarı sorularak fark edilen ortak özelliğin transfer edilerek hipotez geliştirme ihtiyacı duymaları beklenmektedir. Ayrıca hipotez geliştirmenin gerekliliğini fark eden öğrencilerin çözüm stratejilerini ve geliştirdikleri cebirsel kuralı nasıl geliştirdiklerini matematiksel olarak gerekçelendirmeleri beklenmektedir. Daha sonra “neden” ve “nasıl” sorularıyla öğrencilerin düşünmeye ve sorgulamaya yönlendirilmesi gerekir. Bu nedenle öğretmen sorgulama temelli öğretimin gereği ile, gözlemci ve yol gösterici olarak öğrencilere gerektiği yerde kendi çözümlerini ve başkalarının çözümlerini sorgulamalarını gerektirecek sorular yöneltilmektedir.

Örneğin,

- “Nasıl modelledin?”
- “100. Günde yenilmesi gereken çikolata miktarını nasıl belirleyebilirsin?”
- “Çözümünün doğru olduğuna nasıl emin oldun, örüntüye ilişkin farklı bir matematiksel çözümü olan var mı?”,
- “Matematiksel çözümünün neden farklı olduğunu düşünüyorsun? Bunu bize nasıl açıklarsın?”,
- “Arkadaşınızın matematiksel düşüncesine katılıyor musunuz? Neden katılıyorsunuz/katılmıyorsunuz?”,
- “Arkadaşınızın çözümünü açıklamak isteyen var mı?”,
- “Düşünceni gerekçelendirir misin?”,
- “Matematiksel düşüncenin doğru olduğundan nasıl emin olabilirsin?”,
- “Modellerken nelere dikkat ettin, modeller arasında bir ortaklık var mıdır?”,
- “Sizce gün sayısı ile yenilmesi gereken çikolata miktarı arasında bir ilişki var mıdır? Eğer bir ilişki varsa, nasıl bir ilişki vardır?”,
- “Serkan’ın n. günde yiyeceği çikolata miktarını veren kuralı nasıl geliştirdiğini açıklar mısın? Bu kuralı geliştirirken etkinlikte verilen hangi bilgileri kullandın, açıklar mısın?”,
- “Bulduğunuz genel kuralın geçerli olduğundan nasıl emin olabiliyorsunuz?” gibi sorularla öğrenciler örüntüleri kullanarak aritmetik genellemeden cebirsel genellemeye geçmesi hedeflenmektedir.

Öğrenciler komut kartlarını kullanarak önce grup arkadaşları ile daha sonra tüm sınıf ile tartışmaya girerek ders bitirilir.

Ders Planı-6	
Sınıf:	7 Süre: 1 ders saati (30 dk.)
Öğrenme Alanı:	Cebir
Alt Öğrenme Alanı:	Cebirsel İfadeler
Kazanım(lar):	M.7.2.1.3. Sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimini bulur.
Açıklamalar:	a) Adımlar arasındaki farkı sabit olan örüntülerle sınırlı kalınır. b) Değişken kullanımının önemi ve gerekliliği vurgulanır. c) Sayı örüntüleri incelenerek örüntünün kuralını bir değişken ile (örneğin n cinsinden) yazmaya yönelik çalışmalar yapılır. Örneğin ilk dört terimi 3, 9, 15 ve 21 olan bir aritmetik örüntünün kuralı $6n-3$ olarak ifade edilir. ç) Günlük hayat durumlarında veya şekil örüntülerindeki ilişkileri örüntüye dönüştürerek kuralı bulmaya yönelik çalışmalara da yer verilir.
Gerekli Ön Bilgiler:	M.6.2.1.1. Sözel olarak verilen bir duruma uygun cebirsel ifade ve verilen bir cebirsel ifadeye uygun sözel bir durum yazar. M.6.2.1.2. Cebirsel ifadenin değerini değişkenin alacağı farklı doğal sayı değerleri için hesaplar. M.6.2.1.3. Basit cebirsel ifadelerin anlamını açıklar. M.7.2.1.1. Cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemleri yapar. M.7.2.1.2. Bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarpar.
Öğretme-Öğrenme Yöntem ve Teknikleri:	Soru-cevap Tartışma Grup Çalışması Grup Tartışması Bireysel Çalışma
Beceriler:	İletişim, İlişkilendirme, Cebirsel Düşünme, Sorgulama, Genelleme
Materyaller:	Etkinlik Kağıtları, Sorgulama Temelli Öğretime İlişkin Kartlar

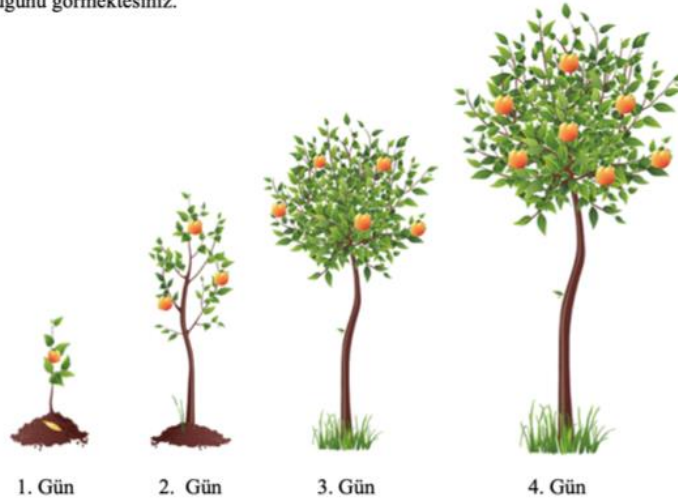
Öğrenme ve Öğretme Etkinlikleri

Öğretmen elinde etkinlik kağıtları ve sorgulama temelli öğretime ilişkin kartlar ile sınıfa girer. **Problem-6**'yı tahtaya yansıtır. Öğrencilerin dikkati çekilir.

Problem-6

Sonsuz Büyüme Problemi

Bitkilerde döllenme sonunda yumurtacıktan oluşan ve yeni bir bitki oluşmasını sağlayan taneye **tohum** adı verilir. Aşağıda bir bitkinin günden güne çimlenerek meyve veren bir ağaca dönüştüğünü görmekteyiz.



Öğretmen öğrencilere:
“Evet çocuklar, problemi inceleyelim. Bir bitkinin günden güne çimlenerek meyve veren bir ağaca dönüştüğünü görmekteyiz. Bir çiftçi olduğunuzu hayal edin, o yıl olacak meyve hasadını belirlemeniz ve işlerinizi günden güne elde ettiğiniz meyve miktarına göre düzenlemeniz gerekiyor. Bunun için önce grup arkadaşlarınızla birlikte daha

sonra tüm sınıf arkadaşlarınızla tartışarak problemlere çözüm üretmeniz gerekmektedir.”

Ardından öğrenciler grupça çalışmaları için üç kişilik üç gruba ayrılır. Oluşan gruplara öğrencileri yönlendirecek komutların bulunduğu kartlar dağıtılır.

Arkadaşının matematiksel açıklamasını anlamaya çalış.	Arkadaşının matematiksel çözümünü açıklamasında ona yardımcı ol.	Arkadaşlarının matematiksel açıklamalarını dinle.	Verilen matematiksel bir açıklamayı anlamadığında arkadaşına veya öğretmenine sor.	Matematiksel bir açıklamaya neden katılmadığını gerekçelerine belirt.
Matematiksel çözümünü gerekçelendir.	Matematiksel çözümlerinde çelişki yaşadığında alternatif yolları sorgula.	Açıklamaların da farklı temsil biçimlerini kullan.	Matematiksel çözümlerini savun.	Açıklamalarında matematiksel örüntü ve ilişkileri kullan.
Arkadaşının matematiksel çözümünü sorgula.	Grup arkadaşlarıyla tartışarak matematiksel bir çözüm geliştir.	Farklı matematiksel bir çözüm bul.	Başka bir arkadaşla konuş.	Yaptığımız sorgulamanın amacını anlamaya çalış.

- "10. günde ağaçta toplam da kaç adet kayısı olur? Nasıl bulduğunu açıklar mısın?"
- "Üzerine ekleyerek mi devam ettin? Neden üzerine ekledin?"
- "65 gün sonra ağaçta kaç adet kayısı bulunur?"
- "Neden, açıklar mısınız?"
- "Sizce ağaç bu şekilde büyümeye devam edecek midir?"
- "Gün sayısı ile ağacın meyve sayısı arasında bir ilişki var mıdır?"
- "Bir ilişki varsa ilişkiyi açıklar mısın?"
- "Herhangi bir günde ağaçta oluşmuş kayısı sayısını nasıl bulabiliriz?"
- "Çözümünün doğru olduğuna nasıl emin oldun?"
- "1000. gün ağacınızda kaç adet meyveniz (kayısı) bulunacaktır?"
- "Neden, açıklar mısınız?"
- "Kayısı sayısını bulurken hangi işlem yollarını izlediniz?"
- "Birkaç yıl sonra ağaçta kaç kayısı olduğunu bulabilmek için de yine üzerine mi saymamız gerekir?"
- "Herhangi bir günde ağaçta kaç adet kayısı bulunacağını belirlemek için daha çabuk ve kısa bir yol bulabilir miyiz, yoksa artış miktarına odaklanarak devam etmek mi mantıklı?"
- "Bulduğunuz yolu açıklar mısınız?"
- "Bulduğunuz genel kuralın geçerli olduğundan nasıl emin olabiliyorsunuz?"
- "Bulduğunuz genel kural üzerine düşünüyorsunuz. Aynı genel kurala sahip farklı örüntüler oluşturulabilir mi?"
- "Ulaştığınız genel kurala sahip, yeni bir problem durumu ortaya koyun ve modelleyin." sorularını yönlendirir.

Bu etkinlikte öğrencilerden bir günlük hayat problemi sunularak verilen örüntüdeki adımlar arası ortak özelliklerin fark edilerek transfer edilmesi sonuç olarak bir cebirsel kural bulma ihtiyacı duymaları beklenmektedir. Bu etkinlikte önceki ders içeriklerinden farklı olarak bir şekil örüntüsü üzerinden değil, günlük hayat problemi üzerinden sorgulama sürecini gerçekleştirmesi istenmiştir. Bu noktada öğrencilerden adımlar arasındaki ilişki ve ortaklıkları fark ederek açıklamaları beklenmektedir. Bu ilişkiye nasıl karar verdikleri sorularak öğrencilerin tartışması ve bunun sonucunda örüntüde bulunan ilişkileri matematiksel olarak açıklamaları beklenmektedir. Öğrencilere 1000. günde ağaçta bulunacak kayısı sayısı sorularak fark edilen ortak özelliğin transfer edilerek hipotez geliştirme ihtiyacı duymaları beklenmektedir. Ayrıca hipotez geliştirmenin gerekliliğini fark eden öğrencilerin çözüm stratejilerini matematiksel olarak gerekçelendirmeleri beklenmektedir. Ders içeriğine ait her bir sorunun sonunda öğrencilerin açıklamalarda bulunmaları, matematiksel olarak çözümlerini desteklemeleri ve kendi matematiksel bilgilerini kendilerinin elde etmeleri beklenmektedir. Ayrıca öğrencilere verilen kartların grup içi tartışmayı sürekli kılması ve bu şekilde sorgulama sürecini aktif tutması amaçlanmaktadır. Bu süreçte öğretmen, gözlemci ve yol gösterici olarak öğrencilere gerektiği yerde kendi çözümlerini ve başkalarının çözümlerini sorgulamalarını gerektirecek sorular yöneltilmektedir.

Örneğin,

- "Çözümünün doğru olduğuna nasıl emin oldun, örüntüye ilişkin farklı bir matematiksel çözümü olan var mı?",
- "Matematiksel çözümünün neden farklı olduğunu düşünüyorsun? Bunu bize nasıl açıklarsın?",
- "Arkadaşınızın matematiksel düşüncesine katılıyor musunuz? Neden katılıyorsun/katılmıyorsun?",
- "Arkadaşınızın çözümünü açıklamak isteyen var mı?",
- "Düşünceni gerekçelendirir misin?",
- "Matematiksel düşüncenin doğru olduğundan nasıl emin olabilirsin?"

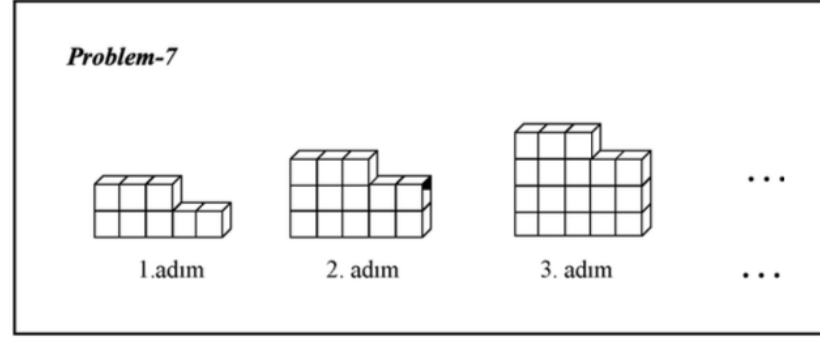
Öğrenciler komut kartlarını kullanarak önce grup arkadaşları ile daha sonra tüm sınıf ile tartışmaya girerek ders bitirilir.

Ders Planı-7	
Sınıf:	7 Süre: 1 ders saati (30 dk.)
Öğrenme Alanı:	Cebir
Alt Öğrenme Alanı:	Cebirsel İfadeler
Kazanım(lar):	M.7.2.1.3. Sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimini bulur.
Açıklamalar:	a) Adımlar arasındaki farkı sabit olan örüntülerle sınırlı kalınır. b) Değişken kullanımının önemi ve gerekliliği vurgulanır. c) Sayı örüntüleri incelenerek örüntünün kuralını bir değişken ile (örneğin n cinsinden) yazmaya yönelik çalışmalar yapılır. Örneğin ilk dört terimi 3, 9, 15 ve 21 olan bir aritmetik örüntünün kuralı $6n-3$ olarak ifade edilir. ç) Günlük hayat durumlarında veya şekil örüntülerindeki ilişkileri örüntüye dönüştürerek kuralı bulmaya yönelik çalışmalara da yer verilir.
Gerekli Ön Bilgiler:	M.6.2.1.1. Sözel olarak verilen bir duruma uygun cebirsel ifade ve verilen bir cebirsel ifadeye uygun sözel bir durum yazar. M.6.2.1.2. Cebirsel ifadenin değerini değişkenin alacağı farklı doğal sayı değerleri için hesaplar. M.6.2.1.3. Basit cebirsel ifadelerin anlamını açıklar. M.7.2.1.1. Cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemleri yapar. M.7.2.1.2. Bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarpar.
Öğretme-Öğrenme Yöntem ve Teknikleri:	Soru-cevap Tartışma Grup Çalışması Grup Tartışması Bireysel Çalışma
Beceriler:	İletişim, İlişkilendirme, Cebirsel Düşünme, Sorgulama, Genelleme
Materyaller:	Etkinlik Kağıtları, Sorgulama Temelli Öğretime İlişkin Kartlar

Öğrenme ve Öğretme Etkinlikleri

Öğretmen elinde etkinlik kağıtları ve sorgulama temelli öğretime ilişkin kartlar ile sınıfa girer. Öğrencilere **Problem-7** dağıtılır.

Öğretmen öğrencilere: “Evet çocuklar, şimdi herkes verilen şekli incelesin. Önce grup arkadaşlarınızla, sonrasında tüm sınıf arkadaşlarınızla şekil üzerine tartışacağız.”



Ardından öğrenciler grupça çalışmaları için üç kişilik üç gruba ayrılır. Oluşan gruplara öğrencileri yönlendirecek komutların bulunduğu kartlar dağıtılır.

Arkadaşının matematiksel açıklamasını anlamaya çalış.	Arkadaşının matematiksel çözümünü açıklamasında ona yardımcı ol.	Arkadaşlarının matematiksel açıklamalarını dinle.	Verilen matematiksel bir açıklamayı anlamadığında arkadaşına veya öğretmenine sor.	Matematiksel bir açıklamaya neden katılmadığını gerekçeleriyle belirt.
Matematiksel çözümünü gerekçelendir.	Matematiksel çözümlerinde çelişki yaşadığında alternatif yolları sorgula.	Açıklamaların da farklı temsil biçimlerini kullan.	Matematiksel çözümlerini savun.	Açıklamalarında matematiksel örüntü ve ilişkileri kullan.
Arkadaşının matematiksel çözümünü sorgula.	Grup arkadaşlarıyla tartışarak matematiksel bir çözüm geliştir.	Farklı matematiksel bir çözüm bul.	Başka bir arkadaşınla konuş.	Yaptığımız sorgulamanın amacını anlamaya çalış.

- “Verilen şekil örüntüsünün ne gibi özelliklerini gözlemlediniz?”
- “Model üzerinde ortak olarak neyi gözlemlediniz? Her adımdaki modellerin ortak ya da değişmeyen kısımları var mıdır?”
- “Neden, nasıl düşündün?”
- “Örüntünün 10. Adımında kaç adet birim küp bulunacaktır?”
- “Neden, nasıl buldunuz açıklar mısınız?”
- “Örüntünün 100. Adımında kaç adet birim küp bulunacaktır?”
- “Nasıl buldun? Biraz daha açıklar mısın? Teker teker saydın mı yoksa çizerek mi buldun?”
- “Çizerken nelere dikkat ettiniz, neye göre çizdiniz?”
- “Teker teker saymak yerine bunu model üzerinden nasıl bulabiliriz? Bulabilir miyiz?”
- “Çözümünün doğru olduğuna nasıl emin oldun?”
- “Şekil üzerinde adımlar arası bir ilişki ya da ortaklık gözlemledin mi? Model üzerinde nelere dikkat ettin?”
- “Nasıl bir ilişki ya da ortaklık vardır? Neden böyle düşünüyorsun?”

- “Herhangi bir adımdaki birim küp sayısına nasıl ulaşabiliriz? Bunu bize verecek genel bir kural geliştirebilir miyiz?”
- “Bu kuralı nasıl buldunuz? Kurala model üzerinden ulaşabilir miyiz?”
- “Neden, açıklar mısınız?”
- “Nasıl buldun?”
- “Bulduğunuz yolu açıklar mısınız?”
- “Bulduğunuz genel kuralın geçerli olduğundan nasıl emin olabiliyorsunuz?”

Bu etkinlikte öğrencilerden belirli bir bölümü verilen üç boyutlu bir örüntüdeki adımlar arası ortak özelliklerin fark edilerek (her adımda sabit kalan birim küplerin ve değişen birim küplerin) transfer edilmesi beklenmektedir. Öğrenciler 10. adımda bulunacak birim küpleri teker teker sayarak yani adımlar arasındaki sabit artış miktarına odaklanarak ulaşabilirler. Bu noktada 100. adım sorularak bir cebirsel kural bulma ihtiyacı duymaları beklenmektedir. Daha önceki yıllarda örüntü konusunu öğrenmiş olan öğrencilerin, adımlar arasındaki ilişkiyi ortaklıkları fark ederek açıklamaları beklenmektedir. Bu ilişkiye nasıl karar verdikleri sorularak öğrencilerin tartışması ve bunun sonucunda örüntüde bulunan ilişkileri matematiksel olarak açıklamaları beklenmektedir. Ayrıca öğrencilere verilen kartların grup içi tartışmayı sürekli kılması ve bu şekilde sorgulama sürecini aktif tutması amaçlanmaktadır. Bu süreçte öğretmen, gözlemci ve yol gösterici olarak öğrencilere gerektiği yerde kendi çözümlerini ve başkalarının çözümlerini sorgulamalarını gerektirecek sorular yöneltilmektedir.

Örneğin,

- “Çözümünün doğru olduğuna nasıl emin oldun, örüntüye ilişkin farklı bir matematiksel çözümü olan var mı?”,
- “Neden, sence arkadaşın haklı mı?”
- “Matematiksel çözümünün neden farklı olduğunu düşünüyorsun? Bunu bize nasıl açıklarsın?”,
- “Arkadaşının matematiksel düşüncesine katılıyor musunuz? Neden katılıyorsun/katılmıyorsun?”,
- “Arkadaşının çözümünü açıklamak isteyen var mı?”,
- “Düşünceni gerekçelendirir misin?”,
- “Matematiksel düşüncenin doğru olduğundan nasıl emin olabilirsin?”

Öğrenciler komut kartlarını kullanarak önce grup arkadaşları ile daha sonra tüm sınıf ile tartışmaya girerek ders bitirilir.

Ders Planı-8	
Sınıf:	7 Süre: 1 ders saati (30 dk.)
Öğrenme Alanı:	Cebir
Alt Öğrenme Alanı:	Cebirsel İfadeler
Kazanım(lar):	M.7.2.1.3. Sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimini bulur.
Açıklamalar:	a) Adımlar arasındaki farkı sabit olan örüntülerle sınırlı kalınır. b) Değişken kullanımının önemi ve gerekliliği vurgulanır. c) Sayı örüntüleri incelenerek örüntünün kuralını bir değişken ile (örneğin n cinsinden) yazmaya yönelik çalışmalar yapılır. Örneğin ilk dört terimi 3, 9, 15 ve 21 olan bir aritmetik örüntünün kuralı $6n-3$ olarak ifade edilir. ç) Günlük hayat durumlarında veya şekil örüntülerindeki ilişkileri örüntüye dönüştürerek kuralı bulmaya yönelik çalışmalara da yer verilir.
Gerekli Ön Bilgiler:	M.6.2.1.1. Sözel olarak verilen bir duruma uygun cebirsel ifade ve verilen bir cebirsel ifadeye uygun sözel bir durum yazar. M.6.2.1.2. Cebirsel ifadenin değerini değişkenin alacağı farklı doğal sayı değerleri için hesaplar. M.6.2.1.3. Basit cebirsel ifadelerin anlamını açıklar. M.7.2.1.1. Cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemleri yapar. M.7.2.1.2. Bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarpar.
Öğretme-Öğrenme Yöntem ve Teknikleri:	Soru-cevap Tartışma Grup Çalışması Grup Tartışması Bireysel Çalışma
Beceriler:	İletişim, İlişkilendirme, Cebirsel Düşünme, Sorgulama, Genelleme
Materyaller:	Etkinlik Kağıtları, Sorgulama Temelli Öğretime İlişkin Kartlar

Öğrenme ve Öğretme Etkinlikleri

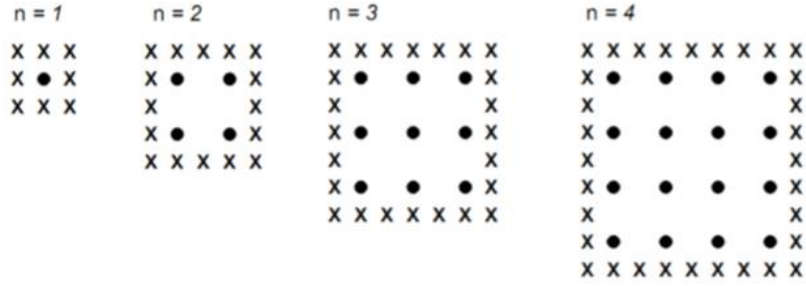
Öğretmen elinde etkinlik kağıtları ve sorgulama temelli öğretime ilişkin kartlar ile sınıfa girer. Öğrencilere **Problem-8** dağıtılır.

Öğretmen öğrencilere: “Evet çocuklar, şimdi herkes problemi incelesin. Önce grup arkadaşlarınızla, sonrasında tüm sınıf arkadaşlarınızla tartışarak sorulara çözüm önerisi geliştireceğiz.”

Problem-8

Bir çiftçi kare bir alan içinde elma ağaçları dikmiştir. Elma ağaçlarını rüzgâra karşı korumak amacıyla etrafına kozalaklı ağaçlar diker.

Burada elma ağaçlarının sırasının herhangi bir sayı (n) değeri için, elma ağaçlarının ve kozalaklı ağaçların nereye dikildiğinin bir diyagram durumunu görebilirsiniz:



X = Kozalaklı Ağaçlar ● = Elma Ağaçları

1. Aşağıdaki tabloyu tamamlayınız.

N	Elma Ağaçlarının Sayısı	Kozalaklı Ağaçların Sayısı
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

2. Hangi n değeri için elma ağaçlarının sayısı kozalaklı ağaçların sayısına eşit olur? n değerini bulun ve bunu nasıl hesapladığınızı gösterin.

3. Herhangi bir n değeri için elma ağaçlarının sayısını veren genel bir kural bulunuz ve bulduğunuz kuralı açıklayınız.

4. Herhangi bir n değeri için kozalaklı ağaçların sayısını veren genel bir kural bulunuz ve bulduğunuz kuralı açıklayınız.

Ardından öğrenciler grupça çalışmaları için üç kişilik üç gruba ayrılır. Oluşan gruplara öğrencileri yönlendirecek komutların bulunduğu kartlar dağıtılır.

Arkadaşının matematiksel açıklamasını anlamaya çalış.	Arkadaşının matematiksel çözümünü açıklamasında ona yardımcı ol.	Arkadaşlarının matematiksel açıklamalarını dinle.	Verilen matematiksel bir açıklamayı anlamadığında arkadaşına veya öğretmenine sor.	Matematiksel bir açıklamaya neden katılmadığını gerekçeleriyle belirt.
Matematiksel çözümünü gerekçelendir.	Matematiksel çözümlerinde çelişki yaşadığında alternatif yolları sorgula.	Açıklamaların da farklı temsil biçimlerini kullan.	Matematiksel çözümlerini savun.	Açıklamalarında matematiksel örüntü ve ilişkileri kullan.
Arkadaşının matematiksel çözümünü sorgula.	Grup arkadaşlarıyla tartışarak matematiksel bir çözüm geliştir.	Farklı matematiksel bir çözüm bul.	Başka bir arkadaşınla konuş.	Yaptığımız sorgulamanın amacını anlamaya çalış.

- “Kozalaklı ağaçların sayısı ile elma ağaçlarının sayısı eşit olabilir mi? Nasıl bulabiliriz?”
- “Neden n değeri olduğunda kozalaklı ağaçların ve elma ağaçlarının sayısının eşit olacağını düşünüyorsunuz?”
- “Nasıl buldun? Biraz daha açıklar mısın? Çizerek mi buldun?”
- “Çizerken nelere dikkat ettiniz, neye göre çizdiniz?”
- “Çözümünün doğru olduğuna nasıl emin oldun?”
- “ $n=7$ olduğu durumda kaç adet kozalaklı ağaç ve elma ağacı bulunacaktır?”
- “Neden, açıklar mısınız?”
- “ $n=15$ olduğu durumda kaç adet kozalaklı ağaç ve elma ağacı bulunacaktır?”
- “Nasıl buldun?”
- “ n değeri ile kozalaklı ağaçlar arasında bir ilişki var mıdır? Nasıl bir ilişki vardır?”
- “Neden, nasıl düşündün?”
- “ n değeri ile elma ağaçları arasında bir ilişki var mıdır?”
- “Nasıl bir ilişki vardır? Neden böyle düşünüyorsunuz?”
- “Kozalaklı ağaçlar ve elma ağaçları arasında bir ilişki var mıdır? Nasıl bir ilişki vardır?”
- “ n değeri 7 ve 15’e eşit olduğunda kaç adet elma ağacı oldu? Bir ilişki ya da ortaklık gözlemledin mi? Model üzerinde nelere dikkat ettin?”
- “Model üzerinde ortak olarak neyi gözlemlediniz? Her adımdaki modellerin ortak ya da değişmeyen kısımları var mıdır?”
- “Herhangi bir n değeri için kozalaklı ağaçların sayısını veren genel bir kural bulabilir misiniz?”
- “Bulduğunuz yolu açıklar mısınız?”
- “Bulduğunuz genel kuralın geçerli olduğundan nasıl emin olabiliyorsunuz?”
- “Herhangi bir n değeri için elma ağaçlarının sayısını veren genel bir kural bulabilir misiniz? Şekil üzerinde dikkatinizi neler çekti?”
- “Bulduğunuz yolu açıklar mısınız?”
- “Bulduğunuz genel kuralın geçerli olduğundan nasıl emin olabiliyorsunuz?”

Bu etkinlikte öğrencilerden belirli bir bölümü verilen örüntüdeki adımlar arası ortak özelliklerin fark edilerek transfer edilmesi sonuc olarak bir cebirsel kural bulma ihtiyacı duymaları beklenmektedir. Daha önceki yıllarda örüntü konusunu öğrenmiş olan öğrencilerin, adımlar arasındaki ilişkiyi ortaklıkları fark ederek açıklamaları beklenmektedir. Bu ilişkiye nasıl karar verdikleri sorularak öğrencilerin tartışması ve bunun sonucunda örüntüde bulunan ilişkileri matematiksel olarak açıklamaları beklenmektedir. Öğrencilere problem durumları günlük hayata entegre edilip sunulurken sorgulama süreci ile örüntüyü cebirsel olarak anlamlandırmaları beklenmektedir. Ayrıca öğrencilere verilen kartların grup içi tartışmayı sürekli kılması ve bu şekilde sorgulama

sürecini aktif tutması amaçlanmaktadır. Bu süreçte öğretmen, gözlemci ve yol gösterici olarak öğrencilere gerektiği yerde kendi çözümlerini ve başkalarının çözümlerini sorgulamalarını gerektirecek sorular yöneltmektedir.

Örneğin,

- “Çözümünün doğru olduğuna nasıl emin oldun, örüntüye ilişkin farklı bir matematiksel çözümü olan var mı?”,
- “Matematiksel çözümünün neden farklı olduğunu düşünüyorsun? Bunu bize nasıl açıklarsın?”,
- “Arkadaşınızın matematiksel düşüncesine katılıyor musunuz? Neden katılıyorsun/katılmıyorsun?”,
- “Arkadaşınızın çözümünü açıklamak isteyen var mı?”,
- “Düşünceni gerekçelendirir misin?”,
- “Matematiksel düşüncenin doğru olduğundan nasıl emin olabilirsin?”

Öğrenciler komut kartlarını kullanarak önce grup arkadaşları ile daha sonra tüm sınıf ile tartışmaya girerek ders bitirilir.

Ders Planı-9	
Sınıf:	7 Süre: 1 ders saati (30 dk.)
Öğrenme Alanı:	Cebir
Alt Öğrenme Alanı:	Cebirsel İfadeler
Kazanım(lar):	M.7.2.1.3. Sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimini bulur.
Açıklamalar:	a) Adımlar arasındaki farkı sabit olan örüntülerle sınırlı kalınır. b) Değişken kullanımının önemi ve gerekliliği vurgulanır. c) Sayı örüntüleri incelenerek örüntünün kuralını bir değişken ile (örneğin n cinsinden) yazmaya yönelik çalışmalar yapılır. Örneğin ilk dört terimi 3, 9, 15 ve 21 olan bir aritmetik örüntünün kuralı $6n-3$ olarak ifade edilir. ç) Günlük hayat durumlarında veya şekil örüntülerindeki ilişkileri örüntüye dönüştürerek kuralı bulmaya yönelik çalışmalara da yer verilir.
Gerekli Ön Bilgiler:	M.6.2.1.1. Sözel olarak verilen bir duruma uygun cebirsel ifade ve verilen bir cebirsel ifadeye uygun sözel bir durum yazar. M.6.2.1.2. Cebirsel ifadenin değerini değişkenin alacağı farklı doğal sayı değerleri için hesaplar. M.6.2.1.3. Basit cebirsel ifadelerin anlamını açıklar. M.7.2.1.1. Cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemleri yapar. M.7.2.1.2. Bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarpar.
Öğretme-Öğrenme Yöntem ve Teknikleri:	Soru-cevap Tartışma Grup Çalışması Grup Tartışması Bireysel Çalışma
Beceriler:	İletişim, İlişkilendirme, Cebirsel Düşünme, Sorgulama, Genelleme
Materyaller:	Etkinlik Kağıtları, Sorgulama Temelli Öğretime İlişkin Kartlar

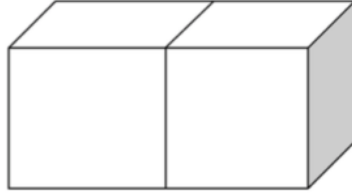
Öğrenme ve Öğretme Etkinlikleri

Öğretmen elinde etkinlik kağıtları ve sorgulama temelli öğretime ilişkin kartlar ile sınıfa girer. Öğrencilere **Problem-9** dağıtılır.

Öğretmen öğrencilere: “Evet çocuklar, şimdi herkes problemi incelesin. Önce grup arkadaşlarınızla, sonrasında tüm sınıf arkadaşlarınızla tartışarak sorulara çözüm önerisi geliştireceğiz.”

Problem-9

Bir şirket, küpleri bir sırada birleştirerek çubuklar üretiyor ve bir sıra halindeki çubuğu etiket makinesi ile etiketliyor. Makine, küplerin tüm yüzeyini kaplamak için görünen her bir yüzüne birer tane etiket yerleştiriyor. Çubuğun dışında kalan küp yüzeyleri tamamen etiketlenmek zorundadır. Örneğin uzunluğu 2 olan çubuğun yüzeyini kaplamak için 10 etiket gereklidir.



1. Uzunluğu 7 olan çubuk için kaç tane etikete ihtiyaç vardır? Cevabınızı açıklayınız.
2. Uzunluğu 10 olan çubuk için kaç tane etikete ihtiyaç vardır? Cevabınızı açıklayınız.
3. Uzunluğu 49 olan çubuk için kaç tane etikete ihtiyaç vardır? Cevabınızı açıklayınız.
4. Herhangi bir uzunluktaki bir çubuk için gerekli etiket sayısını nasıl bulabiliriz? Açıklayınız.

Ardından öğrenciler grupça çalışmaları için üç kişilik üç gruba ayrılır. Oluşan gruplara öğrencileri yönlendirecek komutların bulunduğu kartlar dağıtılır.

Arkadaşının matematiksel açıklamasını anlamaya çalış.	Arkadaşının matematiksel çözümünü açıklamasında ona yardımcı ol.	Arkadaşlarının matematiksel açıklamalarını dinle.	Verilen matematiksel bir açıklamayı anlamadığında arkadaşına veya öğretmenine sor.	Matematiksel bir açıklamaya neden katılmadığını gerekçeleriyle belirt.
Matematiksel çözümünü gerekçelendir.	Matematiksel çözümlerinde çelişki yaşadığında alternatif yolları sorgula.	Açıklamaların da farklı temsil biçimlerini kullan.	Matematiksel çözümlerini savun.	Açıklamalarında matematiksel örüntü ve ilişkileri kullan.
Arkadaşının matematiksel çözümünü sorgula.	Grup arkadaşlarıyla tartışarak matematiksel bir çözüm geliştir.	Farklı matematiksel bir çözüm bul.	Başka bir arkadaşınla konuş.	Yaptığımız sorgulamanın amacını anlamaya çalış.

- “Uzunluğu 7 olan çubuk için kaç adet etikete ihtiyaç olduğunu nasıl buldunuz?”
- “Bulurken şekil üzerinde nelere dikkat ettiniz? Çizerek mi buldunuz?”
- “Çizerken nelere dikkat ettiniz, neye göre çizdiniz?”
- “Çözümünün doğru olduğuna nasıl emin oldun?”
- “Uzunluğu 10 olan çubuk için kaç adet etikete ihtiyaç olacaktır?”
- “Neden, açıklar mısınız?”
- “Uzunluğu 49 olan çubuk için kaç adet etikete ihtiyaç vardır?”
- “Nasıl buldun?”
- “Çubuğun uzunluğuyla etiket sayısı arasında bir ilişki var mıdır? Nasıl bir ilişki vardır?”
- “Neden, nasıl düşündün?”
- “Çubuk uzunluğu 7, 10 ve 49 olduğunda neler değişti? Neler aynı kaldı? Bir ilişki ya da ortaklık gözlemledin mi? Model üzerinde nelere dikkat ettin?”
- “Model üzerinde ortak olarak neyi gözlemlediniz? Her adımdaki modellerin ortak ya da değişmeyen kısımları var mıdır?”
- “Çubuğun uzunluğunun aldığı herhangi bir değer için etiket sayısını veren genel bir kural bulabilir misiniz?”
- “Bulduğunuz yolu açıklar mısınız?”
- “Bulduğunuz genel kuralın geçerli olduğundan nasıl emin olabiliyorsunuz?” soruları yönlendirilir.

Öğrenciler komut kartlarını kullanarak önce grup arkadaşları ile daha sonra tüm sınıf ile tartışmaya girerek ders bitirilir.

Sonuç olarak, etkinlikler sorgulama temelli öğretim stratejileri göz önünde bulundurularak hazırlanmış ve ders planı yapılmıştır. Öğrencilere soru sorabilecekleri, sorgulayabilecekleri, kanıt sunabilecekleri, açıklama geliştirebilecekleri, eleştirel düşünebilecekleri, başkalarının açıklamaları doğrultusunda kendi açıklamalarını değerlendirebilecekleri ve yeni bilgiye ulaşabilecekleri bir öğretim ortamı sunmak hedeflenmiştir.

Ders Planı-10	
Sınıf:	7 Süre: 1 ders saati (30 dk.)
Öğrenme Alanı:	Cebir
Alt Öğrenme Alanı:	Cebirsel İfadeler
Kazanım(lar):	M.7.2.1.3. Sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimini bulur.
Açıklamalar:	a) Adımlar arasındaki farkı sabit olan örüntülerle sınırlı kalınır. b) Değişken kullanımının önemi ve gerekliliği vurgulanır. c) Sayı örüntüleri incelenerek örüntünün kuralını bir değişken ile (örneğin n cinsinden) yazmaya yönelik çalışmalar yapılır. Örneğin ilk dört terimi 3, 9, 15 ve 21 olan bir aritmetik örüntünün kuralı $6n-3$ olarak ifade edilir. ç) Günlük hayat durumlarında veya şekil örüntülerindeki ilişkileri örüntüye dönüştürerek kuralı bulmaya yönelik çalışmalara da yer verilir.
Gerekli Ön Bilgiler:	M.6.2.1.1. Sözel olarak verilen bir duruma uygun cebirsel ifade ve verilen bir cebirsel ifadeye uygun sözel bir durum yazar. M.6.2.1.2. Cebirsel ifadenin değerini değişkenin alacağı farklı doğal sayı değerleri için hesaplar. M.6.2.1.3. Basit cebirsel ifadelerin anlamını açıklar. M.7.2.1.1. Cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemleri yapar. M.7.2.1.2. Bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarpar.
Öğretme-Öğrenme Yöntem ve Teknikleri:	Soru-cevap Tartışma Grup Çalışması Grup Tartışması Bireysel Çalışma
Beceriler:	İletişim, İlişkilendirme, Cebirsel Düşünme, Sorgulama, Genelleme
Materyaller:	Etkinlik Kağıtları, Sorgulama Temelli Öğretime İlişkin Kartlar

Öğrenme ve Öğretme Etkinlikleri

Öğretmen elinde sorgulama temelli öğretime ilişkin kartlar ile sınıfa girer.

Öğretmen öğrencilere: “Evet çocuklar, bir önceki dersimizde sınıf arkadaşlarınız ile çubuğun herhangi alacağı bir değer için etiket sayısını veren genel bir kural geliştirdiniz. Bulduğunuz genel kural üzerine düşününüz. Aynı genel kurala sahip farklı örüntüler oluşturulabilir mi?” sorusu ile öğrenciler sorgulamaya ve düşünmeye yönlendirir.

Ardından öğrenciler grupça çalışmaları için üç kişilik üç gruba ayrılır. Oluşan gruplara öğrencileri yönlendirecek komutların bulunduğu kartlar dağıtılır.

Arkadaşının matematiksel açıklamasını anlamaya çalış.	Arkadaşının matematiksel çözümünü açıklamasında ona yardımcı ol.	Arkadaşlarının matematiksel açıklamalarını dinle.	Verilen matematiksel bir açıklamayı anlamadığında arkadaşına veya öğretmenine sor.	Matematiksel bir açıklamaya neden katılmadığını gerekçeleriyle belirt.
Matematiksel çözümünü gerektelendir.	Matematiksel çözümlerinde çelişki yaşadığında alternatif yolları sorgula.	Açıklamaların da farklı temsil biçimlerini kullan.	Matematiksel çözümlerini savun.	Açıklamalarında matematiksel örüntü ve ilişkileri kullan.
Arkadaşının matematiksel çözümünü sorgula.	Grup arkadaşlarıyla tartışarak matematiksel bir çözüm geliştir.	Farklı matematiksel bir çözüm bul.	Başka bir arkadaşınla konuş.	Yaptığımız sorgulamanın amacını anlamaya çalış.

- “Ulaştığımız genel kurala sahip, yeni bir problem durumu ortaya koyun ve modelleyin.”

Bu etkinlikte öğrencilerden sosyo-matematiksel normlarla desteklenmiş sorgulama temelli öğretim süresince işlenen örüntü konusunun sonrasında bir önceki etkinlikte ulaşılan genel kurala ilişkin farklı, yeni bir problem durumu ortaya koymaları istenmiştir. Ayrıca bu etkinlikte oluşturdukları problemi modellemeleri istenerek öğrencilerin cebirsel genellemeye geçişte örüntü kavramını zihinlerinde nasıl yapılandırdıkları açığa çıkarılmak istenmektedir.

Her bir grup oluşturduğu problemi sınıf arkadaşlarına sunar ve problemi oluşturan grup dışında kalan diğer gruplar arkadaşlarının oluşturduğu problemi sınıf arkadaşları ile sorgulayarak çözüm önerisi geliştirmeye çalışılır. Üretilen her bir problem için bu sorgulamaya dayalı öğretim süreci gerçekleştirilir. Öğrenciler komut kartlarını kullanarak önce grup arkadaşları ile daha sonra tüm sınıf ile tartışmaya girerek ders bitirilir.

Sonuç olarak, etkinlikler sorgulama temelli öğretim stratejileri göz önünde bulundurularak hazırlanmış ve ders planı yapılmıştır. Öğrencilere soru sorabilecekleri, sorgulayabilecekleri, kanıt sunabilecekleri, açıklama geliştirebilecekleri, eleştirel düşünebilecekleri, başkalarının açıklamaları doğrultusunda kendi açıklamalarını değerlendirebilecekleri ve yeni bilgiye ulaşabilecekleri bir öğretim ortamı sunmak hedeflenmiştir.

EK. 6. Cebirsel Düşünme Süreçlerinin Analizine İlişkin Yarı Yapılandırılmış Mülakat Formu

Yarı Yapılandırılmış Görüşme Formu

1. Örüntü konusu hakkında ne düşünüyorsun?
2. Sizce neden ortaokulda size örüntü konusu öğretiliyor?
3. Örüntü konusunu öğrenmekte güçlük çektiğin noktalar olduğunu düşünüyor musun? Düşünüyorsan bu noktalar nelerdir? Düşünceni gerekçelendirir misin?
4. Öğretim öncesinde örüntü konusunu nasıl öğreniyordun, şimdi nasıl öğreniyorsun? Örneğin 1,3,5,7,... şeklinde giden bir şekil örüntüsü olduğunu varsayalım. Örüntüye odaklandığında ilk neleri inceliyordun? Şimdi nelere dikkat ediyorsun?
5. Öğretim öncesinde belirli bir bölümü verilen örüntünün diğer adımlarını nasıl buluyordun? Örneğin 4,8,12,16,... şeklinde giden bir örüntünün 10. adımına nasıl ulaşıyordun? Şu an nasıl ulaşıyorsun?
6. Öğretim öncesinde bir örüntüye ait cebirsel kurala nasıl ulaşıyordun? Öğretim öncesinde ve sonrasında örüntülere ilişkin cebirsel kurala ulaşma sürecinde bir farklılık oldu mu? Olduysa nasıl bir farklılık oldu? Bunu biraz açıkla mısın?
7. Derste yaptığımız etkinlikler ve geçirdiğimiz öğretim süresince grup ve sınıf arkadaşlarınız ile tartışarak size verilen örüntülerin diğer adımlarını elde etmeye çalıştınız. Örüntüye ilişkin şekil ve model üzerinde fark ettiğiniz noktalar ya da ortaklıklar oldu mu?
8. Öğretim öncesi/sonrası yapılan uygulama sürecinde Etkinlik’de yazdığın çözümü açıklar mısın?
9. Öğretim öncesi/sonrası yapılan uygulama sürecinde Etkinlik’de yazdığın cümlede tam olarak ne demek istediğini biraz daha net bir şekilde açıklar mısın?

