



**SPİN YÖRÜNGE ETKİLEŞİMLİ
BOSE EINSTEIN YOĞUNLAŞMASINDA
ANDERSON LOKALİZASYONU**

**Yüksek Lisans Tezi
Oktay NABİOLLAHI
Eskişehir 2025**

**SPİN YÖRÜNGE ETKİLEŞİMLİ BOSE EINSTEIN YOĞUNLAŞMASINDA
ANDERSON LOKALİZASYONU**

Oktay NABİOLLAHI

Yüksek Lisans Tezi

Fizik Anabilim Dalı

Matematiksel Fizik Bilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Züleyha ÖZTAŞ

Eskişehir

Eskişehir Teknik Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Ocak 2025

Bu tez çalışması BAP Komisyonu tarafından kabul edilen 23LÖT178 no.lu proje kapsamında desteklenmiştir.

ÖZET

SPİN YÖRÜNGE ETKİLEŞİMLİ BOSE EINSTEIN YOĞUNLAŞMASINDA ANDERSON LOKALİZASYONU

Oktay NABİOLLAHI

Fizik Anabilim Dalı

Matematiksel Fizik Bilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Ocak 2025

Danışman: Doç. Dr. Züleyha ÖZTAŞ

Düzensizlikler içeren bir ortamda ilerleyen dalga, ortamdaki rastgele dağılmış safsızlıklardan çoklu saçılma sonucu lokalize olur. Anderson lokalizasyonu olarak adlandırılan bu olay yoğun madde fiziğinde önemli bir yere sahiptir. Anderson lokalizasyonu, düzensiz bir dış potansiyel ile tuzaklanmış ultra soğuk atomlardan oluşan Bose-Einstein yoğunlaşmasında gözlenebilir bir olaydır. Böyle bir ortamda sisteminin özfonksiyonlarının eksponansiyel olarak bozulması Anderson lokalizasyonunun karakteristiğidir.

Bu çalışmada rasgele bir dış potansiyel ile tuzaklanmış ve spin yörünge etkileşimlerini içeren Bose-Einstein yoğunlaşması incelendi. Spin yörünge etkileşimlerinin Anderson lokalizasyonu üzerine etkileri incelenerek, lokalizasyonu artıran parametreler belirlendi. Anderson lokalizasyonunun sistemin taban durumu dinamiğini etkilediği; lokalizasyonun azalması durumunda kaotik dinamik olduğu, artması durumunda ise düzenli dinamik olduğu nümerik hesaplarla gösterildi.

Anahtar Sözcükler: Bose Einstein yoğunlaşması, Anderson lokalizasyonu, Spin yörünge etkileşimi.

ABSTRACT

ANDERSON LOCALIZATION IN SPIN ORBIT COUPLING BOSE EINSTEIN CONDENSATE

Oktaý NABIOLLAHI

Department of Physics

Programme in Mathematical Physics

Eskişehir Technical University, Institute of Graduate Programs, January 2025

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Züleyha ÖZTAŞ

The wave propagating in a medium including irregularities is localized as a result of multiple scattering from randomly distributed impurities in the medium. This phenomenon, called Anderson localization, has an important place in condensed matter physics. Anderson localization is an observable phenomenon in Bose-Einstein condensates consisting of ultracold atoms trapped by a disordered external potential. In such an environment, the exponential decay of the eigenfunctions of the system is characteristic of Anderson localization.

In this study, Bose-Einstein condensate trapped with a random external potential and containing spin-orbit coupling was examined. Parameters that increase localization were determined by examining the effects of spin-orbit coupling on Anderson localization. Anderson localization affects the ground state dynamics of the system; It has been shown by numerical calculations that if the localization decreases, chaotic dynamics occurs, and if it increases, regular dynamics occurs.

Keywords: Bose-Einstein condensate, Anderson localization, spin-orbit coupling.

TEŞEKKÜR

Tezimin her aşamasında bana destek olan, tez çalışmamda yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Doç. Dr. Züleyha Öztaş'a teşekkürlerimi bir borç bilirim. Ayrıca hayatımın her döneminde olduğu gibi yüksek lisans süresince de bana destek olan ailem ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Oktay NABİOLLAHİ



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Oktay NABİOLLAHİ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

BAŞLIK SAYFASI	I
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI.....	II
DANIŞMAN ONAYI	III
ÖZET	IV
ABSTRACT.....	V
TEŞEKKÜR	VI
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ	X
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XI
1. GİRİŞ	1
1. BOSE EINSTEIN YOĞUNLAŞMASI.....	4
1.1. Bose-Einstein Yoğunlaşması Nedir?	4
1.2. Soğutma Teknikleri.....	5
1.3. İdeal Bose Gazı	6
1.3.1. Durum yoğunluğu.....	6
1.3.2. Kritik sıcaklık	8
2. GROSS PITAEVSKII DENKLEMİ	10
3. SPİN YÖRÜNGE ETKİLEŞİMLİ BOSE EINSTEIN YOĞUNLAŞMASI.....	12
3.1. Teori	12
3.2. SYE-BEY'in Taban Durumları	15
4. ANDERSON LOKALİZASYONU	17
4.1. Anderson Lokalizasyonu Nedir?	18
4.2. Boş Uzayda Düzensizlik.....	19
4.3. Bir Örgüdeki Rasgele Düzensizlik.....	20
4.4. Anderson Lokalizasyonu ve Parçacıklar Arası Etkileşimler	20

5. SPİN YÖRÜNGE ETKİLEŞİMLİ BOSE EINSTEIN YOĞUNLAŞMASI VE ANDERSON LOKALİZASYONU	22
5.1. Rasgele Potansiyelde Tuzaklanan Spin Yörünge Etkileşimli BEY	22
5.2. Nümerik Sonuçlar	24
5.1. Sönümlenmiş Dinamik.....	29
5.4. Sanal Zaman Metodu.....	35
5.5. Split Step Fourier Metodu (SSFM)	36
6. SONUÇ VE TARTIŞMA	38
KAYNAKÇA.....	39
ÖZGEÇMİŞ	

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 3.1. Sentetik SYE'nin gerçekleştirilmesi için deney şeması.....	13
Şekil 5.1. Rasgele oluşturulan tuzak potansiyeli.....	23
Şekil 5.2. Yoğunluk grafikleri.....	25
Şekil 5.3. Logaritmik yoğunluk grafikleri.....	26
Şekil 5.4. Yoğunluk grafikleri.....	27
Şekil 5.5. Yoğunlaşma genişliğinin spin yörünge etkileşimi ile değişimi.....	28
Şekil 5.6. Spin polarizasyonunun spin yörünge etkileşimi ile değişimi.....	28
Şekil 5.7. Harmonik potansiyel için çizilen z aman korelasyon fonksiyonunun zamanla değişimi:.....	30
Şekil 5.8. Rasgele potansiyel için çizilen zaman korelasyon fonksiyonunun zamanla değişimi.....	31
Şekil 5.9. PSD'nin frekansa bağlılığı.....	32
Şekil 5.10. Rasgele potansiyel için çizilen zaman korelasyon fonksiyonunun zamanla değişimi.....	34
Şekil 5.11. PSD'nin frekansa bağlılığı.....	34

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

T	: Sıcaklık
$f(\epsilon_v)$	: Parçacık dağılım fonksiyonu
m	: Atomik kütle
n	: Parçacık yoğunluğu
h	: Planck sabiti
p	: Momentum
k_B	: Boltzmann constant
Δ	: Düzensizliğe ilişkin ortalama potansiyel enerji değişimi
ϵ_0	: Uzay geçirgenliği
B	: Manyetik alan
$V(r)$	: Tuzaklama potansiyeli
ϵ_v	: Tek parçacık durumunun enerjisi
μ	: Kimyasal potansiyel enerjisi
λ_T	: Termal dalga boyu
c	: Işık hızı
ω_i	: Salınım frekansı
α	: Parçacık başına serbestlik derecesi
ψ	: Dalga fonksiyonu
V	: Hacim
N	: Parçacık sayısı
$g(\epsilon)$	: Durum yoğunluğu
$\Gamma(\alpha)$	: Gamma fonksiyonu
$\zeta(\alpha)$	: Riemann zeta fonksiyonu
$\phi(r)$	: Tek parçacık durumu
H	: Hamiltonyen
γ	: Raman lazerlerinin dalga sayısı
δ	: Ayar parametresi
$\Theta(x)$	: Heaviside fonksiyonu
E_{Etk}	: Atomlar arası etkileşim
$\xi(E)$	: Lokalizasyon uzunluğu

1. GİRİŞ

Bozonlar, Bose-Einstein istatistiğine uyan parçacıklardır. Bu parçacıklar, Pauli dışarlama ilkesine uymayarak aynı kuantum durumunu işgal ederler. İki parçacığın aynı kuantum durumunda bulunma olasılığı olmayan parçacıklara fermiyon adı verilir. Örneğin, foton bir bozon iken, elektronlar fermiyondur.

Bir madde gaz halindeyken atomları ve molekülleri arasındaki etkileşim, katı ve sıvı hallerine göre daha zayıftır. Gaz atomları arasındaki zayıf etkileşimler van der Waals kuvveti olarak adlandırılır. Bu kuvvet, moleküller arası mesafe molekül çapından daha büyük olduğunda, uzaklığın altıncı kuvveti ile ters orantılı bir şekilde azalır. Bu nedenle, serbest gaz moleküllerinin birbirleriyle etkileşimleri genellikle çok küçük enerji içerir. İdeal gaz terimi, moleküller arası etkileşim potansiyelinin moleküllerin hareketlerinin yanında göz ardı edilebileceği durumu ifade eder. İdeal gazların bölüşüm fonksiyonu ve gazın serbest enerjisi Maxwell-Boltzmann istatistiği kullanılarak ifade edilir.

Yukarıda bahsedilen özellikler, genellikle gazların klasik davranışları ile ifade edilir. Ancak Bose-Einstein Yoğunlaşması (BEY) sadece gazların kuantum davranışları ile açıklanabilen bir kavramdır. BEY ilk kez 1925 yılında Einstein tarafından öne sürüldü. Einstein, Bose'un geliştirdiği istatistiğin siyah cisim ışımasında da kullanabildiğini fark etti ve fotonlar için yazılan denklemleri için geliştirdi. Einstein bu çalışmasında birbiriyle etkileşmeyen parçacıklardan oluşan bozon gazının en düşük kuantum durumuna yoğunlaşabileceğini gösterdi. Bu özellik, parçacıkların ayırt edilemezliğine ve dalga yapısına dayanmaktadır. Bu çalışmalar sonucunda Einstein, bozonlardan oluşan maddelerin mutlak sıfır sıcaklığına çok yakın değerlere kadar soğutulması ile ortaya çıkan maddenin bir hali olan Bose- Einstein yoğunlaşmasını ortaya attı.

1950 yılında Penrose ve Onsager Bose-Einstein yoğunlaşmasını tek parçacık yoğunluk matrisinin özdeğerleri ve özvektörleri cinsinden formüle ettiler. 1955 yılında, deneysel çalışmalar atomik seyreltik gazlarla başladı. 1957 yılında Bardeen, Cooper ve Schrieffer şimdilerde süper iletkenliğin BCS teorisi olarak bilinen süper iletkenlik teorisini geliştirdiler. Bu mikroskobik teori, metallerin elektronları arasındaki etkileşimlerin fononlar aracılığı ile gerçekleştirildiğini varsayıyordu. 1995 yılında Bose-Einstein yoğunlaşmasının deneysel olarak ilk kez gözlenmesi boson sistemlerine olan ilgiyi artırdı.

“İdeal Bose gazı” ifadesi, Bose-Einstein istatistiklerine uyan bir grup bozonik parçacığın oluşturduğu bir sistemi ifade eder. İdeal Bose gazının matematiksel modeli, belirli bir enerji seviyesindeki parçacıkların ortalama sayısını ve bu sayının sıcaklık, kimyasal potansiyel gibi değişkenlere bağlı olarak nasıl değiştiğini açıklar. Bu gazlar genellikle düşük sıcaklıklarda ve yoğunluklarda gözlemlenen kuantum olgularını açıklamak için kullanılır. Bunlardan biri olan BEY lazer teknolojisi ve ultra-soğuk atom fiziği gibi alanlarda uygulamalara sahiptir. Matematiksel olarak ifade edildiğinde, BEY belirli bir enerji seviyesindeki ortalama parçacık sayısının sınırsız bir değere yaklaştığı kritik bir noktayı temsil eder. Bu durum, belirli bir enerji seviyesinde bir grup parçacığın makroskopik bir kuantum durumu oluşturduğu ve bu parçacıkların aynı kuantum durumunu paylaştığı bir durumu ifade eder.

Tuzaklanmış ve seyrek olmayan bozon gazları, fiziksel büyüklükleri (spin vb.) veya çarpışmaları nedeniyle etkileşime girerler. Etkileşimli gazlarda genellikle ikili çarpışmalardan kaynaklanan zayıf etkileşimli durumlar (s-dalga saçılması) ele alınır. Bu, sistem makroskopik olarak tek bir dalga fonksiyonu ile ifade edilemeyecek kadar güçlü etkileşimlerin olduğu durumları kapsar. Etkileşimli bozon gazlarıyla ilgili öncü teorik çalışmalar, 1947 yılında Bogoliubov tarafından başlatıldı. Bogoliubov, zayıf etkileşimli ve uyarılmış atomlar için bir pertürbasyon açılımı geliştirdi.

Mutlak sıcaklıkta ($T = 0$ K), zayıf etkileşimli bozon gazlarının yoğunlaşması, Gross-Pitaevskii (GP) denklemi ile ifade edilir. Bu denklem, 1961 yılında Gross ve Pitaevskii tarafından türetilmiştir. GP denklemi, ortalama alan teoreminden türetilmiş doğrusal olmayan bir Schrödinger denklemdir. Bu denklem, deneysel sonuçlarla uyumludur, çünkü yoğunlaşma hali denklemde tek bir dalga fonksiyonu ile ifade edilir. GP denklemi, içerdiği dış potansiyel terimi nedeniyle analitik çözümü zor ve doğrusal olmayan kısmi bir diferansiyel denklemdir.

Bu tez çalışmasında, düzensiz potansiyelde tuzaklanan ve spin yörünge etkileşimlerini içeren BEY’de Anderson lokalizasyonu etkilerinin araştırılması hedeflenmiştir. Anderson lokalizasyonu, düzensiz bir ortamda ilerleyen maddesel dalgaların lokalize olmasını açıklayan bir olgudur. Bu amaçla, rasgele sayılarla üretilen düzensiz bir potansiyel terimi içeren GP denkleminin nümerik çözümleri yapılacaktır. Sistemde zayıf çekici etkileşimler altındaki BEY’in dinamiği ve faz geçişleri incelenecektir. Ayrıca sistemin dinamiğinin sergilediği düzenli ve kaotik davranışlar sınıflandırılacaktır. Bu analizler, BEY gibi yoğun madde sistemlerinin

düzensiz potansiyel altındaki dinamik özelliklerinin daha iyi anlaşılmasına katkıda bulunacaktır.



1. BOSE EINSTEIN YOĞUNLAŞMASI

1.1. Bose-Einstein Yoğunlaşması Nedir?

BEY, düşük sıcaklık ve düşük yoğunluk koşulları altında, Bose-Einstein istatistiğine uyan bir grup bozonik parçacığın aynı kuantum durumunu paylaştığı fiziksel bir olaydır. BEY, bir gazın nK mertebesine soğutulması ile ortaya çıkar. Bu süreçte, parçacıklar enerji seviyelerine yerleşmeye başlar ve belirli bir kritik sıcaklık altında ve BEY sıcaklığı olarak adlandırılan noktada, parçacıklar temel enerji seviyesine yoğunlaşır. Matematiksel olarak ifade edildiğinde, BEY, belirli bir enerji seviyesindeki ortalama parçacık sayısının sınırsız bir değere yaklaştığı kritik bir noktayı temsil eder [1]. Temel enerji seviyesindeki ortalama parçacık sayısının belirli bir kritik değeri aştığını durumu ifade eden BEY için kullanılan temel matematiksel ifade şu şekildedir [1]:

$$\lim E_i \rightarrow 0, \bar{n}_i \rightarrow N \quad (1.1)$$

$\bar{n}_i$, E_i enerji seviyesinde bulunan ortalama parçacık sayısı, N ise yoğunlaşmanın gerçekleştiği kritik noktayı temsil eder. BEY olayını daha ayrıntılı bir şekilde açıklamak için kullanılan temel kavramlardan biri parçacık dağılım fonksiyonudur. BEY için parçacık dağılım fonksiyonu, belirli bir enerji seviyesindeki ortalama parçacık sayısını tanımlar. Bose-Einstein istatistikleriyle uyumlu olarak parçacık dağılım fonksiyonu şu şekilde ifade edilir [1]:

$$f(\varepsilon_v) = \frac{1}{e^{(\varepsilon_v - \mu)/k_B T} - 1} \quad (1.2)$$

Bu denklemde, ε_v belirli tuzaklama potansiyeli için, tek parçacık durumunun enerjisidir. T sıcaklığında m kütleli etkileşimde bulunmayan bozonların ε_v enerji seviyesini işgal sayıları $n(v) = \exp[(\varepsilon_v - \mu) - 1]^{-1}$ bağıntısıyla verilir; burada $\varepsilon_v = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$ kinetik enerji, μ kimyasal potansiyel ve k_B ise Boltzmann sabitidir. Parçacıkların termal de Broglie dalga boyu

$$\lambda_T = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.3)$$

ifadesi ile verilir. Bu ifadeye göre, dalga boyu ile sıcaklığın karekökü ters orantılıdır. Sıcaklık düşürüldüğünde, parçacıkları temsil eden dalga boyunun büyüklüğü artar. Eğer sistem yeterince büyük seçilirse, enerji seviyeleri sürekli olacaktır. Bu durumda enerji seviyelerindeki parçacık sayısı toplamı durum yoğunluğu üzerinden integral formunda

yazılabilir. λ_T yüksek sıcaklıklarda değer olarak oldukça küçük olduğundan gaz klasik davranış sergiler. Eşitlik (1.3) 'ten anlaşılacağı üzere, yüksek sıcaklıklarda etkileşimlerin az olduğu seyrek gazlarda atomlar bilardo topları gibi düşünülebilir. Sıcaklığın düşmesiyle beraber λ_T de Broglie dalga boyu da artmaya başlar ve atomları ifade eden dalga fonksiyonlarının süperpozisyonu gözlemlenir. Kritik bir sıcaklık eşiğine yaklaşıldığında, bir faz geçişi oluşur ve tüm atomların temsil edilebildiği tek bir dalga fonksiyonu ortaya çıkar. Bu faz geçişinde, BEY gerçekleşir. $T = 0$ K'ye yaklaşıldığında, parçacıkların tümü aynı kuantum durumundadır.

BEY, T_C ile gösterilen kritik bir sıcaklık altında gerçekleşir. Sıcaklığın yüksek olduğu klasik limitte, termal de Broglie dalga boyu küçüktür ve kuantum etkileri ihmal edilebilir. Kritik sıcaklıkta ise atomik dalga paketleri üst üste binmeye başlar ve parçacıkların ayırt edilemezliği önem kazanır. Yapılan BEY deneylerinde, lazerle yapılan soğutmalarda atomların yaklaşık olarak $100 \mu K$ derecesine kadar soğutulması sağlandı. Ancak, nK mertebesindeki düşük sıcaklıklara ulaşmak buharlaştırma yöntemlerinin de kullanılması ile mümkün olmuştur [1].

1.2. Soğutma Teknikleri

1968 yılında Letokhov tarafından lazer ile soğutma yöntemi bulundu. Lazer ile soğutma yönteminde foton-atom saçılmasında “Doppler etkisini” kullanılır. Böylece atomların ortalama hızlarını düşer ve sıcaklık azalır. 1987 yılında Raab tarafından homojen olmayan bir manyetik alan lazer ortamına eklenerek Manyetik Optik Tuzak (MOT) oluşturuldu [1]. Lazer ile soğutma düzeneğinde atomların ortalama hızları düşürülür; ancak tuzaklanamaz. MOT, atomlar üzerine konuma bağlı bir kuvvet uygular ve uzayın belli bir kısmında atom bulutunu tuzaklayabilir. Atomlar manyetik alan ile etkileşerek, Zeeman yarılmasına maruz kalır. Manyetik alanın sıfır olduğu tuzak merkezine doğru geri çağırıcı bir kuvvet algılayan atomlar bu bölgede tuzaklanır [1].

Lazerle soğutma ile atomlar oldukça düşük sıcaklıklara ulaşmalarına rağmen bu sıcaklıklar Bose-Einstein yoğunlaşmasının oluşumuna yeterli değildir. Bu aşamada, buharlaştırarak soğutma yöntemi uygulanır. Bu teknikte yüksek enerjili atomlar tuzaktan kaçmaya zorlanır. Geride ise enerjileri düşük atomlar kalır. Buharlaştırarak soğutma işlemi, bir fincan içindeki kahvenin soğutulması ile aynıdır. Enerjisi fazla olan moleküller fincandan kaçarken, fincan içinde kalan atomlar termalizasyon ile soğurlar.

1.3. İdeal Bose Gazı

İdeal Bose gazı, yüksek sıcaklıklarda ve düşük yoğunluklarda ideal bir Boltzmann gazıdır. Bir tuzaktaki etkileşime girmeyen Bose gazındaki bozonlar için, tek parçacık durumunun kinetik enerjisi ϵ_v Bose dağılımı ile verilir [1]. Bu dağılım Eş. (1.2) ile verildi. Parçacık sayısının korunduğu sistemde N toplam parçacık sayısıdır. Ortalama toplam parçacık sayısı ve ortalama toplam enerji

$$N(T, \mu) = \sum f(\epsilon_v) \quad (1.4)$$

$$E(T, \mu) = \sum \epsilon_v f(\epsilon_v) \quad (1.5)$$

denklemleri ile verilir [1]. Herhangi bir uyarılmış tek parçacık durumunun ortalama uyarılmış parçacık sayısı

$$\frac{\epsilon_v - \mu}{k_B T} \rightarrow 0 \quad (1.6)$$

değerini aşamaz. Sistemin kimyasal potansiyeli, tuzak potansiyeline sahip tek parçacık taban durum enerjisinden daha küçük olamaz. Uyarılmış durumdaki parçacıkların toplam sayısı N 'den azsa, geri kalan parçacıkların, işgal sayısı keyfi olarak büyük olabilen tek parçacık temel durumuna yerleştirilmesi gerekir; sistemde Bose Einstein yoğunlaşması gerçekleşir. Yoğunlaşmanın mevcut olduğu en yüksek sıcaklık, Bose- Einstein geçiş sıcaklığı olan kritik sıcaklık T_c 'dir.

1.3.1. Durum yoğunluğu

Üç boyutta belirli bir iç durumdaki serbest parçacık için, faz uzayının hacmi $(2\pi\hbar)^3$ başına ortalama bir kuantum durumu vardır. Momentumun büyüklüğü p 'den küçük olan momentum uzayı bölgesinin hacmi $\frac{4\pi p^3}{3}$ olup yarıçapı p olan bir küreninkine eşittir. Momentumu p olan bir parçacığın enerjisi $\epsilon_p = \frac{p^2}{2m}$ ile verildiğinden enerjisi ϵ dan küçük olan $G(\epsilon)$ durumlarının toplam sayısı [1]:

$$G(\epsilon) = V \frac{4\pi}{3} \frac{(2m\epsilon)^{\frac{3}{2}}}{(2\pi\hbar)^3} = V \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}(m\epsilon)^{\frac{3}{2}}}{\pi^2 \hbar^3} \quad (1.7)$$

Eşitlik (1.7)'de V sistemin hacmidir. ϵ ve $\epsilon + d\epsilon$ arasındaki enerji seviyelerine sahip durumlarının sayısını $g(\epsilon)$ ile gösterilir:

$$g(\epsilon) = \frac{dG(\epsilon)}{d\epsilon} \quad (1.8)$$

$$g(\epsilon) = \frac{Vm^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3} \epsilon^{\frac{1}{2}} \quad (1.9)$$

Harmonik salıncı potansiyelindeki bir parçacık için potansiyel ile verilir

$$V(r) = \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2) \quad (1.10)$$

Burada k_i üç farklı kuvvet sabitidir. Bu değerlere karşılık gelen klasik salınım frekansları ω_i , $\omega_i^2 = \frac{k_i}{m}$ olduğundan Eş. (1.10) aşağıdaki gibi yazılır [1]:

$$V(r) = \frac{1}{2}m(\omega_1^2x^2 + \omega_2^2y^2 + \omega_3^2z^2) \quad (1.11)$$

Bu sistemin enerjisi

$$\epsilon(n_1, n_2, n_3) = \left(n_1 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_1 + \left(n_2 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_2 + \left(n_3 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_3 \quad (1.12)$$

Enerjisi belirli bir ϵ değerinden daha düşük olan $G(\epsilon)$ durumları $\hbar\omega_i$ ile karşılaştırıldığında, büyük enerjiler için, n sürekli olarak alınır ve sıfır noktası hareketi ihmal edilebilir. Böylece, $\epsilon_i = \hbar\omega_i n_i$ üç değişken tarafından tanımlanan ve sabit enerjili bir yüzeyin $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$ düzlemi olduğu bir koordinat sistemidir. Bu durumda $G(\epsilon)$ hacimle orantılı bulunur:

$$G(\epsilon) = \frac{1}{\hbar^3\omega_1\omega_2\omega_3} \int_0^\epsilon d\epsilon_1 \int_0^{\epsilon-\epsilon_1} d\epsilon_2 \int_0^{\epsilon-\epsilon_1-\epsilon_2} d\epsilon_3 = \frac{\epsilon^3}{6\hbar^3\omega_1\omega_2\omega_3} \quad (1.13)$$

$g(\epsilon) = \frac{dG}{d\epsilon}$ olduğundan durum yoğunluğu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$g(\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{2\hbar^3\omega_1\omega_2\omega_3} \quad (1.14)$$

d boyutlu bir harmonik salıncı potansiyeli için durum yoğunluğu aşağıdaki gibi genelleştirilir:

$$g(\epsilon) = \frac{\epsilon^{d-1}}{(d-1)!\prod_{i=1}^d \hbar\omega_i} \quad (1.15)$$

Eşitlik (1.15)'e göre durum yoğunluğu enerjiye bağlı olarak değişmektedir. C_α bir sabit olmak üzere, durum yoğunluğunun enerjiye bağlılığı

$$g(\epsilon) = C_\alpha \epsilon^{\alpha-1} \quad (1.16)$$

Üç boyutta sınırlanmış bir gaz için α değeri $3/2$ 'ye eşittir. Serbest bir gazın durum sayısını veren Eş. (1.9)'dan, $C_{3/2} = \frac{Vm^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi^2}\hbar^3}$ olduğu görülmektedir. Üç boyutlu harmonik salıncı potansiyelinde tuazaklanan bir gaz için katsayısı $\alpha = 3$ olarak alındığında Eş. (1.17) elde edilir [1]:

$$C_3 = \frac{1}{2\hbar^3\omega_1\omega_2\omega_3} \quad (1.17)$$

Kutudaki veya harmonik salıncı potansiyelindeki parçacıklar için α parçacık başına klasik serbestlik derecesi sayısıdır.

1.3.2. Kritik sıcaklık

Kritik sıcaklık en düşük enerji durumunun makroskobik işgalinin ortaya çıktığı en yüksek sıcaklık olarak tanımlanır. Parçacık sayısı N çok büyük olduğunda Eş. (1.12)'deki sıfır noktası enerjisini ihmal edilebilir. Böylece en düşük enerji potansiyeli Eş. (1.11)'in minimumuna, yani sıfıra eşitlenir. Uyarılmış durumdaki parçacık sayısı (N_{ex}) aşağıdaki gibi bulunur:

$$N_{ex} = \int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon) f(\epsilon) \quad (1.18)$$

$\mu = 0$ için uyarılmış parçacık sayısı en büyük değerine ulaşır. Kritik sıcaklık T_c toplam parçacık sayısının uyarılmış durumda kalma koşulu ile belirlenir:

$$N = N_{ex}(T_c, \mu = 0) = \int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon) \frac{1}{e^{\frac{\epsilon}{k_B T_c}} - 1} \quad (1.19)$$

Eşitlik (1.19) boyutsuz değişken $X = \frac{\epsilon}{k_B T_c}$ kullanılarak yazıldığında

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1} = \Gamma(\alpha)\zeta(\alpha) \quad (1.20)$$

elde edilir. Eşitlik (1.20)'de $\Gamma(\alpha)$ ve $\zeta(\alpha)$ sırasıyla gama ve Riemann zeta fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonların Eş. (1.19)'da kullanılmasıyla kritik sıcaklık ve parçacık sayısı arasındaki bağıntı elde edilir:

$$k_B T_c = \frac{N^{\frac{1}{\alpha}}}{[C_\alpha \Gamma(\alpha)\zeta(\alpha)]^{\frac{1}{\alpha}}} \quad (1.21)$$

Üç boyutlu bir harmonik salıncı potansiyeli için $\alpha = 3$ olduğundan, Eş. (1.17) yardımıyla kritik sıcaklık

$$k_B T_c = \frac{\hbar \bar{\omega} N^{\frac{1}{3}}}{[\zeta(3)]^{\frac{1}{3}}} = k_B T_c = 0.94 \bar{\omega} N^{\frac{1}{3}} \quad (1.22)$$

bulunur. $\bar{\omega} = (\omega_1 \omega_2 \omega_3)^{\frac{1}{3}}$, salınıcı frekansının geometrik ortalamasıdır.



2. GROSS PITAEVSKII DENKLEMİ

Çok düşük sıcaklıklarda zayıf etkileşimli bozonlardan oluşan sistemlerde gözlenen BEY, ortalama alan yaklaşımından türetilen GP denklemi ile temsil edilir. Bu eşitlik ilk defa 1961 yılında Gross ve Pitaevskii tarafından bulundu. Gerçekte GP denklemi zayıf etkileşimli bozonlardaki girdap durumlarını açıklamak için geliştirildi. Bu denklemin geçerlilik şartı saçılma uzunluğu, atomlar arasındaki mesafeden küçük olmasıdır.

Düşük enerjilerdeki iki parçacık arasında etkin olan etkileşim momentum uzayında $U_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$ ile verilir [2]. Burada a saçılma uzunluğudur. Koordinat uzayında bu etkileşim $U_0\delta(r - r')$ temas etkileşimine karşılık gelir; burada r ve r' iki parçacığın konumlarıdır. Çok cisim durumlarının enerjisini araştırmak için Hartree veya ortalama alan yaklaşımı benimsenir ve dalga fonksiyonunun tek parçacık dalga fonksiyonlarının simetrik bir çarpımı olduğunu kabul edilir. Tamamen yoğunlaşmış durumda, tüm bozonlar $\phi(r)$ fonksiyonu ile gösterilen tek parçacık durumundadır. N parçacıklı sistem için dalga fonksiyonu aşağıdaki gibidir [2]:

$$\psi(r_1, r_2, \dots, r_N) = \prod_{i=1}^N \phi(r_i) \quad (2.1)$$

Tek parçacık dalga fonksiyonunun normalizasyonu $\int dr |\phi(r)|^2 = 1$ şeklindedir. Bu dalga fonksiyonu, iki atom birbirine yakın olduğunda etkileşimin ürettiği korelasyonları içermez. Bu fonksiyon yerine, ortadan kaldırılan veya entegre edilen kısa dalga boyuna sahip serbestlik derecelerinin etkisini içeren $U_0\delta(r - r')$ etkileşimi kullanılır. Ortalama alan yaklaşımında, parçacıklar arasındaki mesafeden daha küçük uzunluğa sahip olan serbestlik dereceleri arasındaki etkileşimler dikkate alınmaz. Bu nedenle kesme dalga sayısı sıfıra ayarlanır.

Ortalama alan yaklaşımıyla sistemin etkin Hamiltoniyeni

$$H = \sum_{i=1}^N \left[\frac{p_i^2}{2m} + V(r_i) \right] + U_0 \sum_{i < j} \delta(r_i - r_j) \quad (2.2)$$

şeklinde yazılır [2]. $V(r_i)$ dış, tuzaklama potansiyelidir. Sistemin enerjisi

$$E = N \int dr \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \phi(r)|^2 + V(r) |\phi(r)|^2 + \frac{N-1}{2} U_0 |\phi(r)|^4 \right] \quad (2.3)$$

ile verilir [2]. Hartree yaklaşımında tüm atomlar dalga fonksiyonu $\phi(r)$ ile gösterilen durumdadır. Gerçek dalga fonksiyonlarında, küçük atomik farklılıkların neden olduğu

korelasyonlar, bazı atomları daha hızlı uzaysal değişimlere sokabilir ve bu durumda toplam atom sayısı N 'den daha az olabilir. Bose gazı için kullanılan mikroskobik teoriden anlaşıldığı üzere, yoğunlaşma içindeki parçacık sayısının göreceli azalması, tükenme olarak adlandırılır ve yoğunlaşmanın tükenmesi $(na^3)^{\frac{1}{2}}$ düzeyindedir. V hacimli bir sistemde, taban durumundaki bir parçacığın dalga fonksiyonu $\frac{1}{V^{\frac{1}{2}}}$ 'dir; dolayısıyla bir çift parçacığın etkileşim enerjisi $\frac{U_0}{V}$ olur. N sayıda bozondan oluşan sistemde bozon çiftleri için bu etkileşim enerjisi $\frac{N(N-1)}{2}$ ile çarpılır. $N \gg 1$ varsayımıyla ve $n = N/V$ olmak üzere enerji ifadesi

$$E = \frac{N(N-1)}{2V} U_0 \approx \frac{1}{2} V n^2 U_0 \quad (2.4)$$

bulunur [2]. Yoğunlaşma durumundaki dalga fonksiyonu ve enerjisi

$$\psi(r) = N^{\frac{1}{2}} \phi(r) \quad (2.5)$$

$$E(\psi) = \int dr \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi(r)|^2 + V(r) |\psi(r)|^2 + \frac{1}{2} U_0 |\psi(r)|^4 \right] \quad (2.6)$$

bulunur [2]. Toplam parçacık sayısı

$$N = \int dr |\psi(r)|^2 \quad (2.7)$$

ile normalize edilir. Kısıtlama, Lagrange çarpanları yöntemiyle belirlenir. Bunun için $\delta E - \mu \delta N = 0$ eşitliği kullanılır. Kimyasal potansiyel μ parçacık sayısının sabitliğini sağlayan Lagrange çarpanıdır ve $\psi(r)$ ve $\psi(r)^*$ isteğe bağlı seçilebilir. Bu işlem sabit μ değerinde $E - \mu N$ ifadesinin minimize edilmesine eşdeğerdir. $E - \mu N$ 'nin $\psi(r)^*$ ile değişiminin sıfıra eşitlenmesi Eş. (2.8)'i verir [2]:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(r) + V(r) \psi(r) + U_0 |\psi(r)|^2 \psi(r) = \mu \psi(r) \quad (2.8)$$

Eşitlik (2.8) zamandan bağımsız Gross-Pitaevskii denklemidir.

3. SPİN YÖRÜNGE ETKİLEŞİMLİ BOSE EINSTEIN YOĞUNLAŞMASI

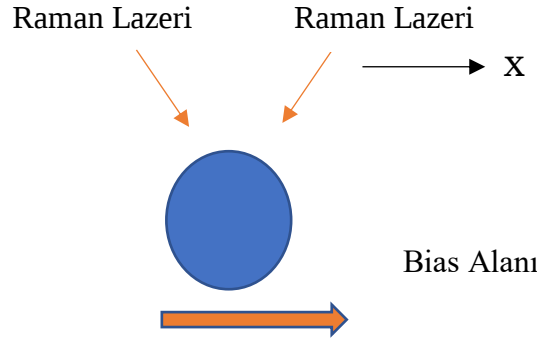
Yoğun madde sistemleri spin-yörünge etkileşimleri (SYE) ile ilişkili çeşitli olgular içermektedir. SYE, kuantum spin Hall etkisi, topolojik izolatörler ve süper iletkenler gibi olgular için kritik bir öneme sahiptir. Nötr atomlardan oluşan bir sistem SYE etkisine sahip değildir; ancak son yıllarda ultra-soğuk atomlar üzerinde yapılan deneylerde SYE sentetik olarak oluşturulmuştur [3].

3.1. Teori

Rb^{87} atomları ile yapılan SYE-BEY deneylerinde, bir çapraz optik dipol tuzağında dejenere atom bulutu hazırlanır [3]. x yönünde homojen bir manyetik bias alan uygulanarak, $F = 1$ temel durumu, yaklaşık lineer olan Zeeman etkisi aralığında, birbirlerine eşit enerji ayrımı ile $m_f = \pm 1$ olmak üzere üç enerji seviyesine ayrılır. Şekil 3.1 'de x yönünde ve izdüşümleri birbirine zıt yönlerde olan iki Raman lazeri görülmektedir. Bu lazerler $|F = 1, m_f = -1\rangle$, $|F = 1, m_f = 0\rangle$ ve $|F = 1, m_f = 1\rangle$ enerji seviyelerini eşleştirmek için kullanılır. Enerji seviyeleri, kuantum spinlerine benzer özellikleri nedeniyle psödo-spinler olarak adlandırılır. Ancak, spin-1/2 sistemini simüle etmek için üçüncü enerji seviyesinin rezonans dışına çıkarılması gerekir. Bu, genellikle yaklaşık 10 Gauss'luk büyük bir manyetik bias alanı kullanılarak gerçekleştirilebilir. Böylece, kuadratik Zeeman etkisi, $|F = 1, m_f = -1\rangle$ ve $|F = 1, m_f = 0\rangle$ arasındaki enerji ayrımını, $|F = 1, m_f = 0\rangle$ ve $|F = 1, m_f = 1\rangle$ geçişlerinden daha büyük bir değere kaydırır [3]. Ardından Raman lazerleri arasındaki uygun bir frekans farkı seçilerek, yalnızca $|F = 1, m_f = -1\rangle$ ve $|F = 1, m_f = 0\rangle$ geçişini ele almak mümkün olur. Bu Raman eşleşmesinin varlığında tek parçacık Hamiltoniyeni şu şekilde yazılır [3]:

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{\Delta E}{2} \sigma_z + \frac{\Omega}{2} \cos(2k_{Ram}x - \Delta\omega t) \sigma_x \quad (3.1)$$

p_x , atomların x yönündeki momentumunu, m ise atomların kütlesidir. $|F = 1, m_f = -1\rangle$ ve $|F = 1, m_f = 0\rangle$ durumları arasındaki enerji ayrımı ΔE ile ifade edilir. k_{Ram} ise zıt yönlü yayılan Raman lazerlerinin x boyunca yansıtılmış dalga sayısını temsil eder [3].



Şekil 3.1: Sentetik SYE'nin gerçekleştirilmesi için deney şeması. Atomlar, x yönü boyunca bir bias manyetik alana tabi tutulur. Atom açısında $\pi/2$ açısıyla ayrılmış iki Raman lazeri, 45° ve 135° 'deki atomlarda oluşur.

İki Raman lazeri arasındaki frekans farkı $\Delta\omega$ ile verilir ve Rabi frekansı Ω

$$\Omega = \frac{\Omega_1\Omega_2}{2\Delta} \quad (3.2)$$

ile verilir. Rabi frekansı, atomların aşırı ince durumlarını birbirine bağlayan bir eşleşme katsayısıdır. Bu katsayı, Raman lazerinin frekansına ve atomların momentumuna bağlıdır. Eşitlik (3.2), her bir Raman lazerinin Rabi frekansları $\Omega_{1,2}$ ile tek foton ayarı Δ arasında bir bağlantı kurar. Rabi frekansları Raman lazerlerinin şiddetlerine bağlıdır. Spin durumları arasındaki etkileşimleri Pauli matrisleri temsil eder. Sistemin dalga fonksiyonu $\psi(x) = (\psi_\uparrow, \psi_\downarrow)^T$ olsun. Aşırı ince durumlar

$$|\uparrow\rangle = |F = 1, m_f = 0\rangle, |\downarrow\rangle = |F = 1, m_f = -1\rangle \quad (3.3)$$

olur. Standart dönen dalga yaklaşımını kullanarak Hamiltoniyen şu şekilde yazılabilir [3]:

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{\Delta E \sigma_z}{2} + \frac{\Omega \cos(2kx - \Delta\omega t) \sigma_x}{2} - \frac{\Omega \sin(2kt - \Delta\omega t) \sigma_y}{2} \quad (3.4)$$

Etkin alanın dönmeyen referans çerçevesinde

$$U = \exp \left[i \left(k_{Ram} x - \frac{\Delta\omega t}{2} \right) \sigma_z \right] \quad (3.5)$$

üniter dönüşümü uygulanarak aşağıdaki Hamiltoniyen elde edilir:

$$H = U^\dagger H U - iU^\dagger \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{(p_x + \hbar k_{Ram} \sigma_z)^2}{2m} + \frac{\Delta E - \hbar \Delta\omega}{2} \sigma_z + \frac{\hbar \Omega}{2} \sigma_x \quad (3.6)$$

Sabit terim çıkarıldıktan sonra deneysel SYE ile ilgili Hamiltoniyen

$$H_{SOC} = \frac{p_x^2}{2m} + \gamma p_x \sigma_z + \frac{\hbar \delta}{2} \sigma_z + \frac{\hbar \Omega}{2} \sigma_x \quad (3.7)$$

bulunur [3]. Burada $\delta = \Delta E - \Delta\omega$ ayar parametresidir. γ , SYE büyüklüğünü ifade eden parametredir ve Raman lazerlerinin dalga sayısı, Planck sabiti ve kütle cinsinden

$$\gamma = \frac{\hbar k_{Ram}}{m} \quad (3.8)$$

ile verilir. Spin yörünge etkileşimlerinin büyüklüğünü belirleyen γ , Raman lazerlerinin dalga sayısına bağlıdır; dolayısıyla deneysel olarak değiştirilebilen bir parametredir. Raman lazerleri arasındaki açıyı değiştirilerek lazerlerin dalga sayısı ve sonuç olarak γ değiştirilebilir. Ayar parametresi δ , ince yapı durumları enerji farkı ve Raman lazerlerinin frekans farkına eşittir:

$$\delta = \frac{\Delta E}{\hbar} - \Delta\omega \quad (3.9)$$

Bias manyetik alan ne kadar güçlüyse, enerji ayrımı o kadar büyük olur. Bu nedenle, ayar parametresi bias alanının büyüklüğü ile ayarlanabilir bir parametredir. Ayrıca, uzaysal olarak homojen olmayan bir bias alanı kullanılarak, konuma bağlı ayar parametresi elde edilir.

Spin yörünge etkileşimlerinin büyüklüğü Raman lazerlerinin gücünün periyodik değişimi ile etkili bir şekilde değiştirilebilir. Bu değişim $\Omega = \Omega_0 + \tilde{\Omega} \cos(\omega t)$ şeklinde olup burada Ω_0 Rabi frekansının ortalama değeridir ve $\tilde{\Omega}$ modülasyon genliğidir. Bu ifade, modülasyon frekansı ω 'nın sistemdeki diğer herhangi bir enerji ölçeğinden çok daha büyük olduğunu varsayar. Bu, Rabi frekansındaki modülasyon terimini iptal etmek için üniter bir dönüşümü önerir [3]:

$$U_1(t) = \exp\left(-i \frac{(\tilde{\Omega} \sin(\omega t))}{2\omega} \sigma_x\right) \quad (3.10)$$

Bu durumda etkin Hamiltonyen

$$\begin{aligned} H_{etkin} &= U_1^\dagger H_{soc} U_1 - i\hbar U_1^\dagger \frac{\partial U_1}{\partial t} \\ &= \frac{p_x^2}{2m} + \left(\frac{\hbar\delta}{2} + \gamma p_x\right) \cos\left[\frac{\tilde{\Omega}}{\omega} \sin(\omega t)\right] \sigma_z + \frac{\hbar\Omega_0}{2} \sigma_x + \\ &\quad \left(\frac{\hbar\delta}{2} + \gamma p_x\right) \sin\left[\frac{\tilde{\Omega}}{\omega} \sin(\omega t)\right] \sigma_y \end{aligned} \quad (3.11)$$

bulunur. Standart Bessel fonksiyon bağıntısı $\exp\frac{i\tilde{\Omega} \sin(\omega t)}{\omega} = \sum_n J_n\left(\frac{\tilde{\Omega}}{\omega}\right) \exp(in\omega t)$ $\tilde{\Omega}$ kullanılarak ve sadece $n = 0$ durumunda yüksek modülasyon frekansı için zamandan bağımsız Hamiltonyen elde edilir:

$$H_{etkin} = \frac{p_x^2}{2m} + \left(\frac{\hbar\delta}{2} + \gamma p_x \right) J_0 \left(\frac{\tilde{\Omega}}{\omega} \right) \sigma_z + \frac{\hbar\Omega_0}{2} \sigma_x \quad (3.12)$$

bulunur. Burada J_0 sıfırıncı mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonudur. $\gamma_{etkin} = \gamma J_0 \left(\frac{\tilde{\Omega}}{\omega} \right)$, etkin SYE büyüklüğüdür. Raman lazerlerinin gücünün yüksek modülasyon frekansı, SYE etkin olarak değiştirmektedir. Bu modülasyon benzer şekilde ayar parametresini de değiştirir: $\delta_{etkin} = \delta J_0 \left(\frac{\tilde{\Omega}}{\omega} \right)$.

3.2. SYE-BEY'in Taban Durumları

Deneyssel olarak oluşturulabilen SYE-BEY'in temel özelliklerini tanımlamak için, iki boyutlu bir geometri ile anlaşılabilir. Bu tür küçültülmüş boyutlara z yönünde güçlü bir tuzaklama potansiyeli uygulanarak ulaşılabilir. Sistemin taban durum özelliklerini belirlemek için GP denklemi kullanılır [3]:

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = [H_{2D} + V(x, y) + H_{int}] \Phi \quad (3.13)$$

Spin yörünge etkileşimlerini içeren tek parçacık Hamiltonyeni

$$H_{2D} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \gamma_{etkin} p_x \sigma_z + \frac{\hbar\Omega}{2} \sigma_x \quad (3.14)$$

Ayar parametresi sıfır olsun. Eğer Rabi teriminin yüksek frekanslı modülasyonu yoksa, $\gamma_{etkin} \rightarrow \gamma$ alınabilir. İki boyutlu harmonik tuzaklama potansiyeli

$V(x, y) = \frac{1}{2} m \omega_y^2 (\eta^2 x^2 + y^2)$ formundadır; burada ω_x ve ω_y sırasıyla x ve y yönleri boyunca tuzaklama frekansdır ve aralarındaki oran η ile verilir: $\eta = \frac{\omega_x}{\omega_y}$. Eşitlik (3.13)'te

H_{etk} , atomlar arası etkileşimleri tanımlayan terim

$$H_{etkin} = \begin{pmatrix} g_{\uparrow\uparrow} |\Phi_{\uparrow}|^2 + g_{\uparrow\downarrow} |\Phi_{\downarrow}|^2 & 0 \\ 0 & g_{\uparrow\downarrow} |\Phi_{\uparrow}|^2 + g_{\downarrow\downarrow} |\Phi_{\downarrow}|^2 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

ile verilir. Burada g katsayıları ilgili s-dalgası saçılma uzunluklarına bağlı atomlar arası etkileşim büyüklüğüdür. Rb^{87} ile yapılan deneylerde $g_{\uparrow\uparrow}, g_{\uparrow\downarrow}$ ve $g_{\downarrow\downarrow}$ arasındaki fark çok küçüktür. Enerji, uzunluk ve zaman için sırasıyla $\hbar\omega_y$, $\sqrt{\hbar/(m\omega_y)}$ ve $\frac{1}{\omega_y}$ birimleri kullanılarak, GP denklemi boyutsuz hale getirilebilir. Sistemin taban durumları, sanal zaman yöntemi kullanılarak bulunabilir. Her bir spin bileşeninin yoğunluk profili Thomas-Fermi dağılımını takip ederken, momentum dağılımı ise Raman lazerlerinin yayılma yönü boyunca sonlu bir yarı-momentumun varlığını göstermektedir. Sonlu bir

yarı momentuma sahip olmasına rağmen sıfır grup hızına sahip olan böyle durağan bir taban durumu, sıfır yarı momentumda yoğunlaşan spin yörünge etkileşimleri yokluğundaki BEY'in taban durumlarından temel olarak farklıdır. Gerçekte, sıfırdan farklı yarı-momentum spin yörünge etkileşimli tek parçacık spektrumunun minimumuna yakın konumlanır [3]:

$$E_{\pm}(k_x, k_y) = \frac{k_x^2 + k_y^2}{2} \pm \sqrt{(\gamma_{etkin} k_x)^2 + \left(\frac{\Omega}{2}\right)^2} \quad (3.16)$$

Burada k_x ve k_y sırasıyla x ve y yönündeki yarı-momentumdur. $E_{\pm}(k_x, k_y)$ spektrumu Eş. (3.14)'ün dispersiyon bağıntısıdır. SO etkileşim spektrumu yalnızca kendi yönü olan x boyunca etkilediği, ancak serbest parçacık dağılımını y yönü boyunca koruduğu görülebilir. Bu spektrumun temel özelliklerinden biri en alt dalında çift kuyulu bir yapıya sahip olmasıdır. Eğer $\Omega < 2\gamma_{etkin}^2$, $(k_x, k_y) = (\pm k_{min}, 0)$ noktasında iki dejenerasyon minimumu görünür. Bu minimum

$$k_{min} = \sqrt{\gamma_{etkin}^2 - \left(\frac{\Omega}{2\gamma_{etkin}}\right)^2} \quad (3.17)$$

ile verilir. Eğer $\Omega \geq 2\gamma_{etkin}$ ise sadece $k_{min} = 0$ da minimum vardır ve tek parçacık spektrumunun en alt dalı standart parabolik forma sahiptir. Bu koşulda taban durumunun özellikleri çoğunlukla spin yörünge etkileşimi yokluğunda oluşan BEY ile aynıdır. Eğer $\Omega < 2\gamma_{etkin}^2$ için ise taban durumu minimumlardan birinde bulunur; dolayısıyla tek parçacık spektrumundaki dejenerasyon ortadan kalkar. Bu taban durumuna düzlem dalga fazı denir.

4. ANDERSON LOKALİZASYONU

P. W. Anderson 1958 yılında, kristallerde elektron iletimi konusunda çalışırken, düzensiz bir ortamda ilerleyen bir dalganın lokalizasyonu hakkında bazı öngörülerde bulundu [4, 5]. Anderson, düzensiz bir metalde, birbirleriyle etkileşmeyen elektronların hangi koşullar altında ilerleyeceği ve hangi koşullarda lokalize olacağını gösterdi. Böyle bir ortamda ilerleyen bir dalga, ortamdaki rastgele dağılmış safsızlıklardan çoklu saçılmasının ve ortaya çıkan yıkıcı girişimin sonucu yayılamaz ve lokalize olur. Bu olaya Anderson lokalizasyonu denir. Yıkıcı girişim etkileri, yayılım koherent olduğu sürece gerçekleşir. Anderson lokalizasyonu, ortamda bir düzensizliğin varlığında, kuantum sisteminin özfonksiyonlarının eksponansiyel olarak bozulması ile karakterizedir; yani $\psi(x) \propto \exp|x|$ bağıntısı ile özfonksiyonlar bozulmaya uğrar.

İlerleyen yıllarda, Anderson lokalizasyonunun düzensiz ortamlarda bulunan maddesel dalgalarda da oluştuğu gözlemlendi [6-10]. Maddesel dalgalarda Anderson lokalizasyonunun gözlenmesi ilk defa ultra soğuk atom çalışmalarında oldu. BEY sistemleri, düzensiz sistemlerle ilgili çalışmalara ve simülasyonlara farklı bir yaklaşım getirir. Bunun nedeni, bu sistemlerde atomlar arası etkileşmeler ve diğer parametrelerin kontrol edilebilir olmasıdır. Düzensiz bir optik örgü potansiyeli optik metotlarla elde edilebilir ve potansiyelin istatistiksel özellikleri hassas bir şekilde kontrol edilebilir. BEY doğrusal olmayan bu yapısı nedeniyle Anderson lokalizasyonu çalışmaları için uygun bir çalışma ortamıdır. BEY sistemlerinde düzensizlik etkilerinin ve Anderson lokalizasyonun gözlenebilmesi için kullanılan dış potansiyeller lazer spotları ile oluşturulan rasgele potansiyeller [6, 11-16] ve optik örgü potansiyelleridir [7, 17-20]. Her iki tür potansiyel de optik yollarla elde edilebilir. Örneğin, ikili-kromatik optik örgü potansiyeli birinci örgü potansiyeline ek olarak oluşturulan ikinci bir zayıf örgü potansiyeli ile elde edilir. Rasgele potansiyeller ise ışığın pürüzlü bir ortamdan yansımalarıyla oluşturulur. Ultra-soğuk atom çalışmalarında Anderson lokalizasyonunun gözlemlendiği ilk deneysel çalışmalar kaynak [6] ve [7]'dir. Billy ve ark., ^{87}Rb atomlarını içeren BEY sisteminde, lazer ile düzensiz bir potansiyel oluşturdular ve dalga fonksiyonunun eksponansiyel olarak lokalize olduğunu gösterdiler [6]. Roati ve ark., birbirleriyle etkileşmeyen ^{39}K atomlarından oluşan ve farklı genlikler ve dalga boylarında iki optik örgü potansiyeli ile tuzaklanan BEY'de, Anderson lokalizasyonunu gözlemlediler [7].

4.1. Anderson Lokalizasyonu Nedir?

Düzensizlikler ve kusurlar birçok fiziksel sistemin özelliklerini güçlü bir şekilde etkileme eğilimine sahiptir. Düzensizliğin en çok bilinen etkilerinden biri Anderson lokalizasyonudur. Anderson lokalizasyonu, ortamdaki düzensizliklerin sonucu ortaya çıkan, kuantum sisteminin özfonksiyonlarının üstel bozunması anlamına gelir. Düzensiz sistemlerde Anderson lokalizasyonunun oluşumu düzensizliğin veya kusurun türüne ve sistemin düzensizlik öncesi enerji spektrumuna bağlıdır. Anderson Lokalizasyonu bir düzlem dalgaının rastgele saçılımlar veya rastgele potansiyel engelleri tarafından oluşturulan çoklu yansımalarının etkisi ile anlaşılabilir.

Düzensiz bir sistem, bir dizi birbiriyle ilişkili olmayan rastgele potansiyel engeline maruz kalan serbest bir parçacıktan oluşur. Bariyer yüksekliklerinin alt sınır olmaksızın sürekli bir dağılıma sahip olduğu varsayılır. Bu, potansiyel için δ -benzeri

$$C(z) = \langle V(x)V(x+z) \rangle = \Delta^2 \delta(z) \quad (4.1)$$

formunda bir korelasyon fonksiyonuna karşılık gelir [21]. Δ düzensizliğe ilişkin ortalama potansiyel enerji değişimidir. Bu özel durum için, bir boyutlu sistemde tüm öz durumların, ortalama bariyer yüksekliğinin son derece küçük değerleri için bile her zaman lokalizedir. Lokalizasyon uzunluğu $\xi(E)$ kinetik enerji ile yaklaşık doğrusal olarak değişir çünkü kinetik enerji potansiyel engellerin çok üstüne çıktıkça kuantum yansımalarının etkisi azalır. Tek boyutta $p(E)$ durum yoğunluğu ile lokalizasyon uzunluğu arasındaki ilişki incelenmiş, aşağıdaki ifade elde edilmiştir [21]:

$$\xi(E)^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln|E - \epsilon| dp(\epsilon) \quad (4.2)$$

Ayrıca büyük enerji sınırında $E > \Delta$ için, $\xi(E)$ ile korelasyon fonksiyonu arasında şu şekilde bir ilişki türetilir [21]:

$$\xi(E)^{-1} = \frac{1}{8E} \int_{-\infty}^{+\infty} C(z) dz = \frac{\Delta^2}{4E} \quad (4.3)$$

Düzensiz potansiyel için bu $\xi(E) \propto \frac{E}{\Delta^2}$ verir. Rastgele bir potansiyelde $E < \Delta$ ayrı olarak incelenmelidir, çünkü enerji dağılımının Lifshits kuyruğu olarak adlandırılan derin birkaç kuyuda "klasik" bağlı durumlara sahip olma olasılığı da vardır.

İki boyutlu bir sistemde durumlar her zaman lokalizedir, ancak lokalizasyon uzunluğunun enerji ile değişimi $\xi(E) \propto \exp(E^{1/2})$ şeklindedir. Bu davranış, rastgele saçılımlı bir durumda, iki boyutta olası yolların daha fazla sayıda olması ile anlaşılabilir. Üç boyutlu durumda, durumların her zaman tamamen lokalize değildir. Üç boyutta,

hareketlilik sınırı olarak adlandırılan ve belirli bir E_m enerjisine karşılık gelen bir kavram mevcuttur. Sistemin öz durumları $E < E_m$ için lokalize iken, $E > E_m$ için lokalize değildir. Herhangi bir sistem için hareketlilik sınırı düzensizliğin büyüklüğüne bağlıdır.

4.2. Boş Uzayda Düzensizlik

BEY sisteminde lazer spotlar ile oluşturulan rasgele potansiyeller düzensizliğe neden olur [22]. Sistem başlangıçta düzgün bir harmonik potansiyelde tuzaklanarak soğutulur. Daha sonra, dağınık bir plakadan geçen ve atomlar üzerine odaklanan bir lazer ışınının statik dipol potansiyeli kullanılarak ayrı ayrı rastgele düzensizlik eklenir. Plaka rastgele bir faz kayması yaratır ve bu kayma rastgele dağılmış tepe noktalarına sahip bir yoğunluk dağılımı oluşturur. Lazer dalga boyu, atomik geçişlerin dalga boyundan daha küçükse, karşılık gelen dipol potansiyeli iticidir ve bu tür yoğunluk tepeleri parçacıklar için potansiyel bariyeri görevi görür. Düzensizliğin harmonik potansiyelin yalnızca bir eksen boyunca mevcut olduğunu varsayılsa, bir boyutlu Hamiltonyen

$$H = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + V(x) \quad (4.4)$$

olur [21]. Düzensiz potansiyel hakkında gerekli bilgi, üstel olan enerji dağılımı $P(E) \propto \exp(-E/\Delta)$ ve onun korelasyon fonksiyonuna (Eş. (4.1)) bakılarak elde edilir. Spot oluşturan merceğin odak uzaklığı f ve çapı D olduğunu varsayılsa, korelasyon fonksiyonu elde edilir [21]:

$$C(z) = \Delta^2 \frac{\sin^2\left(\frac{z}{\sigma_r}\right)}{\left(\frac{z}{\sigma_r}\right)^2} \quad (4.5)$$

Eşitlik (4.5)'da Δ engellerin ortalama yüksekliğidir; $\sigma_r = \frac{\lambda f}{\pi D}$ potansiyelin korelasyon uzunluğudur. Sıfırdan farklı bir korelasyon uzunluğunun varlığı, sistemin lokalizasyon özelliklerini önemli ölçüde değiştirip etkili bir hareketlilik sınırı ortaya çıkarır; yani bir boyutta bile lokalize olamayan durumların varlığına izin verir [23]. Kırınımın sınırlı olduğu bir sistem için $\pi \sigma_r \approx \lambda$ bulunur; burada $\lambda \approx 1 \mu m$ spot oluşturmak için kullanılan lazerin dalga boyudur. Çalışmalar bir spot potansiyeli için

$$E_m = \frac{\hbar^2}{2m\sigma_r^2} \quad (4.6)$$

enerjisinde hareketlilik sınırı bulunduğunu ve Born yaklaşımı dahilinde lokalizasyon uzunluğunun uygun formunun şu şekilde olduğunu göstermiştir [21]:

$$\xi(E) = \frac{8\sigma_r}{\pi} \frac{EE_m}{\Delta^2} \frac{1}{1-k\sigma_r} \frac{1}{\Theta(1-k\sigma_r)} \quad (4.7)$$

Burada $\Theta(x)$ Heaviside fonksiyonudur. Korelasyonsuz düzensizlikle karşılaştırıldığında, lokalizasyon uzunluğunun enerjiyle artışı daha hızlıdır.

4.3. Bir Örgüdeki Rasgele Düzensizlik

Anderson lokalizasyonunun gerçekleştiği fiziksel sistemlerden biri de fotonik örgülerdir [24]. Bir boyutta Anderson modeli aşağıdaki gibi kesikli bir Hamiltonyen ile ifade edilir [21]:

$$H = -J \sum_j (|\omega_j\rangle\langle\omega_{j+1}| + |\omega_{j+1}\rangle\langle\omega_j|) + \sum_j \epsilon_j |\omega_j\rangle\langle\omega_j| \quad (4.8)$$

Bu eşitlikte ilk terim örgüler arası sıçramayı tanımlar; ikincisi ise $[-\Delta, +\Delta]$ aralığında rastgele dağıldığı varsayılan on-site enerji ϵ_j 'yi içerir. Korelasyonsuz rastgele bir düzensizlik için, $\Delta/J \ll 1$ limitinde pertürbasyon teorisi yaklaşımı ile lokalizasyon uzunluğu

$$\xi(E) \approx \frac{24d(4J^2 - E^2)}{\Delta^2} \quad (4.9)$$

bulunur. Lokalizasyon uzunluğu yine boş uzayda olduğu gibi Δ^2 ile ters orantılıdır; ancak lokalizasyonun maksimumu iki bant kenarında ($E \approx \pm 2J$) bulunduğundan uzunluğun enerjiye bağılılığı $\xi(E) \propto E^2$ şeklindedir. Spot potansiyelinin sonlu korelasyon uzunluğu bir boyutta etkili bir hareketlilik sınırı ortaya çıkmasına yol açar [23]. Bununla birlikte, örgünün ilk bandında, lokalize olamayan durumlar yalnızca korelasyon uzunluğu d 'den büyükse ortaya çıkmaktadır.

4.4. Anderson Lokalizasyonu ve Parçacıklar Arası Etkileşimler

Parçacıklar arasındaki etkileşimler, çok cisimli bir sistemlerde Anderson lokalizasyonu özelliklerini değiştirir. Bu etkileşimler, sistemin öz durumlarını lokalize halden lokalize olmayan hale dönüştürerek Anderson lokalizasyonunu bozabilir. Etkileşimlerin sistem üzerine etkileri, parçacıkların bozon veya fermiyon olmasına, tek parçacık enerji spektrumuna, sistemin sıcaklığına, etkileşimlerin özelliklerine (çekici veya itici, kısa veya uzun menzilli olmasına) bağlıdır.

Atomlar için çok düşük sıcaklıklarda baskın etkileşim, saçılma uzunluğu a ile karakterize olan s-dalgası temas etkileşimidir. $\psi(r)$ durumundaki N atomdan oluşan bir sistemde parçacık başına etkileşim enerjisi şu şekildedir [25]:

$$E_{etk} = \frac{4\pi\hbar^2}{m} aN \int |\psi(r)|^4 d^3r \quad (4.10)$$

Pozitif saçılma uzunluğu atomlar arasındaki itici etkileşimlere karşılık gelir; $E_{etk} > 0$ olur. Atomlar arasındaki çekici etkileşimlerde $E_{etk} < 0$ olur. Deneylerde Feshbach rezonans tekniği kullanılarak saçılma uzunluğu a değiştirilebilir. Böylece atomlar arası etkileşimleri itici (çekici) etkileşimlerden çekici (itici) etkileşimlere dönüştürmek mümkündür. BEY için önemli olan itici etkileşim durumudur ($a > 0$); çünkü çekici etkileşim durumları genellikle kararlı değildir. Zayıf etkileşimlerin Anderson lokalizasyonunu nasıl etkileyeceği veya güçlü korelasyon rejimindeki düzensizlik ve etkileşimler nedeniyle ortaya çıkan kuantum fazları hakkında çalışmalar devam etmektedir. Parametrelerin çoğu deneysel olarak kontrol edilebilir olduğundan, düzensizlik ve etkileşimler sistemin temel özelliklerini incelemek için kullanılabilir.

5. SPİN YÖRÜNGE ETKİLEŞİMLİ BOSE EINSTEIN YOĞUNLAŞMASI VE ANDERSON LOKALİZASYONU

Bu bölümde, rasgele sayılarla oluşturulan bir potansiyelde tuzaklanan spin yörünge etkileşimli BEY incelendi. Böyle bir potansiyel ortamda bir düzensizlik oluşturur ve Anderson lokalizasyonu incelenmesine olanak sağlar. Öncelikle sisteme ilişkin GP denklemi nümerik olarak çözüldü ve spin yörünge etkileşiminin Anderson lokalizasyonu ve sistemin dinamiği üzerinde etkilerine yer verildi.

5.1. Rasgele Potansiyelde Tuzaklanan Spin Yörünge Etkileşimli BEY

Rasgele oluşturulan, düzensiz bir potansiyelde tuzaklanan spin yörünge etkileşimli BEY sistemi aşağıdaki GP denklemi ile temsil edilir [26]:

$$i\hbar\partial_\tau\Phi = \left(\frac{1}{2m}(p_X + \hbar\kappa\sigma_y)^2 + \hbar\Delta\sigma_z + V(X) + g'\Phi^\dagger\cdot\Phi\right)\Phi \quad (5.1)$$

Burada $\Phi = (\Phi_\uparrow \ \Phi_\downarrow)^T$ dalga fonksiyonunun pseudo-spin durumlarını temsil eder. κ Raman lazerlerinin dalga sayısına bağlı spin yörünge etkileşim parametresidir. $g_{\uparrow\uparrow} = g_{\uparrow\downarrow} = g_{\downarrow\downarrow} = g'$ olduğu varsayıldı. Eşitlik (5.1) boyutsuz formda aşağıdaki gibi yazılır:

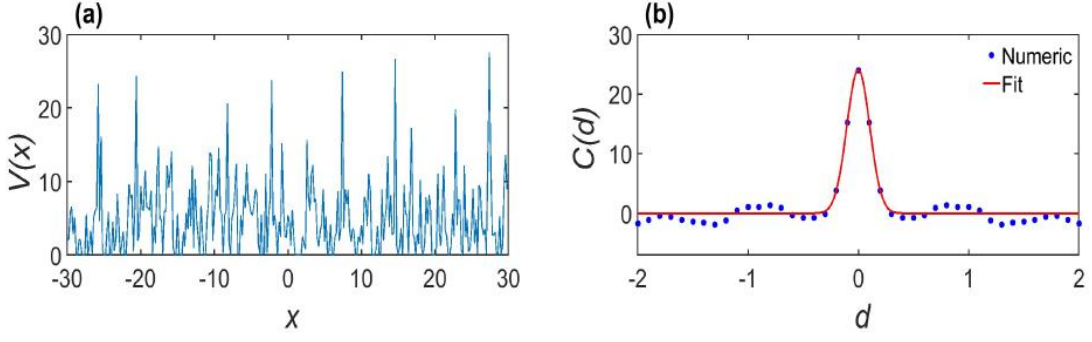
$$i\partial_t\Psi = \left(-\frac{1}{2}\partial_x^2 + i\gamma\sigma_y\partial_x + \delta\sigma_z + V(x) + g\Psi^\dagger\cdot\Psi\right)\Psi \quad (5.2)$$

Eşitlik (5.1) elde edilirken enerji, zaman ve uzunluk sırasıyla $\hbar\Delta$, $1/\Delta$ ve $\sqrt{\hbar/m\Delta}$ ile ölçeklendirildi. Diğer parametreler $\gamma = -\kappa\sqrt{\hbar/m\Delta}$ ve $g = Ng'\sqrt{m/\hbar\Delta}/\hbar$ olur. Bu bölümde, atomlar arası itici etkileşimler incelenerek tüm hesaplamalarda $g = 1$ alındı. Boyutsuz ψ_1 ve ψ_2 dalga fonksiyonları $\int(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)dx = 1$ bağıntısıyla normalizasyon koşulunu sağlar. İkinci terimin anlamı σ_y 'nin sadece momentumun x bileşeni ile etkileşmesidir. Eşitlik (5.2), iki bileşenli olarak aşağıdaki gibi yazılabilir [26]:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\psi_1}{\partial t} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + \gamma\frac{\partial\psi_2}{\partial x} + \delta\psi_1 + V(x)\psi_1 + g(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)\psi_1 \\ i\frac{\partial\psi_2}{\partial t} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} - \gamma\frac{\partial\psi_1}{\partial x} - \delta\psi_2 + V(x)\psi_2 + g(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)\psi_2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Eşitlik (5.3)'te yer alan x 'e bağlı tuzaklama potansiyeli $V(x)$, x eksenı boyunca rasgele dağılmış S tane özdeş spot kümesi ile tanımlanan düzensiz bir potansiyeldir. Böyle bir potansiyel, pürüzlü bir yüzeyden, ışığın yansıması ile oluşur. Bu potansiyel aşağıdaki formdadır [12, 13]:

$$V(x) = V_0 \sum_{j=1}^S f(x - x_j) \quad (5.4)$$



Şekil 5.1: (a) Rasgele oluşturulan tuzak potansiyeli, (b) Otokorelasyon fonksiyonu.

V_0 spot genişliğidir; $f(x - x_j)$ ise x_j konumunda bulunan tek bir spot potansiyelini temsil eder. Gauss şeklinde tek bir spot için

$$f(x_j) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) \quad (5.5)$$

σ genişlik olup, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ normalizasyon koşulu sağlanır. Eşitlik (5.4) ile verilen rasgele spot potansiyelinin istatistiksel ortalaması

$$\langle V(x) \rangle = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L V(x)dx = \frac{V_0}{D} \quad (5.6)$$

D spotlar arası ortalama mesafe, $2L$ potansiyelin konumsal uzanımıdır. Ortalama spot yüksekliği

$$V_H = \sqrt{\frac{1}{2L} \int_{-L}^L (V(x) - \langle V(x) \rangle)^2 dx} \quad (5.7)$$

olur. $V(x)$ potansiyeli için otokorelasyon fonksiyonu

$$C(d) = \langle V(x)V(x+d) \rangle - \langle V(x) \rangle^2 \quad (5.8)$$

denklemleri ile verilir. Otokorelasyon fonksiyonunun genişliği spotların genişliğinin bir ölçüsüdür. Korelasyonlar, lokalizasyonu artırır ve bu etkinin büyüklüğü etkileşimlerden ve düzensizliğin büyüklüğünden etkilenir. Eşitlik (5.4) ile verilen rasgele potansiyele örnek, Şekil 5.1-a'de çizildi. $S = 300$, $L = 30$, $\sigma = 0,1$, $V_0 = 1$ alındı. Bu potansiyel, MATLAB programında RAND komutu ile $[-L, L]$ aralığında, 300 tane rasgele sayı ile üretildi. Bu rasgele sayılar, x_j konumlarını belirlemektedir. Eşitlik (5.6) ile verilen istatistiksel ortalama $\langle V(x) \rangle = 5$, ortalama spot yüksekliği $V_H = 4.94$ bulunur. Otokorelasyon fonksiyonu $C(d)$ Şekil 5.1-b'de çizildi. Otokorelasyon fonksiyonunun

sayısal değerine Gaussian eğri uyumu yapıldı. Sayısal değer kırmızı eğri ile, Gaussian eğrisi ise noktalar ile gösterildi. Otokorelasyon fonksiyonuna uydurulan fonksiyon

$$C(d) \approx V_R^2 \exp\left(-\frac{d^2}{\sigma_R^2}\right) \quad (5.9)$$

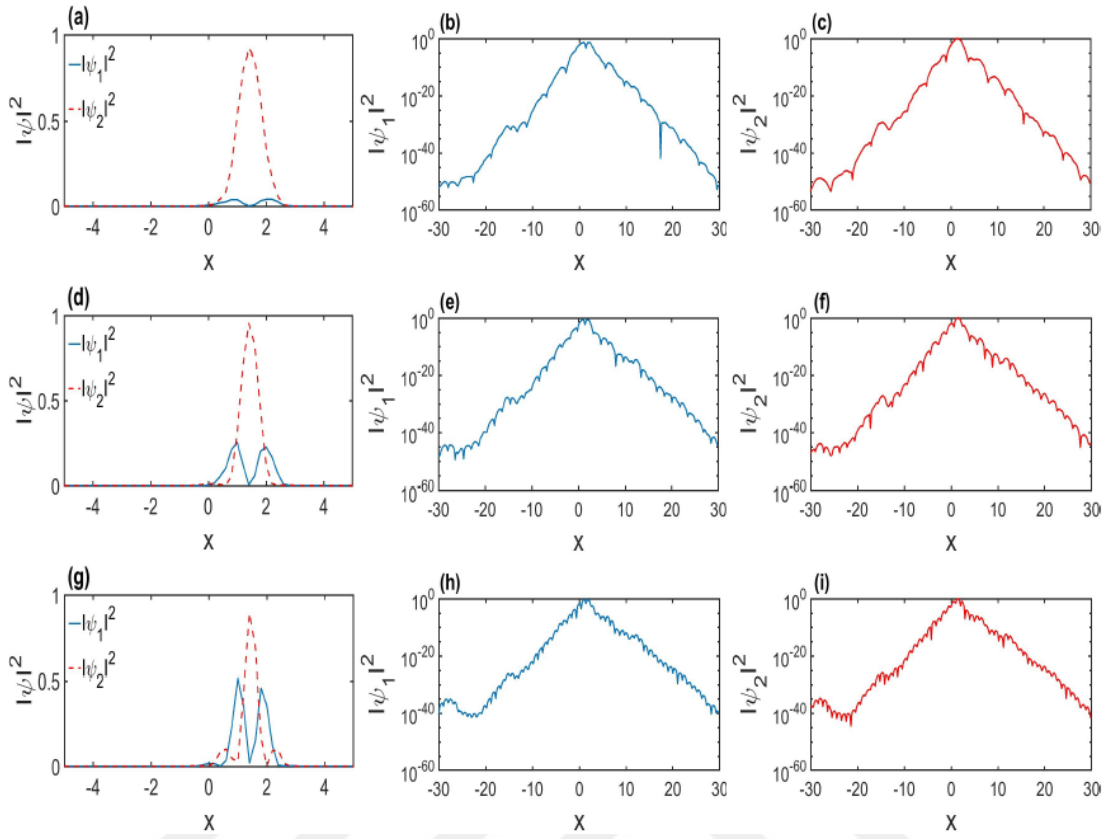
şeklindedir. Eğri uyumu sonucunda, genlik $V_R = 4,90$, korelasyon uzunluğu $\sigma_R = 0,14$ bulunur. Şekil 5.1-a'dan, kuantum durumların $x = 1,4$ koordinatında lokalize olduğu anlaşılmaktadır. Farklı rasgele sayılarla üretilen bir potansiyel kullanıldığında bu lokalizasyon konumu değişmekle birlikte, kuantum durumlarının özellikleri değişmemektedir [12, 13].

5.2. Nümerik Sonuçlar

Bu bölümde Eş. (5.3) ile verilen iki bileşenli GP denkleminin nümerik çözümleri yapıldı. Denklemin taban durumu çözümlerinin bulunması için “sanal zaman metodu” kullanıldı. Nümerik çözümler yoğunlaşmanın iki bölgesi için elde edildi: merkezi bölge ve uç bölge.

Spin yörünge etkileşiminin merkezi ve uç bölgelerdeki lokalizasyon üzerine etkileri Şekil 5.2'de görülmektedir. Şekil 5.2-a, $\delta = 0,5$ ve $\gamma = 0,8$ parametreleri için elde edilen yoğunluk grafiklerini göstermektedir. Mavi çizgi birinci bileşene, kırmızı kesikli çizgi ikinci bileşene aittir. Birinci bileşen iki küçük pike sahip iken, ikinci bileşen Gaussian şekline benzer yüksek bir pike sahiptir. Yoğunluk grafiğinin merkezi, potansiyelin sıfır olduğu $x = 1,4$ konumundadır. Yoğunlaşmanın uç bölgelerinde lokalizasyonun daha detaylı görülebilmesi için, birinci ve ikinci bileşenlere ait yoğunluk grafikleri Şekil 5.2-b ve 5.2-c'de logaritmik olarak çizildi. Düzensiz potansiyellerde oluşan Anderson lokalizasyonu, lokalize durumların uç bölgelerde eksponansiyel olarak azalması ile karakterizedir. Bu iki şekilde görülen eksponansiyel olarak azalan uzun kuyruk Anderson lokalizasyonunu göstermektedir. Bu uzun kuyruk bölümü, her iki bileşen için de $x = 2,6$ 'dan $x = 30$ 'a uzanmaktadır. Logaritmik ölçekte çizilen bu grafiklerde, merkezi yoğunluk dağılımı da net görülmektedir. Spin yörünge etkileşim büyüklüğünün lokalizasyon üzerine etkilerini incelemek amacıyla, Şekil 5.2-d ve 5.2-f'de

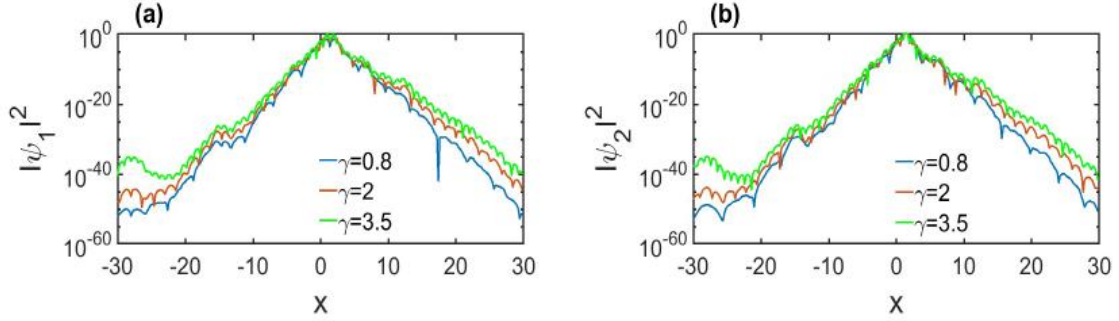
$\gamma = 2$ 'ye artırıldı. Şekil 5.2-d'den anlaşılabacağı üzere, γ 'daki artış ile birlikte, ilk bileşenin yoğunluğu artmakta, ikinci bileşenin yoğunluğu nerdeyse aynı kalmaktadır.



Şekil 5.2: (a)-(c) Yoğunlaşmanın $\gamma = 0,8$ için yoğunluk grafikleri, (d)-(f) Yoğunlaşmanın $\gamma = 2$ için yoğunluk grafikleri, (g)-(i) Yoğunlaşmanın $\gamma = 3,5$ için yoğunluk grafikleri. $\delta = 0,5$ alındı.

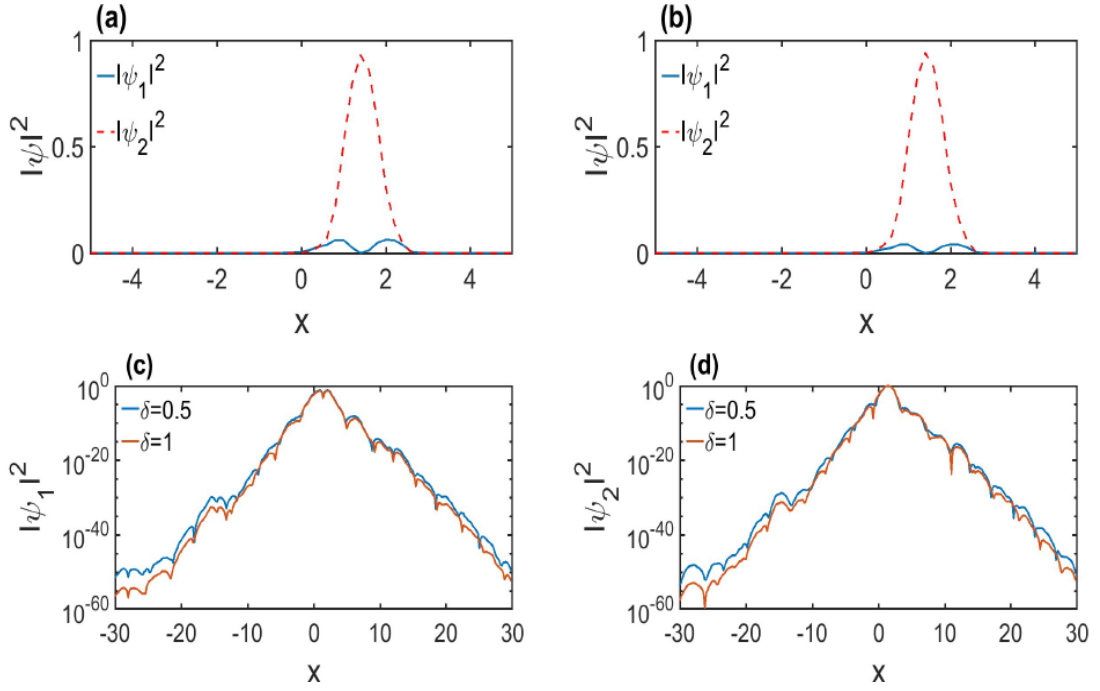
Spin yörünge etkileşiminin artmasıyla birinci bileşenin yoğunluğu artmakla birlikte, yoğunlaşmanın genişlediği görülmektedir. Dolayısıyla, γ 'daki artış, yoğunlaşmanın lokalize olmamasına ve uzayda yayılımına neden olmaktadır. $\gamma = 2$ için logaritmik yoğunluk grafikleri Şekil 5.2-e ve 5.2-f'de çizildi. Anderson lokalizasyonunun göstergesi olan eksponansiyel azalma bu grafiklerde de görülmektedir. Şekil 5.2-g'de ise SO etkileşim büyüklüğü, $\gamma = 3,5$ olarak ayarlandı. Bu grafik, ilk bileşenin yoğunluğunun arttığını, ancak pik sayısının ve genişliğinin de arttığını göstermektedir. İkinci bileşenin yoğunluğu ise Gaussian şeklinden uzaklaşır ve daha fazla pik sayısına sahip olur. Yoğunlaşmanın uç bölgelerine bakıldığında (Şekil 5.2-h ve 5.2-i), bu kuvvetli γ rejimine, uç bölgelerin yayıldığı görülmektedir. Bu durum, yoğunlaşmanın artık lokalize olmadığı anlamına gelir. Tuzaklama potansiyeli simetrik olmadığından, logaritmik grafiklerin orjin etrafında simetrik olmadığı görülmektedir. Bu nedenle, sağ ve sol uçların lokalizasyon uzunlukları farklıdır.

Spin yörünge etkileşiminin lokalizasyon uzunluğu üzerine etkilerinin daha iyi anlaşılması için üç farklı parametrede ($\gamma = 0,5$, $\gamma = 2$ ve $\gamma = 3,5$) logaritmik yoğunluk değerleri aynı grafik üzerinde gösterildi. Şekil 5.3-a birinci bileşene ait sonuçları, Şekil 5.3-b ikinci bileşene ait sonuçları göstermektedir. Her iki bileşen için de, γ değerindeki artış, lokalizasyon uzunluğunun azalmasına neden olur.



Şekil 5.3: Farklı γ değerleri için logaritmik yoğunlukların üst üste çizilmesi. **(a)** Birinci bileşen, **(b)** İkinci bileşen $\delta = 0,5$ alındı.

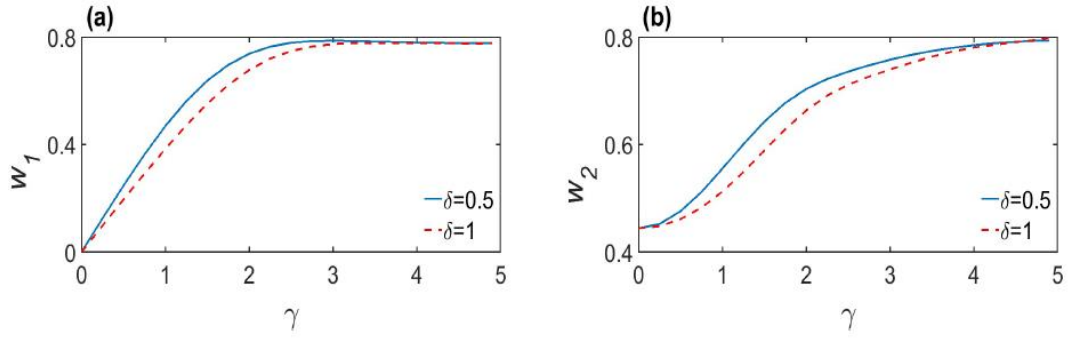
Ayar parametresi δ , buraya kadar yapılan nümerik hesaplamalarda sabit alındı. Ayar parametresinin Anderson lokalizasyonu üzerine etkilerinin incelenebilmesi için, Şekil 5.4 spin yörünge etkileşimi sabit tutularak, farklı δ değerlerinde yoğunluk grafikleri çizildi. Şekil 5.4-a ve Şekil 5.4-b, $\delta = 0,5$ ve $\delta = 1$ değerlerinde, birinci ve ikinci bileşenin yoğunluklarını gösterir. Bu iki grafik, ayar parametresinin merkezi bölgede etkisinin az olduğunu göstermektedir. Ayar parametresinin artırılması, yoğunlukları bir miktar azaltmaktadır. İlk bileşen iki pike sahipken, ikincisi Gaussian şekline benzer tek pike sahiptir. Bu nedenle, ayar parametresinin pik sayısını değiştirmedığı söylenebilir. Şekil 5.4-c ve Şekil 5.4-d farklı δ değerlerinde, logaritmik yoğunluklar üst üste çizildi. Mavi eğri $\delta = 0,5$ değerini, kırmızı eğri $\delta = 1$ değerini temsil etmektedir. Her iki parametre değerinde, uzun eksponansiyel kuyruk görülmekte olup, $\delta = 0,5$ değerinde yoğunluğun daha fazla yayıldığı görülmektedir. Ayar parametresindeki artış ile birlikte merkezi bölgedeki yoğunluk bir miktar azalmakla birlikte, yoğunlaşma genişliğini bulmak için yapılan nümerik hesaplama δ 'daki artışın genişliği azalttığını göstermektedir. Yoğunlaşmanın birinci ve ikinci bileşenine ait nümerik genişlik değerlerinin (w_1 ve w_2) spin yörünge etkileşimi ile değişimi, farklı δ değerleri alınarak Şekil 5.5'te çizildi. Şekil 5.5-a birinci bileşenin, Şekil 5.5-b ikinci bileşenin genişliğini gösterir. Grafiklerde görülen düz mavi çizgi $\delta = 0,5$ değerini, kırmızı kesikli çizgi $\delta = 1$



Şekil 5.4: (a) $\delta = 0,5$ için bileşenlerin yoğunlukları, (b) $\delta = 1$ için bileşenlerin yoğunlukları, (c) $\delta = 0,5$ için bileşenlerin logaritmik yoğunlukları, (d) $\delta = 1$ için logaritmik grafikler.

değerini temsil eder. Yoğunlaşmanın genişliği w nümerik olarak, $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ formülü ile bulunur. Şekil 5.5'ten anlaşılabacağı üzere, genişlik spin yörünge etkileşimi ile birlikte artmakta, ancak bu artış spin yörünge etkileşiminin sabit bir değerine kadar olmaktadır. Bu değerden sonra, γ 'nın yoğunlaşma genişliği üzerine bir etkisi bulunmamaktadır. İki farklı δ değeri karşılaştırıldığında ise, ayar parametresinin her iki bileşen için de genişliği azalttığı söylenebilir. Ancak bu sonuç, γ 'nın orta değerlerinde geçerlidir. γ 'nın düşük ve yüksek değerlerinde, δ 'nın w üzerinde bir etkisi bulunmamaktadır. Genişliğin γ ve δ ile değişimi, her iki bileşende farklılık gösterir: İlk bileşenin genişliği ikinciye oranla daha fazla artmaktadır. Sonuç olarak; γ lokalizasyonu azaltırken, δ 'nın lokalizasyonu arttırmaktadır. Ancak ayar parametresinin etkisi γ ile karşılaştırıldığında daha azdır.

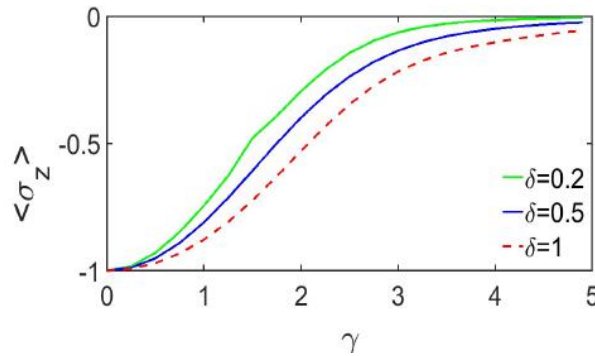
Bu bölümde ayrıca yoğunlaşmanın iki bileşeni arasındaki popülasyon dengesi çalışıldı. Ayar parametresinin sıfırdan farklı olduğu durumlarda, bileşenlerin atom sayıları birbirine eşit değildir. Bileşenler arasındaki dengesizlik spin polarizasyonu ile ifade edilir. Spin polarizasyonu



Şekil 5.5: Yoğunlaşma genişliğinin SO etkileşimi ile değişimi. **(a)** Birinci bileşen, **(b)** İkinci bileşen. $\delta = 0,5$ ve $\delta = 1$ alındı.

$$\langle \sigma_z \rangle = \int dx (|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2) \quad (5.10)$$

denklemleri ile verilir. Spin polarizasyonunun γ ile değişimi Şekil 5.6’da verildi. Düşük etkileşim değerlerinde, spin polarizasyonu -1 ’e gitmektedir. Bunun nedeni, küçük γ değerlerinde birinci bileşenin yoğunluğunun ikinci bileşene kıyasla çok küçük olmasıdır. γ değerindeki artış dolayısıyla bileşenlerin yoğunlukları değişir; bu durum yüksek γ değerlerinde spin polarizasyonunun artarak sifira girmesine neden olur. $\langle \sigma_z \rangle$ ’in -1 ’den sifira gitmesi kuantum faz geçişi olduğunu gösterir; spin polarize modundan spin-denge moduna geçiş olmaktadır. Şekil 5.6’dan ayrıca spin polarizasyonunun ayar parametresi ile değişimi de görülmektedir. Ayar parametresi 0.2 ’den 1 ’e arttırıldı. Aynı γ değerinde, ayar parametresi arttıkça spin polarizasyonu azalmaktadır. Buna karşılık, δ ’nın spin polarizasyonu üzerindeki bu etkisi γ ’nın küçük ve büyük değerlerinde önemsizleşir. Sonuç olarak, spin yörünge etkileşimlerinin ve ayar parametresinin bileşenler arasındaki atom transferi üzerinde bir etkisi mevcuttur.



Şekil 5.6: Spin polarizasyonunun spin yörünge etkileşimi ile değişimi. $\delta = 0,2$, $\delta = 0,5$ ve $\delta = 1$.

5.1. Sönümlenmiş Dinamik

Spin yörünge etkileşimlerini içermeyen BEY sisteminin sönümlenmiş dinamiği, kaynak [27]'de zaman-korelasyon fonksiyonu kullanılarak incelendi. Sönümlenmiş dinamiğin yapısı, taban durumunun lokalize olup olmaması ile belirlenir. Sistemin dinamiği incelenirken, önce taban durum çözümleri elde edilir; sonra atomlar arası etkileşimlerin sıfırlanarak zaman-korelasyon fonksiyonu bulunur. Atomlar arası etkileşimlerin sıfırlanarak dalga fonksiyonlarının zamanla değişiminin incelenmesi “sönümlenmiş dinamik” olarak adlandırılır [27]. Zaman-korelasyon fonksiyonun zamanla değişimi periyodik ise sistem düzenli bir sönümlenmiş dinamiğe sahiptir, periyodik değil ise sistemin sönümlenmiş dinamiği kaos halindedir.

Bu bölümde spin yörünge etkileşimlerini içeren BEY için zaman-korelasyon fonksiyonu hesaplandı. Zaman-korelasyon fonksiyonu [27]

$$c(t) = |\langle \psi(x, 0) | \psi(x, t) \rangle| \quad (5.11)$$

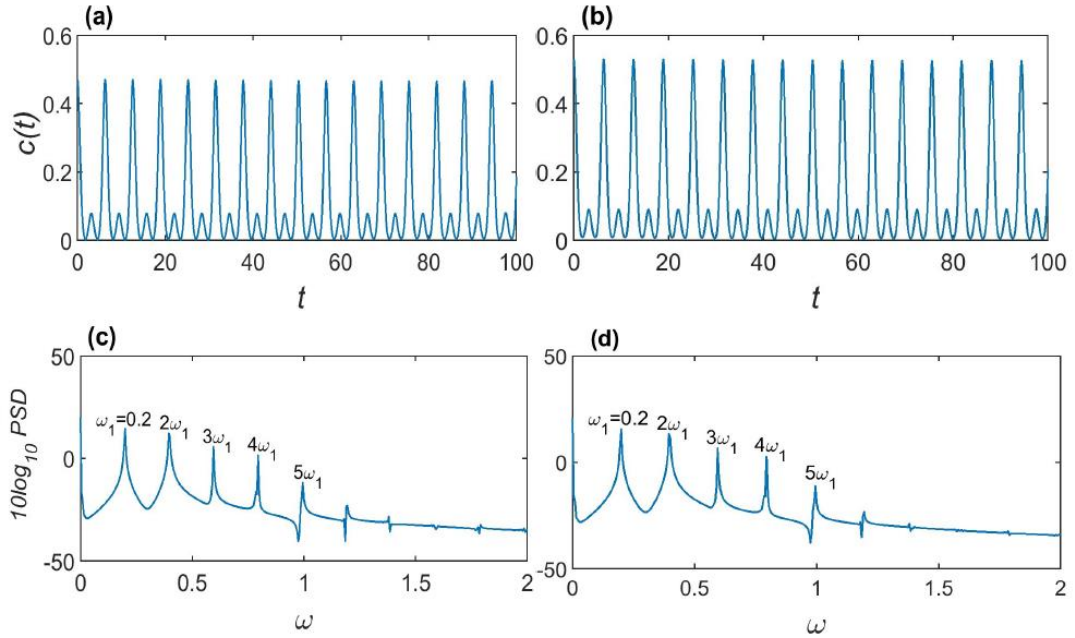
denklemleri ile verilir. Burada $\psi(x, 0)$, sanal zaman metodu ile bulunan taban durumu çözümleridir. Bu çözümler başlangıç koşulu kabul edilerek ve spin yörünge etkileşimi ile ayar parametresinin sıfırlanmasıyla Eş. (5.3)'nin zamana bağlı çözümleri $\psi(x, t)$ bulunur. Split step Fourier metodu zamana bağlı çözümlerin bulunması için yaygın kullanılan metotlardan biridir. $c(t)$ 'nin Eş. (5.11) ile bulunmasıyla PSD (power spectral density) hesaplanır. PSD, sistemin dinamiğinde kaosun başlangıcı ile ilgili bilgi verir. PSD denklemleri

$$PSD = \frac{1}{2\pi N} |\hat{c}(\omega)|^2 \quad (5.12)$$

$\hat{c}(\omega)$, zaman-korelasyon fonksiyonunun Fourier dönüşümüdür. $m = 0, 1, 2, \dots, N$ ise kesikli zaman serisidir. Burada kaotik dinamik ile ilgili iki örnek bulunmaktadır. Birinci örnekte tuzak potansiyeli olarak harmonik potansiyeli, ikinci örnekte ise rasgele potansiyele alındı.

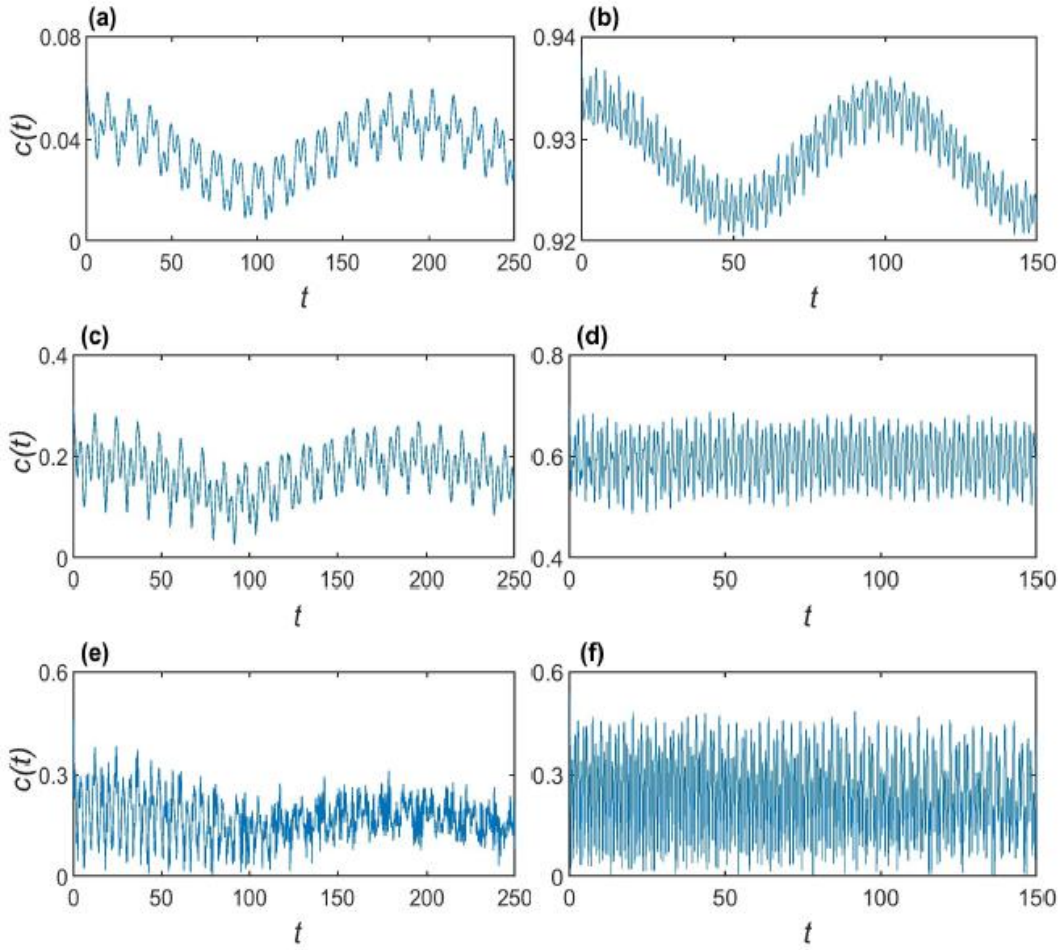
Harmonik tuzaklama potansiyeli $V(x) = x^2/2$ formundadır. Bu potansiyel için hesaplanan zaman-korelasyon fonksiyonunun zamana bağlılığı Şekil 5.7'de görülmektedir. Bu grafik için alınan ayar parametresi ve spin yörünge etkileşimi etkileşimi sırasıyla $\delta = 0,5$ ve $\gamma = 3$ 'tür. Birinci bileşenin zaman-korelasyon fonksiyonu Şekil 5.7-a'da, ikinci bileşenin zaman-korelasyon fonksiyonu Şekil 5.7-b'de

verilmektedir. Bu parametre değerleri ile, zaman korelasyon fonksiyonunun düzenli bir dinamik sergilediği anlaşılmaktadır. Şekil 5.7-c ve Şekil 5.7-d ise harmonik potansiyelde tuzaklanan yoğunlaşmanın birinci ve ikinci bileşenine ait PSD'nin frekansa bağlılığını gösterir. Her iki grafik de basit bir frekans spektrumuna sahiptir. Bu spektrum, temel frekans olan $\omega_1 = 0,2$ ve onun harmoniklerini içerir. Şekilde temel frekansın beş harmonik görülmektedir. Her iki bileşen de aynı zaman-korelasyon fonksiyonuna ve PSD grafiğine sahiptir.



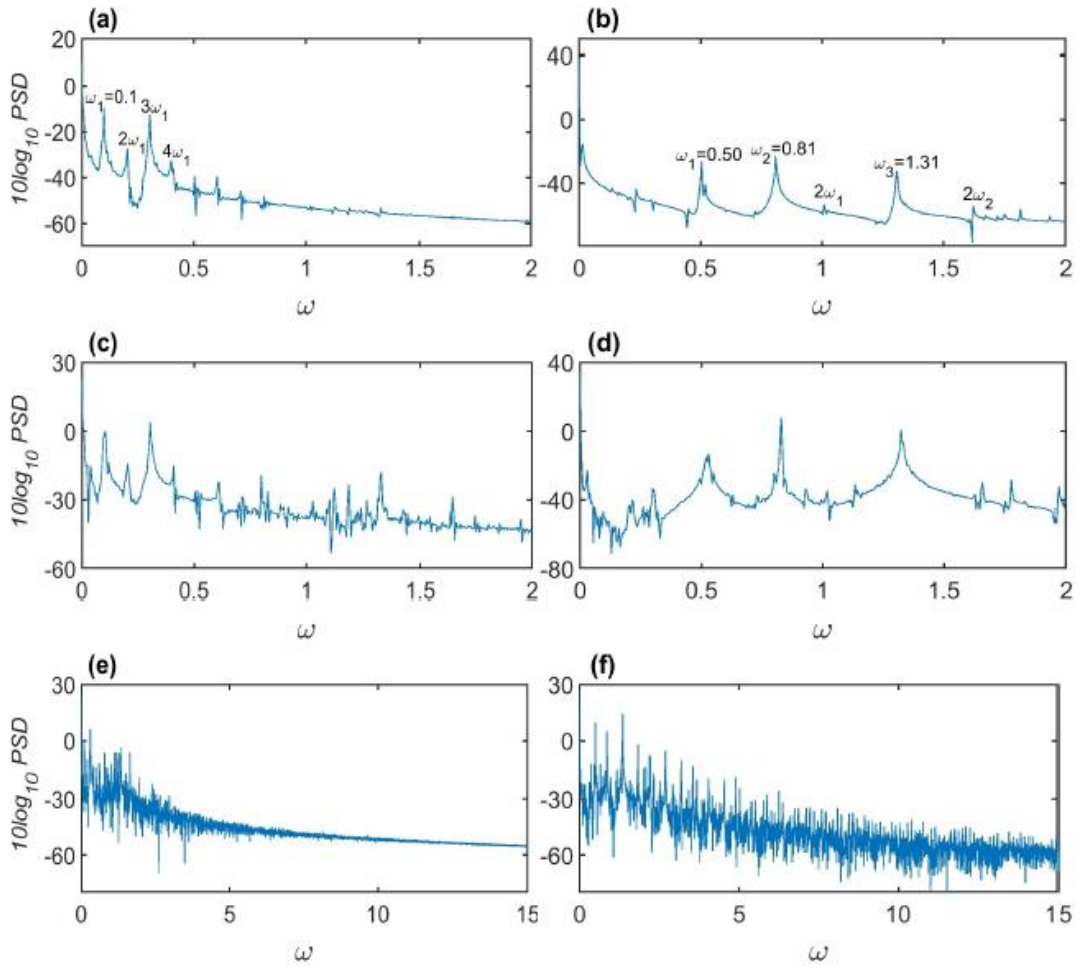
Şekil 5.7: Harmonik potansiyel için çizilen zaman-korelasyon fonksiyonunun zamanla değişimi: **(a)** Birinci bileşen, **(b)** ikinci bileşen. PSD'nin frekansa bağlılığı: **(c)** Birinci bileşen, **(d)** ikinci bileşen. $\delta = 0,5, \gamma = 3$.

İkinci örnek olarak rasgele potansiyelde tuzaklama yoğunlaşma ele alındı. Farklı γ değerleri için $c(t)$ 'nin zamanla değişimini veren Şekil 5.8, spin yörünge etkileşimi etkileşiminin sistemin dinamiği üzerine olan etkilerini gösterir. Nümerik sonuçları ele alındığı Bölüm 5.2'de, spin yörünge etkileşimlerinin Anderson lokalizasyonunu azalttığı ifade edildi. Dolayısıyla, γ değeri azaldıkça dinamiğin düzenli olması, γ arttıkça ise dinamiğin kaotik bir davranış sergilemesi beklenir. Şekil 5.8-a ve Şekil 5.8-b birinci ve ikinci yoğunlaşma bileşenlerine ait $c(t)$ grafikleridir ($\gamma = 0,8$ ve $\delta = 0,5$). Şekilden anlaşılabacağı üzere, $c(t)$ zamanla periyodik salınımlar yapmakta, ancak bu salınımlar periyodik olmayan küçük salınımlardan oluşmaktadır. Bu küçük salınımlar özellikle



Şekil 5.8: *Rasgele potansiyel için çizilen zaman-korelasyon fonksiyonunun zamanla değişimi: (a) Birinci bileşen, $\gamma = 0,8$. (b) İkinci bileşen, $\gamma = 0,8$. (c) Birinci bileşen, $\gamma = 2$. (d) İkinci bileşen, $\gamma = 2$. (e) Birinci bileşen, $\gamma = 3,5$. (f) İkinci bileşen, $\gamma = 3,5$. $\delta = 0,5$.*

ikinci bileşende daha karmaşıktır. Şekil 5.8-c ve Şekil 5.8-d ise ayar parametresi sabit alınarak, $\gamma = 2$ 'ye arttırılarak çizildi. Bu parametre değerinde, her iki bileşene ait $c(t)$ 'nin periyodik olmayan, düzensiz salınımlar yaptığı anlaşılmaktadır. Spin yörünge etkileşimi etkileşim parametresinin daha fazla arttırılması, yani $\gamma = 3,5$ ile çizilen Şekil 5.8-e ve Şekil 5.8-f grafikleri ise zaman-koelasyon fonksiyonunun daha komplike bir davranış sergilediğini ortaya koyar. Buradan elde edilen sonuçlara göre, Anderson lokalizasyonunun arttığı düşük γ değerleri için sistemin sönümlenmiş dinamiği periyodik bir davranış göstermekte, lokalizasyonun azaldığı yüksek γ değerlerinde sistemin dinamiği kaotik bir davranış sergiler. Bir başka deyişle, yoğunlaşmanın taban durumu lokalize durumlardan lokalize olmayan durumlara geçiş yaparken, sistemin sönümlenmiş dinamiği kaotik duruma geçer. Rasgele potansiyel için elde edilen PSD sonuçlarına Şekil 5.9'da yer verildi. Şekil 5.9-a ve Şekil 5.9-b $\gamma = 0.8$ için sırasıyla birinci ve ikinci



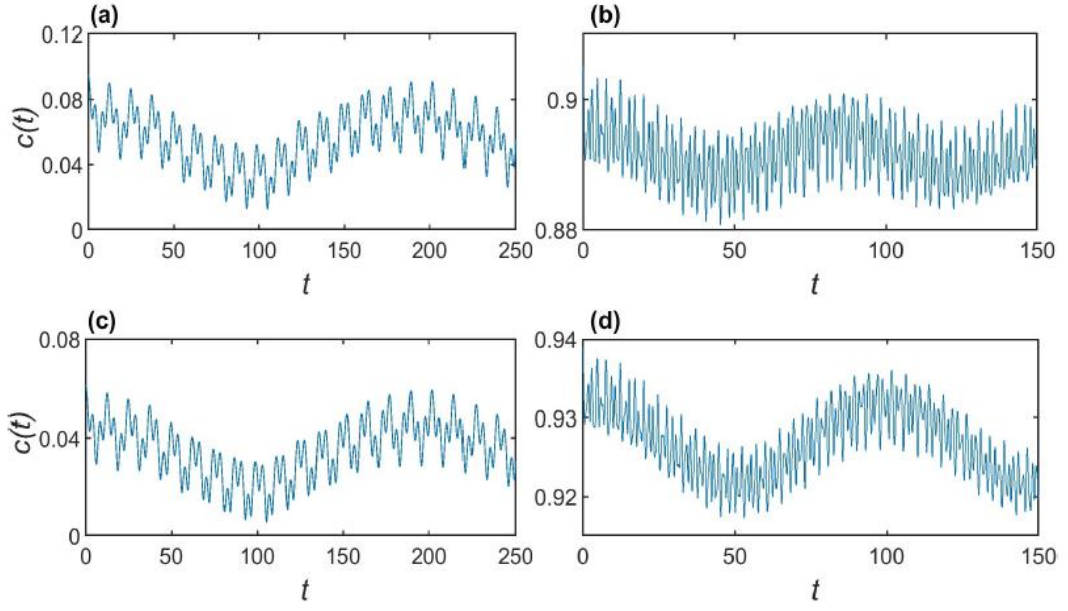
Şekil 5.9: PSD'nin frekansa bağıllığı: **(a)** Birinci bileşen, $\gamma = 0,8$. **(b)** İkinci bileşen, $\gamma = 0,8$. **(c)** Birinci bileşen, $\gamma = 2$. **(d)** İkinci bileşen, $\gamma = 2$. **(e)** Birinci bileşen, $\gamma = 3,5$. **(f)** İkinci bileşen, $\gamma = 3,5$. $\delta = 0,5$ alındı.

bileşene ait PSD'nin frekansa bağıllığını gösterir. Birinci bileşene ait ilk pik değeri $\omega_1 = 0,1$ olup bu değer birinci temel frekanstır. Bu frekansın bazı harmonikleri grafikte görülmektedir. İkinci bileşene ait ilk temel frekansın $\omega_1 = 0,1$, ikincisinin $\omega_2 = 0,81$, üçüncüsünün $\omega_3 = 1,31$ olduğu anlaşılmaktadır. Bu frekanslara ait bazı harmonikler de grafikte yer almaktadır (Şekil 5.9-b). Spin yörünge etkileşimi etkileşimi arttırıldıkça ($\gamma = 2$), PSD grafiğinde daha fazla frekans bulunur (Şekil 5.9-c ve Şekil 5.9-d). Bu grafiklerde temel frekanslar hala görülmekle birlikte, aralarında farklı frekanslar oluşmaktadır. Dolayısıyla, yoğunlaşmanın dinamiği artan Spin yörünge etkileşimi etkileşimi ile daha karmaşık bir hal alır ve kaotik bir hal alır. Bu sonuç $\gamma = 3,5$ için çizilen Şekil 5.9-e ve Şekil 5.9-f grafiklerinden daha net anlaşılmaktadır. PSD grafiğinde çok sayıda ve farklı frekans değerleri bulunur. Ayrıca, bu grafiklerin bir diğer özelliği PSD'nin frekans ile

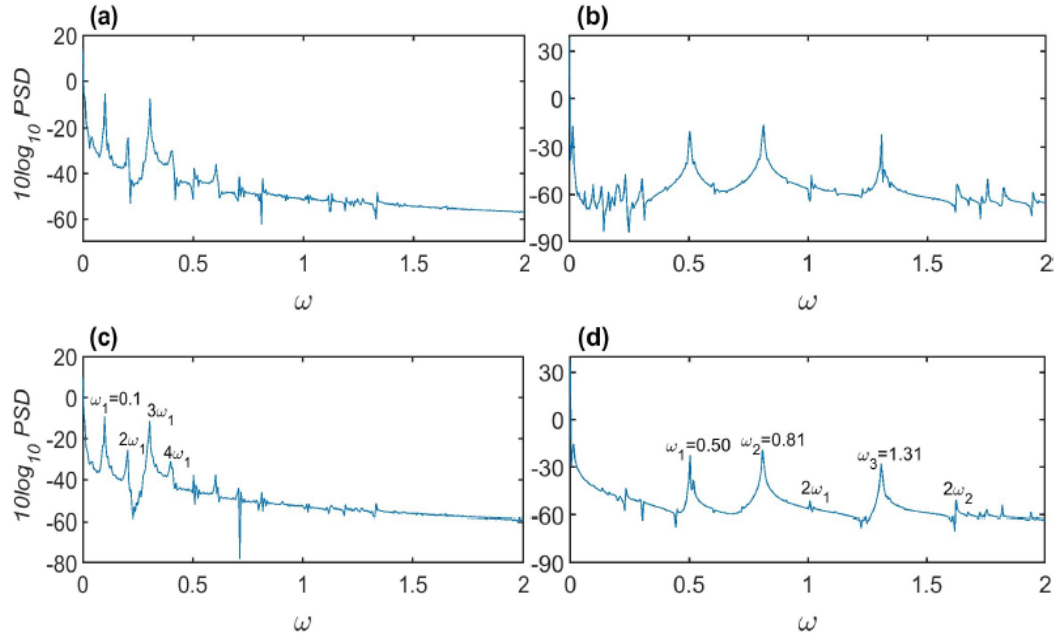
eksponansiyel olarak azalmasıdır. Bu azalma literatürde kaosun başlangıcı olarak kabul edilmektedir [28].

Ayar parametresi δ çalışılan sistemin taban durumunu ve Anderson lokalizasyonunun etkilediğinden, sönümlenmiş dinamik üzerinde de etkileri bulunmalıdır. Bu etkiler sabit γ ve farklı δ değerleri için çizilen zaman-korelasyon grafiklerinde, Şekil 5.10'da görülmektedir. Bölüm 5.2'de ayar parametresindeki artışın Anderson lokalizasyonunu arttırdığı bulundu. Bu nedenle, δ arttıkça sönümlenmiş dinamiğin periyodik olması, azaldıkça kaotik olması beklenir. $\delta = 0,5$ değeri için elde edilen zaman korelasyon fonksiyonu, Şekil 5.10-a ve Şekil 5.10-b'de sırasıyla birinci ve ikinci bileşen için çizildi. Spin yörünge etkileşimi etkileşiminin büyüklüğü $\gamma = 1$ olarak alındı. Şekil 5.10-c ve Şekil 5.10-d ise daha yüksek ayar parametresi için bulunan $c(t)$ grafiklerinin gösterir ($\delta = 1$). Bu grafiklerden (a) ile (c) (veya (b) ile (d)) karşılaştırıldığında, salınımların $\delta = 1$ için daha düzenli olduğu anlaşılmaktadır. Bu sonuç, özellikle ikinci bileşende daha belirgindir. Dolayısıyla, yüksek ayar parametresi düzenli sönümlenmiş dinamik verirken, düşük ayar parametresinde dinamik kaotiktir. Bu sonuç, Şekil 5.11-a ve Şekil 5.11-b'de $\delta = 0,5$ için çizilen PSD sonuçları ile de desteklenmektedir. Grafiklerde temel frekans ve harmonikleri olduğu gibi başka frekanslar da yer almaktadır. $\delta = 1$ için elde edilen PSD değerleri Şekil 5.11-c ve Şekil 5.11-d'de frekansa karşılık çizildi. Birinci bileşene ait grafikte sadece birinci temel frekans ve harmonikleri yer alır. İkinci bileşende ait grafikte ise üç temel frekans ve harmonikleri bulunur: $\omega_1 = 0,50$, $\omega_2 = 0,81$ ve $\omega_3 = 1,31$.

Sonuç olarak, spin yörünge etkileşimi etkileşim büyüklüğüne ve ayar parametresine bağlı olarak sönümlenmiş dinamik düzenli veya kaotik olarak sınıflandırılır. Ancak, rasgele potansiyelin özelliği olarak, tam periyodik bir dinamiğe rastlanmadı.



Şekil 5.10: Rasgele potansiyel için çizilen zaman-korelasyon fonksiyonunun zamanla değişimi: **(a)** Birinci bileşen, $\delta = 0,5$. **(b)** İkinci bileşen, $\delta = 0,5$. **(c)** Birinci bileşen, $\delta = 1$. **(d)** İkinci bileşen, $\delta = 1$. $\gamma = 1$ alındı.



Şekil 5.11: PSD'nin frekansa bağlılığı: **(a)** Birinci bileşen, $\delta = 0,5$. **(b)** İkinci bileşen, $\delta = 0,5$. **(c)** Birinci bileşen, $\delta = 1$. **(d)** İkinci bileşen, $\delta = 1$. $\gamma = 1$ alındı.

5.4. Sanal Zaman Metodu

Spin yörünge etkileşimli BEY’i modelleyen iki bileşenli GP denklemleri Eş. (5.3) ile verilir. Taban durumu dalga fonksiyonlarını bulmak için sık kullanılan nümerik metotlardan biri “sanal zaman metodu” dur. Bu metot, GP denkleminin taban durumu çözümlerini doğru ve hızlı bir şekilde vermektedir. Nümerik metodun Eş. (5.3)’e uygulanışı aşağıda özetlenmiştir [29].

Sanal zaman metodunu uygulamak için, öncelikle Eş. (5.3)’te $t \rightarrow -it$ dönüşümü yapılır. Denklemlerde yer alan türev ifadeleri için gerekli geri Euler sonlu fark (BEFD) denklemleri aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= \frac{\psi_{1,j}^{(1)} - \psi_{1,j}^{(n)}}{\tau} & \frac{d\psi_2}{dt} &= \frac{\psi_{2,j}^{(1)} - \psi_{2,j}^{(n)}}{\tau} \\ \frac{d\psi_1}{dx} &= \frac{\psi_{1,j+1}^{(1)} - \psi_{1,j-1}^{(1)}}{2h} & \frac{d\psi_2}{dx} &= \frac{\psi_{2,j+1}^{(1)} - \psi_{2,j-1}^{(1)}}{2h} \\ \frac{d^2\psi_1}{dx^2} &= \frac{\psi_{1,j+1}^{(1)} - 2\psi_{1,j}^{(1)} + \psi_{1,j-1}^{(1)}}{h^2} & \frac{d^2\psi_2}{dx^2} &= \frac{\psi_{2,j+1}^{(1)} - 2\psi_{2,j}^{(1)} + \psi_{2,j-1}^{(1)}}{h^2} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Bu türev ifadeleri, iki bileşenli GP denkleminde yerleştirilir. Denklemin çözüm aralığı (a, b) olsun. Sınır koşulu olarak aşağıda verilen homojen Dirichlet sınır koşulu uygulanır:

$$\Psi(a, t) = \Psi(b, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (5.14)$$

Adım büyüklüğü $h = (b - a)/N$ ile verilir. N pozitif bir tam sayıdır. x ekseninde (a, b) aralığı, $x_j = a + jh$ ($0 \leq j \leq N$) şeklinde noktalara ayrıştırılır. Bu işlemlerin sonucunda GP denklemleri aşağıdaki forma dönüşür:

$$\begin{aligned} \frac{\psi_{1,j}^{(1)} - \psi_{1,j}^{(n)}}{\tau} &= \frac{1}{2h^2} \left(\psi_{1,j+1}^{(1)} - 2\psi_{1,j}^{(1)} + \psi_{1,j-1}^{(1)} \right) - (V(x_j) + \delta)\psi_{1,j}^{(1)} + g \left(\left| \psi_{1,j}^{(n)} \right|^2 + \right. \\ &\quad \left. \left| \psi_{2,j}^{(n)} \right|^2 \right) \psi_{1,j}^{(1)} - \frac{\gamma}{2h} \left(\psi_{2,j+1}^{(1)} - \psi_{2,j-1}^{(1)} \right), \quad 1 \leq j \leq N - 1 \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\psi_{2,j}^{(1)} - \psi_{2,j}^{(n)}}{\tau} &= \frac{1}{2h^2} \left(\psi_{2,j+1}^{(1)} - 2\psi_{2,j}^{(1)} + \psi_{2,j-1}^{(1)} \right) - (V(x_j) - \delta)\psi_{2,j}^{(1)} + g \left(\left| \psi_{2,j}^{(n)} \right|^2 + \right. \\ &\quad \left. \left| \psi_{1,j}^{(n)} \right|^2 \right) \psi_{2,j}^{(1)} + \frac{\gamma}{2h} \left(\psi_{1,j+1}^{(1)} - \psi_{1,j-1}^{(1)} \right), \quad 1 \leq j \leq N - 1 \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\psi_{l,j}^{n+1} = \frac{\psi_{l,j}^{(1)}}{\|\psi^{(1)}\|_h}, \quad j = 0, 1, \dots, N; \quad n \geq 0; \quad l = 1, 2. \quad (5.17)$$

Burada yoğunlaşmanın her iki bileşenine de aynı rasgele potansiyelin etki ettiği varsayıldı. Sanal zaman metodu ile dalga fonksiyonlarının normalizasyonu korunur:

$$\|\Psi^{(1)}\|_h = \sqrt{h \sum_0^{L-1} \left[|\psi_{1,j}^{(1)}|^2 + |\psi_{2,j}^{(1)}|^2 \right]} \quad (5.18)$$

Sınır koşulu gereği, dalga fonksiyonu sınırlarda sıfıra gider. Bu nedenle, başlangıç ve sınır koşulları aşağıdaki gibi uygulanır:

$$\psi_{l,j}^0 = \psi_l^0(x_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots, N; \quad (5.19)$$

$$\psi_{l,0}^n = \psi_{l,N}^n = 0, \quad n \geq 0, \quad l = 1, 2. \quad (5.20)$$

$\psi_l^0(x_j)$, dalga fonksiyonunun başlangıç değeridir. Bu koşulların uygulanmasıyla, Eş. (5.3) MATLAB programında çözdürülerek, ψ_1 ve ψ_2 elde edilir.

5.5. Split Step Fourier Metodu (SSFM)

Split step Fourier metodu, Schrödinger ve benzeri denklemlerin zamana bağlı çözümlerinin bulunmasında etkili ve hızlı nümerik metodlardan biridir [30]. Tek bileşenli GP denklemini

$$i \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x,t) + g|\psi(x,t)|^2 \quad (5.21)$$

ile verilir. Bu denkleme SSFM'nin uygulanışı aşağıda özetlendi. Eşitlik (5.21) öncelikle doğrusal ve doğrusal olmayan operatörlerine ayrılır. $L = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ doğrusal operatör, $N = g|\psi(x,t)|^2 + V(x)$ doğrusal olmayan operatör olmak üzere

$$i \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = (L + N)\psi(x,t) \quad (5.22)$$

yazılabilir. Denklemin tam çözümlerine yaklaşmak için, doğrusal ve doğrusal olmayan kısımlar aşağıdaki gibi ayrı ayrı çözülmelidir:

$$i \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = L\psi(x,t) \quad (5.23)$$

$$i \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = N\psi(x,t) \quad (5.24)$$

İkinci mertebeden split step Fourier metodu için, önce Eş. (5.24) çözülür. Bulunan çözüm, Eş. (5.23)'ün çözümünde başlangıç koşulu olarak kullanılır. En son aşamada, bulunan bu çözüm başlangıç koşulu alınarak Eş. (5.24) çözülür. Sonuç olarak, Δt süre sonraki çözüm aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\psi(x, t + \Delta t) = e^{-iN\Delta t/2} e^{-iL\Delta t} e^{-iN\Delta t/2} \psi(x, t) \quad (5.25)$$

Burada tek bileşenli GP denkleminde uygulanan SSFM, benzer şekilde Eş. (5.3) ile verilen iki bileşenli GP denkleminde uygulanarak zamana bağlı çözümler elde edilir.



6. SONUÇ ve TARTIŞMA

Bu çalışmada, rasgele dış potansiyelde tuzaklanan tek boyutlu spin yörünge etkileşimli Bose-Einstein yoğunlaşması ele alındı. Rasgele sayılarla üretilen böyle bir potansiyel, düzensiz bir ortam oluşmasına neden olur; bu da Anderson lokalizasyonunun gözlenmesi için elverişli bir ortamdır. İki bileşenli GP denkleminin taban durumu çözümleri nümerik metotlarla elde edildi. Spin yörünge etkileşiminin ve ayar parametresinin lokalizasyon üzerine etkileri araştırıldı. Spin yörünge etkileşimindeki artış Anderson lokalizasyonu azaltırken, ayar parametresindeki artış Anderson lokalizasyonunu bir miktar artırmaktadır.

BEY'in taban durumu çözümleri elde edildikten sonra, sistemin sönümlenmiş dinamiği araştırıldı. Zaman korelasyon fonksiyonu ve PSD sönümlenmiş dinamiğin hesaplanmasında yaygın olarak kullanılır. Spin yörünge etkileşimleri tamamen sıfırlanarak, zaman korelasyon fonksiyonu ve PSD nümerik olarak hesaplandı. Nümerik sonuçlar gösterdi ki spin yörünge etkileşimleri azaldıkça ve ayar parametresi arttıkça sistemin dinamiği düzenli olmaktadır. Bu sonuç, PSD grafiklerinde sadece temel frekansların ve harmoniklerinin yer almasından anlaşılmaktadır. Spin yörünge etkileşimleri arttıkça ve ayar parametresi azaldıkça sistemin dinamiği kaotik hale gelir ve PSD grafiklerinde kompleks bir frekans spektrumu ortaya çıkar.

Anderson lokalizasyonu, keşfedilmesi üzerinden elli yılı aşkın süre geçmesine rağmen popülerliğini koruyan bir konudur. Bu çalışmanın da kusurlar ve düzensizlikler içeren yoğun madde sistemlerinin dinamiğine ilişkin çalışmalara katkı sağlaması beklenmektedir

KAYNAKÇA

- [1] Pethick, C.J. ve Smith, H. (2002). Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases. Cambridge: Cambridge University Press.
- [2] Pitaevskii L. ve Stringari S. (2003). Bose-Einstein Condensation. Oxford: Clarendon Press.
- [3] Zhang, Y., Mossman M. E., Busch, T., Engels, P. ve Zhang, C. (2016). Properties of spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensates. *Front. Phys*, 11(3), 118103.
- [4] Anderson, P. W. (1958). Absence of diffusion in certain random lattices. *Phys. Rev.* 109 (5), 1492-1505.
- [5] Lee, P. A., Ramakrishnan, T. V. (1985). Disordered electronic systems. *Rev. Mod. Phys.* 57 (2), 287-337.
- [6] J. Billy ve ark. (2008). Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder. *Nature*, 453 (7197), 891-4.
- [7] Roati, G. ve ark. (2008). Anderson localization of a non-interacting Bose-Einstein condensate. *Nature*, 453 (7197), 895-898.
- [8] Chabe, J. ve ark. (2008). Experimental Observation of the Anderson Metal-Insulator Transition with Atomic Matter Waves. *Phys. Rev. Lett.*, 101 (25), 255702.
- [9] Edwards, E. E., Beeler, M., Hong, T. ve Rolston. S. L. (2008). Adiabaticity and Localization in One-Dimensional Incommensurate Lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 101 (26), 260402.
- [10] Damski, B., Zakrzewski, J., Santos, L., Zoller, P. ve Lewenstein, M. (2003). Atomic Bose and Anderson glasses in optical lattices, *Phys. Rev. Lett.*, 91 (8), 080403.
- [11] Lye, J. E., Fallani, L., Modugno, M., Wiersma, D., Fort, C. ve Inguscio, M. A. (2005). Bose-Einstein condensate in a random potential. *Phys. Rev. Lett.*, 95 (7), 070401.
- [12] Cheng, Y. ve Adhikari, S. K. (2010). Matter-wave localization in a random potential. *Phys. Rev. A*, 82 (1), 013631.
- [13] Xi, K. T., Li, J. ve Shi, D. N. (2015). Localization of a two-component Bose-Einstein condensate in a one-dimensional random potential. *Physica B*, 459, 6–11.
- [14] Fan, D. Y., Zhen, X., Jun, Q, Fang, S. J., Nan, J. B., Tao., H. (2011). Disorder Induced Dynamic Equilibrium Localization and Random Phase Steps of Bose-Einstein Condensates. *Chinese Physics Letters*, 28 (10), 100302.
- [15] Cardoso, W. B., Avelar, A.T. ve Bazeia, D. (2012). Anderson localization of matter waves in chaotic potentials. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 13 (2), 755–763.

- [16] Mardonov, Sh., Konotop, V. V., Malomed, B. A., Modugno, M. ve Sherman, E. Ya. (2018). Spin-orbit coupled soliton in a random potential. *Phys. Rev. A*, 98, 023604.
- [17] Lewenstein, M., Sanpera, A., Ahufinger, V., Damski, B., Sen De, A. ve Sen, U. (2007). Ultracold atomic gases in optical lattices: mimicking condensed matter physics and beyond. *Adv. Phys.*, 56, 243-379.
- [18] Fallani, L., Lye, J. E., Guarrera, V., Fort, C. ve Inguscio, M. (2007). Ultracold atoms in a disordered crystal of light: towards a Bose glass. *Phys. Rev. Lett.*, 98 (13), 130404.
- [19] Schwartz, T., Bartal, G., Fishman, S. ve Segev, M. (2007). Transport and Anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices. *Nature*, 446 (7131), 52-55.
- [20] Lahini, Y., Avidan, A., Pozzi, F., Sorel, M., Morandotti, R., Christodoulides, D. N. ve Silberberg, Y. (2008). Anderson localization and nonlinearity in one-dimensional disordered photonic lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 100, 013906.
- [21] Modugno, G. (2010). Anderson localization in Bose-Einstein condensates. *Reports on Progress in Physics*, 73 (10), 102401.
- [22] Bouyer, P. (2010). Quantum gases and optical speckle: a new tool to simulate disordered quantum systems. *Reports on Progress in Physics*, 73 (6), 062401.
- [23] İzrailev F.M., Krokhin A.A. ve Makarov N.M. (2012). Anomalous localization in low-dimensional systems with correlated disorder. *Physics Reports*, 512 (3), 125-254
- [24] Lahini, Y., Avidan, A., Pozzi, F., Sorel, M., Morandotti, R., Christodoulides, D. N., ve Silberberg, Y. (2008). Anderson localization and nonlinearity in one-dimensional disordered photonic lattices. *Physical Review Letters*, 100 (1).
- [25] Dalfovo F., Giorgini S., Pitaevskii S. ve Stringari S. (1999). Theory of trapped Bose-condensed gases. *Reviews of Modern Physics*, 71 (3), 463.
- [26] Xu, Y., Zhang, Y. ve Wu, B. (2013). Bright solitons in spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 87 (1), 013614.
- [27] Sarkar, S. K., Mishr, T., Muruganandam, P. ve Mishra, P. K. (2023). Quench-induced chaotic dynamics of Anderson-localized interacting Bose-Einstein condensates in one dimension. *Phys. Rev. A*, 107, 053320.
- [28] Dalui, S., Majhi, B. R. ve Mishra, P. (2020). Induction of chaotic fluctuations in particle dynamics in a uniformly accelerated frame. *International Journal of Modern Physics A*, 35, 2050081.
- [29] Bao, W., Cai, Y. (2018). Mathematical Models and Numerical Methods for Spinor Bose-Einstein Condensates. *Commun. Comput. Phys.*, 24, 4.
- [30] Wang, H. (2005). Numerical Studies on the Split-Step Finite Difference Method for Nonlinear Schrödinger Equations. *Applied Mathematics and Computation*, 170 (1), 17-35.



ÖZGEÇMİŞ

ORCID NO: 0009-0004-6867-7939

Ad Soyad : Oktay Nabiollahi

Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

- 2022-2025, Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü/ Matematiksel Fizik (YL) Tezli
- 2020, Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi, Fizik

Yayınları ve/veya Bilimsel/Sanatsal Faaliyetleri:

- Oztas, Z, Nabiollahi O. (2024). Anderson localization and quenched induced dynamics of spin orbit coupled Bose-Einstein condensate in a random potential. Physica Scripta, **99**, 065913.