

T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SPLIT KUATERNİYONLAR TEMELİNDE HİPERBOLİK SPİNORLARIN
İNCELENMESİ VE LORENTZ DÖNÜŞÜMLERİNİN HİPERBOLİK SPİNOR
GÖSTERİMLERİ

EMRAH YILDIRIM

Danışman: Doç. Dr. Tülay ERİŞİR

TEZ JÜRİ ÜYELERİ
Prof. Dr. Engin ÖZKAN
Doç. Dr. Murat ALTUNBAŞ
Doç. Dr. Ayşe Zeynep AZAK
Doç. Dr. Tufan ÖZDİN
Doç. Dr. Tülay ERİŞİR

DOKTORA TEZİ
ERZİNCAN, 2026

Kabul ve Onay Sayfası

Doç. Dr. Tülay ERİŞİR danışmanlığında, Emrah YILDIRIM tarafından hazırlanan bu çalışma 30/06/2026 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Bilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak kabul oybirliği ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Engin ÖZKAN İmza:

Üye : Doç. Dr. Murat ALTUNBAŞ İmza:

Üye : Doç. Dr. Ayşe Zeynep AZAK İmza:

Üye : Doç. Dr. Tufan ÖZDİN İmza:

Üye : Doç. Dr. Tülay ERİŞİR İmza:

Yukarıdaki Yüksek Lisans/Doktora Tezi Enstitü Yönetim Kurulunun / / 20.... tarih ve/..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Kemal Volkan ÖZDOKUR

Enstitü Müdür V.

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, şekil ve tabloların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

Bilimsel Etięe Uygunluk Sayfası

“Split Kuaterniyonlar Temelinde Hiperbolik Spinorların İncelenmesi ve Lorentz Dönüşümlerinin Hiperbolik Spinor Gösterimleri” isimli “ Doktora” tezım tarafımca intihal tespit programı ile incelenmiştir. Buna göre tezimde bilimsel etik ihlali ve intihal olarak nitelendirilebilecek herhangi bir durum olmadığını taahhüt ederim.

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir biçimde elde edildiğini; aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiğı gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi beyan ederim. 30/06/2026.

(İmza)

Emrah YILDIRIM

ÖZET

SPLIT KUATERNİYONLAR TEMELİNDE HİPERBOLİK SPİNORLARIN İNCELENMESİ VE LORENTZ DÖNÜŞÜMLERİNİN HİPERBOLİK SPİNOR GÖSTERİMLERİ

Emrah YILDIRIM

Doktora Tezi, Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Tülay ERİŞİR

2026, __ sayfa

Bu tezde split kuaterniyonlar ile hiperbolik spinorlar arasındaki ilişkiler incelenmiş ve Lorentz dönüşümlerinin spinor gösterimlerindeki rolleri araştırılmıştır. Çalışmanın temel amacı, split kuaterniyon cebirine karşılık gelen hiperbolik spinor gösterimlerini elde etmek, bunlara ait matris gösterimlerini oluşturmak ve Lorentz dönüşümlerini hiperbolik spinorlar aracılığıyla ifade etmektir.

Tezin ilk bölümünde araştırmanın amacı, önemi, varsayımları ve sınırlılıkları verilmiştir. İkinci bölümde reel kuaterniyonlar, spinorlar, split kuaterniyonlar ve split kuaterniyon matrisleri ile ilgili temel bilgiler sunulmuştur. Üçüncü bölümde hiperbolik sayı sistemi tanıtılmış, hiperbolik sayıların cebirsel özellikleri ele alınmış ve Lorentz dönüşümünün hiperbolik spinor temelleri incelenmiştir. Tezin özgün sonuçlarının yer aldığı dördüncü bölümde öncelikle split kuaterniyonların hiperbolik spinor gösterimleri elde edilmiştir. Bu gösterimler kullanılarak split kuaterniyonlar sınıflandırılmış ve karşılık gelen hiperbolik spinorlar incelenmiştir. Daha sonra split kuaterniyonlara karşılık gelen sol ve sağ hiperbolik spinor matrisleri tanımlanmış, temel hiperbolik spinor matrislerinin özdeğerleri hesaplanmış ve bu matrislerin cebirsel özellikleri belirlenmiştir. Ayrıca hiperbolik spinorlar cinsinden Lorentz dönüşümlerinin Weyl ve Dirac gösterimlerindeki ifadeleri elde edilmiş, üreteç matrisleri ve özellikleri incelenmiştir. Bunun yanında Weyl ve Dirac gösterimlerindeki hiperbolik 4-spinorlar arasındaki ilişkiler ortaya konulmuş ve bu gösterimler arasında dönüşüm bağıntıları elde edilmiştir. Son olarak split kuaterniyonlara karşılık gelen hiperbolik 4-spinorlar kullanılarak Lorentz dönüşümlerinin tek matrisli gösterimleri elde edilmiş ve dönüşümün hiperbolik spinorlar cinsinden daha doğrudan

ifade edilebildiği gösterilmiştir. Son bölümde elde edilen bulgular değerlendirilmiş ve ileride yapılabilecek çalışmalara yönelik öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Split Kuaterniyonlar, Hiperbolik Spinorlar, Lorentz Dönüşümleri, Hiperbolik 4-Spinorlar

ABSTRACT

INVESTIGATION OF HYPERBOLIC SPINORS BASED ON SPLIT QUATERNIONS AND HYPERBOLIC SPINOR REPRESENTATIONS OF LORENTZ TRANSFORMATIONS

Emrah YILDIRIM

Doctoral Thesis, Erzincan Binali Yıldırım University, Institute of Science and
Technology, Department of Mathematics

Advisor: Doç. Dr. Tülay ERİŞİR

2026, __ pages

This thesis investigates the relationship between split quaternions and hyperbolic spinors and explores the role of hyperbolic spinors in the representation of Lorentz transformations. The primary objective is to establish hyperbolic spinor representations associated with split quaternion algebra construct the corresponding matrix representations and formulate Lorentz transformations in terms of hyperbolic spinors.

The first chapter introduces the aim, significance, assumptions and limitations of the study. The second chapter presents the fundamental concepts of real quaternions, spinors, split quaternions and split quaternion matrices. The third chapter introduces hyperbolic numbers, discusses their algebraic properties and reviews the spinor formulation of Lorentz transformations. The original contributions of the thesis are presented in the fourth chapter. Hyperbolic spinor representations corresponding to split quaternions are first constructed and the resulting hyperbolic spinors are classified and investigated. Subsequently, left and right hyperbolic spinor matrices are defined, the eigenvalues of the fundamental hyperbolic spinor matrices are computed and their algebraic properties are examined. Lorentz transformations are then expressed in terms of hyperbolic 4-spinors within the Weyl and Dirac representations and the associated generator matrices are derived together with their properties. The relationships between the hyperbolic 4-spinor representations in the Weyl and Dirac representations are also established. Finally, Lorentz transformations are represented by means of hyperbolic 4-spinors associated with split quaternions yielding single-matrix representations that provide a more direct hyperbolic spinor formulation. The final chapter summarizes the main findings and presents suggestions for future research

Keywords: Split Quaternions, Hyperbolic Spinors, Lorentz Transformations, Hyperbolic 4-Spinors

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmamın başlangıcından tamamlanmasına kadar geçen tüm süreçte, engin bilgi birikimi, tecrübesi ve yapıcı yönlendirmeleriyle bana rehberlik eden, akademik çalışmalarında sabır ve özveriyle desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen kıymetli danışman hocam Doç. Dr. Tülay ERİŞİR'e en içten saygı ve şükranlarımı sunarım.

Tez çalışmamın bilimsel temellere oturmasında ve şekillenmesinde değerli görüş, öneri ve eleştirileriyle katkıda bulunan tez jüri üyelerim sayın Prof. Dr. Engin ÖZKAN, Prof. Dr. Tuba AKKUŞ ÇELİK, Doç. Dr. Murat ALTUNBAŞ, Doç. Dr. Tufan ÖZDİN ve Doç. Dr. Ayşe Zeynep AZAK hocalarıma akademik gelişimime sağladıkları tüm katkılardan dolayı ayrı ayrı teşekkür ederim.

Akademik hayatım boyunca kendilerinden çok şey öğrendiğim, bilgi ve deneyimlerinden istifade ettiğim tüm hocalarıma ve çalışmalarım esnasında fikir alışverişinde bulunduğum, her zaman yanımda hissettiğim mesai arkadaşlarıma ve dostlarıma minnettarım.

Son olarak, hayatımın her anında olduğu gibi bu uzun ve meşakkatli doktora yolculuğunda da sabırları, anlayışları ve sonsuz sevgileriyle bana en büyük gücü veren, maddi ve manevi desteklerini her daim arkamda hissettiğim güzel aileme yürekten teşekkür ederim.

Emrah YILDIRIM

Haziran, 2026

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
TABLolar DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vii
1.GİRİŞ.....	1
1.1. Araştırmanın Amacı	1
1.2. Araştırmanın Önemi	3
1.3. Varsayımlar	6
1.4. Sınırlılıklar.....	8
2. KAVRAMSAL ÇERÇEVE VE İLGİLİ ÇALIŞMALAR	9
2.1. Reel Kuaterniyonlar.....	9
2.2. Spinorlar	16
2.3. Reel Kuaterniyonların Spinorlar ile İfadesi.....	19
2.4. Split Kuaterniyonlar	26
2.5. Split Kuaterniyon Matrisleri.....	30
3. YÖNTEM.....	39
3.1. Hiperbolik Sayılar	39

3.1.1. Hiperbolik sayıların cebirsel özellikleri	40
3.2. Hiperbolik Spinor Kinematığı	41
3.3. Lorentz Dönüşümünün Spinor Temelleri	42
 4. BULGULAR	 54
4.1. Split Kuaterniyonların Hiperbolik Spinor Gösterimleri	54
4.2. Split Kuaterniyonların Hiperbolik Spinor Matrisleri.....	60
4.3. Temel Hiperbolik Spinor Matrislerinin Özdeğerleri	72
4.4. Split Kuaterniyonlar Yardımıyla Lorentz Dönüşümlerinin Hiperbolik 4-Spinor Gösterimleri	76
4.4.1. Lorentz dönüşümlerinin Weyl ve Dirac Gösteriminde Hiperbolik 4-Spinor Gösterimleri	77
4.4.2. Split kuaterniyonlara karşılık gelen hiperbolik 4-spinorlarla Lorentz dönüşümlerinin gösterimi	96
 5. SONUÇLAR, TARTIŞMA , SONUÇ ve ÖNERİLER	 104
5.1. Sonuç	104
5.2. Öneriler.....	104
 KAYNAKÇA	 106

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{H}$	Reel Kuaterniyonlar Kümesi
S_ρ	ρ Kuaterniyonun Skaler Kısmı
V_ρ	ρ Kuaterniyonun Vektörel Kısmı
ρ^*	Kuaterniyon Eşleniği
ρ^{-1}	Kuaterniyonun Tersi
$N(\rho)$	Kuaterniyon Normu
h^+, h^-	Hamilton Operatörleri
$H^+(\rho)$	Sol Hamilton Matrisi
$H^-(\rho)$	Sağ Hamilton Matrisi
τ_1, τ_2, τ_3	Pauli-Benzeri Matrisler
$\mathcal{S}$	Spinor Uzayı
Θ, Δ, Ω	Spinorlar
t	Matrisin Transpozu
f, f^*	Bir Kuaterniyonu Spinora Eşleştiren Dönüşüm
φ_L	Hamilton Sol Spinor Matrisi
φ_R	Hamilton Sağ Spinor Matrisi
$\overline{\gamma}$	γ Spinorunun Kompleks Eşleniği
γ	γ Spinorunun Eşleniği
h	Hiperbolik Birim
$\mathbb{H}_S$	Split Kuaterniyonlar Kümesi
$\mathbb{E}_1^3$	Minkowski Uzayı
$g(\cdot, \cdot)_{\mathbb{E}_1^3}$	Lorentz Skaler Çarpımı
$\wedge_{\mathbb{E}_1^3}$	Lorentz Vektörel Çarpım
I_ρ	Split Kuaterniyona Karşılık Gelen Cebirsel Değişmez

$\overline{A}$	Eşlenik İşlemi
I_n	$n \times n$ Boyutunda Birim Matris
$\mathbb{H}$	Hiperbolik Sayılar Kümesi
$M_{mn}(\mathbb{H})$	Elemanları Hiperbolik Sayılardan Oluşan Matris
$\wedge_L$	Yarı Öklidyen Uzayda Tanımlı Vektörel Çarpım
ψ_w	Weyl Gösteriminde 4-Spinor
P_1, P_2, P_3	Pauli Matrisleri
α_i	Lorentz Dönme Parametreleri
β_i	Lorentz Boost parametreleri
ψ	Dirac Gösteriminde 4-Spinor
Ψ	Split Kuaterniyonik 2-Spinor
$S_{\mathbb{H}}$	Hiperbolik Spinorlar Kümesi
ξ	Split Kuaterniyonları Hiperbolik Spinorlara Karşılık Getiren Dönüşüm
Ω	Hiperbolik Spinor
Ω^*	Hiperbolik Spinor Eşleniği
Ω	Pür Hiperbolik Spinor
$N(\Omega)$	Birim Hiperbolik Spinor
Ω_L	Sol Hiperbolik Spinor Matris (Temel Hiperbolik Spinor Matris)
$[,]$	Lie Çarpım Operatörleri

1. GİRİŞ

1.1. Araştırmanın Amacı

Bu tez çalışmasının temel amacı, split kuaterniyonlar ile hiperbolik spinorlar arasındaki cebirsel ilişkiyi ortaya koymak ve bu ilişkiyi Lorentz dönüşümlerinin hiperbolik spinor gösterimlerine uygulamaktır. Bu kapsamda öncelikle split kuaterniyonlara karşılık gelen hiperbolik spinor yapılarının elde edilmesi amaçlanmıştır. Elde edilen bu karşılık yardımıyla split kuaterniyonların hiperbolik spinorlar cinsinden ifade edilmesi, farklı türdeki split kuaterniyonların karşılık geldiği hiperbolik spinor sınıflarının belirlenmesi ve bu yapıların cebirsel özelliklerinin incelenmesi hedeflenmiştir.

Çalışmanın bir diğer amacı, split kuaterniyonlara karşılık gelen sol ve sağ hiperbolik spinor matrislerini tanımlamak ve bu matrislerin temel özelliklerini araştırmaktır. Bu doğrultuda temel hiperbolik spinor matrisleri oluşturulmuş, bu matrislerin özdeğerleri hesaplanmış ve aralarındaki çeşitli ilişkiler ortaya konulmuştur. Böylece split kuaterniyon cebiri ile hiperbolik spinor matris yapıları arasında sistematik bir bağlantı kurulmuştur.

Tezin son aşamasında ise elde edilen hiperbolik spinor yapılarından yararlanılarak Lorentz dönüşümlerinin hiperbolik spinor gösterimleri incelenmiştir. Lorentz dönüşümleri hem Weyl hem de Dirac gösterimlerinde hiperbolik 4-spinorlar yardımıyla ifade edilmiş, bu dönüşümlere karşılık gelen üreteç matrisleri elde edilmiş ve bu matrislerin özellikleri araştırılmıştır. Ayrıca split kuaterniyonlara karşılık gelen hiperbolik dört spinorlar kullanılarak Lorentz dönüşümlerinin tek bir matris aracılığıyla ifade edilebildiği gösterilmiştir. Böylece split kuaterniyonlar, hiperbolik spinorlar ve Lorentz dönüşümleri arasında doğrudan bir matematiksel ilişki kurulması amaçlanmıştır.

1.2. Araştırmanın Önemi

Spinorlar, diferansiyel geometri, cebir ve matematiksel fizik alanlarında önemli bir yere sahip yapılardır. Özellikle Lorentz dönüşümleri ve relativistik sistemlerin incelenmesinde spinor gösterimleri önemli bir rol oynamaktadır. Benzer şekilde split kuaterniyonlar da Minkowski uzayı ile uyumlu cebirsel özellikleri nedeniyle uzay-zaman geometrisinde kullanılan önemli

yapılardan biridir. Buna rağmen split kuaterniyonlar ile hiperbolik spinorlar arasındaki ilişkinin ayrıntılı biçimde ele alındığı çalışmalar oldukça sınırlıdır.

Bu çalışmanın önemi, split kuaterniyon cebiri ile hiperbolik spinor yapıları arasında açık ve doğrudan bir karşılık kurmasından kaynaklanmaktadır. Çalışmada yalnızca bir gösterim elde edilmemiş, aynı zamanda bu gösterime karşılık gelen matris yapıları incelenmiştir. Özellikle split kuaterniyonların hiperbolik spinorlar aracılığıyla ifade edilmesi ve buna bağlı olarak hiperbolik spinor matrislerinin elde edilmesi, bu iki yapı arasındaki ilişkinin daha açık biçimde görülmesine olanak sağlamaktadır.

Tezin önemli sonuçlarından biri de Lorentz dönüşümlerinin hiperbolik spinorlar cinsinden ele alınmasıdır. Weyl ve Dirac gösterimlerinde elde edilen sonuçlar, Lorentz dönüşümlerinin hiperbolik spinor yapıları üzerindeki etkisini ortaya koymaktadır. Bunun yanında split kuaterniyonlara karşılık gelen hiperbolik dört spinorlar yardımıyla elde edilen gösterim, dönüşümün tek bir matris üzerinden ifade edilmesini sağlamaktadır. Bu durum hem kuramsal açıdan daha yalın bir yapı sunmakta hem de split kuaterniyonlar ile spinorlar arasındaki ilişkinin daha açık biçimde yorumlanmasına katkı sağlamaktadır.

Bu yönleriyle çalışma, split kuaterniyonlar, hiperbolik spinorlar ve Lorentz dönüşümleri arasındaki ilişkilerin incelenmesine yönelik literatüre yeni sonuçlar kazandırmakta ve ileride yapılacak çalışmalar için bir temel oluşturmaktadır.

1.3. Varsayımlar

Bu tez boyunca kullanılan tüm cebirsel yapılar ve dönüşümler, ilgili literatürde kabul edilen temel tanım ve özellikler esas alınarak ele alınmıştır.

Çalışmada split kuaterniyon cebirinin standart çarpım kurallarını sağladığı ve bu cebirin temel özelliklerinin geçerli olduğu kabul edilmiştir. Ayrıca hiperbolik sayı sisteminin cebirsel yapısının tutarlı olduğu ve hiperbolik spinorların bu yapı üzerinde tanımlanabildiği varsayılmıştır.

Split kuaterniyonlar ile hiperbolik spinorlar arasında kurulan karşılıkların birebir ve cebirsel işlemlerle uyumlu olduğu kabul edilmiştir. Elde edilen hiperbolik spinor gösterimlerinin split kuaterniyonların temel cebirsel özelliklerini koruduğu varsayımı altında çalışılmıştır.

Lorentz dönüşümleri ele alınırken Minkowski uzayının standart yapısı esas alınmış ve dönüşümlerin Lorentz grubunun temel özelliklerini sağladığı kabul edilmiştir. Weyl ve Dirac gösterimlerinde kullanılan spinor yapılarının literatürde kabul edilen dönüşüm kurallarına uygun olduğu varsayılmıştır.

Ayrıca çalışma boyunca kullanılan matris işlemlerinin, özdeğer hesaplamalarının ve dönüşüm ilişkilerinin gerekli cebirsel koşulları sağladığı kabul edilmiştir.

1.4. Sınırlılıklar

Bu tez, split kuaterniyonlar, hiperbolik spinorlar ve Lorentz dönüşümleri arasındaki matematiksel ilişkilerin incelenmesi ile sınırlandırılmıştır.

Çalışmada elde edilen sonuçlar yalnızca split kuaterniyon cebiri ve hiperbolik sayı sistemi temelinde geliştirilmiştir. Reel kuaterniyonlar, oktonyonlar veya daha genel Clifford cebirleri kapsam dışında bırakılmıştır.

Lorentz dönüşümleri incelenirken yalnızca hiperbolik spinor gösterimleri ele alınmış, dönüşümlerin fiziksel uygulamalarına veya deneysel sonuçlarına yer verilmemiştir. Çalışmanın odağı matematiksel yapıların kurulması ve incelenmesi olduğundan fiziksel yorumlar ayrıntılı olarak ele alınmamıştır.

Hiperbolik spinor matrislerinin özellikleri incelenirken yalnızca çalışmada tanımlanan temel hiperbolik spinor matrisleri dikkate alınmıştır. Daha genel matris sınıfları veya yüksek boyutlu genişletmeler araştırmanın kapsamına dahil edilmemiştir.

Ayrıca tezde elde edilen Lorentz dönüşümü gösterimleri, Weyl ve Dirac gösterimleri ile split kuaterniyonlara karşılık gelen hiperbolik dört spinorlar çerçevesinde incelenmiştir. Daha genel spinor gösterimleri ve farklı grup temsilleri bu çalışmanın kapsamı dışında tutulmuştur.

Bu sınırlılıklar doğrultusunda çalışma, split kuaterniyonlar ile hiperbolik spinorlar arasındaki ilişki ve bu ilişkinin Lorentz dnşmlerine uygulanması üzerine odaklanmıştır. Bu nedenle elde edilen sonuçlar, belirlenen matematiksel yapıların sınırları içerisinde değerlendirilmelidir.

2. KAVRAMSAL ÇERÇEVE VE İLGİLİ ÇALIŞMALAR

Kuaterniyonlar, 1843 yılında İrlandalı matematikçi Hamilton tarafından geliştirilerek matematik literatürüne kazandırılmıştır (Hamilton, 1853). Hamilton'un bu çalışmayı ortaya koymasındaki temel amaç, o dönemde yaygın olarak kullanılan kompleks sayıların yalnızca iki boyutlu yapıyla sınırlı kalmasını istemeyerek daha genel bir cebirsel sistem oluşturmaktır. Kompleks sayılar düzlemsel problemlerin çözümünde etkili bir araç olmasına rağmen daha yüksek boyutlu uzaylarda kullanılabilecek kapsamlı bir sayı sistemine duyulan ihtiyaç Hamilton'u yeni arayışlara yöneltmiştir. Bu nedenle, iki boyutlu yapının ötesine geçen ve çok boyutlu işlemleri destekleyen daha güçlü bir matematiksel çerçeve geliştirmeyi hedeflemiştir. Bu amaç doğrultusunda Hamilton, vektörel özellikleri de bünyesinde barındıran ve dört bileşenden meydana gelen yeni bir sayı sistemi tanımlamış bu yapıya kuaterniyon adını vermiştir. Böylece kuaterniyonlar, matematik tarihinde çarpma işlemine göre ters elemanların tanımlanabildiği ilk sonlu boyutlu bölüm cebirlerinden biri olarak önemli bir yer edinmiştir. (Hacısalıhoğlu, 1983; Solodovnikov ve Kantar, 1989).

Reel kuterniyonlar kümesi genellikle $\mathbb{H}$ ile gösterilir ve aşağıdaki biçimde tanımlanır;

$$\mathbb{H} = \{\rho = \rho_0 + \rho_1 \mathbf{i} + \rho_2 \mathbf{j} + \rho_3 \mathbf{k} \mid \rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Bu gösterimden açıkça anlaşılacağı üzere, her kuaterniyon bir skaler ve bir vektörel bileşenin toplamından oluşur. Burada kullanılan $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ birimleri Hamilton tarafından tanımlanan özel çarpım kurallarına sahiptir ve bu kurallar kuaterniyon cebirinin temelini oluşturur.

Bu kurallara göre

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = -1$$

ve

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = -\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = -\mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{j}$$

ilişkileri mevcuttur.

Elde edilen bağıntılar incelendiğinde, kuaterniyonlarda çarpma işleminin değişmeli olmadığı görülmektedir (Hacısalıhoğlu, 1983; Hamilton, 1899). Başka bir deyişle, iki kuaterniyonun çarpımında çarpanların yerlerinin değiştirilmesi genellikle sonucun da değişmesine neden olmaktadır. Bu özellik, kuaterniyon cebirini klasik sayı sistemlerinden ayıran temel niteliklerden biri olarak kabul edilmektedir. Kuaterniyon çarpımı yalnızca cebirsel bir işlem olmayıp aynı zamanda Öklidyen iç çarpım ile vektörel çarpımın birlikte ifade edildiği bir yapıyı içermektedir. Bu durum, kuaterniyonların hem geometrik hem de cebirsel özellikleri tek bir çerçevede birleştirmesine olanak sağlamaktadır. Böylelikle ortaya çıkan yapı, çok sayıda matematiksel ve fiziksel uygulamada kullanılabilecek zengin bir kuramsal altyapı sunmaktadır. Sonuç olarak reel kuaterniyonlar, kompleks sayılar cismi üzerinde iki boyutlu bir vektör uzayı oluştururken reel sayılar cismi üzerinde dört boyutlu bir vektör uzayı yapısına sahiptir.

Matrisler, günümüzde matematikten mühendisliğe, fizikten bilgisayar bilimlerine kadar birçok alanda yaygın olarak kullanılan temel araçlar arasında yer almaktadır. Bu yaygın kullanım, matris teorisi ile kuaterniyon cebiri arasındaki ilişkinin araştırmacıların ilgisini çekmesine neden olmuş ve söz konusu konuda çok sayıda çalışma yapılmıştır. Kuaterniyonların sahip olduğu cebirsel özelliklerin matrisler yardımıyla ifade edilebilmesi, bu iki yapı arasındaki bağlantının önemini daha da artırmıştır.

Kuaterniyon cebirinin temel özelliklerinden biri, çarpma işleminin değişmeli olmamasıdır. Bu nedenle bir kuaterniyonun başka bir kuaterniyonla soldan çarpılması ile sağdan çarpılması genellikle farklı sonuçlar ortaya çıkarmaktadır. Bu durum, soldan ve sağdan çarpma işlemlerinin ayrı ayrı ele alınmasını gerekli kılmaktadır. Bu çarpım işlemlerinden yararlanılarak kuaterniyonlar belirli dönüşümler aracılığıyla reel matrisler biçiminde temsil edilebilmektedir. Bir kuaterniyonun soldan çarpım işlemini ifade eden matris yapısı sol Hamilton matrisi olarak adlandırılırken, sağdan çarpım işlemini temsil eden matris yapısı sağ Hamilton matrisi olarak bilinmektedir. Genel anlamda bu matrisler, reel kuaterniyonlar üzerinde tanımlanan sol ve sağ Hamilton operatörlerinin matris karşılıkları olup, kuaterniyon cebirinin matris teorisi çerçevesinde incelenmesine olanak sağlamaktadır (Ward, 1997; Artaman, 1988). Bunun yanı sıra, elemanları kuaterniyonlardan oluşan matrisler de uzun yıllardır araştırmacıların ilgi odağı olmuş ayrıca bu konuda çok sayıda çalışma yapılmıştır. Kuaterniyon matrisleri üzerine gerçekleştirilen ilk çalışmaların geçmişi 1930'lu yıllara kadar uzanmaktadır. Bu alandaki erken dönem katkılardan biri, Wolf tarafından ortaya konulmuştur. Wolf, reel kuaterniyon elemanlardan meydana gelen matrisler için benzerlik kavramını tanımlayarak kuaterniyon

matris teorisinin gelişimine önemli bir temel oluşturmuştur (Wolf, 1936). Sonra ki yıllarda kuaterniyon matrislerinin cebirsel özellikleri üzerine çalışmalar hız kazanmıştır. Bu kapsamda Lee, kuaterniyon matrislerinin özdeğer problemleri ve köşegenleştirilebilirlik özellikleri üzerinde incelemelerde bulunmuş ve konuya ilişkin önemli sonuçlar elde etmiştir (Lee, 1949). Kuaterniyon matrisleri alanındaki en kapsamlı araştırmalardan biri ise Zhang tarafından gerçekleştirilmiştir. Zhang, daha önce literatürde elde edilen sonuçları sistemli bir biçimde bir araya getirerek yeniden değerlendirmiştir. Ayrıca bu sonuçların bir kısmına yeni ve daha açıklayıcı ispatlar kazandırmıştır. Bu yönüyle çalışma, kuaterniyon matris teorisinin gelişiminde önemli bir başvuru kaynağı niteliği taşımaktadır (Zhang, 1997).

Kuaterniyonların 1843 yılında Hamilton tarafından tanıtılmasının ardından geçen süre içerisinde, bu cebirsel yapı yalnızca teorik matematiğin bir konusu olarak kalmamış, farklı bilimsel disiplinlerde ve çeşitli teknolojik uygulamalarda da kendine geniş bir kullanım alanı edinmiştir. Sahip olduğu güçlü matematiksel özellikler sayesinde kuaterniyonlar, geometri ve cebirin yanı sıra mühendislik bilimlerinde de önemli bir araç haline gelmiştir. Günümüzde özellikle bilgisayar grafikleri, robotik sistemler, mekanik analizler, kinematik uygulamalar, animasyon teknolojileri ve dijital görüntü işleme gibi alanlarda etkin bir şekilde kullanılmaktadır (Ickes, 1970; Vince, 1978).

Kuaterniyonların uygulama alanlarının genişlemesinde, üç boyutlu uzaydaki dönüşümlerin etkin ve kararlı bir biçimde ifade edilebilmesi önemli bir rol oynamaktadır. Özellikle uzaydaki cisimlerin dönme hareketlerinin modellenmesi ve hesaplanmasında sağladıkları avantajlar nedeniyle kuaterniyonlar, geometri ve bilgisayar destekli tasarım çalışmalarında yaygın olarak tercih edilmektedir. Bu yönüyle kuaterniyonlar, üç boyutlu hareketlerin temsilinde klasik yöntemlere göre daha kullanışlı ve etkili bir yaklaşım sunmaktadır (Meister, 2005; Shepperd, 1978).

Kuaterniyonlar, matematikte olduğu kadar fizik alanında da geniş bir uygulama yelpazesine sahiptir. Kompleks sayılar elektrik ve mekanik problemlerinin modellenmesinde önemli bir yere sahip olmakla birlikte, bu sayı sistemi çoğunlukla iki boyutlu yapılarla sınırlı kalmaktadır. Buna karşılık kuaterniyonlar, üç boyutlu uzayda ortaya çıkan problemlerin incelenmesinde daha uygun bir matematiksel çerçeve sunmaktadır. Özellikle vektörel yöntemlerin yetersiz kaldığı durumlarda kuaterniyonlar, fiziksel sistemlerin daha kapsamlı ve tutarlı biçimde ifade edilmesine olanak sağlamaktadır. Kuaterniyonların fizikteki dikkat çekici kullanım alanlarından biri görelilik teorisidir. Bunun yanında kuantum mekaniğinde de önemli bir yere

sahip olan bu yapı, özellikle spin kavramının matematiksel olarak modellenmesinde etkin biçimde kullanılmaktadır. Spinorlar üzerinde etkili olan bazı kuantum operatörleri, kuaterniyonlar ile matrisler arasındaki yakın ilişki sayesinde kuaterniyonik ifadeler kullanılarak temsil edilebilmektedir. Spinorların matematiksel gösterimine ilişkin ilk önemli çalışmalardan biri 1930'lu yıllarda B. L. Van der Waerden tarafından ortaya konulmuştur. Elektron spininin fiziksel yorumu ise önce Pauli tarafından 1927 yılında, daha sonra ise Dirac tarafından geliştirilmiştir (Dirac, 1930)

Parçacık fiziğinde temel parçacıklar çeşitli fiziksel özelliklerine göre sınıflandırılır. Bu özelliklerden biri de parçacığın spin değeridir. Spin, bir parçacığın dönüşüm karakterini belirleyen temel niceliklerden biridir. Bir parçacığın spin değeri, onun matematiksel olarak hangi tür yapı ile temsil edileceğini belirler. Sıfır spin değeri parçacıklar skalerlere, $1/2$ spin değeri parçacıklar spinorlara ve bir spin değeri parçacıklar vektörlere karşılık gelmektedir. Daha yüksek spinli parçacıklar ise tensörler ile modellenebilir. Diğer bir deyişle, skalerlerin sıfır dereceden tensörler ve vektörlerin birinci dereceden tensörler olduğu göz önüne alınırsa spinorlar bir nevi yarım dereceli tensörler olarak isimlendirilebilir. Çünkü, karşılık geldikleri vektörlerin yarısı kadar dönerler.

Spinor teorisinin matematiksel temelleri incelendiğinde, genelleştirilmiş spinor yapılarının basit Lie gruplarının lineer temsilleri bağlamında ilk kez Cartan tarafından ele alındığı görülmektedir (Cartan, 1913). Daha sonraki çalışmalarında Cartan, spinorların geometrik yönünü ayrıntılı biçimde inceleyerek bu teorinin geometrik altyapısının oluşmasına önemli katkılar sağlamıştır (Cartan, 1966). Böylece spinorlar, yalnızca cebirsel bir kavram olmaktan çıkarak diferansiyel geometri içerisinde de önemli bir araştırma konusu hâline gelmiştir.

Spinorlar ile eğriler teorisi arasındaki ilişki üzerine gerçekleştirilen çalışmalardan biri Torres del Castillo ve Barrales'e aittir. Araştırmacılar, üç boyutlu Öklid uzayındaki eğrilerin Frenet çatısını kullanarak söz konusu eğrilerin spinor gösterimlerini elde etmişlerdir (Torres del Castillo ve Barrales, 2004). Bu yaklaşım, diferansiyel geometride eğriler ile spinorlar arasındaki bağlantının daha açık bir biçimde ortaya konulmasını sağlamıştır. Benzer şekilde yönlendirilmiş yüzeylerin Darboux çatısına ilişkin spinor denklemleri de incelenmiş ve bu konuda önemli sonuçlar elde edilmiştir (Kişi ve Tosun, 2015).

Öte yandan Ünal ve çalışma arkadaşları, üç boyutlu Öklid uzayında tanımlı eğriler için Bishop çatısına karşılık gelen spinor denklemlerini türetmişlerdir (Ünal vd., 2013). Daha sonraki

yıllarda Erişir ve çalışma arkadaşları, Minkowski uzayındaki eğrilerin incelenmesinde kullanılmak üzere hiperbolik spinor adı verilen yeni bir kavram geliştirmişlerdir. Bu çalışmalar, hiperbolik spinorların diferansiyel geometri ve Lorentz geometrisi içerisindeki uygulamalarına yönelik önemli sonuçlar ortaya koymuştur (Ketenci vd., 2015; Erişir vd., 2015; Balcı vd., 2015; Erişir ve Köse Öztaş, 2022). Ayrıca Erişir ve Kardağ tarafından, Öklid uzayında involüt–evolüt eğri çiftlerine ait spinor formülleri elde edilerek literatüre yeni katkılar sunulmuştur. (Erişir, Kardağ, 2023)

Pauli matrisleri aracılığıyla tanımlanan ve iki kompleks bileşenden oluşan spinor cebiri 3 boyutlu reel uzayda dönme hareketini cebirsel olarak etkin bir şekilde gösterilmesine katkı sağlamaktadır. Bu çerçevede Vivarelli (1984), kuaterniyon ve spinor içinde kurduğu ilişki aracılığıyla kuaterniyon kinematığını spinor formülasyonu ile ifade edebileceğini göstermiştir. Vivarelli'nin çalışmasında reel kuaterniyonlar ile spinorlar arasında birebir, lineer ilişki tanımlanmış ve bu sayede reel kuaterniyonlarla tanımlanan dönmeler için spinor temsilleri elde edilmiştir. Böylelikle spinor kinematığı, kuaterniyonlarla doğrudan ilişkilendirilmiştir (Vivarelli, 1984).

Öte taraftan Woit (2017), kuantum mekaniğinde kuaterniyonlar ile spinorlar arasındaki bağlantıyı görmüş ve bu ilişki ile arasındaki yapı üzerinden incelemiştir. Benzer bir yaklaşımla Dechant (2013), reel kuaterniyonlarla spinorlar arasındaki ilişkiyi esas alarak bulundurarak kuaterniyonların matris temsillerine ilişkin yöntemler geliştirmiştir. Torres del Castillo (2003), reel kuaterniyonların spinor matrisleri aracılığıyla ifade edilebilmesine yönelik temel bir yaklaşım sunmuştur. Daha yakın dönemde ise Tarakçıoğlu ve arkadaşları (2018), reel kuaterniyonlar ve spinor denklemlerinin bağlantısını kullanarak split kuaterniyonlar ile hiperbolik spinorlar birlikteliğinde bir ilişki kurmuş ve Minkowski uzayında dönmelere ait hiperbolik spinor kinematığını geliştirmiştir. Ayrıca Erişir ve Yıldırım reel kuaterniyonlara karşılık gelen Hamilton spinor matrislerini tanımlamış ve bu yapıların geometrik yorumlarını incelemiştir. (Erişir, Yıldırım, 2023).

Hiperbolik sayılar farklı kaynaklarda “perplex sayı”, “space-time sayı” veya “split karmaşık sayı” adlandırılır (Borota vd., 2000, Fjelstad 1986, Poodiack ve LeClair 2009, Rochon ve Shapiro 2004, Yaglom 1968). Hiperbolik sayılar ilk kez James Cockle'nin 1848 yılındaki çalışmasında bulunmaktadır. Daha sonra Clifford, hiperbolik sayıları çalışmasında kullanmaya devam etmiştir (Cockle, 1849). G. Sobczyk, 1995 yılındaki çalışmasında hiperbolik sayıların modül, iç çarpım, matris gösterimleri ve grafikleri üzerine detaylı bilgiler sunmuştur. Ayrıca

hiperbolik sayıların hiperbolik fonksiyonlar aracılığıyla nasıl ifade edilebileceğini ortaya koymuştur (Sobczyk 1995). N. Borota ve T. Osler, 2000 yılında gerçekleştirdikleri araştırmada "uzay-zaman sayıları" (spacetime sayıları) şeklinde isimlendirdikleri hiperbolik sayıların öne çıkan özelliklerini ele almışlardır. Aynı araştırmacılar, 2002 yılında ise hiperbolik sayı değişkenli fonksiyonlar üzerinde durarak bu konuyu derinlemesine incelemişlerdir (Borota vd 2000, Borota ve Osler 2002). 2004 yılında F. Catoni, R. Cannata, V. Catoni ve P. Zampetti tarafından yürütülen çalışmada, hiperbolik sayılar zemininde Lorentziyen trigonometri konusu ele alınmıştır (Catoni vd 2004). D. Boccaletti, E. Nichelatti, F. Catoni, R. Cannata, V. Catoni ve P. Zampetti'nin 2008 yılında kaleme aldıkları kitapta, hiperbolik sayılar hakkında kapsamlı bir çalışma sunulmuştur. Bu eserde ayrıca, hiperbolik sayıların temel özellikleri ve bunlarla ilişkili bilimsel çalışmalar ile ilgili bilgilerde yer verilmiştir (Catoni vd 2008). 2009'da R. Poodiack ve K. LeClair, hiperbolik sayıların birtakım cebirsel niteliklerini ortaya koyarak, cebirin temel teoremlerini hiperbolik sayılar kümesi için ispatlamışlardır. Araştırmacılar ayrıca, hiperbolik sayı katsayılı polinomların kök yapılarını da analiz etmişlerdir (Poodiack ve LeClair 2009). Hiperbolik sayıların matematiksel çözümlenmesinde fizik alanındaki uygulamaları ve farklı lineer cebir pratikleri, son dönemlerde ivme kazanan popüler çalışma sahaları içinde yer almaktadır. Verilen kısımlarda gerçekleştirilen dikkat çekici çalışmalar yapılmıştır (Bracken ve Hayes 2002, Callahan 2000, Catoni vd 2005, 2011, Catoni ve Zampetti 2012, Erdoğan ve Özdemir 2016, Fjelstad 1986, Khrennikov 2003, Khrennikov ve Segre 2005, Khrennikov 2008, Kisil 2013, Motter ve Rosa 1998).

Reel kuaterniyonların keşfedilerek literatüre kazandırılmasından çok kısa zaman sonra, 1849 yılında James Cockle tarafından split kuaterniyonlar kavramını ortaya koymuştur (Cockle, 1849). Split kuaterniyonlar, cebirsel yapı bakımından reel kuaterniyonlara benzerlik göstermekte olup, onların farklı bir uzaya yorumlanması olarak düşünülebilir. Bununla birlikte reel kuaterniyonlarda olduğu gibi split kuaterniyonlarda da çarpma işlemi değişmeli (komutatif) değildir. Bu durum, split kuaterniyonları klasik sayı sistemlerinden ayıran temel niteliklerden biri olup, onları reel kuaterniyonlar gibi, değişmeli olmayan cebirlerin önemli bir temsilcisi konumuna getirmektedir.

Geometri başta olmak üzere pek çok farklı bilimsel alanda geniş bir kullanım yelpazesine sahip olan split kuaterniyonlar, son derece işlevsel cebirsel yapılardan biridir (Özdemir ve Ergin, 2005). Literatürdeki çalışmalar incelendiğinde, Öklid uzayındaki dönme hareketlerinin standart kuaterniyonlarla gösterilmesine karşılık, 3-boyutlu Minkowski uzayındaki dönme işlemlerinin

timelike split kuaterniyonlar vasıtasıyla modellendiği görülmektedir (Özdemir, 2003). Bu matematiksel temeli esas alan Özdemir ve diğer araştırmacılar, 3-boyutlu Minkowski uzayında karşımıza çıkan dönme matrislerinin özvektör ve özdeğer bileşenlerini split kuaterniyon teorisıyla analiz ederek literatüre kıymetli katkılar sunmuşlardır (Özdemir vd., 2014).

Öte yandan split kuaterniyonlar, yarı-Öklid uzaylarındaki dönme dönüşümlerinin matematiksel olarak formüle edilmesinde de etkin bir araç olarak rol oynamaktadır. Böylece bu konu kapsamlı bir şekilde Kula ve Yaylı tarafından ele alınmıştır (Özdemir vd., 2014). Buna paralel olarak split kuaterniyonların yarı-Öklid projektif uzaylar üzerindeki yansımalarını araştıran Ata ve Yaylı da bu doğrultuda özgün teorik bulgular elde etmişlerdir (Ata ve Yaylı, 2009).

Bu öncül araştırmaların ardından split kuaterniyon matrisleri literatürde daha derinlemesine ele alınmış ve bu alandaki çalışmalar ivme kazanmıştır. Konuyla ilgili çeşitli genelleştirmeler yaparak yapıların özdeğer niteliklerini masaya yatıran Erdoğan ve Özdemir, ilgili matematiksel alana önemli bir dinamizm kazandırmışlardır (Erdoğan ve Özdemir, 2013). Türkiye'de ise bu konudaki ilk düzenli ve metodolojik adımlar Alagöz ile çalışma arkadaşları tarafından atılmıştır (Alagöz vd., 2012). Bahsi geçen bu araştırmada split kuaterniyon matrislerinin temel cebirsel karakterleri masaya yatırılmış, buna ilave olarak matrisler için kompleks adjoint matris gösterimleri literatüre kazandırılmıştır.

Takip eden süreçte hem split kuaterniyon matrisleri hem de split kuaterniyonların kendisi üzerine yapılan bilimsel yayınların sayısında ciddi bir artış yaşanmış bu kuaterniyonların teorik nitelikleri ile pratik kullanım sahalarına dair pek çok özgün bulgu elde edilmiştir. Mevcut literatür akışı, split kuaterniyon teorisinin hem teorik matematik hem de uygulamalı matematik disiplinlerinde oldukça verimli ve geniş bir araştırma potansiyeline sahip olduğunu tescillemektedir.

Esasen split kuaterniyonlar cebiri, kompleks sayılar kümesi baz alınarak geliştirilen ve bu kümeyi genişleten bir sistemdir. Fakat bu yapıda çarpma işleminin değişme özelliği bulunmamaktadır. Öte yandan, split kuaterniyon teorisinde başvuru alan eşlenik fonksiyonu, kurulan bu cebirsel sistemin kendi içindeki tutarlılığını muhafaza etmede kilit bir fonksiyon icra eder. Dikkat çekici bir şekilde, split kuaterniyonlar için biçimlendirilen eşlenik işlemi kompleks sayılar alt cebir düzeyine indirgendiğinde, doğrudan alıştığımız geleneksel karmaşık eşlenik fonksiyonuna dönüşmektedir. Bahsedilen bu ayırt edici nitelik, split kuaterniyon

yapısının bir taraftan karmaşık sayılar sistemiyle entegre bir biçimde çalışabildiğini, diğer taraftan ise çok daha kapsamlı ve esnek bir cebirsel zemin sunduğunu gözler önüne sermektedir.

Söz konusu teorik çerçevede geliştirilen dikkat çekici açılımlardan biri de hiperbolik spinor yaklaşımıdır. Dirac spinorlarının genelleştirilmiş bir formu olarak kabul edilen hiperbolik spinorlar, hiperbolik sayı sistemleri taban alınarak yapılandırılır. Lorentz dönüşümleriyle oldukça organik bir bağ kuran bu metodoloji, relativistik simetrilerin matematiksel olarak çok daha yalın bir biçimde ifade edilmesine imkan tanır . Hiperbolik spinorların sunduğu bu esnek cebirsel altyapı, uzay-zamanın nedensellik ilkelerini ve geometrik dokusunu daha şeffaf bir biçimde yansıtma potansiyeli taşımaktadır (Hestenes, 1966).

Hiperbolik spinor gösteriminin kullanımı, özellikle kuantum alan teorisinde ve modern parçacık fiziğinde karşımıza çıkan karmaşık diferansiyel denklemlerin daha derli toplu bir forma kavuşturulmasını sağlamaktadır. Eğri uzay-zaman formlarında tanımlanan Dirac denklemleri ile elektromanyetik alanların spinor gösterimleri bu ilişki sayesinde çok daha rahat analiz edilebilmektedir. Ayrıca bu matematiksel modelin, kütleçekim kuvvetinin kuantum boyutunda incelendiği çağdaş kuramsal fizik çalışmalarında da bir anahtar olabileceği öngörülmektedir.

Son dönem literatürü; hiperbolik spinor yapılarının kozmoloji, kuantum bilgi teorisi ve çok boyutlu sicim teorileri gibi ileri düzey alanlarla da entegre edilebileceğine işaret etmektedir. Özellikle süpersimetri modellerinde ve genişletilmiş uzay-zaman tasarımlarında spinor cebiri, evrenin temel simetrilerinin kökenine inilmesine ciddi katkılar sunmaktadır. Tüm bu gelişmeler, Dirac spinorunun ve spinor teorisinin tarihsel birer basamak olmanın ötesinde, günümüz teorik fiziğinin gelişim süreçlerinde hala merkezi bir konumda yer aldığını tescillemektedir.

2.1. Reel kuaterniyonlar

Bu bölümde, reel kuaterniyonların yapısına ilişkin temel tanımlar ve kavramsal çerçeve ile birlikte, konuya giriş niteliği taşıyan temel teoremler ayrıntılı biçimde ele alınmıştır. Böylece reel kuaterniyonların cebirsel özelliklerinin anlaşılabilmesi için gerekli kuramsal altyapı oluşturulmuş ve sonraki bölümlerde yapılacak incelemeler için uygun bir zemin hazırlanmıştır.

Tanım 2.1.1. $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \mathbb{R}$ olacak şekilde bir ρ reel kuaterniyonu

$$\rho = (\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3)$$

ya da

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \mathbf{i} + \rho_2 \mathbf{j} + \rho_3 \mathbf{k}$$

şeklinde verilir. Burada $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \mathbb{R}$ reel sayılar, ρ reel kuaterniyonun elemanları $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ olarak adlandırılır ve bu bileşenlerini ifade ederken $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ birimleri ρ reel kuaterniyonunun baz vektörleri olarak tanımlanır. Söz konusu baz vektörleri, kendi aralarında kuaterniyon cebirinin karakteristik yapısını belirleyen spesifik çarpım kurallarına ve özgün cebirsel bağıntılara sahiptir. Bu içsel ilişkiler, kuaterniyon sisteminin geleneksel sayı kümelerinden ayrışarak çarpma işlemine göre değişme özelliği barındırmayan non-komütatif bir cebirsel yapı sunmasının ana gerekçesini oluşturur. Reel kuaterniyon bazlarının kendi aralarındaki çarpım matrisi ve temel kuralları şu şekildedir

$$\begin{aligned} i) \quad & \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = -1, \\ ii) \quad & \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ iii) \quad & \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \end{aligned}$$

Bu tanımlar doğrultusunda reel kuaterniyonlar kümesi

$$\mathbb{H} = \{\rho = \rho_0 + \rho_1 \mathbf{i} + \rho_2 \mathbf{j} + \rho_3 \mathbf{k} \mid \rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \mathbb{R}\}$$

şeklinde ifade edilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Buna ek olarak, $\rho \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonun skaler bileşeni $S_\rho = \rho_0$ ve vektörel bileşeni

$V_\rho = \rho_1 \mathbf{i} + \rho_2 \mathbf{j} + \rho_3 \mathbf{k}$ şeklinde tanımlanırsa, ρ reel kuaterniyonu

$$\rho = S_\rho + V_\rho$$

biçiminde ifade edilebilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.1.2. $\rho \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonun skaler bileşeni sıfır olup yalnızca vektörel kısımdan oluşuyor ise $(\rho = V_\rho)$, ρ reel kuaterniyonu pür kuaterniyon denir. (Hacısalıhoğlu, 1983).

$\mathbb{H}$ Reel kuaterniyonlar üzerinde tanımlı bazı temel cebirsel işlemler aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.1.3. $\kappa, \rho \in \mathbb{H}$ keyfi iki reel kuaterniyon olsun. $\kappa = S_\kappa + V_\kappa$, $\rho = S_\rho + V_\rho \in \mathbb{H}$ olmak üzere $\mathbb{H}$ reel kuaterniyonlar kümesi üzerinde toplama işlemi,

$$\begin{aligned}\oplus: \mathbb{H} \times \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ (\kappa, \rho) &\rightarrow \kappa \oplus \rho = (S_\kappa + V_\kappa) \oplus (S_\rho + V_\rho) \\ &= (S_\kappa + S_\rho) + (V_\kappa + V_\rho)\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $\kappa, \rho \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonları göz önüne alınırsa $\kappa = \kappa_0 + \kappa_1 \mathbf{i} + \kappa_2 \mathbf{j} + \kappa_3 \mathbf{k}$ ve $\rho = \rho_0 + \rho_1 \mathbf{i} + \rho_2 \mathbf{j} + \rho_3 \mathbf{k}$ şeklinde göz önüne alınırsa bu iki reel kuaterniyonun toplam işlemi

$$\kappa \oplus \rho = (\kappa_0 + \rho_0) + (\kappa_1 + \rho_1) \mathbf{i} + (\kappa_2 + \rho_2) \mathbf{j} + (\kappa_3 + \rho_3) \mathbf{k}$$

biçiminde elde edilir (Hacısalıhoğlu, 1983). Bu tanım doğrultusunda $(\mathbb{H}, \oplus)$ yapısı bir abel grup oluşturmaktadır. Bu grup yapısında $\mathbb{H}$ kümesinin birim (etkisiz) elemanı

$$(0, 0, 0, 0) = 0 + \mathbf{i}0 + \mathbf{j}0 + \mathbf{k}0$$

şeklinde olup bu kuaterniyon sıfır kuaterniyonu olarak adlandırılır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.1.4. $\mathbb{H}$ reel kuaterniyonlar kümesi üzerinde tanımlı skalerle çarpma işlemi, $\rho = S_\rho + V_\rho \in \mathbb{H}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\odot: \mathbb{R} \times \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ (\lambda, \rho) &\rightarrow \lambda \odot \rho = \lambda \odot (S_\rho + V_\rho) = \lambda S_\rho + \lambda V_\rho\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanıma eşdeğer olarak skalerle çarpma işlemi

$$\lambda \odot q = \lambda \odot (\rho_0 + \rho_1 \mathbf{i} + \rho_2 \mathbf{j} + \rho_3 \mathbf{k}) = (\lambda \rho_0) + \mathbf{i}(\lambda \rho_1) + \mathbf{j}(\lambda \rho_2) + \mathbf{k}(\lambda \rho_3)$$

olarak yazılabilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ve $\kappa, \rho \in \mathbb{H}$ olmak üzere $\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ şeklinde tanımlanan skalerle çarpma işlemi aşağıdaki özellikleri sağlanmaktadır:

$$i) \quad \lambda \odot (\kappa \oplus \rho) = (\lambda \odot \kappa) \oplus (\lambda \odot \rho),$$

$$ii) \quad (\lambda + \mu) \odot \rho = (\lambda \odot \rho) \oplus (\mu \odot \rho),$$

$$iii) \quad (\lambda \cdot \mu) \odot \rho = \lambda \odot (\mu \odot \rho),$$

$$iv) \quad 1 \odot \rho = \rho.$$

Bu tanımlar altında $\{\mathbb{H}, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ yapısı bir reel vektör uzayıdır. Ek olarak, $\mathbb{H} = S_p \{\mathbf{I}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ olduğu bilindiğinden, bu vektör uzayının boyutu $\text{boy}(\mathbb{H}) = 4$ dür (Hacısalıhoğlu, 1983). Bundan sonra bu vektör uzayı $\mathbb{H}$ ile ve kuaterniyonlarda toplama ve sklerle çarpma işlemleri, sırasıyla, "+" ve "." ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.5. $\kappa, \rho \in \mathbb{H}$ olmak üzere, iki reel kuaterniyonun kuaterniyonik çarpımı

$$\begin{aligned} \times : \mathbb{H} \times \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ (\kappa, \rho) &\rightarrow \kappa \times \rho \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır. Bu tanım ile birlikte $\kappa = \kappa_0 + \kappa_1 \mathbf{i} + \kappa_2 \mathbf{j} + \kappa_3 \mathbf{k}$ ve $\rho = \rho_0 + \rho_1 \mathbf{i} + \rho_2 \mathbf{j} + \rho_3 \mathbf{k}$ biçiminde verilen iki reel kuaterniyon için, kuaterniyonik çarpım açık bileşenler cinsinden

$$\begin{aligned} \kappa \times \rho &= \kappa_0 \rho_0 - (\kappa_1 \rho_1 - \kappa_2 \rho_2 - \kappa_3 \rho_3) + \mathbf{i}(\kappa_0 \rho_1 + \kappa_1 \rho_0 + \kappa_2 \rho_3 - \kappa_3 \rho_2) \\ &\quad + \mathbf{j}(\kappa_0 \rho_2 + \kappa_2 \rho_0 + \kappa_3 \rho_1 - \kappa_1 \rho_3) + \mathbf{k}(\kappa_0 \rho_3 + \kappa_3 \rho_0 + \kappa_1 \rho_2 - \kappa_2 \rho_1) \end{aligned}$$

ya da alternatif olarak $\kappa = S_\kappa + V_\kappa$ ve $\rho = S_\rho + V_\rho$ kuterniyonları için

$$\kappa \times \rho = S_\kappa S_\rho - \langle V_\kappa, V_\rho \rangle + S_\kappa V_\rho + S_\rho V_\kappa + V_\kappa \wedge V_\rho \quad (2.1)$$

şeklinde elde edilir. Burada “ $\langle , \rangle$ ” ve “ $\wedge$ ” sırasıyla, $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayında skaler çarpım ve vektörel çarpımdır (Vicci, 2001). Ayrıca kuaterniyonik çarpımın aşağıda sıralanan temel özellikleri sağladığı doğrudan gösterilebilir:

- i) Herhangi iki reel kuaterniyonun çarpımı yine reel bir kuaterniyon verir.
- ii) Kuaterniyonik çarpımın birleşme özelliği vardır.
- iii) Kuaterniyonik çarpımın dağılma özelliği vardır.

Fakat kuaterniyon çarpımının değişme özelliği yoktur. Buradaki özellikler altında $\{\mathbb{H}, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot, \times\}$ altılısı birleşmeli bir cebir oluşturur. Bu cebir kuaterniyon cebiri olarak adlandırılır ve $\mathbb{H}$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.6. $\kappa, \rho \in \mathbb{H}$ şeklinde iki reel kuaterniyon göz önüne alınsın. Eğer burada verilen iki reel kuaterniyon yalnızca skaler kısımdan oluşuyorsa ($\kappa = S_\kappa, \rho = S_\rho$) ya da buradaki reel kuaterniyonların vektörel kısımları arasında $V_\rho = \lambda V_\kappa$ şeklinde lineer bağımlı ise bu durumda kuaterniyonik çarpım değişmeli olur. Yani,

$$\kappa \times \rho = \rho \times \kappa$$

Bu durumda kuaterniyonik çarpımın değişme özelliğinin sağladığı görülmektedir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.1.7. $\kappa = S_\kappa + V_\kappa, \rho = S_\rho + V_\rho \in \mathbb{H}$ şeklinde iki reel kuaterniyon ele alınsın. O halde

$$\kappa = \rho \Leftrightarrow S_\kappa = S_\rho \text{ ve } V_\kappa = V_\rho$$

koşulu sağlanıyorsa bu reel kuaterniyonlar eşittir denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.1.8. $\rho = S_\rho + V_\rho \in \mathbb{H}$ biçiminde bir reel kuaterniyon verilsin.

$$\begin{aligned} * : \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ \rho &\rightarrow \rho^* = S_\rho - V_\rho \end{aligned}$$

biçiminde bulunan ρ^* a reel kuaterniyonun eşleniği denir (Hacısalıhoğlu, 1983). $\forall \kappa, \rho \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonu ve $\lambda \in \mathbb{R}$ reel sayısı olmak üzere eşlenik işlemi aşağıdaki temel özellikleri sağlar:

$$i) \quad (\kappa + \rho)^* = \kappa^* + \rho^*,$$

$$ii) \quad (\kappa \times \rho)^* = \rho^* \times \kappa^*,$$

$$iii) \quad (\rho^*)^* = \rho,$$

$$iv) \quad (\lambda \rho)^* = \lambda \rho^*,$$

$$v) \quad \rho = S_\rho \in \mathbb{R} \text{ ise } \rho^* = \rho,$$

$$vi) \quad \rho = V_\rho \in \mathbb{R}^3 \text{ ise } \rho^* = -\rho,$$

$$vii) \quad S_\rho = \frac{\rho + \rho^*}{2}, \quad V_\rho = \frac{\rho - \rho^*}{2}$$

dir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Ek olarak, $\rho = \rho_0 + \rho_1 \mathbf{i} + \rho_2 \mathbf{j} + \rho_3 \mathbf{k} \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonu

$$\rho \times \rho^* = (\rho_0 + \rho_1 \mathbf{i} + \rho_2 \mathbf{j} + \rho_3 \mathbf{k}) \times (\rho_0 - \rho_1 \mathbf{i} - \rho_2 \mathbf{j} - \rho_3 \mathbf{k}) = \rho_0^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2$$

şeklindedir. Buradaki hesaplama göz önüne alındığında

$$\rho \times \rho^* = \rho^* \times \rho > 0, \quad \rho \neq 0$$

ve

$$\rho \times \rho^* = \rho^* \times \rho = 0 \Leftrightarrow \rho = 0$$

ifadeleri sağlanır. Bu sonuç, reel kuaterniyonlar için norm kavramının temelini oluşturmaktadır. Dolayısıyla aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 2.1.9. $\rho \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyon normu

$$\begin{aligned} N(\cdot) : \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \rho &\rightarrow N(\rho) = \sqrt{\rho \times \rho^*} = \sqrt{\rho^* \times \rho} = \sqrt{\rho_0^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

biçiminde verilen $N(\rho)$ reel sayısı şeklinde bulunur. (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.1.10. $\rho \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonu için $N(\rho)=1$ koşulu sağlanıyorsa, ρ reel kuaterniyonu birim reel kuaterniyon olarak adlandırılır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Önerme 2.1.11. $\forall \kappa, \rho \in \mathbb{H}$ için

$$N(\kappa \times \rho) = N(\kappa)N(\rho)$$

eşitliği sağlanır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.1.12. Sıfırdan farklı $\rho \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonunun tersi

$$\begin{aligned} (\cdot)^{-1} : \mathbb{H} - \{0\} &\rightarrow \mathbb{H} - \{0\} \\ \rho &\rightarrow \rho^{-1} = \frac{\rho^*}{N^2(\rho)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanır. Burada tanımlanan ρ^{-1} reel kuaterniyonu ρ reel kuaterniyonunun tersidir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Önerme 2.1.13. Sıfırdan farklı $\forall \rho \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonu için

$$\rho \times \rho^{-1} = \rho^{-1} \times \rho = 1$$

eşitliği geçerlidir.(Hacısalıhoğlu, 1983).

Önerme 2.1.14. $\forall \kappa, \rho \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonları için, kuaterniyon çarpımının tersi

$$(\kappa \times \rho)^{-1} = \rho^{-1} \times \kappa^{-1}$$

şeklinde ifade edilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.1.15. Sıfırdan farklı $\forall \rho \neq 0 \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonu için reel kuaterniyonu

$$r = \frac{\rho}{N(\rho)} = \frac{\rho_0 + \rho_1 \mathbf{i} + \rho_2 \mathbf{j} + \rho_3 \mathbf{k}}{\sqrt{\rho_0^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2}}$$

şeklinde ifade edilir. Burada r , birim reel kuaterniyondur (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.1.11 de tanımlanan r birim kuaterniyonunun koordinat reel eksen ile yaptığı açı θ ile ifade edilirse r birim kuaterniyonu

$$r = \cos \theta + \mathbf{w} \sin \theta$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda $N(\rho) \neq 0$ olmak üzere

$$\cos \theta = \frac{\rho_0}{\sqrt{\rho_0^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2}},$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2}}{\sqrt{\rho_0^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2}}$$

ve

$$\mathbf{w} = \frac{\rho_1 \mathbf{i} + \rho_2 \mathbf{j} + \rho_3 \mathbf{k}}{\sqrt{\rho_0^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2}}$$

biçimindedir. Burada verilen $\mathbf{w}$ birim vektörü, r birim kuaterniyonunun eksenidir (Ward, 1997).

2.2. Spinorlar

Bu kısımda spinor kavramı, cebirsel ve geometrik yönleriyle ele alınarak temel tanımları ve ilgili sonuçlarıyla birlikte sunulmaktadır. Amaç, spinorların kompleks vektör uzaylarıyla olan ilişkisini açık biçimde ortaya koymak ve sonraki bölümlerde kullanılarak kuramsal altyapıyı oluşturmaktır.

$\mathbb{C}^3$, 3 boyutlu kompleks vektör uzayı ise o halde bu uzayda alınan $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$

vektörünün izotropik olması kendisi sıfırdan farklı iken kendisiyle, iç çarpımın sıfır olması koşulu ile tanımlanır. Bu durumda $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ olup, bileşenler arasında $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ durumu bulunur. Böylece $\mathbb{C}^3$ uzayındaki izotropik vektörler kümesi, doğal olarak $\mathbb{C}^2$ uzayında tanımlanan iki boyutlu bir yüzeye ile ilişkilendirilebilir. Söz konusu iki boyutlu yüzey, uygun parametreler yardımıyla γ_1 ve γ_2 cinsinden ifade edilebilir. Burada i karmaşık birim olup $i^2 = -1$ koşulunu sağlamakta ve parametreler $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$ olacak şekilde seçilmektedir. Bu parametrizasyon altında izotropik vektör bileşenleri

$$\begin{aligned}x_1 &= \gamma_1^2 - \gamma_2^2 \\x_2 &= i(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) \\x_3 &= -2\gamma_1\gamma_2\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Bu ifadelerden hareketle γ_1, γ_2 parametreleri, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ vektörü cinsinden

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \pm \sqrt{\frac{x_1 - ix_2}{2}}, \\ \gamma_2 &= \pm \sqrt{\frac{-x_1 - ix_2}{2}},\end{aligned}$$

şeklinde elde edilebilir. Bu ifadelerden görüldüğü gibi, $\mathbb{C}^3$ karmaşık vektör uzayında her izotropik vektör, (γ_1, γ_2) ve $(-\gamma_1, -\gamma_2)$ şeklinde verilen $\mathbb{C}^2$ uzayında iki vektörle temsil edilmektedir. Buna karşılık $\mathbb{C}^2$ uzayında verilen her bir vektör $\mathbb{C}^3$ uzayında tek bir izotropik vektöre karşılık gelmektedir. Bu çift değerli yapı spinorların temel karakteristik özelliklerinden biridir.

Cartan, bu ilişkiyi esas alarak $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$ biçimindeki 2 boyutlu kompleks vektörleri spinor şeklinde adlandırmıştır. (Cartan, 1966). Daha sonra Cartan bir spinorun spinor eşleniğini

$$\gamma = iC\bar{\gamma} \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlamıştır. Bu durumda spinorların yalnızca iki boyutlu kompleks vektörler olarak değerlendirilmemesi gerektiğini, aynı zamanda 3 boyutlu karmaşık izotropik vektörlerin özel bir temsili olduğunu vurgulamıştır. Bu yaklaşım spinorların geometrik ve cebirsel yapıların daha derinlemesine anlaşılmasına olanak sağlamaktadır (Cartan, 1966).

$\mathbb{R}^3$, 3 boyutlu reel vektör uzayında orjin etrafında dönmeleri tanımlayan $SO(3)$ grubu ile 2×2 boyutlu üniter matrisler grubu $SU(2)$ birlikte ele alınsın. Bilindiği üzere $SO(3)$ grubu, $SU(2)$ grubuna homomorftur. Bu homomorfizm altında $SO(3)$ grubunun elemanları $\mathbb{R}^3$

vektör uzayında tanımlı vektörleri üzerinde etki ederken, $SU(2)$ grubunun elemanları iki kompleks bileşenden oluşan vektörleri, başka bir ifadeyle spinorları dönüştürmektedir. (Goldstein, 1980; Sattinger ve Weaver. 1986; Torres del Castillo ve Barrales, 2004). Bu homomorfizm sayesinde Torres del Castillo ve Barrales (2004), $\mathbf{a} + i\mathbf{b}$ şeklinde yazılan izotropik vektörü

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlanan bir spinor ile özdeşleştirmiştir. Burada $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ olarak alınmaktadır. Bilindiği gibi 2×2 boyutlu üniter matrisler uzayı için bir baz oluşturan Pauli matrisleri

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

biçiminde verilmektedir. Torres del Castillo ve Barrales (2004), ikilisi Pauli matrisleri ile

birlikte $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi esas alınarak

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrislerini elde etmişlerdir. Bu gösterim altında $\mathbf{a} + i\mathbf{b} \in \mathbb{C}^3$ izotropik vektörü, spinolar cinsinden

$$\mathbf{a} + i\mathbf{b} = \gamma^t \sigma \gamma$$

olarak ifade edilmiştir. İlave olarak $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ vektörleri ile bu vektörlere ortogonal olan bir $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ vektörü göz önüne alındığında $\mathbf{c}$ vektörü

$$\mathbf{c} = -\overset{\vee}{\gamma} \sigma \gamma$$

şeklinde verilmiştir. Burada verilen " $\gamma^\vee$ " sembolü bir $\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$ spinorunun eşi olacak şekilde tanımlanmak üzere

$$\gamma^\vee = -C\gamma \quad (2.6)$$

biçiminde gösterilir (Torres del Castillo ve Barrales , 2004).

2.3. Reel Kuaterniyonların Spinorlar ile İfadesi

Bu bölümde reel kuaterniyonlar ile bu kuaterniyonlara karşılık gelen spinor yapıları arasındaki ilişki ele alınmıştır.

$\mathbb{H}$ reel kuaterniyonlar kümesinde $\rho = \rho_0 + \rho_1 \mathbf{i} + \rho_2 \mathbf{j} + \rho_3 \mathbf{k} \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonu göz önüne alınsın. Ayrıca bu reel kuaterniyon $\{\mathbf{k}, \mathbf{i}\}$ bazına göre

$$\rho = \mathbf{k}(\rho_3 + \mathbf{j}\rho_0) + \mathbf{i}(\rho_1 + \mathbf{j}\rho_2)$$

şeklinde yazılabilir. Son olarak $\mathbf{i} = \mathbf{j}\mathbf{i}$ olarak göz önüne alınırsa ρ reel kuaterniyonu

$$\rho = \mathbf{k}(\rho_3 + \mathbf{j}\rho_0) + \mathbf{i}(\rho_1 + \mathbf{j}\rho_2) \quad (2.7)$$

biçiminde elde edilir. Ayrıca $\mathbf{i}^2 = -1$ olduğu için kompleks birim şeklinde alınabilir. Böylece bir $\rho = \rho_0 + \rho_1 \mathbf{i} + \rho_2 \mathbf{j} + \rho_3 \mathbf{k} \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonu $\varphi_1 = \rho_3 + \mathbf{j}\rho_0$, $\varphi_2 = \rho_1 + \mathbf{j}\rho_2 \in \mathbb{C}$ şeklinde iki kompleks sayı cinsinden $\rho = \mathbf{k}\varphi_1 + \mathbf{i}\varphi_2$ olarak yazılabilir. Böylece reel kuaterniyonların, iki kompleks bileşenli spinorlar ile ifade edilmesi mümkün hale gelmektedir. Bu durum reel kuaterniyonlar ile spinorlar arasındaki ilişkinin kurulmasında temel bir rol oynamaktadır. Bu nedenle aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 2.3.1. $\mathbb{H}$ reel kuaterniyonlar kümesi spinor bileşenler cinsinden

$$\mathbb{H} = \left\{ \rho = \mathbf{k}\varphi_1 + \mathbf{i}\varphi_2 \mid \varphi_1 = \rho_3 + \mathbf{i}\rho_0, \varphi_2 = \rho_1 + \mathbf{i}\rho_2 \in \mathbb{C} \right\} \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlanabilir (Vivarelli, 1984; Erişir T, Yıldırım E, 2023).

Ayrıca $\varphi_1 = \rho_3 + \mathbf{i}\rho_0, \varphi_2 = \rho_1 + \mathbf{i}\rho_2 \in \mathbb{C}$ kompleks sayıları ile $\varphi \in \mathcal{S}$ spinorunu

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_3 + \mathbf{i}\rho_0 \\ \rho_1 + \mathbf{i}\rho_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Bu durum, Vivarelli (1984) tarafından göz önüne almış kuaterniyonlar ile spinorlar arasında aşağıdaki dönüşüm açık bir şekilde kurulmuş olur. Gerçekten de $\rho = \rho_0 + \rho_1\mathbf{i} + \rho_2\mathbf{j} + \rho_3\mathbf{k} \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonu ile $\varphi \in \mathcal{S}$ spinorunu karşılık getiren dönüşüm

$$f : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{S}$$

$$\rho \rightarrow f(\rho) = f(\rho_0 + \rho_1\mathbf{i} + \rho_2\mathbf{j} + \rho_3\mathbf{k}) \cong \varphi = \begin{bmatrix} \rho_3 + \mathbf{i}\rho_0 \\ \rho_1 + \mathbf{i}\rho_2 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

şeklinde verilir (Vivarelli, 1984; Erişir ve Yıldırım, 2023). Bu dönüşüm reel kuaterniyonların iki kompleks bileşenli spinor yapılarıyla ifade edilebileceğini göstermesi bakımından önemlidir.

Diğer taraftan (2.9) dönüşümüne benzer şekilde $\rho = \rho_0 + \rho_1\mathbf{i} + \rho_2\mathbf{j} + \rho_3\mathbf{k} \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonu $\{\mathbf{k}, \mathbf{i}\}$ bazına göre sağdan çarpım ile

$$\rho = (\rho_3 + \mathbf{i}\rho_0)\mathbf{k} + (\rho_1 - \mathbf{i}\rho_2)\mathbf{i} \quad (2.10)$$

biçiminde yazılabilir. Böylece $\rho = \rho_0 + \rho_1\mathbf{i} + \rho_2\mathbf{j} + \rho_3\mathbf{k} \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonu (2.8) dönüşümüne benzer şekilde

$$\mathbb{H} = \left\{ \rho = \varphi_1\mathbf{k} + \overline{\varphi_2}\mathbf{i} \mid \varphi_1 = \rho_3 + \mathbf{i}\rho_0, \overline{\varphi_2} = \rho_1 - \mathbf{i}\rho_2 \in \mathbb{C} \right\} \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlanabilir. Böylece (2.9) dönüşümüne benzer bir biçimde reel kuaterniyonlar ile spinorlar arasındaki ilişki aşağıdaki dönüşüm aracılığıyla ifade edilebilir. Bu amaçla,

$$f_* : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{S}$$

$$\rho \rightarrow f_*(\rho) = f(\rho_0 + \rho_1 \mathbf{i} + \rho_2 \mathbf{j} + \rho_3 \mathbf{k}) \cong \varphi_* = \begin{bmatrix} \rho_3 + \mathbf{i}\rho_0 \\ \rho_1 - \mathbf{i}\rho_2 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

biçiminde f_* dönüşümü yazılabilir. (Erişir, Yıldırım, 2023).

(2.9) dönüşümü yardımıyla elde edilen reel kuaterniyon-spinor ilişkisine bağlı olarak eşlenik kavramı aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

Tanım 2.3.2. $\rho = \rho_0 + \rho_1 \mathbf{i} + \rho_2 \mathbf{j} + \rho_3 \mathbf{k} \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyon (2.9) dönüşümü ile $\varphi \in \mathcal{S}$ spinoru ile eşleşsin. Burada $\varphi_1 = \rho_3 + \mathbf{i}\rho_0, \varphi_2 = \rho_1 - \mathbf{i}\rho_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere aşağıda verilen dört farklı eşlenik tanımı verilebilir:

i) $\rho \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonuna karşılık olan $\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{S}$ biçimindeki spinorun kompleks eşleniği $\bar{\varphi}$ olsun. Bu durumda $\bar{\varphi}$ spinoru

$$\bar{\varphi} = \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_1 \\ \bar{\varphi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_3 - \mathbf{i}\rho_0 \\ \rho_1 + \mathbf{i}\rho_2 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

şeklinde tanımlıdır.

ii) $\rho \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonunun eşleniği olan $\rho^* = \rho_0 - \rho_1 \mathbf{i} - \rho_2 \mathbf{j} - \rho_3 \mathbf{k}$ kuaterniyonuna karşılık gelen spinor φ^* olacak şekilde

$$\varphi^* = \begin{bmatrix} -\bar{\varphi}_1 \\ -\bar{\varphi}_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \rho_3 - \mathbf{i}\rho_0 \\ \rho_1 + \mathbf{i}\rho_2 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

biçiminde elde edilir.

iii) Cartan (1966) tarafından verilen (2.4) denkleminde tanımlanan spinor eşleniği göz önüne alınırsa $\rho \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonuna karşılık olan $\varphi \in \mathcal{S}$ ifadesinin spinor eşleniği φ olacak şekilde

$$\varphi = \mathbf{i} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_1 \\ \bar{\varphi}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{i} \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_2 \\ -\bar{\varphi}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_2 + \mathbf{i}\rho_1 \\ -\rho_0 - \mathbf{i}\rho_3 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

biçiminde tanımlanır.

iv) Torres del Castillo ve Barrales (2004) ile birlikte verilen (2.6) eşitliğindeki bir spinorun eşi tanımı göz önüne alınırsa $\rho \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonuna karşılık $\varphi \in \mathcal{S}$ spinorunun eşi $\check{\varphi}$ olacak şekilde

$$\check{\varphi} = - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_1 \\ \bar{\varphi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{\varphi}_2 \\ \bar{\varphi}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho_1 + \mathbf{i}\rho_2 \\ \rho_3 - \mathbf{i}\rho_0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

biçiminde tanımlanır. (Erişir ve Yıldırım , 2023).

Sonuç olarak, Tanım 2.3.2 göz önüne alındığında, reel kuaterniyonlar ile spinorlar arasında tanımlanan bu farklı eşlenik türlerinin birbiriyle tutarlı olduğu görülür. Böylece aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 2.3.3. $\rho \in \mathbb{H}$ herhangi reel kuaterniyon olmak üzere bu kuaterniyona karşılık gelen spinor φ ile gösterilsin. O halde φ spinorunun eşi ile spinor eşleniği arasında

$$\check{\varphi} = \mathbf{i}\varphi$$

ilişkisi bulunur (Erişir ve Yıldırım, 2023).

İspat. $\rho \in \mathbb{H}$ herhangi bir reel kuaterniyon ve bu kuaterniyona karşılık gelen spinor φ olsun.

Ayrıca $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $C^2 = -I_2$ olacak şekilde (2.13) ve (2.15) ve (2.16) denklemlerinden

$\bar{\varphi} = iC\varphi$ ve $C\varphi = \bar{\varphi}$ olduğu görülür. Dolayısıyla $\bar{\varphi} = i\varphi$ eşitliği bulunur.

Şimdi ρ reel kuaterniyonunun normuna karşılık gelen spinor denklemi yazılsın⁶. Bu amaçla

$\varphi_1 = \rho_3 + i\rho_0, \varphi_2 = \rho_1 + i\rho_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\bar{\varphi}^t \varphi = \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_1 & \bar{\varphi}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \bar{\varphi}_1 \varphi_1 + \bar{\varphi}_2 \varphi_2 = \rho_0^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2$$

bulunur. Diğer taraftan Tanım 2.1.9 yardımıyla tanımlanan $N(\rho) = \sqrt{\rho_0^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2}$ normunun $N^2(\rho)$ ifadesinin spinor eşitliği $\bar{\varphi}^t \varphi = \bar{\varphi}_1 \varphi_1 + \bar{\varphi}_2 \varphi_2$ olmak üzere

$$N^2(\rho) \rightarrow N(\varphi) = \bar{\varphi}^t \varphi$$

şeklinde yazılabilir böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 2.3.4. $\rho \in \mathbb{H}$ bir reel kuaterniyon ve bu kuaterniyona karşı gelen spinor $\varphi \in \mathcal{S}$ olsun.

O halde ρ reel kuaterniyonunun normuna karşı olan spinor denklemi

$$N(\varphi) = \bar{\varphi}^t C^t \varphi = i \bar{\varphi}^t C^t \varphi \quad (2.17)$$

biçimindedir (Erişir ve Yıldırım, 2023).

İspat. $\rho \in \mathbb{H}$ bir reel kuaterniyon ve bu kuaterniyona karşılık gelen spinor $\varphi \in \mathcal{S}$ şeklinde verilirse o halde aşağıdaki işlemlerden sonra

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi \end{pmatrix}^t C^t \varphi = \begin{bmatrix} -\overline{\varphi_2} & \overline{\varphi_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \varphi_1 \overline{\varphi_1} + \varphi_2 \overline{\varphi_2} = \rho_0^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 = N(\varphi)$$

ve

$$\mathbf{i}(\varphi)^t C^t \varphi = \mathbf{i}(\mathbf{i}C\overline{\varphi})^t C^t \varphi = -\overline{\varphi}^t C^t C^t \varphi = \rho_0^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 = N(\varphi)$$

dir.

2.4. Split Kuaterniyonlar

Split kuaterniyonlar, klasik kuaterniyon cebirinin bir genellemesi olarak James Cockle (1948) tarafından tanımlanmıştır. Yapısal olarak klasik kuaterniyonlara benzer biçimde dört bileşenden oluşmalarına rağmen temel fark çarpım kurallarında ortaya çıkar. Bu farklılık split kuaterniyonların cebirsel yapısını belirgin biçimde değiştirerek onları hiperbolik karaktere sahip bir yapı haline getirir. Split kuaterniyonlar, özellikle hiperbolik geometri, Lorentz dönüşümleri ve özel görelilik kuramı gibi alanlarda doğal bir matematiksel araç olarak kullanılabilir. Bu durumda split kuaterniyonlar, Lorentz dönüşümlerinde dönmeler ile birlikte boost türü dönüşümleri de cebirsel olarak ifade edebilme avantajına sahiptir. Fizikte split kuaterniyonlar, Lorentz cebirine benzer bir yapı sunarak relativistik dönüşümler daha kompleks bir biçimde temsil edilmesine olanak tanır. Bunun yanı sıra, spinor analizleri, Dirac denklemi ve kuantum alan teorisi gibi ileri düzey konularda alternatif bir gösterim sundukları bilinmektedir. Matematiksel açıdan ise split kuaterniyonlar; grup teorisi, difarensiyel geometri ve kompleks analiz gibi alanlarda çeşitli uygulamalara sahiptir. Bu yönleriyle split kuaterniyonlar, hem matematiksel hem de fiziksel bağlamda zengin bir araştırma alanı oluşturmaktadır.

Split kuaterniyonlar $\mathbb{H}_s$ ile gösterilmek üzere bir split kuaterniyon $\rho = \rho_0 + \rho_1 \mathbf{i} + \rho_2 \mathbf{j} + \rho_3 \mathbf{k}$ biçiminde verilsin. Burada $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ baz vektörlerinin çarpım kuralları

$$\mathbf{i}^2 = -1, \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{k} = 1, \mathbf{i}\mathbf{x}\mathbf{j} = -\mathbf{j}\mathbf{x}\mathbf{i} = \mathbf{k}, \mathbf{k}\mathbf{x}\mathbf{j} = -\mathbf{j}\mathbf{x}\mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{k}\mathbf{x}\mathbf{i} = -\mathbf{i}\mathbf{x}\mathbf{k} = \mathbf{j}$$

şeklinde dir. Bu durumda $\mathbb{H}_s$ split kuaterniyonlar kümesi

$$\mathbb{H}_S = \{\rho | \rho = \rho_0 + \rho_1 \mathbf{i} + \rho_2 \mathbf{j} + \rho_3 \mathbf{k}, \rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \mathbb{R}\}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Split kuaterniyon cebiri, 3 boyutlu Lorentz uzayına karşılık gelen Clifford cebirinin çift alt cebiri olarak ele alınmaktadır. Bu nedenle split kuaterniyonlar, klasik kuaterniyonlarda farklı olarak Lorentz tipli bir cebirsel yapıya sahiptir. Bu yapı, özellikle spacelike, timelike ve null vektör ayrımının doğal olarak ortaya çıkmasını sağlar. Bu durumda $\rho = \rho_0 + \rho_1 \mathbf{i} + \rho_2 \mathbf{j} + \rho_3 \mathbf{k}$ split kuaterniyonu $\rho = \rho_0 + \boldsymbol{\rho}$ şeklinde yazılabilir. Burada ρ split kuaterniyonunun skaler ve vektörel kısımları ρ_0 ve $\boldsymbol{\rho} = \rho_1 \mathbf{i} + \rho_2 \mathbf{j} + \rho_3 \mathbf{k} \in \mathbb{H}_S$ şeklindedir. $\rho = \rho_0 + \boldsymbol{\rho}$ ve $\kappa = \kappa_0 + \boldsymbol{\kappa}$ herhangi iki split kuaterniyon olmak üzere bu iki kuaterniyonun çarpımı

$$\kappa \times \rho = \kappa_0 \rho_0 + g(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\rho})_{\mathbb{E}_1^3} + \kappa_0 \boldsymbol{\rho} + \rho_0 \boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\kappa} \wedge_{\mathbb{E}_1^3} \boldsymbol{\rho}$$

biçiminde tanımlanır. Burada “ $g(\cdot, \cdot)_{\mathbb{E}_1^3}$ ” ve “ $\wedge_{\mathbb{E}_1^3}$ ” çarpımları $\mathbb{E}_1^3$ uzayında Lorentz skaler ve vektörel çarpımlardır. Bu tanım, split kuaterniyon çarpımının Lorentz geometrisi ile olan doğrudan ilişkisini açıkça göstermektedir.

Ayrıca $\rho = \rho_0 + \boldsymbol{\rho} \in \mathbb{H}_S$ split kuaterniyonunun eşleniği $\rho^* = \rho_0 - \boldsymbol{\rho}$ şeklinde ifade edilir. Bu eşlenik kullanılarak split kuaterniyonlara karşılık gelen cebirsel değişmez $I_\rho = \rho \rho^* = \rho^* \rho$ şeklinde elde edilir. Bu değişmezin işareti, split kuaterniyonun Lorentz karakterini belirler. Buna göre bir split kuaterniyon için

- i) $I_\rho < 0$ ise spacelike
- ii) $I_\rho > 0$ ise timelike
- iii) $I_\rho = 0$ ise null (lightlike)

olarak ifade edilir. Açık şekilde

$$I_\rho = \rho_0^2 + \rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_3^2 \quad (2.18)$$

dir.

Ek olarak ρ split kuaterniyonuna ait norm $N(\rho) = \sqrt{|\rho \times \rho^*|} = \sqrt{|\rho^* \times \rho|} = \sqrt{|\rho_0^2 + \rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_3^2|}$ şeklinde ifade edilir. Bu durumda eğer $N(\rho) = 1$ ise ρ split kutareniyonu birim split kuaterniyon olarak adlandırılır. Ek olarak, spacelike ve timelike kuaterniyonların tersleri vardır ve $\rho^{-1} = \rho^* / I_\rho$ olarak tanımlanır. Burada $\rho \rho^{-1} = \rho^{-1} \rho = 1$ eşitliği mevcuttur. Diğer taraftan, null split kuaterniyonların tersi yoktur. Herhangi bir spacelike split kuaterniyonun yine vektörel kısmı spacelikettir. Gerçekten de $\rho_0^2 + \rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_3^2 < 0$ olsun. $0 < \rho_0^2 < -\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 = g(\kappa, \rho)$ ise $\rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_3^2 < 0$ dır . Fakat herhangi bir timelike split kuaterniyonun vektörel kısmı spacelike, timelike veya null olabilir. Ayrıca spacelike split kuaterniyonlar kümesi bir grup oluşturmaz. Bunun sebebi iki spacelike split kuaterniyonun çarpımı timelike olduğundan bu kümenin çarpma işlemine göre kapalı olmamasından kaynaklanmaktadır. Öte yandan, timelike split kuaterniyonların kümesi, split kuaterniyon çarpımı altında bir grup oluşturur.

Bu çalışmada split kuaterniyonlar üzerinde tanımlanan metrik $(-, -, +, +)$ olarak alınmıştır. Bu sebeple, split kuaterniyonlar uzayı $\mathbb{R}_2^4$ reel vektör uzayına izomorftur ve dolayısıyla pür split kuaterniyonlar uzayı $(-, +, +)$ metriği ile $\mathbb{R}_1^3$ uzayına izomorftur. Bazı çalışmalarda bu metrik $(+, +, -, -)$ olarak alınmıştır. Bu durumda ise pür split kuaterniyonlar $(+, -, -)$ metriği ile $\mathbb{R}_2^3$ uzayına izomorf olur . Bu durumda yukarıdaki tanımlar değişir. Bu detaya dikkat etmekte fayda vardır (Yüce ve Çoruh. Şenocak, (2023))

$\mathbb{H}_S$ üzerinde sol ve sağ çarpımı temsil eden $\mathbb{R}$ -lineer dönüşümler ifade edilebilir. $\rho = \rho_0 + \rho_1 \mathbf{i} + \rho_2 \mathbf{j} + \rho_3 \mathbf{k}$ bir split kuaterniyon ve Hamilton operatörleri $L_\rho : \mathbb{H}_S \rightarrow \mathbb{H}_S$, ve $R_\rho : \mathbb{H}_S \rightarrow \mathbb{H}_S$ ve $x \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere

$$L_\rho(x) = \rho x, R_\rho(x) = x\rho \quad (2.19)$$

olarak tanımlanır. Eğer ρ birim split kuaterniyon ise L_ρ ve R_ρ Hamilton operatörleri $\mathbb{H}_S$ üzerinde yarı ortogonal dönüşümler olarak elde edilir. Bu durumda, sol ve sağ çarpım operatörleri split kuaterniyonların cebirsel yapısının lineer cebirsel temellerini oluşturur.

Böylece sol çarpım L_ρ ve sağ çarpım R_ρ lineer dönüşümlerine, sırasıyla, $\phi(\rho)$ ve $\varphi(\rho)$ sol ve sağ Hamilton matrisleri

$$\phi(\rho) = \begin{bmatrix} \rho_0 & -\rho_1 & \rho_2 & \rho_3 \\ \rho_1 & \rho_0 & \rho_3 & -\rho_2 \\ \rho_2 & \rho_3 & \rho_0 & -\rho_1 \\ \rho_3 & -\rho_2 & \rho_1 & \rho_0 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$\varphi(\rho) = \begin{bmatrix} \rho_0 & -\rho_1 & \rho_2 & \rho_3 \\ \rho_1 & \rho_0 & -\rho_3 & \rho_2 \\ \rho_2 & -\rho_3 & \rho_0 & \rho_1 \\ \rho_3 & \rho_2 & -\rho_1 & \rho_0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

şeklinde elde edilir. Burada $\phi(\rho)$ sol Hamilton matrisi ρ split kuaterniyonunun temel matrisi olarak ifade edilebilir.

Lorentz dönüşümler, lineer dönüşümlerle karakterize edilen ve Minkowski uzayının metrik yapısını koruyan matematiksel işlemler olarak tanımlanır. Bu dönüşümler, Lorentzin dönmeleri kapsayabildiği gibi, dönmeyi içermediği durumlarda Lorentz boosts olarak adlandırılan özel bir sınıfa da ayrılır. Diğer taraftan $SU(2, \mathbb{H})$ grubunun elemanları hiperbolik spinorları hareket ettirirken, $SO(3,1, \mathbb{R})$ grubunun elemanları üç bileşenli Lorentz vektörleri üzerinde etkide bulunur.

Şimdi $\rho = \rho_0 + \rho_1 \mathbf{i} + \rho_2 \mathbf{j} + \rho_3 \mathbf{k} \in \mathbb{H}_S$ şeklinde herhangi bir split kuaterniyonunu göz önüne alınsın. O halde q split kuaterniyonunun eşleniği

$$\rho^* = \rho_0 - \rho_1 \mathbf{i} - \rho_2 \mathbf{j} - \rho_3 \mathbf{k} \quad (2.22)$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanım altında bazı temel cebirsel özellikler doğrudan elde edilebilir. Burada $\rho = \rho_0 + \rho_1 \mathbf{i} + \rho_2 \mathbf{j} + \rho_3 \mathbf{k} \in \mathbb{H}_S$ herhangi bir split kuaterniyon olmak üzere $\rho \times \rho^*$ split kuaterniyon çarpımı $\rho \times \rho^* = \rho^* \times \rho = \rho_0^2 + \rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_3^2$ şeklinde kolayca görülebilir. Ayrıca κ ve ρ herhangi iki split kuaterniyon ise

$$(\kappa + \rho)^* = \kappa^* + \rho^*$$

ve

$$(\kappa \times \rho)^* = \rho^* \times \kappa^*$$

eşitlikleri vardır.

2.5. Split Kuaterniyon Matrisleri

Split kuaterniyonlar üzerinde tanımlanan matris yapıları, bu cebirin değişmeli olmamasından kaynaklanan yapısal özellikler nedeniyle klasik matris kavramından önemli farklılıklar gösterir. Bu bölümde, split kuaterniyonlar üzerinde tanımlı matrislerin temel cebirsel özellikleri ele alınmıştır. A ve B , split kuaterniyonik bileşenleri $A_{ij}, B_{ij} \in \mathbb{H}_S$ olan $n \times n$ şeklinde iki matris olsun. O halde AB matris çarpım, elamanları $(AB)_{ij} \in \mathbb{H}_S$ olan ve aşağıdaki şekilde tanımlanan bir diğer $n \times n$ tipinde matristir (Erişir ve Yıldırım, 2026). Bu durumda

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj}. \quad (2.23)$$

şeklinde verilen $n \times n$ boyutunda bir matris olsun. Bir split kuaterniyon matrisi A 'nın eşlenik transpozu (Hermityen eşleniği) $A^\dagger$ biçiminde verilsin. Burada A 'nın eşlenik transpozu

$$(A^\dagger)_{ij} = \overline{A_{ji}} \quad (2.24)$$

olarak elde edilir (Erişir ve Yıldırım, 2026). Bu tanımlar ile birlikte, split kuaterniyon matrisleri için aşağıdaki temel cebirsel özdeşlikler elde edilir. A ve B herhangi iki split kuaterniyon matris olmak üzere

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger \quad (2.25)$$

ve

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \quad (2.26)$$

denklemleri elde edilir. Verilen eşitliklerin sonucunda, herhangi bir m pozitif tamsayısı için

$$(A^m)^\dagger = (A^\dagger)^m \quad (2.27)$$

eşitliği vardır.

Klasik matrislerde olduğu gibi, split kuaterniyonik bir matrisin üstel fonksiyonu kuvvet serisi yardımıyla tanımlanabilir. Buna göre A , $n \times n$ boyutlu split kuaterniyonik matrisinin üsteli e^A olmak üzere e^A kuvvet açılımı ile

$$e^A = I_n + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots \quad (2.28)$$

şeklinde yazılır. Burada I_n , $n \times n$ boyutunda birim matristir. Daha önce tanımlanan hermityen eşlenik yardımıyla üstel matris için

$$(e^A)^\dagger = e^{A^\dagger} \quad (2.29)$$

eşitliği vardır. Bu özellik, split kuaterniyon matrisleri aracılığıyla tanımlanan üniter grupların Lie cebirlerinin incelenmesinde temel roldedir (Erişir ve Yıldırım, 2026).

Ek olarak, A , $n \times n$ boyutlu bir split kuaterniyon matris olmak üzere üstel matrisin tersinin varlığı da kolaylıkla gösterilebilir.

$$e^A \cdot e^{-A} = e^{-A} \cdot e^A = I_n \quad (2.30)$$

şeklinde kolayca gösterilebilir.

Split kuaterniyonlar üzerine kurulan bu matris yapısı, Lorentz geometrisi ile uyumlu cebirsel dönüşümlerin matris gösterimlerini mümkün kılmaktadır. Özellikle hiperbolik dönüşümler, Lorentz gruplarının gösterimleri açısından güçlü bir matematiksel ifade sunmaktadır.

Şimdi split kuaterniyonlar üzerinde tanımlı üniter matris gruplarının yapısı incelenmekte ve özellikle $U(2, \mathbb{H}_s)$ grubunun Lorentz simetrileri ile olan cebirsel ilişkisi ele alınmaktadır.

Pozitif bir n pozitif tamsayısı için (2.29) denkleminde tanımlanan $\dagger$ hermityen eşlenik operatörüne göre split kuaterniyonik bileşenlere sahip $n \times n$ matrislerin oluşturduğu küme $U(n, \mathbb{H}_s)$ ile gösterilsin. Bir U matrisinin bu gruba aitliği için gerek ve yeter şart

$$U^\dagger \cdot U = U \cdot U^\dagger = I \quad (2.31)$$

eşitliğidir. Bu koşul, söz konusu matrislerin split kuaterniyonik iç çarpımı koruduğunu ifade eder ve matris çarpımı altında kapalı olan bu kümenin bir grup oluşturmasını sağlar. Özellikle $n = 1$ durumu, birim split kuaterniyonlara karşılık gelir. Bu özel durumda

$$U(1, \mathbb{H}_s) \cong SU(1, 1; \mathbb{C}) \cong SL(2, \mathbb{R}) \quad (2.32)$$

şeklinde iyi bilinen izomorfizmler elde edilir. Bu izomorfizmler, split kuaterniyonların cebirsel yapısının Lorentz tipi gruplarla doğrudan bağlantılı olduğunu göstermektedir. Özellikle

$SL(2, \mathbb{R})$, $SO(2,1)$ Lorentz grubunu çift örtüsü ile ilişkilidir. Dolayısıyla, split kutareniyonik üniter elemanlar doğal olarak Lorentz simetriler üretmektedir.

Bu tez kapsamında ilgilenilen kısım, 2×2 tipindeki üniter split kuaterniyonik matrislerden oluşan $U(2, \mathbb{H}_s)$ grubudur. Bunun nedeni, bu grubun Lie cebirinin, uygun bir alt cebir seçimi altında, dört boyutlu Lorentz grubunun Lie cebiri $SO(3,1)$ ile izomorf yapılar içermesidir. Bu durum, Lorentz dönüşümlerinin spinor temsillerinin split kuaterniyonik matrisler aracılığıyla inşa edilebilmesini mümkün kılar.

$U(2, \mathbb{H}_s)$ grubunun elemanları uygun bir parametre seçimi ile

$$U = e^{As} \quad (2.33)$$

şeklinde yazılabilir. Burada A , 2×2 boyutlu split kuaterniyonik bir matris, s ise reel parametredir. Üniterlik koşulu

$$e^{A^\dagger s} \cdot e^{As} = 1 \quad (2.34)$$

eşitliğini gerektirir. Verilen kısmın s ye göre türevi alınıp $s = 0$ için göz önüne alınırsa

$$A^\dagger = -A \quad (2.35)$$

ifadesi elde edilir. Bu sonuç $U(2, \mathbb{H}_s)$ grubunun Lie cebirinin anti-Hermityen split kuaterniyonik matrislerden oluştuğunu göstermektedir. Bu tip matrisler uygun bir baz seçimi ile şu şekilde ayrıştırılabilir:

$$A = \sum_{i=1}^3 \alpha_i J_i + \sum_{i=1}^3 \beta_i K_i + \sum_{i=0}^3 \eta_i L_i \quad (2.36)$$

Burada katsayılar $\alpha_i, \beta_i, \eta_i \in \mathbb{R}$ olup J_i, K_i, L_i matrisleri

$$J_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad J_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad J_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$K_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\mathbf{k} & 0 \\ 0 & -\mathbf{k} \end{bmatrix} \quad K_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{j} & 0 \\ 0 & -\mathbf{j} \end{bmatrix} \quad K_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{j} \\ \mathbf{j} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$L_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & \mathbf{i} \end{bmatrix} \quad L_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{j} & 0 \\ 0 & \mathbf{j} \end{bmatrix} \quad L_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{k} & 0 \\ 0 & -\mathbf{k} \end{bmatrix} \quad L_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{k} \\ \mathbf{k} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

özelliklerini sağlar.

Bu matrisler anti-hermityendir. Dolayısıyla bu matrislerinin reel lineer birleşimlerinin üstel fonksiyonları, split üzerinde tanımlı 2×2 üniter matrisler üretir. Ayrıca 2×2 boyutlu J_i ve K_i matrisleri arasında

$$\begin{aligned} [J_1, J_2] &= -J_3 & [K_1, K_2] &= J_3 & [J_1, K_2] &= -K_3 & [K_1, J_2] &= -K_3 \\ [J_2, J_3] &= -J_1 & [K_2, K_3] &= J_1 & [J_2, K_3] &= -K_1 & [K_2, J_3] &= -K_1 \\ [J_3, J_1] &= -J_2 & [K_3, K_1] &= J_2 & [J_3, K_1] &= -K_2 & [K_3, J_1] &= -K_2 \end{aligned} \quad (2.40)$$

komütatör ilişkileri mevcuttur. Diğer tüm komütatörler sıfırdır. Bu ilişkiler J_i ve K_i matrislerinin oluşturduğu alt cebirin, Lorentz grubunun Lie cebiri $SO(3,1)$ ile izomorf bir yapıya sahip olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla $U(2, \mathbb{H}_s)$ grubunun on boyutlu Lie cebiri içerisinde, Lorentz cebirine denk gelen altı boyutlu bir alt cebir doğal olarak ortaya çıkmaktadır. Bu yapı, split kuaterniyonik matrislerin Lorentz dönüşümlerinin spinor temsillerini gerçekleştirebildiğini göstermektedir. Ek olarak tanımlanan L_i matrisleri aşağıdaki cebirsel eşitlikleri sağlar (Erişir ve Yıldırım, 2026).

$$(2L_0)^2 = -1 \quad (2L_1)^2 = +1 \quad (2L_2)^2 = +1 \quad (2L_3)^2 = +1. \quad (2.41)$$

Bu matrisler anti-komütatif özellikleri gösterir.

$$\{L_i, L_j\} = L_i L_j + L_j L_i = 0 \quad (i \neq j \text{ için}) \quad (2.42)$$

Bu ilişkiler, Dirac kuramında kullanılan γ^μ matsilerinin sağladığı Clifford cebiri ile yapısal bir benzerlik göstermektedir.

3.YÖNTEM

3.1. Hiperbolik Sayılar

3.1.1. Hiperbolik sayıların cebirsel özellikleri

Hiperbolik sayılarla ilgili temel kavramlara yer verilecek olan bu bölümde, söz konusu sayıların hem cebirsel hem de geometrik özellikleri üzerinde durulacaktır.

Tanım 3.1.1. $\mathbb{H} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ sıralı ikililerinin kümesi üzerinde eşitlik, toplama ve çarpma işlemleri, sırasıyla,

i. $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2,$

ii. $+$: $\mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$
 $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$

iii. $\cdot$: $\mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$
 $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 + y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2),$

biçiminde tanımlanmıştır. Yukarıdaki işlemlerle birlikte $\mathbb{H}$ kümesine hiperbolik sayılar kümesi denir (Çakır, 2024).

Teorem 3.1.2. $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır (Çakır, 2024).

Teorem 3.1.3. $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ üçlüsü cisim değildir (Çakır, 2024).

Teorem 3.1.4 $\mathbb{H}$ hiperbolik sayılar halkasının, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismine izomorf olan bir alt kümesi mevcuttur ve bu alt küme $\mathbb{H}$ 'nin bir alt cismidir (Çakır, 2024).

Tanım 3.1.5. Herhangi bir $z = (x, y) \in \mathbb{H}$ hiperbolik sayısında bulunan x sayısına bu hiperbolik sayının reel kısmı, y reel sayısına ise bu hiperbolik sayının hiperbolik kısmı denir (Çakır, 2024).

Tanım 3.1.6. $(0,1)$ hiperbolik sayısı h ile gösterilsin. Bu durumda $(0,1) = h$ hiperbolik sayısına hiperbolik birim denir (Çakır, 2024).

Sonuç 3.1.7. $h^2 = 1$ 'dir (Çakır, 2024).

İspat. $h^2 = h.h = (0,1)(0,1) = (0+1, 0+0) = (1,0) = 1$ olarak bulunur (Çakır, 2024).

Teorem 3.1.8. Herhangi $z = (x, y) \in \mathbb{P}$ hiperbolik sayısı $z = x + hy$ biçiminde tek bir şekilde yazılabilir (Çakır, 2024).

Tanım 3.1.9. $x - hy \in \mathbb{H}$ hiperbolik sayısına $z = x + hy \in \mathbb{H}$ hiperbolik sayısının eşleniği denir. $\bar{z}$ ile gösterilir ve z ile birlikte x -ekseninde simetriktir (Sobczyk, 1995).

Önerme 3.1.10.

- i. $z \in \mathbb{H}$ ise $\bar{x}$ 'nin eşleniği z 'dir. Yani $\overline{(\bar{z})} = z$ dir.
- ii. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ ler için $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ dir.
- iii. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ için $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ dir ve $z_2 \neq 0$ olacak şekilde $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ dir.
- iv. $\forall z \in \mathbb{H}$ için $z\bar{z} = \|z\|^2$ dir
- v. $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$, $z - \bar{z} = 2\text{Hip}(z)$ ve $z = \bar{z}$ ise $z \in \mathbb{R}$ dir (Çakır, 2024).

Tanım 3.1.11. Herhangi bir $z = x + hy \in \mathbb{H}$ şeklinde verilen hiperbolik sayının mutlak değeri (modülü),

$$|z| = \sqrt{|x^2 - y^2|}$$

biçiminde tanımlanır (Borota vd., 2000, Sobczyk, 1995).

Tanım 3.1.12. Herhangi bir $z = x + \mathbf{h}y \in \mathbb{H}$ şeklinde verilen hiperbolik sayının tersi $x^2 - y^2 \neq 0$ durumunda tanımlı olur ve

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

şeklindedir (Borota vd., 2000, Sobczyk, 1995).

Tanım 3.1.13. Elemanları hiperbolik sayılardan oluşan matrislere hiperbolik matrisler denir ve hiperbolik matrisler cümlesi $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{H})$ şeklinde gösterilir. Burada, $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ şeklinde olmak üzere

$$Z = [z_{ij}]_{m \times n} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{H}), \quad z_{ij} =, \quad z_{ij} \in \mathbb{H} \quad x_{ij}, y_{ij} \in \mathbb{H}$$

biçiminde verilen Z matrisine, m satırlı n sütunlu bir hiperbolik matris veya kısaca $m \times n$ şeklinde hiperbolik matris denir (Çakır, 2024).

Tanım 3.1.14. $\langle X, Y \rangle$ hermityen skaler çarpım olmak üzere

i. Herhangi bir Z matrisinin hiperbolik üniter matris olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$X, Y \in \mathbb{H}^n \text{ için } \langle ZX, ZY \rangle = \langle X, Y \rangle$$

olmasıdır.

ii. Herhangi bir S matrisinin hiperbolik hermityen matris olabilmesi için gerek ve yeter koşul $X, Y \in \mathbb{H}^n$ için $\langle ZX, Y \rangle = -\langle X, SY \rangle$ olmasıdır.

- iii.* Herhangi bir Z matrisinin hiperbolik anti-hermityen matris olması için gerek ve yeter koşul $X, Y \in \mathbb{H}^n$ için $\langle ZX, Y \rangle = -\langle X, ZY \rangle$ olması durumudur (Çakır, 2024).

Teorem 3.1.15. Hiperbolik bir Z matrisinin eşlenik transpozu $\overline{Z}' = Z^*$ olmak üzere $\mathbb{P}^n$ uzayında standart iç çarpımın varlığı kabul edilirse

- i.* Z matrisinin üniter hiperbolik bir matris olması için $Z^* = Z^{-1}$ dır.
- ii.* Z matrisinin hermityen hiperbolik olması için $Z^* = Z$ dır.
- iii.* Z matrisinin hiperbolik skew(anti-hermityen)-hermityen matris olması için $Z^* = -Z$ dır (Çakır, 2024).

3.2. Hiperbolik Spinor Kinematığı

Bu bölümde çalışmanın orijinal kısmında kullanılacak olan matematiksel yöntem çerçevesi oluşturulmaktadır. Amaç, Lorentz dönüşümünün ve hiperbolik ve Dirac denkleminin spinor gösterimlerinin hangi cebirsel yapı içerisinde tanımlandığını açık biçimde ortaya koymak ve bu gösterimi daha sonra hiperbolik spinorlar cinsinden genişletmeye uygun bir temel hazırlamaktır. Bu doğrultuda öncelikle hiperbolik spinor kinematığı tanıtılacaktır. Bu kısımda yarı-Öklidyen metrik altında tanımlanan dönüşümlerin hiperbolik sayı sistemi ile ifade edilebilirliği incelenecek ve bu yapıların hiperbolik spinor bileşenleri ile olan ilişkisi ortaya konacaktır. Ardından karşılaştırma ve temel oluşturma amacıyla bileşenleri kompleks sayılar olan klasik spinor formalizmi içerisinde Lorentz dönüşümlerin spinor temsilleri özetlenecektir. Böylece standart yaklaşımı ile hiperbolik spinor temsili arasında açık bir bağlantı kurulacak ve sonraki bölümlerde geliştirecek özgün yapı için gerekli matematiksel zemin hazırlanmış olacaktır.

β yarı ortagonal bir matris olsun. Bu durumda β matrisinin $\beta \varepsilon \beta^T \varepsilon = I$ şartını sağladığı bilinmektedir. Öyleyse

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 & 2(\beta_0\beta_3 - \beta_1\beta_2) & -2(\beta_0\beta_2 + \beta_1\beta_3) \\ 2(\beta_0\beta_3 + \beta_1\beta_2) & \beta_0^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 + \beta_3^2 & -2(\beta_0\beta_1 + \beta_2\beta_3) \\ 2(-\beta_0\beta_2 + \beta_1\beta_3) & 2(\beta_0\beta_1 - \beta_2\beta_3) & \beta_0^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 - \beta_3^2 \end{bmatrix}$$

biçiminde verilen β matrisinin sütun vektörleri sırasıyla $\{\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}\}$ olarak tanımlansın. Burada verilen vektörler Lorentz yarı ortogonal matrisin üç sütun vektörü ardışık olarak $\beta(\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a})$ olsun. Bu vektörler, Lorentz dönme altında standart baz vektörleri aktif dönme altında $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ görüntülerine karşılık gelmektedir. Başka bir ifadeyle, bu vektörler

$$\mathbf{c} = B\mathbf{i} = \begin{bmatrix} \beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 \\ 2(\beta_0\beta_3 - \beta_1\beta_2) \\ -2(\beta_0\beta_2 + \beta_1\beta_3) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d} = \beta\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 2(\beta_0\beta_3 + \beta_1\beta_2) \\ \beta_0^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 + \beta_3^2 \\ -2(\beta_0\beta_1 + \beta_2\beta_3) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} = \beta\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 2(-\beta_0\beta_2 + \beta_1\beta_3) \\ 2(\beta_0\beta_1 - \beta_2\beta_3) \\ \beta_0^2 - \beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_3^2 \end{bmatrix} k$$

şeklinde yazılır (Tarakçıoğlu vd, 2018). Bu gösterimden açıkça görüldüğü üzere, β matrisi, birim ve yarı ortogonal bir sağ sistemden oluşmaktadır. Özellikle $\mathbf{a}$ vektörü birim vektör olup $\|\mathbf{a}\|=1$ dir. Şimdi β yapısının çatısında yer alan $\mathbf{a}$ vektörünü dikkate alalım. Yarı Öklid uzayında tanımlı vektörel çarpım kullanıldığında

$$\mathbf{a} = \mathbf{c} \wedge_L \mathbf{d}$$

ifadesi yazılabilir. Dolayısıyla $\mathbf{a}$ vektörünün bileşenleri hiperbolik spinorlara temel oluşturan iki hiperbolik sayı cinsinden

$$\begin{aligned} a_1 &= \mathbf{h}[(\beta_0 + \mathbf{h}\beta_3)(-\beta_1 - \mathbf{h}\beta_2) - (\beta_0 - \mathbf{h}\beta_3)(-\beta_1 + \mathbf{h}\beta_2)] \\ a_2 &= (\beta_0 + \mathbf{h}\beta_3)(-\beta_1 - \mathbf{h}\beta_2) + (\beta_0 - \mathbf{h}\beta_3)(-\beta_1 + \mathbf{h}\beta_2) \\ a_3 &= (\beta_0 + \mathbf{h}\beta_3)(\beta_0 - \mathbf{h}\beta_3) - (-\beta_1 + \mathbf{h}\beta_2)(-\beta_1 - \mathbf{h}\beta_2) \end{aligned} \quad (3.1)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade biçimi, yarı ortagonal dönüşümlerin bileşenlerinin doğal olarak hiperbolik sayı yapısı içerisinde ifade edilebildiğini göstermektedir. Ek olarak, bu hiperbolik sayılar

$$\gamma_1 = \beta_0 + h\beta_3, \quad \gamma_2 = -\beta_1 + h\beta_2$$

olarak göz önüne alınırsa

$$\bar{\gamma}_1 = \beta_0 + h\beta_3, \quad \bar{\gamma}_2 = -\beta_1 - h\beta_2$$

olduğu görülür. Böylece, $\mathbf{a}$ vektörü bu hiperbolik sayı çifti (γ_1, γ_2) cinsinden

$$\begin{aligned} a_1 &= h(\gamma_1 \bar{\gamma}_2 - \bar{\gamma}_1 \gamma_2) \\ a_2 &= \gamma_1 \bar{\gamma}_2 + \bar{\gamma}_1 \gamma_2 \\ a_3 &= \gamma_1 \bar{\gamma}_1 - \gamma_2 \bar{\gamma}_2 \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Ek olarak, $\mathbf{c}$ ve $\mathbf{d}$ vektörleri de bu hiperbolik sayı çifti cinsinden yazılacak olursa

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2}(\gamma_1^2 + \bar{\gamma}_1^2 + \gamma_2^2 + \bar{\gamma}_2^2) & d_1 &= \frac{j}{2}(\gamma_1^2 - \bar{\gamma}_1^2 + \gamma_2^2 - \bar{\gamma}_2^2) \\ c_2 &= \frac{j}{2}(\gamma_1^2 - \bar{\gamma}_1^2 - \gamma_2^2 + \bar{\gamma}_2^2) & d_2 &= \frac{1}{2}(\gamma_1^2 + \bar{\gamma}_1^2 - \gamma_2^2 - \bar{\gamma}_2^2) \\ c_3 &= j(\bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2 - \gamma_1 \gamma_2) & d_3 &= -(\gamma_1 \gamma_2 + \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2) \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bu sonuç, yarı ortagonal dönüşümlerinin bileşenleri hiperbolik sayı çiftleri aracılığıyla ifade edilebildiğini ortaya koymakta ve hiperbolik spinor kinematığının inşası için temel bir yapı sunmaktadır. Bu yapı ilerleyen kısımlarda Lorentz dönüşümlerinin hiperbolik spinor temsillerinin verilmesine olanak sağlayacaktır. Burada elde edilen γ_1 ve γ_2 hiperbolik sayı çifti için

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 + h\beta_3 \\ -\beta_1 + h\beta_2 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

şeklinde bir birim hiperbolik spinor tanımlanabilir. Gerçektende γ hiperbolik spinoru birim olup $\gamma^\dagger \gamma = I$ eşitliğini sağlar.

$\mathbf{a}$ vektörün bileşenleri matris çarpımı cinsinden ifade edilmek istenirse, hiperbolik Pauli matrisleri yardımıyla uygun bir gösterim elde edilebilir. Bu amaçla

$$\tau_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \tau_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{h} \\ \mathbf{h} & 0 \end{bmatrix}, \tau_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

matrisleri sayesinde,

$$\begin{aligned} a_1 &= \mathbf{h} \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_2 & -\bar{\gamma}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_1 & \bar{\gamma}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{h} \\ \mathbf{h} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \gamma^\dagger \tau_2 \gamma \\ a_2 &= \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_2 & \bar{\gamma}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_1 & \bar{\gamma}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \gamma^\dagger \tau_1 \gamma \\ a_3 &= \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_1 & -\bar{\gamma}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_1 & \bar{\gamma}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \gamma^\dagger \tau_3 \gamma \end{aligned} \quad (3.4)$$

denklemleri elde edilir (Tarakçıoğlu, 2018).

β yapısının bir dönüşümü, birim hiperbolik spinorun özelliklerini belirlemektedir. Gerçekten de β yapısının çatısını oluşturan uç noktaları orijin merkezli $\mathbb{R}_1^3$ uzayında yer alan Lorentz küresini $(S_1^2 = \{x : -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\})$ oluşturur. Burada $\mathbf{a}$ vektörünün bileşenleri ile hiperbolik spinorun bileşenleri arasında bir eşleme mevcuttur. Öyle ki her iki bileşeni hiperbolik olan spinorun $\zeta = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$ oranı ile gösterilen hiperbolik düzlemde birebir eşleme vardır. Söz konusu ilişki, $x_3 = 0$ ekvator düzlemi üzerinde S_1^2 nin güney kutbu $(0,0,-1)$ üzerinden alınan stereografik izdüşüm çerçevesinde açıkça gözlemlenebilir. Bu durumda

$$\zeta = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}, \gamma_2 = -\beta_1 + j\beta_2, \gamma_1 = \beta_0 + \mathbf{h}\beta_3$$

yazılabilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\zeta = \frac{a_2 - \mathbf{h}a_1}{a_3 + 1}$$

olduğu görülür. Ek olarak ζ eşleniği $\bar{\zeta} = \frac{a_2 + \mathbf{h}a_1}{a_3 + 1}$ dikkate alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa $\mathbf{a}_2$ vektörünün bileşenleri

$$a_1 = \mathbf{h} \left(\frac{\gamma_1 \bar{\gamma}_2 - \bar{\gamma}_1 \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_1 + \gamma_2 \gamma_2} \right),$$

$$a_2 = \mathbf{h} (\gamma_1 \bar{\gamma}_2 - \bar{\gamma}_1 \gamma_2), \quad (3.5)$$

$$a_3 = \frac{1 - \zeta \bar{\zeta}}{1 + \zeta \bar{\zeta}} = \frac{\gamma_1 \bar{\gamma}_1 - \gamma_2 \bar{\gamma}_2}{\gamma_1 \gamma_1 + \gamma_2 \gamma_2} = \gamma_1 \bar{\gamma}_1 - \gamma_2 \bar{\gamma}_2$$

olarak bulunur. (Tarakçıoğlu vd, 2018)

Yukarıdaki hesaplamalar sonucunda, Lorentz küresi S_1^2 üzerinde yer alan birim vektör (a_1, a_2, a_3) ile hiperbolik spinor bileşenleri arasında doğrudan bir bağıntı elde edilmiş olur. Bu temsil, split kuaterniyonlar ile hiperbolik spinorlara arasındaki yapısal ilişkinin açık bir ifadesini sunmaktadır.

Şimdi split kuaterniyon ve hiperbolik spinor arasındaki var olan ilişkiyi açık biçimde tanımlamak amacıyla

$$f : \mathbb{H}_S \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{H}}$$

$$\rho \rightarrow \varphi$$

(3.6)

$$f(\rho_0 + \rho_1 \mathbf{i} + \rho_2 \mathbf{j} + \rho_3 \mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \rho_0 + \mathbf{h}\rho_3 \\ -\rho_1 + \mathbf{h}\rho_2 \end{bmatrix} \equiv \varphi$$

lineer dönüşümü ele alınsın (Tarakçıoğlu vd, 2018). Bu tanım yardımıyla split kuaterniyon formülasyonu genişletilerek, Lorentz hareketlerin kinematiğine ilişkin bir hiperbolik spinor temsili elde edilmektedir. Tanımlanan f dönüşümünün lineer olduğu doğrudan görülmektedir.

Öte yandan, bir split kuaterniyonun normu ile karşılık gelen hiperbolik spinorun normu arasında doğrudan bir eşitlik bulunmaktadır. O halde

$$\varphi^\dagger \varphi = \begin{pmatrix} \rho_0 - \mathbf{h}\rho_3 & -\rho_1 - \mathbf{h}\rho_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_0 + \mathbf{h}\rho_3 \\ -\rho_1 + \mathbf{h}\rho_2 \end{pmatrix} = \rho_0^2 - \rho_3^2 + \rho_1^2 - \rho_2^2 = \bar{\varphi}_1 \varphi_1 + \bar{\varphi}_2 \varphi_2$$

eşitliği kolayca görülebilir. Birim q split kuaterniyonunun eşleniğine karşılık gelen hiperbolik spinor

$$f(\rho_0 - \rho_1 \mathbf{i} - \rho_2 \mathbf{j} - \rho_3 \mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \rho_0 - \mathbf{h}\rho_3 \\ \rho_1 - \mathbf{h}\rho_2 \end{bmatrix} \equiv \varphi^{-1} \quad (3.7)$$

şeklinde ifade edilebilir (Tarakçıoğlu vd, 2018). Son olarak bu aşamada split kuaterniyon çarpımı ile hiperbolik spinor-matris çarpımı arasındaki ilişkiyi kurmak mümkündür. Özellikle, $\rho \times \kappa$ biçimindeki iki split kuaterniyon çarpımı, uygun bir matris temsili aracılığıyla hiperbolik spinorların dönüşümüyle ilişkilendirilebilir.

O halde, split kuaterniyon çarpımı hiperbolik spinor temsili ile

$$\hat{\varphi}(\rho) \mathbf{K} \rightarrow \hat{\varphi} \mathbf{K} \quad (3.8)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\hat{\varphi}$, $\hat{\varphi} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$ olmak üzere negatif determinanta sahip hiperbolik bileşenli kare matristir (Tarakçıoğlu, 2018).

3.2 Lorentz Dönüşümünün Spinor Temelleri

Bu bölümde, ilerleyen kısımlarda geliştirilecek olan hiperbolik spinor temelli Lorentz dönüşümleri için hazırlamak amacıyla, öncelikle bileşenleri kompleks olan spinorlar üzerindeki Lorentz dönüşümünün standart formülasyonu ele alınmaktadır. Bu yaklaşım, hiperbolik spinor

kinematiğinin daha sonra kurulabilmesi açısından karşılaştırılmalı ve yapıcı bir temel sunmaktadır.

Pauli matrislerinin

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

olduğu bilinmektedir. Şimdi Weyl gösterimiminde bir 4-spinor ψ_w olmak üzere ψ_w 4-spinoru için Lorentz dönüşümü

$$\psi_w \rightarrow \begin{bmatrix} e^{\frac{i}{2}\alpha \cdot P + \frac{1}{2}\beta \cdot P} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}\alpha \cdot P - \frac{1}{2}\beta \cdot P} \end{bmatrix} \psi_w \quad (3.10)$$

şeklinde verilir (Antonuccio, 2015).

Burada $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ koordinat eksenlerine göre Lorentz dönmeyi ve $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ ise aynı eksenler boyunca tanımlanan Lorentz boosta karşılık gelmektedir. Bu parametreler, Minkowski-Lorentz uzayında tanımlı Lorentz grubunun altı boyutlu Lie cebirinin doğal koordinatlarını oluşturmaktadır. Böylece (3.14) dönüşümü için uygun J_i ve K_i üreteçleri tanımlanarak

$$\psi_w \rightarrow \exp\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i J_i + \sum_{i=1}^3 \beta_i K_i\right) \psi_w \quad (3.11)$$

şeklinde yazılabilir. Burada J_i , K_i ve matrisleri 4×4 tipinde kompleks matrisler olup

$$J_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{i}P_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{i}P_1 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{i}P_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{i}P_2 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{i}P_3 & 0 \\ 0 & \mathbf{i}P_3 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$K_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} P_2 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}, \quad K_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} P_3 & 0 \\ 0 & P_3 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

şeklinde tanımlıdır (Antonuccio, 2015).

2×2 split-kuaterniyonik matrisler J_i ve K_i tarafından üretilen cebirin Lorentz grubunun Lie cebiri ile izomorfik olması, dört bileşenli Dirac spinorlarının iki bileşenli split kuaterniyonik spinorlar ile eşdeğer biçimde temsil edilebileceğini düşündürmektedir. Bu durumu açık bir şekilde kurabilmek için, Lorentz dönüşümünün Dirac-4 spinorunun her bir reel bileşeni için ayrıntılı olarak incelenmesi gerekmektedir. Bu amaçla, Lorentz dönüşümünde ortaya çıkan dönme ve boost parametreleri α_i ve β_i ler son derece küçük kabul edilir. Böylece, Lorentz dönüşümü birinci mertebeye kadar açılarak lineerleştirilmiş biçimde

$$\psi_w \rightarrow \left(1 + \sum_{i=1}^3 \alpha_i J_i + \sum_{i=1}^3 \beta_i K_i \right) \psi_w \quad (3.14)$$

şeklinde yazılır. Bu durum ile birlikte, Weyl gösterimindeki bir 4-spinor ψ_w ,

$$\psi_w = \begin{bmatrix} x_1 + \mathbf{i}y_1 \\ x_2 + \mathbf{i}y_2 \\ x_3 + \mathbf{i}y_3 \\ x_4 + \mathbf{i}y_4 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

şeklinde yazılır. Burada x_i, y_i , ψ_w 4-spinorunun 8 reel bileşenidir. Bu durumda (3.14) denekleminde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow x_1 + \frac{1}{2}(-\alpha_1 y_2 + \alpha_2 x_2 - \alpha_3 y_1 + \beta_1 x_2 + \beta_2 y_2 + \beta_3 x_1) \\ x_2 &\rightarrow x_2 + \frac{1}{2}(-\alpha_1 y_1 - \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_2 + \beta_1 x_1 - \beta_2 y_1 - \beta_3 x_2) \\ x_3 &\rightarrow x_3 + \frac{1}{2}(-\alpha_1 y_4 + \alpha_2 x_4 - \alpha_3 y_3 - \beta_1 x_4 - \beta_2 y_4 - \beta_3 x_3) \\ x_4 &\rightarrow x_4 + \frac{1}{2}(-\alpha_1 y_3 - \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_4 - \beta_1 x_3 + \beta_2 y_3 + \beta_3 x_4) \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}
y_1 &\rightarrow y_1 + \frac{1}{2}(\alpha_1 x_2 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 x_1 + \beta_1 y_2 - \beta_2 x_2 + \beta_3 y_1) \\
y_2 &\rightarrow y_2 + \frac{1}{2}(\alpha_1 x_1 - \alpha_2 y_1 - \alpha_3 x_2 + \beta_1 y_1 + \beta_2 x_1 - \beta_3 y_2) \\
y_3 &\rightarrow y_3 + \frac{1}{2}(\alpha_1 x_4 + \alpha_2 y_4 + \alpha_3 x_3 - \beta_1 y_4 + \beta_2 x_4 - \beta_3 y_3) \\
y_4 &\rightarrow y_4 + \frac{1}{2}(\alpha_1 x_3 - \alpha_2 y_3 - \alpha_3 x_4 - \beta_1 y_3 - \beta_2 x_3 + \beta_3 y_4)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

denklemleri elde edilir. (3.16) ve (3.17) bağıntıları Weyl gösteriminde tanımlanan bir 4-spinorun sonsuz küçük Lorentz dönüşümünü ifade etmektedir. Ancak buradaki amaç, bu dönüşümü Dirac gösteriminde ifade edilen 4-spinor ile split kuaterniyonik 2-spinor arasındaki eşdeğerlik bağlamında incelemektir. Bu nedenle, Weyl ve Dirac temsilleri arasındaki ilişki açık bir

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix} \psi_w \tag{3.18}$$

dönüşümü ile tanımlanabilir. Burada I , 2×2 birim matrise karşılık gelir. Bu dönüşüm, iki gösterimdeki spinor bileşenlerinin reel ve sanal kısımları arasında eşleşme kurulmasına imkan sağlar. Weyl ve Dirac gösteriminde 4-spinor, sırasıyla

$$\psi_w = \begin{bmatrix} x_1 + \mathbf{i}y_1 \\ x_2 + \mathbf{i}y_2 \\ x_3 + \mathbf{i}y_3 \\ x_4 + \mathbf{i}y_4 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \psi = \begin{bmatrix} u_1 + \mathbf{i}v_1 \\ u_2 + \mathbf{i}v_2 \\ u_3 + \mathbf{i}v_3 \\ u_4 + \mathbf{i}v_4 \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

ile gösterilsin. Bu durumda (3.18) denklemi yardımıyla u_i, v_i ve x_i, y_i ($i=1,2,3,4$) bileşenleri arasında

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_3) & v_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + y_3) \\
u_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 + x_4) & v_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(y_2 + y_4) \\
u_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_3) & v_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 - y_3) \\
u_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 - x_4) & v_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(y_2 - y_4)
\end{aligned} \tag{3.20}$$

ilişkileri mevcuttur. Şimdi (3.16) ve (3.17) denklemleri ile verilen sonsuz küçük Lorentz dönüşüm ilişkileri (3.20) denklemleri ile tanımlanan bileşen dönüşümü ile birleştirilsin. Böylece Dirac gösteriminde bir 4-spinor olan ψ nin sekiz reel bileşeninin, Lorentz dönüşümü altında nasıl değiştiği elde edilir. Böylece, sonsuz küçük Lorentz dönüşümü altında u_i ve v_i ($i = 1, 2, 3, 4$) bileşenlerinin dönüşümleri

$$\begin{aligned}
u_1 &\rightarrow u_1 + \frac{1}{2}(-\alpha_1 v_2 + \alpha_2 u_2 - \alpha_3 v_1 + \beta_1 u_4 + \beta_2 v_4 + \beta_3 u_3) \\
u_2 &\rightarrow u_2 + \frac{1}{2}(-\alpha_1 v_1 - \alpha_2 u_1 + \alpha_3 v_2 + \beta_1 u_3 - \beta_2 v_3 - \beta_3 u_4) \\
u_3 &\rightarrow u_3 + \frac{1}{2}(-\alpha_1 v_4 + \alpha_2 u_4 - \alpha_3 v_3 + \beta_1 u_2 + \beta_2 v_2 + \beta_3 u_1) \\
u_4 &\rightarrow u_4 + \frac{1}{2}(-\alpha_1 v_3 - \alpha_2 u_3 + \alpha_3 v_4 + \beta_1 u_1 - \beta_2 v_1 - \beta_3 u_2)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
v_1 &\rightarrow v_1 + \frac{1}{2}(\alpha_1 u_2 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 u_1 + \beta_1 v_4 - \beta_2 u_4 + \beta_3 v_3) \\
v_2 &\rightarrow v_2 + \frac{1}{2}(\alpha_1 u_1 - \alpha_2 v_1 - \alpha_3 u_2 + \beta_1 v_3 + \beta_2 u_3 - \beta_3 v_4) \\
v_3 &\rightarrow v_3 + \frac{1}{2}(\alpha_1 u_4 + \alpha_2 v_4 + \alpha_3 u_3 - \beta_1 v_2 - \beta_2 u_2 + \beta_3 v_1) \\
v_4 &\rightarrow v_4 + \frac{1}{2}(\alpha_1 u_3 - \alpha_2 v_3 - \alpha_3 u_4 + \beta_1 v_1 + \beta_2 u_1 - \beta_3 v_2)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

şeklinde verilir (Antonuccio, 2015). Elde edilen bu ifadeler Dirac gösterimindeki 4-spinorun sekiz reel bileşeninin Lorentz grubunun Lie cebiri tarafından üretildiğini gösterir. Bu sonuç, split-kuaterniyonik 2-spinor ile Dirac 4-spinorlar arasındaki ilişkiyi kurarken önemli bir rol oynar. Böylece split kuaterniyonlar üzerinde tanımlanan 2-spinoru

$$\Psi = \begin{bmatrix} a_1 + ia_2 + ja_3 + ka_4 \\ b_1 + ib_2 + jb_3 + kb_4 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

şeklinde tanımlanır. Burada α_i, β_i , Ψ nin 8 reel bileşenidir. Önceki bölümlerde Lorentz Lie cebirini sağlayan (3.12) ve (3.13) J_i, K_i 2×2 split-kuaterniyonik olarak elde edildiği gösterilmişti. Bu nedenle, bir Lorentz dönüşümü altında (3.23) denkleminde tanımlanan split kuaterniyonik 2-spinorun dönüşümü

$$\Psi \rightarrow \exp \left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i J_i + \sum_{i=1}^3 \beta_i K_i \right) \Psi \quad (3.24)$$

şeklinde tanımlanır. Burada α_i, β_i sırasıyla Lorentziyen dönme açıları ve Lorentz boost parametreleridir. Eğer bu reel parametrelerin sonsuz küçük oldukları kabul edilirse, üstel ifade birinci mertebeye kadar açılarak

$$\Psi \rightarrow \left(1 + \sum_{i=1}^3 \alpha_i J_i + \sum_{i=1}^3 \beta_i K_i \right) \Psi \quad (3.25)$$

şeklinde elde edilir (Antonuccio, 2015). Bu durumda (3.25) denklemini kullanılarak yapılan hesaplamalar sonucunda bileşen dönüşümleri

$$\begin{aligned} a_1 &\rightarrow a_1 + \frac{1}{2}(\alpha_1 b_1 - \alpha_2 b_2 + \alpha_3 a_2 - \beta_1 a_4 + \beta_2 a_3 + \beta_3 b_3) \\ a_2 &\rightarrow a_2 + \frac{1}{2}(\alpha_1 b_2 + \alpha_2 b_1 - \alpha_3 a_1 - \beta_1 a_3 - \beta_2 a_4 - \beta_3 b_4) \\ a_3 &\rightarrow a_3 + \frac{1}{2}(\alpha_1 b_3 - \alpha_2 b_4 + \alpha_3 a_4 - \beta_1 a_2 + \beta_2 a_1 + \beta_3 b_1) \\ a_4 &\rightarrow a_4 + \frac{1}{2}(\alpha_1 b_4 + \alpha_2 b_3 - \alpha_3 a_3 - \beta_1 a_1 - \beta_2 a_2 + \beta_3 b_3) \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned}
b_1 &\rightarrow b_1 + \frac{1}{2}(-\alpha_1 a_1 - \alpha_2 a_2 - \alpha_3 b_2 - \beta_1 b_4 - \beta_2 b_3 + \beta_3 a_3) \\
b_2 &\rightarrow b_2 + \frac{1}{2}(-\alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_1 + \alpha_3 b_1 - \beta_1 b_3 + \beta_2 b_4 - \beta_3 a_4) \\
b_3 &\rightarrow b_3 + \frac{1}{2}(-\alpha_1 a_3 - \alpha_2 a_4 - \alpha_3 b_4 - \beta_1 b_2 - \beta_2 b_1 + \beta_3 a_1) \\
b_4 &\rightarrow b_4 + \frac{1}{2}(-\alpha_1 a_4 + \alpha_2 a_3 + \alpha_3 b_3 - \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 - \beta_3 a_2)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

şeklinde elde edilir.

Burada Dirac 4-spinorunun sekiz reel bileşene sahip olduğunu ve bu bileşenlerin sonsuz küçük Lorentz dönüşümü altında (3.21) ve (3.22) denklemleri ile verilen bağıntılara dönüştüğü biliniyor. Benzer şekilde, split kuaterniyonik bir 2-spinorda sekiz reel bileşene sahiptir ve (3.29) ve (3.30) denklemlerinde dönüşüm ilişkilerini sağlar. Dolayısıyla, her iki yapıda aynı Lie cebirine karşılık geldiğinden uygun bir bileşen eşleşmesi altında gösterilir. Dirac 4-spinoru

$$\psi = \begin{bmatrix} u_1 + \mathbf{i}v_1 \\ u_2 + \mathbf{i}v_2 \\ u_3 + \mathbf{i}v_3 \\ u_4 + \mathbf{i}v_4 \end{bmatrix} \text{ ve split kuaterniyonik 2-spinor } \Psi = \begin{bmatrix} a_1 + \mathbf{i}a_2 + \mathbf{j}a_3 + \mathbf{k}a_4 \\ b_1 + \mathbf{i}b_2 + \mathbf{j}b_3 + \mathbf{k}b_4 \end{bmatrix} \text{ olmak üzere bu iki}$$

gösterim arasında

$$\begin{aligned}
u_1 &\rightarrow +a_1 & v_1 &\rightarrow -a_2 \\
u_2 &\rightarrow -b_2 & v_2 &\rightarrow -b_1 \\
u_3 &\rightarrow +u_3 & v_3 &\rightarrow +b_4 \\
u_4 &\rightarrow -a_4 & v_4 &\rightarrow +a_3
\end{aligned} \tag{3.28}$$

şeklindeki bileşen eşleşmesi yapılabilir (Antonuccio, 2015).

Bu durumda spinor gösterimindeki ilişki

$$\Psi = \begin{bmatrix} a_1 + \mathbf{i}a_2 + \mathbf{j}a_3 + \mathbf{k}a_4 \\ b_1 + \mathbf{i}b_2 + \mathbf{j}b_3 + \mathbf{k}b_4 \end{bmatrix} \leftrightarrow \psi = \begin{bmatrix} a_1 - \mathbf{i}a_2 \\ -b_2 - \mathbf{i}b_1 \\ b_3 + \mathbf{i}b_4 \\ -a_4 + \mathbf{i}a_3 \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşleşme tek değildir, fakat burada sadece bu seçim kullanılmaktadır.

Dirac gösterimindeki γ^0 Dirac matrisi

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

şeklinde olduğundan

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\psi &= \psi^\dagger \gamma^0 \psi \\ &= (a)_1^2 + (a)_2^2 - (a)_3^2 - (a)_4^2 + (b)_1^2 + (b)_2^2 - (b)_3^2 - (b)_4^2 \\ &= \Psi^\dagger \cdot \Psi \end{aligned} \quad (3.31)$$

eşitliği yazılabilir. Bu sonuç, Dirac gösteriminde Lorentz değişmezi olarak yazılan $\bar{\psi}\psi$ ifadesi, split kuaterniyonik formülasyonda doğrudan $\Psi^\dagger \Psi$ şeklinde elde edilmektedir. Dolayısıyla, split kuaterniyonik yaklaşımda Lorentz değişmez bir ifade tanımlamak için ayrıca bir γ^0 matrisine ihtiyaç yoktur. Çünkü dönüşüm yapısı zaten iç çarpımı koruyacak şekilde kurulmuştur. Sonuç olarak $\bar{\psi}\psi$, Lorentz dönüşümleri altında değişmezdir ve split kuaterniyonik formülasyon bu değişmezliği doğal olarak üretmektedir (Antonuccio, 2015).

4. BULGULAR

Bu bölümde, split kuaterniyonlar ile hiperbolik spinorlar arasındaki ilişkinin kurulmasıyla elde edilen teoremler ve sonuçlar verilmektedir. İlk olarak split kuaterniyonlar, hiperbolik spinorlar cinsinden ifade edilerek bu iki yapı arasında doğrudan bir karşılık elde edilmektedir. Bu karşılık yardımıyla split kuaterniyonların hiperbolik spinor gösterimleri incelenmektedir. Ayrıca pür split kuaterniyonlara karşılık gelen hiperbolik spinor yapıları belirlenerek bunların temel özellikleri ortaya konulmaktadır. Daha sonra bu gösterimlerden hareketle split kuaterniyonlara karşılık gelen sol ve sağ hiperbolik spinor matrisleri elde edilmektedir. Özellikle pür split kuaterniyonlara karşılık gelen hiperbolik spinor matrisleri tanımlanarak daha sonraki sonuçların temelini oluşturacak matris gösterimleri kurulmaktadır. Ardından, temel hiperbolik spinor matrisi olarak adlandırılan sol hiperbolik spinor matrisi ayrıntılı biçimde ele alınmaktadır. Bu matrisin özdeğerleri incelenip pür hiperbolik spinor matrisi ile arasındaki ilişkiler ortaya konulmaktadır. Ek olarak elde edilen özdeğerlerin hiperbolik spinorun karakterine bağlı olarak nasıl değiştiği araştırılmaktadır. Bu amaçla spacelike, timelike ve null hiperbolik spinor durumları ayrı ayrı değerlendirilerek ilgili özel durumlar açıklanmaktadır.

Bölümün son kısmında ise elde edilen hiperbolik spinor yapıları Lorentz dönüşümlerine uygulanmaktadır. Öncelikle Lorentz dönüşümlerinin hiperbolik 4-spinorlar cinsinden gösterimleri geliştirilip bu dönüşümlerin Weyl ve Dirac gösterimlerindeki hiperbolik spinor temsilleri elde edilmektedir. Bu süreçte Lorentz dönüşüm matrislerinin yapısı, üreteç matrisleri ve bunların çeşitli cebirsel özellikleri incelenmektedir. Son olarak split kuaterniyonlara karşılık gelen hiperbolik 4-spinorlar kullanılarak Lorentz dönüşümleri doğrudan ifade edildikten sonra Lorentz dönüşümlerinin tek bir matris aracılığıyla temsil edilebildiği gösterilmektedir. Elde edilen sonuçlar, split kuaterniyon cebiri ile hiperbolik spinor kuramı arasındaki ilişkinin Lorentz dönüşümleri bağlamında doğal ve etkin bir biçimde kurulabildiğini ortaya koymaktadır.

4.1 Split Kuaterniyonların Hiperbolik Spinor Gösterimleri

$\rho = \rho_0 + \rho_1 \mathbf{i} + \rho_2 \mathbf{j} + \rho_3 \mathbf{k} \in \mathbb{H}_S$ biçimindeki bir split kuaterniyon $\{\mathbf{I}, -\mathbf{i}\}$ bazı yardımıyla

$$\rho = \mathbf{I}(\rho_0 + h\rho_3) + (-\mathbf{i})(-\rho_1 + h\rho_2)$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir. Bu düzenleme sırasında hiperbolik sayı yapısı ile uyumlu bir gösterim elde edebilmek amacıyla $\mathbf{h}^2 = 1$ şartını sağlayan $\mathbf{h}$ hiperbolik birim kullanılır. Bu gösterimde kullanılan çarpım ilişkileri split kuaterniyon cebiri ile uyumlu olacak şekilde ele alınmaktadır. Özellikle hiperbolik birim $\mathbf{h}$ için $\mathbf{i} \times \mathbf{h} = -\mathbf{i} \times \mathbf{h}$ eşitliği sağlanmaktadır. Böylece $(\mathbf{i} \times \mathbf{h})^2 = \mathbf{i} \times \mathbf{h} \times \mathbf{i} \times \mathbf{h} = \mathbf{i} \times (-\mathbf{i} \times \mathbf{h}) \times \mathbf{h} = 1$ olur. Bu sayede hiperbolik sayı yapısı ile split kuaterniyon cebiri arasında uyumlu bir hiperbolik spinor gösterimi elde edilmektedir. Böylece bir ρ split kuaterniyonu $\Omega_1 = \rho_0 + \mathbf{h}\rho_3$, $\Omega_2 = -\rho_1 + \mathbf{h}\rho_2 \in \mathbb{H}$ şeklindeki hiperbolik sayı cinsinden $\rho = \mathbf{I}\Omega_1 - \mathbf{i}\Omega_2$ olarak ifade edilebilir. O halde split kuaterniyonlar kümesi

$$\mathbb{H}_S = \left\{ \rho = \mathbf{I}\Omega_1 - \mathbf{i}\Omega_2 \mid \Omega_1 = \rho_0 + \mathbf{h}\rho_3, \Omega_2 = -\rho_1 + \mathbf{h}\rho_2 \in \mathbb{H} \right\} \quad (4.1)$$

olarak yazılabilir. Burada kullanılan hiperbolik birim, split kuaterniyon cebirindeki birimlerden farklıdır. Bu sebeple bu yaklaşım sayesinde split kuaterniyon yapısı ile hiperbolik spinor yapısı arasında doğal bir ilişki kurulabilmektedir. Böylece (4.1) dönüşümü sayesinde

$$\begin{aligned} \xi : \mathbb{H}_S &\rightarrow \mathcal{S}_{\mathbb{H}} \\ \rho &\rightarrow \xi(\rho) \cong \Omega = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_0 + \mathbf{h}\rho_3 \\ -\rho_1 + \mathbf{h}\rho_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.2)$$

ilişkisi kurulabilir. Burada $\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{S}_{\mathbb{H}}$ hiperbolik spinor olup $\mathbf{h}^2 = 1$ dir. Burada kullanılan hiperbolik spinor gösteriminin seçiminin açıklanması önemlidir. Split kuaterniyonların farklı yaklaşımları veya farklı temsil biçimleri mevcuttur. Fakat burada kullanılan seçim rastgele olmaktan ziyade belirli bir matematiksel yaklaşım doğrultusunda tercih edilmiştir. Özellikle Tarakçıoğlu vd. (2018) çalışmasında, split kuaterniyonlar ile hiperbolik spinorlar arasındaki ilişki Minkowski uzayında split kuaterniyonların yardımıyla dönmelere karşılık gelen hiperbolik spinorlar yaklaşımı ele alınmıştır. Bu çalışmada kullanılan hiperbolik spinor gösterimide Tarakçıoğlu vd. (2018) çalışmasındaki yapı ile örtüşecek biçimde seçilmiştir.

$\rho = \rho_0 + \rho_1 \mathbf{i} + \rho_2 \mathbf{j} + \rho_3 \mathbf{k} \in \mathbb{H}_{\mathcal{S}}$ split kuaterniyonu $\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_0 + \mathbf{h}\rho_3 \\ -\rho_1 + \mathbf{h}\rho_2 \end{bmatrix}$ hiperbolik spinoru

eşleşsin. Bu durumda q split kuaterniyonun eşleniğine karşılık gelen hiperbolik spinor

$$\Omega^* = \begin{bmatrix} \rho_0 - \mathbf{h}\rho_3 \\ -\rho_1 - \mathbf{h}\rho_2 \end{bmatrix} \text{ şeklinde elde edilir.}$$

Ek olarak pür hiperbolik spinorlar için aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 4.1.1. $\rho = \rho_0 + \rho_1 \mathbf{i} + \rho_2 \mathbf{j} + \rho_3 \mathbf{k} = \rho_0 + \mathbf{p} \in \mathbb{H}_{\mathcal{S}}$ split kuaterniyonuna karşılık gelen

hiperbolik spinor $\Omega = \begin{bmatrix} \rho_0 + \mathbf{h}\rho_3 \\ -\rho_1 + \mathbf{h}\rho_2 \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda $\mathbf{p}$ pür split kuaterniyonuna karşılık gelen

hiperbolik spinor (4.2) dönüşümü yardımıyla

$$\Omega = \begin{bmatrix} \mathbf{h}\rho_3 \\ -\rho_1 + \mathbf{h}\rho_2 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

şeklindedir. Ω hiperbolik spinoru, “**pür hiperbolik spinor**” olarak tanımlanır.

Şimdi daha önce (2.18) denkleminde verilen I_{ρ} denkleminin hiperbolik spinor karşılığı ifade edilsin

Bu ifade daha sonra hiperbolik spinorları karakterize eden hiperbolik spinor denkleminin elde edilmesini sağlayacaktır.

Teorem 4.1.2. $\rho = \rho_0 + \rho_1 \mathbf{i} + \rho_2 \mathbf{j} + \rho_3 \mathbf{k}$ split kuaterniyonuna karşılık gelen hiperbolik spinor

$\Omega = \begin{bmatrix} \rho_0 + \mathbf{h}\rho_3 \\ -\rho_1 + \mathbf{h}\rho_2 \end{bmatrix}$ olsun. Bu nedenle, (2.18) denklemindeki I_{ρ} ‘nun hiperbolik spinor denklemi

$$\Omega^{\dagger} \Omega = I_{\rho} \quad (4.4)$$

şeklindedir. Burada “ $\dagger$ ” hiperbolik eşlenik transpozudur.

İspat: $\rho = \rho_0 + \rho_1 \mathbf{i} + \rho_2 \mathbf{j} + \rho_3 \mathbf{k}$ split kuaterniyonuna karşılık gelen hiperbolik spinor

$\Omega = \begin{bmatrix} \rho_0 + \mathbf{h}\rho_3 \\ -\rho_1 + \mathbf{h}\rho_2 \end{bmatrix}$ olsun. Dolayısıyla,

$$\Omega^\dagger \Omega = \begin{bmatrix} \rho_0 - \mathbf{h}\rho_3 & -\rho_1 - \mathbf{h}\rho_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_0 + \mathbf{h}\rho_3 \\ -\rho_1 + \mathbf{h}\rho_2 \end{bmatrix} = \rho_0^2 + \rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_3^2$$

eşitliği kolayca elde edilir. Diğer taraftan (2.18) denkleminde $I_\rho = \rho_0^2 + \rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_3^2$ olduğu biliniyor. Böylece $\Omega^\dagger \Omega = I_\rho$ olduğu kolayca görülür.

Dolayısıyla teorem 4.1.2' den aşağıdaki sonuç kolayca verilebilir. ■

Sonuç 4.1.3. $\rho \in \mathbb{H}_S$ split kuaterniyonuna karşılık gelen hiperbolik spinor Ω olsun. Bu durumda ρ hiperbolik spinorunu normu olan $N(\rho)$ 'nun hiperbolik spinor denklemi

$$N(\rho) \cong N(\Omega) = \sqrt{|\Omega^\dagger \Omega|} \quad (4.5)$$

şeklindedir.

Tanım 4.1.4. Ω hiperbolik spinoru $\rho \in \mathbb{H}_S$ split kuaterniyonuna karşılık gelen hiperbolik spinor olsun. Eğer $N(\Omega) = 1$ ise, Ω hiperbolik spinoruna “**birim hiperbolik spinor**” denir. Bu hiperbolik spinor, birim split kuaterniyonuna karşılık gelen hiperbolik spinordur.

Şimdi, hiperbolik spinorların sınıflandırılması için aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.1.5. $\rho \in \mathbb{H}_S$ split kuaterniyonuna karşılık gelen hiperbolik spinor $\Omega = \begin{bmatrix} \rho_0 + \mathbf{h}\rho_3 \\ -\rho_1 + \mathbf{h}\rho_2 \end{bmatrix}$

olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i. $\rho \in \mathbb{H}_S$ split kuaterniyonu spacelike kuaterniyon olsun. O halde, Ω hiperbolik spinoru için $\Omega^\dagger \Omega < 0$ ifadesi vardır.

- ii. $\rho \in \mathbb{H}_S$ split kuaterniyonu timelike kuaterniyon olsun. Bu durumda Ω hiperbolik spinoru için $\Omega^\dagger \Omega > 0$ yazılabilir.
- iii. $\rho \in \mathbb{H}_S$ null kuaterniyon olsun. Bu takdirde Ω için $\Omega^\dagger \Omega = 0$ eşitliği söz konusudur. ■

İspat. $\rho = \rho_0 + \rho \in \mathbb{H}_S$ split kuaterniyonuna karşılık gelen hiperbolik spinor $\Omega = \begin{bmatrix} \rho_0 + h\rho_3 \\ -\rho_1 + h\rho_2 \end{bmatrix}$ olsun. Ayrıca (4.4) denkleminin hiperbolik spinor denklemi $\Omega^\dagger \Omega = I_\rho$ olduğu biliniyor. Burada aşağıdaki durumlar vardır;

- i. $\rho \in \mathbb{H}_S$ split kuaterniyonu spacelike kuaterniyon olsun. O halde $I_\rho < 0$ olduğu biliniyor. Bu durumda (4.5) denkleminde $I_\rho = \Omega^\dagger \Omega < 0$ olduğu kolayca görülür.
- ii. $\rho \in \mathbb{H}_S$ timelike kuaterniyon olsun. Böylece $I_\rho > 0$ olduğundan $\Omega^\dagger \Omega > 0$ elde edilir.
- iii. $\rho \in \mathbb{H}_S$ split kuaterniyonu null kuaterniyon olsun. Öyleyse $I_\rho = 0$ olmak üzere (4.4) denkleminde $\Omega^\dagger \Omega = 0$ olduğu bulunur.

Şimdi teorem 4.1.2 ve Sonuç 4.1.5 yardımıyla hiperbolik spinorları sınıflandırmak için aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 4.1.6. $\rho \in \mathbb{H}_S$ split kuaterniyonuna karşılık gelen hiperbolik spinor $\Omega = \begin{bmatrix} \rho_0 + h\rho_3 \\ -\rho_1 + h\rho_2 \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki tanımlar yapılabilir;

- i. Ω hiperbolik spinoru için $\Omega^\dagger \Omega < 0$ sağlanıyorsa Ω hiperbolik spinoruna “**spacelike spinor**” denir.
- ii. Ω hiperbolik spinoru için $\Omega^\dagger \Omega > 0$ sağlanıyorsa Ω hiperbolik spinoruna “**timelike spinor**” denir.
- iii. Ω hiperbolik spinoru için $\Omega^\dagger \Omega = 0$ sağlanıyorsa Ω hiperbolik spinoruna “**null spinor**” denir.

Tanım 4.1.6, pür hiperbolik spinorlar için de bir sınıflandırma yapılmasına olanak tanır. Ancak bu sınıflandırmaya geçmeden önce aşağıdaki teoremi vermekte fayda vardır.

Teorem 4.1.7. $\rho = \rho_0 + \mathbf{\rho} \in \mathbb{H}_S$ split kuaterniyonuna karşılık gelen hiperbolik spinor

$\Omega = \begin{bmatrix} \rho_0 + h\rho_3 \\ -\rho_1 + h\rho_2 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{\rho}$ pür split kuaterniyonuna karşılık gelen pür hiperbolik spinor

$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} h\rho_3 \\ -\rho_1 + h\rho_2 \end{bmatrix}$ olsun. Dolayısıyla Ω ve $\mathbf{\Omega}$ hiperbolik spinorları arasında

$$\Omega^\dagger \Omega = \rho_0^2 + \mathbf{\Omega}^\dagger \mathbf{\Omega} \quad (4.6)$$

ilşkisi vardır. Burada “ $\dagger$ ” hiperbolik eşlenik transpozdur.

İspat. Denklem (4.5)' te $\rho = \rho_0 + \mathbf{\rho} \in \mathbb{H}_S$ split kuaterniyonuna karşılık gelen hiperbolik spinorun Ω ve denklem (4.6)' de pür split kuaterniyonuna karşılık gelen pür hiperbolik spinorun $\mathbf{\Omega}$ olduğu göz önüne alınsın. Böylece $\mathbf{\Omega}$ pür hiperbolik spinoru için

$$\mathbf{\Omega}^\dagger \mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} -h\rho_3 & -\rho_1 - h\rho_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h\rho_3 \\ -\rho_1 + h\rho_2 \end{bmatrix} = \rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_3^2$$

eşitliği yazılabilir. Diğer taraftan (4.4) denkleminden $\Omega^\dagger \Omega = \rho_0^2 + \rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_3^2$ olduğu bilinmektedir. Böylece $\Omega^\dagger \Omega = \rho_0^2 + \mathbf{\Omega}^\dagger \mathbf{\Omega}$ olduğu kolayca görülebilir. ■

Şimdi pür hiperbolik spinorlar için aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 4.1.8. $\rho = \rho_0 + \mathbf{\rho} \in \mathbb{H}_S$ split kuaterniyonuna karşılık gelen hiperbolik spinor

$\Omega = \begin{bmatrix} \rho_0 + h\rho_3 \\ -\rho_1 + h\rho_2 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{\rho}$ pür split kuaterniyonuna karşılık gelen pür hiperbolik spinor

$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} h\rho_3 \\ -\rho_1 + h\rho_2 \end{bmatrix}$ olsun. Ω hiperbolik spinoru spacelike ise spinor ise $\mathbf{\Omega}$ pür hiperbolik spinoru

da spacelike spinordur.

İspat. $\rho = \rho_0 + \mathbf{p} \in \mathbb{H}_S$ split kuaterniyonuna karşılık gelen hiperbolik spinorunun Ω ve $\mathbf{p}$ pür split kuaterniyonuna karşılık gelen pür hiperbolik spinorunun $\mathbf{\Omega}$ olduğu kabul edilsin. Ayrıca, Ω hiperbolik spinoru spacelike spinor olsun. Bu durumda, Tanım 4.1.6 dan $\Omega^\dagger \Omega < 0$ olduğu biliniyor. (4.6) denklemini kullanılarak $\rho_0^2 < -\Omega^\dagger \Omega$ ve $0 < \rho_0^2 < -\Omega^\dagger \Omega$ elde edilebilir. Sonuç olarak $\Omega^\dagger \Omega < 0$ olduğu görülür ve $\mathbf{\Omega}$ pür hiperbolik spinoru spacelike spinordur. ■

Sonuç 4.1.9. ρ split kuaterniyonuna karşılık gelen hiperbolik spinor Ω ve $\mathbf{p}$ pür split kuaterniyonuna karşılık gelen pür hiperbolik spinor $\mathbf{\Omega}$ olduğu göz önüne alınsın. Ω hiperbolik spinoru timelike spinor ise, $\mathbf{\Omega}$ pür hiperbolik spinor spacelike, timelike veya null spinor olabilir.

İspat. ρ split kuaterniyonuna ρ ve $\mathbf{p}$ pür split kuaterniyonuna karşılık gelen hiperbolik spinorlar Ω ve $\mathbf{\Omega}$ olsun. Ayrıca, Ω hiperbolik spinoru timelike spinor şeklinde göz önüne alınsın. Burada Tanım 4.1.6'dan $\Omega^\dagger \Omega > 0$ olduğu ve (4.6) denkleminde $\rho_0^2 + \Omega^\dagger \Omega > 0$ olduğu görülebilir. Sonuç olarak, bu koşullar altında üç durum söz konusudur. Eğer pür hiperbolik spinor denklemleri, sırasıyla, $\Omega^\dagger \Omega < 0$, $\Omega^\dagger \Omega > 0$ veya $\Omega^\dagger \Omega = 0$ sağlıyorsa, $\mathbf{\Omega}$ pür hiperbolik spinoru spacelike spinor, timelike spinor veya null spinor olabilir. ■

Ω hiperbolik spinorunun timelike spinor ve $\mathbf{\Omega}$ pür hiperbolik spinorunun null spinor olarak karakterize edildiği durum için aşağıdaki elde edilir.

Sonuç 4.1.10. Ω hiperbolik spinorunun timelike spinor ve $\mathbf{\Omega}$ pür hiperbolik spinorunun ise null spinor olduğu göz önünde alınsın. Bu durumda, $\rho_0^2 \neq 0$ dır. Yani, Ω timelike spinor pür hiperbolik spinor olamaz.

Ayrıca Ω null spinor olarak alınırsa $\mathbf{\Omega}$ pür hiperbolik spinor karakterize eden aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.1.11. ρ split kuaterniyonuna karşılık gelen hiperbolik spinor Ω null spinor olsun. Bu durumda, $\mathbf{\Omega}$ pür hiperbolik spinor, aşağıda gösterildiği gibi iki farklı durumla karakterize edilir;

- i. Eğer $\rho_0 \neq 0$ ise, $\mathbf{\Omega}$ pür hiperbolik spinoru spacelike spinordur.

ii. Eğer $\rho_0 = 0$ ise, Ω pür hiperbolik spinoru null spinordur.

İspat. $\rho = \rho_0 + \mathbf{p} \in \mathbb{H}_S$ split kuaterniyonuna karşılık gelen hiperbolik spinor Ω , $\mathbf{p}$ spinor pür split kuaterniyonuna karşılık gelen pür hiperbolik spinor Ω ve Ω hiperbolik spinoru null spinor olsun. Bu nedenle, Tanım 4.1.6 yardımıyla $\Omega^\dagger \Omega = 0$ olduğu biliniyor. O halde, denklem (4.6) yardımıyla $\rho_0^2 = -\Omega^\dagger \Omega$, olduğu görülür. Bu durumda iki durum söz konusudur. İlk olarak, eğer $\rho_0 \neq 0$ ise $0 < \rho_0^2 = -\Omega^\dagger \Omega$ ve $\Omega^\dagger \Omega < 0$ olduğu bulunur. Bu durumda Ω spacelike spinordur. İkinci olarak, eğer $\rho_0 = 0$ ise, o halde $0 = \Omega^\dagger \Omega$ elde edilebilir ve dolayısıyla Ω null spinordur. ■

4.2. Split Kuaterniyonların Hiperbolik Spinor Matrisleri

Split kuaterniyon cebirinde kuaterniyon çarpım işlemi değişmeli değildir. Bu sebeple split kuaterniyonların sağdan ve soldan çarpımları farklı sonuçlar vermektedir. Diğer taraftan, split kuaterniyonların Hamilton operatörlerinin lineer dönüşümler olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla her bir split kuaterniyon çarpımına karşılık bir matris gösterimi elde edilmektedir. Böylece sol ve sağ çarpımlara karşılık gelen matris gösterimleri birbirinden farklı olmaktadır.

Bu bölümde split kuaterniyonların hiperbolik spinor gösterimleri dikkate alınarak sol ve sağ çarpımlara karşılık gelen hiperbolik spinor matrisleri ayrı ayrı ele alınmıştır. Elde edilen bu matrisler, sırasıyla, “sol hiperbolik spinor matrisi” ve “sağ hiperbolik spinor matrisi” olarak adlandırılmıştır. Böylece split kuaterniyon çarpımlarının hiperbolik spinorlar üzerindeki etkisi matris biçiminde ifade edilmektedir ve split kuaterniyon yapısı ile hiperbolik spinor yapısı arasındaki ilişki daha açık bir biçimde incelenebilmektedir

Teorem 4.2.1. $\rho = \rho_0 + \rho_1 \mathbf{i} + \rho_2 \mathbf{j} + \rho_3 \mathbf{k} \in \mathbb{H}_S$ split kuaterniyonuna $\Omega = \begin{bmatrix} \rho_0 + \mathbf{h}\rho_3 \\ -\rho_1 + \mathbf{h}\rho_2 \end{bmatrix}$ hiperbolik spinoru karşılık gelsin. Böylece (2.20) denklemindeki ρ nun sol matris gösterimine karşılık gelen hiperbolik spinor matrisi

$$\Omega_L = \begin{bmatrix} \rho_0 + \mathbf{h}\rho_3 & \rho_1 + \mathbf{h}\rho_2 \\ -\rho_1 + \mathbf{h}\rho_2 & \rho_0 - \mathbf{h}\rho_3 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

şeklindedir. Bu matrise $\rho \in \mathbb{H}_s$ split kuaterniyonunun **"sol hiperbolik spinor matrisi"** veya **"temel hiperbolik spinor matrisi"** denir.

İspat. (4.1) denklemini yardımıyla $\rho = \rho_0 + \rho_1 \mathbf{i} + \rho_2 \mathbf{j} + \rho_3 \mathbf{k} \in \mathbb{H}_s$ split kuaterniyonu $\{1, -\mathbf{i}\}$ bazına göre $\rho = I\Omega_1 - i\Omega_2$ şeklinde yazılsın. Böylece, denklem (2.19) 'deki sol matris Hamilton operatörü göz önüne alınırsa

$$L_p(I) = I\Omega_1 - i\Omega_2 \quad (4.8)$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde i bazının L_p altındaki görüntüsü

$$L_p(-i) = I(-\overline{\Omega_2}) - i\overline{\Omega_1} \quad (4.9)$$

bulunur. Burada $\Omega_1 i = i\overline{\Omega_1}$, $\Omega_2 i = i\overline{\Omega_2}$ eşitlikleri vardır. Sonuç olarak, denklemlerin (4.8) ve (4.9) denklemlerinin matris formu

$$\Omega_L = \begin{bmatrix} \Omega_1 & -\overline{\Omega_2} \\ \Omega_2 & \overline{\Omega_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_0 + h\rho_3 & \rho_1 + h\rho_2 \\ -\rho_1 + h\rho_2 & \rho_0 - h\rho_3 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Ω_L matrisi, $\rho \in \mathbb{H}_s$ split kuaterniyonunun sol matris gösterimine karşılık gelen **"sol hiperbolik spinor matrisi"** olarak ifade edilir. Bu matris, Lorentz dönme matrisine benzer bir göreve sahiptir. Ayrıca $\phi(\rho)$, ρ için temel matris olarak adlandırıldığından, Ω_L sol hiperbolik spinor matrisine **"temel hiperbolik spinor matrisi"** denilebilir. ■

(4.7) deki bu matris, Tarakçıoğlu vd, (2018) çalışmasındaki $\hat{Q}$ matrisiyle uyumludur. Ayrıca, bu yaklaşıma paralel olarak, $\rho \times \kappa$ split kuaterniyon çarpımının hiperbolik spinor matris gösterimi için hiperbolik spinor denklemi, $\Omega_L \Phi$ şeklinde yazılabilir.

Şimdi split kuaterniyonların sağ hiperbolik spinor matris gösterimi elde edilsin. Fakat, sağ hiperbolik spinor matrisini tanıtmadan önce split kuaterniyonlar ve hiperbolik spinorlar

arasında daha önceki ilişkiden farklı yeni bir ilişki kurmak gerekir. Bu farklı gösterim split kuaterniyonların sol ve sağ reel matris gösterimlerindeki farklı operatörlerin tanımına paralel olarak tanımlanmaktadır. Burada, (4.7) denklemi yardımıyla yazılan sol hiperbolik matris için hiperbolik spinor formunun (4.2) dönüşümüyle tamamlandığı sağ hiperbolik matris gösterimi için ise farklı bir spinorun ortaya çıktığı belirtilmelidir. Yani sağ hiperbolik spinor matris gösterimi için split kuaterniyonlar ve hiperbolik spinorlar (4.2) denkleminde farklı yeni bir dönüşümle tekrar eşleştirilir. Şimdi bu hiperbolik spinorlar ifade edilsin.

Tanım 4.2.2: $\rho = \rho_0 + \rho_1 \mathbf{i} + \rho_2 \mathbf{j} + \rho_3 \mathbf{k} \in \mathbb{H}_s$ split kuaterniyonu $\{I, -\mathbf{i}\}$ bazına göre sağ çarpımla ifade edilen herhangi bir split kuaterniyon olsun. Böylece ρ split kuaterniyonu $\rho = (\rho_0 + \mathbf{h}\rho_3)I + (-\rho_1 - \mathbf{h}\rho_2)(-\mathbf{i})$ olarak yeniden yazılabilir. Burada $\mathbf{h}$ hiperbolik birim olmak üzere $\mathbf{h}^2 = +1$ ve $\Omega_1 = \rho_0 + \mathbf{h}\rho_3$, $\overline{\Omega_2} = -\rho_1 - \mathbf{h}\rho_2 \in \mathbb{H}$ iki hiperbolik sayı olacak şekilde split kuaterniyonlar kümesi $\mathbb{H}_s$

$$\mathbb{H}_s = \left\{ \rho = \Omega_1 I + \overline{\Omega_2} (-\mathbf{i}) \mid \Omega_1 = \rho_0 + \mathbf{h}\rho_3, \overline{\Omega_2} = -\rho_1 - \mathbf{h}\rho_2 \in \mathbb{H} \right\}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece, ρ split kuaterniyonu

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \overline{\Omega_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_0 + \mathbf{h}\rho_3 \\ -\rho_1 - \mathbf{h}\rho_2 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

şeklinde verilen hiperbolik spinor ile eşleşebilir.

Sonuç 4.2.3: (4.10) denklemi yardımıyla $\rho \in \mathbb{H}_s$ split kuaterniyonuna karşılık gelen hiperbolik spinor Ω olsun. Buradan, (4.4) ve (4.10) denklemleri yardımıyla hiperbolik spinor denklemlerinin $\Omega^\dagger \Omega = \Omega^\dagger \Omega = I_q$ ilişkisiyle bağlantılı olduğu görülebilir.

Sonuç 4.2.3 'den, Tanım 4.1.6'da belirtilen hiperbolik spinorlar için yapılan sınıflandırmanın Ω hiperbolik spinorları için de geçerli olduğu bilinmektedir. Böylece split kuaterniyonların sağ hiperbolik spinor matris gösterimi ifade edilebilir.

Teorem 4.2.4. $\rho = \rho_0 + \rho_1 \mathbf{i} + \rho_2 \mathbf{j} + \rho_3 \mathbf{k} \in \mathbb{H}_S$ split kuaterniyonu göz önüne alınsın. Böylece $\rho \in \mathbb{H}_S$ split kuaterniyonunun 2.21 matrisindeki sağ matris gösterimine karşılık gelen sağ hiperbolik spinor matris

$$\Omega_R = \begin{bmatrix} \rho_0 + \mathbf{h}\rho_3 & \rho_1 - \mathbf{h}\rho_2 \\ -\rho_1 - \mathbf{h}\rho_2 & \rho_0 - \mathbf{h}\rho_3 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

şeklindedir. Bu matrise “sağ hiperbolik spinor matrisi” denir.

İspat. $\rho = \rho_0 + \rho_1 \mathbf{i} + \rho_2 \mathbf{j} + \rho_3 \mathbf{k} \in \mathbb{H}_S$ split kuaterniyonu $\rho = \Omega_1 \mathbf{I} + \overline{\Omega_2} (-\mathbf{i})$ şeklinde yazılsın.

Burada $\Omega_1 = \rho_0 + \mathbf{h}\rho_3$, $\overline{\Omega_2} = -\rho_1 - \mathbf{h}\rho_2$ ve $\overline{\Omega_2}$, Ω hiperbolik spinorunun Ω_2 ikinci bileşeninin hiperbolik eşleniğidir. Ayrıca (2.19) denlemindeki sağ Hamilton operatörü göz önüne alınırsa

$$R_q(\mathbf{I}) = \mathbf{I}(\Omega_1 \mathbf{I} + \overline{\Omega_2} (-\mathbf{i})) = \Omega_1 \mathbf{I} + \overline{\Omega_2} (-\mathbf{i})$$

ve

$$R_q(-\mathbf{i}) = -\mathbf{i}(\Omega_1 \mathbf{I} + \overline{\Omega_2} (-\mathbf{i})) = -\Omega_2 \mathbf{I} + \overline{\Omega_1} (-\mathbf{i})$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $\Omega_1 \mathbf{i} = \mathbf{i} \overline{\Omega_1}$, $\Omega_2 \mathbf{i} = \mathbf{i} \overline{\Omega_2}$ denklemleri sağlanır. Sonuç olarak, $\rho \in \mathbb{H}_S$ split kuaterniyonunun sağ hiperbolik spinor matrisi

$$\Omega_R = \begin{bmatrix} \rho_0 + \mathbf{h}\rho_3 & \rho_1 - \mathbf{h}\rho_2 \\ -\rho_1 - \mathbf{h}\rho_2 & \rho_0 - \mathbf{h}\rho_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. ■

Sonuç 4.2.5. $\kappa \times \rho$ split kuaterniyon çarpımının hiperbolik spinor matris gösterimi için hiperbolik spinor denklemi

$$\kappa \times \rho \rightarrow \Omega_R \Phi$$

şeklindedir. Burada Φ , (4.10) denklemi aracılığıyla κ split kuaterniyonuna karşılık gelen hiperbolik spinordur.

Sonuç 4.2.6. ρ split kuaterniyonunun pür split kuaterniyon ($\rho = \mathbf{\rho}$) olduğu göz önüne alınsın.

Bu nedenle, $\mathbf{\rho}$ pür split kuaterniyonuna karşılık gelen sol ve sağ hiperbolik spinor matrisleri

Ω_L ve Ω_R

$$\Omega_L = \begin{bmatrix} h\rho_3 & \rho_1 + h\rho_2 \\ -\rho_1 + h\rho_2 & -h\rho_3 \end{bmatrix}$$

ve

$$\Omega_R = \begin{bmatrix} h\rho_3 & \rho_1 - h\rho_2 \\ -\rho_1 - h\rho_2 & -h\rho_3 \end{bmatrix}.$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4.2.7. $\rho \in \mathbb{H}_S$ split kuaterniyonuna karşılık gelen sol ve sağ hiperbolik spinor matrisleri arasındaki ilişki

$$\Omega_R = C\Omega_L^t C$$

burada “ t ” transpoz ve $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ dir.

İspat: $\rho = \rho_0 + \rho_1 \mathbf{i} + \rho_2 \mathbf{j} + \rho_3 \mathbf{k} \in \mathbb{H}_S$ split kuaterniyonunun sol ve sağ hiperbolik spinor matrisleri, sırasıyla, Ω_L ve Ω_R olsun. Böylece

$$C\Omega_L^t C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_0 + h\rho_3 & -\rho_1 + h\rho_2 \\ \rho_1 + h\rho_2 & \rho_0 - h\rho_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_0 + h\rho_3 & \rho_1 - h\rho_2 \\ -\rho_1 - h\rho_2 & \rho_0 - h\rho_3 \end{bmatrix} = \Omega_R$$

olduğu kolayca görülür. ■

Şimdi, denklem (3.3) denklemindeki $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ matrislerinin yardımıyla sol ve sağ hiperbolik spinor matrisleri aşağıdaki gibi verilir.

Teorem 4.2.8: $\rho = \rho_0 + \rho_1 \mathbf{i} + \rho_2 \mathbf{j} + \rho_3 \mathbf{k} \in \mathbb{H}_{\mathcal{S}}$ split kuaterniyonu ve bu kuaterniyona karşılık gelen ve Ω_L , Ω_R , sırasıyla, ρ 'nin sol ve sağ hiperbolik spinor matrisleri olsun. Dolayısıyla bu hiperbolik spinor matrisleri $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ matrisleri cinsinden

$$\Omega_L = \rho_0 I_2 - h\rho_1 \tau_2 + h\rho_2 \tau_1 + h\rho_3 \tau_3$$

ve

$$\Omega_R = \rho_0 I_2 - h\rho_1 \tau_2 - h\rho_2 \tau_1 + h\rho_3 \tau_3$$

olarak ifade edilir.

İspat. Sol hiperbolik spinor matrisi Ω_L olsun. Böylece, (4.7) denkleminde

$$\Omega_L = \begin{bmatrix} \rho_0 + h\rho_3 & \rho_1 + h\rho_2 \\ -\rho_1 + h\rho_2 & \rho_0 - h\rho_3 \end{bmatrix} = \rho_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \rho_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \rho_2 \begin{bmatrix} 0 & h \\ h & 0 \end{bmatrix} + \rho_3 \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & -h \end{bmatrix}$$

ve

$$\Omega_L = \rho_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - h\rho_1 \begin{bmatrix} 0 & -h \\ h & 0 \end{bmatrix} + h\rho_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + h\rho_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

olduğu kolayca görülebilir. Sonuç olarak $\Omega_L = \rho_0 I_2 - h\rho_1 \tau_2 + h\rho_2 \tau_1 + h\rho_3 \tau_3$ elde edilir. Benzer şekilde, aynı işlemler sırasıyla sağ hiperbolik spinor matrisi için de yapılırsa $\Omega_R = \rho_0 I_2 - h\rho_1 \tau_2 - h\rho_2 \tau_1 + h\rho_3 \tau_3$ olduğu kolayca elde edilebilir. ■

Teorem 4.2.9. $\kappa, \rho \in \mathbb{H}_S$ herhangi iki split kuaterniyon ve bu split kuaterniyonlara karşılık gelen sol hiperbolik spinor matrisleri sırasıyla Φ_L ve Ω_L olsun. Şimdi aşağıdaki eşitlikler verebilir,

$$\begin{aligned} i) \quad & (\Omega + \Phi)_L = \Omega_L + \Phi_L, \\ ii) \quad & (\lambda \Omega)_L = \lambda \Omega_L, \\ iii) \quad & (\mu \Omega)_L = \Omega_L \delta_L, \\ iv) \quad & 1_L = I_2, \\ v) \quad & (\Omega^*)_L = \Omega_L^\dagger \\ vi) \quad & (\Omega_L \Phi)_L = \Omega_L \Phi_L. \end{aligned}$$

Burada $\lambda \in \mathbb{R}$ ve δ_L ; $\mu \in \mathbb{H}$ hiperbolik sayısına karşılık gelen sol hiperbolik spinor matrisi, Ω^* ; ρ ' nun eşleniğine karşılık gelen hiperbolik spinor ve † ; hiperbolik eşlenik transpozdur.

İspat: Φ ve Ω , sırasıyla, (4.2) dönüşümü yardımıyla herhangi iki split kuaterniyon κ ve ρ 'ya karşılık gelen hiperbolik spinor matrisleri olsun. O halde

i) (4.12) denkleminde verilen hiperbolik spinor dönüşümü yardımıyla $\Omega + \Phi$ hiperbolik spinoru

$$\Omega + \Phi = \begin{bmatrix} \kappa_0 + \rho_0 + \mathbf{h}(\kappa_3 + \rho_3) \\ -(\kappa_1 + \rho_1) + \mathbf{h}(\kappa_2 + \rho_2) \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Ayrıca, $\Omega + \Phi$ hiperbolik spinorunun sol hiperbolik spinor matrisi

$$(\Omega + \Phi)_L = \begin{bmatrix} \kappa_0 + \rho_0 + \mathbf{h}(\kappa_3 + \rho_3) & (\kappa_1 + \rho_1) + \mathbf{h}(\kappa_2 + \rho_2) \\ -(\kappa_1 + \rho_1) + \mathbf{h}(\kappa_2 + \rho_2) & \kappa_0 + \rho_0 - \mathbf{h}(\kappa_3 + \rho_3) \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(\Omega + \Phi)_L = \begin{bmatrix} \rho_0 + \mathbf{h}\rho_3 & \rho_1 + \mathbf{h}\rho_2 \\ -\rho_1 + \mathbf{h}\rho_2 & \rho_0 - \mathbf{h}\rho_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_0 + \mathbf{h}\kappa_3 & \kappa_1 + \mathbf{h}\kappa_2 \\ -\kappa_1 + \mathbf{h}\kappa_2 & \kappa_0 - \mathbf{h}\kappa_3 \end{bmatrix} = \Omega_L + \Phi_L.$$

olduğu görülür.

ii) $\lambda \in \mathbb{R}$ ve Ω hiperbolik spinor olsun. O halde $\lambda\Omega$ hiperbolik spinoru için

$$\lambda\Omega = \begin{bmatrix} \lambda\rho_0 + \mathbf{h}\lambda\rho_3 \\ -\lambda\rho_1 + \mathbf{h}\lambda\rho_2 \end{bmatrix}$$

eşitliği bulunur. Dolayısıyla $\lambda\Omega$ hiperbolik spinorunun sol hiperbolik spinor matrisi

$$(\lambda\Omega)_L = \begin{bmatrix} \lambda\rho_0 + \mathbf{h}\lambda\rho_3 & \lambda\rho_1 - \mathbf{h}\lambda\rho_2 \\ -\lambda\rho_1 + \mathbf{h}\lambda\rho_2 & \lambda\rho_0 - \mathbf{h}\lambda\rho_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \rho_0 + \mathbf{h}\rho_3 & \rho_1 - \mathbf{h}\rho_2 \\ -\rho_1 + \mathbf{h}\rho_2 & \rho_0 - \mathbf{h}\rho_3 \end{bmatrix} = \lambda\Omega_L$$

eşitliği elde edilir.

iii) $\mu = \mu_1 + \mathbf{h}\mu_2 \in \mathbb{H}$ olmak üzere Ω hiperbolik spinor olsun. O halde $\mu\Omega$ 'ya karşılık gelen hiperbolik spinor

$$\mu\Omega = \begin{bmatrix} (\mu_1\rho_0 + \mu_2\rho_3) + \mathbf{h}(\mu_2\rho_0 + \mu_1\rho_3) \\ (-\mu_1\rho_1 + \mu_2\rho_2) + \mathbf{h}(-\mu_2\rho_1 + \mu_1\rho_2) \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Ek olarak $\mu\Omega$ hiperbolik spinorunun sol hiperbolik spinor matrisi

$$\begin{aligned} (\mu\Omega)_L &= \begin{bmatrix} (\mu_1\rho_0 + \mu_2\rho_3) + \mathbf{h}(\mu_2\rho_0 + \mu_1\rho_3) & (\mu_1\rho_1 - \mu_2\rho_2) + \mathbf{h}(-\mu_2\rho_1 + \mu_1\rho_2) \\ (-\mu_1\rho_1 + \mu_2\rho_2) + \mathbf{h}(-\mu_2\rho_1 + \mu_1\rho_2) & (\mu_1\rho_0 + \mu_2\rho_3) - \mathbf{h}(\mu_2\rho_0 + \mu_1\rho_3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\rho_0 + \mathbf{h}\rho_3)(\mu_1 + \mathbf{h}\mu_2) & (\rho_1 - \mathbf{h}\rho_2)(\mu_1 - \mathbf{h}\mu_2) \\ (-\rho_1 + \mathbf{h}\rho_2)(\mu_1 + \mathbf{h}\mu_2) & (\rho_0 - \mathbf{h}\rho_3)(\mu_1 - \mathbf{h}\mu_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ve sonuç olarak

$$(\mu\Omega)_L = \begin{bmatrix} \rho_0 + \mathbf{h}\rho_3 & \rho_1 - \mathbf{h}\rho_2 \\ -\rho_1 + \mathbf{h}\rho_2 & \rho_0 - \mathbf{h}\rho_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 + \mathbf{h}\mu_2 & 0 \\ 0 & \mu_1 - \mathbf{h}\mu_2 \end{bmatrix} = \Omega_L \delta_L$$

eşitliği elde edilir. Burada $\delta = \begin{bmatrix} \mu_1 + \mathbf{h}\mu_2 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\mu = \mu_1 + \mathbf{h}\mu_2$ hiperbolik sayısına karşılık gelen hiperbolik spinor, $\delta_L; \delta$ hiperbolik spinorunun sol hiperbolik spinor matrisidir.

iv) $\rho = 1$ olduğu göz önüne alınsın. Dolayısıyla $\rho = 1$ split katerniyonuna karşılık gelen hiperbolik spinor $\Omega = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ olur. Böylece Ω hiperbolik spinoru ile ilişkili sol hiperbolik spinor matrisi $\Omega_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$ olarak elde edilir.

v) ρ split katerniyonunun ρ^* katerniyon eşleniğine karşılık gelen hiperbolik spinor $\Omega^* = \begin{bmatrix} \rho_0 - \mathbf{h}\rho_3 \\ \rho_1 - \mathbf{h}\rho_2 \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda Ω^* hiperbolik spinorunun sol hiperbolik spinor matrisi

$$(\Omega^*)_L = \begin{bmatrix} \rho_0 - \mathbf{h}\rho_3 & \rho_1 - \mathbf{h}\rho_2 \\ -\rho_1 - \mathbf{h}\rho_2 & \rho_0 + \mathbf{h}\rho_3 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan $\Omega_L = \begin{bmatrix} \rho_0 + \mathbf{h}\rho_3 & \rho_1 - \mathbf{h}\rho_2 \\ +\rho_1 - \mathbf{h}\rho_2 & \rho_0 - \mathbf{h}\rho_3 \end{bmatrix}$ sol hiperbolik spinor matrisinin eşlenik transpozunu $\Omega_L^\dagger = \begin{bmatrix} \rho_0 - \mathbf{h}\rho_3 & \rho_1 - \mathbf{h}\rho_2 \\ -\rho_1 - \mathbf{h}\rho_2 & \rho_0 + \mathbf{h}\rho_3 \end{bmatrix}$ şeklinde elde edilir. Sonuç olarak $(\Omega^*)_L = \Omega_L^\dagger$ olduğu görülür.

vi) $\kappa, \rho \in \mathbb{H}_s$ split katerniyonlarına karşılık gelen hiperbolik spinorlar Φ ve Ω boşluk olmak üzere

$$\Omega_L \Phi = \begin{bmatrix} \rho_0 + \mathbf{h}\rho_3 & \rho_1 + \mathbf{h}\rho_2 \\ -\rho_1 + \mathbf{h}\rho_2 & \rho_0 - \mathbf{h}\rho_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_0 + \mathbf{h}\kappa_3 \\ -\kappa_1 + \mathbf{h}\kappa_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\rho_0 \kappa_0 + \rho_3 \kappa_3 \right) + \mathbf{h} \left(\rho_0 \kappa_3 + \rho_3 \kappa_0 \right) \\ \left(-\rho_1 \kappa_1 + \rho_2 \kappa_2 \right) + \mathbf{h} \left(\rho_1 \kappa_2 - \rho_2 \kappa_1 \right) \\ \left(-\rho_1 \kappa_0 + \rho_2 \kappa_3 \right) + \mathbf{h} \left(-\rho_1 \kappa_3 + \rho_2 \kappa_0 \right) \\ \left(-\rho_0 \kappa_1 - \rho_3 \kappa_2 \right) + \mathbf{h} \left(\rho_0 \kappa_2 + \rho_3 \kappa_1 \right) \end{bmatrix}$$

denklemini elde edilir. Buradan $\Omega_L \Phi$ hiperbolik spinorunun sol hiperbolik spinor matrisi

$$\begin{aligned}
 (\Omega_L \Phi)_L &= \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} (\rho_0 + h\rho_3)(\kappa_0 + h\kappa_3) \\ (\rho_1 + h\rho_2)(-\kappa_1 + h\kappa_2) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (\rho_0 + h\rho_3)(\kappa_1 + h\kappa_2) \\ +(\rho_1 + h\rho_2)(\kappa_0 - h\kappa_3) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} (-\rho_1 + h\rho_2)(\kappa_0 + h\kappa_3) \\ (\rho_0 - h\rho_3)(-\kappa_1 + h\kappa_2) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (-\rho_1 + h\rho_2)(\kappa_1 + h\kappa_2) \\ +(\rho_0 - h\rho_3)(\kappa_0 - h\kappa_3) \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \rho_0 + h\rho_3 & \rho_1 + h\rho_2 \\ -\rho_1 + h\rho_2 & \rho_0 - h\rho_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_0 + h\kappa_3 & \kappa_1 + h\kappa_2 \\ -\kappa_1 + h\kappa_2 & \kappa_0 - h\kappa_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak $(\Omega_L \Phi)_L = \Omega_L \Phi_L$ eşitliği elde edilir. ■

Şimdi, sol hiperbolik spinor matris için verilen eşitlikler aşağıdaki teoremle birlikte sağ hiperbolik spinor matris için sağlanabilir. Ancak sağ hiperbolik spinor matrisi için denklem (4.10) denkleminin dikkate alınması gerektiği unutulmamalıdır.

Teorem 4.2.10. $\kappa, \rho \in \mathbb{H}_S$ split kuaterniyonları yardımıyla (4.10) denkleminin karşılık gelen iki hiperbolik spinor Φ , Ω olsun. Ayrıca bu hiperbolik spinorların sağ hiperbolik spinor matrisleri, sırasıyla, Φ_R ve Ω_R , olarak göz önüne alınsın Dolayısıyla

- i) $(\Omega + \Phi)_R = \Omega_R + \Phi_R$,
- ii) $(\lambda \Omega)_R = \lambda \Omega_R$,
- iii) $(\mu \Omega)_R = \Omega_R \delta_R$,
- iv) $1_R = I_2$,
- iv) $(\Omega^*)_R = \Omega_R^\dagger$,
- iv) $(\Omega_R \Phi)_R = \Omega_R \Phi_R$

eşitlikleri vardır. Burada $\lambda \in \mathbb{R}$, $\delta_R = \begin{bmatrix} \mu_1 + h\mu_2 & 0 \\ 0 & \mu_1 - h\mu_2 \end{bmatrix}$, $\mu = \mu_1 + h\mu_2 \in \mathbb{H}$ hiperbolik

sayısına karşılık gelen sağ hiperbolik spinor matrisi ve “ † ” eşlenik transpozdur.

İspat. (4.10) dönüşümü yardımıyla Φ ve Ω , sırasıyla, κ ve ρ split kuaterniyonlarına karşılık gelen hiperbolik spinor matrisleri olsun.

i) Φ ve Ω , hiperbolik spinorlarının toplamı için

$$\Omega + \Phi = \begin{bmatrix} \kappa_0 + \rho_0 + \mathbf{h}(\kappa_3 + \rho_3) & \\ & -(\kappa_1 + \rho_1) - \mathbf{h}(\kappa_2 + \rho_2) \end{bmatrix}$$

eşitliği yazılabilir o halde (4.10) yardımıyla $\Omega + \Phi$ hiperbolik spinorunun sağ hiperbolik spinor matrisi için

$$(\Omega + \Phi)_R = \begin{bmatrix} \kappa_0 + \rho_0 + \mathbf{h}(\kappa_3 + \rho_3) & (\kappa_1 + \rho_1) - \mathbf{h}(\kappa_2 + \rho_2) \\ -(\kappa_1 + \rho_1) - \mathbf{h}(\kappa_2 + \rho_2) & \kappa_0 + \rho_0 - \mathbf{h}(\kappa_3 + \rho_3) \end{bmatrix} = \Omega_R + \Phi_R.$$

eşitliği elde edilir.

ii) $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\lambda\Omega$ hiperbolik spinorunun sağ hiperbolik spinor matrisi yardımıyla

$$(\lambda\Omega)_R = \begin{bmatrix} \lambda\rho_0 + \mathbf{h}\lambda\rho_3 & \lambda\rho_1 - \mathbf{h}\lambda\rho_2 \\ -\lambda\rho_1 - \mathbf{h}\lambda\rho_2 & \lambda\rho_0 - \mathbf{h}\lambda\rho_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \rho_0 + \mathbf{h}\rho_3 & \rho_1 - \mathbf{h}\rho_2 \\ -\rho_1 - \mathbf{h}\rho_2 & \rho_0 - \mathbf{h}\rho_3 \end{bmatrix} = \lambda\Omega_R$$

eşitliği kolayca bulunabilir.

iii) $\mu = \mu_1 + \mathbf{h}\mu_2 \in \mathbb{H}$ hiperbolik sayı ve (4.10) yardımıyla μ ve ρ split kuaterniyonuna karşılık gelen hiperbolik spinor Ω olsun. O halde $\mu\Omega$ hiperbolik spinorunun sağ hiperbolik spinor matrisi için

$$\begin{aligned} (\mu\Omega)_R &= \begin{bmatrix} (\mu_1\rho_0 + \mu_2\rho_3) + \mathbf{h}(\mu_1\rho_3 + \mu_2\rho_0) & (\mu_1\rho_1 + \mu_2\rho_2) - \mathbf{h}(\mu_1\rho_2 + \mu_2\rho_1) \\ (-\mu_1\rho_1 - \mu_2\rho_2) - \mathbf{h}(\mu_1\rho_2 + \mu_2\rho_1) & (\mu_1\rho_0 + \mu_2\rho_3) - \mathbf{h}(\mu_1\rho_3 + \mu_2\rho_0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \rho_0 + \mathbf{h}\rho_3 & \rho_1 - \mathbf{h}\rho_2 \\ -\rho_1 - \mathbf{h}\rho_2 & \rho_0 - \mathbf{h}\rho_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 + \mathbf{h}\mu_2 & 0 \\ 0 & \mu_1 - \mathbf{h}\mu_2 \end{bmatrix} = \Omega_R \delta_R \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada δ ; μ hiperbolik sayısına karşılık gelen hiperbolik spinor δ_R ; δ hiperbolik spinorunun sağ hiperbolik spinor matrisidir. Ek olarak $\delta_L = \delta_R$ olduğu açıktır.

iv) ρ split kuaterniyonu $\rho=1$ olarak alınsın. Bu durumda $\rho=1$ 'e karşılık gelen hiperbolik

spinor $\Omega = \Omega = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ olur. Böylece Ω hiperbolik spinorunun sağ hiperbolik spinor matrisi

$$\Omega_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \text{ olarak elde edilir.}$$

v) ρ split kuaterniyonunun ρ^* kuaterniyon eşleniğine karşılık gelen hiperbolik spinor

$\Omega^* = \begin{bmatrix} \rho_0 - \mathbf{h}\rho_3 \\ \rho_1 + \mathbf{h}\rho_2 \end{bmatrix}$ olsun. Sonuç olarak, Ω^* hiperbolik spinorunun sağ hiperbolik spinor matrisi

için

$$\left(\Omega^* \right)_R = \begin{bmatrix} \rho_0 - \mathbf{h}\rho_3 & -\rho_1 + \mathbf{h}\rho_2 \\ \rho_1 + \mathbf{h}\rho_2 & \rho_0 + \mathbf{h}\rho_3 \end{bmatrix} = \Omega_R^\dagger$$

olduğu kolayca görülür.

vi) $\rho \in \mathbb{H}_S$ split kuaterniyonuna karşılık gelen hiperbolik spinor (4.2) denklemi yardımıyla Φ olsun. $\kappa, \rho \in \mathbb{H}_S$ split kuaterniyonlarının sağ hiperbolik spinor matrisleri Φ_R ve Ω_R olarak alınsın. O halde $\Omega_R \Phi$ hiperbolik spinoru

Daha sonra,

$$\Omega_R \Phi = \left[\begin{pmatrix} (\rho_0 \kappa_0 + \rho_3 \kappa_3) + \mathbf{h}(\rho_0 \kappa_3 + \rho_3 \kappa_0) \\ (-\rho_1 \kappa_1 + \rho_2 \kappa_2) + \mathbf{h}(-\rho_1 \kappa_2 + \rho_2 \kappa_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-\rho_1 \kappa_0 - \rho_2 \kappa_3) + \mathbf{h}(-\rho_1 \kappa_3 - \rho_2 \kappa_0) \\ (-\rho_0 \kappa_1 + \rho_3 \kappa_2) + \mathbf{h}(-\rho_0 \kappa_2 + \rho_3 \kappa_1) \end{pmatrix} \right]$$

olarak elde edilir. Son olarak $\Omega_R \Phi$ hiperbolik spinorunun sağ hiperbolik spinor matrisi

$$\left(\Omega_R \Phi \right)_R = \Omega_R \Phi_R$$

şeklinde bulunur.

Önerme 4.2.11. $\rho \in \mathbb{H}_S$ split kuaterniyonuna karşılık gelen sol (sağ) hiperbolik spinor matrisi Ω_L (Ω_R) normaldir.

İspat. Ω_L , (4.2) dönüşümü yardımıyla ρ split kuaterniyonuna karşılık gelen sol hiperbolik spinor matris olsun. Dolayısıyla

$$\Omega_L^\dagger \Omega_L = \begin{bmatrix} \rho_0^2 + \rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_3^2 & 0 \\ 0 & \rho_0^2 + \rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_3^2 \end{bmatrix} = \Omega^\dagger \Omega_2$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde $\Omega_L \Omega_L^\dagger = \begin{bmatrix} \rho_0^2 + \rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_3^2 & 0 \\ 0 & \rho_0^2 + \rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_3^2 \end{bmatrix} = \Omega^\dagger \Omega_2$

eşitliği bulunur. Buradan kolayca $\Omega_L \Omega_L^\dagger = \Omega_L^\dagger \Omega_L$ olduğu görülür. Sonuç olarak $\Omega_L \Omega_L^\dagger = \Omega_L^\dagger \Omega_L$ olduğundan Ω_L sol hiperbolik spinor matrisi normaldir. Benzer ispat Ω_R hiperbolik spinor matrisi için de yapılır.

Sonuç 4.2.12. Ω_L ve Ω_R sol ve sağ hiperbolik spinor matrisleri için aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

i) $\det(\Omega_L) = \det(\Omega_R) = \Omega^\dagger \Omega.$

ii) $\Omega^\dagger \Omega \neq 0$ olacak şekilde null olmayan ρ split kuaterniyonu için $\Omega_L^{-1} = \frac{1}{\Omega^\dagger \Omega} \Omega_L^\dagger$ ve

$\Omega_R^{-1} = \frac{1}{\Omega^\dagger \Omega} \Omega_R^\dagger$ dir.

iii) $\Omega^\dagger \Omega \neq 0$ olacak şekilde null olmayan ρ birim split kuaterniyonu için $\Omega_L^{-1} = \pm \Omega_L^\dagger$ ve $\Omega_R^{-1} = \pm \Omega_R^\dagger$ dir.

Tezin bundan sonraki bölümünde sadece sol hiperbolik spinor matrisi ile ilgilenilecektir. Bunun sebebi sağ hiperbolik spinor matrisi için de aynı sonuçların elde edildiğinin görülmüş olmasıdır.

O halde, bundan sonra bu sol hiperbolik spinor matrisi “**temel hiperbolik spinor matrisi**” olarak adlandırılsın.

4.3. Temel Hiperbolik Spinor Matrisinin Özdeğerleri

Bu bölümde ilk olarak temel hiperbolik spinor matrisi ile onun pür hiperbolik spinor matrisi arasındaki ilişki ortaya konulmaktadır. Ardından, bu ilişki kullanılarak temel hiperbolik spinor matrisin özdeğerlerine karşılık gelen hiperbolik spinor denklemi elde edildikten sonra bu denklem aracılığıyla özdeğerler hesaplanmaktadır. Daha sonra hiperbolik spinorun spacelike, timelike ya da null spinor olması göz önüne alınarak elde edilen sonuçlar herbir durum için ayrı ayrı incelenmektedir. Son olarak, kurulan teorik yapıyı desteklemek ve sonuçların uygulanışını göstermek amacıyla iki örnek sunulmaktadır.

Yardımcı Teorem 4.3.1. $\rho = \rho_0 + \mathbf{\rho}$ split kuaterniyonuna ve $\mathbf{\rho}$ pür split kuaterniyonuna karşılık gelen hiperbolik spinorlar Ω_L ve $\mathbf{\Omega}_L$ olsun. Ω_L ve $\mathbf{\Omega}_L$ hiperbolik spinorlarına karşılık gelen temel hiperbolik spinor matrisleri arasındaki ilişki

$$\Omega_L = \rho_0 I_2 + \mathbf{\Omega}_L \quad (4.12)$$

şeklindedir.

İspat: Temel hiperbolik spinor matrisleri Ω_L ve $\mathbf{\Omega}_L$ ’nin sırasıyla ρ ve $\mathbf{\rho}$ ile ilişkili olduğunu varsayalım. Bu durumda (4.8) denklemi ve sonuç 4.2.6 yardımıyla

$$\begin{aligned} \Omega_L &= \begin{bmatrix} \rho_0 + h\rho_3 & \rho_1 + h\rho_2 \\ -\rho_1 + h\rho_2 & \rho_0 - h\rho_3 \end{bmatrix} \\ &= \rho_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h\rho_3 & \rho_1 + h\rho_2 \\ -\rho_1 + h\rho_2 & -h\rho_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\rho_0 I_2 + \mathbf{\Omega}_L$$

olduğu kolayca hesaplanır.

Teorem 4.3.2. Ω hiperbolik spinorunun Ω_L sol hiperbolik spinor matrisinin özdeğerleri

$$\eta_1 = \rho_0 + \sqrt{-\Omega^\dagger \Omega} \quad (4.13)$$

ve

$$\eta_2 = \rho_0 - \sqrt{-\Omega^\dagger \Omega} \quad (4.14)$$

şeklindedir.

Burada $\rho = \rho_0 + \boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\rho}$ pür split kuaterniyon ve Ω pür hiperbolik spinordur.

İspat: Ω_L temel hiperbolik spinor matrisi göz önüne alınsın. Ω_L hiperbolik spinor matrisinin özdeğerleri, $\Omega_L \boldsymbol{\vartheta} = \eta \boldsymbol{\vartheta}$ denklemi ile elde edilir. Burada η_i ($i=1,2$), bu hiperbolik spinor matrisinin özdeğerleridir. Dolayısıyla $\det(\Omega_L - \eta I_2) = 0$ denklemi hesaplanırsa

$$\det(\Omega_L - \eta I_2) = \begin{bmatrix} \rho_0 - \eta + \boldsymbol{h}\rho_3 & \rho_1 + \boldsymbol{h}\rho_2 \\ -\rho_1 + \boldsymbol{h}\rho_2 & \rho_0 - \eta - \boldsymbol{h}\rho_3 \end{bmatrix} = 0$$

eşitliğinden karakteristik polinomun

$$\eta^2 - 2\rho_0\eta + \Omega^\dagger \Omega = 0$$

olduğu bulunur. Bu ikinci dereceden denklem çözülürse

$$\eta_{1,2} = \rho_0 \pm \sqrt{\rho_0^2 - \Omega^\dagger \Omega}$$

ve dolayısıyla (4.12) denklemi yardımıyla

$$\eta_1 = \rho_0 + \sqrt{-\Omega^\dagger \Omega}, \quad \eta_2 = \rho_0 - \sqrt{-\Omega^\dagger \Omega}$$

olduğu görülür. Burada Ω , ρ split kuaterniyonuna karşılık gelen pür hiperbolik spinordur. ■

Şimdi denklem (4.13) ve (4.14) de belirlenen özdeğerlerin geometrik yorumunu yaparak üç durum şeklinde sınıflandırma yapılacaktır. Söz konusu üç durum şu şekilde sıralanabilir

Durum 1: Hiperbolik spinor Ω spacelike spinor olsun. Bu durumda, pür hiperbolik spinor Ω aynı zamanda spacelike spinordur ve $\Omega^\dagger \Omega < 0$ dir. Bu durumda, (4.5) denklemi kullanılarak normun hiperbolik spinor denklemi $N(\Omega) = \sqrt{-\Omega^\dagger \Omega}$ olarak elde edilir. Sonuç olarak, yukarıdaki eşitlikleri göz önünde bulundurarak Ω spacelike spinorunun özdeğerleri

$$\eta_1 = \rho_0 + N(\Omega), \quad \eta_2 = \rho_0 - N(\Omega)$$

olarak elde edilir.

Durum 2: Hiperbolik spinoru timelike spinor olarak göz önüne alınışın. Bu durumda pür hiperbolik spinor Ω , spacelike spinor, timelike spinor veya null spinor olabilir. Şimdi bu durumlar daha ayrıntılı aşağıdaki gibi incelensin.

i. Varsayalım ki $\Omega^\dagger \Omega < 0$ olsun. Dolayısıyla, denklem (4.5)'daki normun hiperbolik spinor denklemi Durum 1'deki gibi $N(\Omega) = \sqrt{-\Omega^\dagger \Omega}$ 'dır. Yani Ω spacelike spinorunun temel hiperbolik spinor matrisinin özdeğerleri

$$\eta_1 = \rho_0 + N(\Omega), \quad \eta_2 = \rho_0 - N(\Omega)$$

eşitlikleri elde edilir.

ii. Ω pür hiperbolik spinorunun timelike spinor olduğu kabul edilsin. Dolayısıyla, denklem (4.5) da $\Omega^\dagger \Omega > 0$ ve $N(\Omega) = \sqrt{\Omega^\dagger \Omega}$ olduğu görülür. Sonuç olarak, Ω timelike spinorunun temel hiperbolik spinor matrisinin özdeğerleri

$$\eta_1 = \rho_0 + \mathbf{i}N(\boldsymbol{\Omega}), \quad \eta_2 = \rho_0 - \mathbf{i}N(\boldsymbol{\Omega})$$

eşitliği ile elde edilir. Burada $\mathbf{i}$ complex imajiner birim olmak üzere özdeğerler kompleks sayıdır.

iii. $\boldsymbol{\Omega}$ pür hiperbolik spinoru null spinor olarak alınsın. Dolayısıyla $\boldsymbol{\Omega}^\dagger \boldsymbol{\Omega} = 0$, $N(\boldsymbol{\Omega}) = 0$ olmak üzere özdeğerler

$$\eta_{1,2} = \rho_0$$

olarak elde edilir . Burada $\rho_0 \neq 0$ 'dır.

Durum 3: $\boldsymbol{\Omega}$ hiperbolik spinoru $\boldsymbol{\Omega}^\dagger \boldsymbol{\Omega} = 0$ olacak şekilde null spinor olduğu göz önüne alınsın. Dolayısıyla bu durumu $\rho_0 = 0$ veya $\rho_0 \neq 0$ olması bakımından iki ayrı alt duruma ayırmak gerekir.

i. Eğer $\rho_0 = 0$ ise , sonra $\boldsymbol{\Omega}$ pür hiperbolik spinoru için $\boldsymbol{\Omega}^\dagger \boldsymbol{\Omega} = 0$ vardır. Ve böylece $\boldsymbol{\Omega}$ null spinordur. Dolayısıyla

$$\eta_{1,2} = 0$$

olduğu elde edilir.

ii. $\rho_0 \neq 0$ olduğu göz önüne alınsın. Bu durumda, pür hiperbolik spinor $\boldsymbol{\Omega}$, spacelike spinordur ve $\boldsymbol{\Omega}^\dagger \boldsymbol{\Omega} < 0$ olur. Ayrıca, (4.5) denklemi göz önünde bulundurularak

$$\eta_1 = \rho_0 + N(\boldsymbol{\Omega}), \eta_2 = \rho_0 - N(\boldsymbol{\Omega})$$

elde edilir. Hiperbolik spinor $\boldsymbol{\Omega}$ null spinor olduğundan, $\rho_0^2 = -\boldsymbol{\Omega}^\dagger \boldsymbol{\Omega}$ olacak şekilde $\boldsymbol{\Omega}^\dagger \boldsymbol{\Omega} = 0$ hesaplanır. Sonuç olarak, temel hiperbolik spinor matrisi Ω_L 'nin özdeğerleri

$$\eta_1 = 2\rho_0, \eta_2 = 0$$

olduğu bulunur.

Önceki durumların bir sonucu olarak, pür temel hiperbolik spinor matrislerinin özdeğerleri için aşağıdaki geometrik yorum sonuç olarak verilebilir.

Sonuç 4.3.3. Ω hiperbolik spinorunun $\rho_0 = 0$ olacak şekilde pür hiperbolik spinor olduğu kabul edilsin. Yani $\Omega = \mathbf{\Omega}$ olsun. Aşağıdaki üç durum söz konusudur.

Durum 1: Pür hiperbolik spinor $\mathbf{\Omega}$ 'nin spacelike spinor olduğunu göz önüne alınsın. Bu nedenle, pür hiperbolik spinor $\mathbf{\Omega}$ için hiperbolik spinor matrisi $\mathbf{\Omega}_L$ 'nin özdeğerleri,

$$\eta_1 = N(\mathbf{\Omega}), \eta_2 = -N(\mathbf{\Omega}) \quad (4.15)$$

olarak bulunur.

Durum 2: $\mathbf{\Omega}$ pür hiperbolik spinorunun timelike bir spinor olduğu varsayılınsın. Dolayısıyla özdeğerler

$$\eta_1 = \mathbf{i}N(\mathbf{\Omega}), \eta_2 = -\mathbf{i}N(\mathbf{\Omega}) \quad (4.16)$$

şeklinde elde edilir.

Durum 3: $\mathbf{\Omega}$ pür hiperbolik spinoru $\mathbf{\Omega}^\dagger \mathbf{\Omega} = 0$ olacak şekilde null spinor olarak kabul edilsin. Bu durumda özdeğerler

$$\eta_{1,2} = 0 \quad (4.17)$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla şu sonuca varılabilir.

Sonuç 4.3.4. Ω hiperbolik spinorunun temel hiperbolik spinor matrisinin özdeğerleri, $\mathbf{\Omega}$ pür hiperbolik spinorunun temel hiperbolik spinor matrisinin özdeğerlerine ρ_0 eklenerek belirlenir.

Teorem 4.3.5. Ω_L 'nın pür split kuaterniyon ρ 'ye karşılık gelen pür temel hiperbolik spinor matrisi olduğu kabul edilsin. Bu durumda Ω_L pür temel hiperbolik spinor matrisinin özdeğerleri η_i ise, hiperbolik spinor matris Ω_L^2 'nin özdeğerleri η_i^2 'dir.

İspat. ρ 'ya karşılık gelen pür hiperbolik spinor matrisi Ω_L olarak göz önüne alınsın. O halde Ω_L^2 hiperbolik spinor matrisi hesaplanırsa

$$\Omega_L^2 = \begin{bmatrix} -\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 & 0 \\ 0 & -\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 \end{bmatrix} = -\Omega^\dagger \Omega I_2$$

eşitliği elde edilir. Böylece $\det(\Omega_L^2 - \mu I_2) = 0$ denkleminin karakteristik polinomunun kökleri μ_1 ve μ_2 olarak göz önüne alınır

$$\mu_{1,2} = -\Omega^\dagger \Omega$$

elde edilir. Burada üç durum söz konusudur.

Durum 1 : Ω pür hiperbolik spinorunun spacelike spinor olduğu kabul edilsin.

Dolayısıyla $N^2(\Omega) = -\Omega^\dagger \Omega$ ve buradan

$$\mu_{1,2} = N^2(\Omega) \quad (4.18)$$

elde edilir. Gerçekten de (4.18) denklemindeki özdeğerler, denklem (4.13) denklemindeki özdeğerlerin kareleridir.

Durum 2: Ω pür hiperbolik spinoru timelike spinor olsun. Burada $N^2(\Omega) = \Omega^\dagger \Omega$ olduğunda Ω_L^2 'nin özdeğerleri

$$\mu_{1,2} = -N^2(\Omega) \quad (4.19)$$

olarak bulunur. Denklem (4.19)'de sunulan özdeğerlerin, denklem (4.13)'de verilenlerin tam olarak kareleri olduğu görülmektedir.

Durum 3 : Ω pür hiperbolik spinorunun $\Omega^\dagger \Omega = 0$ olacak şekilde null spinor olduğu kabul edilsin. Bu durumda

$$\mu_{1,2} = 0 \quad (4.20)$$

olduğu görülür. Sonuç olarak, denklem (4.13) ve (4.14)'de verilen özdeğerlerin, denklem (4.19)'da belirlenen özdeğerlerin karelerine tam olarak karşılık geldiğini görülmektedir.

Örnek 4.3.6. $\rho = 1 + 2i + j + k$ split kuaterniyonunu göz önüne alınırsa bu kuaterniyonu hiperbolik spinora karşılık getiren (4.2) dönüşüm yardımıyla

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + h \\ -2 + h \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Teorem (4.1.2) den $\Omega^\dagger \Omega = 3 > 0$ olduğu için tanım (4.1.6) da bulunan (ii) maddesinden dolayı timelike spinordur. Eğer bu vektörün pür $\rho = 2i + j + k$ kısmı dikkate alınırsa aynı dönüşüm yardımıyla bu vektöre karşılık gelen pür hiperbolik spinor

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 + h \\ -2 + h \end{bmatrix}$$

olur. Bu pür hiperbolik spinorunda $\Omega^\dagger \Omega = 2 > 0$ olacaktır. Dolayısıyla Ω pür hiperbolik spinorunda timelike bir spinordur.

Ayrıca sol ve sağ hiperbolik spinor matrislerinde

$$\Omega_L = \begin{bmatrix} 1 + h & 2 + h \\ -2 + h & 1 + h \end{bmatrix}$$

ve

$$\Omega_R = \begin{bmatrix} 1+\mathbf{h} & 2-\mathbf{h} \\ -2-\mathbf{h} & 1-\mathbf{h} \end{bmatrix}$$

şeklinde ele alınsın. Teorem (4.3.2) yardımıyla Ω_L özdeğeri hesaplanacak olursa

$$\eta^2 - 2\eta + 3 = 0$$

karakteristik polinomu elde edilir. Bu denklem çözülürse

$$\eta_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}I$$

elde edilir. Dolayısıyla Ω ve $\mathbf{\Omega}$ hiperbolik spinorları timelike spinor olduğu için özdeğerleri kompleks sayılardır.

Örnek 4.3.7. $\rho = 1 + 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ split kuaterniyonunu ele alınacak olursa kuaterniyonu hiperbolik spinora karşılık getiren (4.2) dönüşümü yardımıyla

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\mathbf{h} \\ -2+2\mathbf{h} \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Burada teorem (4.1.2) yardımıyla $\Omega^\dagger \Omega = 0$ olduğu için tanım (4.1.6) da bulunan (iii) maddesinden dolayı null spinordur. Buna ilaveten $\rho = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ pür split kuaterniyonuna karşılık gelen pür hiperbolik spinor matrisi

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ -2+2\mathbf{h} \end{bmatrix}$$

olur. Bu pür hiperbolik spinorunda $\mathbf{\Omega}^\dagger \mathbf{\Omega} = -1 < 0$ olacaktır. Dolayısıyla $\mathbf{\Omega}$ pür hiperbolik spinorunda tanım (4.1.6) da bulunan (i) maddesinden dolayı spacelike bir spinordur.

Ayrıca sol ve sağ hiperbolik spinor matrislerinde

$$\Omega_L = \begin{bmatrix} 1+h & 2+2h \\ -2+2h & 1-h \end{bmatrix}$$

ve

$$\Omega_R = \begin{bmatrix} 1+h & 2-2h \\ -2-2h & 1-h \end{bmatrix}$$

olarak alabiliriz. Teorem (4.3.2) yardımıyla Ω_L özdeğeri hesaplanacak olursak

$$\eta^2 - 2\eta = 0$$

karakteristik polinomu elde edilir. Bu denklem çözülürse

$$\eta_1 = 2, \eta_2 = 0$$

elde edilir.

4.4. Split Kuaterniyonlar Yardımıyla Lorentz Dönüşümlerinin Hiperbolik 4-Spinor Gösterimleri

Bu bölümde, bir önceki bölümde ayrıntılı biçimde kurulan cebirsel altyapı temel alınarak Lorentz dönüşümlerinin hiperbolik spinorlar cinsinden ifade edilmesi ele alınacaktır. Çalışmanın motivasyonu, klasik kompleks spinor yapısı ile elde edilen sonuçları split-kuaterniyonlar üzerinden tanımlanan hiperbolik spinor yapısı cinsinden ifade etmektir. Burada amaç, söz konusu dönüşümlerin yalnızca eşdeğer bir gösterimini vermek değil eşit zamanlı olarak bu yeni temsilin sunduğu avantajları ve geometrik yorumlarını ortaya koymaktır. Dolayısıyla öncelikle split-kuaterniyonlar ile hiperbolik spinorların ilişkisi ayrıntılı bir biçimde incelenecektir. Devamında, Lorentz dönüşümleri Weyl ve Dirac gösteriminde hiperbolik 4-

spinorlar cinsinden ifade edilecektir. Son olarak split kuaterniyonlara karşılık gelen hiperbolik 4-spinorlar yardımıyla Lorentz dönüşümleri ifade edilecek ve bu gösterimin bazı geometrik yorumları yapılacaktır. Bu yaklaşım hem matematiksel bütünlük hem de geometrik ve fiziksel yorum açısından alternatif ve güçlü bir bakış açısı sunmayı amaçlamaktadır.

4.4.1 Lorentz Dönüşümlerinin Hiperbolik 4-Spinor Gösterimleri

Lorentz dönüşümlerinin hiperbolik 4-spinor gösterimlerine geçmeden önce Weyl ve Dirac gösterimleri arasındaki ilişki daha açık ifade edilsin. Bu iki gösterim aynı spinor yapısının birbirine eşdeğer iki farklı ifade biçimidir. Aralarındaki fark, fiziksel içeriğin değişmesinin yanı sıra spinor bileşenlerinin seçilen baza göre farklı biçimde düzenlenmesinden kaynaklanmaktadır. Weyl gösteriminde dört bileşenli spinor yapı, iki ayrı iki bileşenli kısım şeklinde ele alınır. Bu ayrım, spinorun sağ ve sol bileşenlerinin birbirinden açık biçimde ayrılmasına olanak sağlar. Bu nedenle Weyl gösterimi spinorun iç yapısını daha ayrıntılı şekilde incelemeye uygun bir gösterimdir. Özellikle bileşenlerin Lorentz dönüşümleri altındaki davranışları ayrı ayrı görmek istendiğinde bu gösterim önemli bir kolaylık sağlamaktadır. Dirac gösteriminde ise aynı spinor yapısı daha bütünsel bir formda yazılır. Dirac gösteriminde de weyl gösterimindeki gibi sağ ve sol bileşenler yapısal olarak hala vardır. Fakat açık biçimde ayrılmış olarak görülmezler. Bunun yerine tüm bileşenler tek bir birleşik yapı içerisinde ele alınır. Dolayısıyla, Dirac gösterimi spinor denklemlerinin daha toplu şekilde ifade edilmesini sağlar.

Bu çalışmada önce Weyl gösterimi tercih edilmiştir. Bunun temel sebebi, hiperbolik 4-spinor yapısında kullanılan Lorentz dönüşüm ilişkilerinin bileşen bazında daha açık şekilde yazılabilesidir. Daha sonra elde edilen yapı Dirac gösterimine taşınarak aynı hiperbolik 4-spinor yapısının bütün olarak gösterimini elde etmektedir. Dolayısıyla, Lorentz dönüşümün hiperbolik spinor yapısı içerisinde sağ ve sol bileşenler cinsinden temsili aşağıdaki teoremden verilebilir.

Teorem 4.4.1. Weyl gösteriminde tanımlı bir hiperbolik 4-spinor $\psi_{HS}^W = \begin{bmatrix} \psi_L^W \\ \psi_R^W \end{bmatrix}$ olsun. Burada

$\psi_L^W = \begin{bmatrix} \chi_1 + h\nu_1 \\ \chi_2 + h\nu_2 \end{bmatrix}$, $\psi_R^W = \begin{bmatrix} \chi_3 + h\nu_3 \\ \chi_4 + h\nu_4 \end{bmatrix}$ sırasıyla, sol ve sağ hiperbolik 2-spinor bileşenlerini gösterebilir.

Bu durumda, Lorentz dönüşümü ψ_L^W ve ψ_R^W sol ve sağ hiperbolik 2-spinor bileşenleri üzerinde ayrı ayrı etkili olacak şekilde

$$\psi_{HS}^W \rightarrow \begin{bmatrix} 1 + \frac{\beta_3}{2} & \frac{\alpha_2 + \beta_1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-\alpha_2 + \beta_1}{2} & 1 - \frac{\beta_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\beta_3}{2} & \frac{\alpha_2 - \beta_1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-\alpha_2 - \beta_1}{2} & 1 + \frac{\beta_3}{2} \end{bmatrix} \psi_{HS}^W + \begin{bmatrix} h \frac{\alpha_3}{2} & h \frac{(\alpha_1 - \beta_2)}{2} & 0 & 0 \\ h \frac{(\alpha_1 + \beta_2)}{2} & -h \frac{\alpha_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h \frac{\alpha_3}{2} & h \frac{(\alpha_1 + \beta_2)}{2} \\ 0 & 0 & h \frac{(\alpha_1 - \beta_2)}{2} & -h \frac{\alpha_3}{2} \end{bmatrix} \overline{\psi_{HS}^W} \quad (4.17)$$

şeklindedir. Burada, sırasıyla, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ koordinat eksenleri etrafındaki Lorentz dönme açıları $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ ise aynı koordinat eksenleri boyunca Lorentz boostlara karşılık gelir.

İspat: ψ_{HS}^W Weyl gösteriminde bir hiperbolik 4-spinor olmak üzere $\psi_{HS}^W = \begin{bmatrix} \psi_L^W \\ \psi_R^W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_1 + h\nu_1 \\ \chi_2 + h\nu_2 \\ \chi_3 + h\nu_3 \\ \chi_4 + h\nu_4 \end{bmatrix}$

olarak tanımlansın. (3.19) ve (3.20) denklemlerinden Lorentz dönüşüm bileşenlerinin arasındaki ilişkilerin

$$\begin{aligned} \chi_1 &\rightarrow \chi_1 + \frac{1}{2}(-\alpha_1\nu_2 + \alpha_2\chi_2 - \alpha_3\nu_1 + \beta_1\chi_2 + \beta_2\nu_2 + \beta_3\chi_1) \\ \chi_2 &\rightarrow \chi_2 + \frac{1}{2}(-\alpha_1\nu_1 - \alpha_2\chi_1 + \alpha_3\nu_2 + \beta_1\chi_1 - \beta_2\nu_1 - \beta_3\chi_2) \\ \chi_3 &\rightarrow \chi_3 + \frac{1}{2}(-\alpha_1\nu_4 + \alpha_2\chi_4 - \alpha_3\nu_3 - \beta_1\chi_4 - \beta_2\nu_4 - \beta_3\chi_3) \\ \chi_4 &\rightarrow \chi_4 + \frac{1}{2}(-\alpha_1\nu_3 - \alpha_2\chi_3 + \alpha_3\nu_4 - \beta_1\chi_3 + \beta_2\nu_3 + \beta_3\chi_4) \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned}
\nu_1 &\rightarrow \nu_1 + \frac{1}{2}(\alpha_1\chi_2 + \alpha_2\nu_2 + \alpha_3\chi_1 + \beta_1\nu_2 - \beta_2\chi_2 + \beta_3\nu_1) \\
\nu_2 &\rightarrow \nu_2 + \frac{1}{2}(\alpha_1\chi_1 - \alpha_2\nu_1 - \alpha_3\chi_2 + \beta_1\nu_1 + \beta_2\chi_1 - \beta_3\nu_2) \\
\nu_3 &\rightarrow \nu_3 + \frac{1}{2}(\alpha_1\chi_4 + \alpha_2\nu_4 + \alpha_3\chi_3 - \beta_1\nu_4 + \beta_2\chi_4 - \beta_3\nu_3) \\
\nu_4 &\rightarrow \nu_4 + \frac{1}{2}(\alpha_1\chi_3 - \alpha_2\nu_3 - \alpha_3\chi_4 - \beta_1\nu_3 - \beta_2\chi_3 + \beta_3\nu_4)
\end{aligned} \tag{4.19}$$

olduğu biliniyor. Bu denklemler hiperbolik sayılar cinsinden

$$\begin{aligned}
\chi_1 + h\nu_1 &\rightarrow \chi_1 + h\nu_1 + \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} &h\alpha_1(\chi_2 - h\nu_2) + \alpha_2(\chi_2 + h\nu_2) + h\alpha_3(\chi_1 - h\nu_1) \\ &+ \beta_1(\chi_2 + h\nu_2) - h\beta_2(\chi_2 - h\nu_2) + \beta_3(\chi_1 + h\nu_1) \end{aligned} \right] \\
\chi_2 + h\nu_2 &\rightarrow \chi_2 + h\nu_2 + \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} &h\alpha_1(\chi_1 - h\nu_1) - \alpha_2(\chi_1 + h\nu_1) - h\alpha_3(\chi_2 - h\nu_2) \\ &+ \beta_1(\chi_1 + h\nu_1) + h\beta_2(\chi_1 - h\nu_1) - \beta_3(\chi_2 + h\nu_2) \end{aligned} \right] \\
\chi_3 + h\nu_3 &\rightarrow \chi_3 + h\nu_3 + \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} &h\alpha_1(\chi_4 - h\nu_4) + \alpha_2(\chi_4 + h\nu_4) + h\alpha_3(\chi_3 - h\nu_3) \\ &- \beta_1(\chi_4 + h\nu_4) + h\beta_2(\chi_4 - h\nu_4) - \beta_3(\chi_3 + h\nu_3) \end{aligned} \right] \\
\chi_4 + h\nu_4 &\rightarrow \chi_4 + h\nu_4 + \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} &h\alpha_1(\chi_3 - h\nu_3) - \alpha_2(\chi_3 + h\nu_3) - h\alpha_3(\chi_4 - h\nu_4) \\ &- \beta_1(\chi_3 + h\nu_3) - h\beta_2(\chi_3 - h\nu_3) + \beta_3(\chi_4 + h\nu_4) \end{aligned} \right]
\end{aligned} \tag{4.20}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden yola çıkılarak hiperbolik spinorlar cinsinden Lorentz dönüşümler

$$\psi_{HS}^w \rightarrow \begin{bmatrix} 1 + \frac{\beta_3}{2} & \frac{\alpha_2 + \beta_1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-\alpha_2 + \beta_1}{2} & 1 - \frac{\beta_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\beta_3}{2} & \frac{\alpha_2 - \beta_1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-\alpha_2 - \beta_1}{2} & 1 + \frac{\beta_3}{2} \end{bmatrix} \psi_{HS}^w + \begin{bmatrix} h\frac{\alpha_3}{2} & h\frac{(\alpha_1 - \beta_2)}{2} & 0 & 0 \\ h\frac{(\alpha_1 + \beta_2)}{2} & -h\frac{\alpha_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h\frac{\alpha_3}{2} & h\frac{(\alpha_1 + \beta_2)}{2} \\ 0 & 0 & h\frac{(\alpha_1 - \beta_2)}{2} & -h\frac{\alpha_3}{2} \end{bmatrix} \overline{\psi_{HS}^w}$$

şeklinde elde edilir. ■

Teorem (4.4.1) de verilen dönüşüm klasik kompleks spinorlar için bilinen Lorentz dönüşümünün hiperbolik spinor cebirine taşınmış şeklidir. Ancak burada temel fark Lorentz dönüşümünün kompleks spinorlar yerine hiperbolik spinorlar cinsinden ele alınmasıdır.

Dolayısıyla Weyl gösteriminde hiperbolik 4-spinorlar üzerindeki Lorentz dönüşümü sadece hiperbolik spinorun kendisi ile değil aynı zamanda hiperbolik eşleniği ile birlikte iki matrisli bir yapı ile temsil edilir. Ayrıca bu teorem, Lorentz dönüşümünün hiperbolik spinor uzayındaki etkisinin sağ ve sol hiperbolik 2-spinor bileşenleri üzerinden ayrı ayrı ifade edilebildiğini göstermektedir. Böylece Lorentz dönüşümün bileşen bazındaki davranışı açık bir şekilde ortaya çıkmaktadır ve dönme ile boost parametrelerinin spinor üzerindeki etkileri doğrudan takip edilebilmektedir. Ayrıca bu gösterim, önceki bölümde incelenen hiperbolik spinor yapıları ile hiperbolik 4-spinor yapısı arasında bir köprü oluşturmaktadır. Önceki bölümde hiperbolik spinorlar iki bileşenli yapılar olarak ele alınmışken, burada hiperbolik 4-spinorun sağ ve sol hiperbolik 2-spinor bileşenlerinden oluştuğu görülmektedir. Bu nedenle Weyl gösterimi, hiperbolik spinorların iki bileşenli gösteriminden hiperbolik 4-spinor gösterimine kolaylıkla geçiş yapılmasını sağlamaktadır.

Şimdi Lorentz dönüşümünün klasik kompleks spinor gösterimindeki gibi hiperbolik spinorlarla tek matris olarak gösterilmek istensin. Bu durumda hiperbolik eşlenikleri de içinde barındıran Lorentz dönüşümünün hiperbolik spinorlar ile tek matris gösterimi aşağıdaki teoremle verilebilir.

Teorem 4.4.2 ψ_{HS}^W , Weyl gösteriminde hiperbolik 4-spinor olsun. O halde hiperbolik eşleşmeleri bulunduran Lorentz dönüşümünün hiperbolik spinorlarla tek matris gösterimi

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \psi_{HS}^W \\ \overline{\psi_{HS}^W} \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} 1+\frac{\beta_3}{2} & \frac{\alpha_2+\beta_1}{2} & 0 & 0 & \frac{\hbar\alpha_3}{2} & \frac{\hbar(\alpha_1-\beta_2)}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-\alpha_2+\beta_1}{2} & 1-\frac{\beta_3}{2} & 0 & 0 & \frac{\hbar(\alpha_1+\beta_2)}{2} & -\frac{\hbar\alpha_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{\beta_3}{2} & \frac{\alpha_2-\beta_1}{2} & 0 & 0 & \frac{\hbar\alpha_3}{2} & \frac{\hbar(\alpha_1+\beta_2)}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-\alpha_2-\beta_1}{2} & 1+\frac{\beta_3}{2} & 0 & 0 & \frac{\hbar(\alpha_1-\beta_2)}{2} & -\frac{\hbar\alpha_3}{2} \\ \frac{\hbar\alpha_3}{2} & \frac{\hbar(\alpha_1-\beta_2)}{2} & 0 & 0 & 1+\frac{\beta_3}{2} & \frac{\alpha_2+\beta_1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\hbar(\alpha_1+\beta_2)}{2} & -\hbar\alpha_3 & 0 & 0 & \frac{-\alpha_2+\beta_1}{2} & 1-\frac{\beta_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\hbar\alpha_3}{2} & \frac{\hbar(\alpha_1+\beta_2)}{2} & 0 & 0 & 1-\frac{\beta_3}{2} & \frac{\alpha_2-\beta_1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\hbar(\alpha_1-\beta_2)}{2} & \frac{\hbar\alpha_3}{2} & 0 & 0 & \frac{-\alpha_2-\beta_1}{2} & 1+\frac{\beta_3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{HS}^W \\ \overline{\psi_{HS}^W} \end{bmatrix} \\
& \quad \quad \quad (4.21)
\end{aligned}$$

Burada $\psi_{HS}^W = \begin{bmatrix} \psi_L^W \\ \psi_R^W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_1 + \hbar\nu_1 \\ \chi_2 + \hbar\nu_2 \\ \chi_3 + \hbar\nu_3 \\ \chi_4 + \hbar\nu_4 \end{bmatrix}$ ve $\overline{\psi_{HS}^W} = \begin{bmatrix} \overline{\psi_L^W} \\ \overline{\psi_R^W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_1 - \hbar\nu_1 \\ \chi_2 - \hbar\nu_2 \\ \chi_3 - \hbar\nu_3 \\ \chi_4 - \hbar\nu_4 \end{bmatrix}$ şeklindedir.

İspat: ψ_{HS}^W Weyl gösteriminde bir hiperbolik 4-spinor $\psi_{HS}^W = \begin{bmatrix} \psi_L^W \\ \psi_R^W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_1 + \hbar\nu_1 \\ \chi_2 + \hbar\nu_2 \\ \chi_3 + \hbar\nu_3 \\ \chi_4 + \hbar\nu_4 \end{bmatrix}$ olarak göz

önüne alınsın. Bu durumda (4.18) ve (4.19) denklemlerinden $\chi_1 - \hbar\nu_1$, $\chi_2 - \hbar\nu_2$, $\chi_3 - \hbar\nu_3$, $\chi_4 - \hbar\nu_4$ hiperbolik sayıları

$$\begin{aligned}
\chi_1 - \hbar\nu_1 &\rightarrow \chi_1 - \hbar\nu_1 + \frac{1}{2} \left[\frac{\hbar\alpha_1(\chi_2 + \hbar\nu_2) + \alpha_2(\chi_2 - \hbar\nu_2) + \hbar\alpha_3(\chi_1 + \hbar\nu_1)}{+\beta_1(\chi_2 - \hbar\nu_2) - \hbar\beta_2(\chi_2 + \hbar\nu_2) + \beta_3(\chi_1 - \hbar\nu_1)} \right] \\
\chi_2 - \hbar\nu_2 &\rightarrow \chi_2 - \hbar\nu_2 + \frac{1}{2} \left[\frac{\hbar\alpha_1(\chi_1 + \hbar\nu_1) - \alpha_2(\chi_1 - \hbar\nu_1) - \hbar\alpha_3(\chi_2 + \hbar\nu_2)}{+\beta_1(\chi_1 - \hbar\nu_1) + \hbar\beta_2(\chi_1 + \hbar\nu_1) - \beta_3(\chi_2 - \hbar\nu_2)} \right] \\
\chi_3 - \hbar\nu_3 &\rightarrow \chi_3 - \hbar\nu_3 + \frac{1}{2} \left[\frac{\hbar\alpha_1(\chi_4 + \hbar\nu_4) + \alpha_2(\chi_4 - \hbar\nu_4) + \hbar\alpha_3(\chi_3 + \hbar\nu_3)}{-\beta_1(\chi_4 - \hbar\nu_4) + \hbar\beta_2(\chi_4 + \hbar\nu_4) - \beta_3(\chi_3 - \hbar\nu_3)} \right] \\
\chi_4 - \hbar\nu_4 &\rightarrow \chi_4 - \hbar\nu_4 + \frac{1}{2} \left[\frac{\hbar\alpha_1(\chi_3 + \hbar\nu_3) - \alpha_2(\chi_3 - \hbar\nu_3) - \hbar\alpha_3(\chi_4 + \hbar\nu_4)}{-\beta_1(\chi_3 - \hbar\nu_3) - \hbar\beta_2(\chi_3 + \hbar\nu_3) + \beta_3(\chi_4 - \hbar\nu_4)} \right]
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Ek olarak son denklemler ve (4.20) denklemleri göz önüne alınırsa Lorentz dönüşümünün hiperbolik spinorlar ile tek matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} \chi_1 + h\nu_1 \\ \chi_2 + h\nu_2 \\ \chi_3 + h\nu_3 \\ \chi_4 + h\nu_4 \\ \chi_1 - h\nu_1 \\ \chi_2 - h\nu_2 \\ \chi_3 - h\nu_3 \\ \chi_4 - h\nu_4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 + \frac{\beta_3}{2} & \frac{\alpha_2 + \beta_1}{2} & 0 & 0 & h\frac{\alpha_3}{2} & h\frac{(\alpha_1 - \beta_2)}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-\alpha_2 + \beta_1}{2} & 1 - \frac{\beta_3}{2} & 0 & 0 & h\frac{(\alpha_1 + \beta_2)}{2} & -h\frac{\alpha_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\beta_3}{2} & \frac{\alpha_2 - \beta_1}{2} & 0 & 0 & h\frac{\alpha_3}{2} & h\frac{(\alpha_1 + \beta_2)}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-\alpha_2 - \beta_1}{2} & 1 + \frac{\beta_3}{2} & 0 & 0 & h\frac{(\alpha_1 - \beta_2)}{2} & -h\frac{\alpha_3}{2} \\ h\frac{\alpha_3}{2} & h\frac{(\alpha_1 - \beta_2)}{2} & 0 & 0 & 1 + \frac{\beta_3}{2} & \frac{\alpha_2 + \beta_1}{2} & 0 & 0 \\ h\frac{(\alpha_1 + \beta_2)}{2} & -h\alpha_3 & 0 & 0 & \frac{-\alpha_2 + \beta_1}{2} & 1 - \frac{\beta_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h\frac{\alpha_3}{2} & h\frac{\alpha_1 + \beta_2}{2} & 0 & 0 & 1 - \frac{\beta_3}{2} & \frac{\alpha_2 - \beta_1}{2} \\ 0 & 0 & h\frac{(\alpha_1 - \beta_2)}{2} & h\frac{\alpha_3}{2} & 0 & 0 & \frac{-\alpha_2 - \beta_1}{2} & 1 + \frac{\beta_3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 + h\nu_1 \\ \chi_2 + h\nu_2 \\ \chi_3 + h\nu_3 \\ \chi_4 + h\nu_4 \\ \chi_1 - h\nu_1 \\ \chi_2 - h\nu_2 \\ \chi_3 - h\nu_3 \\ \chi_4 - h\nu_4 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. ■

Çalışmanın devamında kolaylık olsun diye daha küçük boyutlu olduğundan Teorem 4.4.1 de verilen (4.17) denklemindeki Lorentz dönüşüm matrisleri ile çalışılacaktır.

Teorem 4.1.1 elde edilen Lorentz dönüşümü, Weyl gösteriminde hiperbolik 4-spinorun sağ ve sol hiperbolik spinor bileşenleri cinsinden aşağıdaki gibi yeniden ifade edilebilir.

Sonuç 4.4.3. Weyl gösteriminde Lorentz dönüşümü, hiperbolik 4-spinorun sol ψ_L^W ve sağ ψ_R^W hiperbolik spinor bileşenleri için

$$\begin{aligned} \psi_L^W &\rightarrow A_L \psi_L^W + B_L \overline{\psi_L^W} \\ \psi_R^W &\rightarrow A_R \psi_R^W + B_R \overline{\psi_R^W} \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Burada

$$A_L = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\beta_3}{2} & \frac{\alpha_2 + \beta_1}{2} \\ \frac{-\alpha_2 + \beta_1}{2} & 1 - \frac{\beta_3}{2} \end{bmatrix}, \quad A_R = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\beta_3}{2} & \frac{\alpha_2 - \beta_1}{2} \\ \frac{-\alpha_2 - \beta_1}{2} & 1 + \frac{\beta_3}{2} \end{bmatrix},$$

$$B_L = \begin{bmatrix} \frac{h\alpha_3}{2} & \frac{h(\alpha_1 - \beta_2)}{2} \\ \frac{h(\alpha_1 + \beta_2)}{2} & -\frac{h\alpha_3}{2} \end{bmatrix}, \quad B_R = \begin{bmatrix} \frac{h\alpha_3}{2} & \frac{h(\alpha_1 + \beta_2)}{2} \\ \frac{h(\alpha_1 - \beta_2)}{2} & -\frac{h\alpha_3}{2} \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Bu gösterim, Lorentz dönüşümünün sağ ve sol hiperbolik spinor bileşenleri üzerindeki etkisinin ayrı ayrı incelenmesine olanak sağlamaktadır. Böylece verilen Lorentz dönüşümünün ayrıştırılmış Weyl gösterimi, uygun temel matrisler tanımlanarak tek türlü olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Sonuç 4.4.4. ψ_{HS}^W , Weyl gösteriminde bir hiperbolik 4-spinor olsun. Bu durumda Lorentz dönüşümünün hiperbolik 4-spinorlar ile Weyl gösteriminde E_i ve F_i ($i=1,2,3$) üreteçleri yardımıyla

$$\psi_{HS}^W \rightarrow (I_4 - \alpha_2 E_2 + \beta_1 F_1 + \beta_3 F_3) \psi_{HS}^W + (\alpha_1 E_1 + \alpha_3 E_3 + \beta_2 F_2) \overline{\psi_{HS}^W} \quad (4.22)$$

şeklinde yazılabilir. Burada E_i, F_i ($i=1,2,3$) üreteçleri

$$E_i = \frac{h}{2} \begin{bmatrix} \tau_i & 0 \\ 0 & \tau_i \end{bmatrix}, \quad F_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_i & 0 \\ 0 & -\tau_i \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

şeklinde olup $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ matrisleri (3.4) denklemlerindeki

$\tau_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\tau_2 = \begin{bmatrix} 0 & -h \\ h & 0 \end{bmatrix}$, $\tau_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ matrislerdir. Ayrıca $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ve

$\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, sırasıyla, koordinat eksenleri etrafındaki Lorentz dönme açıları ve aynı koordinat eksenleri boyunca Lorentz boostlara karşılık gelir.

İspat: $\psi_{HS}^W = \begin{bmatrix} \psi_L^W \\ \psi_R^W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_1 + \mathbf{h}v_1 \\ \chi_2 + \mathbf{h}v_2 \\ \chi_3 + \mathbf{h}v_3 \\ \chi_4 + \mathbf{h}v_4 \end{bmatrix}$ Weyl gösteriminde hiperbolik 4-spinor olsun. (4.17)

denklemindeki Lorentz dönüşüm matrisleri göz önüne alınsın. Bu durumda (4.17) denkleminde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \psi_{HS}^W \rightarrow & \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \mathbf{h} \frac{\alpha_2}{2} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{h} & 0 & 0 \\ -\mathbf{h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{h} \\ 0 & 0 & -\mathbf{h} & 0 \end{bmatrix} + \frac{\beta_1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\beta_3}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \psi_{HS}^W \\ & + \left(\mathbf{h} \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \mathbf{h} \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{h} & 0 & 0 \\ \mathbf{h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{h} \\ 0 & 0 & -\mathbf{h} & 0 \end{bmatrix} \right) \overline{\psi_{HS}^W} \end{aligned}$$

matrisleri elde edilir. (3.4) denklemlerinden $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ matrislerinin

$\tau_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\tau_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{h} \\ \mathbf{h} & 0 \end{bmatrix}$, $\tau_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ olduğu biliniyor. Son eşitlikte bu matrisler göz

önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \psi_{HS}^W \rightarrow & \left(I_4 - \mathbf{h} \frac{\alpha_2}{2} \begin{bmatrix} \tau_2 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{bmatrix} + \frac{\beta_1}{2} \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & -\tau_1 \end{bmatrix} + \frac{\beta_3}{2} \begin{bmatrix} \tau_3 & 0 \\ 0 & -\tau_3 \end{bmatrix} \right) \psi_{HS}^W \\ & + \left(\mathbf{h} \frac{\alpha_1}{2} \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_1 \end{bmatrix} + \mathbf{h} \frac{\alpha_3}{2} \begin{bmatrix} \tau_3 & 0 \\ 0 & \tau_3 \end{bmatrix} + \frac{\beta_2}{2} \begin{bmatrix} \tau_2 & 0 \\ 0 & -\tau_2 \end{bmatrix} \right) \overline{\psi_{HS}^W} \end{aligned}$$

ifadesi bulunur. Son olarak $E_i = \frac{\mathbf{h}}{2} \begin{bmatrix} \tau_i & 0 \\ 0 & \tau_i \end{bmatrix}$, $F_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_i & 0 \\ 0 & -\tau_i \end{bmatrix}$ ($i=1,2,3$) göz önüne alınırsa

Lorentz dönüşümünün Weyl gösteriminde hiperbolik 4-spinor temsili daha sade ifade ile

$$\psi_{HS}^W \rightarrow (I_4 + \beta_3 F_3 - \alpha_2 E_2 + \beta_1 F_1) \psi_{HS}^W + (\alpha_3 E_3 + \alpha_1 E_1 + \beta_2 F_2) \overline{\psi_{HS}^W}$$

şeklinde bulunur. ■

Sonuç 4.4.4’de verilen bu yeniden gösterim, Lorentz dönüşümünün hiperbolik spinor yapısını daha açık hale getirmesinin yanında, ileride verilecek Dirac gösterimi için bir zemin hazırlamaktadır.

Sonuç 4.4.5. Sonuç 4.4.4’de (4.23) denkleminde verilen $E = (E_1, E_2, E_3)$, $F = (F_1, F_2, F_3)$ üreteç matrisleri

$$\begin{array}{llll} [E_1, E_2] = E_3 & [F_1, F_2] = E_3 & [E_1, F_2] = F_3 & [F_1, E_2] = F_3 \\ [E_2, E_3] = E_1 & [F_2, F_3] = E_1 & [E_2, F_3] = F_1 & [F_2, E_3] = F_1 \\ [E_3, E_1] = -E_2 & [F_3, F_1] = -E_2 & [E_3, F_1] = -F_2 & [F_3, E_1] = -F_2 \end{array}$$

şeklinde verilen dönüşüm ilişkilerini sağlar. Bu bağıntılar hiperbolik yapı ile spinor dönüşümleri arasında doğal bir Lie cebiri yapısının oluştuğunu göstermektedir. Burada E_i elemanları cebirin temel dönme bileşenlerini temsil ederken F_i elemanları Lorentz boostları belirleyen bileşenler olarak yorumlanabilir.

İspat. E_i ve F_i ($i=1,2,3$) matris üreteçleri (4.23) denkleminde tanımlandığı şekilde alınsın. Lie çarpımı operatörü $[A, B] = AB - BA$ şeklinde tanımlandığından, gerekli bağıntılar doğrudan matris çarpımları kullanılarak elde edilir. İlk olarak E_i operatörlerinin kendi aralarındaki ilişkileri incelenirse

$$[E_1, E_2] = E_1 E_2 - E_2 E_1 = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_1 \end{bmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \tau_2 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{bmatrix} - \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \tau_2 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{bmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_1 \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \tau_3 & 0 \\ 0 & \tau_3 \end{bmatrix} = E_3$$

$$[E_2, E_3] = E_2 E_3 - E_3 E_2 = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \tau_2 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{bmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \tau_3 & 0 \\ 0 & \tau_3 \end{bmatrix} - \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \tau_3 & 0 \\ 0 & \tau_3 \end{bmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \tau_2 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_1 \end{bmatrix} = E_1$$

$$[E_3, E_1] = E_3 E_1 - E_1 E_3 = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \tau_3 & 0 \\ 0 & \tau_3 \end{bmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_1 \end{bmatrix} - \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_1 \end{bmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \tau_3 & 0 \\ 0 & \tau_3 \end{bmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \tau_2 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{bmatrix} = -E_2$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca F_i operatörlerinin kendi aralarındaki ilişkileri hesaplanırsa

$$[F_1, F_2] = F_1 F_2 - F_2 F_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & -\tau_1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_2 & 0 \\ 0 & -\tau_2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_2 & 0 \\ 0 & -\tau_2 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & -\tau_1 \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \tau_3 & 0 \\ 0 & \tau_3 \end{bmatrix} = E_3$$

$$[F_2, F_3] = F_2 F_3 - F_3 F_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_2 & 0 \\ 0 & -\tau_2 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_3 & 0 \\ 0 & -\tau_3 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_3 & 0 \\ 0 & -\tau_3 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_2 & 0 \\ 0 & -\tau_2 \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_1 \end{bmatrix} = E_1$$

$$[F_3, F_1] = F_3 F_1 - F_1 F_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_3 & 0 \\ 0 & -\tau_3 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & -\tau_1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & -\tau_1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_3 & 0 \\ 0 & -\tau_3 \end{bmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_1 \end{bmatrix} = -E_1$$

olarak bulunur. Diğer çarpımlar hesaplanırsa aralarındaki ilişkilerin

$$[E_1, F_2] = E_1 F_2 - F_2 E_1 = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_2 & 0 \\ 0 & -\tau_2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_2 & 0 \\ 0 & -\tau_2 \end{bmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_3 & 0 \\ 0 & -\tau_3 \end{bmatrix} = F_3$$

$$[E_2, F_3] = E_2 F_3 - F_3 E_2 = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \tau_2 & 0 \\ 0 & -\tau_2 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_3 & 0 \\ 0 & -\tau_3 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_3 & 0 \\ 0 & -\tau_3 \end{bmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \tau_2 & 0 \\ 0 & -\tau_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & -\tau_1 \end{bmatrix} = F_1$$

$$[E_3, F_1] = E_3 F_1 - F_1 E_3 = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \tau_3 & 0 \\ 0 & \tau_3 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & -\tau_1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & -\tau_1 \end{bmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \tau_3 & 0 \\ 0 & \tau_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_2 & 0 \\ 0 & -\tau_2 \end{bmatrix} = -F_2$$

ve

$$[F_1, E_2] = F_1 E_2 - E_2 F_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & -\tau_1 \end{bmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \tau_2 & 0 \\ 0 & -\tau_2 \end{bmatrix} - \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \tau_2 & 0 \\ 0 & -\tau_2 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & -\tau_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_3 & 0 \\ 0 & -\tau_3 \end{bmatrix} = F_3$$

$$[F_2, E_3] = F_2 E_3 - E_3 F_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_2 & 0 \\ 0 & -\tau_2 \end{bmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \tau_3 & 0 \\ 0 & -\tau_3 \end{bmatrix} - \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \tau_3 & 0 \\ 0 & -\tau_3 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_2 & 0 \\ 0 & -\tau_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & -\tau_1 \end{bmatrix} = F_1$$

$$[F_3, E_1] = F_3 E_1 - E_1 F_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_3 & 0 \\ 0 & -\tau_3 \end{bmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_1 \end{bmatrix} - \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_3 & 0 \\ 0 & -\tau_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_2 & 0 \\ 0 & -\tau_2 \end{bmatrix} = -F_2$$

olduğu görülür. ■

Teorem 4.4.6. Teorem 4.4.1 de verilen (4.17) denkleminde Lorentz dönüşüme karşılık gelen matrisler hiperbolik hermityen ise Lorentz dönüşümde dönme parametreleri sıfırdır. Dolayısıyla, Lorentz hareket sadece Lorentz boosttan oluşur.

İspat: Öncelikle Teorem 4.4.1’de verilen Lorentz dönüşümünün Weyl gösteriminde hiperbolik 4-spinorlar cinsinden ifadesinin

$$\psi_{HS}^W \rightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\beta_3}{2} & \frac{\alpha_2 + \beta_1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-\alpha_2 + \beta_1}{2} & -\frac{\beta_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\beta_3}{2} & \frac{\alpha_2 - \beta_1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-\alpha_2 - \beta_1}{2} & \frac{\beta_3}{2} \end{bmatrix} \right) \psi_{HS}^W$$

$$+ \begin{bmatrix} h\frac{\alpha_3}{2} & h\frac{(\alpha_1 - \beta_2)}{2} & 0 & 0 \\ h\frac{(\alpha_1 + \beta_2)}{2} & -h\frac{\alpha_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h\frac{\alpha_3}{2} & h\frac{(\alpha_1 + \beta_2)}{2} \\ 0 & 0 & h\frac{(\alpha_1 - \beta_2)}{2} & -h\frac{\alpha_3}{2} \end{bmatrix} \overline{\psi_{HS}^W}$$

şeklinde olduğu biliniyor. Bu dönüşümde öncelikle

$$\begin{bmatrix} \frac{\beta_3}{2} & \frac{\alpha_2 + \beta_1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-\alpha_2 + \beta_1}{2} & -\frac{\beta_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\beta_3}{2} & \frac{\alpha_2 - \beta_1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-\alpha_2 - \beta_1}{2} & \frac{\beta_3}{2} \end{bmatrix}$$

matrisi hiperbolik hermityen matrisi olarak göz önüne alınsın. Bu durumda Teorem 3.3.15 gereği

$$\begin{bmatrix} \frac{\beta_3}{2} & \frac{\alpha_2 + \beta_1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-\alpha_2 + \beta_1}{2} & -\frac{\beta_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\beta_3}{2} & \frac{\alpha_2 - \beta_1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-\alpha_2 - \beta_1}{2} & \frac{\beta_3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta_3}{2} & \frac{-\alpha_2 + \beta_1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_2 + \beta_1}{2} & -\frac{\beta_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\beta_3}{2} & \frac{-\alpha_2 - \beta_1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_2 - \beta_1}{2} & \frac{\beta_3}{2} \end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla matris eşitliğinden

$$\alpha_2 = 0$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca ikinci olarak

$$\begin{bmatrix} h\frac{\alpha_3}{2} & h\frac{(\alpha_1 - \beta_2)}{2} & 0 & 0 \\ h\frac{(\alpha_1 + \beta_2)}{2} & -h\frac{\alpha_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h\frac{\alpha_3}{2} & h\frac{(\alpha_1 + \beta_2)}{2} \\ 0 & 0 & h\frac{(\alpha_1 - \beta_2)}{2} & -h\frac{\alpha_3}{2} \end{bmatrix} \text{ matrisi}$$

hiperbolik hermityen matris olarak göz önüne alınırsa

$$\begin{bmatrix} h\frac{\alpha_3}{2} & h\frac{(\alpha_1 - \beta_2)}{2} & 0 & 0 \\ h\frac{(\alpha_1 + \beta_2)}{2} & -h\frac{\alpha_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h\frac{\alpha_3}{2} & h\frac{(\alpha_1 + \beta_2)}{2} \\ 0 & 0 & h\frac{(\alpha_1 - \beta_2)}{2} & -h\frac{\alpha_3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h\frac{\alpha_3}{2} & -h\frac{(\alpha_1 + \beta_2)}{2} & 0 & 0 \\ -h\frac{(\alpha_1 - \beta_2)}{2} & h\frac{\alpha_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h\frac{\alpha_3}{2} & -h\frac{(\alpha_1 - \beta_2)}{2} \\ 0 & 0 & -h\frac{(\alpha_1 + \beta_2)}{2} & h\frac{\alpha_3}{2} \end{bmatrix}$$

eşitliği bulunur. Buradan iki matris eşitliğinden ise

$$\alpha_1 = 0$$

ve

$$\alpha_3 = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$ olup dönme parametreleri sıfırdır.

Sonuç olarak Lorentz dönüşüm sadece Lorentz boosttan oluşur. ■

Teorem 4.4.7. Teorem 4.4.1 de verilen (4.17) denkleminde Lorentz dönüşüme karşılık gelen matrisler hiperbolik anti-hermityen ise Lorentz dönüşümde boost parametreleri sıfırdır. Dolayısıyla, Lorentz hareket sadece Lorentz dönmeden oluşur.

İspat . Öncelikle Teorem 4.4.1’de verilen Lorentz dönüşümünün Weyl gösteriminde hiperbolik 4-spinorlar cinsinden ifadesinin

$$\psi_{HS}^W \rightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\beta_3}{2} & \frac{\alpha_2 + \beta_1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-\alpha_2 + \beta_1}{2} & -\frac{\beta_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\beta_3}{2} & \frac{\alpha_2 - \beta_1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-\alpha_2 - \beta_1}{2} & \frac{\beta_3}{2} \end{bmatrix} \right) \psi_{HS}^W$$

$$+ \begin{bmatrix} h \frac{\alpha_3}{2} & h \frac{(\alpha_1 - \beta_2)}{2} & 0 & 0 \\ h \frac{(\alpha_1 + \beta_2)}{2} & -h \frac{\alpha_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h \frac{\alpha_3}{2} & h \frac{(\alpha_1 + \beta_2)}{2} \\ 0 & 0 & h \frac{(\alpha_1 - \beta_2)}{2} & -h \frac{\alpha_3}{2} \end{bmatrix} \overline{\psi_{HS}^W}$$

şeklinde olduğu biliniyor. Bu dönüşümde öncelikle

$$\begin{bmatrix} \frac{\beta_3}{2} & \frac{\alpha_2 + \beta_1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-\alpha_2 + \beta_1}{2} & -\frac{\beta_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\beta_3}{2} & \frac{\alpha_2 - \beta_1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-\alpha_2 - \beta_1}{2} & \frac{\beta_3}{2} \end{bmatrix}$$

matrisi hiperbolik anti-hermityen matrisi olarak göz önüne alınsın. Bu durumda Teorem 3.3.15 gereği

$$\begin{bmatrix} \frac{\beta_3}{2} & \frac{\alpha_2 + \beta_1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-\alpha_2 + \beta_1}{2} & -\frac{\beta_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\beta_3}{2} & \frac{\alpha_2 - \beta_1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-\alpha_2 - \beta_1}{2} & \frac{\beta_3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\beta_3}{2} & \frac{\alpha_2 - \beta_1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-\alpha_2 - \beta_1}{2} & \frac{\beta_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta_3}{2} & \frac{\alpha_2 + \beta_1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-\alpha_2 + \beta_1}{2} & -\frac{\beta_3}{2} \end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla matris eşitliğinden

$$\beta_1 = 0$$

ve

$$\beta_3 = 0$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca ikinci olarak

$$\begin{bmatrix} h\frac{\alpha_3}{2} & h\frac{(\alpha_1 - \beta_2)}{2} & 0 & 0 \\ h\frac{(\alpha_1 + \beta_2)}{2} & -h\frac{\alpha_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h\frac{\alpha_3}{2} & h\frac{(\alpha_1 + \beta_2)}{2} \\ 0 & 0 & h\frac{(\alpha_1 - \beta_2)}{2} & -h\frac{\alpha_3}{2} \end{bmatrix} \text{ matrisi}$$

hiperbolik hermityen matris olarak göz önüne alınırsa

$$\begin{bmatrix} \frac{\hbar \alpha_3}{2} & \frac{\hbar(\alpha_1 - \beta_2)}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\hbar(\alpha_1 + \beta_2)}{2} & -\frac{\hbar \alpha_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\hbar \alpha_3}{2} & \frac{\hbar(\alpha_1 + \beta_2)}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\hbar(\alpha_1 - \beta_2)}{2} & -\frac{\hbar \alpha_3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\hbar \alpha_3}{2} & \frac{\hbar(\alpha_1 + \beta_2)}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\hbar(\alpha_1 - \beta_2)}{2} & -\frac{\hbar \alpha_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\hbar \alpha_3}{2} & \frac{\hbar(\alpha_1 - \beta_2)}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\hbar(\alpha_1 + \beta_2)}{2} & -\frac{\hbar \alpha_3}{2} \end{bmatrix}$$

eşitliği bulunur. Buradan iki matris eşitliğinden ise

$$\beta_2 = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (0, 0, 0)$ olup boost parametreleri sıfırdır.

Sonuç olarak Lorentz dönüşüm sadece Lorentz dönmeden oluşur. ■

Sonuç 4.4.8. Lorentz hareketi sadece dönme parametrelerinden oluşsun. Bu durumda Lorentz boost parametreleri $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (0, 0, 0)$ olacağından (4.17) ve (4.22) denklemlerinden

Lorentz dönüşümü

$$\psi_{HS}^W \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{\alpha_2}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha_2}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\alpha_2}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha_2}{2} & 1 \end{bmatrix} \psi_{HS}^W + \begin{bmatrix} \frac{\hbar \alpha_3}{2} & \frac{\hbar \alpha_1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\hbar \alpha_1}{2} & -\frac{\hbar \alpha_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\hbar \alpha_3}{2} & \frac{\hbar \alpha_1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\hbar \alpha_1}{2} & -\frac{\hbar \alpha_3}{2} \end{bmatrix} \overline{\psi_{HS}^W}$$

veya

$$\psi_{HS}^W \rightarrow (I_4 - \alpha_2 E_2) \psi_{HS}^W + (\alpha_3 E_3 + \alpha_1 E_1) \overline{\psi_{HS}^W}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, koordinat eksenleri etrafındaki Lorentz dönme açılarına karşılık gelir.

Sonuç 4.4.9. Lorentz hareketi sadece Lorentz boost parametrelerinden ifade edilsin. Bu durumda Lorentz dönme parametreleri $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$ olacağından (4.17) ve (4.22) denklemleri yardımıyla Lorentz dönüşümü

$$\psi_{HS}^W \rightarrow \begin{bmatrix} 1 + \frac{\beta_3}{2} & \frac{\beta_1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\beta_1}{2} & 1 - \frac{\beta_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\beta_3}{2} & \frac{-\beta_1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-\beta_1}{2} & 1 + \frac{\beta_3}{2} \end{bmatrix} \psi_{HS}^W + \begin{bmatrix} 0 & -\hbar \frac{\beta_2}{2} & 0 & 0 \\ \hbar \frac{\beta_2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hbar \frac{\beta_2}{2} \\ 0 & 0 & -\hbar \frac{\beta_2}{2} & 0 \end{bmatrix} \overline{\psi_{HS}^W}$$

veya

$$\psi_{HS}^W \rightarrow (I_4 + \beta_3 F_3 + \beta_1 F_1) \psi_{HS}^W + (\beta_2 F_2) \overline{\psi_{HS}^W}$$

olarak yazılabilir. Burada ve $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, koordinat eksenleri boyunca Lorentz boostlara karşılık gelir.

Böylelikle Lorentz dönüşümleri hiperbolik 4-spinorlar cinsinden Weyl gösterimi kullanılarak ifade edilmiştir. Ayrıca, bu dönüşümlerin sağ ve sol hiperbolik spinor bileşenleri üzerindeki etkisi incelenmiştir. Şimdi ise Lorentz dönüşümün hiperbolik 4-spinorlar cinsinden ifadesi Dirac gösterimi kullanılarak incelenecektir. Dirac gösterimi, Weyl gösteriminden ayrı olarak ele alınan sağ ve sol bileşenleri tek bir dört bileşenli hiperbolik spinor altında birleştirmektedir. Özellikle Lorentz dönüşümünün tamamının tek bir hiperbolik 4-spinor üzerinde nasıl gerçekleştiğinin incelenmesi açısından bu gösterim önemli bir avantaj sağlamaktadır. Diğer taraftan, bu geçiş yalnızca farklı bir yazım biçimi olarak değerlendirilmemelidir. Weyl

gösteriminde elde edilen sağ ve sol olarak bölünmüş yapı ile Dirac gösterimindeki birleşik yapı aynı geometrik içeriğin iki farklı görünümünü sunmaktadır. Weyl gösteriminde dönüşümün sağ ve sol bileşenler üzerindeki etkileri ayrı ayrı izlenebilirken, Dirac gösteriminde bu etkiler tek bir hiperbolik spinor yapısı içerisinde birlikte ele alınabilmektedir. Bu nedenle aşağıda Lorentz dönüşümünün hiperbolik 4-spinorlar üzerindeki etkisi Dirac gösteriminde yeniden ele alınacak ve Weyl gösteriminde elde edilen sonuçların bu gösterimdeki karşılıkları verilecektir.

Teorem 4.4.10 Dirac gösteriminde hiperbolik 4-spinor $\psi_{HS}^D = \begin{bmatrix} \mu_1 + \mathbf{h}\mathcal{G}_1 \\ \mu_2 + \mathbf{h}\mathcal{G}_2 \\ \mu_3 + \mathbf{h}\mathcal{G}_3 \\ \mu_4 + \mathbf{h}\mathcal{G}_4 \end{bmatrix}$ olarak verilsin. Bu

durumda Lorentz dönüşümünün Dirac gösteriminde hiperbolik 4-spinorlar cinsinden ifadesi

$$\psi_{HS}^D \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{\alpha_2}{2} & \frac{\beta_3}{2} & \frac{\beta_1}{2} \\ \frac{-\alpha_2}{2} & 1 & \frac{\beta_1}{2} & \frac{-\beta_3}{2} \\ \frac{\beta_3}{2} & \frac{\beta_1}{2} & 1 & \frac{\alpha_2}{2} \\ \frac{\beta_1}{2} & \frac{-\beta_3}{2} & \frac{-\alpha_2}{2} & 1 \end{bmatrix} \psi_{HS}^D + \begin{bmatrix} \mathbf{h}\frac{\alpha_3}{2} & \mathbf{h}\frac{\alpha_1}{2} & 0 & -\mathbf{h}\frac{\beta_2}{2} \\ \mathbf{h}\frac{\alpha_1}{2} & -\mathbf{h}\frac{\alpha_3}{2} & \mathbf{h}\frac{\beta_2}{2} & 0 \\ 0 & -\mathbf{h}\frac{\beta_2}{2} & \mathbf{h}\frac{\alpha_3}{2} & \mathbf{h}\frac{\alpha_1}{2} \\ \mathbf{h}\frac{\beta_2}{2} & 0 & \mathbf{h}\frac{\alpha_1}{2} & -\mathbf{h}\frac{\alpha_3}{2} \end{bmatrix} \overline{\psi_{HS}^D} \quad (4.24)$$

şeklindedir. Burada, $\overline{\psi_{HS}^D} = \begin{bmatrix} \mu_1 - \mathbf{h}\mathcal{G}_1 \\ \mu_2 - \mathbf{h}\mathcal{G}_2 \\ \mu_3 - \mathbf{h}\mathcal{G}_3 \\ \mu_4 - \mathbf{h}\mathcal{G}_4 \end{bmatrix}$ olmak üzere, sırasıyla, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ koordinat

eksenleri etrafındaki Lorentz dönme açıları $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ ise aynı koordinat eksenleri boyunca Lorentz boostlara karşılık gelir.

İspat: ψ_{HS}^D , Dirac gösteriminde bir hiperbolik 4-spinor olmak üzere $\psi_{HS}^D = \begin{bmatrix} \mu_1 + \mathbf{h}\mathcal{G}_1 \\ \mu_2 + \mathbf{h}\mathcal{G}_2 \\ \mu_3 + \mathbf{h}\mathcal{G}_3 \\ \mu_4 + \mathbf{h}\mathcal{G}_4 \end{bmatrix}$

şeklinde göz önüne alınsın. (3.24) ve (3.25) denklemlerinden Lorentz dönüşüm bileşenlerinin arasındaki ilişkilerin

$$\begin{aligned}
\mu_1 &\rightarrow \mu_1 + \frac{1}{2}(-\alpha_1 \mathcal{G}_2 + \alpha_2 \mu_2 - \alpha_3 \mathcal{G}_1 + \beta_1 \mu_4 + \beta_2 \mathcal{G}_4 + \beta_3 \mu_3) \\
\mu_2 &\rightarrow \mu_2 + \frac{1}{2}(-\alpha_1 \mathcal{G}_1 - \alpha_2 \mu_1 + \alpha_3 \mathcal{G}_2 + \beta_1 \mu_3 - \beta_2 \mathcal{G}_3 - \beta_3 \mu_4) \\
\mu_3 &\rightarrow \mu_3 + \frac{1}{2}(-\alpha_1 \mathcal{G}_4 + \alpha_2 \mu_4 - \alpha_3 \mathcal{G}_3 + \beta_1 \mu_2 + \beta_2 \mathcal{G}_2 + \beta_3 \mu_1) \\
\mu_4 &\rightarrow \mu_4 + \frac{1}{2}(-\alpha_1 \mathcal{G}_3 - \alpha_2 \mu_3 + \alpha_3 \mathcal{G}_4 + \beta_1 \mu_1 - \beta_2 \mathcal{G}_1 - \beta_3 \mu_2)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_1 &\rightarrow \mathcal{G}_1 + \frac{1}{2}(\alpha_1 \mu_2 + \alpha_2 \mathcal{G}_2 + \alpha_3 \mu_1 + \beta_1 \mathcal{G}_4 - \beta_2 \mu_4 + \beta_3 \mathcal{G}_3) \\
\mathcal{G}_2 &\rightarrow \mathcal{G}_2 + \frac{1}{2}(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mathcal{G}_1 - \alpha_3 \mu_2 + \beta_1 \mathcal{G}_3 + \beta_2 \mu_3 - \beta_3 \mathcal{G}_4) \\
\mathcal{G}_3 &\rightarrow \mathcal{G}_3 + \frac{1}{2}(\alpha_1 \mu_4 + \alpha_2 \mathcal{G}_4 + \alpha_3 \mu_3 - \beta_1 \mathcal{G}_2 - \beta_2 \mu_2 + \beta_3 \mathcal{G}_1) \\
\mathcal{G}_4 &\rightarrow \mathcal{G}_4 + \frac{1}{2}(\alpha_1 \mu_3 - \alpha_2 \mathcal{G}_3 - \alpha_3 \mu_4 + \beta_1 \mathcal{G}_1 + \beta_2 \mu_1 - \beta_3 \mathcal{G}_2)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

olduğu biliniyor. Bu denklemler $\mu_1 + \mathbf{h}\mathcal{G}_1$, $\mu_2 + \mathbf{h}\mathcal{G}_2$, $\mu_3 + \mathbf{h}\mathcal{G}_3$, $\mu_4 + \mathbf{h}\mathcal{G}_4$ hiperbolik sayılar olarak

$$\begin{aligned}
\mu_1 + \mathbf{h}\mathcal{G}_1 &\rightarrow (\mu_1 + \mathbf{h}\mathcal{G}_1) + \frac{1}{2} \left[\mathbf{h}\alpha_1(\mu_2 - \mathbf{h}\mathcal{G}_2) + \alpha_2(\mu_2 + \mathbf{h}\mathcal{G}_2) + \mathbf{h}\alpha_3(\mu_1 - \mathbf{h}\mathcal{G}_1) \right. \\
&\quad \left. + \beta_1(\mu_4 + \mathbf{h}\mathcal{G}_4) - \mathbf{h}\beta_2(\mu_4 - \mathbf{h}\mathcal{G}_4) + \beta_3(\mu_3 + \mathbf{h}\mathcal{G}_3) \right] \\
\mu_2 + \mathbf{h}\mathcal{G}_2 &\rightarrow (\mu_2 + \mathbf{h}\mathcal{G}_2) + \frac{1}{2} \left[\mathbf{h}\alpha_1(\mu_1 - \mathbf{h}\mathcal{G}_1) - \alpha_2(\mu_1 + \mathbf{h}\mathcal{G}_1) + \mathbf{h}\alpha_3(\mu_2 - \mathbf{h}\mathcal{G}_2) \right. \\
&\quad \left. + \beta_1(\mu_3 + \mathbf{h}\mathcal{G}_3) + \mathbf{h}\beta_2(\mu_3 - \mathbf{h}\mathcal{G}_3) - \beta_3(\mu_4 + \mathbf{h}\mathcal{G}_4) \right] \\
\mu_3 + \mathbf{h}\mathcal{G}_3 &\rightarrow (\mu_3 + \mathbf{h}\mathcal{G}_3) + \frac{1}{2} \left[\mathbf{h}\alpha_1(\mu_4 - \mathbf{h}\mathcal{G}_4) + \alpha_2(\mu_4 + \mathbf{h}\mathcal{G}_4) + \mathbf{h}\alpha_3(\mu_3 - \mathbf{h}\mathcal{G}_3) \right. \\
&\quad \left. - \beta_1(\mu_2 + \mathbf{h}\mathcal{G}_2) - \mathbf{h}\beta_2(\mu_2 - \mathbf{h}\mathcal{G}_2) + \beta_3(\mu_1 + \mathbf{h}\mathcal{G}_1) \right] \\
\mu_4 + \mathbf{h}\mathcal{G}_4 &\rightarrow (\mu_4 + \mathbf{h}\mathcal{G}_4) + \frac{1}{2} \left[\mathbf{h}\alpha_1(\mu_3 - \mathbf{h}\mathcal{G}_3) - \alpha_2(\mu_3 + \mathbf{h}\mathcal{G}_3) - \mathbf{h}\alpha_3(\mu_4 - \mathbf{h}\mathcal{G}_4) \right. \\
&\quad \left. + \beta_1(\mu_1 + \mathbf{h}\mathcal{G}_1) + \mathbf{h}\beta_2(\mu_1 - \mathbf{h}\mathcal{G}_1) - \beta_3(\mu_2 + \mathbf{h}\mathcal{G}_2) \right]
\end{aligned}$$

şeklindeki denklemler elde edilir. Bu denklemlerden yola çıkılarak Dirac gösteriminde ψ_{HS}^D hiperbolik 4-spinorlar cinsinden Lorentz dönüşümünü

$$\begin{bmatrix} \mu_1 + \hbar \mathcal{G}_1 \\ \mu_2 + \hbar \mathcal{G}_2 \\ \mu_3 + \hbar \mathcal{G}_3 \\ \mu_4 + \hbar \mathcal{G}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\alpha_2}{2} & \frac{\beta_3}{2} & \frac{\beta_1}{2} \\ \frac{-\alpha_2}{2} & 1 & \frac{\beta_1}{2} & \frac{-\beta_3}{2} \\ \frac{\beta_3}{2} & \frac{\beta_1}{2} & 1 & \frac{\alpha_2}{2} \\ \frac{\beta_1}{2} & \frac{-\beta_3}{2} & \frac{-\alpha_2}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 + \hbar \mathcal{G}_1 \\ \mu_2 + \hbar \mathcal{G}_2 \\ \mu_3 + \hbar \mathcal{G}_3 \\ \mu_4 + \hbar \mathcal{G}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hbar \frac{\alpha_3}{2} & \hbar \frac{\alpha_1}{2} & 0 & -\hbar \frac{\beta_2}{2} \\ \hbar \frac{\alpha_1}{2} & -\hbar \frac{\alpha_3}{2} & \hbar \frac{\beta_2}{2} & 0 \\ 0 & -\hbar \frac{\beta_2}{2} & \hbar \frac{\alpha_3}{2} & \hbar \frac{\alpha_1}{2} \\ \hbar \frac{\beta_2}{2} & 0 & \hbar \frac{\alpha_1}{2} & -\hbar \frac{\alpha_3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 - \hbar \mathcal{G}_1 \\ \mu_2 - \hbar \mathcal{G}_2 \\ \mu_3 - \hbar \mathcal{G}_3 \\ \mu_4 - \hbar \mathcal{G}_4 \end{bmatrix}$$

ve sonuç olarak

$$\psi_{HS}^D \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{\alpha_2}{2} & \frac{\beta_3}{2} & \frac{\beta_1}{2} \\ \frac{-\alpha_2}{2} & 1 & \frac{\beta_1}{2} & \frac{-\beta_3}{2} \\ \frac{\beta_3}{2} & \frac{\beta_1}{2} & 1 & \frac{\alpha_2}{2} \\ \frac{\beta_1}{2} & \frac{-\beta_3}{2} & \frac{-\alpha_2}{2} & 1 \end{bmatrix} \psi_{HS}^D + \begin{bmatrix} \hbar \frac{\alpha_3}{2} & \hbar \frac{\alpha_1}{2} & 0 & -\hbar \frac{\beta_2}{2} \\ \hbar \frac{\alpha_1}{2} & -\hbar \frac{\alpha_3}{2} & \hbar \frac{\beta_2}{2} & 0 \\ 0 & -\hbar \frac{\beta_2}{2} & \hbar \frac{\alpha_3}{2} & \hbar \frac{\alpha_1}{2} \\ \hbar \frac{\beta_2}{2} & 0 & \hbar \frac{\alpha_1}{2} & -\hbar \frac{\alpha_3}{2} \end{bmatrix} \overline{\psi_{HS}^D}$$

şeklinde bulunur. Burada, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ve $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, sırasıyla, koordinat eksenleri etrafındaki Lorentz dönme açıları ve $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ ise aynı koordinat eksenleri boyunca Lorentz boostlara karşılık gelir. ■

Trorem 4.4.10’da Lorentz dönüşümünün Dirac gösterimindeki hiperbolik 4-spinorlarla ifadesi açık matris formunda elde edilmiştir. Bu gösterim dönüşümün bileşenlerini doğrudan ortaya koyarak Lorentz dönüşümünü ifade eden hiperbolik spinor yapıyı açık biçimde göstermektedir. Özellikle dönüşümün dönme ve boost bileşenlerinin hangi üreteçler tarafından oluşturulduğunu görmek açısından daha sade bir gösterime ihtiyaç duyulmaktadır. Bu nedenle şimdi Lorentz dönüşümü Dirac gösterimine karşılık gelen üreteç matrisleri yardımıyla yeniden ifade edilecektir. Böylece dönüşümün yapısı daha kısa ve düzenli bir biçimde yazılmış olacaktır.

Sonuç 4.4.11. Dirac gösteriminde tanımlı bir hiperbolik 4-spinor ψ_{HS}^D olsun. Bu durumda Lorentz dönüşümünün hiperbolik 4-spinorlar ile Dirac gösterimine karşılık gelen E_i ve D_i ($i = 1, 2, 3$) üreteçleri yardımıyla

$$\psi_{HS}^D \rightarrow (I_4 - \alpha_2 E_2 + \beta_1 D_1 + \beta_3 D_3) \psi_{HS}^D + (\alpha_1 E_1 + \alpha_3 E_3 + \beta_2 D_2) \overline{\psi_{HS}^D} \quad (4.27)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada E_i, D_i ($i=1,2,3$) üreteçleri $E_i = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \tau_i & 0 \\ 0 & \tau_i \end{bmatrix}$ $D_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tau_i \\ \tau_i & 0 \end{bmatrix}$ şeklinde olup $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ve $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, sırasıyla, koordinat eksenleri etrafındaki Lorentz dönme açıları ve aynı koordinat eksenleri boyunca Lorentz boostlara karşılık gelir.

İspat. $\psi_{HS}^D = \begin{bmatrix} \mu_1 + J\mathcal{G}_1 \\ \mu_2 + J\mathcal{G}_2 \\ \mu_3 + J\mathcal{G}_3 \\ \mu_4 + J\mathcal{G}_4 \end{bmatrix}$ Dirac gösteriminde ifade edilen bir hiperbolik 4-spinor olsun. (4.26)

dönüşümündeki Lorentz dönüşüm matrisleri göz önüne alınsın. Bu durumda (4.26) dönüşümünde gerekli düzenlemeler yapılırsa Lorentz dönüşümü

$$\begin{aligned} \psi_{HS}^D \rightarrow & \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \hbar \frac{\alpha_2}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\beta_1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\beta_3}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \psi_{HS}^D \\ & + \left(\hbar \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 & \hbar & 0 & 0 \\ \hbar & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hbar \\ 0 & 0 & \hbar & 0 \end{bmatrix} + \hbar \alpha_3 \begin{bmatrix} \hbar & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\hbar & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hbar & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\hbar \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\hbar \\ 0 & 0 & \hbar & 0 \\ 0 & -\hbar & 0 & 0 \\ \hbar & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \overline{\psi_{HS}^D} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. (3.4) denklemindeki $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ matrisleri göz önüne alınırsa bu matrislerin $\tau_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\tau_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\hbar \\ \hbar & 0 \end{bmatrix}$, $\tau_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ olduğu biliniyor. Bu durumda son eşitlik $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ matrisleri cinsinden

$$\begin{aligned} \psi_{HS}^D \rightarrow & \left(I_4 - \mathbf{h} \frac{\alpha_2}{2} \begin{bmatrix} \tau_2 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{bmatrix} + \frac{\beta_1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tau_1 \\ \tau_1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\beta_3}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tau_3 \\ \tau_3 & 0 \end{bmatrix} \right) \psi_{HS}^D \\ & + \left(\mathbf{h} \frac{\alpha_1}{2} \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_1 \end{bmatrix} + \mathbf{h} \frac{\alpha_3}{2} \begin{bmatrix} \tau_3 & 0 \\ 0 & \tau_3 \end{bmatrix} + \frac{\beta_2}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tau_2 \\ \tau_2 & 0 \end{bmatrix} \right) \overline{\psi_{HS}^D} \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Son olarak son eşitlikteki üreteç matrisleri $E_i = \frac{\mathbf{h}}{2} \begin{bmatrix} \tau_i & 0 \\ 0 & \tau_i \end{bmatrix}$ $D_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tau_i \\ \tau_i & 0 \end{bmatrix}$ olarak göz önüne alınırsa Lorentz dönüşümünün Dirac gösteriminde hiperbolik 4-spinor temsili daha sade bir ifade ile

$$\psi_{HS}^D \rightarrow (I_4 - \alpha_2 E_2 + \beta_1 D_1 + \beta_3 D_3) \psi_{HS}^D + (\alpha_1 E_1 + \alpha_3 E_3 + \beta_2 D_2) \overline{\psi_{HS}^D}$$

şeklinde bulunur. Burada $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ve $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, sırasıyla, koordinat eksenleri etrafındaki Lorentz dönme açıları ve aynı koordinat eksenleri boyunca Lorentz boostlara karşılık gelir. ■

Sonuç 4.4.4' de verilen Lorentz dönüşümünün Weyl gösteriminde hiperbolik spinorlarla ifadesindeki üreteç matrisleri ile Sonuç 4.4.11' de verilen Dirac gösteriminde hiperbolik 4-spinorlarla elde edilen ifadedeki kullanılan üreteç matrislerinin tamamen bağımsız değildir. Her

ikisinde de $E_i = \frac{\mathbf{h}}{2} \begin{bmatrix} \tau_i & 0 \\ 0 & \tau_i \end{bmatrix}$ ($i=1,2,3$) üreteç matrisleri ortak olup $F_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_i & 0 \\ 0 & -\tau_i \end{bmatrix}$ ve

$D_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tau_i \\ \tau_i & 0 \end{bmatrix}$ ($i=1,2,3$) üreteçleri arasında bir ilişki bulunmaktadır. Aşağıdaki sonuç bu ilişkiyi ifade etmektedir.

Sonuç 4.4.12. Lorentz dönüşümünün Weyl gösterimindeki hiperbolik spinorlar cinsinden

ifadesinde yer alan $F_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_i & 0 \\ 0 & -\tau_i \end{bmatrix}$ ($i=1,2,3$) üreteç matrisleri ile Dirac gösterimindeki

hiperbolik 4-spinorlar cinsinden ifadesinde yer alan $D_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tau_i \\ \tau_i & 0 \end{bmatrix}$ ($i=1,2,3$) üreteç

matrisleri arasında

$$D_i = CF_i \quad (i=1,2,3)$$

ilişkisi vardır. Burada $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ dir. Böylece, Lorentz dönüşümünün Dirac gösteriminde ortaya çıkan $D_i \ (i=1,2,3)$ üreteçlerinin Weyl gösteriminde elde edilen $F_i \ (i=1,2,3)$ üreteçleri yardımıyla ifade edilebildiği görülmektedir.

İspat. Lorentz dönüşümünün Weyl gösterimindeki hiperbolik spinorlar cinsinden ifadesinde yer alan $F_i \ (i=1,2,3)$ üreteç matrislerinin Sonuç 4.4.4' den

$$F_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & -\tau_1 \end{bmatrix}, F_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_2 & 0 \\ 0 & -\tau_2 \end{bmatrix}, F_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau_3 & 0 \\ 0 & -\tau_3 \end{bmatrix} \text{ olduğu ve Dirac gösterimindeki}$$

$D_i \ (i=1,2,3)$ üreteçlerinin Sonuç 4.4.11' den

$$D_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tau_1 \\ \tau_1 & 0 \end{bmatrix}, D_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tau_2 \\ \tau_2 & 0 \end{bmatrix}, D_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tau_3 \\ \tau_3 & 0 \end{bmatrix} \text{ şeklinde olduğu biliniyor. O halde bu}$$

matrisler yardımıyla

$$\begin{aligned} CF_1 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & -\tau_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tau_1 \\ \tau_1 & 0 \end{bmatrix} = D_1, \\ CF_2 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_2 & 0 \\ 0 & -\tau_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tau_2 \\ \tau_2 & 0 \end{bmatrix} = D_2, \\ CF_3 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_3 & 0 \\ 0 & -\tau_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tau_3 \\ \tau_3 & 0 \end{bmatrix} = D_3 \end{aligned}$$

olduğu kolaylıkla görülür. ■

Sonuç.4.4.13. Teorem 4.4.11 de bulunan (4.27) denkleminde $D = (D_1, D_2, D_3)$ matrisleri aşağıdaki ilişkileri sağlar

$$\begin{aligned} [D_1, D_2] &= E_3 \\ [D_2, D_3] &= E_1 \\ [D_3, D_1] &= -E_2 \end{aligned}$$

İspat.

$$[D_1, D_2] = D_1 D_2 - D_2 D_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tau_1 \\ \tau_1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tau_2 \\ \tau_2 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tau_2 \\ \tau_2 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tau_1 \\ \tau_1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \tau_3 & 0 \\ 0 & \tau_3 \end{bmatrix} = E_3$$

$$[D_2, D_3] = D_2 D_3 - D_3 D_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tau_2 \\ \tau_2 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tau_3 \\ \tau_3 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tau_3 \\ \tau_3 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tau_2 \\ \tau_2 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \tau_2 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{bmatrix} = E_1$$

$$[D_3, D_1] = D_3 D_1 - D_1 D_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tau_1 \\ \tau_1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tau_3 \\ \tau_3 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tau_3 \\ \tau_3 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tau_1 \\ \tau_1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_1 \end{bmatrix} = -E_2$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. ■

Sonuç 4.4.14. Dirac gösteriminde Lorentz dönüşümünün hiperbolik 4-spinorlarla ifadesinde dönme parametrelerinin sıfır yani $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$ olduğu göz önüne alınsın. Bu durumda Lorentz dönüşümü sadece Lorentz boosttan oluşur ve bu dönüşüm

$$\psi_{HS}^D \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\beta_3}{2} & \frac{\beta_1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{\beta_1}{2} & -\frac{\beta_3}{2} \\ \frac{\beta_3}{2} & \frac{\beta_1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{\beta_1}{2} & -\frac{\beta_3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \psi_{HS}^D + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\hbar \frac{\beta_2}{2} \\ 0 & 0 & \hbar \frac{\beta_2}{2} & 0 \\ 0 & -\hbar \frac{\beta_2}{2} & 0 & 0 \\ \hbar \frac{\beta_2}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overline{\psi_{HS}^D}$$

veya

$$\psi_{HS}^D \rightarrow (I_4 + \beta_1 D_1 + \beta_3 D_3) \psi_{HS}^D + (\beta_2 D_2) \overline{\psi_{HS}^D}$$

şeklinde ifade edilir.

Sonuç 4.4.15. Dirac gösteriminde Lorentz dönüşümünün hiperbolik 4-spinorlarla ifadesinde boost parametrelerinin sıfır yani $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (0, 0, 0)$ olarak alınsın. Bu durumda Lorentz dönüşümü sadece dönmeden oluşur ve bu dönüşüm

$$\psi_{HS}^D \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{\alpha_2}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-\alpha_2}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\alpha_2}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-\alpha_2}{2} & 1 \end{bmatrix} \psi_{HS}^D + \begin{bmatrix} h\frac{\alpha_3}{2} & h\frac{\alpha_1}{2} & 0 & 0 \\ h\frac{\alpha_1}{2} & -h\frac{\alpha_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h\frac{\alpha_3}{2} & h\frac{\alpha_1}{2} \\ 0 & 0 & h\frac{\alpha_1}{2} & -h\frac{\alpha_3}{2} \end{bmatrix} \overline{\psi_{HS}^D}$$

veya

$$\psi_{HS}^D \rightarrow (I_4 - \alpha_2 E_2) \psi_{HS}^D + (\alpha_1 E_1 + \alpha_3 E_3) \overline{\psi_{HS}^D}$$

şeklinde ifade edilir.

Weyl ve Dirac gösterimlerinde elde edilen Lorentz dönüşümlerinin aynı fiziksel ve geometrik yapıyı farklı bazlar altında ifade ettiği daha önceden bahsedilmiştir. Bu durum yalnızca üreteç matrisleri arasında değildir. Söz konusu gösterimlerde kullanılan hiperbolik spinorlar arasında da doğrudan bir ilişki bulunmaktadır. Sonuç olarak önceki sonuçlarda elde edilen üreteç matrisleri arasındaki ilişki Weyl ve Dirac gösterimlerindeki hiperbolik 4-spinorların uygun bir dönüşüm matrisi yardımıyla birbirine dönüştürülebileceğini ortaya koymaktadır. Bu ilişki aşağıdaki sonuçta verilmektedir.

Sonuç 4.4.16. Weyl gösteriminde hiperbolik spinor ψ_{HS}^W ile Dirac gösteriminde tanımlanan hiperbolik 4-spinor ψ_{HS}^D arasında

$$\psi_{HS}^D = \mu \psi_{HS}^W \quad (4.28)$$

bağıntısı vardır. Burada $\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ şeklindedir.

İspat. $\mu\psi_{HS}^W$ hesaplınsın. O halde

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 + \hbar\nu_1 \\ \chi_2 + \hbar\nu_2 \\ \chi_3 + \hbar\nu_3 \\ \chi_4 + \hbar\nu_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_1 + \hbar\nu_1 + \chi_3 + \hbar\nu_3 \\ \chi_2 + \hbar\nu_2 + \chi_4 + \hbar\nu_4 \\ \chi_1 + \hbar\nu_1 - \chi_3 - \hbar\nu_3 \\ \chi_2 + \hbar\nu_2 - \chi_4 - \hbar\nu_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (\chi_1 + \chi_3) + \hbar(\nu_1 + \nu_3) \\ (\chi_2 + \chi_4) + \hbar(\nu_2 + \nu_4) \\ (\chi_1 - \chi_3) + \hbar(\nu_1 - \nu_3) \\ (\chi_2 - \chi_4) + \hbar(\nu_2 - \nu_4) \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan $\psi_{HS}^D = \mu\psi_{HS}^W$ olarak alınır

$$\begin{bmatrix} \mu_1 + \hbar\mathcal{G}_1 \\ \mu_2 + \hbar\mathcal{G}_2 \\ \mu_3 + \hbar\mathcal{G}_3 \\ \mu_4 + \hbar\mathcal{G}_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (\chi_1 + \chi_3) + \hbar(\nu_1 + \nu_3) \\ (\chi_2 + \chi_4) + \hbar(\nu_2 + \nu_4) \\ (\chi_1 - \chi_3) + \hbar(\nu_1 - \nu_3) \\ (\chi_2 - \chi_4) + \hbar(\nu_2 - \nu_4) \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_1 + \chi_3) & \mathcal{G}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu_1 + \nu_3) \\ \mu_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_2 + \chi_4) & \mathcal{G}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu_2 + \nu_4) \\ \mu_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_1 - \chi_3) & \mathcal{G}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu_1 - \nu_3) \\ \mu_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_2 - \chi_4) & \mathcal{G}_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu_2 - \nu_4) \end{aligned} \tag{4.29}$$

elde edilir. Gerçekten de (4.29) denklemleri (4.25) ve (4.26) denklemlerinde yerine yazılırsa (4.18) ve (4.19) denklemleri elde edilir. ■

4.4.2 Split kuaterniyonlara karşılık gelen hiperbolik 4-spinorlarla Lorentz dönüşümlerinin gösterimi

Önceki bölümlerde Lorentz dönüşümleri, Weyl ve Dirac gösterimlerinde tanımlanan hiperbolik spinorlar yardımıyla incelenmiştir. Ancak elde edilen Lorentz dönüşüm denklemlerinde hiperbolik spinor ile eşleniğinin birlikte yer aldığı görülmektedir. Dolayısıyla Lorentz dönüşümü, birbirleriyle ilişkili iki ayrı terimin katkısı ile ifade edilmektedir. Bu bölümde ise split kuaterniyonlara karşılık gelen hiperbolik 4-spinorlar kullanılarak farklı bir yaklaşım ele alınmaktadır. Kurulan bu gösterim sayesinde Lorentz dönüşümü doğrudan tek bir hiperbolik 4-spinor üzerinde tanımlı bir matris dönüşümü biçiminde yazılabilmektedir. Böylece önceki gösterimlerde ortaya çıkan eşlenik bileşenlere ilişkin ayırım ortadan kalkmaktadır ve dönüşüm daha bütüncül bir yapıda ifade edilmektedir. Bu durum hem Lorentz dönüşümünün yapısını daha açık hale getirir hem de split kuaterniyonlar ile hiperbolik spinorlar arasındaki ilişkinin geometrik sonuçlarını daha görünür kılmaktadır. Aşağıda, split kuaterniyonlara karşılık gelen hiperbolik 4-spinorlar yardımıyla Lorentz dönüşümünün elde edilişi ayrıntılı olarak verilecektir.

Teorem 4.4.17 $\partial = \partial_1 + \partial_2 \mathbf{i} + \partial_3 \mathbf{j} + \partial_4 \mathbf{k}$, $\Upsilon = \Upsilon_1 + \Upsilon_2 \mathbf{i} + \Upsilon_3 \mathbf{j} + \Upsilon_4 \mathbf{k} \in \mathbb{H}_S$ herhangi iki split kuaterniyon olsun. (4.2) dönüşümü yardımıyla, sırasıyla, $\partial, \Upsilon \in \mathbb{H}_S$ split kuaterniyonlarına karşılık gelen hiperbolik spinorlar $\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 + \mathbf{h}\partial_4 \\ -\partial_2 + \mathbf{h}\partial_3 \end{bmatrix}$ ve $\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Upsilon_1 + \mathbf{h}\Upsilon_4 \\ -\Upsilon_2 + \mathbf{h}\Upsilon_3 \end{bmatrix}$ olarak göz önüne alınsın. O halde, Δ ve Θ hiperbolik spinorlarından oluşan ve $\partial, \Upsilon \in \mathbb{H}_S$ split

kuaterniyon ikilisine karşılık gelen hiperbolik 4-spinor $\psi_{HS}^{SQ} = \begin{bmatrix} \partial_1 + \mathbf{h}\partial_4 \\ -\partial_2 + \mathbf{h}\partial_3 \\ \Upsilon_1 + \mathbf{h}\Upsilon_4 \\ -\Upsilon_2 + \mathbf{h}\Upsilon_3 \end{bmatrix}$ olmak üzere bu

hiperbolik 4-spinor cinsinden Lorentz dönüşümü

$$\psi_{HS}^{SQ} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 - \mathbf{h}\frac{\beta_1}{2} & \frac{-\alpha_3 + \mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} \\ \frac{\alpha_3 + \mathbf{h}\beta_2}{2} & 1 + \mathbf{h}\frac{\beta_1}{2} & \frac{-\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & \frac{\alpha_1}{2} \\ -\frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & 1 - \mathbf{h}\frac{\beta_1}{2} & \frac{\alpha_3 - \mathbf{h}\beta_2}{2} \\ \frac{-\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & -\frac{\alpha_1}{2} & \frac{-\alpha_3 - \mathbf{h}\beta_2}{2} & 1 + \mathbf{h}\frac{\beta_1}{2} \end{bmatrix} \psi_{HS}^{SQ}$$

şeklinde yazılır. Burada, sırasıyla, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ koordinat eksenleri etrafındaki Lorentz dönme açıları $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ ise aynı koordinat eksenleri boyunca Lorentz boostlara karşılık gelir.

İspat: $\partial = \partial_1 + \partial_2 \mathbf{i} + \partial_3 \mathbf{j} + \partial_4 \mathbf{k}$, $\Upsilon = \Upsilon_1 + \Upsilon_2 \mathbf{i} + \Upsilon_3 \mathbf{j} + \Upsilon_4 \mathbf{k} \in \mathbb{H}_S$ herhangi iki split kuaterniyonuna karşılık gelen hiperbolik spinorlar $\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 + \mathbf{h}\partial_4 \\ -\partial_2 + \mathbf{h}\partial_3 \end{bmatrix}$,

$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Upsilon_1 + \mathbf{h}\Upsilon_4 \\ -\Upsilon_2 + \mathbf{h}\Upsilon_3 \end{bmatrix}$ hiperbolik spinorlarından oluşan ve $\partial, \Upsilon \in \mathbb{H}_S$ split kuaterniyon

ikilisine karşılık gelen hiperbolik 4-spinor $\psi_{HS}^{SQ} = \begin{bmatrix} \partial_1 + \mathbf{h}\partial_4 \\ -\partial_2 + \mathbf{h}\partial_3 \\ \Upsilon_1 + \mathbf{h}\Upsilon_4 \\ -\Upsilon_2 + \mathbf{h}\Upsilon_3 \end{bmatrix}$ olsun. O halde, (3.29) ve (3.30)

denklemlerinden Lorentz dönüşüm bileşenlerinin

$$\begin{aligned} \partial_1 &\rightarrow \partial_1 + \frac{1}{2}(\alpha_1 \Upsilon_1 - \alpha_2 \Upsilon_2 + \alpha_3 \partial_2 - \beta_1 \partial_4 + \beta_2 \partial_3 + \beta_3 \Upsilon_3) \\ \partial_2 &\rightarrow \partial_2 + \frac{1}{2}(\alpha_1 \Upsilon_2 + \alpha_2 \Upsilon_1 - \alpha_3 \partial_1 - \beta_1 \partial_3 - \beta_2 \partial_4 - \beta_3 \Upsilon_4) \\ \partial_3 &\rightarrow \partial_3 + \frac{1}{2}(\alpha_1 \Upsilon_3 - \alpha_2 \Upsilon_4 + \alpha_3 \partial_4 - \beta_1 \partial_2 + \beta_2 \partial_1 + \beta_3 \Upsilon_1) \\ \partial_4 &\rightarrow \partial_4 + \frac{1}{2}(\alpha_1 \Upsilon_4 + \alpha_2 \Upsilon_3 - \alpha_3 \partial_3 - \beta_1 \partial_1 - \beta_2 \partial_2 + \beta_3 \Upsilon_3) \\ \Upsilon_1 &\rightarrow \Upsilon_1 + \frac{1}{2}(-\alpha_1 \partial_1 - \alpha_2 \partial_2 - \alpha_3 \Upsilon_2 - \beta_1 \Upsilon_4 - \beta_2 \Upsilon_3 + \beta_3 \partial_3) \\ \Upsilon_2 &\rightarrow \Upsilon_2 + \frac{1}{2}(-\alpha_1 \partial_2 + \alpha_2 \partial_1 + \alpha_3 \Upsilon_1 - \beta_1 \Upsilon_3 + \beta_2 \Upsilon_4 - \beta_3 \partial_4) \\ \Upsilon_3 &\rightarrow \Upsilon_3 + \frac{1}{2}(-\alpha_1 \partial_3 - \alpha_2 \partial_4 - \alpha_3 \Upsilon_4 - \beta_1 \Upsilon_2 - \beta_2 \Upsilon_1 + \beta_3 \partial_1) \\ \Upsilon_4 &\rightarrow \Upsilon_4 + \frac{1}{2}(-\alpha_1 \partial_4 + \alpha_2 \partial_3 + \alpha_3 \Upsilon_3 - \beta_1 \Upsilon_1 + \beta_2 \Upsilon_2 - \beta_3 \partial_2) \end{aligned}$$

olduğu göz önüne alınırsa bu denklemlerden $\partial_1 + \mathbf{h}\partial_4, -\partial_2 + \mathbf{h}\partial_3, \Upsilon_1 + \mathbf{h}\Upsilon_4, -\Upsilon_2 + \mathbf{h}\Upsilon_3$ hiperbolik sayıları

$$\begin{aligned}
\partial_1 + \hbar \partial_4 &\rightarrow \partial_1 + \hbar \partial_4 + \frac{1}{2} \left[\hbar \alpha_1 (\Upsilon_1 + \hbar \Upsilon_4) + \alpha_2 (-\Upsilon_2 + \hbar \Upsilon_3) - \alpha_3 (-\partial_2 + \hbar \partial_3) \right. \\
&\quad \left. - \hbar \beta_1 (\partial_1 + \hbar \partial_4) + \hbar \beta_2 (-\partial_2 + \hbar \partial_3) - \hbar \beta_3 (-\Upsilon_2 + \hbar \Upsilon_3) \right] \\
-\partial_2 + \hbar \partial_3 &\rightarrow -\partial_2 + \hbar \partial_3 + \frac{1}{2} \left[\alpha_1 (-\Upsilon_2 + \hbar \Upsilon_3) - \alpha_2 (\Upsilon_1 + \hbar \Upsilon_4) + \alpha_3 (\partial_1 + \hbar \partial_4) \right. \\
&\quad \left. + \hbar \beta_1 (-\partial_2 + \hbar \partial_3) + \hbar \beta_2 (\partial_1 + \hbar \partial_4) + \hbar \beta_3 (\Upsilon_1 + \hbar \Upsilon_4) \right] \\
\Upsilon_1 + \hbar \Upsilon_4 &\rightarrow \Upsilon_1 + \hbar \Upsilon_4 + \frac{1}{2} \left[-\alpha_1 (\partial_1 + \hbar \partial_4) + \alpha_2 (-\partial_2 + \hbar \partial_3) + \alpha_3 (-\Upsilon_2 + \hbar \Upsilon_3) \right. \\
&\quad \left. - \hbar \beta_1 (\Upsilon_1 + \hbar \Upsilon_4) - \hbar \beta_2 (-\Upsilon_2 + \hbar \Upsilon_3) + \hbar \beta_3 (-\partial_2 + \hbar \partial_3) \right] \\
-\Upsilon_2 + \hbar \Upsilon_3 &\rightarrow -\Upsilon_2 + \hbar \Upsilon_3 + \frac{1}{2} \left[-\alpha_1 (-\partial_2 + \hbar \partial_3) - \alpha_2 (\partial_1 + \hbar \partial_4) - \alpha_3 (\Upsilon_1 + \hbar \Upsilon_4) \right. \\
&\quad \left. + \hbar \beta_1 (-\Upsilon_2 + \hbar \Upsilon_3) - \hbar \beta_2 (\Upsilon_1 + \hbar \Upsilon_4) + \hbar \beta_3 (\partial_1 + \hbar \partial_4) \right]
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Bu durumda bu denklemlerin matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} \partial_1 + \hbar \partial_4 \\ -\partial_2 + \hbar \partial_3 \\ \Upsilon_1 + \hbar \Upsilon_4 \\ -\Upsilon_2 + \hbar \Upsilon_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 - \hbar \frac{\beta_1}{2} & \frac{-\alpha_3 + \hbar \beta_2}{2} & \frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2 + \hbar \beta_3}{2} \\ \frac{\alpha_3 + \hbar \beta_2}{2} & 1 + \hbar \frac{\beta_1}{2} & \frac{-\alpha_2 + \hbar \beta_3}{2} & \frac{\alpha_1}{2} \\ -\frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2 + \hbar \beta_3}{2} & 1 - \hbar \frac{\beta_1}{2} & \frac{\alpha_3 - \hbar \beta_2}{2} \\ \frac{-\alpha_2 + \hbar \beta_3}{2} & -\frac{\alpha_1}{2} & \frac{-\alpha_3 - \hbar \beta_2}{2} & 1 + \hbar \frac{\beta_1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_1 + \hbar \partial_4 \\ -\partial_2 + \hbar \partial_3 \\ \Upsilon_1 + \hbar \Upsilon_4 \\ -\Upsilon_2 + \hbar \Upsilon_3 \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir. Dolayısıyla Lorentz dönüşümünün split kuaterniyonlarına karşılık gelen

$$\text{hiperbolik 4-spinor } \psi_{HS}^{SQ} = \begin{bmatrix} \partial_1 + \hbar \partial_4 \\ -\partial_2 + \hbar \partial_3 \\ \Upsilon_1 + \hbar \Upsilon_4 \\ -\Upsilon_2 + \hbar \Upsilon_3 \end{bmatrix} \text{ cinsinden ifadesi}$$

$$\psi_{HS}^{SQ} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1-\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{-\alpha_3+\mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2+\mathbf{h}\beta_3}{2} \\ \frac{\alpha_3+\mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{1+\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{-\alpha_2+\mathbf{h}\beta_3}{2} & \frac{\alpha_1}{2} \\ -\frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2+\mathbf{h}\beta_3}{2} & \frac{1-\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{\alpha_3-\mathbf{h}\beta_2}{2} \\ \frac{-\alpha_2+\mathbf{h}\beta_3}{2} & -\frac{\alpha_1}{2} & \frac{-\alpha_3-\mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{1+\mathbf{h}\beta_1}{2} \end{bmatrix} \psi_{HS}^{SQ}$$

olarak elde edilir. Burada, sırasıyla, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ koordinat eksenleri etrafındaki Lorentz dönme açıları $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ ise aynı koordinat eksenleri boyunca Lorentz boostlara karşılık gelir. ■

Sonuç 4.4.18: $\partial = \partial_1 + \partial_2 \mathbf{i} + \partial_3 \mathbf{j} + \partial_4 \mathbf{k}$, $\Upsilon = \Upsilon_1 + \Upsilon_2 \mathbf{i} + \Upsilon_3 \mathbf{j} + \Upsilon_4 \mathbf{k} \in \mathbb{H}_S$ herhangi iki split kuaterniyona karşılık gelen Δ ve Θ hiperbolik spinorlarından oluşan hiperbolik 4-spinor ψ_{HS}^{SQ} olsun. Teorem 4.4.17’de verilen Lorentz dönüşüm matrisi hiperbolik anti hermityen matristir.

İspat: $\partial, \Upsilon \in \mathbb{H}_S$ herhangi iki split kuaterniyona karşılık gelen hiperbolik 4-spinor ψ_{HS}^{SQ} olmak üzere split kuaterniyonlara karşılık gelen hiperbolik 4-spinorlar cinsinden Lorentz dönüşümü Teorem 4.2.17’ de verilen haliyle

$$\psi_{HS}^{SQ} \rightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{-\alpha_3+\mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2+\mathbf{h}\beta_3}{2} \\ \frac{\alpha_3+\mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{-\alpha_2+\mathbf{h}\beta_3}{2} & \frac{\alpha_1}{2} \\ -\frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2+\mathbf{h}\beta_3}{2} & \frac{-\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{\alpha_3-\mathbf{h}\beta_2}{2} \\ \frac{-\alpha_2+\mathbf{h}\beta_3}{2} & -\frac{\alpha_1}{2} & \frac{-\alpha_3-\mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} \end{bmatrix} \right) \psi_{HS}^{SQ}$$

olduğu biliniyor. O halde

$$\begin{bmatrix} -\frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{-\alpha_3 + \mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} \\ \frac{\alpha_3 + \mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{-\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & \frac{\alpha_1}{2} \\ -\frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & -\frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{\alpha_3 - \mathbf{h}\beta_2}{2} \\ \frac{-\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & -\frac{\alpha_1}{2} & \frac{-\alpha_3 - \mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} \end{bmatrix}$$

matrisi göz önüne alınsın. Bu durumda bu matrisin eşlenik transpozuz

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{\alpha_3 - \mathbf{h}\beta_2}{2} & -\frac{\alpha_1}{2} & \frac{-\alpha_2 - \mathbf{h}\beta_3}{2} \\ \frac{-\alpha_3 - \mathbf{h}\beta_2}{2} & -\frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{\alpha_2 - \mathbf{h}\beta_3}{2} & -\frac{\alpha_1}{2} \\ \frac{\alpha_1}{2} & \frac{-\alpha_2 - \mathbf{h}\beta_3}{2} & \frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{-\alpha_3 + \mathbf{h}\beta_2}{2} \\ \frac{\alpha_2 - \mathbf{h}\beta_3}{2} & \frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_3 + \mathbf{h}\beta_2}{2} & -\frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} -\frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{-\alpha_3 + \mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} \\ \frac{\alpha_3 + \mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{-\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & \frac{\alpha_1}{2} \\ -\frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & -\frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{\alpha_3 - \mathbf{h}\beta_2}{2} \\ \frac{-\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & -\frac{\alpha_1}{2} & \frac{-\alpha_3 - \mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} \end{bmatrix}$$

Dolayısıyla bu matris anti hermitiyendir. ■

Sonuç 4.4.19 Split kuaterniyonlara karşılık gelen hiperbolik 4-spinorlar cinsinden yazılan Teorem 4.4.17’ de verilen Lorentz dönüşüm matrisi hiperbolik simetrik ise Lorentz dönüşümü sadece Lorentz boosttan oluşur.

İspat: Split kuaterniyonlara karşılık gelen hiperbolik 4-spinorlar cinsinden yazılan Lorentz

$$\text{dönüşüm matrisi} \begin{bmatrix} -\frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{-\alpha_3 + \mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} \\ \frac{\alpha_3 + \mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{-\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & \frac{\alpha_1}{2} \\ -\frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & -\frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{\alpha_3 - \mathbf{h}\beta_2}{2} \\ \frac{-\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & -\frac{\alpha_1}{2} & \frac{-\alpha_3 - \mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} \end{bmatrix} \text{ hiperbolik simetrik matris}$$

olarak göz önüne alınsın. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{-\alpha_3 + \mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} \\ \frac{\alpha_3 + \mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{-\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & \frac{\alpha_1}{2} \\ -\frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & -\frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{\alpha_3 - \mathbf{h}\beta_2}{2} \\ \frac{-\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & -\frac{\alpha_1}{2} & \frac{-\alpha_3 - \mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} \end{bmatrix}$$

Bu matrisin transpozu

$$\begin{bmatrix} -\frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{\alpha_3 + \mathbf{h}\beta_2}{2} & -\frac{\alpha_1}{2} & \frac{-\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} \\ \frac{-\alpha_3 + \mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & -\frac{\alpha_1}{2} \\ \frac{\alpha_1}{2} & \frac{-\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & -\frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{-\alpha_3 - \mathbf{h}\beta_2}{2} \\ \frac{\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & \frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_3 - \mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Eğer verilen denklemleri eşitleyecek olursak

$$\begin{bmatrix} -\frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{\alpha_3 + \mathbf{h}\beta_2}{2} & -\frac{\alpha_1}{2} & \frac{-\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} \\ \frac{-\alpha_3 + \mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & -\frac{\alpha_1}{2} \\ \frac{\alpha_1}{2} & \frac{-\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & -\frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{-\alpha_3 - \mathbf{h}\beta_2}{2} \\ \frac{\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & \frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_3 - \mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{-\alpha_3 + \mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} \\ \frac{\alpha_3 + \mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{-\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & \frac{\alpha_1}{2} \\ -\frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & -\frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{\alpha_3 - \mathbf{h}\beta_2}{2} \\ \frac{-\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & -\frac{\alpha_1}{2} & \frac{-\alpha_3 - \mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} \end{bmatrix}$$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$ eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla bu Lorentz dönüşüm matrisinin hiperbolik simetrik olması durumunda Lorentz dönüşümü sadece Lorentz boosttan oluşur. ■

Sonuç 4.4.20. Teorem 4.2.16 da verilen Lorentz dönüşüm matrisi hiperbolik anti-simetrik ise Lorentz hareketi sadece Lorentz dönmeden oluşur.

İspat. Split kuaterniyonlara karşılık gelen hiperbolik 4-spinorlar cinsinden yazılan Lorentz

$$\text{dönüşüm matrisi} \begin{bmatrix} -\frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{-\alpha_3 + \mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} \\ \frac{\alpha_3 + \mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{-\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & \frac{\alpha_1}{2} \\ -\frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & -\frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{\alpha_3 - \mathbf{h}\beta_2}{2} \\ \frac{-\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & -\frac{\alpha_1}{2} & \frac{-\alpha_3 - \mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} \end{bmatrix} \text{hiperbolik anti simetrik}$$

matris olarak göz önüne alınsın. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{-\alpha_3 + \mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} \\ \frac{\alpha_3 + \mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{-\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & \frac{\alpha_1}{2} \\ -\frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & -\frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{\alpha_3 - \mathbf{h}\beta_2}{2} \\ \frac{-\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & -\frac{\alpha_1}{2} & \frac{-\alpha_3 - \mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} \end{bmatrix}$$

Bu matrisin transpozu

$$\begin{bmatrix} -\frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{\alpha_3 + \mathbf{h}\beta_2}{2} & -\frac{\alpha_1}{2} & \frac{-\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} \\ \frac{-\alpha_3 + \mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & -\frac{\alpha_1}{2} \\ \frac{\alpha_1}{2} & \frac{-\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & -\frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{-\alpha_3 - \mathbf{h}\beta_2}{2} \\ \frac{\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & \frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_3 - \mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Eğer verilen denklemleri eşitleyecek olursak

$$\begin{bmatrix} \frac{-\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{\alpha_3 + \mathbf{h}\beta_2}{2} & -\frac{\alpha_1}{2} & \frac{-\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} \\ \frac{-\alpha_3 + \mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & -\frac{\alpha_1}{2} \\ \frac{\alpha_1}{2} & \frac{-\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & \frac{-\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{-\alpha_3 - \mathbf{h}\beta_2}{2} \\ \frac{\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & \frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_3 - \mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{\alpha_3 - \mathbf{h}\beta_2}{2} & -\frac{\alpha_1}{2} & \frac{-\alpha_2 - \mathbf{h}\beta_3}{2} \\ \frac{-\alpha_3 - \mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{-\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{\alpha_2 - \mathbf{h}\beta_3}{2} & -\frac{\alpha_1}{2} \\ \frac{\alpha_1}{2} & \frac{-\alpha_2 - \mathbf{h}\beta_3}{2} & \frac{\mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{-\alpha_3 + \mathbf{h}\beta_2}{2} \\ \frac{\alpha_2 - \mathbf{h}\beta_3}{2} & \frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_3 + \mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{-\mathbf{h}\beta_1}{2} \end{bmatrix}$$

$\alpha = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (0, 0, 0)$ eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla bu Lorentz dönüşüm matrisinin hiperbolik anti simetrik olması durumunda Lorentz dönüşümü sadece Lorentz dönmelerden oluşur. ■

Teorem 4.4.21. ψ_{HS}^{SQ} , Split kuaterniyona karşılık gelen hiperbolik 4-spinor olsun. Bu durumda Lorentz dönüşümünün hiperbolik Spinor gösteriminde

$$\psi_{HS}^{SQ} \rightarrow (I_4 - \alpha_1 F_3 + \beta_1 D_1 + \beta_3 D_3) \psi_{HS}^D + (\alpha_1 E_1 + \alpha_3 E_3 + \alpha_1 E_1 + \beta_2 D_2) \overline{\psi_{HS}^D}$$

şeklindedir. Burada E_i, D_i ($i=1,2,3$) üreteçleri $E_i = \frac{\mathbf{h}}{2} \begin{bmatrix} \tau_i & 0 \\ 0 & \tau_i \end{bmatrix}$ $D_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tau_i \\ \tau_i & 0 \end{bmatrix}$ şeklinde

olup $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ve $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, sırasıyla, koordinat eksenleri etrafındaki Lorentz dönme açıları ve aynı koordinat eksenleri boyunca Lorentz boostlara karşılık gelir.

İspat. Teorem 4.4.17’de verilen Lorentz dönüşüm matrisi

$$\begin{bmatrix} \partial_1 + \mathbf{h}\partial_4 \\ -\partial_2 + \mathbf{h}a_3 \\ \Upsilon_1 + \mathbf{h}\Upsilon_4 \\ -\Upsilon_2 + \mathbf{h}\Upsilon_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1 - \mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{-\alpha_3 + \mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} \\ \frac{\alpha_3 + \mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{1 + \mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{-\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & \frac{\alpha_1}{2} \\ -\frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & \frac{1 - \mathbf{h}\beta_1}{2} & \frac{\alpha_3 - \mathbf{h}\beta_2}{2} \\ \frac{-\alpha_2 + \mathbf{h}\beta_3}{2} & -\frac{\alpha_1}{2} & \frac{-\alpha_3 - \mathbf{h}\beta_2}{2} & \frac{1 + \mathbf{h}\beta_1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_1 + \mathbf{h}\partial_4 \\ -\partial_2 + \mathbf{h}a_3 \\ \Upsilon_1 + \mathbf{h}\Upsilon_4 \\ -\Upsilon_2 + \mathbf{h}\Upsilon_3 \end{bmatrix}$$

şeklindeydi. Bu matrisi

$$\psi_{HS}^{SQ} \rightarrow \left(\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\alpha_1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\mathbf{h} \alpha_2}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mathbf{h} \\ 0 & 0 & \mathbf{h} & 0 \\ 0 & -\mathbf{h} & 0 & 0 \\ \mathbf{h} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\mathbf{h} \alpha_3}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{h} & 0 & 0 \\ \mathbf{h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{h} \\ 0 & 0 & \mathbf{h} & 0 \end{bmatrix} \\ & - \frac{\mathbf{h} \beta_1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \frac{\mathbf{h} \beta_2}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\beta_3}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mathbf{h} \\ 0 & 0 & \mathbf{h} & 0 \\ 0 & -\mathbf{h} & 0 & 0 \\ \mathbf{h} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right) \psi_{HS}^{SQ}$$

şeklinde yazacak olursak $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ matrislerinin

$$\tau_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \tau_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{h} \\ \mathbf{h} & 0 \end{bmatrix}, \tau_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ şeklinde olduğu biliniyor. Son eşitlikte bu}$$

matrisler göz önüne alınırsa

$$\psi_{HS}^{SQ} \rightarrow \left(\begin{aligned} & I_4 - \frac{\mathbf{h} \alpha_1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tau_3 \\ \tau_3 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\mathbf{h} \alpha_2}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tau_2 \\ \tau_2 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\mathbf{h} \alpha_3}{2} \begin{bmatrix} \tau_2 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{bmatrix} \\ & - \frac{\mathbf{h} \beta_1}{2} \begin{bmatrix} \tau_3 & 0 \\ 0 & \tau_3 \end{bmatrix} - \frac{\mathbf{h} \beta_2}{2} \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_1 \end{bmatrix} + \frac{\beta_3}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tau_2 \\ \tau_2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right) \psi_{HS}^{SQ}$$

ve sonuç olarak bu matrisleri E_i, F_i türünden yazacak olursak

$$\psi_{HS}^{SQ} \rightarrow (I_4 - \alpha_2 E_2 + \alpha_2 F_2) \psi_{HS}^{SQ} + (-\alpha_1 F_3 - \beta_1 F_3 - \beta_2 F_1 + \beta_3 E_2) \overline{\psi_{HS}^{SQ}}$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.4.22. Teorem 4.4.21 verilen split kuaterniyona karşılık gelen Hiperbolik 4-spinorun Lorentz dönüşüm hareketi sadece dönmeden ibaret olsun. Bu durumda $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ sıfır olacağından Lorentz dönüşümü aşağıdaki gibi

$$\begin{bmatrix} \partial_1 + \mathbf{h}\partial_4 \\ -\partial_2 + \mathbf{h}a_3 \\ \Upsilon_1 + \mathbf{h}\Upsilon_4 \\ -\Upsilon_2 + \mathbf{h}\Upsilon_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{-\alpha_3}{2} & \frac{-\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2}{2} \\ \frac{\alpha_3}{2} & 1 & \frac{-\alpha_2}{2} & \frac{\alpha_1}{2} \\ \frac{-\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2}{2} & 1 & \frac{-\alpha_3}{2} \\ \frac{-\alpha_2}{2} & \frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_3}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_1 + \mathbf{h}\partial_4 \\ -\partial_2 + \mathbf{h}a_3 \\ \Upsilon_1 + \mathbf{h}\Upsilon_4 \\ -\Upsilon_2 + \mathbf{h}\Upsilon_3 \end{bmatrix}$$

veya

$$\psi_{HS}^{SQ} \rightarrow (I_4 - \alpha_2 E_2 + \alpha_2 F_2) \psi_{HS}^{SQ} + (-\alpha_1 F_3) \overline{\psi_{HS}^{SQ}}$$

şeklinde ifade edilir.

Sonuç 4.4.23 Teorem 4.4.21 verilen split kuaterniyona karşılık gelen Hiperbolik 4-spinorun Lorentz dönüşüm hareketi sadece boosttan ibaret olsun. Bu durumda $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sıfır olacağından Lorentz dönüşümü aşağıdaki gibi

$$\begin{bmatrix} \partial_1 + \mathbf{h}\partial_4 \\ -\partial_2 + \mathbf{h}a_3 \\ \Upsilon_1 + \mathbf{h}\Upsilon_4 \\ -\Upsilon_2 + \mathbf{h}\Upsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \mathbf{h}\frac{\beta_1}{2} & \frac{\mathbf{h}\beta_2}{2} & 0 & \frac{-\mathbf{h}\beta_3}{2} \\ \frac{\mathbf{h}\beta_2}{2} & 1 + \mathbf{h}\frac{\beta_1}{2} & \frac{\mathbf{h}\beta_3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\mathbf{h}\beta_3}{2} & 1 - \mathbf{h}\frac{\beta_1}{2} & \frac{-\mathbf{h}\beta_2}{2} \\ \frac{\mathbf{h}\beta_3}{2} & 0 & \frac{-\mathbf{h}\beta_2}{2} & 1 + \mathbf{h}\frac{\beta_1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_1 + \mathbf{h}\partial_4 \\ -\partial_2 + \mathbf{h}a_3 \\ \Upsilon_1 + \mathbf{h}\Upsilon_4 \\ -\Upsilon_2 + \mathbf{h}\Upsilon_3 \end{bmatrix}$$

veya

$$\psi_{HS}^{SQ} \rightarrow (I_4) \psi_{HS}^{SQ} + (-\beta_1 F_3 - \beta_2 F_1 + \beta_3 E_2) \overline{\psi_{HS}^{SQ}}$$

şeklinde ifade edilir.

5. SONUÇLAR, TARTIŞMA, SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında hiperbolik sayılar cebiri temel alınarak split-kuaterniyonların yapısı incelenmiş ve bu yapı kullanılarak Dirac teorisinin alternatif bir matematiksel formülasyonu ele alınmıştır. Öncelikle hiperbolik sayıların cebirsel özellikleri ortaya konulmuş, daha sonra split-kuaterniyonların hiperbolik sayılar cinsinden gösterimi detaylı biçimde incelenmiştir. Bu yaklaşım sayesinde split-kuaterniyonların dört boyutlu uzay-zaman geometrisi ile olan doğal ilişkisi açık bir şekilde gözlemlenmiştir.

Çalışmanın önemli sonuçlarından biri, split-kuaterniyonların hiperbolik sayı tabanlı matris gösterimleri aracılığıyla ifade edilebilmesi ve bu gösterimin Lorentz dönüşümleri ile uyumlu bir yapı sunmasıdır. Elde edilen sonuçlar, hiperbolik sayıların Minkowski uzay-zamanının geometrik özelliklerini yansıtmada oldukça elverişli olduğunu göstermektedir. Böylece relativistik dönüşümlerin ve spinor yapılarının daha kompakt bir cebirsel çerçeve içerisinde ele alınabilmesi mümkün olmuştur.

Tez kapsamında ayrıca Dirac eşitliğinin belirli bileşenleri ve ilişkili spinor yapıları hiperbolik sayılar kullanılarak yeniden ifade edilmiştir. Yapılan dönüşümler sonucunda standart kompleks sayı formalizmi ile elde edilen fiziksel sonuçların korunduğu, ancak kullanılan matematiksel yapının daha geometrik ve sezgisel bir yorum sunduğu görülmüştür. Özellikle hiperbolik fazların Lorentz boostlarıyla olan ilişkisi, relativistik kuantum mekaniğinin cebirsel temelinin farklı bir bakış açısıyla incelenmesine olanak sağlamıştır.

Bu bulgular, hiperbolik sayıların ve split-kuaterniyonların yalnızca matematiksel bir genelleme olmadığını, aynı zamanda relativistik kuantum teorilerinin ifade edilmesinde alternatif ve güçlü bir araç olarak kullanılabileceğini göstermektedir. Bununla birlikte, bu yaklaşımın fiziksel yorumlarının daha geniş kapsamlı teoriler içerisinde araştırılması gerekmektedir.

5.1. Sonuç

Bu tezde hiperbolik sayılar ile split-kuaterniyonlar arasındaki ilişki sistematik olarak incelenmiş ve split-kuaterniyonların hiperbolik sayılar cinsinden gösterimi ortaya konulmuştur. Ayrıca Dirac teorisinde yer alan bazı temel eşitlikler ve spinor yapıları hiperbolik sayı formalizmi kullanılarak yeniden yazılmıştır. Elde edilen sonuçlar, bu gösterimin standart Dirac

formalizmi ile matematiksel olarak tutarlı olduğunu ve Lorentz simetrilerinin doğal bir biçimde temsil edilmesini sağladığını göstermektedir.

Sonuç olarak hiperbolik sayılar ve split-kuaterniyonlar, relativistik kuantum mekaniğinin matematiksel yapısını incelemek için güçlü ve geometrik açıdan anlamlı bir alternatif sunmaktadır. Bu nedenle söz konusu yapıların teorik fizikte daha geniş uygulama alanlarına sahip olabileceği değerlendirilmektedir.

5.2. Öneriler

1. Dirac eşitliğinin tamamının hiperbolik sayı ve split-kuaterniyon formalizmi içerisinde yeniden yapılandırılması incelenebilir.
2. Elektromanyetik etkileşim içeren Dirac denklemleri hiperbolik spinorlar kullanılarak analiz edilebilir.
3. Hiperbolik sayıların Lorentz grubu ile ilişkisi daha derinlemesine araştırılarak relativistik simetrilerin yeni yorumları geliştirilebilir.
4. Split-kuaterniyonik yapıların Clifford cebirleri ve geometrik cebir yaklaşımlarıyla bağlantıları ayrıntılı olarak incelenebilir.
5. Bu tezde elde edilen sonuçlar kuantum alan teorisi, süper simetri ve kuantum kütleçekimi gibi ileri düzey teorilere uygulanabilir.
6. Hiperbolik sayı tabanlı spinor formalizmlerinin sayısal hesaplamalarda sağlayabileceği avantajlar araştırılabilir.

Genel olarak bu çalışma, hiperbolik sayılar ve split-kuaterniyonlar aracılığıyla Dirac teorisine alternatif bir matematiksel yaklaşım sunmakta ve bu alanda gerçekleştirilecek gelecekteki araştırmalar için bir başlangıç noktası oluşturmaktadır.

KAYNAKÇA

- Aktaş, S. N. (2023). Split quaternion sequences and series (Yüksek lisans tezi). *Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul*.
- Alagöz, M., Erdoğdu, M., & Özdemir, M. (2012). On the matrix representations of split quaternions. *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, 10(2), 147–158.
- Alagöz, Y., Oral, K. H., & Yüce, S. (2012). Split quaternion matrices. *Miskolc Mathematical Notes*, 13(2), 223–232.
- Antonuccio, F. (1999). Split-quaternions and the Lorentz group. *The Photon and Poincare Group, In Contemporary Fundamental Physics* (pp. 89–106). New York, NY: Nova Science Publishers.
- Antonuccio, F. (2015). Hyperbolic spinors and split-quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 25(1), 13–29. doi:10.1007/s00006-014-0477-1
- Artaman, S. (1988). Reel kuaterniyonlar ve matris gösterimleri (Yüksek lisans tezi). *Ankara Üniversitesi, Ankara*.
- Ata, E., & Yaylı, Y. (2009a). Split quaternions and rotations in semi-Euclidean space R_{-2}^4 . *Journal of Mathematical Physics*, 50(10), 103517. doi:10.1063/1.3245848
- Ata, E., & Yaylı, Y. (2009b). Split quaternions and semi-orthogonal matrices. *Chaos, Solitons & Fractals*, 41(4), 1910–1915. doi:10.1016/j.chaos.2008.07.045
- Aykut, H. F. (2023). Split kuaterniyonların matris gösterimleri ve uygulamaları (Yüksek lisans tezi). *Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul*.
- Azak, A. Z., & Erişir, T. (2024). On the De Moivre and Euler formulas for split quaternions and hyperbolic spinors. *Theoretical and Mathematical Physics*, 219(2), 712–721. doi:10.1134/S004057792405010X
- Balcı, M., Erişir, T., Ketenci, H., & Tosun, M. (2015). Hyperbolic spinor formulations of curves in Minkowski 3-space. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 38(18), 4930–4939. doi:10.1002/mma.3414
- Balcı, Y., Erişir, T., & Güngör, M. A. (2015). A note on split quaternion sequences. *Journal of the Chungcheong Mathematical Society*, 28(4), 525–535. doi:10.14403/jcms.2015.28.4.525
- Bjorken, J. D., & Drell, S. D. (1964). Relativistic quantum mechanics. *New York, NY: McGraw-Hill*.
- Borota, N. A., Flores, S., & Osler, T. J. (2000). Functions of a spacetime variable. *Mathematics and Computer Education*, 34(2), 159–164.

- Borota, N. A., & Osler, T. J. (2002). Spacetime numbers the easy way. *Mathematics and Computer Education*, 36(3), 231–239.
- Bracken, P., & Hayes, J. (2002). On a formulation of certain integrable systems using hyperbolic numbers. *Physics Letters A*, 301(3), 191–194. doi:10.1016/S0375-9601(02)00918-0
- Cakir, H. (2024). Hiperbolik kuaterniyonlar ve uygulamaları (Doktora tezi). Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Rize.
- Callahan, J. J. (2000). The geometry of spacetime: An introduction to special and general relativity. *New York, NY: Springer*. doi:10.1007/978-1-4757-6741-4
- Cartan, É. (1913). Les groupes de transformations continus, infinis, simples. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 41, 53–96. doi:10.24033/bsmf.934
- Cartan, É. (1966). The theory of spinors. *New York, NY: Dover Publications*.
- Catoni, F., Boccaletti, D., Cannata, R., Catoni, V., Nichelatti, E., & Zampetti, P. (2008). The mathematics of Minkowski space-time: With an introduction to commutative hypercomplex numbers. *Berlin, Germany: Springer*. doi:10.1007/978-3-540-77161-6
- Catoni, F., Cannata, R., Catoni, V., & Zampetti, P. (2004). Two-dimensional hypercomplex numbers and related trigonometries and geometries. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 14(1), 47–68. doi:10.1007/BF03041235
- Catoni, F., Cannata, R., Catoni, V., & Zampetti, P. (2005). Hyperbolic trigonometry in two-dimensional space-time geometry. *arXiv preprint math-ph/0508011*.
- Cockle, J. (1849). On systems of algebra involving more than one imaginary; and on equations of the fifth degree. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 35(238), 434–435. doi:10.1080/14786444908646383
- Dechant, P. P. (2013). Clifford algebras and spinors from a quaternionic perspective. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 23(3), 597–610. doi:10.1007/s00006-013-0391-7
- Dirac, P. A. M. (1928). The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 117(778), 610–624. doi:10.1098/rspa.1928.0023
- Dirac, P. A. M. (1930). A theory of electrons and protons. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 126(801), 360–365. doi:10.1098/rspa.1930.0011
- Erdoğan, M., & Özdemir, M. (2013a). On the algebraic properties of split quaternion matrices. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 23(3), 625–638. doi:10.1007/s00006-013-0402-8

- Erdoğan, M., & Özdemir, M. (2013b). Two-dimensional hyperbolic spinors and Lorentz transformations. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 23(3), 615–623. doi:10.1007/s00006-013-0392-6
- Erdoğan, M., & Özdemir, M. (2016). Matrices over hyperbolic split quaternions. *Filomat*, 30(4), 913–920. doi:10.2298/FIL1604913E
- Erişir, T., Güngör, M. A., & Tosun, M. (2015a). Hyperbolic spinor representation of a timelike curve in Minkowski 3-space. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 25(3), 553–566. doi:10.1007/s00006-014-0520-2
- Erişir, T., Güngör, M. A., & Tosun, M. (2015b). On the homothetic motions in the semi-Euclidean space E_2^4 via the split quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 25(4), 799–810. doi:10.1007/s00006-015-0544-z
- Erişir, T., Kardağ, N. C., & Funda, J. (2023). On split quaternionic equations. *Journal of Mathematics and Applications*, 46, 148–155. doi:10.7862/rf.2023.10
- Erişir, T., & Köse Öztaş, H. (2022). De Moivre's and Euler's formulas for hyperbolic split quaternions. *Universal Journal of Mathematics and Applications*, 5(1), 32–41. doi:10.32323/ujma.1028751
- Erişir, T., & Yıldırım, E. (2023). Hyperbolic spinor form of the Lorentz transformations in 3-dimensional Minkowski space. *WSEAS Transactions on Mathematics*, 22, 854–866. doi:10.37394/23206.2023.22.95
- Erişir, T. & Yıldırım, E. (2026). The Classification and Geometric Interpretations of Hyperbolic Spinors Related to Split Quaternions. *Sakarya Journal of Mathematics*, 2(1), 22-36.
- Fjelstad, P. (1986). Extending special relativity via the perplex numbers. *American Journal of Physics*, 54(5), 416–422. doi:10.1119/1.14605
- Hacısalıhoğlu, H. H. (1983). Hareket geometrisi ve kuaterniyonlar teorisi. Ankara, Türkiye: *Gazi Üniversitesi Yayınları*.
- Hamilton, W. R. (1844). On a new species of imaginary quantities connected with a theory of quaternions. *Proceedings of the Royal Irish Academy*, 2, 424–434.
- Hamilton, W. R. (1853). Lectures on quaternions. *Dublin, Ireland: Hodges and Smith*.
- Hamilton, W. R. (1899). Elements of quaternions (C. J. Joly, Ed., 2nd ed.). *London, England: Longmans, Green, & Co.*
- Hestenes, D. (1966). Space-time algebra. *New York, NY: Gordon and Breach*.
- Ickes, B. F. (1970). A new method for performing digital control system attitude computations using quaternions. *AIAA Journal*, 8(1), 13–17.

- İsabeyoğlu, Z., Erişir, T., & Azak, A. Z. (2024). On hyperbolic spinors in Minkowski space-time. *Mathematics*, 12(1), 1–18. doi:10.3390/math12010115
- Ketenci, H., Erişir, T., & Tosun, M. (2015). Hyperbolic spinors and Darboux frame in Minkowski 3-space. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 25(4), 883–894. doi:10.1007/s00006-015-0545-y
- Ketenci, Z., Erişir, T., & Güngör, M. A. (2015). On the semi-orthogonal matrices and split quaternions. *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, 13(2), 179–193. doi:10.1080/1726037X.2015.1105990
- Khrennikov, A. (1993). Hyperbolic quantum mechanics. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 13(1), 1–9. doi:10.1007/BF03042013
- Khrennikov, A. (2008). Hyperbolic quantization. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 18(3), 843–852. doi:10.1007/s00006-008-0108-y
- Kisil, V. V. (2013). Induced representations and hypercomplex numbers. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 23(2), 417–440. doi:10.1007/s00006-012-0370-4
- Kiş, İ., & Tosun, M. (2015). Split quaternionic inextensible flows in Minkowski 3-space. *Mathematica Moravica*, 19(2), 87–93. doi:10.5937/MatMor1502087K
- Kula, L. (2003). Split kuaterniyonlar ve Minkowski uzayında hareketler (Doktora tezi). *Ankara Üniversitesi, Ankara*.
- Kula, L., & Yaylı, Y. (2007a). Dual split quaternions and timelike screw motions in Minkowski 3-space. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 44(6), 1313–1327. doi:10.4134/JKMS.2007.44.6.1313
- Kula, L., & Yaylı, Y. (2007b). Split quaternions and rotations in semi-Euclidean space $\mathbb{R}_1^3$. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 17(2), 265–277. doi:10.1007/s00006-007-0027-6
- Lee, H. C. (1949). Eigenvalues and canonical forms of matrices with quaternion coefficients. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A. Mathematical and Physical Sciences*, 62(4), 377–383. doi:10.1017/S008045410001007X
- Meister, O. (2005). Quaternions and rotations in 3D space (Technical Report). *University of Stuttgart, Stuttgart*.
- Nakahara, M. (2003). Geometry, topology and physics (2nd ed.). *Bristol, England: Institute of Physics Publishing*.
- Okuyucu, O. Z., Yıldız, Ö. G., & Tosun, M. (2016). On the conformal inextensible flows of curves in 3-dimensional Minkowski space. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 26(4), 1341–1348. doi:10.1007/s00006-016-0648-5

- Özdemir, M. (2009). The roots of a split quaternion. *Applied Mathematics Letters*, 22(2), 258–263. doi:10.1016/j.aml.2008.03.021
- Özdemir, M., & Ergin, A. A. (2005). Semi-quaternions and semi-Euclidean spaces. *Proceedings of the 16th International Conference of the Jangjeon Mathematical Society*, 16, 108–115.
- Özdemir, M., & Ergin, A. A. (2006). Rotations with unit timelike split quaternions in Minkowski 3-space. *Journal of Geometry and Physics*, 56(3), 322–336. doi:10.1016/j.geomphys.2005.02.004
- Özdemir, M., Erdoğan, M., & Alagöz, M. (2014). Eigenvalues and eigenvectors of split quaternion matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 62(3), 329–342. doi:10.1080/03081087.2013.779269
- Özdemir, M., Erdoğan, M., & Şimşek, H. (2014). On the polar decomposition of split quaternion matrices. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 24(1), 179–192. doi:10.1007/s00006-013-0419-z
- Poodiack, R. D., & LeClair, K. J. (2009). Fundamental theorems of algebra for the perplex numbers. *The College Mathematics Journal*, 40(5), 322–335. doi:10.4135/vol40iss5pp322-335
- Popov, N. N. (2020). Geometric representation of hyperbolic numbers and split-quaternions. *arXiv preprint arXiv:2104.12487*.
- Popov, N., & Matveev, I. (2022). Hyperbolic numbers and split-quaternions in quantum mechanics. *Symmetry*, 14(6), 1163. doi:10.3390/sym14061163
- Rochon, D., & Shapiro, M. (2004). On algebraic properties of bicomplex and hyperbolic numbers. *Analele Universitatii Oradea, Fascicola Matematica*, 11, 71–110.
- Sattinger, D. H., & Weaver, O. L. (1986). Lie groups and algebras with applications to physics, geometry, and mechanics. *New York, NY: Springer-Verlag*. doi:10.1007/978-1-4612-1090-0
- Shepperd, S. W. (1978). Quaternion from rotation matrix. *Journal of Guidance and Control*, 1(3), 223–224.
- Sobczyk, G. (1995). The hyperbolic number plane. *The College Mathematics Journal*, 26(4), 256–259. doi:10.2307/2687130
- Solodovnikov, A. S., & Kantar, I. L. (1989). Hyperbolic numbers. *Moskova, Rusya: Nauka*.
- Şenyurt, S., & Çalışkan, A. (2015). On the acceleration axes of the homothetic motion in Minkowski 3-space via the dual split quaternions. *Pure Mathematical Sciences*, 4(1), 37–42. doi:10.12988/pms.2015.41235

- Şimşek, H., & Özdemir, M. (2016). On conformal curves in 2-dimensional De Sitter space. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 26(2), 757–770. doi:10.1007/s00006-015-0599-x
- Tarakçıoğlu, M., Erişir, T., Güngör, M. A., & Tosun, M. (2018). On the properties of matrices over split quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 28(1), 26. doi:10.1007/s00006-018-0842-z
- Thaller, B. (1992). The Dirac equation. *Berlin, Germany: Springer-Verlag*. doi:10.1007/978-3-642-51445-6
- Torres del Torres del Castillo, G. F. (2003). Spinor matrix representations of quaternions. *Revista Mexicana de Física*, 49(5), 445–448.
- Torres del Torres del Castillo, G. F., & Barrales, G. A. (2004). Spinor formulation of curves in 3D Euclidean space. *Journal of Geometry and Physics*, 51(1), 110–121. doi:10.1016/j.geomphys.2003.12.002
- Torres del Torres del Castillo, G. F., & Barrales, G. S. (2004). Formulation of special relativity by means of split quaternions. *Revista Colombiana de Matemáticas*, 38(1), 27–34.
- Tosun, M., & Kişi, İ. (2015). Spinor equations of Darboux frame of a surface in Euclidean 3-space. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 25(2), 447–456. doi:10.1007/s00006-014-0498-9
- Ünal, D., Kişi, İ., & Tosun, M. (2013). Inextensible flows of timelike curves according to Darboux frame in Minkowski 3-space. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 23(3), 757–765. doi:10.1007/s00006-013-0391-7
- Ünal, M., Kazan, S., & Yaylı, Y. (2013). Spinor formulation of curves according to Bishop frame in Euclidean 3-space. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 23(3), 769–777. doi:10.1007/s00006-013-0393-5
- Vicci, L. (2001). Quaternions and rotations in 3-space: *The algebra and its geometric interpretation (Technical Report TR01-014)*. Chapel Hill, NC: University of North Carolina.
- Vince, J. (1978). Quaternions for computer graphics. *London, England: Springer*.
- Vivarelli, M. D. (1984a). Development of spinor kinematics: An orthogonal spinor-quaternion relationship. *Celestial Mechanics*, 32(3), 193–207. doi:10.1007/BF01229119
- Vivarelli, M. D. (1984b). Development of the spinor theory of Kepler motion. *Celestial Mechanics*, 32(3), 193–207. doi:10.1007/BF01229119
- Ward, J. P. (1997). Quaternions and Cayley numbers: Algebra and applications. *Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers*. doi:10.1007/978-94-011-5768-1

- Weyl, H. (1931). The theory of groups and quantum mechanics. *New York, NY: Dover Publications.*
- Woit, P. (2017). Quantum theory, groups and representations: An introduction. *Cham, Switzerland: Springer.* doi:10.1007/978-3-319-64612-1
- Wolf, L. A. (1936). Similarity of matrices in which the elements are real quaternions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 42(10), 737–743. doi:10.1090/S0002-9904-1936-06411-9
- Yüce, S., & Çoruh Şenocak, S. (2023). Kuaterniyonlar teorisi. Ankara, Türkiye: *Pegem Akademi.*
- Zhang, F. (1997). Quaternions and matrices of quaternions. *Linear Algebra and its Applications*, 251, 21–57. doi:10.1016/0024-3795(95)00543-957.