

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

---

**Sıra-Azaltan Dönüşüm Yarıgrupları**

---

**Seeball Jabbar Mohammed MOHAMMED**

*Matematik Anabilim Dalı*

Kasım, 2024

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZ ONAYI

Sıra-Azaltan Dönüşüm Yarıgrupları

Sebbal Jabbar Mohammed MOHAMMED

*Matematik Anabilim Dalı*

Bu Yüksek Lisans Tezi 01/11/2024 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Değerlendirilmiş ve Oy Birliği / Oy Çokluğu ile Kabul Edilmiştir.

Jüri : Prof. Dr. Hayrullah AYIK (Danışman) .....  
: Prof. Dr. Melis MİNİSKER .....  
: Doç. Dr. Leyla BUGAY .....

**Bu Tez Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Hazırlanmıştır.**

**Tez No:**

**Prof. Dr. Sadık DİNÇER**  
**Enstitü Müdürü**

**Bu çalışma TÜBİTAK tarafından desteklenmiştir.**  
**Proje No: 123F463**

**Not:** Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

## İÇİNDEKİLER

|                                                                                 |     |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ÖZ .....                                                                        | i   |
| ABSTRACT .....                                                                  | ii  |
| TEŞEKKÜR .....                                                                  | iii |
| ÇİZELGELER DİZİNİ .....                                                         | iv  |
| ŞEKİLLER DİZİNİ .....                                                           | v   |
| SİMGELER VE KISALTMALAR .....                                                   | vi  |
| 1. GİRİŞ .....                                                                  | 1   |
| 2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR .....                                                      | 3   |
| 3. TEMEL TANIM VE TEOREMLER .....                                               | 5   |
| 3.1. Yarıgruplar .....                                                          | 5   |
| 3.2. Bağıntılar ve Denklik Bağıntıları .....                                    | 8   |
| 3.3. Green Denklik Bağıntıları .....                                            | 10  |
| 3.4. Bazı Dönüşüm yarıgrupları .....                                            | 13  |
| 3.5. Doğuray Kümeleri .....                                                     | 17  |
| 4. SIRA-AZALTAN DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARI .....                                      | 21  |
| 4.1. $D_n$ ve $PD_n$ Dönüşüm Yarıgruplarının Kardinaliteleri .....              | 21  |
| 4.2. $D_n$ ve $PD_n$ Dönüşüm Yarıgruplarının Bazı Özellikleri .....             | 22  |
| 4.3. $D_n$ ve $PD_n$ Dönüşüm Yarıgruplarının İdempotent Elemanları .....        | 24  |
| 4.4. $D_n$ ve $PD_n$ Dönüşüm Yarıgruplarının Nilpotent Elemanları .....         | 27  |
| 4.5. $D_n$ ve $PD_n$ Dönüşüm Yarıgruplarının Green Denklik Bağıntıları .....    | 30  |
| 4.6. $D_n$ ve $PD_n$ Dönüşüm Yarıgruplarının Doğuray Kümeleri ve Rankları ..... | 35  |
| 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER .....                                                   | 47  |
| KAYNAKLAR .....                                                                 | 49  |
| ÖZGEÇMİŞ .....                                                                  | 51  |

## Sıra-Azaltan Dönüşüm Yarıgrupları

Sebbal Jabbar Mohammed MOHAMMED

*Danışman: Prof. Dr. Hayrullah AYIK*

*Matematik Anabilim Dalı*

### ÖZ

Doğal sıralı  $\{1, 2, \dots, n\}$  zinciri  $X_n$  ve  $X_n$  üzerindeki tüm kısmi dönüşümlerin oluşturduğu yarıgrup  $P_n$  olsun.  $P_n$ 'nin tüm (tam) dönüşümlerinin oluşturduğu altyarıgrup  $T_n$ , tüm sıra-azaltan kısmi dönüşümlerinin oluşturduğu altyarıgrup  $PD_n$  ve tüm sıra-azaltan dönüşümlerinin oluşturduğu altyarıgrup  $D_n$  ile gösterilsin.

Biz bu çalışmada sıra-azaltan dönüşümler yarıgruplarının başta idempotent ve nilpotent elemanlarının kümeleri olmak üzere bazı önemli alt kümelerini, doğuray kümelerini, ranklarını ve bazı önemli cebirsel özelliklerini inceledik.

**Anahtar Kelimeler:** Dönüşümler yarıgrubu, Sıra-azaltan dönüşümler, İdempotent elemanlar, Nilpotent elemanlar, Ranklar.

---

## Order-Decreasing Transformation Semigroups

---

Sebbal Jabbar Mohammed MOHAMMED

*Advisor: Prof. Dr. Hayrullah AYIK*

*Department of Mathematics*

### ABSTRACT

Let  $X_n$  denote the chain  $\{1, 2, \dots, n\}$  under its natural order, and let  $P_n$  be the semigroup consisting of all partial transformations on  $X_n$ . The subsemigroup of  $P_n$  consisting of all (full) transformations is denoted by  $T_n$ , the subsemigroup of  $P_n$  consisting of all order-decreasing partial transformations is denoted by  $PD_n$ , and the subsemigroup of  $P_n$  consisting of all order-decreasing transformations is denoted by  $D_n$ .

In this study, we examine some important subsets of order-decreasing transformation semigroups, especially idempotent and nilpotent sets, as well as their generating sets and ranks, focusing on some significant algebraic properties.

**Keywords:** Transformations semigroups, Order-decreasing transformations, Idempotent elements, Nilpotent elements, Ranks.

## TEŞEKKÜR

İlk olarak, tecrübesini, desteğini ve sabrını hiç bir zaman esirgemeyen ve değerli önerileri sayesinde bu çalışmayı tamamlamama ve hedeflerime ulaşmama yardımcı olan saygı değer danışman hocam Prof. Dr. Hayrullah AYIK’a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, Çukurova Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı Başkanı Prof. Dr. Gonca AYIK’a çalışmalarına olan değerli katkılarından dolayı şükranlarımı sunarım. Bu tezin hazırlanması sürecinde bana sağladıkları motivasyon ve anlayış için aileme özellikle, bugüne kadar en büyük destekçim olan ve dualarını benden esirgemeyen sevgili anneme minnettarım. Son olarak, tez konum sırasında bana tüm katkılarıyla yardım eden Ar. Gör. Ayşegül DAĞDEVİREN’ e ve yanımda olan tüm arkadaşlarıma gönülden teşekkür ederim. Yüksek lisans eğitimim boyunca maddi desteğinden dolayı Yurtdışı Türkler ve Akraba Topluluklar Başkanlığı’na teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışma, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma kurumu (TÜBİTAK) tarafından 123F463 Numaralı proje ile desteklenmiştir. Projeye verdiği destekten ötürü TÜBİTAK’a teşekkürlerimizi sunarız.

## ÇİZELGELER DİZİNİ

|                                                                 |    |
|-----------------------------------------------------------------|----|
| Çizelge 1. Bir $\mathcal{D}$ –Green Denklik Sınıfı Örneği ..... | 12 |
| Çizelge 2. Bazı İkinci Tip Stirling Sayıları .....              | 13 |



## ŞEKİLLER DİZİNİ

|                                                            |    |
|------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 1. Green denklik bağıntılarının Hasse Diyagramı..... | 11 |
| Şekil 2. Dönüşüm Yarıgruplarının Hasse Diyagramı.....      | 16 |





## SİMGELER VE KISALTMALAR

|                        |                                                           |
|------------------------|-----------------------------------------------------------|
| $\mathbb{Z}$           | : Tamsayılar kümesi                                       |
| $\mathbb{Z}^+$         | : Pozitif tamsayılar kümesi                               |
| $X_n$                  | : 1 den $n$ sayısına kadar olan pozitif tamsayılar kümesi |
| $E(S)$                 | : $S$ kümesinin idempotent elemanlarının kümesi           |
| $N(S)$                 | : $S$ kümesinin nilpotent elemanlarının kümesi            |
| $P_n$                  | : $X_n$ üzerindeki kısmi dönüşümler yarıgrubu             |
| $T_n$                  | : $X_n$ üzerindeki (tam) dönüşümler yarıgrubu             |
| $S_n$                  | : $X_n$ üzerindeki simetrik grup                          |
| $x\alpha$              | : $x$ in $\alpha$ dönüşümü altındaki görüntüsü            |
| $\ker(\alpha)$         | : $\alpha$ dönüşümünün çekirdek kümesi                    |
| $\text{im}(\alpha)$    | : $\alpha$ dönüşümünün görüntü kümesi                     |
| $\text{Sing}_n$        | : Singüler dönüşümler yarıgrubu                           |
| $\text{Fix}(\alpha)$   | : $\alpha$ dönüşümünün sabit noktalarının kümesi          |
| $\text{Shift}(\alpha)$ | : $\alpha$ dönüşümünün sabit olmayan noktalarının kümesi  |

## 1. GİRİŞ

Yarıgrup teorisi, Cebir anabilim dalının temel çalışma alanlarından biridir ve kökenleri 20. yüzyılın başlarına kadar uzanır. Bildiğimiz kadarı ile Monsieur l'Abbé J. A. Séguier'in 1904 tarihli "Éléments de la Théorie des Groupes Abstraits" adlı kitabında yarıgrup terimi ilk kez kayda geçmiştir.

A.K. Suschkewitsch'in 1922 yılındaki çalışmaları, dönüşüm yarıgrupları ile yarıgrup teorisinin temel kavramları arasındaki bağlantıları kurmuştur. Cayley Teoremi'nin bu bağlamda önemi, her yarıgrup bir dönüşüm yarıgrupunun bir altarı grubuna izomorfik olduğunu ortaya koyarak, yarıgrup teorisinin gelişiminde önemli bir dönüm noktasıdır ve alanın ilerlemesine temel oluşturmıştır.

Yarıgrup teorisi, 1950'li yılların sonunda cebir alanında önemli bir gelişme olarak ortaya çıkmış ve günümüzde halen aktif bir araştırma alanı olarak kabul edilmektedir. Yarıgrupların önemi sadece zengin soru içeriğiyle sınırlı değildir; aynı zamanda grup teorisi, halka teorisi ve diğer matematik alanları ile olan derin bağlantılarıyla da öne çıkmaktadır. Bununla birlikte, yarıgrup teorisi, bilgisayar bilimleri gibi pratik uygulamalara da dayanarak matematiğin önemli bir alanını oluşturmaktadır.

$X \neq \emptyset$  bir küme olmak üzere  $X$  üzerinde tanımlı tüm kısmi dönüşümler kümesini  $P_X$  ile ve tüm (tam) dönüşümler kümesini  $T_X$  ile gösterelim. Dönüşümlerin bileşkesi ikili işlemi ile bu iki küme birer yarıgrup olup bunlara sırasıyla  $X$  üzerinde tanımlı kısmi dönüşümler ve (tam) dönüşümler yarıgrubu denir. Her tam dönüşüm aynı zamanda kısmi dönüşüm olduğundan  $T_X$  yarıgrubu  $P_X$  yarıgrupunun bir altarı grubu, bu durum  $T_X \leq P_X$  ile gösterilir. Eğer  $X = X_n = \{1, 2, \dots, n\}$  sonlu bir küme ise  $P_X$  ve  $T_X$  yerine sırasıyla,  $P_n$  ve  $T_n$  yazacağız. Ayrıca,  $\alpha \in T_n$  için  $im(\alpha) = \{i\alpha \in X_n : i \in X_n\}$  olmak üzere

$$ST_n = Sing_n = \{\alpha \in T_n : |im(\alpha)| \leq n - 1\}$$

ise  $ST_n$  de bir yarıgrup olup bu yarıgruba singüler dönüşümler yarıgrubu ve elemanlarına da singüler dönüşümler denir.

$X_n$  üzerinde tanımlı  $1 < 2 < \dots < n$  sıralaması ile  $X_n$  bir zincir olur. Bu sıralama ile eğer her  $x \in dom(\alpha)$  için  $x\alpha \leq x$  ise  $\alpha \in P_X$ 'e bir sıra-azaltan kısmi dönüşüm denir. Tüm sıra-azaltan kısmi dönüşümlerin kümesi  $PD_n$  ile gösterilir. Benzer şekilde sıra-azaltan tam dönüşümler tanımlanır ve tüm sıra-azaltan tam dönüşümlerin kümesi  $D_n$  ile gösterilir. Hem  $PD_n$  hem de  $D_n$  birer yarıgrup olup, bunlar hem matematikte hem de bilgisayar bilimlerinde çok önemli yere sahiptirler.

Biz bu çalışmada sıra-azaltan dönüşüm yarıgruplarının başta idempotent ve nilpotent elemanlarının kümeleri olmak üzere bazı önemli alt kümelerini, doğuray kümelerini, ranklarını ve bazı önemli cebirsel özelliklerini inceliyeceğiz.



## 2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

A. Umar (1992) tarafından  $X_n$  üzerindeki (tam) dönüşümler yarıgrubunun singüler elemanlarının oluşturduğu altarıgrup  $Sing_n$  olmak üzere  $Sing_n$ 'nin  $S_n^- = \{\alpha \in Sing_n : x\alpha \leq x\}$  altarıgrubunun idempotent doğuraylı olduğu gösterilmiş ve  $S_n^-$  yarıgrubunun rankı ve idempotent rankı bulunmuştur.

A. Umar (1996) tarafından  $X_n$  üzerindeki tam dönüşüm yarıgrubu ve kısmi birebir dönüşüm yarıgrubu sırasıyla  $T_n$  ve  $I_n$  olmak üzere  $T_n$ 'nin  $K^-(n, r) = \{\alpha \in T_n : x\alpha \leq x \text{ ve } |im \alpha| \leq r\}$  altarıgrubu ve  $I_n$ 'nin  $L^-(n, r) = \{\alpha \in I_n : x\alpha \leq x \text{ ve } |im \alpha| \leq r\} \cup \{\emptyset\}$  altarıgrubu için  $P_r^- = K^-(n, r)/K^-(n, r-1)$  ve  $Q_r^- = L^-(n, r)/L^-(n, r-1)$  Rees bölüm yarıgruplarının bir tek minimal doğuray kümesine sahip olduğu gösterilmiş ve rankları bulunmuştur.

A. Laradji ve A. Umar (2004) tarafından  $X_n$  üzerindeki tüm sıra-azaltan (sıra-koruyan) tam dönüşümlerinin yarıgrubu  $D_n(\mathcal{O}_n)$  olmak üzere  $D_n(D_n \cap \mathcal{O}_n)$  nin  $D(n, r) = \{\alpha \in D_n : |im(\alpha)| \leq r\}$  ( $C(n, r) = D(n, r) \cap \mathcal{O}_n$ ) iki taraflı ideali için  $DP_r(n) = D(n, r)/D(n, r-1)$  ( $CP_r(n) = C(n, r)/C(n, r-1)$ ) Rees bölüm yarıgrubunun bir  $\mathcal{R}$ -trivial ( $\mathcal{J}$ -trivial) idempotent üreteçli  $0^*$ -bisimple primitive abundant yarıgrup olduğu gösterilmiş ve  $CP_r(n)$  yarıgrubunun eleman sayısının rankı ve idempotent rankı bulunmuştur.

M. Yağcı ve E. Korkmaz (2020) tarafından  $X_n$  üzerindeki tüm sıra-koruyan ve azaltan dönüşümlerin yarıgrubu  $\mathcal{C}_n$  olmak üzere  $\mathcal{C}_n$  yarıgrubunun tüm nilpotent elemanlarının oluşturduğu  $N(\mathcal{C}_n)$  altarıgrubu için minimal doğuray küme ve rank bulunmuştur. Ayrıca,  $\mathcal{C}_n$  yarıgrubunun nilpotent altarıgrupları incelenmiştir.

M. Yağcı ve E. Korkmaz (2020) tarafından sonlu bir yarıgrubun  $a^{m+1} = a^m(a^m = 0)$  ve  $a, a^2, \dots, a^m$  farklı olması koşulunu sağlayan  $a$  elemanı  $m$ -potent ( $m$ -nilpotent) eleman olarak tanımlanırsa  $N(\mathcal{C}_n)$  yarıgrubundaki  $m$ -nilpotent elemanların sayısı ve  $m$ -potent elemanların sayısı bulunmuştur. Ayrıca,  $\alpha \in T_n$  için  $Fix(\alpha) = \{x \in X_n : x\alpha = x\}$  olmak üzere  $X_n$  zincirinin herhangi bir  $Y$  alt kümesi için  $\mathcal{C}_{n,Y} = \{\alpha \in \mathcal{C}_n : Fix(\alpha) = Y\}$  kümesinin  $m$ -potent elemanlarının sayısı bulunmuştur.

E. Korkmaz ve H. Ayik (2021) tarafından  $X_n$  üzerindeki tüm sıra-koruyan ve azaltan dönüşümlerin yarıgrubu  $\mathcal{C}_n$  ve  $\mathcal{C}_n$  yarıgrubunun tüm nilpotent elemanlarının oluşturduğu  $N(\mathcal{C}_n)$  altarıgrubu için

$$N(\mathcal{C}_{n,r}) = \{\alpha \in N(\mathcal{C}_n) : |im(\alpha)| \leq r\}$$

ve

$$N_r(\mathcal{C}_n) = \{\alpha \in N(\mathcal{C}_n) : \alpha \text{ herhangi bir } 1 \leq m \leq r \text{ için } \alpha \text{ bir } m - \text{potent}\}$$

olmak üzere  $N(\mathcal{C}_{n,r})$  yarıgrubunun eleman sayısı ve rankı bulunmuştur. Ayrıca,  $N_r(\mathcal{C}_n)$  kümesinin  $N(\mathcal{C}_n)$  yarıgrubunun bir altarıgrubu olduğu gösterilmiş ve  $N_r(\mathcal{C}_n)$  yarıgrubunun rankı için bir alt sınır bulunmuştur.



### 3. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

#### 3.1. Yarıgruplar

**Tanım 3.1.1.**  $S \neq \emptyset$  bir küme ve  $\sigma: S \times S \rightarrow S$  şeklinde tanımlı bir fonksiyon olsun. O zaman,  $\sigma$ 'ya  $S$  üzerinde bir **ikili işlem** denir ve  $(S, \sigma)$  ikilisine de bir **grupoid** denir. Ayrıca, eğer  $(S, \sigma)$  bir grupoid ise her  $a, b, c \in S$  için

$$((a, b)\sigma, c)\sigma = (a, (b, c)\sigma)\sigma$$

koşulunu sağlayan  $\sigma$  ikili işlemi  $S$  üzerinde birleşme özelliğine sahiptir ve  $(S, \sigma)$  ikilisine de bir **yarıgrup** denir. Burada dönüşüm sembollerin sağına yazılmıştır. Eğer,  $S$  kümesi üzerinde tanımlı ikili işlem açıkça belirtilmiş ise  $(a, b)\sigma$  yerine  $a \cdot b$  ve  $(S, \sigma)$  yerine  $(S, \cdot)$  veya kısaca  $S$  yazacağız. O halde, birleşme özelliği de

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

şeklinde ifade edilebilir.

**Tanım 3.1.2.**  $S$  bir yarıgrup ve  $e \in S$  olsun.

- i) Eğer  $\forall t \in S$  için  $e \cdot t = t$  ise  $e$  elemanına bir **sol sıfır eleman** denir.
- ii) Eğer  $\forall t \in S$  için  $t \cdot e = t$  ise  $e$  elemanına bir **sağ sıfır eleman** denir.
- iii) Eğer  $\forall t \in S$  için  $e \cdot t = e$  ve  $t \cdot e = e$  ise  $e$  elemanına **sıfır eleman** denir.

Eğer bir yarıgrupun sıfır elemanı mevcut ise kolayca ispatlanacağı üzere bu sıfır elemanı tektir ve bu tekliliğin sonucunda, sıfır eleman genellikle 0 ile gösterilir.

**Tanım 3.1.3.**  $S$  bir yarıgrup ve  $e \in S$  olsun.

- i) Eğer  $\forall t \in S$  için  $e \cdot t = t$  ise  $e$  elemanına bir **sol birim eleman** denir
- ii) Eğer  $\forall t \in S$  için  $t \cdot e = t$  ise  $e$  elemanına bir **sağ birim eleman** denir.
- iii) Eğer  $\forall t \in S$  için  $e \cdot t = t$  ve  $t \cdot e = t$  ise  $e$  elemanına **birim eleman** denir.

Eğer bir yarıgrupun birim elemanı mevcut ise kolayca ispatlanacağı üzere bu birim elemanı tektir ve bu tekliliğin sonucunda, birim eleman genellikle 1 ile gösterilir.

**Tanım 3.1.4.**  $S$  bir birim elemanlı yarıgrup ise  $S$  yarıgrupuna bir **monoid** denir.

**Tanım 3.1.5.**  $S$  sıfır eleman "0" içeren bir yarıgrup ve  $a \in S$  olmak üzere, eğer

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m \text{ tane}} = 0$$

olacak şekilde bir  $m$  pozitif tam sayısı mevcut ise  $a$  elemanına  $S$ 'nin bir **nilpotent elemanı** denir.

Ayrıca,  $S$ 'nin tüm nilpotent elemanların oluşturduğu küme  $N(S)$  ile gösterilir. Yani;

$$N(S) = \{a \in S : \exists n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için } a^n = 0\}$$

olur. Eğer,  $N(S) = S$ , yani  $S$  yarıgrupunun her elemanı nilpotent ise  $S$ 'ye bir **nilpotent yarıgrup** denir. Ayrıca, bir  $a \in N(S)$  için  $a^m = 0$  olacak şekilde en küçük pozitif tam sayısına  **$a$ 'nın nilpotentlik derecesi** denir.

**Tanım 3.1.6.**  $S$  bir yarıgrup ve  $a \in S$  olmak üzere eğer,  $a^2 = a \cdot a = a$  ise  $a$ 'ya  $S$ 'nin bir **idempotent elemanı** denir.  $S$ 'nin tüm idempotent elemanların oluşturduğu küme  $E(S)$  ile gösterilir. Daha genel olarak,  $T$ ,  $S$  yarıgrupunun bir alt kümesi olmak üzere  $T$ 'deki tüm idempotenlerin kümesi  $E(T)$  ile gösterilir. Yani;

$$E(T) = \{a \in T : a^2 = a\}$$

olur. Eğer,  $E(S) = S$  ise  $S$  yarıgrupuna bir **band** denir.

$S$  bir yarıgrup ve her  $a, b \in S$  için  $a \cdot b = b \cdot a$  ise  $S$ 'ye **değişmeli bir yarıgrup** denir. Ayrıca, bir değişmeli banda **yarılatis** denir,

**Tanım 3.1.7.**  $S$  bir yarıgrup olsun.

- i) Eğer,  $\forall a, b \in S$  için  $a \cdot b = a$  ise  $S$  yarıgrupuna **sol sıfır yarıgrup** denir.
- ii) Eğer,  $\forall a, b \in S$  için  $a \cdot b = b$  ise  $S$  yarıgrupuna **sağ sıfır yarıgrup** denir.
- iii) Eğer,  $S$ 'nin bir sıfır elemanı 0 mevcut, en az 2 elemanlı ve  $\forall a, b \in S$  için  $a \cdot b = 0$  ise  $S$ 'ye bir **sıfır yarıgrup** denir.

$S$  bir yarıgrup,  $a \in S$  ve  $T$  de  $S$ 'nin boş olmayan bir altkümesi olsun. O zaman,

$$aT = \{ab : b \in T\} \text{ ve } Ta = \{ba : b \in T\}$$

şeklinde tanımlanır.

**Tanım 3.1.8.**  $S$  bir yarıgrup olsun. Eğer,  $\forall a \in S$  için  $ea = a$  olacak şekilde bir  $e \in S$  ve  $ba = e$  olacak şekilde bir  $b \in S$  mevcut ise  $S$ 'ye bir **grup** denir. Ayrıca, bir yarıgrupun yalnızca  $e$  elemanını içeren  $\{e\}$  kümesi bir grup olup bu yarıgruba **aşık grup** denir.

$S$  bir yarıgrup ve  $T$  ile  $U$  da  $S$ 'nin boş olmayan iki alt kümesi olsun. O zaman,

$$TU = \{ab : a \in T \text{ ve } b \in U\} \text{ ve } T^2 = TT$$

olarak tanımlanır.

**Tanım 3.1.9.**  $S$  bir yarıgrup ve  $I$ ,  $S$ 'nin boş olmayan bir alt kümesi olmak üzere eğer

- i)  $I^2 \subseteq I$  ise  $I$  kümesine  $S$  yarıgrupunun bir **alt yarıgrubu** denir ve  $I \leq S$  ile gösterilir;
- ii)  $SI \subseteq I$  ise  $I$  kümesine  $S$  yarıgrupunun bir **sol ideali** denir;
- iii)  $IS \subseteq I$  ise  $I$  kümesine  $S$  yarıgrupunun bir **sağ ideali** denir;
- iv)  $SI \subseteq I$  ve  $IS \subseteq I$  ise  $I$  kümesine  $S$  yarıgrupunun bir **ideali** denir ve  $I \trianglelefteq S$  ile gösterilir.

**Tanım 3.1.10.**  $A$  ve  $B$  iki yarıgrup olmak üzere eğer her  $a, b \in A$  için

$$(ab)\rho = (a\rho)(b\rho)$$

olacak şekilde bir  $\rho: A \rightarrow B$  dönüşümü mevcut ise  $\rho$  dönüşüme bir **(yarıgrup) homomorfizmi** denir. Ayrıca

- i)  $\rho$  bire-bir ise  $\rho$ 'ya bir **monomorfizm**;
- ii)  $\rho$  örten ise  $\rho$ 'ya bir **epimorfizm**;
- iii)  $\rho$  bire-bir ve örten ise  $\rho$ 'ya bir **izomorfizm**;
- iv)  $A = B$  ise  $\rho$ 'ya bir **endomorfizm**; ve
- v)  $\rho$  bire-bir ve örten endomorfizm ise bir **otomorfizm**

denir.



Eğer  $A$ 'dan  $B$ 'ye bir izomorfizm varsa  $A$  ile  $B$  yarıgruplarına **izomorfik yarıgruplar** denir ve  $A \cong B$  şeklinde gösterilir.

**Tanım 3.1.11.**  $A$  ve  $B$  iki yarıgrup olmak üzere  $A \times B$  kartezyen çarpımı üzerinde her  $(a, b), (c, d) \in A \times B$  için aşağıdaki şekilde tanımlanan ikili işlem ile bir yarıgrup oluşturur:

$$(a, b)(c, d) = (ac, bd).$$

Bu şekilde tanımlanan yarıgruba  $A$  ve  $B$  yarıgruplarının **direkt çarpım yarıgrubu** denir.

**Tanım 3.1.12.**  $A$  ve  $B$  iki yarıgrup ve  $\rho : A \rightarrow B$  bir homomorfizm olsun. O zaman

$$im(\rho) = \{a\rho : a \in A\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye  $\rho$ 'nun **görüntü (imaj) kümesi** denir.

**Tanım 3.1.13.**  $A$  ve  $B$  iki yarıgrup ve  $\rho : S \rightarrow T$  bir homomorfizm olsun. O zaman

$$ker(\rho) = \{(a, b) \in S \times S : a\rho = b\rho\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye  $\rho$ 'nun **çekirdek (kernel) kümesi** denir.

### 3.2. Bağlılıklar ve Denklik Bağlılıkları

**Tanım 3.2.1.**  $X$  boş olmayan küme olmak üzere  $X \times X$  kartezyen çarpımının her bir  $\sigma$  alt kümesine  $X$  üzerinde bir **bağlıntı** denir.  $X$  üzerindeki tüm bağtıların oluşturduğu küme

$$B_X = \{\sigma : \sigma \subseteq X \times X\}$$

ile gösterilir.  $\emptyset \subseteq X \times X$  bir bağtı olup bu bağtıya ya **boş bağtı** ya da **sıfır bağtı** denir. Ayrıca,  $1_X = \{(a, a) : a \in X\}$  kümesi de bir bağtı olup bu bağtıya **birim bağtı** denir. Eğer  $\sigma$ ,  $X$  üzerinde bir bağtı ise

$$\sigma^{-1} = \{(a, b) \in X \times X : (b, a) \in \sigma\}$$

bağtıısına  $\sigma$ 'nın **ters bağtıısı** denir.

**Tanım 3.2.2.**  $X$  boş olmayan bir küme olsun. Her  $\rho, \sigma \in B_X$  için bileşke işlemi

$$\rho \circ \sigma = \{(a, b) \in X \times X : \exists c \in X \text{ için } (a, c) \in \rho \text{ ve } (c, b) \in \sigma\}$$

olarak tanımlanır. Böylece,  $B_X$  bir yarıgrup olup bu yarıgruba  $X$  üzerinde ki **bağıntılar yarıgrubu** denir.

**Tanım 3.2.3.**  $\emptyset \neq X$  bir küme  $x \in X, Y \subseteq X$  ve  $\sigma \in B_X$  ise

- i)  $\text{dom}(\sigma) = \{x \in X : \exists y \in X \text{ için } (x, y) \in \sigma\}$  kümesine  $\sigma$ 'nın **tanım kümesi** denir.
- ii)  $\text{im}(\sigma) = \{y \in X : \exists x \in X \text{ için } (x, y) \in \sigma\}$  kümesine  $\sigma$ 'nın **görüntü kümesi** denir.
- iii)  $x\sigma = \{y \in X : (x, y) \in \sigma\}$  kümesine  $x$ 'nin  $\sigma$  **altındaki görüntü kümesi** denir.
- iv)  $x\sigma^{-1} = \{y \in X : (y, x) \in \sigma\}$  kümesine  $x$ 'nin  $\sigma$  **altındaki ters görüntü kümesi** denir.
- v)  $Y\sigma = \bigcup_{x \in Y} x\sigma$  kümesine  $Y$ 'nin  $\sigma$  **altındaki görüntü kümesi** denir.
- vi)  $Y\sigma^{-1} = \bigcup_{x \in Y} x\sigma^{-1}$  kümesine  $Y$ 'nin  $\sigma$  **altındaki ters görüntü kümesi** denir.

Böylece,  $X\sigma = \text{im}(\sigma)$  ve  $X\sigma^{-1} = \text{dom}(\sigma)$  olur.

**Tanım 3.2.4.**  $X \neq \emptyset$  bir küme ve  $X$  üzerindeki herhangi bir  $\sigma$  bağıntısı için

- i)  $1_X \subseteq \sigma$  oluyor ise  $\sigma$  bağıntısına **yansımali (reflexive) bağıntı** denir;
- ii)  $\sigma^{-1} = \sigma$  oluyor ise  $\sigma$  bağıntısına **simetrik (symmetric) bağıntı** denir;
- iii)  $\sigma \circ \sigma = \sigma$  ise  $\sigma$  bağıntısına **geçişmeli (transitive) bağıntı** denir;
- iv)  $\sigma \cap \sigma^{-1} \subseteq 1_X$  ise  $\sigma$  bağıntısına **ters simetrik (anti-symmetric) bağıntı** denir.

Yukarıda verilmiş özelliklerden ilk üçüne sahip olan bir bağıntıya  $X$  üzerinde bir **denklik (equivalence) bağıntısı** denir. Ayrıca,  $\sigma$  bağıntısı yansımali, geçişmeli ve ters simetrik bağıntı oluyorsa  $\sigma$ 'ya  $X$  üzerinde **kısmi sıralama (order) bağıntısı** denir.  $\sigma$ ,  $X$  üzerinde bir sıralama bağıntısı ise her  $(a, b) \in \sigma$  yerine  $a \leq_\sigma b$  veya kısaca,  $a \leq b$  yazılır. Genellikle bir kısmi sıralama bağıntısını  $(X, \leq)$  ile göstereceğiz.

**Tanım 3.2.5.**  $(X, \leq)$  bir kısmi sıralı küme olmak üzere eğer  $\forall a, b \in X$  için  $a \leq b$  veya  $b \leq a$  ise  $(X, \leq)$  bir **tam sıralı küme** denir. Ayrıca,  $\emptyset \neq Y \subseteq X$  olsun. Her  $y \in Y$  için  $a \leq y$  olacak şekilde bir  $a \in Y$  mevcut ise  $a$  ya  $Y$ 'nin **minimum elemanı** denir ve benzer şekilde  $y \leq b$  olacak şekilde bir  $b \in Y$  mevcut ise  $b$  ye  $Y$ 'nin **maksimum elemanı** denir.

**Tanım 3.2.6.**  $\sigma$ ,  $X$  üzerinde bir denklik bağıntısı ve  $x \in X$  olmak üzere  $x$ 'in **denklik sınıfı** şu şekilde tanımlanır:

$$x\sigma = \{y \in X : (x, y) \in \sigma\}.$$

Bu tanıma göre,  $X$  kümesinin tüm denklik sınıflarının oluşturduğu aile  $X/\sigma$  ile gösterilir ve şu şekilde tanımlanır:

$$X/\sigma = \{x\sigma : x \in X\}.$$

Dikkat edilirse  $X/\sigma$ ,  $X$  kümesinin bir parçalanışı olup  $X$ 'in  $\sigma$  bağıntısı ile oluşturulan **parçalanış kümesi** denir. Diğer bir ifade ile

- i)  $\forall x \in X$  için  $x\sigma \neq \emptyset$ ,
- ii)  $\forall x, y \in X$  için  $x\sigma \cap y\sigma = \emptyset$  veya  $x\sigma = y\sigma$  ve
- iii)  $X = \bigcup_{x \in X} x\sigma$  olur.

**Önerme 3.2.7.** Herhangi bir  $\rho : X \rightarrow X$  dönüşümü için  $\rho \circ \rho^{-1}$ ,  $X$  üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

**İspat:** Howie (1995), Proposition 1.4.7'ye bakınız.  $\square$

### 3.3. Green Denklik Bağlılıkları

**Tanım 3.3.1.**  $S$  bir yarıgrup ve  $a \in S$  olmak üzere

- i)  $S^1a = Sa \cup \{a\} = \{qa : q \in S\} \cup \{a\}$  kümesine  $S$ 'nin  $a$  elemanını içeren **sol ideali** denir.
- ii)  $aS^1 = aS \cup \{a\} = \{aq : q \in S\} \cup \{a\}$  kümesine  $S$ 'nin  $a$  elemanını içeren **sağ ideali** denir.
- iii)  $S^1aS^1 = SaS \cup Sa \cup aS \cup \{a\} = \{qar : r \in S\} \cup \{qa : q \in S\} \cup \{aq : q \in S\} \cup \{a\}$

kümesine de  $S$ 'nin  $a$  elemanını içeren **ideali** denir.

Bu kümeler aynı zamanda, sırasıyla  $S$ 'nin  $a$  elemanını içeren **esas sol ideali**, **esas sağ ideali** ve **esas ideali** de denir.

**Tanım 3.3.2.**  $S$  bir yarıgrup olsun.  $S$  üzerinde aşağıdaki bağıntılar tanımlanır:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \{(a, b) : S^1 a = S^1 b\} \subseteq S \times S \\ \mathcal{R} &= \{(a, b) : a S^1 = b S^1\} \subseteq S \times S \\ \mathcal{J} &= \{(a, b) : S^1 a S^1 = S^1 b S^1\} \subseteq S \times S\end{aligned}$$

Bu bağıntılara sırası ile,  **$\mathcal{L}$ -Green (sol Green)**,  **$\mathcal{R}$ -Green (sağ Green)** ve  **$\mathcal{J}$ -Green bağıntıları** denir. Ayrıca, her bir bağıntının bir denklik bağıntısı olduğu açıkça görülmektedir.

**Önerme 3.3.3.**  $S$  bir yarıgrup ve  $a, b \in S$  olsun.

- i)  $(a, b) \in \mathcal{L}$  ancak ve ancak  $pa = b$  ve  $qb = a$  olacak şekilde  $p, q \in S^1$  vardır.
- ii)  $(a, b) \in \mathcal{R}$  ancak ve ancak  $ar = b$  ve  $bs = a$  olacak şekilde  $r, s \in S^1$  vardır.
- iii)  $(a, b) \in \mathcal{J}$  ancak ve ancak  $par = b$  ve  $qbs = a$  olacak şekilde  $p, q, r, s \in S^1$  vardır.

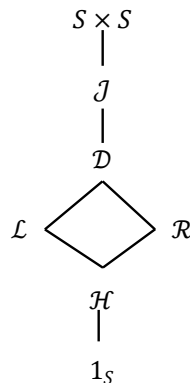
**İspat:** Howie (1995), Proposition 2.1.1. e bakınız.  $\square$

**Tanım 3.3.5.**  $\mathcal{L}$  ve  $\mathcal{R}$ ,  $S$  yarıgrubu üzerindeki sol-Green ve sağ-Green denklik bağıntıları olsun.  $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$  şeklinde tanımlanan  $\mathcal{H}$  bağıntısına  **$\mathcal{H}$ -Green denklik bağıntısı** denir.  $S$  yarıgrubu üzerinde  $\mathcal{L}$  ile  $\mathcal{R}$  içeren en küçük denklik bağıntısına da  **$\mathcal{D}$ -Green denklik bağıntısı** denir ve  $\mathcal{D} = \mathcal{L} \vee \mathcal{R}$  şeklinde gösterilir. Ayrıca,  $\mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$  olduğu bilinmektedir.

**Önerme 3.3.6.**  $S$  periyodik bir yarıgrup, yani her  $a \in S$  için  $a^m \in E(S)$  olacak şekilde ( $a$ 'ya bağlı) bir  $m$  pozitif tamsayısı mevcut ise  $\mathcal{J} = \mathcal{D}$  olur.

**İspat:** Howie (1995), Proposition 2.1.4. e bakınız.  $\square$

**Tanım 3.3.7.** Bir  $S$  yarıgrubu üzerinde tanımlı olan  $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{H}, \mathcal{J}$  ve  $\mathcal{D}$ -Green denklik bağıntıları için  $1_x \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{L}, \mathcal{R} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{J} \subseteq S \times S$  olmak üzere bu denkliklerin arasındaki ilişkiler aşağıdaki Hasse diyagramı ile gösterilir.



Şekil 1. Green denklik bağıntılarının Hasse Diyagramı

**Tanım 3.3.8.**  $S$  bir yarıgrup ve  $a \in S$  olsun.  $a$ 'yı içeren  $\mathcal{H}, \mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{J}$  ve  $\mathcal{D}$  –Green denklik bağıntıları altında tanımlanan denklik sınıfları sırası ile  $H_a, L_a, R_a, J_a$  ve  $D_a$  sembolleriyle gösterilir. Ayrıca,  $S$  yarıgrubu üzerindeki bu denklik bağıntıları ile oluşturulan denklik sınıflarının (bölüm) kümeleri, sırasıyla  $S/\mathcal{H}, S/\mathcal{L}, S/\mathcal{R}, S/\mathcal{J}, S/\mathcal{D}$  şeklinde ifade edilir.

$S$  yarıgrubu üzerindeki Green denklik bağıntılarının arasında şu ilişki bulunmaktadır

$$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{L} \text{ ve } \mathcal{R} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$$

Ayrıca,  $\mathcal{D}$ -Green denklik bağıntısının tanımı gereği herhangi  $a, b \in S$  için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$L_a \cap R_a = H_a \subseteq L_a \text{ ve } R_a \subseteq L_a \cup R_a \subseteq D_a$$

Bunlara ek olarak,  $a\mathcal{D}b$  ilişkisi

$$a\mathcal{D}b \Leftrightarrow L_a \cap R_b \neq \emptyset \Leftrightarrow L_b \cap R_a \neq \emptyset$$

olduğu açıkça görülebilir. O halde, bir  $\mathcal{D}$  –Green denklik sınıfı  $D$ , ayrık  $\mathcal{L}$  –Green denklik sınıfları ve  $\mathcal{R}$  –Green denklik sınıflarının birleşimidir. Böylece, bir  $\mathcal{D}$  –sınıfı, her satırı bir  $\mathcal{R}$  –sınıfını, her sütunu bir  $\mathcal{L}$  –sınıfı ve her hücresi de bir  $\mathcal{H}$  –sınıfı olan bir yumurta kutusu şeklindedir. Diğer bir ifade ile

Çizelge 1. Bir  $\mathcal{D}$  –Green Denklik Sınıfı Örneği

|                 |       |       |  |  |  |
|-----------------|-------|-------|--|--|--|
| $\mathcal{D}_a$ | $L_a$ |       |  |  |  |
|                 |       |       |  |  |  |
| $R_a$           |       | $H_a$ |  |  |  |
|                 |       |       |  |  |  |

**Tanım 3.3.9.**  $n$  ile  $r$  pozitif tamsayılar ve  $n \geq r$  olmak üzere  $n$  farklı nesnenin  $r$  tane özdeş kutuya hiç biri boşta kalmayacak şekilde dağılımlarının sayısına **ikinci tip Stirling Sayısı** denir ve  $S(n, r)$  ile gösterilir. Ayrıca,

$$S(n, r) = \frac{1}{r!} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r}{k} (r-k)^n$$

olduğu bilinmektedir. Bununla birlikte  $S(n, 1) = S(n, n) = 1$  olmak üzere her  $2 \leq r \leq n$  için

$$S(n, r) = rS(n-1, r) + S(n-1, r-1)$$

indirgeme bağıntısını sağladığı da bilinmektedir.

Çizelge 2. Bazı İkinci Tip Stirling Sayıları

| $n \setminus r$ | 1 | 2  | 3  | 4  | 5 |
|-----------------|---|----|----|----|---|
| 1               | 1 |    |    |    |   |
| 2               | 1 | 1  |    |    |   |
| 3               | 1 | 3  | 1  |    |   |
| 4               | 1 | 7  | 6  | 1  |   |
| 5               | 1 | 15 | 25 | 10 | 1 |

### 3.4. Bazı Dönüşüm Yarıgrupları

**Tanım 3.4.1.**  $X \neq \emptyset$  ve  $\alpha \in B_X$  olmak üzere eğer her  $x \in X$  için  $|x\alpha| = 0$  veya  $|x\alpha| = 1$  ise  $\alpha$ 'ya  $X$  üzerinde bir **kısmi dönüşüm** denir.  $X$  üzerindeki tüm kısmi dönüşümlerin kümesi  $P_X$  ile gösterilir.

**Önerme 3.4.2.**  $X$  boş olmayan bir küme olmak üzere  $P_X, B_X$ 'in bir altyarıgrupudur.

**İspat:**  $\alpha, \beta \in P_X$  ve  $x \in X$  olsun. Eğer,  $x \notin \text{dom}(\alpha)$  ise  $x\alpha = \emptyset$  olup  $\emptyset\beta = \emptyset$  olduğundan  $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta = \emptyset\beta = \emptyset$  olur. Böylece,  $|x(\alpha\beta)| = 0$  olduğundan koşul sağlanır. Eğer,  $x \in \text{dom}(\alpha)$  ise  $x\alpha = \{y\}$  olacak şekilde bir tek  $y \in X$  vardır. Ayrıca,  $\{y\}\beta = y\beta \notin \text{dom}(\beta)$  ise  $y\beta = \emptyset$  olup  $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta = y\beta = \emptyset$  olduğundan  $|x(\alpha\beta)| = 0$  olur. Şimdi  $x \in \text{dom}(\alpha)$ ,  $x\alpha = \{y\}$  ve  $y \in \text{dom}(\beta)$  olsun. O zaman,  $y\beta = \{z\}$  olacak şekilde bir tek  $z \in X$  vardır. Böylece,  $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta = \{y\}\beta = y\beta = \{z\}$  olup  $|x(\alpha\beta)| = 1$  olur.  $\square$

$P_X$  altyarıgrupuna  $X$  üzerindeki **kısmi dönüşümler yarı grubu** denir.

**Önerme 3. 4.3.**  $\alpha, \beta \in P_X$  için

i)  $\text{dom}(\alpha\beta) = [\text{im}\alpha \cap \text{dom}\beta] \alpha^{-1}$

ii)  $\text{im}(\alpha\beta) = [\text{im}\alpha \cap \text{dom}\beta] \beta$

olur.

**İspat:** Howie (1995), Proposition 1.4.3. e bakınız.  $\square$

**Önerme 3.4.4.**  $\alpha \in P_X$  olsun. O zaman,  $\alpha$  bir idempotenttir ancak ve ancak her  $x \in im(\alpha)$  için  $x\alpha = x$  dir.

**İspat:**( $\Rightarrow$ )  $\alpha \in E(P_X)$  olsun. Eğer  $\alpha = 0_X$  ise sonuç açıktır. Eğer  $\alpha \neq 0_X$  ise  $im(\alpha) \neq \emptyset$  olup herhangi bir  $x \in im(\alpha)$  için  $y\alpha = x$  olacak şekilde bir tek  $y \in dom(\alpha)$  vardır. Böylece,  $\alpha^2 = \alpha$  olduğundan  $x\alpha = (y\alpha)\alpha = y\alpha^2 = y\alpha = x$  olur.

( $\Leftarrow$ ) Her bir  $x \in im(\alpha)$  için  $x\alpha = x$  olsun. Eğer  $im(\alpha) = \emptyset$  ise  $\alpha = 0_X \in E(P_X)$  olur. Eğer  $im(\alpha) \neq \emptyset$  ise  $dom(\alpha) \neq \emptyset$  olup her bir  $y \in dom(\alpha)$  için  $y\alpha \in im(\alpha)$  olduğundan  $y\alpha = (y\alpha)\alpha = y\alpha^2$  olup  $\alpha = \alpha^2$  yani  $\alpha \in E(P_X)$  olur.  $\square$

**Tanım 3.4.5.**  $\alpha \in P_X$  için

$$ker(\alpha) = \{(x, y) \in X \times X : x, y \in dom(\alpha) \text{ ise } x\alpha = y\alpha \text{ veya } x, y \notin dom(\alpha)\}$$

kümesine  $\alpha$ 'nın **çekirdek kümesi** denir.

**Tanım 3.4.6.** Her bir  $\alpha \in P_X$  için

$$Fix(\alpha) = \{x \in dom(\alpha) : x\alpha = x\}$$
$$Shift(\alpha) = \{x \in dom(\alpha) : x\alpha \neq x\}$$

olarak tanımlanan kümelere sırasıyla  $\alpha$ 'nın **sabit noktalarının kümesi** ve  $\alpha$ 'nın **sabit olmayan noktalarının kümesi** denir.

**Önerme 3.4.7.**  $\alpha \in P_X$  olsun. O zaman,  $\alpha$ 'nın bir idempotent olması için gerek ve yeter koşul  $Fix(\alpha) = im(\alpha)$  olmasıdır.

**İspat:** ( $\Rightarrow$ )  $\alpha$  bir idempotent olsun. Eğer  $x \in Fix(\alpha)$  ise  $x\alpha = x$  olduğundan  $x \in im(\alpha)$  olup  $Fix(\alpha) \subseteq im(\alpha)$  olur. Ayrıca,  $x \in im(\alpha)$  ise  $y\alpha = x$  olacak şekilde bir  $y \in dom(\alpha)$  vardır. Böylece,  $\alpha$  bir idempotent olduğundan  $x\alpha = (y\alpha)\alpha = y\alpha^2 = y\alpha = x$  olup  $x \in Fix(\alpha)$  olur. Böylece,  $im(\alpha) \subseteq Fix(\alpha)$  de olduğundan  $im(\alpha) = Fix(\alpha)$  olur.

( $\Leftarrow$ )  $Fix(\alpha) = im(\alpha)$  olsun. O zaman, her  $y \in dom(\alpha)$  için  $y\alpha \in im(\alpha) = Fix(\alpha)$  olduğundan  $y\alpha^2 = (y\alpha)\alpha = y\alpha$  olup  $\alpha$  bir idempotenttir.  $\square$

**Tanım 3.4.8.**  $\emptyset \neq X$  bir küme ve  $\alpha \in B_X$  olmak üzere eğer her  $x \in X$  için  $|x\alpha| = 1$  ise  $\alpha$ 'ya  $X$  üzerinde bir **(tam) dönüşüm** denir.  $X$  üzerinde ki tüm (tam) dönüşümlerin kümesi  $T_X$  ile gösterilir. Dolayısıyla,  $\alpha \in T_X$  ise  $\text{dom}(\alpha) = X$  olur.

Herhangi bir  $\alpha \in P_X$  ve  $x \in \text{dom}(\alpha)$  için  $x\alpha = \{y\}$  olacak şekilde bir tek  $y \in X$  olduğundan bundan sonra  $x\alpha = \{y\}$  yerine  $x\alpha = y$  yazacağız. Ayrıca  $\alpha, \beta \in P_X$  ve  $x \in \text{dom}(\alpha\beta)$  için

$$x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$$

yazılır.

**Önerme 3.4.9.**  $\emptyset \neq X$  bir küme olmak üzere  $T_X, B_X$ 'in bir alt yarıgrubudur.

**İspat:**  $\alpha, \beta \in T_X$  ve  $x \in X$  olsun. O zaman, bir tek  $y \in X$  için  $x\alpha = y$  ve bir tek  $z \in X$  için  $y\beta = z$  olur. Böylece, bir tek  $z \in X$  için  $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta = y\beta = z$  olduğundan  $\alpha\beta \in T_X$  olur.  $\square$

Ayrıca,  $T_X \subseteq P_X$  olduğundan  $T_X, P_X$ 'in bir alt yarıgrubu olur ve  $T_X \leq P_X \leq B_X$  şeklindedir. Dikkat edilirse,  $1_X \in T_X$  olup  $T_X$  bir monoid olur. Fakat  $0_X \notin T_X$  olur.

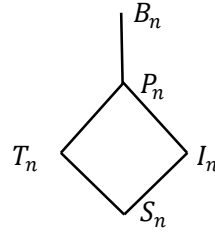
**Tanım 3.4.10.**  $\alpha \in P_X$  olmak üzere eğer  $\text{im}(\alpha) \neq \emptyset$  iken her  $x \in \text{im}(\alpha)$  için  $|x\alpha^{-1}| = 1$  oluyor ise  $\alpha$ 'ya bir **kısmi bire-bir dönüşüm** denir.  $X$  üzerindeki tüm kısmi bire-bir dönüşümlerin kümesi  $I_X$  ile gösterilir. Böylece, her  $\alpha \in I_X$  için  $|\text{dom}(\alpha)| = |\text{im}(\alpha)|$  olur. Ayrıca,  $\alpha^{-1} \in I_X$  olduğu açıktır. Son olarak,  $I_X \leq P_X$  olduğu da açıktır.

**Tanım 3.4.11.**  $\alpha \in T_X$  olmak üzere eğer her  $y \in X$  için  $x\alpha = y$  koşulunu sağlayan bir  $x \in X$  varsa  $\alpha$ 'ya bir **örten dönüşüm** denir.

**Tanım 3.4.12.**  $\alpha \in T_X$  olmak üzere eğer  $\alpha$  hem bire-bir hem örten dönüşüm ise  $\alpha$ 'ya  $X$  üzerinde bir **permütasyon** denir.  $X$  üzerindeki tüm permütasyonların kümesi  $S_X$  ile gösterilir. Ayrıca,  $S_X \leq I_X, T_X, P_X$  olduğu görülür.

Biz çalışmamız boyunca  $X = X_n = \{1, 2, \dots, n\}$  sonlu kümesini ele alacağız ve  $B_X, P_X, T_X, I_X, S_X$  yerine sırası ile  $B_n, P_n, T_n, I_n, S_n$  yazacağız. Böylece,  $S_n \subseteq I_n, T_n \subseteq P_n \subseteq B_n$  olup aralarındaki bu ilişki aşağıdaki Hasse diyagramı ile gösterilebilir.





Şekil 2. Dönüşüm Yarıgruplarının Hasse Diyagramı

Ayrıca,  $\alpha \in P_n$  kısmi dönüşümü

$$\alpha = \begin{pmatrix} x \in \text{dom}(\alpha) & x \in X_n \setminus \text{dom}(\alpha) \\ x\alpha & - \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılır. Özel olarak,  $\alpha \in T_n$  dönüşümü

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1\alpha & 2\alpha & \dots & n\alpha \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılır. Böylece,

$$|X_n \times X_n| = n^2, \quad |B_n| = 2^{n^2}, \quad |P_n| = (n+1)^n, \\ |T_n| = n^n, \quad |I_n| = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r}^2 r! \quad \text{ve} \quad |S_n| = n!$$

olduğu kolayca görülmektedir.

**Önerme 3.4.13.** Her  $\alpha, \beta \in P_X$  için

- i)  $\text{dom}(\alpha\beta) \subseteq \text{dom}(\alpha)$
- ii)  $\text{im}(\alpha\beta) \subseteq \text{im}(\beta)$
- iii)  $|\text{im}(\alpha\beta)| \leq |\text{im}(\alpha)|$

olur.

**İspat:**

- i) Eğer  $\text{dom}(\alpha\beta) = \emptyset$  sonuç açıktır. Eğer  $x \in \text{dom}(\alpha\beta)$  mevcut ise  $(x, y) \in \alpha\beta$  olacak şekilde bir tek  $y \in X$  vardır. Dolayısıyla,  $(x, z) \in \alpha$  ve  $(z, y) \in \beta$  şekilde bir tek  $z \in X$  mevcut olup  $x \in \text{dom}(\alpha)$ . Böylece,  $\text{dom}(\alpha\beta) \subseteq \text{dom}(\alpha)$  olur.
- ii) Benzer şekilde gösterilir.

iii)  $\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_r & A_{r+1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_r & - \end{pmatrix}$  ve  $\beta = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_s & B_{s+1} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_s & - \end{pmatrix}$  olsun. O zaman,

$dom(\alpha\beta) \subseteq dom(\alpha)$  olduğundan  $dom(\alpha\beta) \subseteq \bigcup_{i=1}^r A_i$  olur. Her  $x \in dom(\alpha\beta)$  için  $x \in A_i$  olacak şekilde bir tek  $1 \leq i \leq r$  vardır. Böylece,  $A_i\alpha = a_i$  olduğundan  $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta = a_i\beta \in \{a_i\beta : 1 \leq i \leq r\}$  olur.  $im(\alpha\beta) \subseteq \{a_i\beta : 1 \leq i \leq r\}$  ve  $|\{a_i\beta : 1 \leq i \leq r\}| \leq r$  olduğundan  $|im(\alpha\beta)| \leq |im(\alpha)|$  olur.  $\square$

**Önerme 3.4.14.**  $\alpha, \beta \in P_n$  olmak üzere

- i)  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{L}$  ancak ve ancak  $im(\alpha) = im(\beta)$  olmasıdır;
- ii)  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}$  ancak ve ancak  $ker(\alpha) = ker(\beta)$  olmasıdır.

**İspat:** Ganyushkin ve Mazorchuk (2009), Theorem 4.5.1 e bakınız.

**Önerme 3.4.15.** Her  $\alpha, \beta \in T_X$  için  $ker(\alpha) \subseteq ker(\alpha\beta)$  olur.

**İspat:** Eğer  $(a, b) \in ker(\alpha)$  ise  $a\alpha = b\alpha$  olduğu için  $\beta$  iyi tanımlıdır. Böylece,  $(a\alpha)\beta = (b\alpha)\beta$  yani  $a(\alpha \circ \beta) = b(\alpha \circ \beta)$  olup,  $(a, b) \in ker(\alpha)$  olur.  $\square$

**Tanım 3.4.16.**  $ST_n = Sing_n = \{ \alpha \in T_n : |im(\alpha)| \leq n - 1 \}$  olarak alalım.  $ST_n$  kümesi bir yarıgrup olup bu yarıgruba **singüler dönüşümler yarıgrubu** ve elemanlarına da **singüler dönüşümler** denir.

$S_n \leq T_n$  ancak  $S_n \not\leq T_n$  olduğu ve  $ST_n \leq T_n$  olduğu kolayca görülür.

### 3.5. Doğuray Kümeleri

**Tanım 3.5.1.**  $S$  bir yarıgrup ve  $A$  da  $S$ 'nin boş olmayan bir alt kümesi olmak üzere  $S$  yarıgrubunun  $A$  alt kümesini içeren en küçük altarıgrubuna  **$A$  tarafından doğurulan (generated) altarıgrubu** denir ve genellikle  $\langle A \rangle$  ile gösterilir.

**Teorem 3.5.2.**  $S$  bir yarıgrup ve  $A \subseteq S$  boş olmayan bir alt kümesi olmak üzere

- i)  $\langle A \rangle = \bigcap \{ T \leq S : A \subseteq T \}$  ve
- ii)  $\langle A \rangle = \{ a_1 a_2 \dots a_n : n \in \mathbb{Z}^+ \text{ ve } a_1, a_2, \dots, a_n \in A \}$

olur.  $\square$

**Önerme 3.5.3.** Eğer  $S$  bir yarıgrup ve  $A$  ile  $B$ ,  $S$  üzerinde boş olmayan iki alt küme ise  $A \subseteq B$  olması durumunda  $\langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle$  olur.

**İspat:**  $\langle A \rangle = M$  ve  $\langle B \rangle = N$  olsun.  $A \subseteq M$  ve  $A \subseteq B \subseteq N$  olduğundan  $A \subseteq N \cap M$  olur. Böylece,  $N \cap M$  de  $S$ 'nin  $A$ 'yı içeren bir altarı grubu olur. Dolayısıyla,  $M$ 'nin tanımı gereği  $M \subseteq N \cap M$  olup  $N \cap M \subseteq M$  ve  $N \cap M \subseteq N$  olduğundan  $M = N \cap M \subseteq N$  olur.  $\square$

**Tanım 3.5.4.**  $S$  bir yarıgrup ve  $\emptyset \neq A \subseteq S$  olsun. Eğer,  $S = \langle A \rangle$  ise  **$A$ 'ya  $S$ 'nin bir doğuray (üreteç) kümesi** denir. Buna ek olarak, bir  $a \in S$  için  $S = \langle \{a\} \rangle$  oluyor ise  $S$  yarı grubuna **monojenik (tek doğuraylı) yarıgrup** denir.

**Tanım 3.5.5.**  $S$  bir yarıgrup ve  $a \in S$  olsun.

$$\langle a \rangle = \{a, a^2, \dots\} = \{a^k : k \in \mathbb{Z}^+\}$$

kümesi sonsuz sayıda farklı eleman içeriyor ise  $\langle a \rangle$ 'ya **sonsuz monojenik yarıgrup** denir. Aksi takdirde,  $\langle a \rangle$  kümesi sonlu olup  $a^k = a^l$  olacak şekilde farklı iki pozitif tamsayı mevcuttur. Böylece,

$$A = \{k \in \mathbb{N} : a^k = a^l \text{ ve } k \neq l \in \mathbb{N}\}$$

kümesi  $\mathbb{N}$ 'nin boş olmayan bir alt kümesi olur. Bu durumda,  $\min(A)$  mevcut olup,  $\min(A) = m$  ise

$$B = \{k \in \mathbb{N} : a^{m+k} = a^m \text{ (} k \in \mathbb{N} \text{)}\}$$

kümesi de  $\mathbb{N}$ 'nin boş olmayan bir alt kümesi olur. Bu durumda da  $\min(B)$  mevcut olup  $\min(B) = r$  ise

$$\langle a \rangle = \{a, a^2, a^3, \dots, a^{m-1}, a^m, a^{m+1}, \dots, a^{m+r-1}\}$$

olur. Ayrıca,  $m$ 'ye  $a$ 'nın **indeksi** ve  $r$ 'ye de  $a$ 'nın **periyodu** denir ve bu monojenik yarıgrup  $M_{m,r}(a)$  ile gösterilir, yani

$$\langle a \rangle = M_{m,r}(a) = \{a, a^2, a^3, \dots, a^{m-1}, a^m, a^{m+1}, \dots, a^{m+r-1}\}$$

olup,  $m + r - 1$  elemanlı ve  $a^{m+r} = a^m$  olur.

**Tanım 3.5.6.**  $S$  bir yarıgrup olmak üzere her  $a \in S$  için  $|\langle a \rangle| < \infty$  ise  $S$  yarıgrubuna bir **periyodik yarıgrup** denir. Ayrıca, sonlu dönüşüm yarıgruplarının periyodik olduğu açıktır.

**Tanım 3.5.7.**  $S$  bir yarıgrup olsun. Eğer sonlu bir  $\emptyset \neq B \subseteq S$  için  $S = \langle B \rangle$  ise  $S$  yarıgrubuna **sonlu doğuraylı yarıgrup** denir. Ayrıca, sonlu doğuraylı bir  $S$  yarıgrubu için **rank** kavramı şu şekilde tanımlanır:

$$\text{rank}(S) = \min\{ |B| : \langle B \rangle = S \text{ ve } B \subseteq S \text{ sonlu} \}$$

Benzer şekilde, eğer  $S$  yalnızca idempotent elemanlardan oluşan sonlu bir küme tarafından doğruluyor ise  $S$  yarıgrubunun **idempotent rankı** şu şekilde tanımlanır:

$$\text{idrank}(S) = \min\{ |B| : \langle B \rangle = S \text{ ve } B \subseteq E(S) \text{ sonlu} \}$$

Bu iki tanımlamadan açıkça anlaşılacağı üzere, her zaman  $\text{rank}(S) \leq \text{idrank}(S)$  olduğu açıktır.

**Tanım 3.5.8.** Herhangi bir  $\alpha \in S_n$  için  $\text{Shift}(\alpha) = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$  ( $r \geq 2$ ) olsun. Her  $1 \leq j \leq r-1$  için  $i_j \alpha = i_{j+1}$  ve  $i_r \alpha = i_1$  ise  $\alpha$ 'ya bir  **$r$ -devir** denir ve  $\alpha = (i_1 i_2 \dots i_r)$  şeklinde yazılır. Ayrıca, bir  $\alpha = (i_1 i_2)$  2-devirine bir **transpozisyon** denir.

**Tanım 3.5.9.** Eğer  $k, l$  pozitif tamsayılar için  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  ve  $\{b_1, b_2, \dots, b_l\}$  iki ayrık küme ise  $(a_1 a_2 \dots a_k)$  ve  $(b_1 b_2 \dots b_l)$  devirlerine **ayrık devirler** denir.

$S_n$  grubu  $n$  elemanlı bir kümenin tüm permütasyonlarının oluşturduğu bir gruptur ve her bir permütasyon, ayrık devirlerin çarpımı olarak ifade edilebilir. Her devir transpozisyonların çarpımı şeklinde yazılabildiğinden  $S_n$  grubu transpozisyonlarının oluşturduğu küme tarafından doğrulur.  $S_n$ 'de herhangi bir transpozisyon  $(i_1 i_2)$  için  $(i_1 i_2) = (i_2 i_1)$  olduğundan  $S_n$  grubunda  $\frac{n(n-1)}{2}$  tane transpozisyon bulunmaktadır. Ayrıca,  $n \geq 3$  için  $S_n$  değişmeli olmadığından devirli olamaz.



#### 4. SIRA-AZALTAN DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARI

##### 4.1. $D_n$ ve $PD_n$ Dönüşüm Yarıgruplarının Kardinaliteleri

**Tanım 4.1.1.**  $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$  üzerinde tanımlı  $1 < 2 < \dots < n$  sıralaması ile bir zincir ve  $\alpha \in P_X$  olmak üzere eğer her  $x \in \text{dom}(\alpha)$  için  $x\alpha \leq x$  ise  $\alpha$ 'ya bir **sıra-azaltan kısmi dönüşüm** denir.  $X_n$  üzerinde tanımlı tüm sıra-azaltan kısmi dönüşümlerin kümesi  $PD_n$  ile gösterilir. Ayrıca, tüm sıra-azaltan (tam) dönüşümlerin kümesi de  $D_n$  ile gösterilir.

**Örnek 4.1.2.** Dikkat edilirse

$$PD_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ - & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ - & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ - & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

ve

$$D_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

şeklinde.

**Önerme 4.1.3.**  $D_n, T_n$  yarıgrupunun bir altarı grubudur.

**İspat:**  $\alpha, \beta \in D_n$  olsun. Her  $x \in X_n$  için  $x\alpha \leq x$  ve  $(x\alpha)\beta \leq x\alpha$  olduğundan

$$x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta \leq x\alpha \leq x$$

olup  $\alpha\beta \in D_n$  olur. Dolayısıyla,  $D_n, T_n$ 'nin bir altarı grubu olur.  $\square$

**Önerme 4.1.4.**  $n \geq 1$  olmak üzere  $|D_n| = n!$  olur.

**İspat:** Sıra-azaltan dönüşüm yarıgrupunun eleman sayısını hesaplayalım. Herhangi bir  $\alpha \in D_n$  alalım.  $\alpha \in D_n$  ise  $\forall x \in X_n$  için  $x\alpha \leq x$  olduğundan

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ - & - & \dots & - & - \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow n$  tane durum  $(1, 2, \dots, n)$

$\hookrightarrow n-1$  tane durum

$\vdots$

$\hookrightarrow 2$  tane durum  $(1, 2)$

$\hookrightarrow 1$  tane durum  $(1)$

olup,  $|D_n| = n(n-1) \cdots 1 = n!$  elde edilir.  $\square$

Dikkat edilirse her  $\alpha \in D_n$  için  $1\alpha = 1$  ve  $D_n \cap S_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \right\}$  olur. O halde,  $D_n$ 'de permütasyon olan bir tek  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$  (birim dönüşüm) vardır.

**Önerme 4.1.5.**  $PD_n, P_n$  yarıgrubunun bir altarıgrubudur.

**İspat:**  $\alpha, \beta \in PD_n$  olsun. Eğer,  $\alpha\beta = 0_n$  ise  $0_n \in PD_n$  olduğu açıktır. Eğer  $\alpha\beta \neq 0_n$  ise  $dom(\alpha\beta) \neq \emptyset$  olsun. Herhangi bir  $x \in dom(\alpha\beta)$  için  $x \in dom(\alpha)$ ,  $x\alpha \leq x$ ,  $x\alpha \in dom(\beta)$  ve  $(x\alpha)\beta \leq x\alpha$  olduğundan

$$x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta \leq x\alpha \leq x$$

olup,  $\alpha\beta \in PD_n$  olur. Böylece,  $PD_n$  de  $P_n$ 'nin bir altarıgrubu olur.  $\square$

Ayrıca,  $D_n = PD_n \cap T_n$  olur.

**Önerme 4.1.6.**  $n \geq 1$  olmak üzere  $|PD_n| = (n+1)!$  olur.

**İspat:** Sıra-azaltan kısmi dönüşüm yarıgrubunun eleman sayısını bulalım. Herhangi bir  $\alpha \in PD_n$  alalım.  $\alpha \in PD_n$  ise  $\forall x \in X_n$  için  $x\alpha \leq x$  olup

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ - & - & \cdots & - \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{l} \hookrightarrow n+1 \text{ tane durum } (-, 1, \dots, n) \\ \vdots \\ \hookrightarrow 3 \text{ tane durum } (-, 1, 2) \\ \hookrightarrow 2 \text{ tane durum } (-, 1) \end{array}$

olduğundan  $|PD_n| = 2 \cdot 3 \cdots (n+1) = (n+1)!$  elde edilir.  $\square$

#### 4.2. $D_n$ ve $PD_n$ Dönüşüm Yarıgruplarının Bazı Özellikleri

Her  $\alpha \in D_n$  için  $1\alpha = 1$  olduğundan aşağıdaki önermeye sahibiz.

**Önerme 4.2.1.** Her  $\alpha \in D_n$  için  $1 \in Fix(\alpha)$  olur.  $\square$

Eğer,  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  ve  $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in T_3$  ise  $\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  olup

$$Fix(\alpha\beta) = \{1,3\} \neq \emptyset = \{2\} \cap \{3\} = Fix(\alpha) \cap Fix(\beta)$$

olduğundan genel olarak  $Fix(\alpha\beta) \neq Fix(\alpha) \cap Fix(\beta)$  olur. Bunula birlikte, aşağıdaki bulguyu ifade ve ispat edelim.

**Önerme 4.2.2.** Her  $\alpha, \beta \in D_n$  için  $Fix(\alpha\beta) = Fix(\alpha) \cap Fix(\beta)$  olur.

**İspat:** Herhangi bir  $x \in Fix(\alpha) \cap Fix(\beta)$  için  $x\alpha = x$  ve  $x\beta = x$  olduğundan

$$x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta = x\beta = x$$

olup  $x \in Fix(\alpha\beta)$  olur. Böylece,  $Fix(\alpha) \cap Fix(\beta) \subseteq Fix(\alpha\beta)$  olur. Ayrıca,  $x \in Fix(\alpha\beta)$  ise  $\alpha$  ile  $\beta$  sıra-azaltan olduğundan

$$x = x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta \leq x\alpha \leq x$$

olup,  $x \leq x\alpha \leq x$  yani  $x\alpha = x$  ve dolayısıyla  $x\beta = x$  olur. Böylece,  $x \in Fix(\alpha) \cap Fix(\beta)$  olup,

$$Fix(\alpha\beta) \subseteq Fix(\alpha) \cap Fix(\beta)$$

olur. Dolayısıyla,

$$Fix(\alpha\beta) = Fix(\alpha) \cap Fix(\beta)$$

eşitliği elde edilir.  $\square$

Ayrıca herhangi bir  $\alpha \in T_n$  için  $Shift(\alpha) = X_n \setminus Shift(\alpha)$  ve her  $A, B \subseteq X_n$  için  $A \cap B = (X_n \setminus A) \cup (X_n \setminus A)$  olduğundan aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

**Sonuç 4.2.3.** Her  $\alpha, \beta \in D_n$  için  $Shift(\alpha\beta) = Shift(\alpha) \cup Shift(\beta)$  olur.  $\square$

**Önerme 4.2.4.** Her  $\alpha, \beta \in PD_n$  için  $Fix(\alpha\beta) = Fix(\alpha) \cap Fix(\beta)$  olur.

**İspat:** Eğer  $Fix(\alpha\beta) = \emptyset$  ise açıkça  $Fix(\alpha\beta) \subseteq Fix(\alpha) \cap Fix(\beta)$  olur. Eğer  $Fix(\alpha\beta) \neq \emptyset$  ise herhangi bir  $x \in Fix(\alpha\beta)$  alalım. O zaman,  $x(\alpha\beta) = x$  olup  $x \in dom(\alpha\beta)$  ve dolayısıyla,  $x \in dom(\alpha)$  ve  $x\alpha \in dom(\beta)$  olur. Böylece,  $\alpha$  ile  $\beta$  sıra-azaltan olduğundan



$$x = x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta \leq x\alpha \leq x$$

olup  $x\alpha = x$  ve dolayısıyla,  $x\beta = x$  olur. Böylece,  $x \in \text{Fix}(\alpha) \cap \text{Fix}(\beta)$  olup

$$\text{Fix}(\alpha\beta) = \text{Fix}(\alpha) \cap \text{Fix}(\beta)$$

olur. Ayrıca, eğer  $\text{Fix}(\alpha) \cap \text{Fix}(\beta) = \emptyset$  ise açıkça  $\text{Fix}(\alpha) \cap \text{Fix}(\beta) \subseteq \text{Fix}(\alpha\beta)$  olur. Eğer  $\text{Fix}(\alpha) \cap \text{Fix}(\beta) \neq \emptyset$  ise herhangi bir  $x \in \text{Fix}(\alpha) \cap \text{Fix}(\beta)$  alalım. O zaman,  $x\alpha = x$  ve  $x\beta = x$  olduğundan

$$x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta = x\beta = x$$

olur. Böylece,  $x \in \text{Fix}(\alpha\beta)$  olup,

$$\text{Fix}(\alpha) \cap \text{Fix}(\beta) \subseteq \text{Fix}(\alpha\beta)$$

olur. Dolayısıyla

$$\text{Fix}(\alpha\beta) = \text{Fix}(\alpha) \cap \text{Fix}(\beta)$$

eşitliği elde edilir.  $\square$

Bu bulgulardan sonra aşağıdaki sonucu direkt yazabiliriz.

#### Sonuç 4.2.5.

- i) Her  $\alpha, \beta \in PD_n$  için  $\text{Fix}(\alpha\beta) = \text{Fix}(\beta\alpha)$  olur.
- ii) Her  $\alpha \in PD_n$  ve  $m \in \mathbb{N}$  için  $\text{Fix}(\alpha^m) = \text{Fix}(\alpha)$  olur.  $\square$

### 4.3. $D_n$ ve $PD_n$ Dönüşüm Yarıgruplarının İdempotent Elemanları

**Önerme 4.3.1.**  $\alpha \in D_n$  için  $\alpha$ 'nın bir idempotent olması gerek ve yeter koşul her  $a \in \text{im}(\alpha)$  için  $\min(a\alpha^{-1}) = a$  olmasıdır.

**İspat:** ( $\Rightarrow$ ) Eğer  $\alpha \in E(D_n)$  ve  $a \in \text{im}(\alpha)$  ise  $a\alpha = a$  olduğundan  $a \in a\alpha^{-1}$  olur. Ayrıca, her  $b \in a\alpha^{-1}$  için  $a = b\alpha \leq b$  olduğundan  $\min(a\alpha^{-1}) = A$  olur.

( $\Leftarrow$ ) Her  $a \in \text{im}(\alpha)$  için  $\min(a\alpha^{-1}) = a$  olsun. O zaman,  $a \in a\alpha^{-1}$  olduğundan  $a\alpha = a$  olup  $a \in \text{Fix}(\alpha)$  olur. Böylece,  $\text{im}(\alpha) \subseteq \text{Fix}(\alpha)$  olup  $\text{im}(\alpha) = \text{Fix}(\alpha)$  olduğundan  $\alpha \in E(D_n)$  olur.  $\square$

**Önerme 4.3.2.**  $n \geq 1$  için

$$|E(D_n)| = \sum_{r=1}^n S(n, r)$$

olur.

**İspat:**  $X_n$ 'nin herhangi bir parçalanışı  $P = \{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ , ( $1 \leq r \leq n$ ) olsun. Eğer bir  $\alpha \in D_n$  için

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_r \\ a_1 & \dots & a_r \end{pmatrix}$$

ise Önerme 4.3.1 den  $\alpha$  bir idempotent elemandır ancak ve ancak her  $1 \leq i \leq r$  için  $\min(A_i) = a_i$  olmasıdır. Dolayısıyla,  $X_n$ 'nin her bir parçalanışı  $\{A_1, A_2, \dots, A_r\}$  için  $\ker(\alpha)$ 'nin denklik sınıfları  $\{A_1, A_2, \dots, A_r\}$  olacak şekilde bir tek  $\alpha \in E(D_n)$  vardır. Böylece, her bir  $1 \leq r \leq n$  için  $X_n$ 'nin  $r$ 'li parçalanışı  $S(n, r)$  olduğundan

$$|E(D_n)| = \sum_{r=1}^n S(n, r)$$

olur.  $\square$

**Önerme 4.3.3.**  $\alpha \in PD_n$  için  $\alpha$ 'nın bir idempotent olması gerek ve yeter koşul her  $a \in \text{im}(\alpha)$  için  $\min(a\alpha^{-1}) = a$  olmasıdır.

**İspat:** Önerme 4.3.1. ile aynı şekilde ispatlanabilir.  $\square$

**Önerme 4.3.4.**  $n \geq 1$  için

$$|E(PD_n)| = \sum_{r=1}^{n+1} S(n+1, r)$$

olur.

**İspat:**  $\alpha \in E(PD_n) \setminus E(D_n)$  ve  $|im(\alpha)| = r$  olsun. Eğer  $r = 0$  ise  $PD_n$ 'de bir tek idempotent (sıfır dönüşüm) vardır. Şimdi  $r \neq n$  olacağından  $1 \leq r \leq n-1$  kabul edelim. O zaman,  $ker(\alpha)$ 'nın denklik sınıfları  $\{A_1, \dots, A_r, A_{r+1}\}$  olacak şekilde  $X_n$ 'nin bir  $r+1$ 'li parçalanışı  $\{A_1, \dots, A_r, A_{r+1}\}$  vardır. Dolayısıyla, Önerme 4.3.3 ten  $ker(\alpha) = \bigcup_{i=1}^{r+1} A_i \times A_i$  ve  $|im(\alpha)| = r$  olacak şekilde  $PD_n$ 'de  $r+1$  tane idempotent vardır. Bunlar  $1 \leq i \leq r+1$  için  $min(A_i) = a_i$  olmak üzere

$$\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_r & A_{r+1} \\ a_1 & \dots & a_r & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_{r-1} & A_r & A_{r+1} \\ a_1 & \dots & a_{r-1} & - & a_r + 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} A_1 & A_1 & \dots & A_{r+1} \\ - & a_2 & \dots & a_{r+1} \end{pmatrix}$$

olur. Böylece, her  $1 \leq r \leq n-1$  için  $X_n$ 'nin  $S(n, r+1)$  tane  $r+1$ 'li parçalanışı ve her bir  $r+1$ 'li parçalanışı için  $r+1$  tane idempotent vardır. Diğer bir ifade ile

$$|\{\alpha \in E(PD_n)/E(D_n) : |im(\alpha)| = r\}| = (r+1) \cdot S(n, r+1)$$

olup

$$\begin{aligned} |E(PD_n)| &= \sum_{r=1}^n S(n, r) + \left(1 + \sum_{r=1}^{n-1} (r+1) \cdot S(n, r+1)\right) \\ &= \left(1 + \sum_{r=1}^{n-1} S(n, r)\right) + \left(\sum_{r=1}^{n-1} (r+1) \cdot S(n, r+1) + 1\right) \\ &= 1 + \left(\sum_{r=1}^{n-1} (S(n, r) + (r+1) \cdot S(n, r+1))\right) + 1 \\ &= S(n+1, 1) + \sum_{r=1}^{n-1} S(n+1, r+1) + S(n+1, n+1) \\ &= \sum_{r=1}^{n+1} S(n+1, r) \end{aligned}$$

olur.  $\square$

**Örnek 4.3.5.**  $n = 3$  için

$$E(PD_3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & - & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & - & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & - & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & 2 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & - & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & - & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

ve

$$|E(PD_3)| = \sum_{r=1}^4 S(4, r) = 1 + 7 + 6 + 1 = 15$$

olur.

#### 4.4. $D_n$ ve $PD_n$ Dönüşüm Yarıgruplarının Nilpotent Elemanları

Şimdi

$$0_d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in D_n$$

elemanını göz önüne alalım. Her  $\alpha \in D_n$  için  $1\alpha = 1$  olduğundan

$$0_d\alpha = 0_d = \alpha 0_d$$

olup  $D_n$ 'nin sıfır elemanı  $0_d$  olan bir sıfırlı yarıgrup olur.

**Önerme 4.4.1.**  $N(D_n) = \{\alpha \in D_n : \text{Fix}(\alpha) = \{1\}\}$  olur.

**İspat:** Her  $\alpha \in D_n$  için  $1 \in \text{Fix}(\alpha)$  olduğundan  $\{1\} \subseteq \text{Fix}(\alpha)$  olur. Kabul edelim ki, herhangi bir  $\alpha \in N(D_n)$  ve  $x \in X_n$  için  $x\alpha = x$  olsun. O zaman,  $\alpha^m = 0_d$  olacak şekilde bir  $m \in \mathbb{Z}^+$  mevcut olup

$$x = x\alpha^m = x0_d = 1$$

olur. Böylece,  $x = 1$  olup,  $\text{Fix}(\alpha) = \{1\}$  olur. Tersine, bir  $\alpha \in D_n$  için  $\text{Fix}(\alpha) = \{1\}$  olsun. O zaman, herhangi bir  $2 \leq k \leq n$  için

$$k\alpha \leq k - 1$$

olur.  $k\alpha = 1$  ise sonuç açıktır. Aksi halde

$$2 \leq k\alpha \leq n - 1$$

olup

$$k\alpha^2 = (k\alpha)\alpha < (k\alpha) - 1 < k - 2 \leq n - 2$$

olur. Ayrıca,  $k\alpha^2 = 1$  ise sonuç açıktır. Aksi halde, benzer şekilde devam edildiğinde

$$1 \leq k\alpha^{n-1} = n - (n - 1) = 1$$

olup  $k\alpha^{n-1} = 1$  ve dolayısıyla  $\alpha^{n-1} = 0_d$  olur. Böylece

$$N(D_n) = \{\alpha \in D_n : \text{Fix}(\alpha) = \{1\}\}$$

olur.  $\square$

**Önerme 4.4.2.**  $n \geq 2$  için  $N(D_n)$ ,  $D_n$  'nin bir altyarıgrubu olup  $|N(D_n)| = (n - 1)!$  olur.

**İspat:** Her  $\alpha, \beta \in N(D_n)$  için Önerme 4.2.1 ve Önerme 4.2.2 den

$$\text{Fix}(\alpha\beta) = \text{Fix}(\alpha) \cap \text{Fix}(\beta) = \{1\} \cap \{1\} = \{1\}$$

olduğundan  $\alpha\beta \in N(D_n)$  olur. Böylece,  $N(D_n) \leq D_n$  olur. Her bir  $\alpha \in N(D_n)$  için

$$\hat{\alpha}: X_{n-1} \rightarrow X_{n-1}$$

dönüşümünü her  $x \in X_{n-1}$  için  $x\hat{\alpha} = (x + 1)\alpha$  şeklinde tanımlayalım. O zaman, her  $x \in X_{n-1}$  için (tanımlı ise)  $x\hat{\alpha} = (x + 1)\alpha \leq x$  olduğundan  $\hat{\alpha} \in D_{n-1}$  olur. Ayrıca, her  $\beta \in D_{n-1}$  için

$$\bar{\beta}: X_n \rightarrow X_n$$

dönüşümünü  $1\bar{\beta} = 1$  ve her  $2 \leq x \leq n$  için  $x\bar{\beta} = (x - 1)\beta$  şeklinde tanımlayalım. O zaman, her  $2 \leq x \leq n$  için  $x - 1 \in X_{n-1}$  olup

$$x\bar{\beta} = (x - 1)\beta \leq x - 1 < x$$

olduğundan  $\bar{\beta} \in D_n$  olur. Ayrıca,  $\text{Fix}(\bar{\beta}) = \{1\}$  olduğundan  $\bar{\beta} \in N(D_n)$  olur. Böylece

$$\varphi: N(D_n) \rightarrow D_{n-1}$$

dönüşümü, her  $\alpha \in N(D_n)$  için  $\alpha\varphi = \hat{\alpha}$  ve

$$\sigma: D_{n-1} \rightarrow N(D_n)$$

dönüşümü, her  $\beta \in D_{n-1}$  için  $\beta\sigma = \bar{\beta}$  olarak tanımlanır ise her  $\alpha \in N(D_n)$  ve her  $\beta \in D_{n-1}$  için

$$\alpha(\varphi\sigma) = \hat{\alpha}\sigma = \bar{\hat{\alpha}} = \alpha$$

ve

$$\beta(\sigma\varphi) = \bar{\beta}\varphi = \widehat{\bar{\beta}} = \beta$$

olduğundan  $\varphi^{-1} = \sigma$  ve  $\varphi$ , bire-bir ve örten olur. Böylece

$$|N(D_n)| = |D_{n-1}| = (n-1)!$$

olur.  $\square$

**Önerme 4.4.3.**  $N(D_n) = \{\alpha \in D_n : \text{Fix}(\alpha) = \{1\}\}$  olur.

**İspat:**  $(\Rightarrow)$   $\alpha \in N(PD_n)$  olsun. O zaman,  $\alpha^m = 0_n$  olacak şekilde  $m \in \mathbb{Z}^+$  vardır. Böylece, Sonuç 4.2.5 (ii) den  $\text{Fix}(\alpha) = \text{Fix}(\alpha^m) = \text{Fix}(0_n) = \emptyset$  olur.

$(\Leftarrow)$   $\text{Fix}(\alpha) = \emptyset$  olsun. Eğer  $\alpha = 0_n$  ise sonuç açıktır ve  $\alpha \in N(PD_n)$  olur.  $\alpha \neq 0_n$  ve  $x \in \text{dom}(\alpha)$  olsun. O zaman,  $\alpha$  sıra-azaltan ve  $|X_n| = n$  olduğundan

$$x \geq x\alpha \geq (x\alpha)\alpha = x\alpha^2 \geq (x\alpha^2) = x\alpha^3 \geq \dots \geq x\alpha^{n-1} \geq x\alpha^n$$

dizisindeki  $n+1$  elemanın olan  $x, x, x\alpha^2, \dots, x\alpha^{n-1}, x\alpha^n$  elemanlarının hepsi birbirinden farklı olamaz. Dolayısıyla, bu dizi azaltan olduğunda ya  $x\alpha^{k_x-1} = x\alpha^{k_x}$  olacak şekilde bir  $1 \leq k_x \leq n$  vardır ya da  $x\alpha^{k_x-1} \notin \text{dom}(\alpha)$  olur. Eğer  $x\alpha^{k_x-1} = x\alpha^{k_x}$  olacak şekilde bir  $1 \leq k_x \leq n$  mevcut olsaydı

$$(x\alpha^k)\alpha = x\alpha^{k_x}$$

olup  $x\alpha^{k_x-1} \in \text{Fix}(\alpha) = \emptyset$  çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla,  $x\alpha^{k_x} \notin \text{dom}(\alpha)$  olur. Eğer,

$$m = \max \{k_x : x \in \text{dom}(\alpha)\}$$

alınır ise her  $x \in \text{dom}(\alpha)$  için  $x\alpha^m \in \text{Fix}(\alpha) = \emptyset$  olacağından  $\alpha^m = 0_n$  olur. Dolayısıyla,  $\alpha \in N(PD_n)$  olur.  $\square$

**Önerme 4.4.4.**  $n \geq 1$  için  $N(PD_n)$ ,  $PD_n$ 'nin bir idealidir ve  $|N(PD_n)| = n!$  olur.

**İspat:** Her  $\alpha \in N(PD_n)$  ve her  $\beta \in PD_n$  için  $\text{Fix}(\alpha) = \emptyset$  olduğundan

$$\text{Fix}(\alpha\beta) = \text{Fix}(\beta\alpha) = \text{Fix}(\alpha) \cap \text{Fix}(\beta) = \emptyset \cap \text{Fix}(\beta) = \emptyset$$

olup  $\alpha\beta, \beta\alpha \in N(PD_n)$  olur. Böylece,  $N(PD_n)$ ,  $PD_n$ 'nin bir idealidir.

Eğer  $\alpha \in N(PD_n)$  ise  $1 \notin \text{dom}(\alpha)$  olur. Aksi halde,  $1\alpha = 1$  olur ki bu  $\text{Fix}(\alpha) = \emptyset$  olması ile çelişir. Böylece,  $\text{dom}(\alpha) \neq X_n$  olur. Her  $\alpha \in N(PD_n)$  için

$$\hat{\alpha}: X_n \rightarrow X_n$$

dönüşümünü, her  $x \in X_n$  için

$$x\hat{\alpha} = \begin{cases} x\alpha & \text{eğer } x \in \text{dom}(\alpha) \\ x & \text{eğer } x \notin \text{dom}(\alpha) \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. O zaman,  $\text{dom}(\hat{\alpha}) = X_n$  ve her  $x \in \text{dom}(\alpha)$  için  $x\hat{\alpha} = x\alpha < x$  ve her  $x \in X_n \setminus \text{dom}(\alpha)$  için  $x\hat{\alpha} = x \leq x$  olduğundan  $\hat{\alpha} \in D_n$  ve  $\text{Fix}(\hat{\alpha}) = X_n \setminus \text{dom}(\alpha)$  olur. Şimdi de

$$\theta: N(PD_n) \rightarrow D_n$$

dönüşümünü, her  $\alpha \in N(PD_n)$  için  $\theta\alpha = \hat{\alpha}$  olarak tanımlayalım. Herhangi  $\alpha, \beta \in N(PD_n)$  için  $\alpha\theta = \beta\theta$  ise  $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$  olup  $\text{Fix}(\hat{\alpha}) = \text{Fix}(\hat{\beta})$  olduğundan  $\text{dom}(\alpha) = \text{dom}(\beta)$  olur. Ayrıca, her  $x \in \text{dom}(\alpha)$  için  $x\alpha = x\hat{\alpha} = x\hat{\beta} = x\beta$  olduğundan  $\alpha = \beta$  olur. O halde  $\theta$  bire-bir olur. Her  $\gamma \in D_n$  için

$$\check{\gamma}: X_n \rightarrow X_n$$

dönüşümünü,  $\text{dom}(\check{\gamma}) = \text{Shift}(\gamma)$  olmak üzere her  $x \in \text{dom}(\check{\gamma})$  için  $x\check{\gamma} = x\gamma$  olarak tanımlayalım. Böylece,  $\check{\gamma} \in PD_n$  ve her  $x \in \text{dom}(\gamma)$  için  $x\check{\gamma} \neq x$  olduğundan  $\text{Fix}(\check{\gamma}) = \emptyset$  olur. Dolayısıyla,  $\check{\gamma} \in N(PD_n)$  ve  $\check{\gamma}\theta = \gamma$  olduğundan  $\theta$  örtendir. Böylece,

$$|N(PD_n)| = |D_n| = n!$$

olur.  $\square$

#### 4.5. $D_n$ ve $PD_n$ Dönüşüm Yarıgruplarının Green Denklik Bağlılıkları

**Önerme 4.5.1.**  $\alpha, \beta \in D_n$  için

- i)  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{L}$  olması için gerek ve yeter koşul  $\text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$  ve her  $a \in \text{im}(\alpha)$  için  $\min(a\alpha^{-1}) = \min(a\beta^{-1})$  olmasıdır.
- ii)  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}$  olması için gerek ve yeter koşul  $\alpha = \beta$  olmasıdır.

**İspat:** i)  $(\Rightarrow)$   $(\alpha, \beta) \in \mathcal{L}$  olsun. O zaman,  $\lambda\alpha = \beta$  ve  $\mu\beta = \alpha$  olacak şekilde  $\lambda, \mu \in D_n$  vardır. O halde,

$$im(\beta) = im(\lambda\alpha) \subseteq im(\alpha) = im(\mu\beta) \subseteq im(\beta)$$

olduğundan  $im(\alpha) = im(\beta)$  olur. Eğer  $im(\alpha) = im(\beta) = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$  ve her  $1 \leq i \leq r$  için  $A_i = a_i\alpha^{-1}$  ve  $B_i = a_i\beta^{-1}$  ise

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_r \\ a_1 & a_2 & \dots & a_r \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \beta = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_r \\ a_1 & a_2 & \dots & a_r \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Ayrıca, her  $1 \leq i \leq r$  için  $\min(A_i) = c_i$  ve  $\min(B_i) = d_i$  olmak üzere  $a_i \leq c_i$  ve  $a_i \leq d_i$  olur. Her  $1 \leq i \leq r$  için

$$a_i = d_i\beta = (d_i\lambda)\alpha$$

olduğundan  $d_i\lambda \in A_i$  ve ayrıca,  $\lambda \in D_n$  ve  $\min(A_i) = c_i$  olduğundan  $c_i \leq d_i\lambda \leq d_i$  olur. Yani,  $c_i \leq d_i$  olur. Tersine,

$$a_i = c_i\alpha = c_i(\mu\beta) = (c_i\mu)\beta$$

olduğundan  $c_i\mu \in B_i$  ve ayrıca,  $\mu \in D_n$  ve  $\min(B_i) = d_i$  olduğundan  $d_i \leq c_i\mu \leq c_i$  olur. Yani,  $d_i \leq c_i$  olup  $c_i = d_i$  olur.

( $\Leftarrow$ )  $im(\alpha) = im(\beta) = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$  ve her  $1 \leq i \leq r$  için  $A_i = a_i\alpha^{-1}$  ve  $B_i = a_i\beta^{-1}$  olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_r \\ a_1 & a_2 & \dots & a_r \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \beta = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_r \\ a_1 & a_2 & \dots & a_r \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Ayrıca, her  $1 \leq i \leq r$  için  $c_i = \min(a_i\alpha^{-1}) = \min(a_i\beta^{-1})$  olduğundan

$$\lambda = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_r \\ c_1 & c_2 & \dots & c_r \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \mu = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_r \\ c_1 & c_2 & \dots & c_r \end{pmatrix}$$

alınır ise  $\lambda, \mu \in D_n$ ,  $\lambda\alpha = \beta$  ve  $\mu\beta = \alpha$  olup  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{L}$  olur.

**ii) ( $\Leftarrow$ )**  $\alpha = \beta$  ise sonuç açıktır ve  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}$  olur.

( $\Rightarrow$ )  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}$  olsun. O zaman,  $\alpha\lambda = \beta$  ve  $\beta\mu = \alpha$  olacak şekilde  $\lambda, \mu \in D_n$  vardır. Böylece, her  $x \in X_n$  için



$$x\beta = x(\alpha\lambda) = (x\alpha)\lambda \leq x\alpha$$

$$x\alpha = x(\beta\mu) = (x\beta)\mu \leq x\beta$$

olduğundan  $x\alpha = x\beta$  olup  $\alpha = \beta$  olur.  $\square$

**Sonuç 4.5.2.**  $D_n$  yarıgrubu üzerinde  $\mathcal{H} = R$  ve  $J = \mathcal{D} = \mathcal{L}$  olur.  $\square$

Her  $1 \leq r \leq n$  için

$$J_r = J_r(D_n) = \{\alpha \in D_n : |im(\alpha)| = r\}$$

olarak tanımlayalım.

**Örnek 4.5.3.**  $\alpha, \beta \in D_7$  elemanları

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ise

$$1\alpha^{-1} = \{1,2\}, \quad 2\alpha^{-1} = \{3,4,6,7\}, \quad 4\alpha^{-1} = \{5\}$$

$$1\beta^{-1} = \{1,2,6\}, \quad 2\beta^{-1} = \{3,4,7\}, \quad 4\beta^{-1} = \{5\}$$

olup  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{L}$  olur.

Dikkat edilirse,  $ker(\alpha) \neq ker(\beta)$  olduğu görülebilir.

**Önerme 4.5.4.**  $2 \leq k \leq n$  için  $|E(J_{n-1})| = \frac{(n-1)n}{2}$  olur.

**İspat:**  $\alpha \in E(J_{n-1})$  ise bir  $2 \leq k \leq n$  için  $im(\alpha) = X_n \setminus \{k\}$  olur. Böylece,

$$Y_2 = \{1,3,4, \dots, n\} = X_n \setminus \{2\}$$

$$Y_3 = \{1,2,4,5, \dots, n\} = X_n \setminus \{3\}$$

$$\vdots$$

$$Y_{n-1} = \{1,2, \dots, n-2, n\} = X_n \setminus \{n-1\}$$

$$Y_n = \{1,2, \dots, n-1\} = X_n \setminus \{n\}$$

olmak üzere  $im(\alpha) = Y_2$  olacak şekilde 1 tane,  $im(\alpha) = Y_3$  olacak şekilde 2 tane ve benzer şekilde devam edildiğinde  $im(\alpha) = Y_n$  olacak şekilde  $n - 1$  tane idempotent vardır. Böylece,

$$|E(J_{n-1})| = 1 + 2 + \dots + n - 1 = \frac{(n-1)n}{2}$$

olur.  $\square$

Örneğin,  $n = 4$  için

$$E(J_3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

olur.

**Önerme 4.5.5.**  $n \geq 2$  için  $|J_{n-1}(D_n)| = 2^n - n - 1$  olur.

**İspat:**  $n = 2$  için  $J_1(D_2) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$  olup  $a_2 = 2^2 - 2 - 1 = 1$  olduğundan eşitlik sağlanır.  $n \geq 3$  için  $|J_{n-1}(D_n)| = a_n$  olsun. Herhangi bir  $\alpha \in J_{n-1}(D_n)$  için  $\alpha$ 'nın  $X_{n-1}$ 'e kısıtlanması  $n \notin im(\alpha)$  olduğunda  $\alpha \in J_{n-1}(D_{n-1})$  ve  $n \in im(\alpha)$  olduğunda  $\alpha \in J_{n-2}(D_{n-1})$  olur. Tersine, eğer  $\beta \in J_{n-1}(D_{n-1})$  ise

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & 2 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

olup her  $1 \leq i \leq n - 1$  için

$$\beta_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & i \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanır ise  $\beta_i \in J_{n-1}(D_n)$  olur. Yani birinci durumda  $n - 1$  tane eleman vardır. Eğer  $\gamma \in J_{n-2}(D_{n-1})$  ise  $X_n \setminus im(\gamma) = \{b_1, b_2\}$  ve  $b_1 \neq b_2$  olacak şekilde  $b_1, b_2 \in X_n$  vardır. Bu durumda, her  $i = 1, 2$  için

$$\gamma_i: X_n \rightarrow X_n$$

dönüşümü, her  $x \in X_n$  için

$$x\gamma_i = \begin{cases} x\gamma & 1 \leq x \leq n-1 \\ b_i & x = n \end{cases}$$

olarak tanımlanır ise  $b_i \leq n$  olduğundan  $\gamma_1, \gamma_2 \in J_{n-1}(D_n)$  olur. Böylece,  $|J_{n-2}| = a_{n-1}$  olduğundan ikinci durumda  $2a_{n-1}$  tane eleman vardır. Dolayısıyla

$$a_n = 2a_{n-1} + (n-1)$$

$$a_n - 2a_{n-1} = (n-1)$$

birinci dereceden homojen olmayan lineer indirgeme bağıntısı elde edilir. Önce homojen olmadığından bir özel çözümünü bulalım:  $a_n = c_1 n + c_2$  ise

$$c_1 n + c_2 - 2c_1(n-1) - 2c_2 = n-1$$

$$-c_1 n - c_2 - 2c_1 = n-1$$

$$-c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = -1$$

$$-c_2 + 2c_1 = -1 \Rightarrow c_2 = -1$$

olduğundan

$$a_n = -n - 1$$

olur. Şimdi lineer indirgeme bağıntısının homojen kısmını, yani  $a_n - 2a_{n-1} = 0$  bağıntısını çözelim.  $c, n \neq 0$  olmak üzere  $a_n = cr^n$  olsun. O zaman,

$$cr^n - 2cr^{n-1} = 0$$

$$cr^{n-1}(r-2) = 0 \Rightarrow r = 2,$$

yani  $a_n = c \cdot 2^n - n - 1$  olur. Böylece,  $n = 2$  için  $a_2 = 1$  olduğundan  $1 = c \cdot 2^2 - 2 - 1$ , yani  $4c = 4$  olup  $c = 1$  olur. Böylece,

$$a_n = 2^n - n - 1$$

olduğundan

$$|J_{n-1}(D_n)| = 2^n - n - 1$$

olur.  $\square$

Örneğin,  $n = 3$  için

$$J_2(D_3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

olur.

#### 4.6. $D_n$ ve $PD_n$ Dönüşüm Yarıgruplarının Doğuray Kümeleri ve Rankları

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{1,3\} & \{2,5,6\} & \{4\} \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in D_6 \text{ olmak üzere}$$

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ ve } \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{1\} & \{2,5,6\} & \{3,4\} \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ ise } \varepsilon_1 \alpha_1 = \alpha$$

$$\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ ve } \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{1\} & \{2,5\} & \{3,4\} & \{6\} \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \text{ ise } \varepsilon_2 \alpha_2 = \alpha_1$$

$$\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \text{ ve } \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{1\} & \{2\} & \{3,4\} & \{5\} & \{6\} \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ ise } \varepsilon_3 \alpha_3 = \alpha_2$$

$$\varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ ve } \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 1_6 \text{ ise } \varepsilon_4 \alpha_4 = \varepsilon_4 1_6 = \alpha_3$$

yani  $\varepsilon_4 = \alpha_3$  olup

$$\alpha = \varepsilon_1 \alpha_1 = \varepsilon_1 (\varepsilon_2 \alpha_2) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 (\varepsilon_3 \alpha_3) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4$$

olur. Burada dikkat edilirse her  $i = 1, 2, 3, 4$  için  $\varepsilon_i$ 'ler birer idempotent elemandır ve  $|im(\varepsilon_i)| = 5$ , yani  $\varepsilon_i \in E(J_5(D_6))$  olur. Bu durumu genelleyebilmek için bazı özel dönüşümler tanımlayalım. Her  $1 \leq i < j \leq n$  için

$$\varepsilon_{ij}: X_n \rightarrow X_n$$

dönüşümü, her  $x \in X_n$  için

$$x\varepsilon_{ij} = \begin{cases} x & x \neq j \text{ ise} \\ i & x = j \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı ise  $\varepsilon_{ij} \in D_n$  ve

$$im(\varepsilon_{ij}) = Fix(\varepsilon_{ij}) = X_n \setminus \{j\}$$

olduğundan  $\varepsilon_{ij} \in E(J_{n-1}(D_n)) = E(J_{n-1})$  olur. Ayrıca,  $J_{n-1}$ 'deki her idempotent bu formda olacağından

$$E(J_{n-1}) = \{\varepsilon_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}$$

olur.

**Teorem 4.6.1.**  $D_n = \langle E(J_{n-1}) \cup \{1_n\} \rangle$  olur.

**İspat:**  $\alpha \in D_n$  olsun. Eğer  $\alpha \in J_n(D_n)$  ise  $\alpha = 1_n \in \langle E(J_{n-1}) \cup \{1_n\} \rangle$  olur. Kabul edelim ki,  $\alpha \neq 1_n$  olsun. O zaman, bir  $1 \leq r \leq n-1$  için  $\text{im}(\alpha) = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$  olacak şekilde  $\{a_1, a_2, \dots, a_r\} \subseteq X_n$  vardır. Eğer her  $1 \leq i \leq r$  için  $A_i = a_i \alpha^{-1}$  ise  $r \leq n-1$  olduğundan en az bir  $1 \leq k \leq r$  için  $|A_k| \geq 2$  olur. Bu durumda,  $\min(A_k) = b$  ve  $\max(A_k) = c$  ise  $b < c$  olur. Şimdi,

$$\beta: X_n \rightarrow X_n$$

$$\varepsilon: X_n \rightarrow X_n$$

dönüşümlerini her  $x \in X_n$  için

$$x\varepsilon = \begin{cases} x & x \neq c \\ b & x = c \end{cases} \quad \text{ve} \quad x\beta = \begin{cases} c & x = c \\ x\alpha & x \neq c \end{cases}$$

olarak tanımlanır ise  $\varepsilon \in E(J_{n-1})$  ve  $\beta \in D_n$  olur. Ayrıca,  $b < c$  olduğundan  $c \notin \text{Fix}(\alpha)$ , fakat  $c \in \text{Fix}(\beta)$  olur. Açıkça,  $\text{Fix}(\beta) = \text{Fix}(\alpha) \cup \{c\}$  olduğundan

$$|\text{Shift}(\beta)| = |\text{Shift}(\alpha)| + 1$$

olur. Ayrıca,  $\alpha = \varepsilon\beta$  olduğu açıkça görülür. Eğer  $\beta = 1_n$  ise  $\alpha = \varepsilon \in \langle E(J_{n-1}) \cup \{1_n\} \rangle$  olur. Eğer  $\beta \neq 1_n$  ise  $\beta$  için benzer şekilde devam edildiğinde sabit olmayan nokta sayısı her devasında 1 artacağından sonlu adım sonunda  $\alpha, E(J_{n-1})$ 'deki bazı idempotentlerin çarpımı olarak yazılır.  $\square$

**Tanım 4.6.2.**  $S$  bir yarıgrup ve  $a \in S$  olsun. Eğer  $a = u \cdot v$  olduğunda  $a = u$  veya  $a = v$  ise  $a$ 'ya  $S$ 'nin bir **indirgenemez elemanı** denir.

**Önerme 4.6.3.**  $S$  yarı grubunun bir doğuray kümesi  $X$  ve  $a \in S$  de bir indirgenemez eleman ise  $a \in X$  olur.

**İspat:**  $a \in S = \langle X \rangle$  olduğundan  $a = x_1 x_2 \cdots x_n$  olacak şekilde  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$  vardır.  $a$  indirgenemez eleman olduğundan

$$a = x_1(x_2 \cdots x_n)$$

olup  $a = x_1$  veya  $a = x_2 \cdots x_n$  olur. Eğer  $a = x_1$  ise  $a \in X$  olur. Aksi halde

$$a = x_2(x_3 \cdots x_n)$$

olup  $a$ 'nın indirgenemezliğinden  $a = x_2$  veya  $a = x_3 x_4 \cdots x_n$  olur.  $n < \infty$  olduğundan sonlu adım sonunda en az bir  $1 \leq i \leq n$  için  $a = x_i$  olup  $a \in X$  olur.  $\square$

**Önerme 4.6.4.** Her  $1 \leq i < j \leq n$  için  $\varepsilon_{ij}$  indirgenemezdir.

**İspat:** Kabul edelim ki  $\alpha, \beta \in D_n$  için  $\varepsilon_{ij} = \alpha\beta$  olsun. O zaman, her  $j \neq x \in X_n$  için

$$x = x\varepsilon_{ij} = (x\alpha)\beta \leq x\alpha \leq x$$

olduğundan  $x\alpha = x$  olur. Dolayısıyla,

$$x = (x\alpha)\beta = x\beta \leq x$$

olduğundan da  $x\beta = x$  olur. Böylece

$$\text{Fix}(\alpha) = \text{Fix}(\beta) = \text{Fix}(\varepsilon_{ij}) = X_n \setminus \{j\}$$

olur. Benzer şekilde

$$i = j\varepsilon_{ij} = (j\alpha)\beta \leq j\alpha \leq j$$

olduğundan  $j\alpha = k$  olacak şekilde bir  $i \leq k \leq j$  vardır. Eğer  $k = i$  ise  $\varepsilon_{ij} = \alpha$  olur. Eğer  $k \neq i$  ise  $k = j$  olmak zorundadır. Aksi halde,  $i < k < j$  olsaydı  $k \in \text{Fix}(\beta) = X_n \setminus \{j\}$  olduğundan

$$i = j\varepsilon_{ij} = (i\alpha)\beta = k\beta = k$$

çelişkisi olur. O halde,  $k = j$  olup  $j\alpha = k = j$  ve dolayısıyla

$$j\beta = (j\alpha)\beta = j\varepsilon_{ij} = i$$

olduğundan  $\alpha = 1_n$  ve  $\varepsilon_{ij} = \beta$  olur.  $\square$

$\alpha, \beta \in D_n$  için  $\alpha\beta = 1_n$  olması durumunda,  $X_n = \text{im}(1_n) \subseteq \text{im}(\beta) \subseteq X_n$  olduğundan  $\text{im}(\beta) = X_n$  olurdu.  $D_n$ 'de görüntü kümesi  $X_n$  olan bir tek eleman  $1_n$  olduğundan  $\beta = 1_n$  olur. Böylece,  $1_n$  de indirgenemez olur. Ayrıca,

$$|\{\varepsilon_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}| = \binom{n}{2}$$

olduğundan aşağıdaki teoreme sahibiz.

**Teoreme 4.6.5.**  $\{\varepsilon_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{1_n\}$ ,  $D_n$ 'nin minimum doğray kümesidir. Dolayısıyla

$$\text{rank}(D_n) = \text{idrank}(D_n) = \binom{n}{2} + 1$$

olur.  $\square$

Her  $1 \leq r \leq n - 1$  için

$$D(n, r) = \{\alpha \in D_n : |\text{im}(\alpha)| \leq r\}$$

olarak tanımlanan  $D(n, r)$  kümesi  $D_n$  yarıgrubunun bir altarıgrubudur.

**Önerme 4.6.6.** Her  $1 \leq r \leq n$  için  $D(n, r)$ ,  $D_n$ 'nin bir idealidir.

**İspat:** Her  $\alpha \in DK(n, r)$  ve  $\beta \in D_n$  için  $\text{im}(\beta\alpha) \subseteq \text{im}(\alpha)$  olduğundan

$$|\text{im}(\beta\alpha)| \leq |\text{im}(\alpha)| \leq r$$

olup  $\beta\alpha \in D(n, r)$  olur. Ayrıca,

$$|\text{im}(\alpha\beta)| \leq |\text{im}(\alpha)| \leq r$$

olduğundan  $\alpha\beta \in D(n, r)$  olup,  $D(n, r) \trianglelefteq D_n$  olur.  $\square$

Aslında,

$$D(n, r) = \bigcup_{k=1}^r J_r$$

olur.

**Önerme 4.6.7.**  $1 \leq r \leq n - 2$  olmak üzere, her  $\alpha \in J_r$  için  $\alpha = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_m$  olacak şekilde  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m \in E(J_r)$  vardır.

**İspat:**  $\alpha \in J_r$  ve  $im(\alpha) = \{1 = a_1 < a_2 < \dots < a_r\}$  ise her  $1 \leq i \leq r$  için

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_r \\ 1 & a_2 & \dots & a_r \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Eğer, her  $1 \leq i \leq r$  için  $\min(A_i) = b_i$  ise  $a_i \leq b_i$  ve  $b_1 = a_1 = 1 \in A_1$  olur. O zaman

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_r \\ 1 & b_2 & \dots & b_r \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanır ise  $\varepsilon \in E(J_r)$  olur. Ayrıca, her  $1 \leq i \leq r$  için  $b_{r+1} = n + 1$  olmak üzere  $B_i = \{b_i, b_i + 1, \dots, b_{i+1} - 1\}$  alınır ise her  $1 \leq i \leq r$  için  $a_i \leq b_i = \min(B_i)$  olduğundan

$$\beta = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_r \\ 1 & a_2 & \dots & a_r \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanır ise  $\beta \in J_r$  ve ayrıca

$$\alpha = \varepsilon\beta$$

olur. Eğer, her  $1 \leq i \leq r$  için  $b_i = a_i$  ise açıkça  $\alpha = \beta = \varepsilon \in E(J_r)$  olur. Kabul edelim ki en az bir  $2 \leq k \leq r$  için  $b_k \neq a_k$  ve her  $1 \leq i \leq k - 1$  için  $b_i = a_i$  olsun. O zaman,  $a_k < b_k$  olup bir tek  $1 \leq j \leq k - 1$  için  $a_k \in B_j$  olur. Ayrıca,  $B_j\beta = a_j < a_k$  olduğundan benzer şekilde

$$\epsilon = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_r \\ 1 & b_2 & \dots & b_r \end{pmatrix}$$

şekilde tanımlanırsa  $\epsilon \in E(J_r)$  olur. Ayrıca,  $\gamma : X_n \rightarrow X_n$  dönüşümü  $C_j = B_j \setminus \{a_k\}$  ve  $D_k = B_k \cup \{a_k\}$  olmak üzere

$$\gamma = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_{j-1} & C_j & B_{j+1} & \dots & B_{k-1} & D_k & B_{k+1} & \dots & B_r \\ 1 & \dots & b_{j-1} & b_j & b_{j+1} & \dots & b_{k-1} & a_k & b_{k+1} & \dots & b_r \end{pmatrix}$$

şekilde tanımlanır ise açıkça  $\gamma \in J_r$  ve ayrıca

$$\alpha = \varepsilon\beta = \varepsilon(\epsilon\gamma) = (\varepsilon\epsilon)\gamma$$



olur. Eğer  $\gamma$  bir idempotent ise sonuç açıktır. Aksi halde, en az bir  $k + 1 \leq l \leq r$  için  $b_l \neq a_l$  olur. Benzer şekilde devam edildiğinde  $r$  sonlu olduğundan istenilen parçalama elde edilir.  $\square$

**Önerme 4.6.8.**  $1 \leq r \leq n - 2$  olmak üzere  $\alpha \in E(D_r)$  olsun. O zaman,  $\alpha = \beta\gamma$  olacak şekilde  $\beta, \gamma \in E(D_{r+1})$  vardır.

**İspat:**  $im(\alpha) = \{1 = a_1 < a_2 < \dots < a_r\}$  ve her  $1 \leq i \leq r$  için  $A_i = a_i\alpha^{-1}$  olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_r \\ 1 & a_2 & \dots & a_r \end{pmatrix}$$

olsun. O zaman, her  $1 \leq i \leq r$  için  $\min(A_i) = a_i$  ve  $r \leq n - 2$  olduğundan ya en az bir  $1 \leq i \leq r$  için  $|A_i| \geq 3$  ya da en az iki  $1 \leq i < j \leq r$  için  $|A_i| \geq 2$  ve  $|A_j| \geq 2$  olur.

1. **Durum:** Bir  $1 \leq i \leq r$  için  $|A_i| \geq 3$  olsun. O zaman,  $a_i < b_i < c_i$  ve her  $1 \leq j \leq r$  için  $b_i, c_i \neq a_j$  olacak şekilde  $b_i, c_i \in A_i$  vardır. Şimdi,

$$\beta : X_n \rightarrow X_n \text{ ve } \gamma : X_n \rightarrow X_n$$

dönüşümleri, her  $x \in X_n$  için

$$x\beta = \begin{cases} x\alpha & x \neq c_i \\ c_i & x = c_i \end{cases} \text{ ve } x\gamma = \begin{cases} x\alpha & x \neq b_i \\ b_i & x = b_i \end{cases}$$

olarak tanımlanır ise açıkça,  $\beta, \gamma \in E(D_{n+1})$  ve her  $x \neq b_i, c_i$  için  $x\alpha = a_j \neq b_i, c_i$  olacağından

$$\begin{aligned} x\beta\gamma &= (x\alpha)\gamma = (x\alpha)\alpha = x\alpha^2 = x\alpha \\ b_i\beta\gamma &= (b_i\alpha)\gamma = a_i\gamma = a_i\alpha = a_i = b_i\alpha \\ c_i\beta\gamma &= c_i\gamma = c_i\alpha \end{aligned}$$

olup  $\beta\gamma = \alpha$  olur.

2. **Durum:**  $1 \leq i < j \leq r$  için  $|A_i| \geq 2$  ve  $|A_j| \geq 2$  olsun. O zaman,  $a_i < b_i$ ,  $a_j < c_j$  ve her  $1 \leq k \leq r$  için  $b_i, c_j \neq a_k$  olacak şekilde bir  $b_i \in A_i$  ve  $c_j \in A_j$  vardır. Şimdi,

$$\beta : X_n \rightarrow X_n \text{ ve } \gamma : X_n \rightarrow X_n$$

dönüşümleri, her  $x \in X_n$  için

$$x\beta = \begin{cases} x\alpha & x \neq b_i \\ b_i & x = b_i \end{cases} \quad \text{ve} \quad x\gamma = \begin{cases} x\alpha & x \neq c_j \\ c_j & x = c_j \end{cases}$$

olarak tanımlanır ise açıkça,  $\beta, \gamma \in E(D_{n+1})$  ve her  $x \neq b_i, c_i$  için  $x\alpha \neq c_j$  ve  $b_i \neq c_j$  olacağından

$$x(\beta\gamma) = (x\alpha)\gamma = (x\alpha)\alpha = x\alpha^2 = x\alpha$$

$$b_i(\beta\gamma) = b_i\gamma = b_i\alpha$$

$$c_j(\beta\gamma) = (c_j\alpha)\gamma = a_j\gamma = a_j\alpha = a_j = c_j\alpha$$

olup  $\beta\gamma = \alpha$  olur.  $\square$

**Önerme 4.6.9.** Her  $1 \leq r \leq n-1$  için  $\alpha, \beta \in J_r(D_n)$  olsun. O zaman,  $\alpha\beta \in E(J_r)$  ancak ve ancak  $\alpha, \beta \in E(J_r)$  ve  $\alpha\beta = \alpha$  olmasıdır.

**İspat:**  $(\Rightarrow)$   $\alpha, \beta \in J_r$  için  $\alpha\beta \in E(J_r)$  olsun. O zaman,  $im(\alpha\beta) = Fix(\alpha\beta)$  olup

$$r = |Fix(\alpha\beta)| \leq |Fix(\alpha)| \leq |im(\alpha)| = r$$

olduğundan  $|Fix(\alpha)| = |im(\alpha)| = r$  ve dolayısıyla,  $Fix(\alpha) = im(\alpha)$  olur. Böylece,  $\alpha \in E(J_r)$  ve benzer şekilde  $\beta \in E(J_r)$  olur. Ayrıca,  $|Fix(\alpha\beta)| = |Fix(\alpha)| = r$  ve  $Fix(\alpha\beta) \subseteq Fix(\alpha)$  olduğundan  $Fix(\alpha\beta) = Fix(\alpha)$  ve benzer şekilde  $Fix(\alpha\beta) = Fix(\beta)$  olur. Bu durumda,  $Fix(\alpha) = Fix(\beta)$  olup her  $x \in X_n$  için  $x\alpha \in im(\alpha) = Fix(\alpha) = Fix(\beta)$  olduğundan

$$x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta = x\alpha$$

olur. Böylece,  $\alpha\beta = \alpha$  olur.

$(\Leftarrow)$  Açıktır.  $\square$

$X_n$ 'in her bir  $r$ 'li parçalanışı  $\{A_1, A_2, \dots, A_r\}$  için  $ker(\varepsilon) = \bigcup_{i=1}^r A_i \times A_i$  olacak şekilde bir tek idempotent vardır. O da her  $1 \leq i \leq r$  için  $\min(A_i) = a_i$  olmak üzere

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_r \\ a_1 & a_2 & \dots & a_r \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Genelliği bozmaksızın  $a_1 < a_2 < \dots < a_r$  kabul edildiğinden  $\min(A_1) = a_1 = 1$  olur. Dolayısıyla,  $X_n$ 'nin  $S(n, r)$  tane  $r$ 'li parçalanışı olduğundan aşağıdaki sonuca sahibiz.

**Sonuç 4.6.10.** Her  $1 \leq r \leq n$  için  $|E(J_r)| = S(n, r)$  olur. Dolayısıyla,

$$|E(D_n)| = \sum_{r=1}^n S(n, r)$$

olur.  $\square$

**Teorem 4.6.11.** Her  $1 \leq r \leq n - 1$  için

$$\text{rank}(D(n, r)) = \text{idrank}(D(n, r)) = S(n, r)$$

olur.

**İspat:**  $D(n, r) = \langle E(J_r) \rangle$  ve  $|E(J_r)| = S(n, r)$  olduğundan

$$\text{rank}(D(n, r)) \leq S(n, r)$$

olur.  $D(n, r)$ 'nin herhangi bir doğuray kümesi  $A$  olsun. Ayrıca,  $X_n$ 'nin herhangi bir  $r$ 'li parçalanışı  $\{A_1, A_2, \dots, A_r\}$  ( $1 \in A_1$ ) için ve her  $1 \leq i \leq r$  için  $\min(A_i) = a_i$  olmak üzere

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_r \\ 1 & a_2 & \dots & a_r \end{pmatrix} \in E(J_r)$$

ise  $D(n, r) = \langle A \rangle$  olduğundan  $\varepsilon = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_t$  olacak şekilde  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t \in A$  vardır.

$$\ker(\alpha_1) \subseteq \ker(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_t) = \ker(\varepsilon)$$

ve

$$r = |\text{im}(\varepsilon)| = |\text{im}(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_t)| \leq |\text{im}(\alpha_1)| \leq r$$

olduğundan

$$|\text{im}(\alpha_1)| = r = |\text{im}(\varepsilon)|$$

olur. Dolayısıyla,

$$\ker(\alpha_1) = \ker(\varepsilon)$$

olur. Böylece,  $X_n$ 'nin her  $r$ 'li parçalanışı  $\{A_1, A_2, \dots, A_r\}$  için  $\ker(\varepsilon) = \bigcup_{i=1}^r A_i \times A_i$  olacak şekilde bir  $\alpha \in A$  vardır. Böylece,  $|A| \geq S(n, r)$  olup

$$\text{rank}(D(n, r)) = S(n, r)$$

olur. Ayrıca,  $\langle E(J_r) \rangle = D(n, r)$  olduğundan

$$\text{idrank}(D(n, r)) = S(n, r)$$

olur.  $\square$

**Önerme 4.6.12.**  $PD_n$  ile  $D_{n+1}$  izomorfiktir.

**İspat:**  $D_{n+1}$ 'i,  $X_{n+1} = \{1 < 2 < \dots < n+1\}$  üzerindeki sıra-azaltan (tam) dönüşümler yarıgrubu yerine bu seferlik  $X_n^\circ = \{0 < 1 < 2 < \dots < n\}$  üzerindeki sıra-azaltan (tam) dönüşümler yarıgrubu olarak alalım. Ayrıca,  $PD_n$  de her zamanki gibi  $X_n = \{1 < 2 < \dots < n\}$  üzerindeki kısmi sıra-azaltan dönüşümler yarıgrubu olsun. Böylece, her bir  $\alpha \in PD_n$  için

$$\hat{\alpha} : X_n^\circ \rightarrow X_n^\circ$$

dönüşümü, her  $x \in X_n^\circ$  için

$$x\hat{\alpha} = \begin{cases} 0 & x = 0 \text{ veya } x \notin \text{dom}(\alpha) \\ x\alpha & x \in \text{dom}(\alpha) \end{cases}$$

olarak tanımlanır ise açıkça  $\hat{\alpha} \in D_{n+1}$  olur. Ayrıca,

$$\varphi : PD_n \rightarrow D_{n+1}$$

dönüşümünü, her  $\alpha \in PD_n$  için

$$\varphi\mu = \hat{\alpha}$$

olarak tanımlayalım. Açıkça görüleceği üzere,  $\varphi$  iyi tanımlı, bire-bir ve örten bir dönüşüm olur. Bu durumda, biz her  $\alpha, \beta \in P_n$  için

$$\widehat{\alpha\beta} = \hat{\alpha}\hat{\beta}$$

olduğunu gösterelim. Öncelikle

$$0(\widehat{\alpha\beta}) = 0 = 0\hat{\beta} = (0\hat{\alpha})\hat{\beta} = 0(\hat{\alpha}\hat{\beta})$$

olur. Herhangi bir  $x \in X_n$  için 3 durum vardır:

1.  $x \notin \text{dom}(\alpha)$ ;
2.  $x \in \text{dom}(\alpha)$  ve  $x\alpha \notin \text{dom}(\beta)$ ;
3.  $x \in \text{dom}(\alpha)$  ve  $x\alpha \in \text{dom}(\beta)$ , yani  $x \in \text{dom}(\alpha\beta)$ .

1. **Durum:**  $x \notin \text{dom}(\alpha)$  ise  $x \notin \text{dom}(\alpha\beta)$  olduğundan

$$x(\hat{\alpha}\hat{\beta}) = (x\hat{\alpha})\hat{\beta} = 0\hat{\beta} = 0 = x(\widehat{\alpha\beta});$$

2. **Durum:**  $x \in \text{dom}(\alpha)$  ve  $x\alpha \notin \text{dom}(\beta)$  ise  $x \notin \text{dom}(\alpha\beta)$  olduğundan

$$x(\hat{\alpha}\hat{\beta}) = (x\hat{\alpha})\hat{\beta} = (x\alpha)\hat{\beta} = 0 = x(\widehat{\alpha\beta});$$

3. **Durum:**  $x \in \text{dom}(\alpha)$  ve  $x\alpha \in \text{dom}(\beta)$  ise  $x \in \text{dom}(\alpha\beta)$  olduğundan

$$x(\hat{\alpha}\hat{\beta}) = (x\hat{\alpha})\hat{\beta} = (x\alpha)\hat{\beta} = (x\alpha)\beta = x(\alpha\beta) = x(\widehat{\alpha\beta})$$

olur. Böylece, her  $\alpha, \beta \in PD_n$  için

$$(\alpha\varphi)(\beta\varphi) = \hat{\alpha}\hat{\beta} = (\widehat{\alpha\beta}) = (\alpha\beta)\varphi$$

olup  $\varphi$  bir homomorfizim ve dolayısıyla bir izomorfizm olduğundan

$$PD_n \cong D_{n+1}$$

olur.  $\square$

Böylece, aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

**Sonuç 4.6.13.**  $n \geq 2$  için

- i)  $|PD_n| = |D_{n+1}| = (n+1)!$
- ii)  $\text{rank}(PD_n) = \text{rank}(D_{n+1}) = \binom{n+1}{2} + 1. \square$

Her  $0 \leq r \leq n$  için

$$PD(n, r) = \{\alpha \in PD_n : |im(\alpha)| \leq r\}$$

olarak tanımlayalım. Ayrıca,

$$0 = 0_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ - & - & \cdots & - \end{pmatrix} \in P_n$$

$PD_n$ 'nin sıfır elemanı olup  $PD(n, 0) = \{0_n\}$  ve

$$1_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \in P_n$$

$PD_n$ 'nin birim elemanı olup  $PD(n, n) = \{1_n\}$  olur. Yukarıda tanımladığımız  $\varphi$  izomorfizmi aynı zamanda aşağıdaki sonucu da verir.

**Önerme 4.6.14.** Her  $0 \leq r \leq n$  için  $PD(n, r)$  ile  $D(n + 1, r + 1)$  izomorfiktir.  $\square$

**Önerme 4.6.15.**  $S$  ile  $T$  iki yarıgrup ve  $\varphi : S \rightarrow T$  bir izomorfizm olsun. Eğer bir  $X \subseteq S$  için  $S = \langle X \rangle$  ise  $T = \langle X\varphi \rangle$  olur.

**İspat:** Her bir  $t \in T$  için  $\varphi$  örten olduğundan  $s\varphi = t$  olacak şekilde  $s \in S$  vardır. Ayrıca,  $S = \langle X \rangle$  olduğundan  $s = x_1 x_2 \cdots x_k$  olacak şekilde  $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$  vardır. Böylece,  $S = \langle X \rangle$

$$t = s\varphi = (x_1 x_2 \cdots x_k)\varphi = (x_1\varphi)(x_2\varphi) \cdots (x_k\varphi),$$

ve  $x_1\varphi, x_2\varphi, \dots, x_k\varphi \in X\varphi \subseteq T$  olduğundan  $T = \langle X\varphi \rangle$  olur.  $\square$

**Teorem 4.6.16.**  $S$  ile  $T$  sonlu doğuraylı izomorfik yarıgrupları ise

$$rank(S) = rank(T)$$

olur.

**İspat:**  $\varphi : S \rightarrow T$  bir izomorfizm olsun.  $X$ ,  $S$ 'nin bir minimal doğuray kümesi yani  $|X| = rank(s)$  ve  $\langle X \rangle = S$  ise  $\langle X\varphi \rangle = T$  olduğundan

$$\text{rank}(S) = |X| = |X\varphi| \leq \text{rank}(T)$$

olur. Benzer şekilde,  $\varphi^{-1} : T \rightarrow S$  bir izomorfizim olduğundan  $Y$ ,  $S$ 'nin bir minimal doğuray kümesi ise  $|Y^{-1}| = \text{rank}(S)$  ve  $\langle X \rangle = S$  ise  $\langle Y\varphi^{-1} \rangle = S$  olup

$$\text{rank}(T) = |Y| = |Y\varphi^{-1}| \leq \text{rank}(S)$$

olur. Böylece,

$$\text{rank}(S) = \text{rank}(T)$$

olur.  $\square$

**Teorem 4.6.17.** Her  $0 \leq r \leq n$  için

$$\text{rank}(PD(n, r)) = \text{idrank}(PD(n, r)) = S(n + 1, r + 1)$$

olur.  $\square$

## 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Sıra-azaltan dönüşümlerin monoidi  $D_n$ , (tam) dönüşümlerin monoidi  $T_n$  nin bir alt monoidi ve benzer şekilde sıra-azaltan kısmi dönüşümlerin monoidi  $PD_n$  de kısmi dönüşümler monoidi  $P_n$  nin bir alt monoididir. Herhangi bir  $\alpha, \beta \in T_n$  için  $\text{Fix}(\alpha\beta) \neq \text{Fix}(\alpha) \cap \text{Fix}(\beta)$  iken herhangi bir  $\alpha, \beta \in D_n$  için  $\text{Fix}(\alpha\beta) = \text{Fix}(\alpha) \cap \text{Fix}(\beta)$  ve benzer şekilde herhangi bir  $\alpha, \beta \in PD_n$  için  $\text{Fix}(\alpha\beta) = \text{Fix}(\alpha) \cap \text{Fix}(\beta)$  olur.  $\alpha \in D_n$  dönüşümünün nilpotent olması için gerek ve yeter koşul  $\text{Fix}(\alpha) = \{1\}$  olması iken,  $\alpha \in PD_n$  dönüşümünün nilpotent olması için gerek ve yeter koşul  $\text{Fix}(\alpha) = \emptyset$  olmasıdır.

Bu gözlemler sonucunda, biz bu çalışmada  $J_r = \{\alpha \in D_n : |\text{im}(\alpha)| = r\}$  olmak üzere  $J_{n-1}$  sınıfının eleman sayısını ve  $1 \leq r \leq n-2$  için her  $\alpha \in J_r$  elemanının  $J_r$  sınıfındaki idempotent elemanların çarpımı olarak yazılabildiğini gösterdik.





## KAYNAKLAR

- Al-Kharousi, F., Kehinde, R., ve Umar, A. 2016. On the semigroup of partial isometries of a finite chain. *Communications in Algebra*, 44(2), 639-647.
- Ganyushkin, O., ve Mazorchuk, V. 2008. *Classical Finite Transformation Semigroups: an introduction* Springer Verlag, London, 314s.
- Howie, J. M., 1995. *Fundamentals of Semigroup Theory*. Oxford University Press, New York, 351s.
- Korkmaz, E., ve Ayik, H., 2021. Ranks of nilpotent subsemigroups of order-preserving and decreasing transformation semigroups. *Turkish Journal of Mathematics*, 45(4): 1626-1634.
- Laradji, A., ve Umar, A., 2004. On certain finite semigroups of order-decreasing transformations I. *Semigroup Forum*, 69: 184- 200.
- Umar, A.,1992. On the semigroups of order-decreasing finite full transformations. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, 120(1-2): 129-142.
- Umar, A.,1996. On the ranks of certain finite semigroups of order-decreasing transformations. *Portugaliae Mathematica*, 53(1): 23-34.
- Yağcı, M., ve Korkmaz, E., 2020, a. On elements of finite semigroups of order-preserving and decreasing transformations. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 43(5): 3863-3870.
- Yağcı, M., ve Korkmaz, E., 2020, b. On nilpotent subsemigroups of the order-preserving and decreasing transformation semigroups. *Semigroup Forum*, 101(2):486-496
- Zhao, P., You, T., ve Hu, H., 2018. On the ranks of the semigroup of A-decreasing finite transformations. *Journal of Algebra and Its Applications*, 17(02), 1850036.



## ÖZGEÇMİŞ

Seeball Jabbar Mohammed MOHAMMED, ilköğretim, Ortaokul ve Lise öğrenimini Kerkük'te tamamladı. Lisans öğrenimine 2017 yılında Kerkük Üniversitesi Matematik Bölümü'nde başladı ve 2021 yılında mezun oldu. 2021 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı.

