

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sebiha MAVRUK

**SIRA-KORUYAN DÖNÜŞÜMLER YARIGRUBUNUN
VERİMLİ ALT YARIGRUPLARI**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA-2018

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SIRA-KORUYAN DÖNÜŞÜMLER YARIGRUBUNUN VERİMLİ ALT
YARIGRUPLARI**

Sebiha MAVRUK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez .../.../.... tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından
oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

.....
Prof. Dr. Hayrullah AYIK
DANIŞMAN

.....
Yrd. Doç. Dr. Leyla BUGAY
ÜYE

.....
Yrd. Doç. Dr. Cennet ESKAL
ÜYE

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

**Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü**

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve
fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat
Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SIRA-KORUYAN DÖNÜŞÜMLER YARIGRUBUNUN VERİMLİ ALT YARIGRUPLARI

Sebiha MAVRUK

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Prof. Dr. Hayrullah AYIK
Yıl: 2018, Sayfa: 65
Jüri : Prof. Dr. Hayrullah AYIK
: Yrd. Doç. Dr. Leyla BUGAY
: Yrd. Doç. Dr. Cennet ESKAL

P_n , T_n ve O_n sırasıyla $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ kümesi üzerindeki sonlu kısmi dönüşümler, (tam) dönüşümler ve sıra-koruyan (tekil) dönüşümler yarıgrubu olsun. Ayrıca, X_n nin boş olmayan bir A alt kümesi için

$$O_n(A) = \{a \in O_n : (a \upharpoonright A) \text{ } x \mapsto x\}$$

X_n kümesi üzerindeki tüm sıra-koruyan ve A -azalan (tekil) dönüşümlerinden oluşan alt yarıgrup olsun. Bu çalışmada, ilk olarak sıra-koruyan dönüşümler yarıgrubunun azalan (artan) tekil dönüşümler yarıgrubunu ve ardından da yerel maksimal idempotent doğuraylı alt yarıgruplarını inceleyeceğiz. Ayrıca, $O_n(A)$ nin *-Green denklik bağıntılarını inceleyerek $O_n(A)$ nin sıra koruyan dönüşümler yarıgrubunun bir verimli alt yarıgrubu olduğunu göstereceğiz. Son olarak da $O_n(A)$ nin doğuray kümeleri ve ranklarını inceleyerek idempotent rankının $2n - 2 - |A \setminus n|$, rankının $1 \leq |A| \leq n - 1$ iken $n - 1$ ve diğer durumlarda n olduğunu göstereceğiz.

Anahtar Kelimeler: Sıra-koruyan dönüşüm, A -azalan dönüşüm, verimli alt yarıgrup, doğuray kümesi, rank

ABSTRACT

MSc. THESIS

ABUNDANT SUBSEMIGROUPS OF ORDER-PRESERVING TRANSFORMATIONS SEMIGROUP

Sebiha MAVRUK

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor : Prof. Dr. Hayrullah AYIK
Year: 2018, Pages: 65
Jury : Prof. Dr. Hayrullah AYIK
: Asst. Prof. Dr. Leyla BUGAY
: Asst. Prof. Dr. Cennet ESKAL

Let P_n , T_n and O_n be the partial transformations, the (full) transformations and order-preserving (singular) transformations semigroups on the set $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$, respectively. Moreover, for any non-empty subset of X_n , let

$$O_n(A) = \{a \in O_n : (x \hat{A}) \cap x \neq \emptyset\}$$

be the subsemigroup of all order-preserving and A -decreasing (singular) transformations on the set X_n . In this study, first we study locally maximal idempotent-generated subsemigroups of order-preserving transformations semigroup. Moreover, we examine the $\ast$ -Green's equivalences of $O_n(A)$ and show $O_n(A)$ is an abundant subsemigroup of order-preserving transformations semigroup. Finally, we study generating sets and ranks of $O_n(A)$ and show its idempotent rank is $2n - 2 - |A \setminus n|$, its rank is $n - 1$ if $1 \in A$ and n otherwise.

Key Words: Order-preserving transformation, A -decreasing transformation, abundant subsemigroup, generating set, rank

GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

X boş olmayan bir küme olmak üzere, X üzerinde tanımlı tüm dönüşümlerin kümesi ve tüm permütasyonların (1-1 örten dönüşümler) kümesi bileşke işlemi ile birer yarıgrup olup bu yarıgruplara sırasıyla X üzerindeki **(tam) dönüşümler yarıgrubu** ve **permütasyonlar yarıgrubu** denir. Bu yarıgruplar sırasıyla T_X ve S_X ile gösterilir. Tanımları gereği, S_X in T_X yarıgrubunun bir alt yarıgrubu olduğu açıktır. Eğer $X = X_n = \{1, \dots, n\}$ şeklinde sonlu bir küme ise T_X ve S_X yerine sırasıyla T_n ve S_n yazacağız. Bu tanımlar yardımıyla **tekil dönüşümler yarıgrubu** $Sing_n$ ve **sıra-koruyan dönüşümler yarıgrubu** O_n sırasıyla

$$Sing_n = T_n \setminus S_n$$

$$O_n = \{a \in Sing_n : x \in y \supset x a \in y a \text{ (} "x, y \in X_n)\}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, X_n nin boş olmayan bir A alt kümesi için

$$O_n(A) = \{a \in O_n : ("x \in A) x a \in x\},$$

$$C_n^- = \{a \in O_n : ("x \in X_n) x a \in x\},$$

$$C_n^+ = \{a \in O_n : ("x \in X_n) x a^3 \in x\}$$

kümeleri de dönüşümlerin bileşke işlemiyle X_n üzerinde birer yarıgrup olup bu yarıgruplara sırasıyla **sıra-koruyan ve A-azalan (tekil) dönüşümler yarıgrubu**, **sıra-koruyan ve azalan tekil dönüşümler yarıgrubu** ve **sıra-koruyan ve artan tekil dönüşümler yarıgrubu** denir.

S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq X \subseteq S$ olmak üzere S nin X kümesini içeren tüm alt yarıgruplarının kesişimi bir alt yarıgrup olup bu alt yarıgruba S nin X tarafından **doğurulan alt yarıgrubu** denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir. Yani;

$$\langle X \rangle = \bigcap \{T: X \subseteq T \leq S\}$$

olur. $\langle X \rangle$, X kümesini içeren en küçük alt yarıgruptur.

Eğer $\langle X \rangle = S$ oluyorsa X e S nin bir **doğuray kümesi**, X in her bir elemanına ve S ye de X tarafından **doğurulan yarıgrup** denir. Eğer $S = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ şeklinde sonlu bir küme tarafından doğuruluyorsa S ye **sonlu doğuraylı yarıgrup** ve $S = \langle x \rangle$ oluyorsa S ye **monojenik (tek doğuraylı) yarıgrup** denir. Ayrıca $\langle X \rangle$, X üzerindeki tüm sonlu çarpımların kümesidir, yani

$$\langle X \rangle = \{x_1 x_2 \cdots x_n : n \in \mathbb{Z}^+; x_1, x_2, \dots, x_n \in X\}$$

S bir yarıgrup olmak üzere S üzerindeki her bir L^* -sınıfı ve her bir R^* -sınıfı bir idempotent eleman ($a^2 = a$) içeriyor ise S ye bir **verimli yarıgrup** denir. $E_{n-1} = \{a \in O_n : |\text{im}(a)| = n-1, a^2 = a\}$ ve S, O_n yarıgrubunun bir alt yarıgrubu olmak üzere eğer $S = \langle E \rangle$ ve $\langle E \cup \{f\} \rangle = O_n$ olacak şekilde bir $E \in E_{n-1}$ ve bir $f \in E_{n-1} - E$ varsa S ye O_n yarıgrubunun bir **yerel maksimal idempotent doğuraylı alt yarıgrubu** denir. Gomes ve Howie (1992), $O_n = \langle E_{n-1} \rangle$ olduğunu ve E_{n-1} in hiçbir öz alt kümesinin O_n i üretemediğini göstermiştir. Ayrıca O_n yarıgrubunun her yerel maximal idempotent doğuraylı alt yarıgrubu verimli alt yarıgruptur.

Eğer A kümesi X_n veya $X_n \setminus \{n\}$ ye eşit ise $O_n(A) = C_n$ ve eğer $A = \{n\}$ ise $O_n(A) = O_n$ olur. Ayrıca $C_n \in O_n(A) \in O_n$ olduğu da açıktır. Ping (2014) ise $O_n(A)$ nın sıra koruyan dönüşümler yarıgrubunun bir verimli alt yarıgrubu olduğunu ve $O_n(A)$ nın regüler olması için gerek ve yeter koşulun A kümesinin $\{1\}$, $\{1, n\}$ veya $\{n\}$ ye eşit olması olduğunu göstermiştir.

S , sonlu doğuraylı bir yarıgrup olmak üzere

$$\text{rank}(S) = \min\{|X| : S = \langle X \rangle \text{ ve } X \text{ sonlu}\}$$

pozitif tamsayısına S nin **(yarıgrup) rankı** denir. Eğer S , bazı idempotent elemanları tarafından doğuruluyorsa S ye **idempotent doğuraylı yarıgrup** ve bu durumda

$$\text{idrank}(S) = \min\{|A| : A \subseteq E(S) \text{ ve } S = \langle A \rangle\}$$

pozitif tamsayısına da S nin **idempotent rankı** denir. Son olarak, Ping (2014), $O_n(A)$ nın doğuray kümeleri ve ranklarını inceleyerek idempotent rankının $2n - 2 - |A \setminus n|$, rankının $1 \hat{=} A$ iken $n - 1$ ve diğer durumlarda n olduğunu göstermiştir.



TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında yardımlarını esirgemeyen, yapıcı ve yönlendirici fikirleri ile bana daima yol gösteren değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Hayrullah AYIK a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, yüksek lisans tez jüri üyeleri Sayın Prof. Dr. Gonca AYIK' a ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Cennet ESKAL' a destek ve teşviklerinden dolayı teşekkür ederim.

Aynı zamanda beni her zaman destekleyen, varlıklarıyla bana güç veren ve bugünlere getiren sevgili babam Adanan Mavruk ve annem Nesrin Mavruk' a , sevgili nişanlım Mustafa KARAOĞLAN' a teşekkür ederim.

Son olarak, tezin yazım aşamasındaki katkılarından dolayı Yrd. Doç. Dr. Leyla BUGAY' a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZ.....	I
ABSTRACT	II
GENİŞLETİLMİŞ ÖZET	III
TEŞEKKÜR.....	VII
İÇİNDEKİLER.....	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ	X
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	5
2.1. Yarıgruplar	5
2.2. Bağntı ve Denklikler	8
2.3. Green Denklik Bağntıları	10
2.4. Regülerlik.....	16
2.5. Doğuray Kümeleri.....	18
2.6. Bazı Dönüşüm Yarıgrupları	19
2.7. Sıra Koruyan (Tekil) Dönüşümler Yarıgrubu	25
2.8. Grafikler ve Orbitler	27
2.9. *-Green Bağntıları.....	30
3. SIRA-KORUYAN ve AZALAN (ARTAN) TEKİL DÖNÜŞÜMLER YARIGRUBU	31
4. SIRA-KORUYAN DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARININ YEREL MAKSİMAL İDEMPOTENT DOĞURAYLI ALT YARIGRUPLARI.....	37
5. SIRA-KORUYAN ve A-AZALAN DÖNÜŞÜMLER YARIGRUBU	47
KAYNAKLAR.....	63
ÖZGEÇMİŞ.....	65



ŞEKİLLER DİZİNİ

SAYFA

Şekil 2.1. Green denklik bağıntılarının Hasse diyagramı	13
Şekil 2.2. Bir D-Green denklik sınıfı örneği	15





1. GİRİŞ

1950' li yılların sonunda cebirin başlı başına bir alt dalı haline gelen Yarıgrup teorisi zengin bir soru içeriğine sahip önemli bir araştırma alanıdır. Daha da özel olarak, grup teorisinde iyi bilinen Cayley teoremine benzer olarak, her sonlu yarıgrup sonlu bir dönüşüm yarıgrubuna izomorf olduğundan dönüşüm yarıgrupları ve alt yarıgruplarının yapıları, özellikleri, doğuray kümeleri ve rankları yarıgrup teorisinde önemli bir araştırma konusudur. Bugüne kadar birçok dönüşüm yarıgrubu ve alt yarıgrupları incelenmiş bazı özel doğuray kümeleri ve özel rankları bulunmuştur.

Biz de bu çalışmamızda, aşağıda tanımlarını vereceğimiz sıra-koruyan (tekil) dönüşümler yarıgrubu O_n nin verimli bir alt yarıgrubu olan $O_n(A)$ alt yarıgrubunu inceleyen bazı çalışmaları inceleyerek elde edilen önemli sonuçları derleyeceğiz.

X boş olmayan bir küme olmak üzere, X üzerinde tanımlı tüm dönüşümlerin kümesi ve tüm permütasyonların (1-1 örten dönüşümler) kümesi bileşke işlemi ile birer yarıgrup olup bu yarıgruplara sırasıyla X üzerindeki **(tam) dönüşümler yarıgrubu** ve **permütasyonlar yarıgrubu** denir. Bu yarıgruplar sırasıyla T_X ve S_X ile gösterilir. Tanımları gereği, S_X in T_X yarıgrubunun bir alt yarıgrubu olduğu açıktır. Eğer $X = X_n = \{1, \dots, n\}$ şeklinde sonlu bir küme ise T_X ve S_X yerine sırasıyla T_n ve S_n yazacağız. Bu tanımlar yardımıyla **tekil dönüşümler yarıgrubu** $Sing_n$ ve **sıra-koruyan dönüşümler yarıgrubu** O_n sırasıyla

$$Sing_n = T_n \setminus S_n$$

$$O_n = \{a \in Sing_n : x \in y \supset x a \in y a \text{ (" } x, y \in X_n \text{)}\}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer S yarıgrubunun bir birim elemanı varsa S ye bir **monoid** denir. S bir yarıgrup olmak üzere

$$S^1 = \begin{cases} S, & S \text{ bir monoid ise} \\ S \cup \{1\}, & S \text{ bir monoid değilse} \end{cases}$$

kümesi

$$\forall x, y \in S^1 \text{ için } xy = \begin{cases} xy, & x \neq 1, y \neq 1 \text{ ise} \\ x, & y = 1 \text{ ise} \\ y, & x = 1 \text{ ise} \\ 1, & x = y = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

işlemi ile bir monoid olur ve bu monoide S ye **gerekirse birim eleman eklenerek elde edilen monoid** denir.

S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. S^1 , S ye gerekirse birim eleman eklenerek elde edilen monoid olmak üzere S nin a elemanını içeren en küçük **sol, sağ ve (iki taraflı) ideali** sırasıyla

$$\begin{aligned} S^1 a &= Sa \cup \{a\} = \{xa: x \in S^1\}, \\ aS^1 &= aS \cup \{a\} = \{ax: x \in S^1\} \text{ ve} \\ S^1 aS^1 &= SaS \cup aS \cup Sa \cup \{a\} = \{xay: x, y \in S^1\} \end{aligned}$$

olur.

Bunun yardımıyla S yarıgrubu üzerinde tanımlanan

$$L = \{ (a, b) \in S \times S: S^1 a = S^1 b \}$$

$$R = \{ (a, b) \in S \times S: aS^1 = bS^1 \}$$

bağıntıları birer denklik bağıntısı olup bu denklik bağıntılarına sırasıyla **sol Green (L -Green) ve sağ Green (R -Green) denklik bağıntısı** denir. Bir S yarıgrubu üzerinde L^* ve R^* bağıntıları ise sırasıyla

$$(a, b) \in L^* \Leftrightarrow S \text{ yarıgrubunun bir üst-yarıgrubu üzerinde } (a, b) \in L$$

$$(a, b) \in R^* \Leftrightarrow S \text{ yarıgrubunun bir üst-yarıgrubu üzerinde } (a, b) \in R$$

kuralı ile tanımlanır. Ayrıca, S herhangi bir yarıgrup ve $e \in S$ olmak üzere eğer $e^2 = e$ oluyorsa e elemanına bir **idempotent** eleman denir. Bu tanımlarla eğer S yarıgrubunun her L^* -sınıfı ve R^* -sınıfı birer idempotent eleman içeriyorsa S yarıgrubuna bir **verimli yarıgrup** denir.



2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu kısımda tezde kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

2.1. Yarıgruplar

Tanım 2.1.1. $S \neq \emptyset$ bir küme olsun. S üzerinde tanımlı bir $m: S \times S \rightarrow S$ fonksiyonuna bir **ikili işlem** denir. Bu durumda (S, m) ikilisine de **grupoid** denir.

Eğer ikili işlemi birleşme özelliğine sahip yani " $x, y, z \in S$ için

$$((x, y)m)z)m = (x, (y, z)m)m$$

ise (S, m) ikilisine bir **yarıgrup** denir. Genel olarak ikili işlemine **çarpma işlemi** diyeceğiz ve $(x, y)m$ yerine $x \cdot y$ veya kısaca xy yazacağız. Bu durumda yukarıdaki eşitlik $(xy)z = x(yz)$ şeklinde ifade edilebilir. (S, m) yerine de $(S, \cdot)$ ve ' $\cdot$ ' işlemini belirtmeye gerek olmadığı durumlarda sadece S yazacağız.

Tanım 2.1.2. S bir yarıgrup olsun. Eğer $e \in S$ için

$$ee = e \quad (e^2 = e)$$

ise e elemanına S nin bir **idempotent elemanı** denir. S yarıgrupundaki idempotentlerin kümesi $E(S)$ ve daha genel olarak S nin boş olmayan bir A alt kümesindeki idempotentlerin kümesi $E(A)$ ile gösterilir.

S yarıgrupunun her elemanı idempotent ise (" $s \in S$ için $s^2 = s$) S ye bir **band** denir.

S yarıgrupunda " $s, t \in S$ için $st = ts$ ise S ye **değişmeli yarıgrup** denir. Değişmeli bir banda ise **yarılatis** denir.

Tanım 2.1.3. S bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Eğer " $s \in S$ için $es = s$ oluyorsa e ye S nin bir **sol birim elemanı** denir. Eğer " $s \in S$ için $se = s$ oluyorsa e ye S nin bir **sağ birim elemanı** denir. Eğer e hem sol hem sağ birim eleman ise e ye bir **birim eleman** denir ve 1 veya 1_s ile gösterilir. Bir S yarıgrubunun en fazla bir tane birim elemanı vardır.

Tanım 2.1.4. S bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Eğer " $s \in S$ için $es = e$ oluyorsa e ye S nin bir **sol sıfır elemanı** denir. Eğer " $s \in S$ için $se = e$ oluyorsa e ye S nin bir **sağ sıfır elemanı** denir. Eğer e hem sol hem sağ sıfır eleman ise e ye **sıfır eleman** denir ve 0 ile gösterilir. Bir yarıgrubun en fazla bir tane sıfır elemanı vardır.

Tanım 2.1.5. S bir yarıgrup olsun. S nin birim elemanı varsa S ye bir **monoid** denir.

Önerme 2.1.6. S bir yarıgrup olsun.

- i. S nin birim elemanı varsa tektir.
- ii. S nin sıfır elemanı varsa tektir.

İspat: i. S nin 1 ve 1^* olmak üzere iki tane birim elemanı olsun. O halde

$$11^* = 1 \quad (1^* \text{ birim eleman})$$

$$11^* = 1^* \quad (1 \text{ birim eleman})$$

olup $1 = 1^*$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla birim eleman tektir.

ii. S nin 0 ve 0^* olmak üzere iki tane sıfır elemanı olsun. O halde

$$00^* = 0^* \quad (0^* \text{ sıfır eleman})$$

$$00^* = 0 \quad (0 \text{ sıfır eleman})$$

olup $0 = 0^*$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla sıfır eleman tektir. ■

Tanım 2.1.7. S bir yarıgrup olsun. Eğer

$$a \in S \text{ için } Sa = S \text{ ve } aS = S$$

oluyorsa S ye bir **grup** denir. Bu tanıma denk olarak aşağıdaki iki tanım da verilebilir. S bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Eğer $a \in S$ için

$$ea = a \text{ ve } ba = e$$

olacak şekilde $b \in S$ var ise S ye bir **grup** denir.

S bir monoid ve $e \in S$ birim eleman olsun. Eğer her bir

$$a \in S \text{ için } aa^{-1} = e \text{ ve } a^{-1}a = e$$

olacak şekilde $a^{-1} \in S$ mevcut ise a^{-1} elemanına a nın **tersi** ve S ye de bir **grup** denir. Eğer $a, b \in S$ için $ab = ba$ oluyor ise S ye bir **değişmeli grup** denir.

Tanım 2.1.8. S bir yarıgrup ve $\mathcal{A}^1 T \subseteq S$ olsun.

- i. $T^2 \subseteq T$ ise T ye S nin bir **alt yarıgrubu** denir.
- ii. $ST \subseteq T$ ise T ye S nin bir **sol ideali** denir.
- iii. $TS \subseteq T$ ise T ye S nin bir **sağ ideali** denir.
- iv. $ST \subseteq T$ ve $TS \subseteq T$ ise T ye S nin bir **ideali** denir.

S bir yarıgrup, $\mathcal{A}^1 T \subseteq S$ ve T bir sol ideal olsun. Yani $ST \subseteq T$ dir. O halde

$$T^2 = TT \subseteq ST \subseteq T$$

olup T bir alt yarıgruptur. Benzer şekilde tüm sol idealler, sağ idealler ve idealler birer alt yarıgruptur.

2.2. Bağntı ve Denklikler

Tanım 2.2.1. $X^1 \mathcal{A}$ ve $Y^1 \mathcal{A}$ iki küme olmak üzere

$$X \times Y = \{ (x, y) : x \in X, y \in Y \}$$

kümesine X ile Y nin **kartezyen çarpımı** denir.

Tanım 2.2.2. $X^1 \mathcal{A}$ ve $Y^1 \mathcal{A}$ iki küme olmak üzere $X \times Y$ nin her bir r alt kümesine **X ten Y ye bir bağntı** denir. X üzerindeki tüm bağntıların kümesi B_X ile gösterilir.

Tanım 2.2.3. $X^1 \mathcal{A}$ bir küme ve r da X üzerinde bir bağntı ($r \subseteq X \times X$) olsun. Eğer $(x, y) \in r$ ise $xr y$ şeklinde de gösterilebilir. $\mathcal{A}$ ye X üzerinde **boş bağntı** ve $X \times X$ e de X üzerinde **evrensel bağntı** denir. $1_X = \Delta_X = \{ (x, x) : x \in X \}$ bağntısına **birim/eşitlik/köşegen bağntı** denir. Ayrıca, $\rho \in B_X$ olmak üzere

$$\rho^{-1} = \{ (x, y) \in X \times X : (y, x) \in \rho \}$$

bağntısına ρ nun **ters bağntısı (tersi)** ve

$$\begin{aligned} \text{dom}(\rho) &= \{ x \in X : \exists y \in X \text{ için } (x, y) \in \rho \}, \\ x\rho &= \{ y \in X : (x, y) \in \rho \}, \\ \text{im}(\rho) = X\rho &= \{ y \in X : \exists x \in X \text{ için } (x, y) \in \rho \} \text{ ve} \\ y\rho^{-1} &= \{ x \in X : (x, y) \in \rho \} \end{aligned}$$

kümelerine de sırasıyla ρ bağıntısının **tanım kümesi**, $x \in X$ in ρ **altındaki görüntü kümesi**, ρ bağıntısının **görüntü kümesi** ve $y \in X$ in ρ **altındaki ters-görüntü kümesi** denir. Dikkat edilirse $\forall \alpha, \beta \in B_X$ için

- i) $\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \text{dom}(\alpha) \subseteq \text{dom}(\beta)$ ve $\text{im}(\alpha) \subseteq \text{im}(\beta)$,
- ii) $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$ ve
- iii) $\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \alpha^{-1} \subseteq \beta^{-1}$

olduğu kolayca görülebilir.

Tanım 2.2.4. $r, s \in B_X$ için;

$$r \circ s = \{ (x, y) \in X \times X : \exists z \in X \text{ için } (x, z) \in r \text{ ve } (z, y) \in s \}$$

şeklinde tanımlanan ‘o’ bileşke işlemi ile B_X bir yarıgruptur. Bu yarıgruba **bağıntılar yarıgrubu** denir.

Tanım 2.2.5. X boş olmayan bir küme ve r, X üzerinde bir bağıntı olsun.

- i. $\Delta_X \subseteq r$ ise r ya **yansımali bağıntı** denir.
- ii. $r = r^{-1}$ ise r ya **simetrik bağıntı** denir.
- iii. $r \circ r \subseteq r$ ise r ya **geçişmeli bağıntı** denir.
- iv. $r \circ r^{-1} = \Delta_X$ ise r ya **ters simetrik bağıntı** denir.

Eğer r bağıntısı yansımali, simetrik ve geçişmeli bir bağıntı ise r ya X üzerinde bir **denklik bağıntısı** denir.

r yansımali ve geçişmeli bir bağıntı olsun. O halde

$$r = \Delta_X \text{ or } \exists r \text{ or } \exists r \text{ or } \exists r$$

Ayrıca $r \text{ or } \exists r$ olup $r = r \text{ or } = r^2$ olur.

Eğer r bir denklik bağıntısı ise r yansımali olup

$$\Delta_X \exists r \exists X = \text{dom}(\Delta_X) \exists \text{dom}(r) \exists X$$

$$X = \text{im}(\Delta_X) \exists \text{im}(r) \exists X$$

olup $\text{dom}(r) = \text{im}(r) = X$ olur.

2.3. Green Denklik Bağıntıları

Tanım 2.3.1. S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. S nin a elemanını içeren en küçük sol, sağ ve iki taraflı idealleri sırasıyla

$$\begin{aligned} S^1 a &= Sa \cup \{a\} = \{xa : x \in S^1\}, \\ aS^1 &= aS \cup \{a\} = \{ay : y \in S^1\} \text{ ve} \\ S^1 aS^1 &= SaS \cup Sa \cup aS \cup \{a\} = \{xay : x, y \in S^1\} \end{aligned}$$

olur. S üzerinde tanımlanan

$$\begin{aligned} L &= \{(a, b) \in S \times S : S^1 a = S^1 b\}, \\ R &= \{(a, b) \in S \times S : aS^1 = bS^1\} \text{ ve} \\ J &= \{(a, b) \in S \times S : S^1 aS^1 = S^1 bS^1\} \end{aligned}$$

bağıntılarına sırasıyla **sol-Green bağıntısı (L-Green)**, **sağ-Green bağıntısı (R-Green)** ve **Green bağıntısı (J-Green)** denir. Bu bağıntıların birer denklik bağıntısı olduğu açıktır.

Önerme 2.3.2. S bir yarıgrup ve $a, b \in S$ olsun.

- i) $a L b \Leftrightarrow a = xb$ ve $b = ya$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ vardır.
- ii) $a R b \Leftrightarrow a = bx$ ve $b = ay$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ vardır.
- iii) $a J b \Leftrightarrow a = xby$ ve $b = uav$ olacak şekilde $x, y, u, v \in S^1$ vardır.

İspat: Howie (1995), Proposition 2.1.1'e bakınız. ■

Önerme 2.3.3. S yarıgrubu üzerindeki sol-Green bağıntısı L ve sağ-Green bağıntısı R bileşke işlemine göre değişmeli, yani $L \circ R = R \circ L$ dir.

İspat: Howie (1995), Proposition 2.1.3'e bakınız. ■

Tanım 2.3.4. S yarıgrubu üzerindeki sol-Green bağıntısı L ve sağ-Green bağıntısı R yardımı ile tanımlanan

$$H = L \cap R$$

denklik bağıntısına **H-Green bağıntısı** ve L ile R bağıntılarını içeren en küçük denklik bağıntısına da **D-Green bağıntısı** denir. O halde

$$D = (L \cup R)^e$$

olur. L ve R bağıntıları simetrik ve yansılmalı iki bağıntı olduğundan

$$(L \cup R) = (L \cup R)^{-1}$$

$$\Delta_S \subseteq L \cup R$$

$$(L \cup R) \cup (L \cup R)^{-1} \cup \Delta_S = L \cup R$$

olup $L \subseteq L \circ R$, $R \subseteq L \circ L$ ve $L \circ R = R \circ L$ olduğu elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} (L \cup R) \circ (L \cup R) &= (L \circ L) \cup (L \circ R) \cup (R \circ L) \cup (R \circ R) \\ &= L \cup (L \circ R) \cup (L \circ R) \cup R \\ &= L \circ R \end{aligned}$$

ve

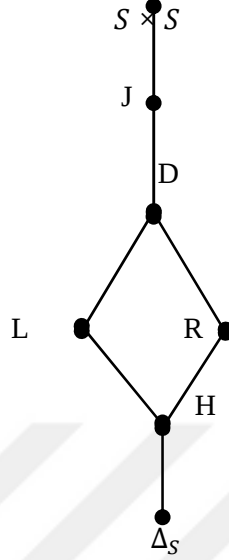
$$(L \cup R) \cup (L \circ R) = L \cup [R \cup (L \circ R)] = L \circ R$$

olur. Dolayısıyla $\forall n \geq 2$ için $(L \cup R)^n = L \circ R$ olur. O halde

$$\begin{aligned} D &= (L \cup R)^e \\ &= [(L \cup R) \cup (L \cup R)^{-1} \cup 1_S]^\infty \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} [(L \cup R) \cup (L \cup R)^{-1} \cup 1_S]^n \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (L \cup R)^n = (L \cup R) \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} (L \cup R)^n \\ &= (L \cup R) \cup \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} L \circ R \right) = (L \cup R) \cup (L \circ R) \\ &= L \circ R \end{aligned}$$

olur.

Bir S yarıgrubu üzerindeki L , R , J , H ve D -Green denklik bağıntıları için $\Delta_X \subseteq H \subseteq L$, $R \subseteq D \subseteq J \subseteq S \times S$ olup aralarındaki bu ilişki aşağıdaki diyagram ile ifade edilebilir. Bu diyagrama **Hasse diyagramı** denir.



Şekil 2.1. Green denklik bağıntılarının Hasse diyagramı

Önerme 2.3.5. G bir grup ise $L = R = J = H = D = G \times G$ olur.

İspat: $\forall a, b \in G$ için

Şekil 2.1. Green denklik bağıntılarının Hasse diyagramı

Önerme 2.3.5. G bir grup ise $L = R = J = H = D = G \times G$ olur.

İspat: $\forall a, b \in G$ için

$$a = ae = a(b^{-1}b) = (ab^{-1})b$$

$$b = be = b(a^{-1}a) = (ba^{-1})a$$

olur. $x = ab^{-1} \in G$ ve $y = ba^{-1} \in G$ şeklinde alınırsa $a = xb$ ve $b = ya$ olacak olup $\forall a, b \in G$ için aLb yani $L = G \times G$ olur. Benzer şekilde $R = G \times G$ ve dolayısıyla $L = R = J = H = D = G \times G$ olur. ■

Önerme 2.3.6. S değişmeli bir yarıgrup ise $L = R = H = D$ olur.

İspat: aLb ise $a = xb$ ve $b = ya$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ var olup S değişmeli olduğundan $a = bx$ ve $b = ay$ olup aRb olur. Dolayısıyla $L \subseteq R$ olur. Benzer şekilde $R \subseteq L$ ve dolayısıyla $L = R = H = D$ olur. ■

Önerme 2.3.7. S bir sonlu yarıgrup ise $D = J$ olur.

İspat: Howie (1995), Proposition 2.1.4'e bakınız. ■

Tanım 2.3.8. S yarıgrubu üzerindeki J, D, L, R ve H -Green denklik bağıntılarının denklik sınıflarının kümeleri sırasıyla $S/J, S/D, S/L, S/R, S/H$ ile gösterilir. Ayrıca $a \in S$ için a yı içeren J, D, L, R ve H -Green denklik sınıfları sırasıyla J_a, D_a, L_a, R_a ve H_a ile gösterilir. Bu durumda

$$H_a \subseteq L_a \subseteq D_a, \quad H_a \subseteq R_a \subseteq D_a \quad \text{ve} \quad H_a = L_a \cap R_a$$

olduğu ve D -Green denklik bağıntısının tanımından dolayı da

$$aDb \Leftrightarrow R_a \cap L_b \neq \emptyset \Leftrightarrow L_a \cap R_b \neq \emptyset$$

olduğu açıktır. Dolayısıyla D -Green denklik sınıfı D , ayrık L -Green denklik ve R - Green denklik sınıflarının birleşimi olup D sınıfı, her satırı bir R -sınıfını, her sütunu bir L -sınıfını ve her hücresi de bir H -sınıfını temsil eden bir yumurta kutusu olarak düşünülür.

	Da		La		
Ra		Ha			

Şekil 2.2. Bir D-Green denklik sınıfı örneği

Teorem 2.3.9. S bir yarıgrup olmak üzere $R \in S/R$, $L \in S/L$ ve $a, b \in S$ olsun.

- i) Eğer $(a, b) \in R$ ise $as = b$ ve $bt = a$ olacak şekilde $s, t \in S^1$ var olup

$$\rho_s: L_a \rightarrow L_b, x \rightarrow xs \quad \text{ve} \quad \rho_t: L_b \rightarrow L_a, y \rightarrow yt$$

şeklinde tanımlanan ρ_s ve ρ_t dönüşümleri birbirinin tersi olan iki bire-bir ve örten dönüşümlerdir. Ayrıca ρ_s , L_a daki her bir H-sınıfını L_b de bu H-sınıfının bulunduğu R-sınıfındaki H-sınıfına eşler. Benzer şekilde, ρ_t de L_b deki her bir H-sınıfını L_a da bu H-sınıfının bulunduğu R-sınıfındaki H-sınıfına eşler.

- ii) Eğer $(a, b) \in L$ ise $sa = b$ ve $tb = a$ olacak şekilde $s, t \in S^1$ var olup

$$\lambda_s: R_a \rightarrow R_b, x \rightarrow sx \quad \text{ve} \quad \lambda_t: R_b \rightarrow R_a, y \rightarrow ty$$

şeklinde tanımlanan λ_s ve λ_t dönüşümleri birbirinin tersi olan iki bire-bir ve örten dönüşümlerdir. Ayrıca λ_s , R_a daki her bir H-sınıfını R_b de bu H-sınıfının bulunduğu L-sınıfındaki H-sınıfına eşler. Benzer şekilde, λ_t de R_b deki her bir H-sınıfını R_a da bu H-sınıfının bulunduğu L-sınıfındaki H-sınıfına eşler.

İspat: Howie (1995), Lemma 2.2.1 ve Lemma 2.2.2'ye bakınız. ■

Sonuç 2.3.10. H_a ve H_b aynı D -sınıfında iki H -sınıfı olmak üzere $|H_a| = |H_b|$ olur.

İspat: Howie (1995), Lemma 2.2.3'e bakınız. ■

Sonuç 2.3.11. S bir yarıgrup olsun. Eğer H, S de bir H -sınıfı ise $H^2 \cap H = \emptyset$ veya $H^2 = H$ olup bu durumda H, S nin bir alt grubudur.

İspat: Howie (1995), Teorem 2.2.5'e bakınız. ■

Sonuç 2.3.12. S bir yarıgrup ve H, S de bir H -sınıfı olsun. Eğer H bir idempotent içeriyor ise S nin bir alt grubudur. ■

Sonuç 2.3.13. Bir H -sınıfı en fazla 1 tane idempotent içerir. ■

2.4. Regülerlik

Tanım 2.4.1. S bir yarıgrup ve $a \in S$ olmak üzere $axa = a$ olacak şekilde $\exists x \in S$ varsa a ya **regüler eleman** denir. Tüm elemanları regüler olan bir yarıgruba da **regüler yarıgrup** denir.

Önerme 2.4.2. $a \in S$ bir regüler eleman ise $\forall x \in L_a$ ve $\forall x \in R_a$ da regülerdir. Bunun bir sonucu olarak, $\forall x \in D_a$ da regülerdir ve D_a ya **regüler $\mathcal{D}$ -sınıfı** denir.

İspat: $a \in S$ regüler ve $b \in L_a$ ise $axa = a$, $yb = a$ ve $za = b$ olacak şekilde $x \in S$ ve $y, z \in S^1$ vardır. Buradan

$$b = za = z(axa) = (za)x(yb) = b(xy)b$$

olup $(xy \in S)$ b de regülerdir. Benzer şekilde $\forall x \in R_a$ da regülerdir. ■

Önerme 2.4.3. Regüler bir $\mathcal{D}$ -sınıfındaki her bir L-sınıfı ve her bir R-sınıfı en az bir idempotent içerir.

İspat: Howie (1995), Proposition 2.3.2'ye bakınız. ■

Önerme 2.4.4. $e \in S$ bir idempotent eleman ise e, L_e de bir sağ birim eleman ve R_e de bir sol birim elemandır.

İspat: Howie (1995), Proposition 2.3.3'e bakınız. ■

Tanım 2.4.5. $a \in S$ olmak üzere $axa = a$ ve $xax = x$ olacak şekilde $x \in S$ varsa a ya bir **tersinir eleman**, x e de a nın bir **tersi** denir. a nın tüm terslerinin kümesi

$$V(a) = \{x \in S : axa = a, xax = x\}$$

olur.

Önerme 2.4.6. $a \in S$ için a nın bir tersi vardır $\Leftrightarrow a$ regülerdir.

İspat: Howie (1995), sayfa:51'e bakınız. ■

Teorem 2.4.7. S bir yarıgrup, D bir regüler $\mathcal{D}$ -sınıfı ve $a \in D$ olsun.

- (i) Eğer $a' \in V(a)$ ise $a' \in D$ olur ve iki H-sınıfı, $R_a \cap L_{a'}$ ile $L_a \cap R_{a'}$ sırasıyla idempotent olan aa' ve $a'a$ elemanlarını içerirler.
- (ii) Bir $b \in D$ için $R_a \cap L_b$ ve $L_a \cap R_b$ sırasıyla e ve f idempotent elemanlarını içeriyorsa öyle bir $a^* \in H_b$ vardır ki $aa^* = e$, $a^*a = f$ ve a^* , a nın tersidir.
- (iii) Hiç bir H-sınıfı a nın birden fazla tersini içeremez.

İspat: Howie (1995), Theorem 2.3.4'e bakınız. ■

Önerme 2.4.8. S regüler bir yarıgrup ve $a, b \in S$ olsun.

- (i) $a L b \Leftrightarrow a'a = b'b$ olacak şekilde $a' \in V(a)$ ve $b' \in V(b)$ vardır.
- (ii) $a R b \Leftrightarrow aa' = bb'$ olacak şekilde $a' \in V(a)$ ve $b' \in V(b)$ vardır.
- (iii) $a H b \Leftrightarrow a'a = b'b$ ve $aa' = bb'$ olacak şekilde $a' \in V(a)$ ve $b' \in V(b)$ vardır.

İspat: Howie (1995), Proposition 2.4.1'e bakınız. ■

2.5. Doğuray Kümeleri

Tanım 2.5.1. S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq X \subseteq S$ olmak üzere S nin X kümesini içeren tüm alt yarıgruplarının kesişimi bir alt yarıgrup olup bu alt yarıgruba S nin X tarafından doğurulan alt yarıgrubu denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir. Yani;

$$\langle X \rangle = \bigcap \{T : X \subseteq T \leq S\}$$

olur. $\langle X \rangle$, X kümesini içeren en küçük alt yarıgruptur.

Eğer $\langle X \rangle = S$ oluyorsa X e S nin bir **doğuray kümesi**, X in her bir elemanına bir **doğuray** ve S ye de X tarafından **doğurulan yarıgrup** denir. Eğer $S = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ şeklinde sonlu bir küme tarafından doğuruluyorsa S ye **sonlu doğuraylı yarıgrup** ve $S = \langle x \rangle$ oluyorsa S ye **monojenik (tek doğuraylı) yarıgrup** denir.

Önerme 2.5.2. $\langle X \rangle$, X üzerindeki tüm sonlu çarpımların kümesidir.

$$\langle X \rangle = \{x_1 x_2 \cdots x_n : n \in \mathbb{Z}^+; x_1, x_2, \dots, x_n \in X\}$$

İspat: $T = \{x_1x_2 \cdots x_n : n \in \mathbb{Z}^+; x_1, x_2, \dots, x_n \in X\}$ ve $x = x_1x_2 \cdots x_m$, $y = y_1y_2 \cdots y_n \in T$ olsun. $xy = x_1x_2 \cdots x_my_1y_2 \cdots y_n \in T$ olup T, X i içeren bir alt yarıgrup ve dolayısıyla $\langle X \rangle \subseteq T$ olur. Ayrıca, $\forall x_1x_2 \cdots x_n \in T$ için aynı zamanda $x_1x_2 \cdots x_n \in \langle X \rangle$ olup $T \subseteq \langle X \rangle$ olduğundan $T = \langle X \rangle$ olur. ■

Tanım 2.5.3. S , sonlu doğuraylı bir yarıgrup olmak üzere

$$\text{rank}(S) = \min\{|X| : S = \langle X \rangle \text{ ve } X \text{ sonlu}\}$$

pozitif tamsayısına S nin (**yarıgrup**) **rankı** denir. **Monoid rankı** ve **grup rankı** da benzer şekilde tanımlanır.

Tanım 2.5.4. S bir yarıgrup olsun. Eğer S , bazı idempotent elemanları tarafından doğuruluyorsa S ye **idempotent doğuraylı yarıgrup** ve bu durumda

$$\text{idrank}(S) = \min\{|A| : A \subseteq E(S) \text{ ve } S = \langle A \rangle\}$$

pozitif tamsayısına da S nin **idempotent rankı** denir.

2.6. Bazı Dönüşüm Yarıgrupları

Tanım 2.6.1. $\alpha \in B_X$ olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $|x\alpha| \leq 1$ ise α ya X üzerinde bir **kısmi dönüşüm** ve eğer $\forall x \in X$ için $|x\alpha| = 1$ ise α ya X üzerinde bir **(tam) dönüşüm** denir. $\alpha \in B_X$ bir kısmi dönüşüm ve $(x, y) \in \alpha$ ise $x\alpha = \{y\}$ yerine $x\alpha = y$ yazılır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \text{dom}(\alpha) &= \{x : \exists y \in X \text{ için } x\alpha = y\} \\ \text{im}(\alpha) = X\alpha &= \{y : \exists x \in X \text{ için } x\alpha = y\} \end{aligned}$$

olur. $\alpha \in B_X$ bir dönüşüm olmak üzere

$$\text{Ker}(\alpha) = \alpha\alpha^{-1} = \{(x, y) : x\alpha = y\alpha ; x, y \in X\}$$

şeklinde tanımlanan bağıntı X üzerinde bir denklik bağıntısı olup bu bağıntıya α **nin çekirdeği** denir.

X boş olmayan bir küme olmak üzere X üzerindeki tüm (tam) dönüşümlerin kümesi T_X ve tüm kısmi dönüşümlerin kümesi P_X , dönüşümlerin bileşke işlemi ile birer yarıgrup olup bu yarıgruplara sırasıyla **(tam) dönüşümler yarıgrubu** ve **kısmi dönüşümler yarıgrubu** denir. Ayrıca, $T_X \leq P_X$ olduğu açıktır.

Eğer X , n elemanlı sonlu bir küme ise genelliği bozmaksızın $X = X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ alınır ve T_X ve P_X sırasıyla T_n ve P_n şeklinde gösterilir.

X_n kümesi üzerindeki tüm bire-bir ve örten dönüşümlerin (permütasyonların) kümesi dönüşümlerin bileşkesi işlemi ile bir grup olup bu gruba **n -inci simetrik grup (permütasyonlar grubu)** denir ve S_n ile gösterilir.

Teorem 2.6.2. Dönüşümler yarıgrubu T_n regülerdir.

İspat: $a \in T_n$ ve $\text{im}(a) = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ olsun. " $1 \leq k \leq m$ için $b_k a = a_k$ olacak şekilde bir tek b_k seçelim. $b \in T_n$

$$ib = \begin{cases} b_k & , i = a_k \in \text{im}(a) \\ i & , \text{aksi halde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca bir $i \in X_n$ için $ia = a_k$ olacak şekilde bir $a_k \in \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ var olup

$$iaba = a_k ba = b_k a = a_k = ia$$

yani $aba = a$ olup T_n regülerdir. ■

Önerme 2.6.3. T_X bir regüler yarıgruptur.

İspat: Clifford ve Preston (1961), sayfa 33'e bakınız. ■

Teorem 2.6.4. Her sonlu yarıgrup S , $|S| = n$ olmak üzere T_n veya T_{n+1} in bir alt yarıgrubuna izomorftur.

İspat: Ganyushkin ve Mazorchuk (2009), Theorem 2.4.3'e bakınız. ■

Teorem 2.6.4. $\alpha, \beta \in P_n$ için

- i) $\text{im}(\alpha\beta) \subseteq \text{im}(\beta)$,
- ii) $\text{Ker}(\alpha) \subseteq \text{Ker}(\alpha\beta)$

olur.

İspat: i) $\alpha, \beta \in P_n$ olsun. O halde $\text{im}(\alpha\beta) = (\text{im}(\alpha))\beta \subseteq (X_n)\beta = \text{im}(\beta)$ olur.

ii) $(x, y) \in \text{Ker}(\alpha)$ olsun. O halde

$$x\alpha = y\alpha \Rightarrow (x\alpha)\beta = (y\alpha)\beta \Rightarrow x(\alpha\beta) = y(\alpha\beta)$$

olup $(x, y) \in \text{Ker}(\alpha\beta)$ olur. Buradan da $\text{Ker}(\alpha) \subseteq \text{Ker}(\alpha\beta)$ olduğu elde edilir. ■

$\alpha \in P_n$ ve $\text{im}(\alpha) = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ olsun. O halde $\text{Ker}(\alpha)$ nın denklik sınıfları $i = 1, \dots, r$ için $A_i = a_i\alpha^{-1}$ şeklindedir ve $\{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ X_n nin, $\text{Ker}(\alpha)$

denklik bağıntısına göre elde edilen parçalanıştır. Bunlar yardımıyla $\alpha \in T_n$ dönüşümünü

$$i = 1, \dots, r \text{ için } A_i \alpha = a_i$$

şeklinde ya da

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_r \\ a_1 & a_2 & \dots & a_r \end{pmatrix} \text{ veya kısaca } \alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ a_i \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterebiliriz.

Benzer şekilde, $\alpha \in P_n$ ve $\text{im}(\alpha) = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ olsun. $i = 1, \dots, r$ için $A_i = a_i \alpha^{-1}$ ve $X_n \setminus \bigcup_{i=1}^r A_i = A_{r+1}$ olmak üzere $\alpha \in P_n$ kısmi dönüşümünü

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_r & A_{r+1} \\ a_1 & \dots & a_r & - \end{pmatrix} \text{ veya } \alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_r \\ a_1 & a_2 & \dots & a_r \end{pmatrix} \text{ veya kısaca } \alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ a_i \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterebiliriz.

Tanım 2.6.5. $\emptyset \neq X$ kümesinin bir parçalanışı $\{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ olsun. $\forall i = 1, \dots, r$ için A_i kümesinden bir tek $a_i \in A_i$ seçilerek elde edilen $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ kümesine $\{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ parçalanışının bir **transversali** denir.

Önerme 2.6.6. $\alpha \in T_n$ nin bir idempotent eleman olması için gerek ve yeter koşul $\forall y \in \text{im}(\alpha)$ için $y\alpha = y$ olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) $\alpha \in T_n$ bir idempotent eleman ve $y \in \text{im}(\alpha)$ olsun. O zaman $x\alpha = y$ olacak şekilde $\exists x \in X_n$ vardır. Ayrıca α bir idempotent eleman olduğundan $\forall z \in X_n$ için $z\alpha^2 = z\alpha$ olup

$$y\alpha = (x\alpha)\alpha = x\alpha^2 = x\alpha = y$$

olduğu elde edilir.

($\Leftarrow$) $\alpha \in T_n$ ve $\forall y \in \text{im}(\alpha)$ için $y\alpha = y$ olsun. $x \in X_n$ için $x\alpha \in \text{im}(\alpha)$ olup $x\alpha = x$ olduğundan

$$x\alpha^2 = (x\alpha)\alpha = x\alpha = x$$

olur. Dolayısıyla $\alpha = \alpha^2$ olup α bir idempotent elemandır. ■

Teorem 2.6.7. $\alpha, \beta \in P_n$ için

- i) $\alpha \mathcal{L} \beta \Leftrightarrow \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$,
- ii) $\alpha \mathcal{R} \beta \Leftrightarrow \text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ ve $\text{Dom}(\alpha) = \text{Dom}(\beta)$,
- iii) $\alpha \mathcal{D} \beta \Leftrightarrow |\text{im}(\alpha)| = |\text{im}(\beta)|$

şeklindedir.

İspat: Ganyushkin ve Mazorchuk (2009), Theorem 4.5.1'e bakınız. ■

Teorem 2.6.8. $\alpha, \beta \in T_n$ için

- i) $\alpha \mathcal{L} \beta \Leftrightarrow \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$,
- ii) $\alpha \mathcal{R} \beta \Leftrightarrow \text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ ve
- iii) $\alpha \mathcal{D} \beta \Leftrightarrow |\text{im}(\alpha)| = |\text{im}(\beta)|$

şeklindedir.

İspat: Ganyushkin ve Mazorchuk (2009), Theorem 4.5.1'e bakınız. ■

Tanım 2.6.9. $\alpha \in P_n$ olsun. Eğer bir $x \in X_n$ için $x\alpha = x$ ise x e α nın bir **sabit noktası** denir ve tüm sabit noktaların kümesi

$$\text{Fix}(\alpha) = \{x \in X_n : x\alpha = x\}$$

şeklinde gösterilir. Aksi halde, **sabit olmayan nokta** denir ve tüm sabit olmayan noktaların kümesi

$$\text{Shift}(\alpha) = \{x \in X_n : x\alpha \neq x\}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.6.10. $n, r \geq 2$ tamsayıları için $\alpha \in S_n$ ve $\text{Shift}(\alpha) = \{i_1, \dots, i_r\}$ olsun. Eğer

$$i_1\alpha = i_2, i_2\alpha = i_3, \dots, i_{r-1}\alpha = i_r \text{ ve } i_r\alpha = i_1$$

ise α ya bir r – **devir** denir ve $\alpha = (i_1 i_2 \dots i_r)$ şeklinde yazılır. Uzunluğu 2 olan bir devire, yani bir 2 – devire, bir **transpozisyon** denir.

Teorem 2.6.11. Her permütasyon transpozisyonların bir çarpımı şeklinde yazılabilir.

İspat: Rotman (1995), Theorem 1.3’e bakınız. ■

Teorem 2.6.12. $n > 2$ ve $\alpha = (1\ 2), \beta = (1\ 2 \dots n) \in S_n$ olmak üzere $S_n = \langle \alpha, \beta \rangle$ dir.

İspat: Howie (1995), 1.9 EXERCISES 6’ya bakınız. ■

Tanım 2.6.13. $n, r \geq 2$ tamsayıları için $\alpha \in T_n$ ve $\text{Shift}(\alpha) = \{i_1, \dots, i_r\}$ olsun. Eğer

$$i_1\alpha = i_2, i_2\alpha = i_3, \dots, i_{r-1}\alpha = i_r, i_r\alpha = i_{r+1} \text{ ve } i_{r+1}\alpha = i_{r+1}$$

ise $\alpha = \|i_1 i_2 \dots i_r\|$ şeklinde yazılır.

Teorem 2.6.14. $n > 2$, $\alpha = (1\ 2)$, $\beta = (1\ 2 \dots n)$ ve $\theta = \|1\ 2\|$ olmak üzere $T_n = \langle \alpha, \beta, \theta \rangle$ olur.

İspat: Howie (1995), 1.9 EXERCISES 7'ye bakınız. ■

Teorem 2.6.15. $n > 2$, $\alpha = (1\ 2)$, $\beta = (1\ 2 \dots n)$, $\theta = \|1\ 2\|$ ve

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ - & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

olmak üzere $P_n = \langle \alpha, \beta, \theta, \varepsilon \rangle$ olur.

İspat: Howie (1995), 1.9 EXERCISES 13'e bakınız. ■

2.7. Sıra Koruyan (Tekil) Dönüşümler Yarıgrubu

Tanım 2.7.1. T_n ve S_n sırasıyla $X_n = \{1, \dots, n\}$ kümesi üzerindeki (tam) dönüşümler yarıgrubu ve permütasyonlar grubu olsun. $T_n \setminus S_n$ kümesinin T_n nin bir alt yarıgrubu olduğu kolayca gösterilebilir. Bu alt yarıgruba **(tekil) dönüşümler yarıgrubu** denir ve $Sing_n$ veya ST_n ile gösterilir. Ayrıca

$$O_n = \{\alpha \in Sing_n : x \leq y \Rightarrow x\alpha \leq y\alpha \ (\forall x, y \in X_n)\}$$

kümesi de T_n nin bir alt yarıgrubu olup bu alt yarıgruba X_n kümesi üzerindeki **sıra-koruyan (tekil) dönüşümler yarıgrubu** denir. O_n yarıgrubunun T_n nin bir

regüler alt yarıgrubu olduğu kolayca gösterilebilir. Howie (1995), Proposition 2.4.2'den aşağıdaki teorem kolayca elde edilir.

Teorem 2.7.2. $2 \leq r \leq n - 1$ ve $\alpha, \beta \in O_n$ için

- i) $\alpha L \beta \Leftrightarrow \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$,
- ii) $\alpha R \beta \Leftrightarrow \text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$,
- iii) $\alpha D \beta \Leftrightarrow |\text{im}(\alpha)| = |\text{im}(\beta)|$ ve
- iv) $\alpha H \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$

şeklindedir. ■

Teorem 2.7.2 nin sonucu olarak O_n yarıgrubunun $n - 1$ tane D-Green denklik sınıfı vardır. Bunlar, $1 \leq k \leq n - 1$ olmak üzere

$$D_k = \{\alpha \in O_n : |\text{im}(\alpha)| = k\}$$

şeklindedir. Dikkat edilirse O_n yarıgrubunun her bir H -sınıfı sadece 1 elemandan oluşur.

Tanım 2.7.3. X boş olmayan bir küme ve $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$, X kümesinin herhangi bir parçalanışı olsun. Eğer

$$\forall x \in A_i \text{ ve } \forall x \in A_{i+1} \ (1 \leq i \leq k - 1) \text{ için } x < y$$

oluyorsa $A_i < A_{i+1}$ şeklinde göstereceğiz. Bu durumda $\mathcal{A}$ ya bir **sıralı parçalanış** diyeceğiz ve $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_k)$ şeklinde yazacağız. Ayrıca, $\emptyset \neq C \subseteq X_n$ için eğer

$$x, y \in C \text{ ve } x \leq z \leq y \Rightarrow z \in C$$

oluyorsa C ye de bir **konveks küme** diyeceğiz.

Şimdi bu tanımlar yardımıyla O_n deki elemanların çekirdek sınıflarının bazı özelliklerini verelim.

Tanımı gereği görüntü kümesinin eleman sayısı k ($1 \leq k \leq n - 1$) olan bir $\alpha \in O_n$ sıra-koruyan dönüşümünün çekirdek sınıflarının k tane konveks küme olduğu kolayca görülebilir. Böylece, $\alpha \in O_n$ dönüşümünün çekirdek sınıfları

$$A_1 = \{1, \dots, x_1\}, A_2 = \{x_1 + 1, \dots, x_2\}, \dots, A_k = \{x_{k-1} + 1, \dots, n\}$$

olacak şekilde $x_1, \dots, x_{k-1} \in X_n$ vardır ve $A_1\alpha < \dots < A_k\alpha$ şeklindedir. Başka bir ifade ile $(A_1, \dots, A_k), X_n$ nin konveks kümelerden oluşan bir sıralı parçalanışıdır. Bu durumda bir

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 7 \end{pmatrix} \in O_n$$

elemanı

$$\alpha = \begin{pmatrix} \{1\} & \{2,3,4\} & \{5,6\} & \{7\} \\ 2 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

2.8. Grafikler ve Orbitler

Tanım 2.8.1. Köşeler kümesi olarak adlandırdığımız ve $V(G)$ şeklinde gösterdiğimiz boş olmayan sonlu bir küme ile **kenarlar listesi** olarak adlandırdığımız ve $E(G)$ şeklinde gösterdiğimiz, köşeler kümesinin sırasız

ikililerinin oluşturduğu listeden oluşan yapıya bir **grafik** denir. Bu grafik $G = (V(G), E(G))$ ile gösterilir.

Bir G grafiğinin köşeleri $a, b, u, v, x, y, z, \dots, 1, 2, 3, \dots$ gibi sembollerle ve ayrıca u, v iki köşe olmak üzere, G grafiğinde u ile v köşesini birleştiren bir kenar varsa bu kenar $\{u, v\}$ ile gösterilir. Eğer G grafiğinde u ile v köşelerini birleştiren 1 den çok kenar varsa bu kenarlara **katlı kenar** ve $\{u, u\}$ kenarına da bir **halka** denir.

Tanım 2.8.2. $G = (V(G), E(G))$ bir grafik olsun. $\{a_1, \dots, a_k\} \subset V(G)$ olmak üzere $\{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \dots, \{a_{k-2}, a_{k-1}\}, \{a_{k-1}, a_k\} \subset E(G)$ ise $a_1 a_2 \dots a_k$ şeklinde köşelerin bir dizisi var olup bu diziye a_1 ve a_k arasında bir **patika** denir.

Özel olarak a dan

a ya olan bir patikaya bir **devir** denir.

Tanım 2.8.3. Herhangi iki köşesi arasında bir patika olan grafiğe **bağlantılı grafik**, aksi halde **bağılantısız grafik** denir.

Tanım 2.8.4. Devir içermeyen bağlantılı bir grafiğe bir **ağaç** denir. Bir ağaçta iki köşe arasında bir ve yalnız bir tek kenar vardır.

Tanım 2.8.5. $a \in T_n$ olsun. X_n üzerinde

$$x, y \in X_n \text{ ve } r, q \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0\} \text{ olmak üzere } x \circ y = x a^r \circ y a^q$$

şeklinde tanımlanan $\circ$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısının her bir denklik sınıfına a nın bir **orbiti** denir.

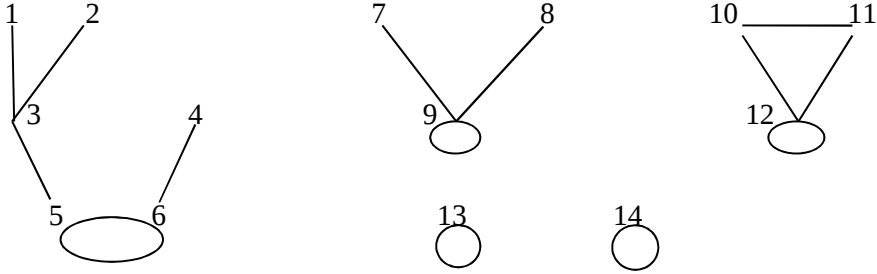
Tanım 2.8.6. $a \in T_n$ dönüşümünün grafiği Γ_a ile gösterilir. Γ_a grafiği, köşeler kümesi $V(\Gamma_a) = X_n$ ve kenarlar listesi $E(\Gamma_a) = \{ \{x, xa\} : x \in X_n \}$ olan grafiktir.

Aslında $a \in T_n$ dönüşümünün orbitleri, bu grafikteki her bir bağlantılı parça olarak düşünülebilir. Bir orbit, bir devir ve bu devire eklenmiş ağaçlardan oluşur. Eğer eklenmiş hiç ağaç yoksa bu orbite **devirli orbit**, aksi halde **devirli olmayan orbit** denir. Bir devirli orbit W de devir üzerindeki köşelerin kümesi $K(W)$ ile gösterilir.

Örnek 2.8.7. $n = 14$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 3 & 3 & 5 & 6 & 6 & 5 & 9 & 9 & 9 & 11 & 12 & 10 & 13 & 14 \end{pmatrix}$$

dönüşümünün grafiği ve orbitleri aşağıdaki gibidir.



$$W_1 = \{1,2,3,4,5,6\}, W_2 = \{7,8,9\}, W_3 = \{10,11,12\}, W_4 = \{13\}, W_5 = \{14\}$$

Bu örnekteki devirli orbitler W_3 , W_4 ve W_5 tir. Daha da özel olarak W_4 ve W_5 birer halka orbitlerdir.

2.9. *-Green Bağlılıları

Tanım 2.9.1. S yarıgrubu üzerinde L^* ve R^* bağılılıları sırasıyla

$$(a, b) \hat{L}^* \hat{U} S \text{ nin alt yarıgrup olduğu bir üst yarıgrupta } (a, b) \hat{L}$$

$$(a, b) \hat{R}^* \hat{U} S \text{ nin alt yarıgrup olduğu bir üst yarıgrupta } (a, b) \hat{R}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, Green denklik bağılılılarında olduğu gibi $D^* = L^* \circ R^*$ ve $H^* = L^* \cap R^*$ şeklinde tanımlanır. (*-Green Bağlılıları hakkında daha fazla bilgi için J . B . Fountain (1982) ye bakınız.)

Önerme 2.9.2. S yarıgrubu üzerinde

$$L^* = \{ (a, b) \in S \times S : (" x, y \hat{S}^1) ax = ay \hat{U} bx = by \}$$

$$R^* = \{ (a, b) \in S \times S : (" x, y \hat{S}^1) xa = ya \hat{U} xb = yb \}$$

olur.

İspat: İspat için J . B . Fountain (1982) Lemma 1.1' e bakınız. ■

3. SIRA-KORUYAN VE AZALAN (ARTAN) TEKİL DÖNÜŞÜMLER

YARIGRUBU

Sebiha MAVRUK

3. SIRA-KORUYAN ve AZALAN (ARTAN) TEKİL DÖNÜŞÜMLER YARIGRUBU

Tanım 3.1. O_n, X_n üzerindeki sıra-koruyan dönüşümler yarıgrubu olmak üzere

$$C_n^- = \{a \in O_n : ("x \hat{X}_n) xa \in x\},$$

$$C_n^+ = \{a \in O_n : ("x \hat{X}_n) xa \leq x\}$$

kümeleri de dönüşümlerin bileşke işlemiyle X_n üzerinde birer yarıgrup olup bu yarıgruplara sırasıyla **sıra-koruyan ve azalan tekil dönüşümler yarıgrubu** ve **sıra-koruyan ve artan tekil dönüşümler yarıgrubu** denir. Herhangi bir $a \in O_n$ için,

$$xa^- = \begin{cases} xa, & xa \in x \\ x, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$xa^+ = \begin{cases} xa, & xa \leq x \\ x, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Buradan $a^- \in C_n^-$, $a^+ \in C_n^+$ ve

$$a = a^+ a^- = a^- a^+$$

olduğu açıktır. Ayrıca herhangi bir $a \in T_n$ elemanı bir $1 \leq i \leq n$ için eğer

$$x\alpha = \begin{cases} j & x = i \\ x & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

3. SIRA-KORUYAN VE AZALAN (ARTAN) TEKİL DÖNÜŞÜMLER

YARIGRUBU

Sebiha MAVRUK

ise α bir idempotent olup bu idempotenti $\alpha = [i \rightarrow j]$ şeklinde göstereyim. (Gösterimde kolaylık olması açısından, $[n \otimes n + 1]$ veya $[1 \otimes 0]$ yazıldığında $\mathcal{AE}$ (boş eşleme) anlaşılacaktır.) Ayrıca

$$E_{n-1}^+ = \{[i \rightarrow j]: 1 \leq i < j \leq n\}$$

$$E_{n-1}^- = \{[i \rightarrow j]: 1 \leq j < i \leq n\}$$

olsun. $E(D_{n-1}) = E_{n-1}^+ \dot{\cup} E_{n-1}^-$ olduğu açıktır.

Önerme 3.2. $a \in C_n^+$ olsun. Eğer bir $1 \leq k \leq n$ için $ka = k$ ise

$$a \in E_{n-1}^+ \setminus \{[k \otimes k + 1]\} \text{ ğıdır.}$$

olur.

İspat: $a \in C_n^+ \cap O_n$ olsun. $\text{Ker}(a)$ ya göre elde edilen denklik sınıfları X_n nin konveks parçalanışı olup $1 \leq r \leq n$, $A_i = \{a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+1} - 1\}$ ($1 \leq i \leq r - 1$) , $A_r = \{a_r, a_{r+1}, \dots, n\}$, $1 = a_1 < a_2 < \dots < a_r$ ve $b_1 < b_2 < \dots < b_r$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_r \\ b_1 & b_2 & \dots & b_r \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Ayrıca $a \in C_n^+$ olup

$$a_i = \min A_i \leq \max A_i \leq (\max A_i) a = b_i, \quad (1 \leq i \leq r - 1)$$

$$a_r = \min A_r \leq \max A_r (= n) \leq (\max A_r) a = b_r$$

3. SIRA-KORUYAN VE AZALAN (ARTAN) TEKİL DÖNÜŞÜMLER

YARIGRUBU

Sebiha MAVRUK

şelkinde tanımlayalım. Buradan, $1 \leq i \leq r-1$ için $a_i \leq b_i$ ve $b_r = n$ olduğu elde edilir. e , X_n üzerindeki birim permütasyon olmak üzere $1 \leq i < j < n$ için

$$E^+(i, j) = [i \otimes i+1][i+1 \otimes i+2] \cdots [j-1 \otimes j],$$

$$E^+(i, i) = e$$

olarak tanımlansın. Ayrıca,

$$b = E^+(a_r, b_r) E^+(a_{r-1}, b_{r-1}) \cdots E^+(a_1, b_1)$$

olsun. Herhangi bir $x \in X_n$ için $x \in A_s$ ($1 \leq s \leq r$) olsun. Eğer $k = n$ ise

$$xb = xE^+(a_r, b_r) E^+(a_{r-1}, b_{r-1}) \cdots E^+(a_1, b_1) = b_s = xa$$

olup $a = b \in \mathcal{AE}_{n-1}^+ \setminus \{e\} \cap \{[n \otimes n+1]\} \cap \{e\}$ olur. Ayrıca $a \in C_n^+ \cap O_n \cap Sing_n$ olup $a \in \mathcal{AE}_{n-1}^+ \setminus \{[n \otimes n+1]\}$ olur. Eğer $1 \leq k \leq n-1$ ise $ka = k$ olduğundan, bir $1 \leq j \leq r-1$ için $k \in A_j$ ve $b_j = k$ şeklindedir. $a \in C_n^+$ ve $b_j = \max A_j = k$ olup $a_{j+1} = \min A_j + 1 = k+1$ olur. Böylece $a_i \leq b_i$ olup

$$[k \otimes k+1] \in \{[a_i \otimes a_{i+1}], [a_{i+1} \otimes a_{i+2}], \dots, [a_b-1 \otimes b_i]\}$$

Eğer $a_i < b_i$ ise $E^+(a_i, b_i) = [a_i \otimes a_{i+1}][a_{i+1} \otimes a_{i+2}] \cdots [a_b-1 \otimes b_i]$; ve eğer $a_i = b_i$ ise $E^+(a_i, b_i) = e$ olsun. $1 \leq i \leq r$ için

$$E^+(a_i, b_i) \in \mathcal{AE}_{n-1}^+ \setminus \{[k \otimes k+1]\} \cap \{e\}$$

olur. O halde $a = b \in \mathcal{AE}_{n-1}^+ \setminus \{[k \otimes k+1]\} \cap \{e\}$ olur. Ayrıca

3. SIRA-KORUYAN VE AZALAN (ARTAN) TEKİL DÖNÜŞÜMLER

YARIGRUBU

Sebiha MAVRUK

$$\acute{a}E_{n-1}^+ \setminus \{ [k \circledast k + 1] \} \tilde{E} \{e\} \tilde{n} = \acute{a}E_{n-1}^+ \setminus \{ [k \circledast k + 1] \} \tilde{n} \tilde{E} \{e\}$$

ve $a \hat{\in} C_n^+ \hat{\in} O_n \hat{\in} Sing_n$ olduğundan $a \hat{\in} \acute{a}E_{n-1}^+ \setminus \{ [k \circledast k + 1] \} \tilde{n}$ olduğu elde edilir . ■

Önerme 3.3. $a \hat{\in} C_n^-$ olsun. Eğer $1 \leq k \leq n$ için $ka = k$ oluyor ise

$$a \hat{\in} \acute{a}E_{n-1}^- \setminus \{ [k \circledast k - 1] \} \tilde{n}$$

olur.

İspat: Önerme 3.2 ye benzer şekilde ispatlanabilir. ■

Önerme 3.4. Herhangi bir $a \hat{\in} O_n$ için

- i. $1 \leq k \leq n$ olmak üzere eğer $ka \leq k$ ise $ka^+ = k$,
- ii. $1 \leq k \leq n$ olmak üzere eğer $ka \geq k$ ise $ka^+ = k$ olur.

İspat: Tanımdan kolayca görülmektedir. ■

Önerme 3.5. $s, t \in X_n$ için $M_{st} = \{ a \hat{\in} O_n : sa \leq s, ta \geq t \}$ şeklinde tanımlansın. O halde $n \geq 3$ için

$$M_{st} = \acute{a}E(J_{n-1}) \setminus \{ [s \circledast s + 1], [t \circledast t - 1] \} \tilde{n}$$

şeklindedir.

İspat: $P_{st} = \acute{a}E(J_{n-1}) \setminus \{ [s \circledast s + 1], [t \circledast t - 1] \} \tilde{n}$ olsun. M_{st} nin O_n nin bir altyarıgrubu olduğunu göstermek kolaydır. Ayrıca

3. SIRA-KORUYAN VE AZALAN (ARTAN) TEKİL DÖNÜŞÜMLER

YARIGRUBU

Sebiha MAVRUK

$E(J_{n-1}) \setminus \{[s \otimes s+1], [t \otimes t-1]\} \cap M_{st}$ olup $P_{st} = \hat{a}E(J_{n-1}) \setminus \{[s \otimes s+1], [t \otimes t-1]\} \cap M_{st}$ dir. Şimdi de $M_{st} \cap P_{st}$ olduğunu gösterelim. $a \in M_{st} \cap O_n$ olsun. O halde

$$a = a^+ a^- = a^- a^+ \text{ ve } sa^+ = s, ta^- = t$$

olur. $E(J_{n-1}) = E_{n-1}^+ \dot{\cup} E_{n-1}^-$ olup $a = a^+ a^- \in \hat{a}E_{n-1}^+ \setminus \{[s \otimes s+1]\}$ olur.

Böylece

$$\hat{a}(E_{n-1}^-) \setminus \{[t \otimes t-1]\} \cap \hat{a}E(J_{n-1}) \setminus \{[s \otimes s+1], [t \otimes t-1]\} \cap P_{st}$$

olur. ■

3. SIRA-KORUYAN VE AZALAN (ARTAN) TEKİL DÖNÜŞÜMLER
YARIGRUBU Sebiha MAVRUK



4. SIRA-KORUYAN DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARININ YEREL MAKSİMAL İDEMPOTENT DOĞURAYLI ALT YARIGRUPLARI Sebiha MAVRUK

4. SIRA-KORUYAN DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARININ YEREL MAKSİMAL İDEMPOTENT DOĞURAYLI ALT YARIGRUPLARI

Daha önce $2 \leq r \leq n - 1$ ve $\alpha, \beta \in O_n$ için

- i) $\alpha L \beta \Leftrightarrow \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta),$
- ii) $\alpha R \beta \Leftrightarrow \text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta),$
- iii) $\alpha D \beta \Leftrightarrow |\text{im}(\alpha)| = |\text{im}(\beta)|$ ve
- iv) $\alpha H \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$

olduğunu belirtmiştik. Ayrıca O_n yarıgrubunun $n - 1$ tane D-Green denklik sınıfının var olduğunu, bunların, $1 \leq k \leq n - 1$ olmak üzere,

$$D_k = \{\alpha \in O_n : |\text{im}(\alpha)| = k\}$$

şeklinde olduğunu ve her bir H -sınıfının sadece 1 elemandan oluştuğunu belirtmiştik.

Gomes ve Howie

$$E_{n-1} = \{\alpha \in O_n : |\text{im}(\alpha)| = n - 1, \alpha^2 = \alpha\}$$

şeklinde tanımlamaktadırlar. Bu kümenin defecti 1 olan $n - 1$ tane artan idempotent $[i \otimes i + 1] (i = 1, 2, 3, \dots, n - 1)$ ve $n - 1$ tane azalan idempotent $[i \otimes i - 1] (i = 2, 3, \dots, n)$ ten oluştuğu açıktır. ($\alpha \in T_n$ dönüşümünün **defecti** $\text{def}(\alpha) = |X_n| - |\text{im}(\alpha)|$ şeklinde tanımlanır.) Daha açık olarak

$$[i \otimes i + 1] = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i - 1 & i & i + 1 & \dots & n \\ 1 & \dots & i - 1 & i + 1 & i + 1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

4. SIRA-KORUYAN DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARININ YEREL MAKSİMAL
İDEMPOTENT DOĞURAYLI ALT YARIGRUPLARI Sebiha MAVRUK

$$[i \otimes i - 1] = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & i-1 & i-1 & i+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

şeklindedir. $a \in O_n$ olsun. Bir $x \in im(a)$ için elde edilen $ker(a)$ -denklik sınıfı xa^{-1} üç şekilde sınıflandırılır:

azalan blok: $x < \min xa^{-1}$,

artan blok: $x > \max xa^{-1}$,

sabit blok: $\min xa^{-1} \leq x \leq \max xa^{-1}$.

Örneğin,

$$\alpha = \begin{pmatrix} \{1, 2, 3, 4\} & \{5, 6, 7\} & \{8\} \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

için $5a^{-1}$ artan blok, $6a^{-1}$ kararlı blok ve $7a^{-1}$ azalan blok olur. $x \in im(a)$ için $xa^{-1} = [a, b] = \{i \in X_n : a \leq i \leq b\}$ olmak üzere

$$m_\alpha(x) = \max \{x - a, b - x, b - a\}$$

şekilinde tanımlansın. Örneğin,

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

için

$$2a^{-1} = [1, 3]; a = 1, b = 3, x = 2 \text{ olup } m_\alpha(2) = \max \{1, 1, 2\} = 2$$

$$7a^{-1} = [7, 7]; a = 7, b = 7, x = 7 \text{ olup } m_\alpha(7) = \max \{0, 0, 0\} = 0.$$

4. SIRA-KORUYAN DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARININ YEREL MAKSİMAL
İDEMPOİTENT DOĞURAYLI ALT YARIGRUPLARI Sebiha MAVRUK

Varsayalım ki $a \in O_n$ için $W_1, \dots, W_t$ devirli olmayan orbitler ve $W_{t+1}, \dots, W_{t+s}$ halka orbitler olsun. $1 \leq i \leq t$ için

$$xa_i = \begin{cases} xa, & \text{eğer } x \in W_i \text{ ise} \\ x, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman $a_i \in O_n$ ve $a = a_1 \cdots a_t$ olduğu açıktır. Örneğin,

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

olsun. Bu durumda devirli olmayan orbitler $W_1 = \{1,2,3\}$ ve $W_2 = \{4,5,6\}$ olup

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Buradan $a = a_1 a_2 = a_2 a_1$ olduğu kolayca görülür.

$a \in O_n$ nin bir tek devirli olmayan orbiti W var olsun. Dikkat edilirse

$$x \in \text{imb} - W \Leftrightarrow m_\beta(x) = 0$$

şeklindedir. Ayrıca W ayrık $xb^{-1} (x \in \text{imb} \cap W)$ bloklarının birleşimidir. Örneğin;

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

için devirli olmayan tek orbit $W = \{1,2,3\}$ olup

4. SIRA-KORUYAN DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARININ YEREL MAKSİMAL İDEMPOTENT DOĞURAYLI ALT YARIGRUPLARI Sebiha MAVRUK

$$\text{imb} = \{3,4,5\}, 3b^{-1} = \{1,2,3\} = W \text{ ve } \text{imb} \cap W = \{3\}$$

ve

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

için devirli olmayan tek orbit $W = \{1,2,3,4\}$ olup

$$\text{imb} = \{3,4,5,6\}, 4b^{-1} = \{3,4\} \text{ ve } \text{imb} \cap W = \{3,4\}$$

olur. $\text{im}(b) \cap W = \{b_1, b_2, \dots, b_r\}$ ($b_1 < b_2 < \dots < b_r$) olsun. W tek bir sabit noktaya sahip olup bu nokta b_i olsun, yani $b_i b = b_i$. Bu durumda

azalan bloklar : $b_{i+1}b^{-1}, \dots, b_rb^{-1}$;

artan bloklar : $b_1b^{-1}, \dots, b_{i-1}b^{-1}$;

sabit blok : b_ib^{-1}

olur. Buradan

$$m_{\alpha}^l(x) = \max \{x - y : y \in xa^{-1}, y \in x\}$$

$$m_{\alpha}^r(x) = \max \{y - x : y \in xa^{-1}, y \in x\}$$

olarak tanımlansın. Her bir b_jb^{-1} ($j = 1, 2, \dots, i-1$) artan bloğu için

$$I_j = [b_j - m_{\beta}(b_j) \otimes b_j - m_{\beta}(b_j)+1] \cdots [b_j - 1 \otimes b_j],$$

her bir b_lb^{-1} ($l = i+1, i+2, \dots, r$) azalan bloğu için

4. SIRA-KORUYAN DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARININ YEREL MAKSİMAL İDEMPOİTENT DOĞURAYLI ALT YARIGRUPLARI Sebiha MAVRUK

$$D_l = [b_l + m_\beta(b_l) \otimes b_l + m_\beta(b_l) - 1] \cdots [b_l + 1 \otimes b_l],$$

ve b_i b^{-1} sabit bloğu için

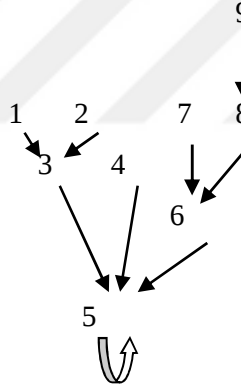
$$S^l = [b_i - m_\beta^l(b_i) \otimes b_i - m_\beta^l(b_i) + 1] \cdots [b_i - 1 \otimes b_i],$$

$$S^r = [b_i + m_\beta^r(b_i) \otimes b_i + m_\beta^r(b_i) - 1] \cdots [b_i + 1 \otimes b_i]$$

olarak tanımlansın. Örneğin,

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

dönüşümünün orbitleri



olup

$$3b^{-1} = \{ 1, 2 \}, \quad 5b^{-1} = \{ 3, 4, 5, 6 \}, \quad 6b^{-1} = \{ 7, 8 \}, \quad 8b^{-1} = \{ 9 \}$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$i) b_1 = 3$ için $j = 3, a = 1, b = 2$ olup

4. SIRA-KORUYAN DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARININ YEREL MAKSİMAL
İDEMPOİTENT DOĞURAYLI ALT YARIGRUPLARI Sebiha MAVRUK

$$m_{\beta}(3) = \{3 - 1, 2 - 3, 2 - 1\} = 2$$

$$I_1 = [1 \otimes 2][2 \otimes 3]$$

ii) $b_3 = 6$ için $j = 6, a = 7, b = 8$ olup

$$m_{\beta}(6) = \{6 - 7, 8 - 6, 8 - 7\} = 2$$

$$D_3 = [8 \otimes 7][7 \otimes 6]$$

iii) $b_4 = 8$ için $j = 8, a = b = 9$ olup

$$m_{\beta}(8) = \{8 - 9, 9 - 8, 9 - 9\} = 1$$

$$D_4 = [9 \otimes 8]$$

iv) $b_2 = 5$ için iki ayrı grup vardır. Bunlardan birincisi: $j = 5, a = 3, b = 4$ için

$$m_{\beta}^l(5) = \{5 - 3, 4 - 5, 4 - 3\} = 2,$$

ve ikincisi: $j = 5, a = b = 6$ için

$$m_{\beta}^r(5) = \{5 - 6, 6 - 5, 6 - 6\} = 1$$

olup

$$S^l = [3 \otimes 4][4 \otimes 5]$$

$$S^r = [6 \otimes 5]$$

şeklindedir. Dikkat edilirse

4. SIRA-KORUYAN DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARININ YEREL MAKSİMAL İDEMPOTENT DOĞURAYLI ALT YARIGRUPLARI Sebiha MAVRUK

$$\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

olur. Bu açıklamalardan sonra aşağıdaki önermeyi elde ederiz.

Önerme 4.1. $b = S^l I_{i-1} \cdots I_1 S^r D_{i+1} \cdots D_r$. ■

Tanım 4.2. S bir yarıgrup olmak üzere S üzerindeki her bir L^* -sınıfı ve her bir R^* -sınıfı bir idempotent eleman içeriyor ise S ye bir verimli yarıgrup denir.

Tanım 4.3. S, O_n yarıgrubunun bir alt yarıgrubu olmak üzere eğer $S = \langle E \rangle$ ve $\langle E \cup \{f\} \rangle = O_n$ olacak şekilde bir $E \subseteq E(D_{n-1})$ ve bir $f \in E(D_{n-1}) - E$ varsa S ye O_n yarıgrubunun bir **yerel maksimal idempotent doğuraylı alt yarıgrubu** denir.

Önerme 4.4. E_{n-1}, D_{n-1} sınıfındaki idempotentlerin kümesi olsun, yani $E_{n-1} = E(D_{n-1})$. O zaman $O_n = \langle E_{n-1} \rangle$ dir ve E_{n-1} in hiçbir öz alt kümesi O_n i üretemez.

İspat: Gomes ve Howie (1992)' ye bakınız. ■

Teorem 4.5. O_n yarıgrubunun her yerel maximal idempotent doğuraylı alt yarıgrubu verimli alt yarıgruptur ve aşağıdaki formlardan birine sahiptir.

(A) $\langle E_{n-1} - \{[k \otimes k - 1]\} \rangle \cong \{a \in O_n : (\forall x \in X_n) x^3 k \neq xa^3 k\};$

(B) $\langle E_{n-1} - \{[k \otimes k + 1]\} \rangle \cong \{a \in O_n : (\forall x \in X_n) x \notin k \neq xa \notin k\}.$

İspatı yapmadan önce aşağıdaki örnekleri inceleyelim. $n = 3$ için

4. SIRA-KORUYAN DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARININ YEREL MAKSİMAL İDEMPOTENT DOĞURAYLI ALT YARIGRUPLARI Sebiha MAVRUK

$$E_{n-1} - \{ [2 \otimes 1] \} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_{n-1} - \{ [3 \otimes 2] \} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

olur.

İspat: İlk olarak Önerme 4.4' den O_n yarıgrubunun yerel maximal idempotent doğuraylı bir alt yarıgrubu ya $\hat{E}_{n-1} - \{ [k \otimes k-1] \}$ ñ ya da $\hat{E}_{n-1} - \{ [k \otimes k+1] \}$ ñ şeklindedir. (A) eşitliğinin sağ tarafını LM^k ile ifade edersek, (A) eşitliğini ispatlamak için

$$LM^k = \hat{E}_{n-1} - \{ [k \otimes k-1] \} \text{ ñ}$$

olduğunu göstermeliyiz. ((B) eşitliği benzer şekilde ispat edilebilir.) İlk olarak LM^k nın O_n nin alt yarıgrubu olduğunu göstermeliyiz. Eğer $a, b \in LM^k$ ise her $x \in X_n$ ve $x^3 \in k$ için $xa^3 \in k$ olur ve buradan $(xa)b^3 \in k$ olup $ab \in LM^k \cap O_n$ olur. $E_{n-1} - \{ [k \otimes k-1] \} \cap LM^k$ olup bizim $LM^k \cap E_{n-1} - \{ [k \otimes k-1] \}$ olduğunu göstermemiz gerekmektedir. Her $a \in LM^k$ için a_i nin tek devirli olmayan orbiti W_i olmak üzere $a = a_1 \cdots a_t$ olarak ifade edilsin. $a_i \in LM^k$ olduğu kolayca görülmektedir. O halde $b \in LM^k$ ve b nin tek devirli olmayan orbiti W ise o zaman $b \in \hat{E}_{n-1} - \{ [k \otimes k-1] \}$ ñ olduğunu göstermek yeterlidir.

$I_j, S^l \in \hat{E}_{n-1} - \{ [k \otimes k-1] \}$ ñ olduğu açıktır. Dolayısıyla $D_l, S^r \in \hat{E}_{n-1} - \{ [k \otimes k-1] \}$ ñ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için iki durum söz konusudur.

1.durum: $b_i^3 \in k$ ise D_l ve S^r nin tanımından dolayı $D_l, S^r \in \hat{E}_1 - \{ [k \otimes k-1] \}$ ñ olur.

4. SIRA-KORUYAN DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARININ YEREL MAKSİMAL İDEMPOTENT DOĞURAYLI ALT YARIGRUPLARI Sebiha MAVRUK

2. durum: $b_i < k$ olsun.

- i. $b \in LM^k$ ve $(b_i + m_\beta^r(b_i))b = b_i < k$ olduğundan $b_i + m_\beta^r(b_i) < k$ olur. Dolayısıyla da $S^r \in \mathcal{AE}_{n-1} - \{[k \otimes k - 1]\}$ olduğundan elde edilir.
- ii. $D_l \in \mathcal{AE}_{n-1} - \{[k \otimes k - 1]\}$ (tüm l ler için) olduğunu göstermek için $b_r + m_\beta(b_r) < k$ olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak $b_r < k$ olduğunu göstermeliyiz. Gerçekten eğer $b_r \geq k$ ise o zaman $b_i < k$ olup $k \in b_t b^{-1} = [c, d]$ için bir b_t vardır ($i + 1 \leq t \leq r$) (Bir hatırlatma yapalım. S bir yarıgrup, $T \in S$ ve $A \in S$ olsun. Bu durumda $A \in T$ ise $A \in T$ olur. Ayrıca $c = ab$, $c \in T \cup a, b \in T$). Buradan $d \geq k$ olup $db = b_t \geq k$ olduğu elde edilir. Bu bir çelişkidir, çünkü $b_t b^{-1}$ azalan bloğu için $b_t < c < k$ idi. Eğer $b_r + m_\beta(b_r) \geq k$ ise o zaman $(b_r + m_\beta(b_r))b \geq k$ olup bu da bir çelişkidir. ■

LM^k nın verimli alt yarıgrup olduğunu göstermek için sonraki önermeye bakalım.

Önerme 4.6. LM^k nın her $\mathcal{R}^*$ -sınıfı ve her L^* -sınıfı bir idempotent eleman içerir.

İspat. $b_1 < b_2 < \dots < b_r$ ve $\min A_i > \max A_{i-1}$, $i = 2, \dots, r$ olmak üzere LM^k daki herhangi bir

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_r \\ b_1 & b_2 & \dots & b_r \end{pmatrix}$$

4. SIRA-KORUYAN DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARININ YEREL MAKSİMAL
İDEMPOTENT DOĞURAYLI ALT YARIGRUPLARI Sebiha MAVRUK

elemanını ele alalım. Ayrıca $a_i = \max A_i (i = 1, 2, \dots, r)$, $B_1 = \{1, 2, \dots, b_1\}$,
 $B_k = \{x \in X_n : b_{k-1} < x \leq b_k\} (k = 2, 3, \dots, r - 1)$ ve $B_r = X_n \setminus (\cup_{j=1}^{r-1} B_j)$ olmak
üzere

$$e = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_r \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_r \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_r \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_r \end{pmatrix}$$

olarak tanımlayalım. O halde $e^2 = e$, $f^2 = f$ ve $e, f \in LM^k$ olduğu açıktır. Ayrıca
 O_n de $f \in L \text{ a } R \text{ e}$ olup LM^k da $f \in L^* \text{ a } R^* e$ olur. ■

5. SIRA-KORUYAN ve A-AZALAN DÖNÜŞÜMLER YARIGRUBU

$n \in \mathbb{N}$ ve $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ olsun. X_n nin boş olmayan bir A alt kümesi için

$$O_n(A) = \{a \in O_n : (a|_A) \in A\}$$

şeklinde tanımlansın. $O_n(A)$ nın her bir elemanına **sıra-koruyan ve A-azalan dönüşüm** denir ve $O_n(A)$ kümesinin O_n nin bir alt yarıgrubu olduğu açıktır. Eğer A kümesi X_n veya $X_n \setminus \{n\}$ ye eşit ise $O_n(A) = C_n$ ve eğer $A = \{n\}$ ise $O_n(A) = O_n$ olur. Ayrıca $C_n \subseteq O_n(A) \subseteq O_n$ olduğu da açıktır.

Şimdi bazı notasyonları tekrar ifade edelim.

O_n de defecti 1 olan idempotentlerin kümesi

$$E_{n-1} = \{a \in O_n : a^2 = a, \text{im}(a) = n-1\}$$

olup bu küme $n-1$ tane $[i \oplus i+1]$ ($n = 1, \dots, n-1$) artan idempotent ve $n-1$ tane $[i \oplus i-1]$ ($n = 2, \dots, n$) azalan idempotent içerir. O halde

$$E_{n-1}^+ = \{[i \oplus i+1] : i = 1, \dots, n-1\}$$

$$E_{n-1}^- = \{[i \oplus i-1] : i = 2, \dots, n\}$$

olmak üzere $E_{n-1} = E_{n-1}^+ \dot{\cup} E_{n-1}^-$ olur.

Önerme 5.1. S bir yarıgrup ve $a, b \in S$ olsun. O zaman aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

(i) $(a, b) \in L^*$

(ii) Her $x, y \in S^1$ için $ax = ay \cup bx = by$.

İspat: Fountain (1982) Lemma 1.1' e bakınız. ■

Önerme 5.2. $a, b \in O_n(A)$ olsun. O zaman

$$(i) \quad (a, b) \in L^* \hat{U} \text{ im}(a) = \text{im}(b)$$

$$(ii) \quad (a, b) \in R^* \hat{U} \text{ Ker}(a) = \text{Ker}(b)$$

olur.

İspat. (i) Eğer $\text{im}(a) = \text{im}(b)$ ise $(a, b) \in L^{Sing_n}$ olup $(a, b) \in L^*$ olduğu açıktır.

Tersine, varsayalım ki $(a, b) \in L^*$ olsun. O halde Önerme 5.1. den her $g, d \in O_n(A)^1$ için $ag = ad \hat{U} bg = bd$ olur. İlk olarak, $x \in X_n \setminus \{1\}$ olsun. O zaman $[x \otimes x - 1] \in O_n(A)$ olur. Bu nedenle, $x \in \text{im}(a) \hat{U} a[x \otimes x - 1] = a.1$ yani $b[x \otimes x - 1] = b.1$ ($a \in L^* b$ olduğundan), yani $x \in \text{im}(b)$ olur. Eğer $\min A = 1$ ise, $1 \in \text{im}(a) \cap \text{im}(b)$ olduğu görülür; eğer $\min A^1 \neq 1$ ise $[1 \otimes 2] \in O_n(A)$ olur. Böylelikle, $1 \in \text{im}(a) \hat{U} a[1 \otimes 2] = a.1$, yani $b[1 \otimes 2] = b.1$ ($a \in L^* b$ olduğundan), yani $1 \in \text{im}(b)$ olur. Buradan $\text{im}(a) = \text{im}(b)$ olduğu elde edilir.

(ii) Eğer $\text{Ker}(a) = \text{Ker}(b)$ ise $(a, b) \in R^{Sing_n}$ olup $(a, b) \in R^*$ olur.

Tersine, varsayalım ki $(a, b) \in R^*$ olsun, buradan her $g, d \in O_n(A)^1$ için $ga = da \hat{U} gb = db$ olur.

$x, y \in X_n$ ve $x < y$ olsun, varsayalım ki $F_{x,y}: X_n \otimes X_n$; eğer $x \leq z \leq y$ ise $zF_{x,y} = x$ ve diğer durumlarda $zF_{x,y} = z$ olarak tanımlansın. O zaman $F_{x,y} \in O_n(A)$ olur.

Eğer $xa = ya$ ise $x \leq z \leq y$ olacak şekildeki her z için $za = xa$ dır. (Bunun nedeni $a \in O_n(A) \cap O_n$ olmasıdır) Böylelikle $xa = ya \hat{U} F_{x,y} a = 1a$

5. SIRA-KORUYAN VE A-AZALAN DÖNÜŞÜMLER YARIGRUBU

Sebiha MAVRUK

, yani $F_{x,y} b = 1.b$ ($aR*b$ olduğundan), yani $xb = yb$ olur. Buradan $\text{Ker}(a) = \text{Ker}(b)$ olduğu elde edilir. ■

Tanım 5.3. $x, y \in X_n$ ve $x < y$ olsun. X_n nin $[x, y] = \{ z \in X_n : x \leq z \leq y \}$ alt kümesine **kapalı aralık** denir. Benzer şekilde, (x, y) , $(x, y]$, $[x, y)$ aralıklarını da tanımlayabiliriz. P ve Q , X_n nin iki alt kümesi olsun. Eğer her $a \in P$ ve $b \in Q$ için $a < b$ ise P, Q dan **küçüktür** denir ve $P < Q$ yazılır. Herhangi $a \in O_n$ ve $x, y \in \text{im}(a)$ için, eğer $x < y$ ise $x\alpha^{-1} < y\alpha^{-1}$ olduğu açıktır. O zaman $\frac{1}{2}\text{im}(a)^{1/2^3} 2$ olacak şekildeki her $a \in O_n$ elemanı

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_s \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_s \end{pmatrix}$$

şeklinde olup öyle ki $s = \frac{1}{2}\text{im}(a)^{1/2} \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_s$ ve $A_1 < A_2 < \cdots < A_s$.

Önerme 5.4. $a \in O_n(A)$ ve $\frac{1}{2}\text{im}(a)^{1/2} = k$ olsun. O zaman $\text{im}(a) = \text{im}(b)$ ve $\text{Ker}(b)$ sınıfları $\{1, \dots, n - k + 1\}$, $\{n - k + 2\}, \dots, \{n\}$ olacak şekilde bir $b \in O_n(A)$ vardır.

İspat. Varsayalım ki $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k$ ve $A_1 < A_2 < \cdots < A_k$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_k \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_k \end{pmatrix} \in O_n(A)$$

olsun. Açıktır ki, $1 \leq A_1$ ve $i = 1, 2, \dots, k$ için $a_i \leq n - k + i$ olur. $a \in O_n(A)$ olduğundan her $x \in A$ için $a_1 = 1a \leq xa \leq x$ olur. Buradan

$$\beta = \begin{pmatrix} \{1, \dots, n - k + 1\} & \{n - k + 2\} & \cdots & \{n\} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_k \end{pmatrix} \in O_n(A)$$

olduğu elde edilir. ■

Teorem 5.5. $(a, b) \hat{=} D^*$ olması için gerek ve yeter koşul $\frac{1}{2}im(a)^{1/2} = \frac{1}{2}im(b)^{1/2}$ olmasıdır.

İspat. $O_n(A)$ yarıgrubunda $D^{\hat{a}}$ bağıntısı $(a, b) \hat{=} D^{\hat{a}} \hat{=} \frac{1}{2}im(a)^{1/2} = \frac{1}{2}im(b)^{1/2}$ şeklinde tanımlansın. Önerme 5.2. den $D^{\hat{a}}$, L^* ve R^* bağıntılarını içeren bir denklik bağıntısıdır. Ayrıca D^* , L^* ve R^* bağıntılarını içeren en küçük denklik bağıntısı olup $D^* \subseteq D^{\hat{a}}$ olduğu elde edilir.

Varsayalım ki $(a, b) \hat{=} D^{\hat{a}}$ ve dolayısıyla $\frac{1}{2}im(a)^{1/2} = \frac{1}{2}im(b)^{1/2} = k$ olsun. Önerme 5.2. ve Önerme 5.3.' ten $a L^* g R^* d L^* b$ olacak şekilde $g, d \hat{=} O_n(A)$ var olup $D^{\hat{a}} \hat{=} L^* R^* L^* \hat{=} D^*$ olduğu elde edilir. Böylece $D^{\hat{a}} = D^*$ olur. ■

Teorem 5.6. $O_n(A)$ yarıgrubu verimli alt yarıgruptur.

İspat. $a_1 < a_2 < \dots < a_r$ ve $A_1 < A_2 < \dots < A_r$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_r \\ a_1 & a_2 & \dots & a_r \end{pmatrix} \in O_n(A)$$

elemanını düşünelim. $x_i = \min A_i$ olmak üzere

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_r \\ x_1 & x_2 & \dots & x_r \end{pmatrix}$$

olarak tanımlayalım. O zaman açıktır ki $\varepsilon \hat{=} O_n(A)$, $\varepsilon^2 = \varepsilon$ ve $\varepsilon R^* a$ olur.

5. SIRA-KORUYAN VE A-AZALAN DÖNÜŞÜMLER YARIGRUBU

Sebiha MAVRUK

$\hat{A}_1 = [1, a_2 - 1]$, $i = 2, \dots, r - 1$ için $\hat{A}_i = [a_i, a_{i+1} - 1]$ ve $\hat{A}_r = [a_r, n]$ olsun. $1 \in A_1$ olduğu açıktır. Ayrıca $a \in O_n(A)$ olup her $k \in A$ için $a_1 = 1, a \in k, k \in k$ olur. Buradan

$$V = \begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{A}_2 & \cdots & \hat{A}_r \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_r \end{pmatrix} \in O_n(A)$$

olduğu elde edilir. $V = V$ ve $V L^* a$ olup $O_n(A)$ verimli alt yarıgruptur. ■

Tanım 5.7. Herhangi bir $a \in O_n(A)$ ve $k \in A_i$ için

$$I_\alpha(k) = \text{im}(a) \cap [1, k]$$

$$\check{I}_\alpha(k) = \{x \in I_\alpha(k) : x\alpha^{-1} \in [1, k]^\perp \cap \mathcal{A}\}$$

şeklinde tanımlayalım

Önerme 5.8. $a \in O_n(A)$ olsun. a regülerdir $\hat{U}$ her $k \in A$ için $I_\alpha(k) = \check{I}_\alpha(k)$ dir.

İspat. $a \in O_n(A)$ regüler eleman olsun. O halde $a = aba$ olacak şekilde $b \in O_n(A)$ vardır ve dolayısıyla $\check{I}_\alpha(k) \subseteq I_\alpha(k)$ olur. Şimdi bir $x \in I_\alpha(k)$ elemanını alalım. O halde

$$x = (x\alpha^{-1})a = (x\alpha^{-1})aba = xba$$

olup $xb \in x\alpha^{-1}$ ve $x \in I_\alpha(k)$ olduğundan $x \in k$ dir. Ayrıca $b \in O_n(A)$ olup $xb \in kb \in k$ ve buradan da $xb \in x\alpha^{-1} \cap [1, k]$ yani $x\alpha^{-1} \cap [1, k]^\perp \cap \mathcal{A}$ olur. Böylece $x \in \check{I}_\alpha(k)$ olup $I_\alpha(k) \subseteq \check{I}_\alpha(k)$ olduğundan $I_\alpha(k) = \check{I}_\alpha(k)$ elde edilir.

5. SIRA-KORUYAN VE A-AZALAN DÖNÜŞÜMLER YARIGRUBU

Sebiha MAVRUK

Tersine, her $k \in A$ için $I_\alpha(k) = \check{I}_\alpha(k)$ olsun. Eğer $\dim(a)^{1/2} = 1$ ise $\alpha^2 = a$ olup a regülerdir. Şimdi $\dim(a)^{1/2} \geq 2$ olası durumunu inceleyelim. $a_1 < a_2 < \dots < a_r$ ve $A_1 < A_2 < \dots < A_r$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_r \\ a_1 & a_2 & \dots & a_r \end{pmatrix}$$

olsun. $i = 1, \dots, r$ için $b_i = \min A_i$ ve $c_i = \max \{ (A_i \cap A) \setminus \{a_i\} \}$ olsun. $a_i \notin c_i$ olduğu açıktır. Ayrıca $B_1 = [1, c_1]$, $i = 2, \dots, r-1$ için $B_i = (c_{i-1}, c_i]$ ve $B_r = (c_{r-1}, n]$ olmak üzere

$$\beta = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_r \\ b_1 & b_2 & \dots & b_r \end{pmatrix}$$

olsun. Yani, $a_1 \in B_1 = [1, c_1]$, $B_i = [c_{i-1} + 1, c_i] = (c_{i-1}, c_i]$ ve $B_r = [c_{r-1} + 1, n] = (c_{r-1}, n]$ dir. $a_1 \in B_1$ olduğu açıktır. Biz

$$\text{her } i \in [1, r] \text{ için } a_i \in B_i \quad (5.1)$$

olduğunu iddia ediyoruz. (Ayrıca $a_i \notin c_i$ olduğuna dikkat ediniz.) Bunun için

$$\text{her } i \in [2, r] \text{ için } c_{i-1} < a_i \quad (5.2)$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir.

Eğer $A_{i-1} \cap A = \emptyset$ ise $c_{i-1} = a_{i-1} < a_i$. Eğer $A_{i-1} \cap A \neq \emptyset$ ise her $k \in A_{i-1} \cap A$ için, $a_{i-1} = ka \in k(a \in O_n(A))$ idi ve buradan

$$c_{i-1} = \max \{ (A_{i-1} \cap A) \setminus \{a_{i-1}\} \} = \max (A_{i-1} \cap A).$$

5. SIRA-KORUYAN VE A-AZALAN DÖNÜŞÜMLER YARIGRUBU

Sebiha MAVRUK

$A_{i-1} < A_i$ olup her $k \in A_{i-1} \cap A$ için $A_i \cap [1, k] = \emptyset$ ve $A_i = a_i a^{-1}$ olur. $I_\alpha(k) = \check{I}_\alpha(k)$ olduğundan $k < a_i$ diyebiliriz (aksi takdirde $a_i \in I_\alpha(k) = \check{I}_\alpha(k)$ ve buradan $A_{i-1} \cap [1, k] \neq \emptyset$ olup bu bir çelişkidir). O zaman $c_{i-1} = \max(A_{i-1} \cap A) < a_i$ olur.

(1) den dolayı $a = aba$ eşitliği elde edilir. Buradan a nın regüler olduğunu

göstermek için $b \in O_n(A)$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Herhangi bir $k \in A$ alalım. O halde öyle bir $s_k \in [1, r]$ vardır ki $k \in A_{s_k}$ olur. $a \in O_n(A)$ olup

$$a_{s_k} = ka \in k \in \max \{ (A_{s_k} \cap A) \setminus \{a_{s_k}\} \} = c_{s_k}$$

olduğu elde edilir. Dikkat edelimse $[a_1, c_1] \cap B_1$ ve $(c_{r-1}, c_r] \cap B_r$ olup (2)' den dolayı $k \in B_{s_k}$ olur. Dolayısıyla $kb = b_{s_k} = \min A_{s_k} \in k$ olur. ■

Teorem 5.9. $n^3 - 1$ olsun. $O_n(A)$ nın regüler olması için gerek ve yeter koşul A kümesinin $\{1\}$, $\{1, n\}$ veya $\{n\}$ ye eşit olmasıdır.

İspat. A kümesi $\{1\}$, $\{1, n\}$ veya $\{n\}$ ye eşit ise her $k \in A$ için $I_\alpha(k) = \check{I}_\alpha(k)$ olup Önerme 5.8' den $O_n(A)$ regüler olur.

Tersine, kabul edelim ki A kümesi $\{1\}$, $\{1, n\}$ veya $\{n\}$ olmasın. Ayrıca $k \in [2, n-1]$ olacak şekilde $k \in A$ alalım ve

$$\alpha = \begin{pmatrix} \{1, \dots, k\} & \{k+1, \dots, n\} \\ 1 & k \end{pmatrix}$$

5. SIRA-KORUYAN VE A-AZALAN DÖNÜŞÜMLER YARIGRUBU

Sebiha MAVRUK

şeklinde tanımlayalım. $a \in O_n(A)$ olduğu ve $I_\alpha(k) = \{1, k\}^{-1} \{1\} = \tilde{I}_\alpha(k)$ olduğu açıktır. Bu durumda Önerme 5.8' den a regüler değildir. Sonuç olarak $O_n(A)$ regüler olamaz. ■

Bir sonraki önermeyi vermeden önce bazı notasyonları tekrar hatırlayalım.

$a \in O_n(A)$ verilsin. $\text{Ker}(a)$ -sınıfları X_n nin konveks parçalanışdır ve $x \in \text{im}(a)$ için elde edilen $x\alpha^{-1}$ sınıfı üç şekildedir. Bunlar

$$\begin{aligned} \text{azalan blok} &: x < \min x\alpha^{-1}, \\ \text{artan blok} &: x > \max x\alpha^{-1}, \\ \text{sabit blok} &: \min x\alpha^{-1} \leq x \leq \max x\alpha^{-1} \end{aligned}$$

dır. Her bir $x \in \text{im}(a)$ için $m_\alpha(x)$ ölçümü

$$\begin{aligned} m_\alpha^l(x) &= \max \{ x - y : y \in x\alpha^{-1}, y \leq x \}, \\ m_\alpha^r(x) &= \max \{ y - x : y \in x\alpha^{-1}, y \geq x \} \end{aligned}$$

olmak üzere şu şekilde tanımlanır:

$$m_\alpha(x) = \begin{cases} m_\alpha^l(x) + m_\alpha^r(x), & \text{eğer } x\alpha^{-1} \text{ sabit blok ise} \\ \max \{ \frac{1}{2}x - y, \frac{1}{2}y - x \}, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

$a \in O_n$ nin bir tek devirli olmayan orbiti W var olsun. Dikkat edilirse

$$x \in \text{im } a - W \Leftrightarrow m_\beta(x) = 0$$

5. SIRA-KORUYAN VE A-AZALAN DÖNÜŞÜMLER YARIGRUBU

Sebiha MAVRUK

şeklindedir. Ayrıca W ayrık xb^{-1} ($x \in \text{im } b \cap W$) bloklarının birleşimidir. $\text{im}(b) \cap W = \{b_1, b_2, \dots, b_r\}$ ($b_1 < b_2 < \dots < b_r$) olsun. W tek bir sabit noktaya sahip olup bu nokta b_i olsun, yani $b_i b = b_i$. Bu durumda

azalan bloklar : $b_{i+1}b^{-1}, \dots, b_rb^{-1}$;

artan bloklar : $b_1b^{-1}, \dots, b_{i-1}b^{-1}$;

sabit blok : b_ib^{-1}

olur. Her bir b_jb^{-1} ($j = 1, 2, \dots, i-1$) artan bloğu için

$$I_j = [b_j - m_\beta(b_j) \otimes b_j - m_\beta(b_j) + 1] \cdots [b_j - 1 \otimes b_j],$$

her bir b_lb^{-1} ($l = i+1, i+2, \dots, r$) azalan bloğu için

$$D_l = [b_l + m_\beta(b_l) \otimes b_l + m_\beta(b_l) - 1] \cdots [b_l + 1 \otimes b_l],$$

ve b_ib^{-1} sabit bloğu için

$$S^l = [b_i - m_\beta^l(b_i) \otimes b_i - m_\beta^l(b_i) + 1] \cdots [b_i - 1 \otimes b_i],$$

$$S^r = [b_i + m_\beta^r(b_i) \otimes b_i + m_\beta^r(b_i) - 1] \cdots [b_i + 1 \otimes b_i]$$

olarak tanımlansın.

Önerme 5.10. $b = S^l I_{i-1} \cdots I_1 S^r D_{i+1} \cdots D_r$.

İspat: Yang (1999) Lemma 2.2' ye bakınız. ■

X_n nin boş olmayan bir A alt kümesi için

$$E^+(A) = \{ [i \otimes i + 1] : i \in X_n \setminus (A \setminus \{n\}) \}$$

olsun. Açıktır ki eğer A kümesi X_n veya $X_n \setminus \{n\}$ ise $E^+(A) = A$ olur.

Önerme 5.11. $b \in O_n$ dönüşümünün tam olarak 1 tane devirli olmayan orbiti W var olsun. O zaman $j = 1, \dots, i-1$ için $I_j, S^l \in \mathcal{E}^+(A)$ olur.

İspat. Herhangi bir $k \in A \setminus \{n\}$ ve $j \in \{1, \dots, i-1\}$ için

$$[k \otimes k + 1] \in \{ [b_j - m_\beta(b_j) \otimes b_j - m_\beta(b_j) + 1], [b_j - 1 \otimes b_j] \}, \quad (5.3)$$

$$[k \otimes k + 1] \in \{ [b_i - m_\beta^l(b_i) \otimes b_i - m_\beta^l(b_i) + 1], [b_i - 1 \otimes b_i] \} \quad (5.4)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. İki durum söz konusudur.

1 durum: $b_i \in k$ olsun. Dikkat edilirse

$$b_1 - m_\beta(b_1) \in \dots \in b_2 - m_\beta(b_2) \in \dots \in b_{i-1} - m_\beta(b_{i-1}) \in \dots$$

$$\in b_i - m_\beta^l(b_i) \in \dots \in b_i, \quad (5.5)$$

olup (3) ve (4) sağlanır.

2 durum: $b_i > k$ olsun. (5)' ten dolayı $b_1 - m_\beta(b_1) > k$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bu amaçla, ilk olarak $b_i - m_\beta^l(b_i) > k$ olduğunu göstermeliyiz. $b \in O_n$ ve $k \in A \setminus \{n\}$ olduğundan $k \in k$ olur. Eğer $b_i - m_\beta^l(b_i) \in k$ ise

$$b_i = (b_i - m_\beta^l(b_i)) \in kb \in k$$

olup bu bir çelişkidir. Eğer $b_1 - m_\beta(b_1) \in k$ ise bir b_t ($1 \leq t \leq i-1$) vardır öyleki $k \hat{=} b_t \beta^{-1}$. Buradan $b_t = kb \in k$ olup $b_t \beta^{-1}$ artan bloğu için $b_t > \max b_t \beta^{-1} k$ olduğundan bu bir çelişkidir. ■

Önerme 5.12. $a \hat{=} O_n(A)$ olsun. O zaman a nın idempotent olması için gerek ve yeter koşul her $t \hat{=} \text{im}(a)$ için, $ta = t$ ve $t = \min \{x: x \hat{=} t\alpha^{-1} \nsubseteq (A \hat{=} \{t\})\}$ olmasıdır.

İspat. İlk olarak şunu hatırlayalım: $a \hat{=} O_n$ elemanının bir idempotent eleman olması için gerek ve yeter koşul her $t \hat{=} \text{im}(a)$ için $t \hat{=} t\alpha^{-1}$ olmasıdır. $t \hat{=} t\alpha^{-1}$ ve $x \hat{=} t\alpha^{-1} \nsubseteq (A \hat{=} \{t\})$ olması $t = ta = xa \in x$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla $a \hat{=} O_n$ elemanının bir idempotent eleman olması için gerek ve yeter koşul her $t \hat{=} \text{im}(a)$ için

$$ta = t \quad \text{ve} \quad t = \min \{x: x \hat{=} t\alpha^{-1} \nsubseteq (A \hat{=} \{t\})\}$$

olmasıdır. ■

Teorem 5.5' ten $D_r^* = \{a \hat{=} O_n(A): \frac{1}{2}\text{im}(a) \nsubseteq r\}$ olmak üzere $O_n(A)$ nın D^* -sınıflarının

$$D_1^*, D_2^*, \dots, D_{n-1}^*$$

olduğunu kolayca görebiliriz. Ayrıca $E_{n-1} = E_{n-1}^+ \hat{=} E_{n-1}^-$ olup bir önceki önermeden aşağıdaki sonuca ulaşırız.

5. SIRA-KORUYAN VE A-AZALAN DÖNÜŞÜMLER YARIGRUBU

Sebiha MAVRUK

Önerme 5.13. D_{n-1}^* deki tüm idempotentlerin kümesini $E(D_{n-1}^*)$ ile gösterelim. O zaman $E(D_{n-1}^*) = E_{n-1}^- \dot{E} E^+(A)$ olur. ■

Teorem 5.14. $n^3 - 3$ için $O_n(A) = \dot{A}E(D_{n-1}^*)$ ğolur.

İspat. $\dot{A}E(D_{n-1}^*) \subseteq O_n(A)$ olduğu açıktır. Şimdi de $O_n(A) \subseteq \dot{A}E(D_{n-1}^*)$ ğ olduğunu göstermeliyiz. $a \in O_n(A)$ olsun. Varsayalım ki α dönüşümü $W_1, \dots, W_t$ devirli olmayan orbitlerine ve $W_{t+1}, \dots, W_{t+s}$ halka orbitlerine sahip olsun. Her W_i devirli olmayan orbiti için α_i dönüşümünü

$$x\alpha_i = \begin{cases} x\alpha, & \text{eğer } x \in W_i \\ x, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. O zaman her $i \in [1, t]$ için $\alpha_i \in O_n(A)$ dır. Ayrıca $a = \alpha_1 \cdots \alpha_t$ ve her bir α_i dönüşümünün bir tane devirli olmayan W_i orbiti olduğunu ispatlamak kolaydır. Eğer $b \in O_n(A)$ ve b bir tane W devirli olmayan orbitine sahip ise $b \in \dot{A}E(D_{n-1}^*)$ ğ olduğunu göstermeliyiz. $l = i + 1, \dots, r$ için $S^r, D_l \in \dot{A}E_{n-1}$ ğ olduğu açıktır. Önerme 5.10' dan $b = S^l I_{i-1} \cdots S^r D_{i+1} \cdots D_r$ olup Önerme 5.11 ve 5.13' den $b \in \dot{A}E_{n-1}^- \dot{E} E^+(A) \subseteq \dot{A}E(D_{n-1}^*)$ ğ olur. ■

Şimdi Gomes, Howie (1992) tarafından ispatlanan aşağıdaki önermeyi tekrar hatırlayalım.

Önerme 5.15. E_{n-1}, D_{n-1} sınıfındaki idempotentlerin kümesi olsun, yani $E_{n-1} = E(D_{n-1})$. O zaman $O_n = \dot{A}E_{n-1}$ ğ dir ve E_{n-1} in hiçbir öz alt kümesi O_n yarigrubunu doğuramaz. ■

Önerme 5.16. F, E_{n-1} in boş olmayan bir alt kümesi olsun. O zaman F nin hiçbir öz alt kümesi $\dot{A}F$ ği doğuramaz.

5. SIRA-KORUYAN VE A-AZALAN DÖNÜŞÜMLER YARIGRUBU

Sebiha MAVRUK

İspat. E, F nin $\hat{A}E\tilde{n} = \hat{A}F\tilde{n}$ olacak şekildeki boş olmayan bir alt kümesi ve $F^* = E_{n-1} \setminus F$ olsun. $F \hat{\mid} \hat{A}F\tilde{n} = \hat{A}E\tilde{n}$ olduğu açıktır. Buradan

$$E_{n-1} = F \hat{\dot{E}} F^* \hat{\mid} \hat{A}E\tilde{n} \hat{\dot{E}} F^* \hat{\mid} \hat{A}E \hat{\dot{E}} F^* \tilde{n}$$

olup $O_n = \hat{A}E_{n-1} \tilde{n} = \hat{A}E \hat{\dot{E}} F^* \tilde{n}$ olur. Dikkat edilirse $E \hat{\dot{E}} F^* \hat{\mid} E_{n-1}$ dir. Önerme 5.15'den $\hat{A}F \hat{\dot{E}} E^* \tilde{n} = O_n$ ve $E_{n-1} = E \hat{\dot{E}} F^*$ olur. Bu durumda $F^* = E_{n-1} \setminus F$ olup $F \hat{\mid} E$ ve buradan da $E = F$ olduğu elde edilir. ■

Teorem 5.17. $n^3 \geq 3$ olsun. O zaman $\text{idrank}(O_n(A)) = 2n-2 - \frac{1}{2}A \setminus \{n\} \frac{1}{2}$

İspat. E_{n-1}^- ve $E^+(A)$ tanımlarını biliyoruz. Önerme 5.13 ve Teorem 5.14' den $O_n(A) = \hat{A}E_{n-1}^- \hat{\dot{E}} E^+(A) \tilde{n}$ olduğu elde edilir. Ayrıca $\frac{1}{2}E_{n-1}^- \hat{\dot{E}} E^+(A) \frac{1}{2} = \frac{1}{2}E_{n-1}^- \frac{1}{2} + \frac{1}{2}E^+(A) \frac{1}{2} = 2n-2 - \frac{1}{2}A \setminus \{n\} \frac{1}{2}$ ve $E_{n-1}^- \hat{\dot{E}} E^+(A) \hat{\mid} E_{n-1}$ olup Önerme 5.16' dan $\text{idrank}(O_n(A)) = 2n-2 - \frac{1}{2}A \setminus \{n\} \frac{1}{2}$ olduğu elde edilir. ■

Herhangi bir $i \hat{\mid} X_n \setminus \{1, n\}$ için

$$xdi = \begin{cases} i-1, & \text{eğer } x = i \text{ ise} \\ i, & \text{eğer } x = i+1 \text{ ise} \\ x, & \text{eğer } x \hat{\mid} [n] \setminus \{i, i+1\} \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$D(A) = \{di : i \hat{\mid} X_n \setminus (A \hat{\dot{E}} \{1, n\})\},$$

$$E^-(A) = E_{n-1}^- \setminus \{[i \otimes i-1] : i-1 \text{ veya } i \hat{\mid} X_n \setminus (A \hat{\dot{E}} \{1, n\})\}$$

olarak tanımlansın. O halde $D(A), E^-(A) \hat{\mid} O_n(A)$ olduğu açıktır.

Önerme 5.18. $n \geq 3$ olsun. O zaman $O_n(A) = \hat{A}E^+(A) \hat{E} E^-(A) \hat{E} D(A)$ ğıolur.

İspat. Önerme 5.13 ve Teorem 5.14' den $O_n(A) = \hat{A}E_{n-1}^- \hat{E} E^+(A)$ ğıolduğunu biliyoruz. $O_n(A) = \hat{A}E^+(A) \hat{E} E^-(A) \hat{E} D(A)$ ğıolduğunu ispatlamak için $E_{n-1}^- \hat{E} \hat{A}E^+(A) \hat{E} E^-(A) \hat{E} D(A)$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$DE^-(A) = \{ [i \otimes i-1] : i-1 \text{ veya } i \hat{X}_n \setminus (A \hat{E} \{1, n\}) \}$$

olsun. O halde $E_{n-1}^- = E^-(A) \hat{E} DE^-(A)$ olur. Ayrıca

$$E^+(A) = \{ [i \otimes i+1] : i \hat{X}_n \setminus (A \hat{E} \{n\}) \}$$

olup

$$di [i \otimes i+1] = [i \otimes i-1], \quad [i \otimes i+1] di = [i+1 \otimes i]$$

olduğu elde edilir. Buradan $[i \otimes i-1], [i+1 \otimes i] \hat{A} \hat{E} \{di, [i \otimes i+1]\}$ ğıolup

$$DE^-(A) \hat{E} \hat{A}D(A) \hat{E} E^+(A)$$

olur. Böylece $E_{n-1}^- = E^-(A) \hat{E} DE^-(A) \hat{E} \hat{A}E^+(A) \hat{E} E^-(A) \hat{E} D(A)$ ğıelde edilir. ■

Önerme 5.3 ve Teorem 5.5' ten

$$a L^* b \hat{U} \text{ im}(a) = \text{im}(b),$$

$$a R^* b \hat{U} \text{ Ker}(a) = \text{Ker}(b),$$

$$a D^* b \hat{U} \frac{1}{2} \text{im}(a) \hat{E} \frac{1}{2} \text{im}(b)$$

5. SIRA-KORUYAN VE A-AZALAN DÖNÜŞÜMLER YARIGRUBU

Sebiha MAVRUK

olduğu elde edilir. Ayrıca $L^*, R^* \in D^*$ olduğu açıktır ve Teorem 5.5' ten $D_r^* = \{a \in O_n(A) : \text{im}(a) \neq r\}$ olmak üzere $O_n(A)$ nın D^* -sınıflarının

$$D_1^*, D_2^*, \dots, D_{n-1}^*$$

olduğunu hatırlayalım. $i = 1, \dots, n$ için

$$L^*(i) = \{a \in D_{n-1}^* : \text{im}(a) = X_n \setminus \{i\}\}$$

olarak tanımlanırsa her $i \in \{2, \dots, n\}$ için $L^*(i) \neq \emptyset$ olduğu açıktır ($[i \otimes i - 1] \in L^*(i)$ olduğundan). Dikkat edilirse $L^*(1) = \emptyset$ eğer $1 \in A$ ise, ve $L^*(1) \neq \emptyset$ eğer $1 \notin A$ ise ($[1 \otimes 2] \in L^*(1)$ olduğundan). Böylece, eğer $1 \in A$ ise D_{n-1}^* de $L^*(2), \dots, L^*(n)$ olmak üzere $n - 1$ tane L^* -sınıfı vardır. Diğer yandan eğer $1 \notin A$ ise D_{n-1}^* de $L^*(1), \dots, L^*(n)$ olmak üzere n tane L^* -sınıfı vardır.

Önerme 5.19. $a, b \in O_n(A)$ olsun. Eğer $(a, b), (a, ab) \in D^*$ ise $(a, ab) \in R^*$ ve $(ab, b) \in L^*$ olur.

İspat. Hipotezimizden, $\frac{1}{2}\text{im}(a) \neq \frac{1}{2}\text{im}(b) \neq \frac{1}{2}\text{im}(ab)$ olur. O zaman $\text{im}(ab) = \text{im}(b)$ ve $(ab) \circ (ab)^{-1} = a \circ a^{-1}$ olup $\text{im}(ab) \in \text{im}(b)$ olduğundan $a \circ a^{-1} \in (ab) \circ (ab)^{-1}$ olur. Böylece $(ab, b) \in L^*$ ve $(a, ab) \in R^*$ olur. ■

Yukarıdaki önermeden $O_n(A)$ nın her doğuray kümesinin D_{n-1}^* deki her bir R^* ve L^* sınıfını kapsayacağı sonucuna varırız. Böylece aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 5.20. $n \geq 3$ olsun. Eğer $1 \in A$ ise $\text{rank}(O_n(A)) \geq n - 1$ ve eğer $1 \notin A$ ise $\text{rank}(O_n(A)) \geq n$ olur. ■

5. SIRA-KORUYAN VE A-AZALAN DÖNÜŞÜMLER YARIGRUBU

Sebiha MAVRUK

Teorem 5.21. $n \geq 3$ olsun. Eğer $1 \in A$ ise $\text{rank}(O_n(A)) = n - 1$ ve eğer $1 \notin A$ ise $\text{rank}(O_n(A)) = n$ olur.

İspat. $E^+(A), E^-(A), D(A)$ ve $DE^-(A)$ tanımları önceki gibi olsun. O zaman $E^-(A) = E_{n-1}^- \setminus DE^-(A)$ olup buradan aşağıdakileri kolayca ispatlayabiliriz

$$\begin{aligned} |E^+(A)| &= n - |A \cap \{n\}| = n - 1 - |A \setminus \{n\}|, \\ |D(A)| &= n - |A \cap \{1, n\}| = n - 2 - |A \setminus \{1, n\}|, \\ |E^-(A)| &= |E_{n-1}^-| - |DE^-(A)| = (n-1) - 2[n - |A \cap \{1, n\}|] \\ &= (n-1) - 2[n - 2 - |A \setminus \{1, n\}|] \\ &= 3 - n + 2|A \setminus \{1, n\}|. \end{aligned}$$

Böylelikle $|E^+(A) \cup E^-(A) \cup D(A)| = n - |A \setminus \{1, n\}| - |A \setminus \{n\}|$ olur. Önerme 5.18 ve 5.20 den dolayı eğer $1 \in A$ ise $\text{rank}(O_n(A)) = n - 1$, ve eğer $1 \notin A$ ise $\text{rank}(O_n(A)) = n$ olduğu sonucunu elde ederiz. ■

KAYNAKLAR

- Fountain, J. B., 1982. Abundant Semigroups, Proc . London Math . Soc., (Ser. 3) 44 :103–129.
- Garba, G. U, Ibrahim, M. J., Imam, A. T., 2017. On Certain Semigroups of Full Contraction Maps of a Finite Chain, Turk. J. Math., 41:500–507.
- Gomes, G. M. S. , Howie , J. M., 1992 . On the Ranks of Certain Semigroups of Order – preserving Transformations . Semigroup Forum, 45: 272–282 .
- Higgins, P. M. 1993. Combinatorial Results for Semigroups of Order – preserving mappings, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 113:281–296.
- Higgins, P. M. 1994. Idempotent Depth in Semigroups of Order – preserving mappings, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, (Sect. A) 124:1045–1058.
- Howie, J. M., 1971. Products of Idempotents in Certain Semigroups of Transformation, Proc. Edinburgh Math. Soc., (Ser. 2) 17:223–236.
- Howie, J. M., 1980. Products of Idempotents in Finite Full Transformation Semigroups. Proc. Roy. Edinburgh Soc., (Sect. A) 86: 243–254.
- Howie, J. M., 1995. Fundamentals of Semigroup Theory. Oxford University Press.
- Xu, B., Zhao, P., Yang, L., 2006. Locally Maximal Idempotent – generated Subsemigroups of Singular Order – Preserving Transformation Semigroups. Semigroup Forum, 72: 488–492 .
- Yang, X. L., 1999. Products of Idempotents of Defect 1 in Certain Semigroups of Transformations. Comm. Algebra, 27:3557–3568.
- Zhao, P., Yang, M., 2013. Maximal Properties of Some Semigroup of Order – Preserving Full Transformations, 50:627–637.
- Zhao, P., 2014. On the Semigroups of Order – Preserving and A – Decreasing Finite Transformations. Algebra Colloquium, 21: 4, 653–662.



ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Adana’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Adana’da tamamladıktan sonra 2009 yılında Çağ Üniversitesi Matematik - Bilgisayar Bölümünde lisans öğrenimine başladı ve 2014 yılında mezun oldu. Aynı yıl Çukurova Üniversitesinde Formasyon eğitimine başladı. Formasyon eğitimi bittikten sonra 2015 yılında Ç. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansa kabul edildi. 2017 Temmuz itibari ile Türkiye İş Bankasında çalışmaktadır.