

**SIRALI ALTERNATİFLER İÇİN KULLANILAN PARAMETRİK
OLMAYAN BAZI TEST İSTATİSTİKLERİ
VE BİR KARŞILAŞTIRMA**

Gülsera PEKKAYA

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HAZİRAN 2011
ANKARA**

Gülsera PEKKAYA tarafından hazırlanan “SIRALI ALTERNATİFLER İÇİN KULLANILAN PARAMETRİK OLMAYAN BAZI TEST İSTATİSTİKLERİ VE BİR KARŞILAŞTIRMA” adlı bu tezin yüksek lisans olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Fikri Gökpınar

.....

Tez Danışmanı, İstatistik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile İstatistik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Hülya BAYRAK

.....

İstatistik Anabilim Dalı, G.Ü.

Yrd. Doç.Dr. Fikri GÖKPINAR

.....

İstatistik Anabilim Dalı, G.Ü.

Doç.Dr. Serpil AKTAŞ ALTUNAY

.....

İstatistik Anabilim Dalı, H.Ü.

Tarih: 24/06/2011

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU

.....

Fen Bilimleri Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranıl ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Gülsera PEKKAYA

**SIRALI ALTERNATİFLER İÇİN KULLANILAN PARAMETRİK OLMAYAN
BAZI TEST İSTATİSTİKLERİ VE BİR KARŞILAŞTIRMA**

(Yüksek Lisans Tezi)

Gülsera PEKKAYA

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Haziran 2011

ÖZET

İkiden fazla yığının ortalamalarının karşılaştırılması için tek yönlü ANOVA kullanılır. Eğer yığınlar arasında belirli bir sıralama varsa bu durumda sıralı alternatif kullanımı daha doğru sonuç verecektir. Bu çalışmada sıralı alternatifler için Bartholomew, Jonckheere-Terpstra, Modifiye Edilmiş Jonckheere, Terpstra-Magel, Modifiye Edilmiş Terpstra-Magel ve Ferdhiana-Terpstra-Magel yöntemleri incelenmiştir. Bunların yanı sıra Modifiye Edilmiş Jonckheere testinin varyansının kesin hali örnek çapları eşitken elde edilmiştir. Ayrıca bu testlerden Bartholomew ve Jonckheere-Terpstra testlerine permütasyon testi yöntemi uygulanmıştır. İncelenen bu testler I. tip hata ve testin gücü bakımından kıyaslanmıştır.

Bilim Kodu : 205.1.066

Anahtar Kelimeler : Bartholomew Testi, Jonckheere-Terpstra Testi, Modifiye Edilmiş Jonckheere Testi, Terpstra Magel Testi, Modifiye Edilmiş Terpstra Magel Testi, Ferdhiana-Terpstra-Magel Testi, Permütasyon Testi, Sıralı Alternatif Hipotezler

Sayfa Adedi : 87

Tez Danışmanı : Yrd.Doç.Dr Fikri GÖKPINAR

**SOME NONPARAMETRIC TESTS FOR ORDERED ALTERNATIVE AND
A COMPARE**

(M.Sc.Thesis)

Gülsera PEKKAYA

**GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE SCIENCE AND TECHNOLOGY
June 2011**

ABSTRACT

One way ANOVA is used to compare several population means. If there is an ordering between populations, using ordered alternatives give more appropriate results than one way ANOVA. In this study we investigate Bartholomew, Jonckheere-Terpstra, Modified Jonckheere, Terpstra-Magel, Modified Terpstra-Magel, Ferdhiana-Terpstra-Magel test, which is used for ordered alternatives. Also the exact formula for variance of Modified Terpstra-Magel test is calculated when sample sizes are equal. Furthermore permutation method is applied to Bartholomew and Jonckheere-Terpstra tests. These tests are compared by a simulation study according to their type I errors and powers.

Science Code : 205.1.066

**Key Words : Bartholomew Test, Jonckheere-Terpstra Test,
Modified Jonckheere Test, Terpstra Magel Test,
Modified Terpstra Magel Test, Ferdhiana-Terpstra-
Magel Test, Permutation Test**

Page Number : 87

Adviser : Ass. Prof. Fikri GÖKPINAR

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, çalışmamın her aşamasındadeğerli görüş ve yardımlarını esirgemeyen Hocam Yrd. Doç. Dr. Fikri GÖKPINAR' a

Bu noktaya gelebilmem için beni teşvik eden anneme,

Bana sonsuz sabır gösterip, her konuda yardımını esirgemeyen eşime

teşekkürü borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEŞEKKÜR	vi
ÇİZELGELERİN LİSTESİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEST İSTATİSTİKLERİ	5
2.1. Bartholomew (1959) Test İstatistiği	5
2.2. Terpstra (1952) ve Jonckheere (1954) Test İstatistiği	9
2.3. Modifiye Edilmiş Jonckheere (1998) Test İstatistiği	13
2.4. Terpstra ve Magel (2003) Test İstatistiği	24
2.5. Modifiye Edilmiş Terpstra-Magel (2007) Test İstatistiği	31
2.6. Ferdhiana, Terpstra ve Magel (2008) Test İstatistiği	35
2.7. Permütasyon Testi	41
3. UYGULAMA	45
4. SİMÜLASYON	49
4.1. Test İstatistiklerinin Deneysel I. Tip Hata Oranları Bakımından Karşılaştırılması	49
4.2. Test İstatistiklerinin Güçleri Bakımından Karşılaştırılması	58
5. SONUÇ	69
KAYNAKLAR	72
EKLER	74
EK-1 Mann-Whitey Testi	75

Sayfa

EK-1 Mann-Whitey Testi (Devam)	76
EK-2 Spearman' ın sıra korelasyon katsayısı	77
EK-2 Spearman' ın sıra korelasyon katsayısı (Devam) ..	Error! Bookmark not defined.
EK-3 Kendall' ın Tau ilişki katsayısı	79
EK-4 Bartholomew Testinin Matlab Kodu	80
EK-5 Modifiye Edilmiş Jonckheere-Terpstra Testinin Matlab Kodu	82
EK-6 Terpstra-Magel Testinin Matlab Kodu	83
EK-7 Ferdhiana, Terpstra ve Magel Testinin Matlab Kodu	84
EK-8 Modifiye Edilmiş Terpstra-Magel Testinin Kodu	85
ÖZGEÇMİŞ	86

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 1.1. Yapı bakımından örnek sıralı alternatifler ve örnek katsayıları	1
Çizelge 2.1. Eş. 2.7'deki kovaryans teriminin katsayıları	18
Çizelge 2.2. ($n_1 = 2, n_2 = 1, n_3 = 1$) için Test istatistik değerleri	26
Çizelge 2.3. ($n_1 = 2, n_2 = 1, n_3 = 1$) iken T_{TM} 'nin dağılımı, beklenen değeri ve Varyansı	26
Çizelge 2.4. 3, 4, 5 için Varyans formülü.....	38
Çizelge 2.5. (121, 118, 110), (34, 22, 12) verisi için tüm mümkün permütasyonlar ve test istatistiğinin permütasyon dağılımı ..	43
Çizelge 3.1. Konsantre lif oranlarına karşılık gelen parlaklık değerleri.....	45
Çizelge 4.1. Normal dağılımdan alınan eşit çaplı örneklerin nominal $\alpha=0,01;0,05;0,10$ alınarak farklı grup sayısı ve farklı örnek hacimleri için test istatistiklerinin deneysel I. tip hata oranları	51
Çizelge 4.2. Üstel dağılımdan alınan eşit çaplı örneklerin nominal $\alpha=0,01;0,05;0,10$ alınarak farklı grup sayısı ve farklı örnek hacimleri için test istatistiklerinin deneysel I. tip hata oranları	54
Çizelge 4.3. Tekdüze dağılımdan alınan eşit çaplı örneklerin nominal $\alpha=0,01;0,05;0,10$ alınarak farklı grup sayısı ve farklı örnek hacimleri için test istatistiklerinin deneysel I. tip hata oranları	56
Çizelge 4.4. Normal dağılımdan alınan eşit çaplı örneklerin nominal $\alpha=0,05$; $k=3$ iken test istatistiklerini için güç değerleri	59
Çizelge 4.5. Normal dağılımdan alınan eşit çaplı örneklerin nominal $\alpha=0,05$; $k=4$ iken test istatistiklerini için güç değerleri	60
Çizelge 4.6. Normal dağılımdan alınan eşit çaplı örneklerin nominal $\alpha=0,05$; $k=5$ iken test istatistiklerini için güç değerleri	61

Çizelge**Sayfa**

Çizelge 4.7. Üstel dağılımdan alınan eşit çaplı örneklerin nominal $\alpha=0,05$; $k=3$; $k=4$; $k=5$ iken test istatistiklerini için güç değerleri	63
Çizelge 4.8. Tekdüze dağılımdan alınan eşit çaplı örneklerin nominal $\alpha=0,05$; $k=3$ iken test istatistiklerini için güç değerleri	65
Çizelge 4.9. Tekdüze dağılımdan alınan eşit çaplı örneklerin nominal $\alpha=0,05$; $k=4$ iken test istatistiklerini için güç değerleri	66
Çizelge 4.10. Tekdüze dağılımdan alınan eşit çaplı örneklerin nominal $\alpha=0,05$; $k=5$ iken test istatistiklerini için güç değerleri	67

1. GİRİŞ

İkiden fazla yığın ortalamasının aynı anda karşılaştırılması için kullanılan tekniğe varyans analizi denir. Varyans analizinde kullanılan alternatif hipotez $H_1 : \mu_i \neq \mu_j, \exists i \neq j$ şeklindedir. Yapılan analiz sonucunda sıfır hipotezinin reddedilmesiyle en az iki yığın ortalamasının birbirinden farklı yığından geldiği sonucuna varılır. Ancak bazı çalışmalarda mevcut veri ortalamalarının birbirine eşit olduğu sıfır hipotezini $H_1 : \mu_i \neq \mu_j, \exists i \neq j$ alternatifine karşı test etmek için uygun olmayabilir ya da yapılan çalışmalarda bu hipotezden elde edilen sonuç yeterli değildir. Örneğin tıpta yapılan bir çalışmada hastalara verilen ilaç dozunun arttırılmasının iyileşme süresini kısaltıp kısaltmayacağı ile ilgilenilebilir. Benzer olarak öğrenciler üzerinde yapılan bir çalışmada kişinin çalışma süresi arttıkça başarı notunun artıp artmadığıyla ilgilenilebilir. Ya da tarımsal bir ilacın belli bir dozajına kadar verimi arttıracığı ama bu dozajdan fazlasının verimi azaltacağı ile ilgilenilebilir. Böyle çalışmalarda amaç yığın ortalamasının küçükten büyüğe yada büyükten küçüğe sıralanması durumu üzerinde bir bilgi sahibi olmaktır. Bu tür çalışmalarda $H_1 : \mu_i \neq \mu_j, \exists i \neq j$ yerine sıralı alternatif hipotezler kullanmak daha anlamlı sonuçlar verir. Kurulan hipotezler yapı bakımından değişik şekillerde olabilir. Alternatif hipotezin yapı bakımından aldığı şekiller ve örnek katsayıları eşit hacimli örnekler için aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 1.1.Yapı bakımından örnek sıralı alternatifler ve örnek katsayıları

Şekil	Sıralı Alternatif Örnekleri	Örnek Katsayılar
Basit Sıralama	$H_1 : \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4 < \mu_5$	(-2,0;-1,0;0;1,0;2,0)
Basit Döngü	$H_1 : \mu_1 < \mu_2, \mu_3 < \mu_4$	(-2,0;0;0;2,0)
Basit Ağaç	$H_1 : \mu_1 < \mu_2, \mu_3, \mu_4 $	(-3,0;1,0;1,0;1,0)
Konkav (İç Bükey)	$H_1 : \mu_1 < \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$	(-2,0;0,5;0,5;0,5;0,5)
Konveks (Dış Bükey)	$H_1 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 < \mu_5$	(-0,5;-0,5;-0,5;-0,5;1,0)
Şemsiye	$H_1 : \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 > \mu_4 > \mu_5$	(-1,0;-0,75;1,0;0,5;0,25)

[Dağlıoğlu, 2008]. Bu çalışmada basit sıralamalı alternatif ele alınmıştır.

Tek yönlü testler bilindiği gibi iki yönlü testlerden daha güçlüdür. Dolayısıyla elimizde alternatif hipotez hakkında bu tarz bir bilgi varsa bunu hipoteze yansıtmak gerekir.

Parametrik testlerin kullanılabilmesi için örneklerin geldikleri yığınların dağılımlarının normal olması ve ilgili bağımlı değişkenin ölçülme düzeyinin aritmetik işlem için yeterli olması yani eşit aralıklı ya da oranlama ölçme düzeyinin kullanılmış olması gerekir. Bu varsayımlar sağlanmadığı halde örnek çapının yeteri kadar büyük olması durumunda da parametrik testler kullanılabilir. Bu varsayımların sağlanmadığı ve örnek çapının yeteri kadar büyük olmadığı durumlarda ise parametrik olmayan yöntemler kullanılır. Parametrik olmayan yöntemlerin kullanılmaya başlanması parametrik yöntemler kadar eskiye dayanmamasına rağmen gelişimi 1930' lu yıllardan sonra sağlanmıştır. İlk parametrik olmayan yöntem 1710 yılında Jonh Arbuthnott tarafından kullanılan işaret testidir. Özellikle 1945 yılında Frank Wilcoxon' un Wilcoxon işaretlendirilmiş ranklar testini kullanmasından sonra parametrik olmayan testler oldukça çoğalmıştır.

Sıralı alternatiflere karşı sıfır hipotezinin testi için normal dağılım varsayımı altında Bartholomew (1959), Chen ve diğerleri (2004) test istatistiği geliştirmişlerdir. Bu test istatistiklerinin yanısıra sıralı alternatif problemlerinde uygulanabilir bir yaklaşımda izotonik regresyondur [Gaines ve Rice,1990]. İzotonik regresyon, standart regresyonun genelleştirilmiş halidir [Brunk ve ark., 1965]. Bununla birlikte sıralı alternatif probleminde parametrik olmayan yöntemlerde sıkça kullanılmaktadır. Jonckheere (1954) ve Terpstra (1952) sıfır hipotezinin sıralı alternatife karşı testi için parametre dışı test geliştiren ilk kişiler arasındadır. Geliştirdikleri test istatistiği Mann-Whitney testine dayalı olup birçok çalışma da bu test istatistiğine bağlı olarak oluşturulmuştur. Puri, 1965 yılında yaptığı çalışmada sıralı alternatifler için Jonckheere ve Terpsta' nın geliştirdiği test istatistiğini genelleştirerek Mann-Whitney

istatistiklerinin lineer bir fonksiyonunun asimptotik olarak normal dağılıma sahip olduğunu göstermiştir [Puri, 1965]. Tryon ve Hettmansperger (1973) sıralı alternatiflerin testi için yine Mann-Whitney istatistiğine dayalı alternatif bir sınıf geliştirmiştir. Neuhauser ve diğerleri (1998) Troyn ve Hettmansperger' in incelediği ağırlıklı parametrik olmayan testler sınıfından modifiye edilmiş bir istatistik geliştirmiştir. Neuhauser (1998) bu testin Jonckheere-Terpstra testinden bazı durumlarda daha yüksek güç değerlerine sahip olduğunu belirtmiştir. Jonckheere (1954) ve Terpstra (1952) testine dayalı bir başka test istatistiği Terpstra ve Magel (2003) tarafından geliştirilmiştir. Bu test istatistiği ikili sınamalara dayalı olan Jonckheere-Terpstra testinden farklı olarak, alternatif hipotezdeki sıralamaların bütününe sağlanıp sağlanmadığını dikkate alarak geliştirilmiştir. Ayrıca bu test istatistiği şemsiye modeller içinde kullanılabilir. Benzer olarak Hettmansperger ve Norton (1987) hem sıralı alternatiflerin testinde hem de şemsiye alternatiflerin testinde kullanılabilecek bir test geliştirmişlerdir. Jonckheere-Terpstra testine dayanan bir başka test ise Ferdhiana ve diğerleri (2008) tarafından geliştirilen test istatistiğidir. Bu test istatistiği Jonckheere- Terpstra testi ve Kendall' ın korelasyon katsayısı üzerine kurulmuştur. Chang (2007) tarafından geliştirilen test ise Terptsra – Magel testinin bir modifiyesi olup bu testte Spearman' ın korelasyon katsayısı da kullanılmıştır.

Bu çalışmada parametrik olmayan testlerden Jonckheere (1954) ve Terpstra (1952) testi, Neuhauser ve diğerleri (1998) tarafından geliştirilen Modifiye Edilmiş Jonckheere testi, Terpstra ve Magel (2003) testi, Chang (2007) tarafından geliştirilen Modifiye Edilmiş Terpstra-Magel testi, Ferdhiana ve diğerleri (2008) testi incelenmiştir. Parametrik testlerin varsayımları sağlanmadığında parametrik olmayan tekniklerin, parametrik tekniklere göre daha etkin olması beklenir. Bu farkı gözlemlemek için sıfır hipotezinin sıralı alternatife karşı testi için parametrik olmayan test istatistiklerinin yanı sıra, parametrik olan Bartholomew (1959) test istatistiği de incelenmiştir. Ayrıca

permütaston testi incelenerek bu yöntem Bartholomew (1959), Jonckheere (1954) ve Terpstra (1952) testleri üzerinde uygulanmıştır.

Çalışmanın ikinci bölümünde bu test istatistikleri incelenmiş ve bu yöntemlerin kullanılmasına ilişkin birer örnek verilmiştir. Ayrıca Neuhauser ve diğerlerinin (1998) oluşturdukları test istatistiğinin örnek çapları eşitken teorik varyansı elde edilmiştir. Kullanılan diğer test istatistiklerinde örnek çapları eşitken beklenen değer ve varyans formülleri yeniden düzenlenmiştir. Ayrıca bu bölümde permütasyon yöntemi kısaca tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde, incelenen test istatistiklerinin gerçek bir veri seti üzerinde uygulanışı verilmiş ve elde edilen sonuçlar yorumlanmıştır.

Dördüncü bölümde incelenen test istatistiklerinin simülasyon yoluyla eşit örnek çapları altında I. tip hata oranları ve testin gücü bakımından karşılaştırılmaları yapılmış ve bu testlerin hangi durumlarda birbirlerine göre daha üstün oldukları belirtilmiştir.

Beşinci bölümde ise sonuçlar ve yorumlara yer verilmiştir.

2. TEST İSTATİSTİKLERİ

Bu bölümde sıralı alternatifler için kullanılan bazı test istatistikleri incelenmiştir. İncelenen test istatistikleri ayrıca örnek üzerinden anlatılmıştır.

2.1. Bartholomew (1959) Test İstatistiği

Parametrik testlerin varsayımları sağlanmadığında parametrik olmayan tekniklerin, parametrik tekniklere göre daha etkin olması beklenir. Bu farkı gözlemlemek için sıfır hipotezinin sıralı alternatife karşı testi için parametrik olmayan test istatistiklerinin yanı sıra, parametrik olan Bartholomew (1959) test istatistiği de incelenmiştir. Bartholomew' in 1959'da sıralı alternatif problemi için geliştirdiği parametrik bir test istatistiği olan $\bar{F}_k$ test istatistiğinde ilgilenilen yokluk hipotezi ve alternatif hipotez

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$

$$H_1 : \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_k, \quad \text{en az bir eşitsizlik doğru olmak üzere}$$

şeklindedir. $\bar{F}_k$ test istatistiğinde temel olarak dikkat edilmesi gereken H_1 ' de verilen sıralamanın sağlanıyor olması, sağlanmıyorsa sağlar hale getirilmesidir. Problemde ilgilenilen x_{ij} ($i=1,2,\dots,k$; $j=1,2,\dots,n_i$) gözlemlerinin geldikleri yığınların μ_i ortalama ve σ standart sapma ile normal dağılıma sahip olduğu durum göz önüne alınsın. Burada grupların örnek ortalaması ve genel ortalama sırası ile

$$\bar{x}_{i.} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \quad \text{ve} \quad \bar{x}_{..} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i \bar{x}_{i.}}{\sum_{i=1}^k n_i}$$

şeklindedir. Ayrıca $\bar{x}_{i.}$ ortalamasının standart sapması $s/\sqrt{n_i}$ dir. $X(i, i+1)$,

i -nci ve $(i+1)$ -nci grupların ağırlıklı ortalaması olmak üzere, $\bar{x}_i < \bar{x}_{i+1}$ olduğunda $X(i, i+1) = (n_i \bar{x}_i + n_{i+1} \bar{x}_{i+1}) / (n_i + n_{i+1})$ 'dan yararlanılır. Böylece i ' inci ve $i+1$ ' inci grupların ortalaması alınmış olur. Test istatistiğinin genel gösterimi

$$\bar{F}_k = \sum_1^k n_i (\hat{\mu} - \bar{x}_{..})^2 / (l-1) S_e'^2 \quad (2.1)$$

şeklinde dir. $S_e'^2$ indirgenmiş problem den elde edilen hata kareler ortalamasıdır ve N toplam gözlem sayısı olmak üzere $(N-l)$ serbestlik derecesine sahiptir.

$\bar{F}_k$ istatistiği için,

$$\Pr\{\bar{F}_k \geq \gamma\} = \sum_2^k P(l, k) \Pr\{F_{l-1, N-1} \geq \gamma\} \quad (2.2)$$

$$\Pr\{\bar{F}_k = 0\} = P(l, k) \quad (2.3)$$

şeklinde yazılabilir. Burada γ gözlem değeridir. Örnek çapı n_i ' nin eşit olmadığı durumlarda grup sayısı k ' nin 3, 4, 5 olduğu durumlar için $P(l, k)$ olasılıklarını hesaplamak mümkündür. n_i ' lerin eşit olduğu durumda ise özel olarak $P(l, k)$ olasılığı $2 \leq l \leq k-1$ için,

$$P(l, k) = [P(l-1, k-1) + (k-1)P(l, k-1)] / k$$

şeklinde hesaplanır. Ayrıca $P(1, k) = k^{-1}$ ve $P(k, k) = (k!)^{-1}$ 'dir. $\Pr\{\bar{F}_k \geq \gamma\} < \alpha$ olması durumunda H_0 reddedilir [Bartholomew, 1959a]. Testin daha iyi anlaşılabilmesi için aşağıdaki örnek verilmiştir.

Örnek

Yapılan bir çalışmada ilkokula giden çocukların televizyon izleme süreleri incelenmiştir. Her grupta 5 öğrenci bulunmaktadır. Gidilen sınıfla televizyon izleme süresinin azalıp azalmadığı araştırılmak istenmektedir.

<u>1.Sınıf</u>	<u>2.Sınıf</u>	<u>3.Sınıf</u>	<u>4.Sınıf</u>	<u>5.Sınıf</u>
5	3	4	6	8
4	6	6	8	6
2	8	8	10	2
6	3	5	9	2
6	5	4	11	2

İlgilenilen sıfır hipotezi ve alternatif hipotez aşağıdaki gibidir.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_5$$

$$H_1 : \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_5 \text{ , en az bir eşitsizlik doğru olmak üzere}$$

Genel ortalama 5,56' dır. Grup ortalaması ise sırasıyla 4,6;5,5;4,8 ve 4'dür. Öncelikle alternatif hipotezde verilen sıralamanın sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilmelidir. $4,6 \geq 5,0 \geq 5,4 \geq 8,8 \geq 4$ sıralaması sağlanmamaktadır. İlk olarak bu sıralamanın sağlanması için ilk iki grup ortalamasının aritmetik ortalaması alınır. Çıkan sonuç bu grup ortalamalarına atanır.

$$\frac{4,6+5,0}{2} = 4,8$$

$4,8 \geq 4,8 \geq 5,4 \geq 8,8 \geq 4$ sıralama tam olarak sağlanmamaktadır. Benzer olarak ilk üç grup ortalamasının aritmetik ortalaması alınır ve çıkan sonuç bu değerlere atanır.

$$\frac{4,8+4,8+5,4}{3}=5,0$$

$5,0 \geq 5,0 \geq 5,0 \geq 8,8 \geq 4$ sıralama hala tam olarak sağlanmamaktadır.

$$\frac{5,0+5,0+5,0+8,8}{4}=5,95$$

$5,95 \geq 5,95 \geq 5,95 \geq 5,95 \geq 4$ sıralama sağlanmaktadır. $\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2 = \hat{\mu}_3 = \hat{\mu}_4 = 5,95$, $\hat{\mu}_5 = 4$ dolayısıyla $l = 2$ dir.

$$\overline{F}_k = \sum_1^k n_i (\hat{\mu}_i - \bar{x}_{..})^2 / (l-1) S_e'^2$$

$$\begin{aligned} \sum_1^k n_i (\hat{\mu}_i - \bar{x}_{..})^2 &= 5(5,95 - 5,56)^2 + 5(5,95 - 5,56)^2 + 5(5,95 - 5,56)^2 \\ &\quad + 5(5,95 - 5,56)^2 + 5(4 - 5,56)^2 = 15.21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_e'^2 &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^5 (x_{ij} - \hat{\mu}_i)^2 = (x_{11} - \hat{\mu}_1)^2 + (x_{12} - \hat{\mu}_2)^2 + \dots + (x_{55} - \hat{\mu}_5)^2 \\ &= (5 - 5,95)^2 + (4 - 5,95)^2 + \dots + (2 - 4)^2 \\ &= 142,95 \end{aligned}$$

Bulunanlar Eş. 2.1' de yerine konulduğunda,

$$\overline{F}_k = \frac{15.21}{(2-1)(142.95)} = 0.1064$$

elde edilir. $\overline{F}_k$ ' nın dağılımı Eş. 2.2 ve Eş.2.3' den aşağıdaki gibi elde edilir

$$P(2;5) = [P(1;4) + (4)P(2;4)] / 5 = 0,41664$$

$$P(1;4) = 1 / 4$$

$$P(2;4) = [P(1;3) + (3)P(2;3)] / 4 = 0,4583$$

$$P(1;3) = 1 / 3$$

$$P(2;3) = [P(1;2) + (2)P(2;2)] / 3 = 0,5$$

$$\begin{aligned} \Pr(\bar{F}_5 > \gamma) &= P(2;5) \Pr(F_{1;23}) + P(3;5) \Pr(F_{2;22}) + P(4;5) \Pr(F_{3;21}) + P(5;5) \Pr(F_{4;20}) \\ &= 0,41664(0,85016) + 0,32502(0,96422) + 0,09167(0,99039) + 0,0083(0,99723) \\ &= 0,76670. \end{aligned}$$

0,05 anlamlılık düzeyinde $p=0,76670$ olduğu için H_0 reddedilemez. Yani öğrencilerin gittikleri sınıfla televizyon izleme süresi azaldığı söylenemez.

2.2. Terpstra (1952) ve Jonckheere (1954) Test İstatistiği

Sıralı alternatif problemleri için geliştirilmiş popüler testlerden biri Terpstra (1952) ve Jonckheere (1954) tarafından bağımsız olarak geliştirilen test istatistiğidir. Bu test klinik öncesi çalışmalarda ve doz belirleme çalışmalarında en sık kullanılan parametre dışı testtir [Budde ve Bauer, 1989]. Günümüzde Neuhauser (1996)'nın çalışmasında kullandığı gibi sosyal biyoloji gibi farklı biometrik çalışmalarda da bu test kullanılmaktadır [Neuhauser ve ark.,1998]. Yokluk hipotezi ve alternatif hipotez

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$

$$H_1 : \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_k \quad , \quad \text{en az bir eşitsizlik doğru olmak üzere}$$

şeklinde. k grup sayısını göstermektedir. Jonckheere – Terpstra (JT) testi $i, j = 1, 2, \dots, k$ ve $i < j$ olmak üzere i ve j örneğini karşılaştırmak için Mann-Whitney istatistiği olan U_{ij} 'lerin toplanması ile elde edilir (Mann-Whitney istatistiği ile ilgili genel bilgiler ek-1' de verilmiştir). Test istatistiği,

$$\begin{aligned}
T_{JT} &= U_{12} + U_{13} + \dots + U_{1k} + U_{23} + U_{24} + \dots + U_{2k} + \dots + U_{k-1,k} \\
&= \sum_{1 \leq i < j \leq k} \sum U_{ij} = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \sum_{r=1}^{n_i} \sum_{s=1}^{n_j} I(X_{ir} < X_{js})
\end{aligned} \tag{2.4}$$

şeklindedir. Burada X_{ir} , i ' inci örnekteki r 'inci gözlemi, X_{js} ise j ' inci örnekteki s ' inci gözlemi temsil eder ve I gösterge fonksiyondur (sağlanıyorsa 1'e, sağlanmıyorsa 0'a eşittir) [Budde ve Bauer, 1989].

H_1 ' in doğru olması durumunda j ' inci örneğe ait gözlemler i 'inci örneğe ait gözlemlerden büyük olma eğilimi gösterecektir. Dolayısı ile red bölgesi T_{JT} ' nin büyük değerlerinden oluşur. Yani red bölgesi $T_{JT} \geq T_{JT}(\alpha, k, n_1, n_2, \dots, n_k)$ şeklindedir.

Örnek çapı arttığında T_{JT} istatistiği için normal dağılım yaklaşımı kullanılır. Bunun için T_{JT} istatistiğinin beklenen değeri ve varyansına ihtiyaç vardır. T_{JT} istatistiği Mann-Whitney' in bir kombinasyonu olduğundan U istatistiğinin beklenen değeri ve varyansından faydalanır. Mann-Whitney testi için H_0 altında beklenen değer $E(U_{ij}) = n_i n_j / 2$ ' dir. Dolayısı ile T_{JT} test istatistiğinin beklenen değer aşağıdaki gibidir.

$$E_0(T_{JT}) = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \sum \frac{n_i n_j}{2} = \frac{N^2 - \sum_{i=1}^k n_i^2}{4},$$

Burada $N = \sum_{j=1}^k n_j$ ' dir. Benzer olarak T_{JT} ' nin varyansı,

$$Var_0(T_{JT}) = \frac{N^2(2N+3) - \sum_{i=1}^k n_i^2(2n_i+3)}{72} \tag{2.5}$$

dir [Jonckheere,1954].

Örnek çaplarının eşit olması durumunda beklenen değer,

$$E_0(T_{JT}) = \binom{k}{2} \frac{n^2}{2}$$

ve varyans

$$Var_0(T_{JT}) = \frac{N^2(2N+3) - kn^2(2n+3)}{72}$$

şeklinde kısılacaktır.

Büyük örnek çapları için;

$$\frac{T_{JT} - E_0(T_{JT})}{[Var_0(T_{JT})]^{1/2}} \sim Z(0,1)$$

olacaktır. Bundan yararlanarak $\frac{T_{JT} - E_0(T_{JT})}{[Var_0(T_{JT})]^{1/2}} \geq Z_\alpha$ olması durumunda H_0

reddedilir [Jonckheere, 1954]. JT testinin işleyişinin görülmesi için aşağıdaki örnek verilmiştir.

Örnek

Yapılan bir araştırmada sporcuların aynı antrenörle çalışma süreleri ve antrenörlerine verdikleri başarı puanları incelenmiştir. Bu doğrultuda aynı antrenörle çalışma süresi 5 sene ve altında olan sporcular, 6-10 sene arası olan sporcular, 11 sene ve üstü olan sporcular olmak üzere 3 grup ele alınmıştır. Bu veriler doğrultusunda aynı antrenörle çalışma süresi arttıkça

antrenörleri için verdikleri başarı puanlarının artıp artmadığı araştırılmak istenmektedir.

<u>5 Yıl ve Altı</u>	<u>6-10 Yıl</u>	<u>11 Yıl ve Üstü</u>
74	70	73
58	72	78
68	75	88
60	80	85
69	71	76

Bu çalışma için ilgilenilen hipotez aşağıdaki gibidir.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$H_1 : \mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 , \quad \text{en az bir eşitsizlik doğru olmak üzere}$$

JT istatistiği için U_{12} , U_{13} , U_{23} istatistikleri toplanır. U_{12} için;

$$I(X_{11} < X_{21}) = 0$$

$$I(X_{11} < X_{22}) = 0$$

$$I(X_{11} < X_{23}) = 1$$

$$I(X_{11} < X_{24}) = 1$$

$$I(X_{11} < X_{25}) = 0$$

Bu şekilde devam edilerek $U_{12} = 2 + 5 + 5 + 5 + 5 = 22$, $U_{13} = 24$, $U_{23} = 21$ ve $T_{JT} = 67$ elde edilir. Testin normal dağılıma yakınsama durumu kullanıldığında aşağıdaki değerler elde edilir

$$E_0(T_{JT}) = \binom{k}{2} \frac{n^2}{2} = \binom{3}{2} \frac{5^2}{2} = 37,5$$

$$\begin{aligned}
Var_0(T_{JT}) &= \frac{N^2(2N+3) - kn^2(2n+3)}{72} \\
&= \frac{15^2(15(2)+3) - [3(5^2)(10+3)]}{72} = 89,58.
\end{aligned}$$

Örnek çapının yeteri kadar büyük olması durumunda normal dağılım yaklaşımından yararlanılır. Örnek çapının yeteri kadar büyük olduğu varsayılırsa

$$\frac{67 - 37.5}{9,46} = 3,1168$$

elde edilir. $\alpha = 0,05$ için $Z_{JT} = 3,1168 > Z_{\alpha} = 1,64$ olduğundan H_0 reddedilir. 0,05 anlamlılık düzeyinde aynı antrenörle çalışma süresi arttıkça sporcuların antrenörleri için verdikleri başarı puanlarının arttığı söylenebilir.

2.3. Modifiye Edilmiş Jonckheere (1998) Test İstatistiği

Neuhausser ve arkadaşlarının 1998' de geliştirdiği bu test istatistiği Jonckheere (1952) ve Terpstra (1954) tarafından geliştirilen test istatistiğinin modifiye edilmiş halidir. Neuhausser ve diğerlerinin yaptığı bir çalışmada bu düzenlemenin testin gücü ve birinci tip hata bakımından daha iyi sonuçlar verdiği iddia edilmektedir [Neuhausser ve ark.,1998].

Bu test istatistiğinde $k-1$ tane tedavi grubu ve bir tane kontrol grubu olmak üzere k tane örnek ile ilgilenilir. Bu doğrultuda yokluk hipotezi ve alternatif hipotez

$$H_0 : \mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{k-1}$$

$$H_1 : \mu_0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_{k-1} \quad , \quad \text{en az bir eşitsizlik doğru olmak üzere}$$

şeklindedir. Modifiye edilmiş Joncheere test istatistiği (MJ) Jonckheere test istatistiğine benzer olarak Mann-Whitney istatistiği olan U_{ij} ' lerin toplanması ile elde edilir. Ancak MJ test istatistiğinde Mann Whitney test istatistiği U_{ij} ' lere $(j-i)$ ağırlığı atanmaktadır. Test istatistiği

$$T_{MJ} = \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{j=i+1}^{k-1} (j-i)U_{ij}$$

şeklindedir. Örneğin üç tedavi grubu incelensin bu durumda test istatistiği

$$T_{MJ,k=3} = U_{01} + U_{12} + U_{23} + 2(U_{02}) + 2(U_{13}) + 3(U_{03})$$

şeklinde olacaktır. Joncheere test istatistiğinin beklenen değer ve varyansına benzer olarak MJ test istatistiğinin beklenen değeri ;

$$E(T_{MJ}) = \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{j=i+1}^{k-1} (j-i) \frac{n_i n_j}{2}$$

şeklindedir. Varyans ise aşağıdaki eşitliklerden yararlanarak bulunur [Neuhauser ve ark., 1998].

$$Var(U_{ij}) = \frac{1}{12} n_i n_j (n_i + n_j + 1) \quad \forall i \neq j ,$$

$$Cov(U_{ij}, U_{il}) = Cov(U_{ji}, U_{li}) = \frac{1}{12} n_i n_j n_l \quad \text{bütün } i, j, l \text{ farklı olmak üzere}$$

$$Cov(U_{ij}, U_{li}) = Cov(U_{ji}, U_{il}) = -\frac{1}{12} n_i n_j n_l \quad \text{bütün } i, j, l \text{ farklı olmak üzere}$$

$$Cov(U_{ij}, U_{lm}) = 0 \quad \text{bütün } i, j, l, m \text{ farklı olmak üzere}$$

Yukarıdaki eşitliklerden yola çıkarak MJ test istatistiğinin varyansı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$Var(T_{MJ}) = \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{j=i+1}^{k-1} (j-i)^2 \frac{1}{12} (n_i n_j (n_i + n_j + 1)) + 2 \sum_A Cov(U_{ij}, U_{lm}) (j-i)(m-l) \quad (2.6)$$

Burada $A = \{(i, j), (k, l) | \{(0, 1), (0, 2)\}, \{(0, 1), (0, 3)\} \dots \{(k-3, k-2), (k-2, k-1)\}\}$ dir.

Bu şekilde T_{MJ} test istatistiğinin varyansını hesaplamak özellikle örnek çapının arttığı durumlarda oldukça zordur. Bu sebeple bu bölümün geri kalanında T_{MJ} test istatistiğinin varyansı örnek çapları eşit iken elde edilmeye çalışılacaktır. Örnek çaplarının eşit olduğu durum göz önüne alındığında varyans formülü aşağıdaki gibi olacaktır.

$$Var(T_{MJ}) = \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{j=i+1}^{k-1} (j-i)^2 \frac{1}{12} (n^2 (2n+1)) + 2 \sum_A Cov(U_{ij}, U_{lm}) (j-i)(m-l) \quad (2.7)$$

Burada;

$$Cov(U_{ij}, U_{il}) = Cov(U_{ji}, U_{li}) = \frac{1}{12} n^3 \quad \text{bütün } i, j, l \text{ farklı olmak üzere}$$

$$Cov(U_{ij}, U_{li}) = Cov(U_{ji}, U_{il}) = -\frac{1}{12} n^3 \quad \text{bütün } i, j, l \text{ farklı olmak üzere}$$

$$Cov(U_{ij}, U_{lm}) = 0 \quad \text{bütün } i, j, l, m \text{ farklı olmak üzere}$$

Önerme 2.1

Örnek çapları eşit ele alındığında T_{MJ} test istatistiğinin varyansı

$$V(T_{MJ}) = \frac{k^2(k^2-1)n^2(nk+1)}{144} \quad (2.8)$$

şeklinde dir.

İspat

Eş. (2.7)' deki ifadenin ilk kısmı V_1 ikinci kısmı V_2 olarak ele alınsın. İlk olarak V_1 ifadesi ele alınsın. Örnek çapları eşit olduğu durumda ;

$$\begin{aligned} V_1 &= \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{j=i+1}^{k-1} (j-i)^2 \frac{1}{12} (n^2(2n+1)) = \frac{1}{12} \sum_{i=0}^{k-2} [1^2 + 2^2 + \dots + (k-1-i)^2] \cdot [n^2(2n+1)] \\ &= \frac{[n^2(2n+1)]}{12} \sum_{i=0}^{k-2} \frac{(k-1-i)(k-i)(2k-2-2i+1)}{6} \end{aligned}$$

Elde edilen ifade yeniden düzenlenirse;

$$= \frac{[n^2(2n+1)]}{12} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(i)(i+1)(2i+1)}{6} = \frac{[n^2(2n+1)]}{12} \left[\sum_{i=1}^{k-1} \frac{2i^3 + 3i^2 + i}{6} \right]$$

olarak bulunur buradan gerekli düzenlemeler yapıldığında aşağıdaki ifade bulunur

$$\begin{aligned} &= \frac{[n^2(2n+1)]}{12} \left[\frac{2 \sum_{i=1}^{k-1} i^3 + 3 \sum_{i=1}^{k-1} i^2 + \sum_{i=1}^{k-1} i}{6} \right] \\ &= \frac{n^2(2n+1)}{72} \left[\frac{2(k-1)^2 k^2}{4} + \frac{3(k-1)(k)(2k-1)}{6} + \frac{(k-1)(k)}{2} \right] \\ &= \frac{n^2(2n+1)}{72} \left[\frac{k(k-1)}{2} (k^2 - k + 2k - 1 + 1) \right] = \frac{n^2(2n+1)}{72} \left[\frac{k(k-1)}{2} (k^2 + k) \right] \\ &= \frac{n^2(2n+1)}{72} \left[\frac{k^2(k-1)(k+1)}{2} \right] \\ &= \frac{n^2(2n+1)}{144} [k^2(k^2 - 1)]. \end{aligned}$$

İkinci olarak kovaryans terimini içeren V_2 ifadesi ele alınsın. Dikkat edileceği üzere her bir çift için kovaryans ifadesi aynı olmakla birlikte baştaki katsayıları birbirinden farklıdır. Dolayısıyla ortak terim olan $\frac{n^3}{12}$ terimi toplamın dışına alındığında her bir çift için kovaryans terimlerinin katsayıları aşağıda verilen çizelgedeki gibi olacaktır.

Çizelge 2.1. Eş. 2.7'deki kovaryans teriminin katsayıları

ij	01	02	03		0(k-1)	12	13		1(k-1)	23	24		2(k-1)		(k-2)(k-1)	ij Satırının Katsayıları Toplamı
01	—	2	3	...	k-1	-1	-2	...	2-k	0	0	...	0	...	0	k-2
02	2	—	6	...	2k-2	2	0	...	0	-2	-4	...	6-2k	...	0	(4)(k-2)
03	3	6	—	...	3k-3	0	6	...	0	3	0	...	0	...	0	(9)(k-2)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0(k-1)	1-k	2k-2	3k-3	...	—	0	0	...	(1-k)(2-k)	0	0	...	(1-k)(3-k)	...	(k-1)	(k-1) ² (k-2)
12	-1	2	0	...	0	—	2	...	2-k	-1	-2	...	(3-k)	...	0	k-2
13	-2	0	6	...	0	0	—	...	2k-4	2	0	...	0	...	0	(4)(k-2)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1(k-1)	2-k	0	0	...	(1-k)(2-k)	-1	2k-4	...	—	0	0	...	(3-k)(2-k)	...	k-2	(2-k) ² (k-2)
23	0	0	3	...	0	0	2	...	0	—	2	...	(k-3)	...	0	k-2
24	0	-4	0	...	0	-2	0	...	0	2	—	...	2k-6	...	0	(4)(k-2)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2(k-1)	0	6-2k	0	...	(3-k)(1-k)	3-k	0	...	(3-k)(2-k)	k-3	2k-6	...	—	...	k-3	(3-k) ² (k-2)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
(k-2)(k-1)	0	0	0	...	k-1	0	0	...	k-2	0	0	...	k-3	...	—	(k-2)

Çizelge 2.1.'den dikkat edileceği üzere her bir ij satırı için katsayıların bir kısmı pozitif bir kısmı negatiftir. Kovaryans formülünü indirgeyebilmek için bu katsayıların toplamını elde etmek gerekir. Herhangi bir ij satırı için V_2 teriminde $(j-i)$ katsayısı gelecektir. Bu katsayıya ifade kolaylığı sağlaması açısından v densin. Dikkat edileceği üzere herhangi bir ij satırı için pozitif terimlerin toplamı $\left[\sum_{i=1}^{k-1} i - v + \sum_0^{v-1} i \right]$ ve negatif terimlerin toplamı $v \sum_{i=1}^{k-1-v} i$ dir. Dolayısı ile herhangi bir ij satırı için katsayıların toplamı;

$$\text{Toplam} = v \left[\sum_{i=1}^{k-1} i - v \right] - v \sum_{i=1}^{k-1-v} i + v \sum_{i=0}^{v-1} i = v \left[\sum_{i=1}^{k-1} i - v - \sum_{i=1}^{k-1-v} i + \sum_{i=0}^{v-1} i \right]$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu ifadeden faydalanarak

$$\begin{aligned} \text{Toplam} &= v \left[\frac{(k-1)k}{2} - v - \frac{(k-1-v)(k-v)}{2} + \frac{v(v-1)}{2} \right] \\ &= v \left[\frac{k^2 - k - 2v - k^2 + kv + k - v + kv - v^2 + v^2 - v}{2} \right] \\ &= v \left[\frac{2kv - 4v}{2} \right] = v^2 [k - 2] \\ &= (j-i)^2 [k - 2] \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Dikkat edileceği üzere bu ifade sadece ij satırı için elde edilmiştir. Bu ifadeyi tüm satırlar için toplamak gerekir. Bu ifade toplandığında $(k-2) \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{k-j} i^2$ yazılabilir. Dolayısı ile V_2 aşağıdaki gibi yazılır.

$$V_2 = (k-2) \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{k-j} i^2 = (k-2) \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(k-j)(k-j+1)(2k-2j+1)}{6}$$

Bu ifade aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir.

$$\begin{aligned} &= (k-2) \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(i)(i+1)(2i+1)}{6} = (k-2) \left[\frac{\sum_{i=1}^{k-1} 2i^3 + 3i^2 + i}{6} \right] = (k-2) \left[\frac{2 \sum_{i=1}^{k-1} i^3 + 3 \sum_{i=1}^{k-1} i^2 + \sum_{i=1}^{k-1} i}{6} \right] \\ &= \frac{(k-2)}{6} \left[\frac{2(k-1)k^2}{4} + \frac{3(k-1)(k)(2k-1)}{6} + \frac{(k-1)(k)}{2} \right] \\ &= \frac{(k-2)}{6} \left[\frac{(k-1)k^2 + (k-1)(k)(2k-1) + (k-1)(k)(2k-1)}{2} \right] \\ &= \frac{(k-2)}{6} \left[\frac{(k-1)k}{2} (k^2 - k + 2k - 1 + 1) \right] = \frac{(k-2)}{6} \left[\frac{(k-1)k}{2} (k^2 + k) \right] \\ &= \frac{(k-2)}{6} \left[\frac{k^2(k-1)(k+1)}{2} \right] = \frac{(k-2)}{12} [k^2(k^2 - 1)] \end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$V_2 = \frac{(k-2)}{12} [k^2(k^2 - 1)] \frac{n^3}{12}$$

olarak elde edilir. Bulunan V_1 ve V_2 ifadeleri Eş.2.7' de yerine konulduğunda T_{MJ} test istatistiğinin varyansı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} V(T_{MJ}) &= V_1 + V_2 = \frac{n^2(2n+1)}{144} [k^2(k^2 - 1)] + \frac{n^3(k-2)}{144} [k^2(k^2 - 1)] \\ &= \frac{k^2(k^2 - 1)}{144} [n^2(2n+1) + n^3(k-2)] = \frac{k^2(k^2 - 1)}{144} [n^2 + 2n^3 + n^3k - 2n^3] \end{aligned}$$

$$= \frac{k^2(k^2-1)}{144} [n^3k + n^2] \quad (2.9)$$

Buradan

$$V(T_{MJ}) = \frac{k^2(k^2-1)n^2(nk+1)}{144}$$

olduğu görülür. □

Neuhauser ve diğerleri (1998)' nin verdiği formülün özellikle grup sayısı arttıkça hesaplanması zordur. Eş. 2.8' de eldedilen formül örnek çapları eşitken Neuhauser ve diğerleri (1998)' nin formülünden hesapama açısından oldukça kolaydır.

Büyük örnek çapları için;

$\frac{T_{MJ} - E_0(T_{MJ})}{[Var(T_{MJ})]^{1/2}} \sim Z(0,1)$ ' den yararlanılır. Paydadaki $Var(T_{MJ})$ değeri tezde elde

edilen varyanstır. Ve $\frac{T_{MJ} - E_0(T_{MJ})}{[Var(T_{MJ})]^{1/2}} \geq Z_{\alpha}$ olması durumunda H_0 reddedilir

[Neuhauser ve ark., 1998]. *MJ* testi için aşağıdaki örnek verilmiştir.

Örnek

Yapılan bir araştırmada iki gruba farklı dozajda kandaki hemoglobini arttırıcı olan A ilacından verilmiştir. İlaç verilmeyen bir grup hasta kontrol grubu olarak alınmıştır. İlaç verilen ilk gruba 2 mg, ikinci gruba 4 mg ilaç verilmiştir. Her gruptan rasgele üçer hasta seçilmiştir. Hastalara verilen ilacın dozunun artmasıyla kandaki hemoglobinin artıp artmadığı ile ilgilenilmektedir. Veri seti aşağıdaki gibidir.

<u>0 mg</u>	<u>2 mg</u>	<u>4 mg</u>
25	18	42
32	27	38
41	33	29

İlgilenilen sıfır hipotezi ve alternatif hipotez aşağıdaki gibidir.

$$H_0 : \mu_0 = \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \quad , \quad \text{en az bir eşitsizlik doğru olmak üzere}$$

MJ test istatistiği aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
 T_{MJ} &= \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{j=i+1}^{k-1} (j-i)U_{ij} = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=i+1}^2 (j-i)U_{ij} \\
 &= (1-0)U_{01} + (2-0)U_{02} + (2-1)U_{12} \\
 &= U_{01} + 2U_{02} + U_{12} = 3 + 2(6) + 8 = 23
 \end{aligned}$$

Normal dağılım yakınsamasından fayadalanmak için önce $E_0(T_{MJ})$ ele alınsın,

$$\begin{aligned}
 E_0(T_{MJ}) &= \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{j=i+1}^{k-1} (j-i) \frac{n_i n_j}{2} = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=i+1}^2 (j-i) \frac{n_i n_j}{2} \\
 &= (1-0) \frac{n_0 n_1}{2} + (2-0) \frac{n_0 n_2}{2} + (1-0) \frac{n_1 n_2}{2} \\
 &= \frac{9}{2} + \frac{18}{2} + \frac{9}{2} = 18
 \end{aligned}$$

T_{MJ} istatistiğinin varyansı hem Neuhauser ve diğerleri (1998) ' de verilen Eş. 2.6' daki hem de bu çalışmada elde edilmiş olan Eş. 2.8'den hesaplınsın. Eş. 2.6' ya göre,

$$\begin{aligned}
V_0(T_{MJ}) &= V_0(U_{01} + 2U_{02} + U_{12}) \\
&= V_0(U_{01}) + 4V_0(U_{02}) + V_0(U_{12}) + 4Cov(U_{01}, U_{02}) + 2Cov(U_{01}, U_{12}) + 4Cov(U_{02}, U_{12}) \\
&= \frac{1}{12}n_0n_1(n_0 + n_1 + 1) + \frac{4}{12}n_0n_2(n_0 + n_2 + 1) + \frac{1}{12}n_1n_2(n_1 + n_2 + 1) \\
&\quad - \frac{2}{12}n_0n_1n_2 + \frac{4}{12}n_0n_1n_2 + \frac{4}{12}n_0n_1n_2
\end{aligned}$$

Örnek çapları yerine konduğunda

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{12}(3)(3)(7) + \frac{4}{12}(3)(3)(7) + \frac{1}{12}(3)(3)(7) - \frac{2}{12}(27) + \frac{4}{12}(27) + \frac{4}{12}(27) \\
&= 45
\end{aligned}$$

bulunur.

Eş. 2.8' de elde edilen varyans formülünden yararlanarak hesaplanan varyans formülü ise aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
V_0(T_{MJ}) &= \frac{k^2(k^2 - 1)n^2(nk + 1)}{144} \\
&= \frac{(9)(8)(9)(10)}{144} = 45
\end{aligned}$$

Görüldüğü üzere bu çalışmada elde edilen T_{MJ} istatistiğinin varyans formülünden varyansı elde etmek oldukça kolay ve kısadır.

Örnek çapının yeteri kadar büyük olduğu varsayılın. Bu durumda normal dağılıma yakınsamasından,

$\frac{23-18}{\sqrt{45}} = 0,7453$ elde edilir. $\alpha = 0,05$ için $Z_\alpha = 1,64 > 0,745$ olduğundan H_0

reddedilemez. 0,05 anlamlılık düzeyinde hastalara verilen ilaç dozunun artmasıyla kandaki hemoglobin miktarının artmadığı söylenir.

2.4. Terpstra ve Magel (2003) Test İstatistiği

Sıralı alternatif problemi için geliştirilmiş parametrik olmayan testlerden biri de Terpstra ve Magel (2003)' in geliştirdiği testtir. Yokluk hipotezi ve alternatif hipotez

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$

$$H_1 : \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_k \quad , \quad \text{en az bir eşitsizlik doğru olmak üzere}$$

şeklinde dir. k grup sayısı, n_i i ' inci grubun örnek çapı olup, $\{X_{ij}\}$, $(i=1,2,\dots,k \text{ ve } j=1,2,\dots,n_i)$ i ' inci gruba ait j ' inci veriyi temsil eder. Sıralı alternatiflerin testi için geliştirilmiş parametrik olmayan testler genellikle ikili sınamalara dayanır. Terpstra ve Magel testi (TM) ise sıralı alternatifte verilen sıranın tamamının sağlanıp sağlanmadığına dayanır ve aşağıdaki istatistik üzerine kurulmuştur.

$$T_{TM} = \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_k=1}^{n_k} I(X_{1i_1} \leq X_{2i_2} \leq \dots \leq X_{ki_k})$$

Bu test istatistiği şemsiye modeller için de uygulanabilir. Örneğin $H_1 : \mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \geq \mu_4$ için

$$T_{TM} = \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_4=1}^{n_4} I(X_{1i_1} \leq X_{2i_2} \leq X_{3i_3} \geq X_{4i_4})$$

olarak kullanılabilir. Yapılan çalışmada sadece iki örneğin incelenmesi durumunda bu test istatistiği Mann-Whitney test istatistiğine dönüşecektir.

T_{TM} ' nin teorik dağılımını bulmak mümkündür. Burada $\frac{N!}{(n_1! \dots n_k!)}$ farklı durum söz konusudur [Terpstra ve Magel, 2003]. Örnek çapı ve özellikle grup sayısı arttıkça bu testi bilgisayar yardımıyla dahi yapmak oldukça zaman alıcıdır. Örneğin $n_1=10, n_2=10, n_3=10$ için $30!/(10! \cdot 10! \cdot 10!) = 555\,099\,679\,134$ farklı durum söz konusudur. Bu kadar farklı kombinasyonla işlem yapmak uygulamalarda pratik olmayabilir. Bu testin işleyişini küçük bir örnek üzerinden gösterelim. $n_1=2, n_2=1, n_3=1$ örnekleri dikkate alındığında $4!/(2! \cdot 1! \cdot 1!) = 12$ farklı durum söz konusudur. (2, 1, 1) için T_{TM} ' nin teorik dağılımı bulunmak istensin. Bu durumda verilerin $X_{11} < X_{21} < X_{31}$ veya $X_{12} < X_{21} < X_{31}$ sıralamalarına uyup uymadığı dikkate alınacaktır. Bu iki sıralamadan ikisi de sağlanıyorsa 2, yalnız biri sağlanıyorsa 1, aksi halde 0 değeri alır. Çizelge 2.2' de bu değerlerin tümü gösterilmiştir.

Çizelge 2.2. ($n_1 = 2, n_2 = 1, n_3 = 1$) için Test istatistik değerleri

Durum no:	Olası sıralama	T	Durum no:	Olası sıralama	T
1	$X_{11} < X_{12} < X_{21} < X_{31}$	2	13	$X_{21} < X_{11} < X_{12} < X_{31}$	0
2	$X_{11} < X_{12} < X_{31} < X_{21}$	0	14	$X_{21} < X_{11} < X_{31} < X_{12}$	0
3	$X_{11} < X_{21} < X_{12} < X_{31}$	1	15	$X_{21} < X_{12} < X_{11} < X_{31}$	0
4	$X_{11} < X_{21} < X_{31} < X_{12}$	1	16	$X_{21} < X_{12} < X_{31} < X_{11}$	0
5	$X_{11} < X_{31} < X_{12} < X_{21}$	0	17	$X_{21} < X_{31} < X_{11} < X_{12}$	0
6	$X_{11} < X_{31} < X_{21} < X_{12}$	0	18	$X_{21} < X_{31} < X_{12} < X_{11}$	0
7	$X_{12} < X_{11} < X_{21} < X_{31}$	2	19	$X_{31} < X_{11} < X_{12} < X_{21}$	0
8	$X_{12} < X_{11} < X_{31} < X_{21}$	0	20	$X_{31} < X_{11} < X_{21} < X_{12}$	0
9	$X_{12} < X_{21} < X_{11} < X_{31}$	1	21	$X_{31} < X_{12} < X_{11} < X_{21}$	0
10	$X_{12} < X_{21} < X_{31} < X_{11}$	1	22	$X_{31} < X_{12} < X_{21} < X_{11}$	0
11	$X_{12} < X_{31} < X_{11} < X_{21}$	0	23	$X_{31} < X_{21} < X_{11} < X_{12}$	0
12	$X_{12} < X_{31} < X_{21} < X_{11}$	0	24	$X_{31} < X_{21} < X_{12} < X_{11}$	0

Çizelge 2.3. ($n_1 = 2, n_2 = 1, n_3 = 1$) iken T_{TM} 'nin dağılımı, beklenen değeri ve Varyansı

(n_1, n_2, n_3)	Test İstatistik Değeri (T_{TM})			$E(T_{TM})$	$V(T_{TM})$
(2, 1, 1)	0	1	2		
	18/24	4/24	2/24	1/3	7/18

Burada test istatistiği T_{TM} ' nin örneklem dağılımı üzerinden beklenen değer ve varyansı

$$E(T_{TM}) = 0 \cdot \frac{18}{24} + 1 \cdot \frac{4}{24} + 2 \cdot \frac{2}{24} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} V(T_{TM}) &= E(T_{TM}^2) - (E(T_{TM}))^2 \\ &= 0 \cdot \frac{18}{24} + 1^2 \cdot \frac{4}{24} + 2^2 \cdot \frac{2}{24} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{18} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Ayrıca beklenen değer ve varyansı

$$n^* = \prod_{i=1}^k n_i \text{ olmak üzere}$$

$$E(T_{TM}) = \frac{n^*}{k!} \quad (2.10)$$

$$V(T_{TM}) = n^* \left(\frac{1}{k!} \right) \left(1 - \frac{1}{k!} \right) + \sum_{i=1}^{k-1} v_i^2 \quad (2.11)$$

$$v_i^2 = \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_i \leq k} n^* \left(\prod_{s=1}^k (n_s - 1)^{I(s \neq l_1) \dots I(s \neq l_i)} \right) \left(\frac{C_{k-l_i}^{2(k-l_i)}}{(2k-i)! \prod_{s=1}^i C_{l_s-l_{s-1}-1}^{2(l_s-l_{s-1}-1)}} - \frac{1}{(k!)^2} \right) \quad (2.12)$$

yardımla da elde edilebilir.

$n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $n_3 = 1$ için beklenen değer Eş. 2.10 yardımıyla $0^0 = 1$ ve $l_0 = 0$ olmak üzere,

$$n^* = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = (2) \cdot (1) \cdot (1) = 2$$

$$E(T_{TM}) = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}$$

olarak bulunur. Varyans ise Eş.2.11'den

$$\begin{aligned} V(T_{TM}) &= 2 \left(\frac{1}{3!} \right) \left(1 - \frac{1}{3!} \right) + v_1^2 + v_2^2 \\ &= 2 \left(\frac{1}{6} \right) \left(\frac{5}{6} \right) + v_1^2 + v_2^2 = \frac{5}{18} + v_1^2 + v_2^2 \end{aligned}$$

bulunur. Buradaki v_1^2 ve v_2^2 Eş. 2.12 yardımıyla bulunur.

$$v_1^2 = \sum_{1 \leq l_1 \leq 3} n^* \left(\prod_{s=1}^3 (n_s - 1)^{I(s \neq l_1)} \right) \left(\frac{C_{3-l_1}^{2(3-l_1)}}{(2(3)-1)!} \prod_{s=1}^1 C_{l_s-l_{s-1}-1}^{2(l_s-l_{s-1}-1)} - \frac{1}{(3!)^2} \right)$$

- $l_1 = 1$ için

$(n_1 - 1)^{I(1 \neq 1)} (n_2 - 1)^{I(2 \neq 1)} (n_3 - 1)^{I(3 \neq 1)} = (2-1)^0 (1-1)^1 (1-1)^1 = 0$ olduğundan çarpımda sıfır olacaktır. Dolayısı ile işleminin devamını yapmaya gerek yoktur.

$$v_2^2 = \sum_{1 \leq l_1 < l_2 \leq 3} n^* \left(\prod_{s=1}^3 (n_s - 1)^{I(s \neq l_1) I(s \neq l_2)} \right) \left(\frac{C_{3-l_2}^{2(3-l_2)}}{(2(3)-2)!} \prod_{s=1}^2 C_{l_s-l_{s-1}-1}^{2(l_s-l_{s-1}-1)} - \frac{1}{(3!)^2} \right)$$

- $l_1 = 2, l_2 = 3$ için;

$$(n_1 - 1)^{I(1 \neq 2) I(1 \neq 3)} (n_2 - 1)^{I(2 \neq 2) I(2 \neq 3)} (n_3 - 1)^{I(3 \neq 2) I(3 \neq 3)} = (2-1)^{(1),(1)} (1-1)^{(0),(1)} (1-1)^{(1),(0)} = 1$$

$$\frac{C_{3-3}^{2(3-3)}}{(2(3)-2)!} = \frac{C_0^0}{4!} = \frac{1}{24}$$

$$C_{l_1-l_0-1}^{2(l_1-l_0-1)} \cdot C_{l_2-l_1-1}^{2(l_2-l_1-1)} = C_{2-0-1}^{2(2-0-1)} \cdot C_{3-2-1}^{2(3-2-1)} = C_1^2 \cdot C_0^0 = 2$$

Sonuç olarak,

$$V(T_{TM}) = \frac{5}{18} + v_1^2 + v_2^2 = \frac{5}{18} + 0 + \frac{1}{9} = \frac{7}{18} \quad \text{elde edilir.}$$

Örnek çaplarının eşit olması durumunda beklenen değer,

$$E(T_{TM}) = \frac{n^k}{k!} \quad (2.13)$$

şeklinde olacaktır. Örnek çaplarının eşit olması durumunda Eş.2.11'deki eşitlikteki varyans formülü aşağıdaki gibi olacaktır.

$$V(T_{TM}) = n^k \left(\frac{1}{k!} \right) \left(1 - \frac{1}{k!} \right) + \sum_{i=1}^{k-1} v_i^2 \quad (2.14)$$

Burada,

$$v_i^2 = \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_i \leq k} n^* \left(\prod_{s=1}^k (n_s - 1)^{I(s \neq l_1) \dots I(s \neq l_i)} \right) \left(\frac{C_{k-l_i}^{2(k-l_i)}}{(2k-i)!} \prod_{s=1}^i C_{l_s-l_{s-1}-1}^{2(l_s-l_{s-1}-1)} - \frac{1}{(k!)^2} \right)$$

şeklindedir. Örnek çaplarının eşit olması durumunda bu eşitlik

$$v_i^2 = \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_i \leq k} n^k (n-1)^{\sum_{s=1}^k I(s \neq l_1) \dots I(s \neq l_i)} \left(\frac{C_{k-l_i}^{2(k-l_i)}}{(2k-i)!} \prod_{s=1}^i C_{l_s-l_{s-1}-1}^{2(l_s-l_{s-1}-1)} - \frac{1}{(k!)^2} \right)$$

şeklinde olacaktır. $I(s \neq l_1) \dots I(s \neq l_i)$ ifadesinin 1 olması için $l_1, l_2, \dots, l_i$ ifadelerinden hiç birinin s' ye eşit olmaması gerekir. Tek bir tanesi 0' a eşit

olsa bile ifade sifıra eşit olur. Bu ifade i farklı şekilde 0' ı barındırır. Dolayısıyla ifade i kez sıfır olur. Geri kalan k-i durum ise 1' e eşittir. Böylece

$$\sum_{s=1}^k I(s \neq l_1) \dots I(s \neq l_i) = (k-i)$$

dir. Dolayısıyla $n^k (n-1)^{\sum_{s=1}^k I(s \neq l_1) \dots I(s \neq l_i)} = n^k (n-1)^{(k-i)}$ olur. Toplama işlemine bakıldığında bu ifade $l_1, l_2, \dots, l_i$ ' den bağımsızdır. Böylece v_i^2 eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} v_i^2 &= \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_i \leq k} n^k (n-1)^{(k-i)} \left(\frac{C_{k-l_i}^{2(k-l_i)}}{(2k-i)!} \prod_{s=1}^i C_{l_s-l_{s-1}-1}^{2(l_s-l_{s-1}-1)} - \frac{1}{(k!)^2} \right) \\ &= n^k (n-1)^{(k-i)} \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_i \leq k} \left(\frac{C_{k-l_i}^{2(k-l_i)}}{(2k-i)!} \prod_{s=1}^i C_{l_s-l_{s-1}-1}^{2(l_s-l_{s-1}-1)} - \frac{1}{(k!)^2} \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Grup sayısı k ve örnek çapı n_i arttığında T_{TM} ' nin teorik dağılımının bulunması ve beklenen değer ile varyansın bulunması zorlaşacaktır. Örneğin $k=4$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 1$, $n_4 = 4$ için $10! / (2! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 4!) = 12600$ farklı durum söz konusu olur. Böyle durumlarda normal dağılımdan ya da Monte Carlo yaklaşımından yararlanılır. $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_{T_{TM}} \sim N(0,1)$ için;

$$Z_{T_{TM}} = \frac{T_{TM} - E_0(T_{TM})}{\sqrt{V_0(T_{TM})}} \sim N(0,1) \text{ 'den yararlanılır. } Z_{T_{TM}} > Z_{\alpha} \text{ olması durumunda}$$

H_0 reddedilir [Terpstra ve Magel, 2003]

2.5. Modifiye Edilmiş Terpstra-Magel (2007) Test İstatistiği

Chang (2007) tarafından geliştirilen bu tes TM testinin genelleştirilmiş bir hali olup farklı olarak bu testte Spearman (1904)' in korelasyon katsayısı kullanılmıştır. İlgilenilen sıfır hipotezi ve alternatif hipotez TM testine benzer olarak

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$

$$H_1 : \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_k, \quad \text{en az bir eşitsizlik doğru olmak üzere}$$

şeklinde dir. Burada k grup sayısını göstermektedir. Spearman korelasyon katsayısının $\prod_{i=1}^k n_i$ tane toplamına dayanan bu test istatistiği aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$T_{MTM} = \sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_k=1}^{n_k} r(x_{1j_1}, x_{2j_2}, \dots, x_{kj_k})$$

Burada $r(x_{1j_1}, x_{2j_2}, \dots, x_{kj_k})$ gözlemlenen veri ve ilgili grup arasındaki spearman korelasyon katsayısını göstermektedir. Spearman korelasyon katsayısı $r(x_{1j_1}, x_{2j_2}, \dots, x_{kj_k})$ aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$r(x_{1j_1}, x_{2j_2}, \dots, x_{kj_k}) = \frac{12 \sum_{i=1}^k i \cdot R(x_{ij_i} | x_{1j_1}, \dots, x_{kj_k})}{k(k^2 - 1)} - 3 \left(\frac{k+1}{k-1} \right)$$

Burada $R(x_{ij_i} | x_{1j_1}, \dots, x_{kj_k})$, x_{ij_i} ' nin $x_{1j_1}, \dots, x_{kj_k}$ arasındaki rankını göstermektedir. H_1 doğru olduğunda r ve $R(x_{ij_i} | x_{1j_1}, \dots, x_{kj_k})$ ilişkili olduğundan

$r(x_{1j_1}, x_{2j_2}, \dots, x_{kj_k})$ büyük değer alacaktır ve dolayısıyla T_{MTM} büyük değer alacaktır. Bu yüzden red bölgesi T_{MTM} 'nin büyük değerlerinden oluşur.

T_{MTM} 'nin teorik dağılımını bulmak mümkündür. Burada $N!/(n_1! \dots n_k!)$ farklı durum söz konusudur. Örneğin $k=4$, $n_1=n_2=n_3=n_4=5$ olduğunda $20!/5!5!5!5!=1.1733 \times 10^{10}$ farklı durum söz konusudur. Örnek çapı arttıkça T_{MTM} istatistiğini standartlaştırılarak normal dağılım yaklaşımından yararlanılabilir. Bunun için T_{MTM} istatistiğinin beklenen değeri

$$\begin{aligned} E_0(T_{MTM}) &= E_0 \left[\sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_k=1}^{n_k} r(x_{1j_1}, x_{2j_2}, \dots, x_{kj_k}) \right] \\ &= \sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_k=1}^{n_k} E_0[r(x_{1j_1}, x_{2j_2}, \dots, x_{kj_k})] \end{aligned}$$

$E_0[r(x_{1j_1}, x_{2j_2}, \dots, x_{kj_k})] = 0$ olduğundan

$$E_0(T_{MTM}) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_k=1}^{n_k} 0 = 0 \quad (2.16)$$

elde edilir [Hollander ve Wolfe, 1999].

T_{MTM} 'nin varyansı ise Mann-Whitney istatistiğinin lineer bir fonksiyonudur.

$n^* = \prod n_i$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} V_0(T_{MTM}) &= V \left\{ n^* \frac{12}{k(k^2-1)} \left[\sum_{l=1}^k l(k-l+1) + \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{m=l+1}^k \left(\frac{m-l}{n_l n_m} \right) U_{lm} \right] - 3n^* \left(\frac{k+1}{k-1} \right) \right\} \\ &= V \left\{ n^* \frac{12}{k(k^2-1)} \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{m=l+1}^k \left(\frac{m-l}{n_l n_m} \right) U_{lm} \right\} \\ &= Cov \left\{ n^* \frac{12}{k(k^2-1)} \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{m=l+1}^k U_{lm}, n^* \frac{12}{k(k^2-1)} \sum_{u=1}^{k-1} \sum_{v=u+1}^k \left(\frac{v-u}{n_u n_v} \right) U_{uv} \right\} \end{aligned}$$

$$= (n^*)^2 \left[\frac{12}{k(k^2-1)} \right]^2 \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{m=l+1}^k \sum_{u=1}^{k-1} \sum_{v=u+1}^k \left(\frac{m-l}{n_l n_m} \right) \left(\frac{v-u}{n_u n_v} \right) \text{Cov}(U_{lm}, U_{uv})$$

olduğu görülür. Buradan gerekli işlemler yapıldıktan sonra T_{MTM} istatistiğinin varyansı

$$V_0(T_{MTM}) = \left[n^* \frac{12}{k(k^2-1)} \right]^2 \left\{ \left[\sum_{1 \leq l \leq m \leq k} \frac{(m-l)^2 (n_l + n_m + 1)}{12 n_l n_m} \right] + \left[\sum_{1 \leq l_1 \leq l_2 \leq l_3 \leq k} \frac{(l_2 - l_1)(l_3 - l_1)}{6 n_{l_1}} + \frac{(l_3 - l_2)(l_1 - l_2)}{6 n_{l_2}} + \frac{(l_1 - l_3)(l_2 - l_3)}{6 n_{l_3}} \right] I(k > 2) \right\} \quad (2.17)$$

şeklinde elde edilir [Chang, 2007].

Örneğin $k=3, (n_1, n_2, n_3) = (2, 1, 1)$ için beklenen değer $E_0(T_{MTM}) = 0$ varyans ise Eş. 2.17' den

$$\begin{aligned} V_0(T_{MTM}) &= \left[2 \frac{12}{3 \cdot (8)} \right]^2 \left\{ \left[\sum_{1 \leq l \leq m \leq 3} \frac{(m-l)^2 (n_l + n_m + 1)}{12 n_l n_m} \right] + \left[\sum_{1 \leq l_1 \leq l_2 \leq l_3 \leq 3} \frac{(l_2 - l_1)(l_3 - l_1)}{6 n_{l_1}} + \frac{(l_3 - l_2)(l_1 - l_2)}{6 n_{l_2}} + \frac{(l_1 - l_3)(l_2 - l_3)}{6 n_{l_3}} \right] \cdot 1 \right\} \\ &= 1 \left\{ \left[\frac{(2-1)^2 (1+2+1)}{12(2)(1)} + \frac{(3-2)^2 (1+1+1)}{12(1)(1)} + \frac{(3-1)^2 (1+2+1)}{12(2)(1)} \right] + \left[\frac{(2-1)(3-1)}{6} + \frac{(3-2)(1-2)}{6(2)} + \frac{(1-3)(2-3)}{6(3)} \right] \right\} \\ &= \frac{13}{12} + \frac{13}{36} = 1,441 \end{aligned}$$

$$Z_{T_{MTM}} = \frac{T_{MTM} - E(T_{MTM})}{\sqrt{V(T_{MTM})}} \sim N(0,1) \quad \text{'den yararlanılabilir. } Z_{T_{MTM}} > Z_{\alpha} \text{ olması}$$

durumunda H_0 reddedilir.

MTM testinin işleyişinin anlaşılması için MJ testinin altında incelenen örnek ele alınsın.

$$T_{MTM} = \sum_{j_1=1}^3 \sum_{j_2=1}^3 \sum_{j_3=1}^3 r(x_{1j_1}, x_{2j_2}, x_{3j_3})$$

Buradaki $r(x_{1j_1}, x_{2j_2}, x_{3j_3})$ aşağıdaki gibidir.

$$r(x_{1j_1}, x_{2j_2}, x_{3j_3}) = \frac{12 \sum_{i=1}^k i.R(x_{ij_i} | x_{1j_1}, x_{2j_2}, x_{3j_3})}{3(3^2 - 1)} - 3 \left(\frac{3+1}{3-1} \right)$$

$j_1 = 1, j_2 = 1$ ve $j_3 = 1$ için ,

$$\begin{aligned} r(x_{11}, x_{21}, x_{31}) &= \frac{12 \sum_{i=1}^k i.R(x_{ij_i} | x_{1j_1}, x_{2j_2}, x_{3j_3})}{3(3^2 - 1)} - 3 \left(\frac{3+1}{3-1} \right) \\ &= \frac{12 \left[R(x_{11} | x_{11}, x_{21}, x_{31}) + 2.R(x_{21} | x_{11}, x_{21}, x_{31}) + 3.R(x_{31} | x_{11}, x_{21}, x_{31}) \right]}{3(3^2 - 1)} - 6 \\ &= \frac{12[2+2+9]}{24} - 6 = 0,5 \end{aligned}$$

Bu şekilde devam edilerek $T_{MTM} = 7,5$ bulunur. T_{MTM} istatistiğinin varyansı aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
V(T_{MTM}) &= \left[3^2 \frac{12}{3(8)} \right] \left\{ \left[\frac{(2-1)^2(7)}{12(9)} + \frac{(3-1)^2(7)}{12(9)} + \frac{(3-2)^2(7)}{12(9)} \right] + \left[\frac{(2-1)(3-1)}{6(3)} + \frac{(3-2)(1-2)}{6(3)} + \frac{(1-3)(2-3)}{6(3)} \right] \right\} \\
&= (13,5)^2 \left\{ \frac{7+4(7)+7}{12(9)} + \frac{2-1+2}{6(3)} \right\} = 101,25
\end{aligned}$$

T_{MTM} istatistiği için normal dağılım yakınsaması kullanılacak olursa;

$$Z_{T_{MTM}} = \frac{7,5-0}{\sqrt{101,25}} = 0,7453$$

elde edilir. $Z_{T_{MTM}} = 0.7453 < Z_{\alpha} = 1,64$ olduğundan H_0 reddedilemez. 0,05 anlamlılık düzeyinde hastalara verilen ilaç dozunun artmasıyla kandaki hemoglobin miktarının artmadığı söylenir.

2.6. Ferdhiana, Terpstra ve Magel (2008) Test İstatistiği

Sıralı alternatiflerin testi için geliştirilen parametre dışı test istatistiklerinden biri de Ferdhiana ve diğerlerinin (2008) geliştirdiği test istatistiğidir. Bu test istatistiği Terptrra ve Magel' in 2003' de geliştirdiği T_{TM} test istatistiğine benzer olarak ikili sınamalar yerine alternatif hipotezde verilen sıralamanın tamamının sıralanıp sıralanmamasına dayanmaktadır. Aralarındaki fark T_{FTM} test istatistiğindeki Kendall'ın tau korelasyon katsayısına dayalı olmasıdır. Yokluk hipotezi ve alternatif hipotez

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$

$$H_1 : \mu_1 \leq \mu_2 \dots \leq \mu_k \quad , \text{ en az bir eşitsizlik doğru olmak üzere}$$

şeklindedir. Ferdhiana ,Terpstra ve Magel (FTM) test istatistiği ise aşağıdaki gibidir,

$$T_{FTM} = \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \dots \sum_{i_k=1}^{n_k} \tau(X_{1i_1}, X_{2i_2}, \dots, X_{ki_k}).$$

Burada $\tau(X_{1i_1}, X_{2i_2}, \dots, X_{ki_k})$ ifadesi Kendall'ın korelasyon katsayısını temsil etmektedir. Bu ifade

$$T_{FTM} = \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \dots \sum_{i_k=1}^{n_k} \frac{2}{k(k-1)} \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{m=l+1}^k \text{sgn}(l-m) \text{sgn}(X_{li_1} - X_{mi_m}) \quad l < m \text{ için} \quad (2.18)$$

şeklinde yazılabilir. $\{X_{ij}\}, i=1,2,\dots,k$, $j=1,2,\dots,n_i$ olmak üzere sıralı alternatifin testi için örnek verisini temsil etmektedir. Buradaki k grup sayısı, n_i i 'inci gruba ait gözlem sayısıdır.

U_{lm} , l ve m grup için Mann-Whitney istatistiği olmak üzere Eş.2.18' deki ifade

$$T_{FTM} = (n_1 n_2 \dots n_k) \left(-1 + \frac{4}{k(k-1)} \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{m=l+1}^k W_n(l, m) U_{lm} \right)$$

şeklinde Mann-Whitney test istatistiğinin bir fonksiyonu olarak yazılabilir. Buradaki $W_n(l-m)$, l ve m örneklerin alındığı grup sayısını ifade etmek üzere $W_n(l-m) = m-l$ dir. Görüldüğü üzere $W_n(l-m)$ örnek çapı n 'den bağımsızdır.

Örnek çaplarının eşit olduğu yani $n_1 = n_2 = \dots = n_k = n$ olduğu durumlarda T_{FTM} test istatistiği JT test istatistiğinin lineer bir fonksiyonuna dönüşür ve

$$T_{FTM} = -n^k + \frac{4n^{k-2}}{k(k-1)} T_{JT} \quad (2.19)$$

şeklindedir.

T_{FTM} ' nin beklenen değeri

$$E(T_{FTM}) = (n_1 n_2 \dots n_k) \left[2 \left(\frac{2}{k(k-1)} \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{m=l+1}^k P(X_l < X_m) \right) - 1 \right] \text{ dir.}$$

Burada H_0 altında $P(X_l < X_m) = \frac{1}{2}$ olduğu için $E(T_{FTM}) = 0$ olur. H_0 altında

T_{FTM} ' nin varyansı ise

$$\begin{aligned} Var_0(T_{FTM}) = \frac{(n_1 n_2 \dots n_k)^2}{3} & \left[\sum_{r=1}^{k-1} \sum_{s=r+1}^k \left(\frac{n_r + n_s + 1}{n_r n_s} \right) + 2 \sum_{r=1}^{k-2} \frac{1}{n_r} \left(C_2^k + \frac{r^2 - (2k-1)r}{2} \right) \right. \\ & \left. - 2 \sum_{r=1}^{k-2} \sum_{s=r+1}^{k-1} \left(\frac{k-s}{n_s} \right) + 2 \sum_{r=1}^{k-2} \sum_{s=r+1}^{k-1} \sum_{t=s+1}^k \frac{1}{n_t} \right] \end{aligned}$$

şeklindedir .

Grup sayısı $k=3; 4; 5$ olduğu durumlarda varyans aşağıdaki tablodan yararlanarak hesaplanabilir.

Çizelge 2.4. $k = 3, 4, 5$ için Varyans formülü

k	Varyans formülü
3	$(1/3)(n_1 n_2 n_3) \{n_1 + n_2 + n_3 + 4n_2 n_3 + 4n_1 n_2\}$
4	$(1/3)(n_1 n_2 n_3) \{n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_1 n_4 + n_2 n_3 + n_2 n_4 + n_3 n_4 + 9n_1 n_2 n_3$ $+ n_1 n_2 n_4 + 9n_2 n_3 n_4 + n_1 n_3 n_4\}$
5	$(1/3)(n_1 n_2 n_3) \{n_1 n_4 n_5 + n_2 n_4 n_5 + n_2 n_3 n_5 + n_1 n_3 n_5 + n_1 n_2 n_5 + n_1 n_2 n_3$ $+ n_1 n_2 n_4 + n_2 n_3 n_4 + n_1 n_3 n_4 + 16n_2 n_3 n_4 n_5 + 4n_1 n_3 n_4 n_5$ $+ 4n_1 n_2 n_3 n_5 + 16n_1 n_2 n_3 n_4\}$

[Ferdhiana ve ark., 2008].

Yapılan simülasyon çalışmasında Çizelge 2.4.' de verilen varyans formüllerinin, deneysel olarak elde edilen varyans formüllerinden farklı sonuç verdiği gözlenmiş ve $Var_0(T_{FTM})$ ' nin bulunmasında Eş. 2.19' den yararlanılmıştır. $Var_0(T_{FTM})$ bulunmasında kullanılacak formül Eş.2.19' un varyansının alınmasıyla elde edilir ve aşağıdaki gibidir.

$$Var_0(T_{FTM}) = \left(\frac{4n^{k-2}}{k(k-1)} \right)^2 Var_0(T_{JT}) \quad (2.20)$$

Örnek çapı büyüdükçe normal dağılım yaklaşımından yararlanılır. Normal dağılım yaklaşımı için

$$Z_{T_{FTM}} = \frac{T_{FTM}}{\sqrt{Var_0(T_{FTM})}} \rightarrow N(0,1)$$

formülünden yararlanılır. $Z_{T_{FTM}} > Z_{\alpha}$ olması durumunda H_0 reddedilir [Hollander ve Wolfe,1999]. T_{FTM} testi bir aşağıda verilen örnekle incelenir.

Örnek

Yapılan bir çalışmada üç farklı ilaç dozu uygulanan hastalardan rassal olarak üçer hasta seçilmiştir. Hastalara verilen ilaç dozu arttıkça iyileşme süresinin kısalıp kısalmadığı ile ilgilenilmektedir.

<u>Grup 1</u>	<u>Grup 2</u>	<u>Grup 3</u>
18	30	45
26	36	42
22	40	43

Sıfır hipotezi ve alternatif hipotez aşağıdaki gibidir.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$H_1 : \mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 , \quad \text{en az bir eşitsizlik doğru olmak üzere}$$

Örnek çapları birbirine eşit olduğundan test istatistiğini bulmak için Eş. 2.19' dan yararlanılır. Dolayısı ile

$$T_{FTM} = 27$$

Çizelge 2.4 'deki formüllerden yararlanarak T_{FTM} 'nin varyansı

$$V(T_{FTM}) = (1/3)(3.3.3)[3+3+3+4(3)(3)+4(3)(3)] = 729$$

elde edilir. Örnek çapının yeteri kadar büyük olduğu varsayılırsa burada

$$Z_{T_{FTM}} = \frac{27}{\sqrt{729}} = 1 \text{ olarak bulunur. } \alpha = 0,05 \text{ alınır } Z_{T_{FTM}} = 1 < Z_{\alpha} = 1,64$$

olduğundan H_0 reddedilemez.

$Var_0(T_{FTM})$, Eş. 2.20 eşitliği kullanıldığında

$$Var_0(T_{FTM}) = \left(\frac{4(3)^{3-2}}{3(3-1)} \right)^2 Var_0(T_{JT})$$

dir. T_{JT} 'nin varyansının elde edilişi Eş. 2.5' de verilmiştir.

$$Var_0(T_{JT}) = \frac{N^2(2N+3) - \sum_{i=1}^k n_i^2(2n_i+3)}{72} = 20.85$$

Dolayısı ile ;

$$Var_0(T_{FTM}) = (4)(20,25) = 81$$

elde edilir. Bu varyans sonucu ile normal dağılım yaklaşımı kullanıldığında

$$Z_{T_{FTM}} = \frac{27}{\sqrt{81}} = 3$$

bulunur. $\alpha = 0,05$ alınır $Z_{T_{FTM}} = 3 > Z_{\alpha} = 1,64$ olduğundan H_0 reddedilir.

Verilere bakıldığında H_0 'ın reddedilmesi gerektiği açıkça görülmektedir.

Ancak Eş. 2.20 yardımıyla elde edilen varyans sonucunda H_0 reddedilirken

Çizelge 2.4 'den yararlanılarak elde edilen varyans sonucunda H_0 reddedilememiştir.

2.7. Permütasyon Testi

Uygulamalarda yığından defalarca örnek çekmenin çok maliyetli hatta olanaksız olduğu durumlarda yığına ilişkin bir çıkarım için tek bilgi kaynağı, oluşturulan eldeki tek bir örnek olabilir. Böyle bir durumda izlenebilecek yol yeniden örnekleme olarak adlandırılan eldeki örnekten yeni örnekler oluşturmaktır.

Permütasyon yöntemi yirminci yüzyılın başlarında önerilmesine karşın, bilgisayar teknolojisinin gelişmesi sonucu hesaplama güçlüğüne ortadan kalkması ile son yıllarda daha çok kullanılmaya başlamıştır.

Permütasyon yöntemi parametrik ve parametrik olmayan testlere göre bazı avantajlara sahiptir. Parametrik testler gibi örneklerin geldikleri dağılım hakkında herhangi bir varsayımı gerektirmez. Diğer bir önemli sebep ise, parametrik olmayan testler gibi verilerin sıra sayılarını değil gerçek değerlerini kullanarak işlem yapmaktadır. Anlaşılacağı üzere permütasyon yöntemi neredeyse tüm parametrik ve parametrik olmayan testler için uygundur. Ayrıca permütasyon testlerinin varsayımları sağlandığında parametrik testlere yakın (bazen daha iyi) sonuçlar verdiğini, varsayımlar sağlanmadığında ise çoğu zaman parametrik testlerden daha iyi sonuç verdiği söylenebilir. Bu yöntemin uygulanabilmesi için sağlanması gereken en önemli ve temel koşul gözlemlerin birbiriyle yer değiştirebilir olmasıdır [Good ,2006].

Permütasyon yöntemi ikiden fazla yığının ortalamalarının eşitliği hipotezinin testi amacıyla da kullanılmaktadır. Fakat bu yöntemin yapılabilmesi için yığın varyanslarının homojen olması gerekir. Behren-Fisher problemi olarak bilinen yığın varyanslarının homojen olmaması durumunda bir yığından gelen örnek birimleri diğer yığından gelen örnek birimleri ile yer değiştirme özelliğini kaybeder. Böylece yokluk hipotezinin doğruluğu altında permütasyon dağılımı oluşturulamaz [Manly, 2007].

Bu yöntemi tanıtmak için yaşam uzatmaya yönelik yeni bir E vitaminin deneysel uygulaması incelensin. Analize tedavi edilmiş gruptan 3, tedavi edilmemiş gruptan 3 olmak üzere toplam 6 örnek alınmıştır. Tedavi uygulandığında hücre yaşam süresinin uzaması beklenir. Sıfır hipotezi hücrenin yaşam süresi E vitaminin varlığından etkilenmez yani her hücre eşit yaşam süresine sahiptir şeklindedir. Alternatif hipotez ise hücredeki E vitaminin varlığının hücrenin yaşam süresini uzattığı şeklindedir. Burada iki grup olduğundan sadece E vitamini uygulanan grupta ki toplam yaşam süreleri test istatistiği olarak alındı. Eğer alternatif hipotez doğru ise çoğu zaman bu toplam tedavi yapılmayan gruptaki toplam sayımdan büyüktür. Sıfır hipotezi doğru ise iki gruptaki gözlemler yaklaşık olarak aynı olmalıdır.

Tedavi edilmiş ve edilmemiş hücrelerden 3' er örnek olmak üzere toplamda altı örnek alınmıştır. Tedavi edilmiş hücrelerden alınan örneklerin değeri 121,118, 110; tedavi edilmemiş hücrelerden alınan örneklerin değeri 34, 22, 12' dir. İlk grupta 121, 118, 110 değerlerinin olması durumunda test istatistiği $121+118+110=349$ dur. Bu altı değer tedavi edilmiş ve tedavi edilmemiş sütunlara rassal olarak atanmıştır. Bu şekilde $\binom{6}{3}=20$ farklı durum söz konusudur. Bu 20 durum ve her durumdaki test istatistik değeri Çizelge 2.5' de verilmiştir.

Çizelge 2.5. (121, 118, 110), (34, 22, 12) verisi için tüm mümkün permütasyonlar ve test istatistiğinin permütasyon dağılımı

	<i>İlk grup</i>	<i>İkinci grup</i>	<i>Test istatistik değeri</i>
1.	121 118 110	34 22 12	349
2.	121 118 34	110 22 12	273
3.	121 110 34	118 22 12	265
4.	118 110 34	121 22 12	262
5.	121 118 22	110 34 12	261
6.	121 110 22	118 34 12	253
7.	121 118 12	110 34 22	251
8.	118 110 22	121 34 12	250
9.	121 110 12	118 110 22	243
10.	118 110 12	121 34 22	240
11.	121 34 22	118 110 12	177
12.	118 34 22	121 110 12	174
13.	121 34 12	118 110 22	167
14.	110 34 22	121 118 12	166
15.	118 34 12	121 110 22	164
16.	110 34 12	121 118 22	156
17.	121 22 12	118 110 34	155
18.	118 22 12	121 110 34	152
19.	110 22 12	121 118 34	144
20.	34 22 12	121 118 110	68

İlgilenilen hipotez

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 > \mu_2$$

şeklinde. Verinin mümkün sıralamalar yapılmadan önceki halinde ki test istatistik değeri 349 idi. Çizelge 2.5' de 349' dan büyük test istatistiği değeri olup olmadığına bakılır. Çizelge 2.5.' den görüldüğü üzere 349 değerini

geçen test istatistik değeri yoktur. Bu durumda $p = \frac{0}{20} = 0$ 'dır. $p = 0 < 0.05$ olduğu için H_0 reddedilir.

Aynı yöntem k grup için de benzer şekilde yapılır. Bu tarz, tüm mümkün permütasyonlarla oluşturulan permütasyon testine tam permütasyon testi denir. Ancak örnek çapı büyük olduğunda tam permütasyon testini uygulamak oldukça zordur. Bunun yerine geliştirilen Monte Carlo Permütasyon testi kullanılır.

3. UYGULAMA

Bu bölümde, Gerek-79 adlı bisküvilik buğday çeşitlerinden elde edilen unlara elmadan elde edilen konsantre liflerin %5, %10, %15, %20 ve %25 oranlarında katılarak pişirilmesi ve sonuçta lif katkılı bisküvilerin renk değerlerine bakılması ile ilgilidir. Amaç, katılan katkıların artan oranlarına paralel olarak bisküvilerin yüzey renk ölçüm değerlerini nasıl etkilediğinin araştırılmasıdır. Bu amaçla, Hunter adı verilen cihaz ile bisküvilerin yüzey renkleri 5 farklı noktadan kolorimetrik olarak ölçülerek L değerleri elde edilmiştir. L değeri parlaklığı (lightness) ifade etmektedir. Katılan katkıya ve katma oranına bağlı olarak L değerinin azalması bisküvinin yüzey renginin karardığını, parlaklığının azaldığını göstermektedir [Özkaya ve Özkaya, 2009].

Çizelge 3.1. Konsantre lif oranlarına karşılık gelen parlaklık değerleri

Konsantre Lif Oranı					
	%25	%20	%15	%10	%5
Parlaklık Değerleri	53,92	56,79	55,54	58,32	64,72
	56,84	56,44	56,91	58,96	64,00
	55,90	54,78	57,07	58,97	64,71
	56,43	55,91	57,85	59,39	65,91

Çizelge 3.1' de verilmiş olan verilere $\alpha = 0.05$ alınarak Bartholomew testi, Bartholomew testinin permütasyon versiyonu, JT testi, JT testinin permütasyon versiyonu, MJ testi, TM testi, MTM testi ve FTM testi uygulanmıştır.

Çalışmada ilgilenilen hipotez Bartholomew testi hariç

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$$

$$H_1 : \mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \leq \mu_4 \leq \mu_5 , \quad \text{en az bir eşitsizlik doğru olmak üzere}$$

şeklindedir. Bartholomew testi için ise ilgilenilen hipotezler

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$$

$$H_1 : \mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq \mu_4 \geq \mu_5$$

şeklindedir. Veri seti, Bartholomew testi için ele alınırken eksi ile çarpılmıştır. Bartholomew testi sonucunda $\hat{\mu}_1 = -55,7725$, $\hat{\mu}_2 = -55,9800$, $\hat{\mu}_3 = -56,8425$, $\hat{\mu}_4 = -58,9100$, $\hat{\mu}_5 = -64,8350$ ve genel ortalama $-58,4680$ bulunmuştur. $\hat{\mu}_1 \geq \hat{\mu}_2 \geq \hat{\mu}_3 \geq \hat{\mu}_4 \geq \hat{\mu}_5$ sıralaması sağlanmaktadır. Görüldüğü üzere $l=5$ tir. Bulunanlar Eş. 2.1' de yerine konulduğunda $\bar{F}_k = 67,8369$ ve $p = 0,0000069$ bulunur. $p < 0,05$ olduğundan H_0 reddedilir.

Bartholomew testinin permütasyon versiyonunda ise $p = 0,0000007$ ve $\bar{F}_k = 67,8369$ bulunmuştur. Burada da $p < 0,05$ olduğundan H_0 reddedilir.

JT testi ile analizde U_{12} , U_{13} , U_{14} , U_{15} , U_{23} , U_{24} , U_{25} , U_{34} , U_{35} istatistikleri toplanır. Bu işlem sonucunda $T_{JT} = 147$ bulunur. T_{JT} 'nin beklenen değeri

$$E_0(T_{JT}) = \frac{N^2 - \sum_{i=1}^k n_i^2}{4} = \frac{20^2 - (4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2)}{4} = 80$$

bulunur. Varyansı Eş 2.5' den

$$Var_0(T_{JT}) = \frac{N^2(2N+3) - \sum_{i=1}^k n_i^2(2n_i+3)}{72}$$

$$= \frac{20^2(40+3) - [4^2(8+3) + 4^2(8+3) + 4^2(8+3) + 4^2(8+3) + 4^2(8+3)]}{72}$$

$$= 226.66$$

elde edilir. Normal dağılım yaklaşımı kullanıldığında $Z_{JT} = \frac{147-80}{\sqrt{226,66}} = 4,4502$

elde edilir. Ayrıca $p = 0,0000043$ bulunur. $Z_{JT} > Z_{\alpha}$ olduğundan H_0 reddedilir.

JT testinin permütasyon versiyonunda ise JT testinin analiz sonuçlarına benzer olarak $T_{JT} = 147$ ve $p = 0,0000008$ elde edilmiştir. $p < 0,05$ olduğundan H_0 reddedilir.

MJ testi ile yapılan analiz sonucunda $T_{MJ} = 304$ bulunur. T_{MJ} 'nin beklenen değeri,

$$E_0(T_{MJ}) = \sum_{i=0}^{k=2} \sum_{j=i+1}^{k=1} \frac{n_i n_j}{2} = 160$$

elde edilir. Varyansı ise Eş. 2.8' den

$$\begin{aligned} V_0(T_{MJ}) &= \frac{k^2(k^2-1)n^2(nk+1)}{144} \\ &= \frac{5^2(5^2-1)4^2(20+1)}{144} = 1400 \end{aligned}$$

elde edilir. Normal dağılım yaklaşımı kullanıldığında $Z_{TMJ} = \frac{304-160}{\sqrt{1400}} = 3,84$

elde edilir. $Z_{MJ} > Z_{\alpha}$ olduğundan H_0 reddedilir.

TM testi ile analizi sonucunda $T_{TM} = 448$ bulunmuştur. TM testinin beklenen değeri Eş. 2.10' dan

$$E_0(TM) = \frac{n^*}{k!} = \frac{4^5}{5!} = 8,533$$

bulunur. Varyansı ise Eş. 2.11 yardımıyla 237,9479 elde edilir. Normal dağılım yakınsaması kullanılacak olursa $Z_{TM} = 28,4895$ bulunur ve $p = 0,000003$ dir. $Z_{TM} > Z_{\alpha}$ ve $p < 0,05$ olduğundan H_0 reddedilir.

Son olarak FTM testinin analizi sonucunda $T_{FTM} = 857,600$ ve FTM testinin varyansı 37137×10^4 elde edilmiştir. Dolayısı ile $Z_{FTM} = 4,4502$ ve $p = 0,00000045$ bulunmuştur. $Z_{FTM} = 4,502 > Z_{\alpha} = 1,64$ ve $p < 0,05$ olduğundan H_0 reddedilir.

Sonuç olarak analiz sonucunda bütün testler de H_0 hipotezi reddedilmiştir. Yani bütün testlere göre 0,05 anlamlılık düzeyinde bisküviye katılan konsantre lifin oranı arttıkça bisküvilerin parlaklığı azalmaktadır.

4. SİMÜLASYON

Burada ikinci bölümde anlatılan Jonckheere (1954) ve Terpstra (1952), Bartholomew (1959), Modifiye edilmiş Jonckheere (1998), Terpstra ve Magel (2003), Modifiye edilmiş Terpstra ve Magel (2007), Ferdhina ve diğerleri (2008) testlerinin ve Jonckheere-Terpstra ile Bartholomew testlerinin permütasyon testi versiyonlarının güç ve deneysel I. hatalar bakımından karşılaştırılması simülasyon yoluyla yapılarak sonuçlar tablolarla ve grafiklerle gösterilmiştir. Yapılan simülasyon çalışması için Matlab R2009A programı kullanılmıştır.

4.1. Test İstatistiklerinin Deneysel I. Tip Hata Oranları Bakımından Karşılaştırılması

Simülasyon çalışmasında, test istatistiklerinin deneysel I. Tip hata oranları bakımından karşılatırılmasında ortalamaları eşit olarak belirlenen $k=3$, $k=4$, $k=5$ sayıda yığınlar için, örnek hacimlerinin eşit olduğu kombinasyonlar kullanılmıştır.

Yukarıda bahsedilen durumlar dikkate alınarak aynı ortalamalı normal dağılımlı yığınlardan, üstel dağılımlı yığınlardan ve tekdüze dağılımlı yığınlardan $n_1 = n_2 = \dots = n_k = n$ olmak üzere $n=5;10;20;30$ hacimli örnekler üretilmiştir. Bu örneklerin herbiri için ikinci bölümde bahsedilen Jonckheere ve Terpstra (TM), Bartholomew, Modifiye edilmiş Jonckheere (MJ), Terpstra ve Magel (TM), Modifiye edilmiş Terpstra ve Magel (MTM), Ferdhina ve diğerleri (FTM) testleri, Jonckheere ve Terpstra testi ile Bartholomew testinin permütasyon testi versiyonları kullanılarak test istatistiklerinin herbirinin değeri hesaplanmış ve bu testlerin herbiri için p değerleri bulunmuştur.

p değerleri seçilen nominal α değerleri ile karşılaştırılarak “ p değeri < nominal α ” ise hipotez red edilmiştir. Bu işlemler 5000 kez tekrarlanarak

nominal $\alpha=0,01$; $\alpha=0,05$; $\alpha=0,10$ durumları için her bir test istatistiğinin sıfır hipotezini red etme sayıları saptanmış ve bunlar 5000 tekrar sayısına bölünerek her bir test istatistiği için deneysel I. tip hata oranları hesaplanmıştır. Ayrıca Bartholomew ve JT testlerinin permütasyon versiyonları için p değeri elde edilirken 5000 deneme yapılmıştır.

Normal dağılımdan alınan eşit çaplı örneklerin nominal $\alpha=0,01$; 0,05 ve 0,10 için testlerin I. tip hata oranları Çizelge 4.1' de verilmiştir. Benzer olarak üstel dağılımdan alınan eşit çaplı örneklerin nominal $\alpha=0,01$; 0,05 ve 0,10 için testlerin I. tip hata oranları Çizelge 4.2' de ve tekdüze dağılımdan alınan eşit çaplı örneklerin nominal $\alpha=0,01$; 0,05 ve 0,10 için testlerin I. tip hata oranları Çizelge 4.3' de verilmiştir.

Çizelge 4.1. Normal dağılımdan alınan eşit çaplı örneklerin nominal $\alpha=0,01;0,05;0,10$ alınarak farklı grup sayısı ve farklı örnek hacimleri için test istatistiklerinin deneysel I. tip hata oranları

		N	BARTH.	P.BARTH	JT	P.JT	MJ	TM	MTM	FTM
$\alpha=0,01$	k=3	5	0,0092	0,0112	0,0174	0,0112	0,0072	0,0238	0,0072	0,0080
		10	0,0112	0,0086	0,0170	0,0132	0,0076	0,0218	0,0076	0,0078
		20	0,0084	0,0089	0,0176	0,0111	0,0082	0,0164	0,0082	0,0086
		30	0,0090	0,0090	0,0158	0,0080	0,0086	0,0164	0,0086	0,0088
	k=4	5	0,0038	0,0108	0,0192	0,0120	0,0104	0,0376	0,0104	0,0108
		10	0,0062	0,0118	0,0196	0,0108	0,0094	0,0308	0,0094	0,0098
		20	0,0059	0,0086	0,0202	0,0090	0,0090	0,0289	0,0090	0,0092
		30	0,0062	0,0088	0,0200	0,0070	0,0082	0,0262	0,0082	0,0086
	k=5	5	0,0062	0,0100	0,0206	0,0100	0,0080	0,0370	0,0080	0,0096
		10	0,0032	0,0096	0,0228	0,0084	0,0116	0,0330	0,0116	0,0112
		20	0,0084	0,0098	0,0202	0,0102	0,0094	0,0300	0,0094	0,0102
		30	0,0058	0,0096	0,0214	0,0096	0,0098	0,0298	0,0098	0,0105
$\alpha=0,05$	k=3	5	0,0462	0,0508	0,0898	0,0562	0,0482	0,0610	0,0482	0,0458
		10	0,0458	0,0420	0,0896	0,0594	0,0456	0,0614	0,0456	0,0444
		20	0,0482	0,0460	0,0938	0,0502	0,0486	0,0636	0,0486	0,0468
		30	0,0412	0,0464	0,0990	0,0446	0,0494	0,0562	0,0494	0,0482
	k=4	5	0,0292	0,0480	0,1020	0,0508	0,0518	0,0732	0,0518	0,0537
		10	0,0338	0,0512	0,1000	0,0486	0,0510	0,0696	0,0510	0,0506
		20	0,0338	0,0454	0,0892	0,0476	0,0504	0,0620	0,0504	0,0474
		30	0,0332	0,0492	0,1008	0,0506	0,0494	0,0678	0,0494	0,0494
	k=5	5	0,0234	0,0502	0,1006	0,0510	0,0498	0,0632	0,0498	0,0518
		10	0,0225	0,0492	0,0985	0,0456	0,0503	0,0612	0,0503	0,0503
		20	0,0240	0,0530	0,0998	0,0518	0,0452	0,0680	0,0452	0,0454
		30	0,0310	0,0452	0,0955	0,0516	0,0535	0,0693	0,0535	0,0518
$\alpha=0,10$	k=3	5	0,1020	0,1014	0,2226	0,1166	0,1056	0,1164	0,1056	0,1124
		10	0,0936	0,0902	0,1952	0,1058	0,0926	0,1044	0,0926	0,0936
		20	0,1006	0,0954	0,1988	0,0966	0,0990	0,1036	0,0990	0,1004
		30	0,1000	0,1008	0,2020	0,1072	0,1018	0,1080	0,1018	0,1004
	k=4	5	0,0676	0,0960	0,1956	0,1064	0,1132	0,0952	0,1132	0,1006
		10	0,0690	0,0982	0,1944	0,0944	0,0996	0,1046	0,0996	0,0964
		20	0,0680	0,0968	0,1954	0,0938	0,1022	0,1024	0,1022	0,1008
		30	0,0720	0,1004	0,2034	0,1066	0,1032	0,1066	0,1032	0,1028
	k=5	5	0,0580	0,1000	0,2062	0,1008	0,1016	0,0958	0,1016	0,1024
		10	0,0526	0,0940	0,2026	0,1004	0,1002	0,0928	0,1002	0,1026
		20	0,0615	0,1012	0,1960	0,1050	0,0955	0,0980	0,0955	0,0945
		30	0,0613	0,0948	0,1995	0,0986	0,1005	0,1028	0,1005	0,1015

Normal dağılımdan, üstel dağılımdan ve tekdüze dağılımdan alınan eşit çaplı örneklerle yapılan simülasyon çalışması sonucunda MJ testi ile MTM testinin I. tip hata ve testin gücü bakımından aynı değerleri verdiği gözlemlenmiştir.

Normal dağılımdan alınan eşit çaplı örnekler üzerinden yapılan simülasyon çalışması sonucunda nominal $\alpha=0,01; 0,05; 0,10$ ' na en yakın değerleri veren testlerin MJ, MTM ve FTM olduğu gözlemlenmiştir. Sıralı alternatiflere karşı sıfır hipotezinin testi için geliştirilen parametrik yöntemlerden biri olan Bartholomew testi incelenen parametre dışı testlere göre nominal α' ya uzak deneysel I. tip hata oranlarını vermektedir. Bartholomew testi grup sayısı 3 iken nominal α' ya daha yakın deneysel I. tip hata değeri verirken grup sayısı büyüdükçe nominal α' dan uzaklaşmıştır. Örneğin nominal $\alpha=0,10$ için grup sayısı 3, örnek çapı 5 iken Bartholomew' in deneysel I. tip hata oranı 0,1020' dir. Benzer olarak nominal $\alpha=0,10$ için grup sayısı 5, örnek çapı 5 iken deneysel I. tip hata oranı 0,0580' dir.

Genele bakıldığında JT testi nominal α' ya en uzak deneysel I. tip hata oranını veren yöntemdir. Özellikle grup sayısı arttıkça α' dan uzaklaştığı gözlemlenmiştir.

TM testi $\alpha=0,01$ için nominal α' dan en uzak deneysel I. tip hata değerini veren test olmuştur. $\alpha=0,05$ ve 0,10 için $\alpha=0,01$ ' e nispeten nominal α' ya daha yakın deneysel I. tip hata değerine sahiptir. Örneğin grup sayısı 3, örnek çapı 30 iken nominal $\alpha=0,01$ için deneysel I. tip hata oranı verirken, $\alpha=0,05$ için 0,0562; $\alpha=0,10$ için 0,1080 oranlarını vermiştir. TM testi grup sayısı arttıkça nominal α' dan uzak deneysel I. tip hata oranı verirken örnek çapları arttıkça daha yakın deneysel I. tip hata oranı vermektedir.

Bartholomew, JT, testleri de grup sayısı arttıkça nominal α değerinden daha uzak deneysel I. tip hata değeri verirken; MJ, MTM ve FTM testleri nominal α' ya yakın değerler vermiştir.

Bartholomew ve JT testleri nominal α ’ dan uzak deneysel I. tip hata değeri veren testler iken bu testlerin permütasyon versiyonları incelenen test istatistikleri arasında nominal α ’ ya yakın değer veren testler olmuştur. Örneğin $\alpha=0,05$ için grup sayısı 5 ve örnek çapı 5 iken Bartholomew testinin klasik versiyonun deneysel I. tip hata oranı 0,0234 iken permütasyon versiyonunun deneysel I. tip hata oranı 0,0502’ dir. Aynı durum için JT testinin klasik versiyonunun deneysel I. tip hata oranı 0,1006 iken permütasyon versiyonunun deneysel I. tip hata oranı 0,0510 dur.

Burada dikkat edilecek başka bir nokta ise Bartholomew testinin klasik versiyonunun grup sayısındaki artıştan oldukça etkilenmesine rağmen bu testin permütasyon versiyonunun grup sayısı artışından etkilenmesidir.

FTM testi MJ testine ve MTM testine çok yakın deneysel I. tip hata oranına sahiptir. FTM testi için özellikle örnek hacimleri artıkça deneysel I. tip hata oranının nominal α değerine oldukça yaklaştığını söylemek mümkündür.

Çizelge 4.2. Üstel dağılımdan alınan eşit çaplı örneklerin nominal $\alpha=0,01;0,05;0,10$ alınarak farklı grup sayısı ve farklı örnek hacimleri için test istatistiklerinin deneysel I. tip hata oranları

		N	BARTH.	P.BARTH	JT	P.JT	MJ	TM	MTM	FTM
$\alpha=0,01$	k=3	5	0,0062	0,0112	0,0144	0,0121	0,0082	0,0284	0,0082	0,0078
		10	0,0106	0,0098	0,0106	0,0117	0,0098	0,0212	0,0098	0,0098
		20	0,0070	0,0098	0,0192	0,0099	0,0086	0,0168	0,0086	0,0086
		30	0,0086	0,0099	0,0196	0,0098	0,0092	0,0178	0,0092	0,0096
	k=4	5	0,0040	0,0105	0,0176	0,0120	0,0082	0,0314	0,0082	0,0078
		10	0,0066	0,0118	0,0206	0,0108	0,0104	0,0308	0,0104	0,0112
		20	0,0044	0,0096	0,0170	0,0090	0,0074	0,0208	0,0074	0,0076
		30	0,0046	0,0098	0,0198	0,0096	0,0112	0,0228	0,0112	0,0104
	k=5	5	0,0058	0,0088	0,0214	0,0118	0,0090	0,0388	0,0090	0,0098
		10	0,0060	0,0108	0,0188	0,0108	0,0108	0,0330	0,0108	0,0112
		20	0,0050	0,0086	0,0204	0,0078	0,0084	0,0280	0,0084	0,0090
		30	0,0062	0,0086	0,0186	0,0084	0,0080	0,0274	0,0080	0,0084
$\alpha=0,05$	k=3	5	0,0372	0,0492	0,0896	0,0650	0,0440	0,0668	0,0440	0,0420
		10	0,0484	0,0490	0,1010	0,0576	0,0512	0,0688	0,0512	0,0504
		20	0,0392	0,0480	0,1000	0,0440	0,0430	0,0540	0,0430	0,0438
		30	0,0310	0,0520	0,1026	0,0448	0,0508	0,0512	0,0508	0,0504
	k=4	5	0,0238	0,0460	0,1008	0,0544	0,0472	0,0614	0,0472	0,0470
		10	0,0266	0,0530	0,0954	0,0490	0,0488	0,0672	0,0488	0,0484
		20	0,0296	0,0570	0,1048	0,0464	0,0504	0,0500	0,0504	0,0658
		30	0,0306	0,0442	0,0968	0,0510	0,0498	0,0478	0,0498	0,0610
	k=5	5	0,0222	0,0556	0,0998	0,0554	0,0490	0,0668	0,0490	0,0498
		10	0,0242	0,0514	0,0970	0,0498	0,0546	0,0688	0,0546	0,0520
		20	0,0240	0,0476	0,0998	0,0484	0,0452	0,0540	0,0452	0,0454
		30	0,0314	0,0426	0,1016	0,0454	0,0510	0,0612	0,0510	0,0514
$\alpha=0,10$	k=3	5	0,0940	0,1010	0,2218	0,1186	0,1074	0,1272	0,1074	0,1152
		10	0,0924	0,0992	0,2038	0,1142	0,1024	0,1072	0,1024	0,1046
		20	0,0930	0,0978	0,2028	0,0940	0,1010	0,1086	0,1010	0,1022
		30	0,0956	0,1038	0,2032	0,0980	0,1009	0,0986	0,1009	0,1040
	k=4	5	0,0566	0,0974	0,1878	0,1126	0,1000	0,1002	0,1000	0,0904
		10	0,0652	0,1008	0,1960	0,0952	0,1020	0,1054	0,1020	0,0974
		20	0,0664	0,1114	0,1960	0,0976	0,1024	0,1022	0,1024	0,1010
		30	0,0687	0,0936	0,1972	0,0936	0,1012	0,0998	0,1012	0,0977
	k=5	5	0,0470	0,1020	0,2122	0,1078	0,1078	0,1110	0,1078	0,0828
		10	0,0524	0,1016	0,2024	0,1010	0,0998	0,0984	0,0998	0,1010
		20	0,0482	0,0940	0,1998	0,0950	0,1010	0,1006	0,1010	0,0988
		30	0,0530	0,0906	0,1952	0,0980	0,0956	0,0944	0,0956	0,0956

Üstel dağılımdan alınan eşit çaplı örnekler üzerinde yapılan simülasyon çalışması sonucunda nominal $\alpha=0,01;0,05;0,10$ ' na en yakın değerleri veren testlerin, normal dağılımdan alınan verilerle yapılan çalışma sonuçlarına benzer olarak MJ, MTM ve FTM testleri olduğu gözlemlenmiştir. FTM testinin, MJ ve MTM testine I. tip hata değeri bakımından çok yakın ve bazen aynı değeri verdiği gözlemlenmiştir.

Bartholomew testi ve JT testinin permütasyon testi versiyonu klasik versiyonlarına göre nominal α' ya yakın değerler vermiştir. Örneğin $\alpha=0,10$ için grup sayısının 5, örnek çapının 10 olduğu durumda Bartholomew testinin klasik versiyonun verdiği I. tip hata oranı 0,0524 iken; permütasyon versiyonunun verdiği I. tip hata oranı 0,1016' dır. Aynı durum için JT testinin klasik versiyonunun verdiği I. tip hata oranı 0,2024 iken permütasyon versiyonun verdiği I. tip hata oranı 0,1010' dur.

Normal dağılımdan alınan verilerle yapılan simülasyon çalışmasının sonucuna benzer olarak Bartholomew grup sayısı k arttıkça nominal α' ya uzak I. tip hata değerleri vermektedir. Örneğin nominal $\alpha=0,01$ için grup sayısının 3 ve örnek çapının 10 olduğu durumda I. tip hata oranı 0,0106 iken; grup sayısının 5, örnek çapının 10 olduğu durumda I. tip hata oranı 0,0060' dır. Bartholomew testinin klasik versiyonu grup sayısındaki artıştan oldukça etkilenirken bu testin permütasyon versiyonu grup sayısının artışından etkilenmemektedir. Bartholomew testinin permütasyon versiyonu genele bakıldığında her durumda nominal α' ya en yakın değeri veren yöntemdir.

TM grup sayısı büyük, örnek çapı küçükken I. tip hata bakımından nominal α' dan oldukça uzaktır. Grup sayısının küçük , örnek çapının büyük olduğu durumlarda bile özellikle $\alpha=0,01$ iken nominal α değerine yeterince yakın değildir. α arttıkça bu fark oransal olarak az gibi görülsede çoğu durumda nominal α değerinden oldukça uzak olduğu söylenebilir. TM testinin nominal α' ya en yakın sonuçları $\alpha=0,10$ olduğu ve gruptaki örnek sayısının fazla olduğu durumlarda aldığı söylenebilir.

Çizelge 4.3.Tekdüze dağılımdan alınan eşit çaplı örneklerin nominal $\alpha=0,01;0,05;0,10$ alınarak farklı grup sayısı ve farklı örnek hacimleri için test istatistiklerinin deneysel I. tip hata oranları

		n	BARTH.	P.BARTH	JT	P.JT	MJ	TM	MTM	FTM
$\alpha=0,01$	k=3	5	0,0072	0,0112	0,0196	0,0152	0,0088	0,0096	0,0088	0,0276
		10	0,0092	0,0087	0,0162	0,0097	0,0084	0,0084	0,0084	0,0198
		20	0,0116	0,0081	0,0168	0,0103	0,0082	0,0082	0,0082	0,0210
		30	0,0096	0,0090	0,0206	0,0080	0,0104	0,0096	0,0104	0,0172
	k=4	5	0,0052	0,0094	0,0210	0,0102	0,0088	0,0102	0,0088	0,0362
		10	0,0042	0,0090	0,0196	0,0095	0,0082	0,0092	0,0082	0,0286
		20	0,0046	0,0095	0,0184	0,0090	0,0078	0,0082	0,0078	0,0256
		30	0,0058	0,0110	0,0184	0,0100	0,0092	0,0094	0,0092	0,0252
	k=5	5	0,0054	0,0108	0,0182	0,0106	0,0078	0,0090	0,0078	0,0344
		10	0,0052	0,0085	0,254	0,0100	0,0114	0,0134	0,0114	0,0326
		20	0,0054	0,0090	0,0194	0,0110	0,0106	0,0112	0,0106	0,0314
		30	0,0042	0,1012	0,0188	0,0096	0,0094	0,0096	0,0094	0,0256
$\alpha=0,05$	k=3	5	0,0532	0,0572	0,0896	0,0650	0,0514	0,0476	0,0514	0,0678
		10	0,0424	0,0522	0,1010	0,0540	0,0510	0,0506	0,0510	0,0720
		20	0,0492	0,0482	0,1000	0,0448	0,0546	0,0562	0,0546	0,0678
		30	0,0516	0,0530	0,1026	0,0482	0,0522	0,0522	0,0522	0,0598
	k=4	5	0,0286	0,0536	0,2008	0,0554	0,0526	0,0538	0,0526	0,0732
		10	0,0310	0,0520	0,0954	0,0470	0,0498	0,0470	0,0498	0,0682
		20	0,0300	0,0460	0,0946	0,0485	0,0476	0,0456	0,0476	0,0608
		30	0,0324	0,0490	0,1048	0,0503	0,0530	0,0522	0,0530	0,0646
	k=5	5	0,0240	0,0535	0,0952	0,0480	0,0460	0,0474	0,0460	0,0652
		10	0,0252	0,00986	0,1008	0,0535	0,0536	0,0524	0,0536	0,0640
		20	0,0290	0,1100	0,0994	0,0500	0,0524	0,0500	0,0524	0,0646
		30	0,0270	0,0978	0,0930	0,0485	0,0488	0,0476	0,0488	0,0644
$\alpha=0,10$	k=3	5	0,0982	0,1078	0,2150	0,1186	0,1036	0,1120	0,1036	0,1178
		10	0,0916	0,0986	0,2090	0,1080	0,1038	0,1037	0,1038	0,1118
		20	0,1004	0,1100	0,1950	0,1018	0,1058	0,1068	0,1058	0,1154
		30	0,0988	0,0978	0,2118	0,1054	0,1082	0,1080	0,1082	0,1080
	k=4	5	0,0630	0,1042	0,1952	0,1126	0,1120	0,1064	0,1120	0,1060
		10	0,0646	0,1103	0,1956	0,1003	0,1004	0,0978	0,1004	0,1026
		20	0,0638	0,1063	0,2030	0,1107	0,1026	0,1006	0,1026	0,1022
		30	0,0680	0,1045	0,1988	0,1070	0,0994	0,0988	0,0994	0,1104
	k=5	5	0,0502	0,1041	0,2054	0,1078	0,0972	0,1008	0,0972	0,0862
		10	0,0506	0,1089	0,2018	0,1027	0,1004	0,1018	0,1004	0,0962
		20	0,0604	0,1051	0,2030	0,1031	0,1026	0,1016	0,1026	0,1026
		30	0,0554	0,1013	0,1938	0,1023	0,1018	0,1006	0,1018	0,1008

Tekdüze dağılımdan alınan eşit çaplı örnekler üzerinde yapılan simülasyon çalışması sonucunda nominal α' ya en yakın değerleri veren testlerin MJ, MTM, TM testleri ve Bartholomew testinin permütasyon versiyonun olduğu gözlemlenmiştir. MJ ve MTM testi örnek çapı büyüdükçe nominal α' ya daha yakın sonuçlar vermektedir.

FTM testinin, normal ve üstel dağılımdan alınan örneklerle yapılan çalışmada nominal α' ya yakın I. tip hata değeri verdiği gözlemlenmişken; tekdüze dağılımdan alınan örneklerle yapılan çalışmada nominal α' dan uzak I. tip hata değerleri verdiği gözlemlenmiştir. FTM testi nominal α büyüdükçe, nominal α' ya daha yakın I. tip hata değerleri vermektedir. Örneğin $\alpha=0,01$ için grup sayısının 3, örnek çapının 5 olduğu durumda I. tip hata değeri 0,0276 iken; aynı grup sayısı ve örnek çapı için $\alpha=0,10$ olduğunda I. tip hata değeri 0,1060' dır.

TM testi ise normal ve üstel dağılımdan alınan örneklerle yapılan çalışmada nominal α' dan uzak I. tip hata değeri verdiği gözlemlenmişken; tekdüze dağılımdan alınan örneklerle yapılan çalışmada nominal α' ya oldukça yakın sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.

Bartholomew testi grup sayısı arttıkça nominal α' dan daha uzak değerler vermektedir. Örneğin $\alpha=0,10$ iken grup sayısı 3, örnek çapı 20 için I. tip hata değeri 0,1004; grup sayısı 4, örnek çapı 20 için I. tip hata değeri 0,0638' dir. JT testi ise nominal α' dan oldukça büyük I. tip hata değerleri vermektedir. Hatta tekdüze dağılımdan alınan eşit çaplı örneklerle yapılan simülasyon çalışması için nominal α' ya en uzak I. tip hata değerleri veren yöntemin JT olduğu söylenebilir.

Permütasyon versiyonları yüksek deneysel I. tip hata değerine sahip olan JT testinin I. tip hata değerini düşürerek; nominal α' dan düşük deneysel I. tip hata değerine sahip olan Bartholomew testinin I. tip hata değerini yükselterek bu iki testin deneysel I. tip hata değerlerini nominal α' ya yakınlaştırmıştır.

Genele bakıldığında nominal α' dan en uzak deneysel I. tip hata değerini veren JT testi, permütasyon versiyonu uygulandığında genelde nominal α' ya en yakın deneysel I. tip hata değeri veren yöntemlerden olmuştur.

4.2. Test İstatistiklerinin Güçleri Bakımından Karşılaştırılması

Simülasyon çalışmasında testlerin güçleri bakımından karşılaştırılması amacıyla normal dağılımlı, üstel dağılımlı, tekdüze dağılımlı yığınlardan eşit hacimli örnekler üretilmiştir. $k=3$, $k=4$, $k=5$ sayıdaki yığınlar için farklı örnek hacimleri ele alınmıştır. Bu örneklerin her biri için gerçekte yanlış olan H_0 hipotezinin testi için ikinci bölümde bahsedilen test istatistiklerinin değerleri hesaplanmış ve bu testlerin her biri için p değerleri bulunmuştur. Bu işlemler 5000 kez tekrarlanarak nominal $\alpha=0,05$ için her bir test istatistiğinin ortalamalarının eşitliği red etme sayıları saptanmış ve bunlar tekrar sayısına yani 5000'e bölünerek her bir test istatistiğinin deneysel güç değerleri hesaplanmıştır.

Grup sayıları $k=3$, $k=4$, $k=5$ iken normal dağılımdan alınan eşit çaplı örnekler için testlerin güç değerleri Çizelge 4.4-4.6' da, üstel dağılımdan alınan eşit çaplı örnekler için Çizelge 4.7' de ve benzer olarak tekdüze dağılımdan alınan eşit çaplı örnekler için Çizelge 4.8-4.10' da verilmiştir.

Testin gücünü elde etmek amacıyla normal dağılım için grup varyansları sabit olarak 1 tutulmuş ve grup ortalamaları arasındaki farklar ardışık olarak 0,1; 0,2; 0,3; 0,4 ve 0,5 olarak alınmıştır.

Üstel dağılım için ortalamalar arasındaki farklar 2,5 ve 5 birim arttırılmıştır. Örneğin grup sayısı 3 iken $\lambda_1=5$; $\lambda_2=7,5$; $\lambda_3=10$ ve $\lambda_1=5$; $\lambda_2=10$; $\lambda_3=15$ alınmıştır.

Tekdüze dağılım için minimum değer 10, maksimum değer 13 olmak üzere bu değerler ardışık olarak 0,1; 0,2; 0,3 ve 0,4 farklılaştırılmıştır.

Çizelge 4.4. Normal dağılımdan alınan eşit çaplı örneklerin nominal $\alpha=0,05$; $k=3$ iken test istatistikleri için güç değerleri

k=3		$(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$	BARTH.	P.BARTH	JT	P.JT	MJ	TM	MTM	FTM
	n=5	(10;10,1;10,2)	0,0754	0,0790	0,1092	0,0654	0,0880	0,1082	0,0880	0,0836
		(10;10,2;10,4)	0,1096	0,1334	0,1376	0,1092	0,1368	0,1632	0,1368	0,1268
		(10;10,3;10,6)	0,1718	0,1692	0,2088	0,1516	0,2148	0,2402	0,2148	0,2034
		(10;10,4;10,8)	0,2256	0,2545	0,3014	0,2300	0,3140	0,3250	0,3140	0,2992
		(10;10,5;11)	0,2980	0,3402	0,4104	0,3178	0,4264	0,4344	0,4264	0,4090
	n=10	(10;10,1;10,2)	0,0882	0,1012	0,1192	0,0712	0,1050	0,1194	0,1050	0,1004
		(10;10,2;10,4)	0,1656	0,1800	0,2162	0,1428	0,2104	0,2264	0,2104	0,2088
		(10;10,3;10,6)	0,2572	0,2662	0,3516	0,2412	0,3570	0,3592	0,3570	0,3498
		(10;10,4;10,8)	0,3866	0,4181	0,5218	0,4119	0,5288	0,5068	0,5288	0,5218
		(10;10,5;11)	0,5430	0,5360	0,6848	0,5730	0,6938	0,6634	0,6938	0,6849
	n=20	(10;10,1;10,2)	0,1274	0,1310	0,1576	0,0925	0,1486	0,1604	0,1486	0,1480
		(10;10,2;10,4)	0,2442	0,2750	0,3304	0,2540	0,3292	0,3284	0,3292	0,3278
		(10;10,3;10,6)	0,4386	0,4390	0,5706	0,4400	0,5736	0,5444	0,5736	0,5702
		(10;10,4;10,8)	0,6508	0,6610	0,7854	0,6840	0,7906	0,7422	0,7906	0,7854
		(10;10,5;11)	0,8196	0,8255	0,9180	0,8610	0,9190	0,8874	0,9190	0,9180
	n=30	(10;10,1;10,2)	0,1466	0,1585	0,1902	0,1240	0,1848	0,1862	0,1848	0,1820
		(10;10,2;10,4)	0,3364	0,3340	0,4504	0,3140	0,4500	0,4276	0,4500	0,4500
		(10;10,3;10,6)	0,5686	0,5830	0,7134	0,5995	0,7172	0,6818	0,7172	0,7134
		(10;10,4;10,8)	0,8146	0,8135	0,9180	0,8430	0,9196	0,8850	0,9196	0,9180
		(10;10,5;11)	0,9440	0,9463	0,9836	0,9648	0,9844	0,9694	0,9844	0,9836

Çizelge 4.5. Normal dağılımdan alınan eşit çaplı örneklerin nominal $\alpha=0,05$; $k=4$ iken test istatistiklerini için üç değerleri

		$(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$	BARTH.	P.BARTH	JT	P.JT	MJ	TM	MTM	FTM
k=4	n=5	(10;10,1;10,2;10,3)	0,0620	0,0988	0,1354	0,0834	0,1252	0,1306	0,1252	0,1184
		(10;10,2;10,4;10,6)	0,1184	0,1742	0,2558	0,1528	0,2586	0,2406	0,2586	0,2524
		(10;10,3;10,6;10,9)	0,2056	0,3076	0,4128	0,2898	0,4172	0,3642	0,4172	0,4118
		(10;10,4;10,8;11,2)	0,3172	0,3982	0,5820	0,2964	0,5936	0,4956	0,5936	0,5820
		(10;10,5;11;11,5)	0,4596	0,6068	0,7566	0,6478	0,7600	0,6464	0,7600	0,7566
	n=10	(10;10,1;10,2;10,3)	0,0995	0,1304	0,2541	0,1050	0,2480	0,1988	0,2480	0,2495
		(10;10,2;10,4;10,6)	0,1980	0,2758	0,5510	0,2710	0,6426	0,5606	0,6426	0,6352
		(10;10,3;10,6;10,9)	0,3758	0,4890	0,6352	0,5202	0,7562	0,6874	0,7562	0,7580
		(10;10,4;10,8;11,2)	0,6066	0,7136	0,8490	0,7698	0,8568	0,7784	0,8568	0,8490
		(10;10,5;11;11,5)	0,7984	0,8764	0,9500	0,9158	0,9532	0,8874	0,9532	0,9500
	n=20	(10;10,1;10,2;10,3)	0,1278	0,1872	0,2602	0,2113	0,2548	0,2388	0,2548	0,2558
		(10;10,2;10,4;10,6)	0,3622	0,4587	0,6228	0,3157	0,6220	0,5520	0,6220	0,6226
		(10;10,3;10,6;10,9)	0,6772	0,7681	0,8888	0,7248	0,8900	0,8074	0,8900	0,8880
		(10;10,4;10,8;11,2)	0,9056	0,9600	0,9856	0,9800	0,9866	0,9576	0,9866	0,9856
		(10;10,5;11;11,5)	0,9864	1	0,9990	0,9910	0,9990	0,9944	0,9990	0,9990
	n=30	(10;10,1;10,2;10,3)	0,1632	0,2388	0,3196	0,2244	0,3212	0,2986	0,3212	0,3174
		(10;10,2;10,4;10,6)	0,5136	0,6042	0,7606	0,6620	0,7598	0,6832	0,7598	0,7606
		(10;10,3;10,6;10,9)	0,8484	0,9105	0,9740	0,9485	0,9736	0,9276	0,9736	0,9740
		(10;10,4;10,8;11,2)	0,9880	0,9955	0,9990	0,9960	0,9992	0,9950	0,9992	0,9990
		(10;10,5;11;11,5)	0,9994	1	1	1	1	0,9998	1	1

Çizelge 4.6. Normal dağılımdan alınan eşit çaplı örneklerin nominal $\alpha=0,05$; $k=5$ iken test istatistiklerini için güç değerleri

		$(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$	BARTH.	P.BARTH	JT	P.JT	MJ	TM	MTM	FTM
k=5	n=5	(10;10,1;10,2;10,3;10,4)	0,0590	0,1158	0,1712	0,1066	0,1616	0,1510	0,1616	0,1572
		(10;10,2;10,4;10,6;10,8)	0,1354	0,2402	0,3790	0,2668	0,3882	0,3026	0,3882	0,3778
		(10;10,3;10,6;10,9;11,2)	0,2676	0,4310	0,6308	0,5194	0,6390	0,4640	0,6390	0,6308
		(10;10,4;10,8;11,2;11,6)	0,4536	0,7800	0,8398	0,8147	0,8424	0,6472	0,8424	0,8398
		(10;10,5;11;11,5;12)	0,6600	0,8084	0,9484	0,9042	0,9522	0,7964	0,9522	0,9484
	n=10	(10;10,1;10,2;10,3;10,4)	0,0820	0,1632	0,2434	0,1640	0,2418	0,2100	0,2418	0,2382
		(10;10,2;10,4;10,6;10,8)	0,2610	0,3880	0,6062	0,4782	0,6150	0,4880	0,6150	0,6062
		(10;10,3;10,6;10,9;11,2)	0,5542	0,6887	0,8884	0,8150	0,8906	0,7400	0,8906	0,8884
		(10;10,4;10,8;11,2;11,6)	0,8314	0,9073	0,9860	0,9673	0,9860	0,8212	0,9860	0,9860
		(10;10,5;11;11,5;12)	0,9574	0,9837	0,9994	0,9967	0,9996	0,9792	0,9996	0,9994
	n=20	(10;10,1;10,2;10,3;10,4)	0,1454	0,2416	0,3890	0,2780	0,3884	0,3326	0,3884	0,3878
		(10;10,2;10,4;10,6;10,8)	0,5304	0,6575	0,8660	0,7745	0,8644	0,7414	0,8644	0,8660
		(10;10,3;10,6;10,9;11,2)	0,8864	0,9570	0,9938	0,9890	0,9934	0,9530	0,9934	0,9938
		(10;10,4;10,8;11,2;11,6)	0,9932	0,9990	1	0,9995	1	0,9966	1	1
		(10;10,5;11;11,5;12)	1	1	1	1	1	1	1	1
	n=30	(10;10,1;10,2;10,3;10,4)	0,2234	0,3310	0,5238	0,3940	0,5232	0,4258	0,5232	0,5234
		(10;10,2;10,4;10,6;10,8)	0,6078	0,8328	0,7850	0,9220	0,8950	0,7953	0,8950	0,8542
		(10;10,3;10,6;10,9;11,2)	0,9828	0,9865	0,9993	0,9985	0,9995	0,9935	0,9995	0,9993
		(10;10,4;10,8;11,2;11,6)	1	0,9995	1	1	1	1	1	1
		(10;10,5;11;11,5;12)	1	1	1	1	1	1	1	1

Çizelge 4.4-4.6 incelendiğinde JT testinin permütasyon versiyonu ve Bartholomew testleri diğer testlere göre daha düşük güç değerlerine sahip olduğu görülmektedir. Bu yöntemler, I. tip hata değerinin araştırılması için normal dağılımdan alınan eşit çaplı örneklerle yapılan simülasyon sonucunda nominal α 'dan uzak deneysel I. tip hata değerleri verdiğiinden karşılaştırmada dikkate alınmamıştır.

JT ve FTM testleri özellikle μ_j parametreleri arasındaki farklılığın arttığı durumda aynı güç değerlerini vermiştir.

Grup sayısı k 'nın 3; 4; 5 olduğu durumların geneline bakıldığında MJ' nin ve MTM' nin en yüksek testin gücü değerine sahip olduğu söylenebilir. Bu testler I. tip hata değerinin araştırılması için normal dağılımdan alınan eşit çaplı örneklerle yapılan simülasyon sonucunda nominal α ' ya oldukça yakın oranlar verdiğiinden normal dağılımdan alınan örneklerle yapılan çalışmalarda bu yöntemler tercih edilebilir.

TM testi grup sayısının 3' e eşit olduğu durumda diğer test istatistiklerine göre daha yüksek testin gücüne sahipken grup sayısı arttıkça bu durum bozulmuştur. Bartholomew ve JT testlerinin permütasyon versiyonlarına bakıldığında Bartholomew testinin permütasyon versyonunun klasik versiyonuna göre daha yüksek testin gücüne sahip olduğu, JT testinin permütasyon versiyonunun ise klasik versiyonuna göre daha düşük testin gücüne sahip olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.7. Üstel dağılımdan alınan eşit çaplı örneklerin nominal $\alpha=0,05$, $k=3$; $k=4$; $k=5$ iken test istatistiklerini için güç değerleri

		$(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$	BARTH.	P.BARTH	JT	P.JT	MJ	TM	MTM	FTM
k=3	n=5	(5;7,5;10)	0,1404	0,1804	0,2128	0,1592	0,2196	0,2398	0,2196	0,2102
		(5;10;15)	0,2246	0,2968	0,3824	0,2948	0,3946	0,3980	0,3946	0,3814
	n=10	(5;7,5;10)	0,2672	0,2948	0,3638	0,2544	0,3710	0,3670	0,3710	0,3630
		(5;10;15)	0,4606	0,5130	0,6434	0,5298	0,6494	0,6120	0,6494	0,6434
	n=20	(5;7,5;10)	0,4736	0,5018	0,5804	0,4546	0,5816	0,5472	0,5816	0,5804
		(5;10;15)	0,8268	0,8382	0,9002	0,8334	0,9008	0,8582	0,9008	0,9002
	n=30	(5;7,5;10)	0,6600	0,7166	0,7456	0,2642	0,7494	0,7034	0,7494	0,7456
		(5;10;15)	0,9560	0,9628	0,9750	0,9484	0,9742	0,9540	0,9742	0,9750
k=4	n=5	(5,5;7,5;10;12,5)	0,1384	0,4801	0,3346	0,2880	0,3438	0,3054	0,3438	0,3324
		(5;10;15;20)	0,2252	0,3962	0,5734	0,4408	0,5814	0,4806	0,5814	0,5734
	n=10	(5,5;7,5;10;12,5)	0,2912	0,5143	0,5656	0,0556	0,5706	0,5002	0,5706	0,5654
		(5;10;15;20)	0,5140	0,7064	0,8398	0,7638	0,8394	0,7374	0,8394	0,8398
	n=20	(5,5;7,5;10;12,5)	0,6040	0,5160	0,8230	0,5008	0,8224	0,7312	0,8224	0,8228
		(5;10;15;20)	0,9136	1	0,9844	0,8741	0,9836	0,9494	0,9836	0,9844
	n=30	(5,5;7,5;10;12,5)	0,8118	0,9972	0,9318	0,8270	0,9326	0,8664	0,9326	0,9318
		(5;10;15;20)	0,9928	1	0,9985	0,8566	0,9992	0,9873	0,9992	0,9985
k=5	n=5	(5;7,5;10;12,5;15)	0,1941	0,2872	0,3744	0,3348	0,5540	0,5015	0,5540	0,5610
		(5;10;15;20;25)	0,2010	0,8172	0,8142	0,7928	0,7134	0,5108	0,7134	0,7142
	n=10	(5;7,5;10;12,5;15)	0,3080	0,5296	0,7254	0,6178	0,7256	0,5768	0,7256	0,7254
		(5;10;15;20;25)	0,5534	0,9906	0,9478	0,9387	0,9448	0,8126	0,9448	0,9478
	n=20	(5;7,5;10;12,5;15)	0,7100	0,7476	0,9420	0,7840	0,9410	0,8322	0,9410	0,9420
		(5;10;15;20;25)	0,9574	0,9985	0,9986	0,9551	0,9982	0,9780	0,9982	0,9986
	n=30	(5;7,5;10;12,5;15)	0,8208	0,9562	0,9580	0,8751	0,9580	0,8380	0,9580	0,9574
		(5;10;15;20;25)	0,9351	1	1	0,9987	0,9990	0,9974	0,9990	1

Çizelge 4.7' ye bakıldığında Bartholomew testi ve JT testinin permütasyon versiyonu en düşük güç değerlerine sahip olduğu görülür.

Normal dağılımdan alınan örneklerle yapılan simülasyon çalışması sonrasında elde edilen güç değerlerindeki benzer olarak JT ve FTM testleri çoğunlukla aynı güç değerlerini verdiği görülmektedir. JT testi, çizelge 4.2' den görüleceği gibi, üstel dağılımdan alınan eşit çaplı örneklerle I. tip hata oranlarını belirlemek için yapılan simülasyon çalışması sonucunda nominal α' ya uzak I. tip hata oranlarına sahiptir. Dolayısıyla JT testinin yüksek testin gücü değerine sahip olmasına rağmen tercih edilmemesi gerektiği söylenebilir.

Bartholomew ve JT testlerinin permütasyon versiyonlarına bakıldığında Bartholomew testinin permütasyon versiyonunun güç değeri klasik versiyonunun güç değerinden yüksekken, JT testinin permütasyon versiyonunun güç değeri klasik versiyonunun güç değerinden düşük olduğu görülür. Bartholomew testinin permütasyon versiyonunun grup sayısı arttıkça, özellikle ortalamalar arasındaki farkın 5 olduğu durumda genele göre yüksek testin gücü değerine sahip olduğu görülmektedir. Ancak özellikle grup sayısının 3 olduğu durumda diğer test istatistiklerinden daha düşük testin gücü değerine sahiptir.

İncelenen testlerin I. tip hata oranları da göz önünde bulundurulduğunda MJ, MTM ve FTM testlerinin üstel dağılım için tercih edilebileceği söylenebilir. Bartholomew testinin permütasyon versiyonunun, I. tip hata oranları bakımından incelenen grup sayıları, örnek çapları ve nominal α' lar için diğer testlere göre nominal α' ya daha yakın I. tip hata oranı verdiği için bölüm 4.1' de bahsedilmişti. Bartholomew testi için yukarıda bahsedilen durumdan dolayı bu yöntemin yüksek grup sayısı için tercih edilmesi söylenebilir.

Çizelge 4.8. Tekdüze dağılımdan alınan eşit çaplı örneklerin nominal $\alpha=0,05$; $k=3$ iken test istatistiklerini için güç değerleri

k=3		a\b	BARTH.	P.BARTH	JT	P.JT	MJ	TM	MTM	FTM
	n=5	a=(10;10,1;10,2)	0,0556	0,0722	0,1482	0,0672	0,0796	0,0105	0,0796	0,0764
		b=(13;13,1;13,2)								
		a=(10;10,2;10,4)	0,1172	0,0975	0,3010	0,0830	0,1210	0,1488	0,1210	0,1138
		b=(13;13,2;13,4)								
		a=(10;10,3;10,6)	0,1446	0,1385	0,1836	0,1195	0,1814	0,2154	0,1814	0,1754
		b=(13;13,3;13,6)								
		a=(10;10,4;10,8)	0,1770	0,1940	0,2304	0,1715	0,2438	0,2622	0,2438	0,2320
		b=(13;13,4;13,8)								
	n=10	a=(10;10,1;10,2)	0,0822	0,0865	0,1118	0,0545	0,1010	0,1138	0,1010	0,0984
		b=(13;13,1;13,2)								
		a=(10;10,2;10,4)	0,1420	0,1405	0,1924	0,1130	0,1892	0,3058	0,1892	0,1832
		b=(13;13,2;13,4)								
		a=(10;10,3;10,6)	0,2166	0,2110	0,2850	0,1765	0,2826	0,2812	0,2826	0,3000
		b=(13;13,3;13,6)								
		a=(10;10,4;10,8)	0,3038	0,3130	0,4074	0,2995	0,4122	0,4064	0,4122	0,4106
		b=(13;13,4;13,8)								
	n=20	a=(10;10,1;10,2)	0,1176	0,1070	0,1582	0,0855	0,1436	0,1528	0,1436	0,1422
		b=(13;13,1;13,2)								
		a=(10;10,2;10,4)	0,2120	0,2135	0,2754	0,1765	0,2740	0,2822	0,2740	0,2724
		b=(13;13,2;13,4)								
		a=(10;10,3;10,6)	0,3598	0,3710	0,4742	0,3515	0,4752	0,4734	0,4752	0,4604
		b=(13;13,3;13,6)								
		a=(10;10,4;10,8)	0,5360	0,5265	0,6584	0,5245	0,6598	0,6584	0,6598	0,6200
		b=(13;13,4;13,8)								
	n=30	a=(10;10,1;10,2)	0,1254	0,1338	0,1692	0,1022	0,1558	0,1714	0,1558	0,1564
		b=(13;13,1;13,2)								
		a=(10;10,2;10,4)	0,2692	0,2740	0,3598	0,2512	0,3635	0,3476	0,3635	0,3586
		b=(13;13,2;13,4)								
		a=(10;10,3;10,6)	0,4754	0,4722	0,6052	0,4770	0,6034	0,6052	0,6034	0,5722
		b=(13;13,3;13,6)								
		a=(10;10,4;10,8)	0,6906	0,9678	0,7984	0,7134	0,7978	0,7984	0,7978	0,7696
		b=(13;13,4;13,8)								

k=4		ab	BARTH.	P.BARTH	JT	P.JT	MJ	TM	MTM	FTM
		a=(10;10,1;10,2;10,3) b=(13;13,1;13,2;13,3)	0,0570	0,0938	0,1242	0,0782	0,1078	0,1054	0,1078	0,1210
	n=5	a=(10;10,2;10,4;10,6) b=(13;13,2;13,4;13,6)	0,0900	0,1460	0,2044	0,1245	0,2032	0,1970	0,2032	0,1974
		a=(10;10,3;10,6;10,9) b=(13;13,3;13,6;13,9)	0,1590	0,2485	0,3158	0,2305	0,3174	0,3138	0,3174	0,2952
		a=(10;10,4;10,8;12,2) b=(13;13,4;13,8;14,2)	0,2360	0,3470	0,4582	0,3505	0,4624	0,4578	0,4624	0,4010
	n=10	a=(10;10,1;10,2;10,3) b=(13;13,1;13,2;13,3)	0,0756	0,1110	0,1672	0,0960	0,1580	0,1546	0,1580	0,1586
		a=(10;10,2;10,4;10,6) b=(13;13,2;13,4;13,6)	0,1596	0,2245	0,3182	0,1975	0,3166	0,3160	0,3166	0,3014
		a=(10;10,3;10,6;10,9) b=(13;13,3;13,6;13,9)	0,3004	0,3855	0,5270	0,3930	0,5286	0,5264	0,5286	0,4710
		a=(10;10,4;10,8;12,2) b=(13;13,4;13,8;14,2)	0,4726	0,5940	0,7318	0,6225	0,7364	0,7318	0,7364	0,6952
	n=20	a=(10;10,1;10,2;10,3) b=(13;13,1;13,2;13,3)	0,1020	0,1545	0,2064	0,1425	0,1982	0,2004	0,1982	0,2070
		a=(10;10,2;10,4;10,6) b=(13;13,2;13,4;13,6)	0,2708	0,3670	0,5040	0,3780	0,5004	0,5010	0,5004	0,4536
		a=(10;10,3;10,6;10,9) b=(13;13,3;13,6;13,9)	0,5392	0,6155	0,7866	0,6860	0,7832	0,7866	0,7832	0,7020
		a=(10;10,4;10,8;12,2) b=(13;13,4;13,8;14,2)	0,8014	0,8770	0,9408	0,8935	0,9390	0,9408	0,9390	0,8738
	n=30	a=(10;10,1;10,2;10,3) b=(13;13,1;13,2;13,3)	0,1314	0,1951	0,2652	0,1421	0,2596	0,2606	0,2596	0,2524
		a=(10;10,2;10,4;10,6) b=(13;13,2;13,4;13,6)	0,3974	0,4492	0,6570	0,4234	0,6535	0,6570	0,6535	0,5850
		a=(10;10,3;10,6;10,9) b=(13;13,3;13,6;13,9)	0,7322	0,8521	0,9088	0,8733	0,9042	0,9088	0,9042	0,8348
		a=(10;10,4;10,8;12,2) b=(13;13,4;13,8;14,2)	0,9468	1	0,9910	0,9815	0,9898	0,9910	0,9898	0,9680

Çizelge 4.9. Tekdüze dağılımdan alınan eşit çaplı örneklerin nominal $\alpha=0,05$, $k=4$ iken test istatistiklerini için güç değerleri

Çizelge 4.10. Tekdüze dağılımdan alınan eşit çaplı örneklerin nominal $\alpha=0,05$; $k=5$ iken test istatistiklerini için güç değerleri

k=5		a\b	BARTH.	P.BARTH	JT	P.JT	MJ	TM	MTM	FTM
	n=5	a=(10;10,1;10,2;10,3;10,4)	0,0486	0,0982	0,1514	0,0862	0,1404	0,1392	0,1404	0,1370
		b=(13;13,1;13,2;13,3;13,4)								
		a=(10;10,2;10,4;10,6;10,8)	0,1044	0,1974	0,2860	0,2142	0,2854	0,2836	0,2854	0,2312
		b=(13;13,2;13,4;13,6;13,8)								
		a=(10;10,3;10,6;10,9;11,2)	0,1990	0,3206	0,5026	0,3840	0,5082	0,5026	0,5082	0,3726
		b=(13;13,3;13,6;13,9;14,2)								
		a=(10;10,4;10,8;12,2;12,6)	0,3262	0,5028	0,7160	0,5894	0,7130	0,7158	0,7130	0,5290
		b=(13;13,4;13,8;14,2;14,6)								
	n=10	a=(10;10,1;10,2;10,3;10,4)	0,0740	0,1336	0,2008	0,1270	0,1950	0,1944	0,1950	0,1844
		b=(13;13,1;13,2;13,3;13,4)								
		a=(10;10,2;10,4;10,6;10,8)	0,2022	0,3086	0,4988	0,3610	0,4984	0,4982	0,4984	0,3992
		b=(13;13,2;13,4;13,6;13,8)								
		a=(10;10,3;10,6;10,9;11,2)	0,4062	0,5625	0,7722	0,6805	0,7698	0,7722	0,7698	0,6290
		b=(13;13,3;13,6;13,9;14,2)								
		a=(10;10,4;10,8;12,2;12,6)	0,6746	0,8025	0,9364	0,8810	0,9364	0,9364	0,9364	0,8114
		b=(13;13,4;13,8;14,2;14,6)								
	n=20	a=(10;10,1;10,2;10,3;10,4)	0,1338	0,2012	0,3200	0,2230	0,3190	0,3174	0,3190	0,2798
		b=(13;13,1;13,2;13,3;13,4)								
		a=(10;10,2;10,4;10,6;10,8)	0,4032	0,5405	0,7534	0,6405	0,7502	0,7532	0,7502	0,6256
		b=(13;13,2;13,4;13,6;13,8)								
		a=(10;10,3;10,6;10,9;11,2)	0,7760	0,8630	0,9650	0,9320	0,9642	0,9650	0,9642	0,8870
		b=(13;13,3;13,6;13,9;14,2)								
		a=(10;10,4;10,8;12,2;12,6)	0,9686	0,9845	0,9980	0,9955	0,9978	0,9980	0,9978	0,9760
		b=(13;13,4;13,8;14,2;14,6)								
	n=30	a=(10;10,1;10,2;10,3;10,4)	0,1520	0,2714	0,4202	0,3148	0,4182	0,4186	0,4182	0,3586
		b=(13;13,1;13,2;13,3;13,4)								
		a=(10;10,2;10,4;10,6;10,8)	0,6132	0,5311	0,8799	0,6518	0,8781	0,8799	0,8781	0,7115
		b=(13;13,2;13,4;13,6;13,8)								
		a=(10;10,3;10,6;10,9;11,2)	0,7937	0,8742	0,9881	0,9622	0,9812	0,9881	0,9812	0,9217
		b=(13;13,3;13,6;13,9;14,2)								
		a=(10;10,4;10,8;12,2;12,6)	0,9841	0,9947	1	1	1	1	1	0,9962
b=(13;13,4;13,8;14,2;14,6)										

Çizelge 4.8-4.10' a bakıldığında JT, TM, MJ ve MTM testlerinin birbirlerine çok yakın ve oldukça yüksek güç değerlerine sahip olduğu görülmektedir. Genele bakıldığında en yüksek güç değerini veren yöntem JT testidir. Özellikle gürp sayısı arttıkça daha yüksek güç değerleri vermektedir. Bununla birlikte bu yöntem, yüksek güç değerine sahip olmasına rağmen nominal α' dan uzak deneysel I. tip hata oranları verdiği için, yöntemin tercih edilebilir bir yöntem olmadığı söylenebilir.

JT testine çok yakın ve çoğunlukla aynı güç değerine sahip olan TM testi normal dağılımdan alınan örnekler ve üstel dağılımdan alınan örneklerle yapılan simülasyon çalışmalarının aksine tekdüze dağılımdan alınan örneklerle yapılan simülasyon çalışmasında yüksek güç değerine sahip olan yöntemlerden olduğu görülmektedir. Çizelge 4.3' de görüldüğü üzere I. tip hatayı belirlemek amacıyla tekdüze dağılımdan alınan örnekler ile yapılan simülasyon çalışmasında TM testi nominal α' ya yakın deneysel I. tip hata oranları vermiştir. Bu sebeplerden tekdüze dağılımdan alınan örneklerle yapılan çalışmalarda TM testinin kullanılması önerilebilir.

Bartholomew testinin permütasyon versiyonu klasik versiyonuna göre daha yüksek güç değerine sahiptir. Ancak yine de incelenen testlere göre düşük güç değerine sahiptir.

FTM testi normal dağılımdan ve üstel dağılımdan alınan örneklerle yapılan simülasyon çalışması sonucu sahip olduğu güç değerlerine göre daha düşük güç değerine sahiptir. Çizelge 4.3' den de görülebileceği gibi FTM testi nominal α' ya uzak deneysel I. tip hata oranları vermiştir. Dolayısıyla tekdüze dağılımdan alınan örneklerle yapılan çalışmalarda FTM testini kullanılmasının tercih edilmemesi gerektiği söylenebilir.

5. SONUÇ

Bu çalışmada sıfır hipotezinin sıralı alternatife karşı testi için parametrik olmayan testlerden Jonckheere (1954) ve Terpstra (1952) testi, Neuhauser ve diğerleri (1998) tarafından geliştirilen Modifiye Edilmiş Jonckheere testi, Terpstra ve Magel (2003) testi, Chang (2007) tarafından geliştirilen Modifiye Edilmiş Terpstra-Magel testi, Ferdhiana ve diğerleri (2008) testi ve parametrik yöntem olan Bartholomew (1959) testi incelenmiştir. Ayrıca permütasyon testi incelenerek bu yöntem Bartholomew, Jonckheere ve Terpstra testleri üzerinde uygulanmıştır.

Örnek çapınları eşitken MJT' nin beklenen değer ve varyansı teorik olarak elde edilmiştir. Ayrıca incelenen diğer yöntemlerin, örnek çaplarının eşit olması durumundaki beklenen değer ve varyans formülleri elde edilmiştir.

İncelenen yöntemler gerçek veri setine uygulanmış ve sonuçları yorumlanmıştır.

Simülasyon çalışması yapılarak bu yöntemler farklı örnek çapları, grup sayıları ve nominal α' lar için testin gücü ve birinci tip hata bakımından karşılaştırılmıştır. MTM ve MJ testleri normal dağılımdan , üstel dağılımdan, tekdüze dağılımdan alınan örneklerle yapılan simülasyonlarında birinci tip hata ve testin gücü bakımından aynı sonuçları verdiği görülmüştür. Ayrıca bu yöntemler örnek çapı, grup sayısından etkilenmeden birinci tip hata bakımından nominal α' ya yakın değer verdiği ve güç bakımından yüksek değere sahip olduğu görülmüştür.

Ayrıca Bartholomew testinin normal dağılımdan, üstel dağılımdan ve tekdüze dağılımdan alınan verilerle yapılan simülasyon çalışmalarında grup sayısının 3 olduğu durumlarda testin gücü ve birinci tip hata bakımından iyi sonuç verdiği, grup sayısı arttıkça daha kötü sonuç verdiği görülmüştür

Birinci tip hatayı belirlemeye yönelik yapılan simülasyon çalışmasında Bartholomew ve JT testlerinin permütasyon versiyonlarının klasik versiyonlarına göre nominal α' ya daha yakın değer verdiği görülmüştür.

Parametrik yöntem olan Bartholomew testi normal dağılımdan alınan örneklerle yapılan simülasyon çalışmasında grup sayısının 3 olduğu durum için nominal α' ya yakın birinci tip hata oranı verirken grup sayısı arttıkça daha uzak oran vermiştir. Normal dağılımdan alınan örneklerle yapılan simülasyon çalışmasında parametrik olmayan yöntemlerden olan MJ, MTM ve FTM testleri, parametrik olan Bartholomew testinden nominal α daha yakın birinci tip hata oranları vermiştir. TM testi α' nın 0,05'e ve 0,10' a eşit olduğu durumlarda α' nın 0,01' e eşit olduğu duruma nazaran nominal α' ya daha yakın sonuçlar vermiştir. Testin gücü bakımından ise grup sayısının 3' e eşit olduğu durumda yüksek güç değerine sahipken grup sayısı arttıkça daha düşük güç değerine sahip olduğu görülmüştür. Dolayısıyla TM testinin normal dağılımdan alınan örneklerle yapılan çalışmalarda α' nın 0,05 ya da 0,10 olduğu ve grup sayısının 3 ve daha küçük olduğu durumlarda tercih edilebileceği söylenebilir. Bartholomew testinin permütasyon versiyonu normal dağılımdan alınan örnekler için nominal α' ya yakın birinci tip hata oranları vermiştir, ancak testin gücü bakımından diğer yöntemlere göre düşük güç değerine sahip olduğundan tercih edilmemelidir. JT testi ise yüksek güç değerine sahiptir ama birinci tip hata bakımından nominal α' dan uzak α değerlerine sahip olduğu için tercih edilmemelidir.

Üstel dağılımdan alınan örneklerle yapılan çalışma sonucunda nominal α' ya ne yakın α değerlerini veren yöntemlerin MJ, MTM ve FTM yöntemleri olduğu görülmüştür. Bu yöntemler yüksek güç değerlerine sahip olduklarından üstel dağılımdan alınan örneklerle yapılan çalışmalarda bu yöntemler tercih edilebilir. Normal dağılımdan alınan örneklerle yapılan simülasyon çalışmasının sonuçlarında olduğu gibi Bartholomew testi grup sayısının 3 olduğu durumlarda nominal α' ya yakın deneysel α değerlerine ve testin gücü bakımından yüksek güç değerlerine sahiptir. Bartholomew testinin

permütasyon versiyonu klasik versiyonunun aksine grup sayısındaki artıştan etkilenmemektedir.

Tekdüze dağılımdan alınan örneklerle yapılan simülasyon çalışması sonucunda normal ve üstel dağılımdan alınan örneklerle yapılan simülasyon çalışmasının sonuçlarının aksine FTM testi nominal α' ya uzak deneysel α değerleri ve düşük güç değeri vermiştir. Dolayısı ile yapılan araştırmalarda tekdüze dağılımın kullanılması halinde FTM testinin kullanılmaması gerektiği simülasyon çalışmalarının sonucunda açıkça görülmektedir. TM testi ise normal ve üstel dağılımdan alınan örneklerle yapılan simülasyon çalışması sonucunda nominal α' dan uzak deneysel α ve düşük güç değerlerine sahipken tekdüze dağılımından alınan örneklerle yapılan simülasyon çalışması sonucunda nominal α' ya yakın deneysel α değerlerine ve yüksek güç değerlerine sahiptir. Dolayısı ile araştırmada normal ya da üstel dağılımdan alınan örnekler kullanılacağı zaman TM testinin kullanılmaması, tekdüze dağılımdan alınan örnekler kullanılacağı zaman ise TM testinin kullanılması tavsiye edilebilir. JT testi yüksek güç değerlerine sahip olmasına karşın, nominal α' dan uzak deneysel α değerlerine sahip olduğundan tercih edilmemelidir.

KAYNAKLAR

Bartholomew, D. J., "A test of homogeneity for ordered alternatives", ***Biometrika***, 46:36-48 (1959a).

Bartholomew, D. J., "A test of homogeneity for ordered alternatives", ***II. Biometrika***, 46:328–335 (1959b).

Budde, M., Bauer, P., "Multiple test procedures in clinical dose finding studies", ***Journal of the American Statistical Association***, 84: 792-796 (1989).

Brunk, H. D., Ewing G. M., Utz W. R., "Minimizing integrals in certain classes of monotone functions", ***Pac. J. Math.*** , 7:833-847 (1957).

Chacko, V. J., "Testing homogeneity against ordered alternatives", ***Annals of Mathematical Statistics***, 34:945–956 (1963).

Chang, C. H., "A nonparametric test for the ordered alternative based on the sum of spearman correlation coefficients", ***Doktora Tezi, North Dakota State University of Agriculture and Applied Science***, North Dakota, 1-28 (2007).

Chen, S., Chen, H. J., Chang H., "A one-stage procedure for testing homogeneity of means against ordered alternative under unequal variances", ***Communications in Statistics - Simulation and Computation***, 33:1, 49-67 (2004).

Dağlıoğlu, H., "Sıralı seçenek hipotezlerinde kullanılan testler", Yüksek Lisans Tezi, ***Hacettepe Üniversitesi Fenbilimleri Enstitüsü***, 4-8 (2008).

Ferdhiana R., Terpstra, J. T., Magel, R. C., "A nonparametric test for the ordered alternative based on Kendall's correlation coefficient", ***Communications in Statistics - Simulation and Computation***, 37(6):1117 – 1128 (2008).

Gamgam, H., "Parametrik Olmayan İstatistiksel Teknikler", ***Gazi Üniversitesi***, Ankara, 50-59,210-231 (1998).

Gaines, S. D., Rice, W. R., "Analysis of biological data when there are ordered expectations", ***American Naturalist***, 135(2): 310-317 (1990).

Gibson, J. D., Chackrabarti S., "Nonparametric Statistical Inference", Fourth Edition, ***Marcel Dekker***, New York, 222-404 (2003).

Good, P. I., "Resampling Methods: A Practical Guide to Data Analysis", Third Edition, ***Birkhauser***, Berlin, 31-61 (2006).

Hettmansperger, T. P., Norton, R. M., "Tests for patterned alternatives in k-sample problems", ***Journal of the American Statistical Association***, 82:292–299 (1987).

Hollander, M., Wolfe D. A., "A Distribution-Free Test for Independence Based on Sign (Kendall)", *Nonparametric Statistical Methods*, Second Edition, **Wiley Interscience**, Newyork, 363-414 (1999).

Jonckheere, A. R., "A Distribution-free k-sample test against ordered alternatives", ***Biometrika***, 41: 133-145 (1954).

Manly B. F. J., "Randomization, Bootstrap and Monte Carlo Methods in Biology", **Cahapman & Hall**, London (2007).

Neuhauser, M., Liu, P. Y., "Hothorn, L. A. nonparametric tests for trend: Jonckheere's test, a modification and maximum test", ***Biometrical Journal***, 40:899–909 (1998).

Özkaya, B., Özkaya, H., "Diyet Lif ve Polifenol Kaynağı Olarak Meyve ve Sebze Lif Konsantrelerinin Bisküvide Kullanım Olanakları", **Ankara Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri, Tübitak**, (2009) (Devam ediyor).

Puri, M. L., "Some distribution-free k-sample rank tests of homogeneity against ordered alternatives", ***Comm. Pure Appl. Math.***,18:51-63 (1965).

Terpstra, J. T., "The asymptotic normality and consistency of Kendall's test against trend, when ties are present in one ranking", ***Indagationes Math.***,14:327-333 (1952).

Terpstra, J. T., Magel, R. C., "A new nonparametric test for the ordered alternative problem", ***Journal of Nonparametric Statistics***,15:289–301 (2003).

Tryon, V. P., Hettmansperger, T. P., "A class of nonparametric tests for homogeneity against ordered alternatives", ***Annals of Statistics***, 1:1061–1070 (1973).

EKLER

EK-1 Mann-Whitey Testi

İki bağımsız örneğe ilişkin parametrik olmayan tekniklerden biri Mann-Whitney' in U testidir. Bu test Mann-Whitney-Wilcoxon testi olarak da adlandırılmaktadır. Bu test tekniği, test istatistiği olarak sıra sayıları toplamını kullanmaktadır. Bu yöntem için varsayımlar aşağıdaki gibidir.

- Veriler $x_1, x_2, \dots, x_{n_1}$ ve $y_1, y_2, \dots, y_{n_2}$ gibi iki bağımsız örnekten oluşur.
- Örnekler bağımsızdır.
- Gözlenen değişkenler sürekli rassal değişkenlerdir
- Ölçme düzeyi en az sıralamadır

Test istatistiği aşağıdaki gibidir.

$$U = S - \frac{n_1(n_1 + 1)}{2}$$

Burada S birleştirilmiş örnekte birinci örnek birimlerine verilen sıra sayılarının toplamıdır.

Örnek çapları n_1 ve n_2 yeteri kadar büyükse U istatistiğinin örnekleme dağılımının normal dağılıma yeteri kadar yakın olduğu merkezi limit teoremi gereğince söylenebilir. Yokluk hipotezi doğru ilen U istatistiğinin beklenen değeri ve varansı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$E(U) = \frac{n_1 n_2}{2}$$

$$V(U) = \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}$$

Bu durumda normal dağılıma sahip olan U istatistiğinde aşağıdaki gibi tanımlanan istatistiğin standart normal dağılıma sahip olduğu gösterilebilir.

EK-1 (Devam) Mann-Whitey Testi

$$\frac{U - E(U)}{\sqrt{V(U)}} \sim Z$$

Bu nedenle büyük örnek çapları durumunda test yapılırken standart normal dağılımdan yararlanılabilir [Gamgam, 1998].

EK-2 Spearman' ın sıra korelasyon katsayısı

Rassal olarak seçilen n çaplı örnekten X ve Y değişkenlerinin değerleri saptanmış olsun. Bu durumda $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ gibi n tane veri çifti olacaktır. Örnek birimlerinin X değişkeni bakımından aldıkları değerlerine büyüklük sıra sayıları verilsin ve bunlar $R(X_i)$ ile gösterilsin. Benzer şekilde örnek birimlerinin Y değişkeni bakımından aldıkları değerlerine de büyüklük sıra sayıları verilsin ve bunlarda $R(Y_i)$ ile gösterilsin. Bu durumda $R(X_i)$ ve $R(Y_i)$ değerlerine bağlı olarak örnek sıra korelasyon katsayısı olan r_s istatistiği aşağıdaki tanımlanmaktadır.

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

Burada $\sum d_i^2$ aşağıdaki gibidir.

$$\sum d_i^2 = \sum (R(X_i) - R(Y_i))^2$$

Sıra korelasyon katsayısının değeri -1 ile +1 arasındadır. Sıra korelasyon katsayısının değeri +1 iken iki değişken arasındaki aynı yönlü kesin ilişkiyi, -1 iken iki değişken arasındaki ters yönlü ilişkiyi, 0 iken iki değişken arasındaki ilişki olmadığını ifade eder.

Örnek çapının 30 dan büyük olması durumunda r_s istatistiğinin örnekleme dağılımının normale yaklaşımından yararlanılır. Yokluk hipotezi doğru iken

EK-2 (Devam) Spearman' ın sıra korelasyon katsayısı

r_s istatistiğinin örnekleme dağılımı, büyük örnek çapları için normaldir ve beklenen değeri 0, varyansı $1/(n-1)$ ' dir [Gibson ve Chackrabarti, 2003].

EK-3 Kendall' in Tau ilişki katsayısı

Rassal olarak seçilen n tane örnek biriminden X ve Y değişken değerleri saptanmış olsun. Bu durumda $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ gibi n tane veri çifti olacaktır. N tane veri çifti X değişkeni bakımından en küçükten en büyüğe doğru sıralanır. Bu sıralamaya X' in doğal sıralaması denir.

Y' nin her değeri için doğal sıranın sağlanıp sağlanmadığı bulunur. X' in doğal sırasında her i için $x_i < x_{i+1}$ olduğu görülmektedir. Bu durum Y' nin her değeri için gözden geçirilmelidir. Doğal sıralamanın sağlanmadığı durumların sayısı her Y değeri için bulunmalıdır. Her y_i için doğal sıranın sağlandığı durumların sayısına P denilsin. Her Y değeri için doğal sıranın sağlanmadığı durumların sayısına da Q denilsin. $S=P-Q$ olmak üzere τ istatistiği aşağıdaki gibidir.

$$\tau = \frac{S}{n(n-1)/2}$$

Örnek çapının 40' dan büyük olması durumunda τ istatistiğinin örnekleme dağılımının normale yakınsaması yaklaşımından yararlanılırç yokluk hipotezi doğru ikin büyük örnek çapları için τ istatistiğinin örnekleme dağılımı normaldir ve beklenen değeri 0, varyansıda $[2(2n+5)]/[9n(n-1)]$ ' dir. Bu durumda yeterince büyük ($n>40$) örnek çapları için test istatistiği olarak Z dağılımından yararlanılabilir [Gibson ve Chackrabarti, 2003].

$$\frac{\tau}{\sqrt{2(2n+5)/9n(n-1)}} \sim Z$$

EK-4 Bartholomew Testinin Matlab Kodu

```

function F=Fdegeri(x,n)
k=size(n,2);
xort(1:k)=0;
for i=1:sum(n)
    for j=1:k
        if x(1,i)==j;
            xort(j)=xort(j)+x(2,i)/n(j);
        end
    end
end
xort;
xgort=mean(x(2,:));
z=1;
m(1,:)=xort;
m(1,k+1)=1;
for j=1:k-1
    for i=j+1:k
        zz=1;
        z=z+1;
        m(z,k+1)=j;
        if i<k && j>1
            m(z,j:i)=mean(xort(j:i));
            m(z,i+1:k)=xort(i+1:k);
            m(z,1:j-1)=xort(1:j-1);
        elseif i==k && j>1
            m(z,j:i)=mean(xort(j:k));
            m(z,1:j-1)=xort(1:j-1);
        elseif i<k && j==1
            m(z,j:i)=mean(xort(j:i));
            m(z,i+1:k)=xort(i+1:k);
        elseif i==k && j==1
            m(z,j:i)=mean(xort(j:k));
        end
        z;
        m;
        for i=1:k-1
            if m(z,i)>=m(z,i+1)
                tt=1;
            else
                tt=0;
            end
            zz=zz*tt;
        end
        mm(z)=zz;
    end
end
end
m(:,k+2)=mm(:);
u=0;
for i=1:k-1
    if xort(i)<xort(i+1)
        u=i;
        break
    end
end

```

EK-4 (Devam) Bartholomew Testinin Matlab Kodu

```

end
for i=1:z
    if m(i,k+1)==u && m(i,k+2)==1
        ym(1:k)=m(i,1:k);
        break
    elseif u==0;
        ym(1:k)=xort;
    else
        ym(1:k)=xgort;
    end
end
end
ym;
l=1;
for i=1:k-1
    if ym(i)~=ym(i+1)
        l=l+1;
    end
end
ust=0;
alt=0;
for i=1:k
    ust=ust+n(i)*(ym(i)-xgort)^2;
end
for i=1:sum(n)
    tr=x(1,i);
    alt=alt+(x(2,i)-ym(tr))^2/(sum(n)-k);
end
if l==1
    F=0;
else
    F=ust/((l-1)*alt);
End

```

EK-5 Modifiye Edilmiş Jonckheere -Terpstra Testinin Matlab Kodu

```
function [T Z p]=MJT(x)
nk=length(x(2,:));
k=max(x(1,:));
n=nk/k;
T=0;E=0;
for i=1:k-1
    for j=i+1:k
        U(i,j)=mwu(x(2,(i-1)*n+1:i*n),x(2,(j-1)*n+1:j*n));
        T=T+(j-i)*U(i,j);
        E=E+(j-i)*n^2/2;
    end
end
V=k^2*(k^2-1)*n^2*(nk+1)/144;
Z=(T-E)/sqrt(V);
p=1-normcdf(Z,0,1);
```

EK-6 Terpstra-Magel Testinin Matlab Kodu

```

function [p T test o v ]=terp(YX,k,n)
nn(1:k)=n;
z=0;
for i=1:k
    for j=1:n
        z=z+1;
        X(i,j)=YX(z);
    end
end
T=0;
if k==3
    for j1=1:n
        for j2=1:n
            for j3=1:n
                A=[X(1,j1) X(2,j2) X(3,j3)];
                T=T+great(A);
            end
        end
    end
elseif k==4
    for j1=1:n
        for j2=1:n
            for j3=1:n
                for j4=1:n
                    A=[X(1,j1) X(2,j2) X(3,j3) X(4,j4)];
                    T=T+great(A);
                end
            end
        end
    end
elseif k==5
    for j1=1:n
        for j2=1:n
            for j3=1:n
                for j4=1:n
                    for j5=1:n
                        A=[X(1,j1) X(2,j2) X(3,j3) X(4,j4) X(5,j5)];
                        T=T+great(A);
                    end
                end
            end
        end
    end
end
[o v]=terpsta2003(nn);
test=(T-o)/sqrt(v);
p=1-normcdf(test);

```

EK-7 Ferdhiana, Terpstra ve Magel Testinin Matlab Kodu

```
function [p T V Z]=terpsta2008(x,k,n)
[Ut a b s]=jttrend(x);
T=-n^k+(4*n^(k-2)/(k*(k-1)))*Ut;
% V=(1/3)*(n^k)*(nchoosek(k,2)*n^(k-2)+(2*(k-1)^2+2*(k-3)^2)*n^(k-1));
V=(s*(4*n^(k-2)/(k*(k-1))))^2;
Z=T/sqrt(V);
p=1-normcdf(T/sqrt(V),0,1);
```

EK-8 Modifiye Edilmiş Terpstra-Magel Testinin Kodu

```

function [T Z p]=chang2007(x)
k=max(x(1,:));
n=length(x(2,:))/k;
q=combinator(n,k,'p','r');
for i=1:k
    m(:,i)=q(:,i)+(i-1)*n;
end
for j=1:n^k
    for i=1:k
        mn(j,i)=x(2,m(j,i));
    end
    mn(j,k+1)=12*[1:k]*tiedrank(mn(j,1:k))'/k/(k^2-1)-3*(k+1)/(k-1);
end
mn;
T=sum(mn(:,k+1));
nn(1:k)=n;
t1=0;t2=0;
for l=1:k-1
    for m=l+1:k
        t1=t1+(m-l)^2*(nn(l)+nn(m)+1)/(12*nn(l)*nn(m));
    end
end

for l1=1:k-2
    for l2=l1+1:k-1
        for l3=l2+1:k
            t2=t2+(l2-l1)*(l3-l1)/(6*nn(l1))+(l3-l2)*(l1-l2)/(6*nn(l2))+(l1-l3)*(l2-l3)/(6*nn(l3));
        end
    end
end
ny=1;
for i=1:k
    ny=ny*nn(i);
end
Vt=(12*ny/(k*(k^2-1)))^2*(t1+t2);
Z=T/sqrt(Vt);
p=1-normcdf(Z,0,1);

```

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : PEKKAYA, Gülsera
 Uyruğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 21.07.1985, Ankara
 Medeni hali : Evli
 Telefon : 0536 5119053
 e-mail : g_sera@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet
Yüksek Lisans	Gazi Üni./ İstatistik Böl.	-
Lisans	Gazi Üni./ İstatistik Böl.	2008
Lise	Çankaya Anadolu Lisesi	2003

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2010-	Halk Bankası Genel Müdürlüğü / Risk Yönetimi D.B.	Servis Görevlisi

Yabancı Dil

Almanca, İngilizce

Hobiler

Sinema, Müzik