

**T.C.
CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

**SIRALAMA YÖNTEMİ İLE YÜKSEK MERTEBEDE LİNEER
KARMAŞIK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN EULER ve
GENOCCHI OPERASYONEL MATRİSİNE GÖRE ÇÖZÜMÜ**

Mehtap TOSUN

**Danışman
Prof. Dr. Necdet BİLDİK**



MANİSA-2016

**Mehrap
TOSUN**

**SIRALAMA YÖNTEMİ İLE YÜKSEK MERTEBEDE LİNEER KARMAŞIK DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN EULER ve GENOCCHI OPERASYONEL MATRİSİNE GÖRE ÇÖZÜMÜ**

2016

TEZ ONAYI

Mehtap TOSUN tarafından hazırlanan " **SIRALAMA YÖNTEMİ İLE YÜKSEK MERTEBEDE LİNEER KARMAŞIK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN EULER ve GENOCCHI OPERASYONEL MATRİSİNE GÖRE ÇÖZÜMÜ**"adlı tez çalışması 01/03/2016 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman	Prof. Dr. Necdet BİLDİK Celal Bayar Üniversitesi	
Jüri Üyesi	Prof. Dr. Turgut ÖZİŞ Ege Üniversitesi	
Jüri Üyesi	Yrd. Doç. Dr. Duygu Dönmez DEMİR Celal Bayar Üniversitesi	

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik anabilim dalında, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Mehtap TOSUN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	II
TABLO DİZİNİ	III
TEŞEKKÜRLER	IV
ÖZET.....	V
ABSTRACT.....	VI
1. GİRİŞ	1
2. KARMAŞIK HESABIN BAZI GÖSTERİMLERİ ve EULER POLİNOMLARININ ÖZELLİKLERİ	3
2.1. KARMAŞIK HESABIN İNCELENMESİ	4
2.2. EULER POLİNOMLARI ve OPERASYONEL MATRİSLERİ.....	7
3. EULER MATRİS YÖNTEMİ	9
4. EULER POLİNOMLARININ YARDIMIYLA YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜN HATA ANALİZİ	12
5. ESY İÇİN SAYISAL ÖRNEKLER.....	19
6. GENOCCHİ POLİNOMLARININ ÖZELLİKLERİ ve EULER-GENOCCHİ ARASINDAKİ İLİŞKİ	27
7. GENOCCHİ MATRİS YÖNTEMİ	29
8. GSY İÇİN SAYISAL ÖRNEKLER	32
9. SONUÇ	40
KAYNAKLAR	41
ÖZGEÇMİŞ	46

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

DOF	Serbest Sistemin Derecesi
ESY	Euler Sıralama Yöntemi
GSY	Genocchi Sıralama Yöntemi
ODE	Kompleks Adi Diferansiyel Denklem
PDE	Kısmi Diferansiyel Denklem

TABLO DİZİNİ

	Sayfa
Tablo 1	23
Tablo 2	26
Tablo 3	36
Tablo 4	39

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında bana destek olan, bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren bilgi ve Yüksek Lisans öğrenim hayatımın tüm zorlu aşamalarında maddi manevi her yönden yardımcı olan, tecrübeleri ile beni aydınlatan ve desteğini hiç eksik etmeyen, kendisini tanımaktan büyük onur duyduğum danışman hocam Sayın Prof. Dr.Necdet BİLDİK' e, Yüksek Lisans eğitimim sırasında desteğini esirgemeyen Arş.Gör.Sinan DENİZ' e, çalışmalarım sırasında manevi desteğini öğrenim hayatım boyunca beni maddi ve manevi olarak destekleyen ve hep yanımda olan aileme yürekten teşekkür ederim.

Mehtap TOSUN
Manisa, 2016

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SIRALAMA YÖNTEMİ İLE YÜKSEK MERTEBEDE LİNEER KARMAŞIK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN EULER ve GENOCCHI OPERASYONEL MATRİSİNE GÖRE ÇÖZÜMÜ

Mehtap TOSUN

Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Necdet BİLDİK

Bu tez, başlangıç koşulları altında dikdörtgensel bir bölgede yüksek mertebeden lineer karmaşık diferansiyel denklemlerin çözümünü, Euler ve Genocchi polinomları kullanılarak oluşturulan matrisler yardımıyla bulmaya dayalıdır. Bu yaklaşımda, Euler ve Genocchi polinomlarının ve türevlerinin matris formları oluşturulmuştur. Daha sonra bu matris formlarının içine sıralama noktalarının yerleştirilmesiyle temel matris denklemi ortaya konmuştur. Bu matris denklemi, lineer denklem sistemine karşılık gelmektedir. Bu lineer denklem sistemi çözülerek, bilinmeyen Euler katsayıları ve bilinmeyen Genocchi katsayıları belirlenmiştir. Daha sonra ise yaklaşık çözüm elde edilmiştir. Ayrıca, Euler polinomlarının kullanılmasına dayalı bir hata analizi, bazı koşullar altında yapılmıştır. Yöntemin etkinliğini göstermek için bunu destekleyen bazı sayısal örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Karmaşık Diferansiyel Denklemler, Sıralama Metodu, Euler Polinomu, Genocchi Polinomu

2016, 46 sayfa

ABSTRACT

M.Sc.Thesis

A Collocation Method Based on the Euler and Genocchi Operational Matrix for Solving High-Order Linear Complex Differential Equations in a Rectangular Domain

Mehtap TOSUN

**Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Math**

Supervisor: Prof. Dr. Necdet BILDIK

This paper contributes a new matrix method for the solution of high-order linear complex differential equations with variable coefficients in rectangular domains under the given initial conditions. On the basis of the presented approach, the matrix forms of the Euler and Genocchi polynomials and their derivatives are constructed, and then by substituting the collocation points into the matrix forms, the fundamental matrix equation is constructed. This matrix equation corresponds to a system of linear algebraic equations. By solving this system, the unknown Euler and Genocchi coefficients are determined and hence the approximate solutions are obtained. Also, an error analysis based on the use of the Euler polynomials is provided under several conditions. To illustrate the efficiency of this method, some numerical examples are presented.

Keywords:Complex Differential Equations, Collocation Method, Euler Polynomials, Genocchi Polynomials.

2016, 46 pages

1.GİRİŞ

Karmaşık diferansiyel denklemlerin bilim ve mühendislik açısından oldukça önemli bir yeri vardır. Gerçek dünyada, fiziksel olaylar genellikle karmaşık diferansiyel denklemlerle modellenir. Örneğin, iki DOFs ile bir-kütle sisteminin titreşimleri, genellikle karmaşık bağımlı değişken diferansiyel denklemler kullanılarak tanımlanabilmekte [1, 2], bunların çeşitli uygulamaları ise literatürde zaman zaman yer almaktadır [2]. Ayrıca bu tipteki denklemlerin büyük bir kısmının açıkça çözülemeyeceği de aşîkardır. Diğer yandan bu tür denklemlerin çözümü için genellikle yaklaşımlar ve sayısal teknikler kullanılır.

Tezin ilk bölümünde Euler polinomları ve bunların türevleri arasındaki matris ilişkileri vasıtasıyla, Euler sıralama yöntemi (**ESY**) kullanılarak yüksek mertebeden karmaşık diferansiyel denklemler çözülecektir. İkinci kısımda ise Euler ve Genocchi polinomları arasındaki bağlantı ortaya konularak, Genocchi polinomları ve bunların türevleri arasındaki matris ilişkileri aracılığıyla, Genocchi sıralama yöntemi (**GSY**) ile yüksek mertebeden karmaşık diferansiyel denklemler ele alınarak incelenecektir. Öncelikle karmaşık birinci mertebeden diferansiyel denklemler verilecek ve daha sonra **ESY** yardımıyla yüksek mertebeden karmaşık diferansiyel denklemin çözümü bulunmaya çalışılacaktır. Bunun için;

$D = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, a \leq x \leq b, c \leq y \leq d : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ bölgesinde $P_k(z)$ katsayılar matrisi, $S(z)$ bilinen fonksiyon, $f(z)$ bilinmeyen fonksiyon ve β_r ise karmaşık katsayılar olmak üzere

$$f^{(r)}(0) = \beta_r, r = 0, 1, \dots, m-1. \quad (1)$$

biçiminde başlangıç koşuluna sahip

$$f^{(m)}(z) + \sum_{k=0}^{m-1} P_k(z) f^{(k)}(z) = S(z) \quad (2)$$
$$m \geq 1, z = x + iy, x \in [a, b], y \in [c, d]$$

m .mertebeden karmaşık diferansiyel denklemi göz önüne alınır. Burada z 'nin reel ve sanal kısımları sırasıyla x ve y ile gösterilir. Ayrıca $f(z)$ fonksiyonu D bölgesinde holomorfik (veya analitik) fonksiyonlardır. Şimdi (2) denkleminin (1)'deki şartlar altında yaklaşık olarak çözümünün aşağıdaki gibi yazılabileceğini kabul edelim:

$$f(z) \approx f_N(z) = \sum_{n=0}^N f_n E_n(z) \quad (3)$$
$$f_1(z) \approx f_N(z) = \sum_{n=1}^N f_n G_n(z)$$

Burada $f(z)$, kestirilmiş Euler serisinin ve $f_1(z)$ 'de kestirilmiş Genocchi serisinin bilinmeyen fonksiyonudur. Diğer yandan Euler katsayıları

$f_n(n = 0, 1, 2, \dots, N)$ ve Genocchi katsayıları da $f_n(n = 1, 2, \dots, N)$ biçiminde belirlenecektir. Bu durumda sıralama noktaları aşağıdaki gösterildiği şekilde ifade edebiliriz:

$$z_{pp} = x_p + iy_p, \quad x_p = a + \frac{b-a}{N} p, \quad y_p = c + \frac{d-c}{N} p. \quad (4)$$

Bu tezin devamında ise, 2.Bölümünde Karmaşık Hesabın bazı gösterimleri ve Euler polinomlarının özellikleri, 3.Bölümde de Euler Matris Yöntemi ele alınacaktır. 4.Bölümünde Euler polinomunun yardımıyla yaklaşık çözümün hata analizi ve doğruluğu gösterilecek, 5.Bölümde **ESY** için açıklayıcı örnekler sunularak yöntemin etkinliği teyit edilecektir. 6.Bölümünde Genocchi polinomlarının özellikleri ve kısaca Genocchi-Euler polinomları arasındaki ilişkiden bahsedilecek, 7. Bölümünde ise Genocchi Matris Yöntemine yer verilecektir. 8. Bölümünde **ESY** ile çözülen örnekler ele alınarak bunlar **GSY** yardımıyla çözülmeye çalışılacaktır. Son olarak 9. Bölümünde bazı sonuçlar ortaya konularak bununla ilgili öneriler sunulacaktır.

2. KARMAŞIK HESABIN VE EULER POLİNOMLARININ İNCELENMESİ

Bu bölüm iki alt başlıktan oluşmaktadır. Birincisi karmaşık düzlemde bazı notasyonlar kullanılarak yapılacak olan hesaplara ilişkin diferansiyellenebilirlik kavramıdır. İkincisi ise, Euler polinomlarının tanımı ve bu polinomlar için operasyonel matrislerinin öneminin ortaya konuluşudur.

2.1. KARMAŞIK HESABIN İNCELENMESİ

Karmaşık fonksiyonların türev tanımından; sabit bir fonksiyonun her yerde türevlenebilir ve türevinin “0”, benzer şekilde $f(z) = z$ birim fonksiyonunun her yerde türevlenebilir ve türevinin “1”, ayrıca herhangi n pozitif bir tamsayı için; $f(z) = z^n$ fonksiyonunun her yerde türevlenebilir ve türevinin de $f'(z) = nz^{n-1}$ olduğu âşikar olarak bilinmektedir. Ayrıca, toplam ve çarpım kurallarına bağlı olarak polinomun, her yerde türevlenebilir olduğu da açıktır. Buna göre eğer fonksiyon $f(z) = cz^n + c_{n-1}z^{n-1} + c_{n-2}z^{n-2} + \dots + c_1z + c_0$ biçiminde ise, $c_0, \dots, c_n$ ler karmaşık sabitler olmak üzere, bu fonksiyonun türevi $f'(z) = nc_nz^{n-1} + (n-1)c_{n-1}z^{n-2} + \dots + c_1$ ‘ dir.

Açıklama 1

$f(z) = u + iv$, fonksiyonunun z_0 noktasında türevlenebilir olması için gerek ve yeter şartın u ve v fonksiyonlarının z_0 ’da türevlenebilir olduğu bir gerçektir. $f(z)$ fonksiyonunun x ve y bağımsız değişkenlerine göre z_0 noktasındaki kısmi türevlerinin

$$\frac{\partial_u(z_0)}{\partial x} = \frac{\partial_v(z_0)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial_u(z_0)}{\partial y} = -\frac{\partial_v(z_0)}{\partial x}$$

(Cauchy-Riemann) denklemlerini sağladığı da açıktır. Bu durumda;

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial_u(z_0)}{\partial x} + i \frac{\partial_v(z_0)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial_v(z_0)}{\partial y} - i \frac{\partial_u(z_0)}{\partial y} \end{aligned} \quad (5)$$

olarak yazılır.

Açıklama 2

Herhangi bir u ve v fonksiyon çifti için

$$\frac{\partial_u}{\partial x} = \frac{\partial_v}{\partial y}, \quad \frac{\partial_u}{\partial y} = -\frac{\partial_v}{\partial x} \quad (6)$$

eşitliklerine Cauchy-Riemann denklemleri adı verilir. Yukarıda da açıkça görülebileceği gibi (Açıklama 1) bu denklemler, fonksiyonun türevlenebilir olduğu her bir noktada; karmaşık değerli bir fonksiyonun sanal ve gerçel kısımları için de sağlanmaktadır.

Açıklama 3 (Kompleks diferansiyellenebilirlik için yeter şart)

$f(z) = u + iv$ karmaşık değerli bir fonksiyon olmak üzere C karmaşık uzayın bir alt cümlesi H olsun. Diğer yandan u ve v ’nin birinci mertebeden kısmi türevlerinin de

H 'da bulunduğunu kabul edelim. Bu takdirde $f(z)$ fonksiyonunun türevlenebilir olduğu her bir noktada kısmi türevlerinin de sürekli olduğu ve bu fonksiyonun sonuçta Cauchy-Riemann denklemlerini sağladığı açıktır.

Açıklama 4

$f(z)$ karmaşık değerli bir fonksiyonun, C 'nin açık bir alt kümesi olan H 'da tanımlı olduğunu kabul edelim. Bu şekilde tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu eğer H 'ın her bir noktasında türevlenebilir ise; bu fonksiyona H 'da holomorftur (ya da analitik) denir. Buna en basit örnek, C 'de holomorf olan polinomlardır. Ayrıca bunlar tanımlı oldukları bölgelerde holomorf olan rasyonel fonksiyonlardır. Daha da ötesi; üstel fonksiyonlar, logaritmik fonksiyonlar, trigonometrik ve ters trigonometrik fonksiyonlar, kuvvet fonksiyonları gibi temel fonksiyonlar bunlara örnek verilebilir. Ayrıca bu fonksiyonların hepsinin karmaşık değerli holomorf fonksiyonlar olduğu da açıktır. Diğer yandan dikkat edilmesi gereken önemli bir husus; karmaşık değerli bir $f(z)$ fonksiyonunun holomorf olması için gerek ve yeter şartın u ve v fonksiyonlarının x ve y bileşenlerine göre birinci mertebeden kısmi türevlerinin Cauchy-Riemann denklemlerini sağlamasıdır.

Açıklama 5 (Kompleks kısmi diferansiyel operatörleri)

Birinci mertebeden $\partial/\partial x$ ve $\partial/\partial y$ biçimindeki kısmi türev operatörlerine ; $f(z) = u + iv$ olmak üzere $f(z)$ karmaşık değerli fonksiyonu uygulanacak olursa

$$\begin{aligned}\frac{df}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}\tag{7}$$

bulunur. Buradan da $\partial/\partial z$ ve $\partial/\partial \bar{z}$ türevleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)\end{aligned}\tag{8}$$

Böylece

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} &= i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)\end{aligned}$$

elde edilir. C 'nin açık bir alt kümesinde karmaşık değerli holomorfik bir fonksiyonun sadece z 'ye bağlı olduğu fakat $\bar{z}$ 'den bağımsız olduğu açıktır. Bu notasyon; tam olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir. $f(z)$; C 'nin açık bir alt

kümesinde tanımlı , türevlenebilir bir fonksiyon ve ayrıca $\frac{df}{d\bar{z}} = 0$ olmak üzere

Cauchy-Riemann denklemlerinden

$$\begin{aligned}\frac{df}{dz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{df}{d\bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)\end{aligned}\tag{9}$$

yazılabilir. $f(z)$ 'in holomorf olma koşulundan dolayı bu ifade kesin bir anlam kazanmaktadır. Eğer $f(z)$ holomorf bir fonksiyonsa âşikar olarak $\bar{z}$ 'den bağımsız , $f(z)$ 'in holomorf olması durumunda ise;

$$f' = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial z}\tag{10}$$

olarak yazılabileceği açıkça görülür.

2.2. Euler Polinomları ve Operasyonel Matrisleri

Klasik Euler polinomu genellikle üstel fonksiyon olarak ortaya çıkmaktadır. Bu fonksiyonlar özellikle $E_n(x)$ olarak gösterilir. Bunun açık bir gösterimi ise

$$e^{E(x)t} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{2}{e^t + 1} e^{xt}, \quad |t| < \pi \quad (11)$$

biçimindedir. Euler polinomunun en önemli özellikleri ise

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E_k(x) + E_n(x) &= 2x^n \\ E_n(x+y) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E_k(x) y^{n-k} \\ E_N(x) &= \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} E_n(0) x^{N-n} \end{aligned} \quad (12)$$

olarak yazılabilir olmasıdır. Euler polinomları ile ilgili birkaç örnek verilecek olursa bunlar;

$$\begin{aligned} E_0(x) &= 1 \\ E_1(x) &= x - \frac{1}{2} \\ E_2(x) &= x^2 - x \\ E_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4} \\ E_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x \\ E_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2} \\ E_6(x) &= x^6 - 3x^5 + 5x^3 - 3x \end{aligned} \quad (13)$$

şeklindedir. Diğer yandan Euler polinomu aşağıdaki özellikleri de sağlar:

$$\begin{aligned} \frac{dE_n(x)}{dx} &= nE_{n-1}(x), \quad (n \geq 1) \\ \int_0^1 E_n(x) dx &= -\frac{2E_{n+1}}{n+1} \end{aligned} \quad (14)$$

Bunun yanında

$$E_n(x+1) + E_n(x) = 2x^n \quad (15)$$

ve

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E_k(x) E_{n-k}(w) = 2(1-w-z) E_n(z+w) + 2E_{n+1}(z+w), \quad n \geq 0. \quad (16)$$

Bunlara ilaveten, $E_n(x)$ polinomlarının

$$\frac{E_n(0)}{n!} y^{(n)}(x) + \frac{E_{n-1}(0)}{(n-1)!} y^{(n-1)}(x) + \dots + \frac{E_2(0)}{2!} y''(x) + \left(\frac{1}{2} - x\right) y'(x) + ny(x) = 0 \quad (17)$$

biçimindeki diferansiyel denklemi sağladığı kolayca görülür. Diğer yandan $E(x) = [E_0(x), E_1(x), E_2(x), \dots, E_n(x)]$ şeklinde yazılan bir Euler vektörü olsun.

Bu durumda (14) denkleminde göre $E(x)$ 'in türevi matris formunda

$$\underbrace{\begin{bmatrix} E_0'(x) \\ E_1'(x) \\ E_2'(x) \\ \vdots \\ E_{n-1}'(x) \\ E_n'(x) \end{bmatrix}}_{E'(x)^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & N & 0 \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{bmatrix} E_0(x) \\ E_1(x) \\ E_2(x) \\ \vdots \\ E_{n-1}(x) \\ E_n(x) \end{bmatrix}}_{E^T(x)} \quad (18)$$

olarak ifade edilir. Burada $M, (N+1) \times (N+1)$ tipinde türevle ilgili operasyonel matristir. Öte yandan reel değişkenli x değeri karmaşık değerli z 'ye taşınacak olursa yukarıda da gösterildiği gibi sonucun değişmediği görülür. Buna göre, $(z^n)' = nz^{n-1}$ olduğu kolayca görülür. Diğer yandan, (18) denkleminde tanımlanan $E(x)$ 'in k . mertebeden türevi alınır

$$\begin{aligned} E'(x)^T &= ME(x)^T \\ \Rightarrow E^{(1)}(x) &= E(x)M^T \\ E^{(2)}(x) &= E^{(1)}(x)M^T = E(x)(M^T)^2 \\ E^{(3)}(x) &= E^{(1)}(x)(M^T)^2 = E(x)(M^T)^3 \\ &\vdots \\ E^{(k)}(x) &= E(x)(M^T)^k \end{aligned} \quad (19)$$

bulunur.

3. Euler Matris Yöntemi

Bu bölümde, Euler 'in diferansiyel operasyonel matrisi ve sıralama noktaları kullanılarak, bu tezin ana fikri inşa edilecektir. Bunun için **(2)** ve **(3)** denklemleri ile ifade edilen yaklaşık çözüm, vektör formunda aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$f_N(z) = E(z)F, \quad E(z) = \begin{bmatrix} E_0(z) & E_1(z) & \cdots & E_N(z) \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & \cdots & f_N \end{bmatrix}^T. \quad (20)$$

Buradan da **(19)** denklemi karmaşık formda

$$f_N^{(k)}(z) = E(z)(M^T)^k F, \quad k \leq N \quad (21)$$

ifade edilebilir. Böylece sıralama noktaları; $z = z_{pp}$ ($p = 0, 1, \dots, N$)'nin **(21)**'den dolayı matris ile ilişkisi:

$$f_N^{(k)}(z_{pp}) = E(z_{pp})(M^T)^k F, \quad p = 0, 1, \dots, N \quad (22)$$

şeklindedir. Burada; $E(z_{pp}) = \begin{bmatrix} E_0(z_{pp}) & E_1(z_{pp}) & \cdots & E_N(z_{pp}) \end{bmatrix}$ 'dir. **(22)**'deki ifade yeniden düzenlenirse;

$$\begin{aligned} f_N^{(k)}(z_{00}) &= E(z_{00})(M^T)^k F, \\ f_N^{(k)}(z_{11}) &= E(z_{11})(M^T)^k F, \\ &\vdots \\ f_N^{(k)}(z_{NN}) &= E(z_{NN})(M^T)^k F. \end{aligned} \quad (23)$$

bulunur. Böylece yukarıdaki matris-vektörün denklemi:

$$F^{(k)} = \begin{bmatrix} f_N^{(k)}(z_{00}) \\ f_N^{(k)}(z_{11}) \\ \vdots \\ f_N^{(k)}(z_{NN}) \end{bmatrix} = L(M^T)^k F \quad (24)$$

olmak üzere

$$L = \begin{bmatrix} E(z_{00}) \\ E(z_{11}) \\ \vdots \\ E(z_{NN}) \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$= \begin{bmatrix} E_0(z_{00}) & E_1(z_{00}) & E_2(z_{00}) & \dots & E_N(z_{00}) \\ E_0(z_{11}) & E_1(z_{11}) & E_2(z_{11}) & \dots & E_N(z_{11}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_0(z_{NN}) & E_1(z_{NN}) & E_2(z_{NN}) & \dots & E_N(z_{NN}) \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Öte yandan **(4)** - **(2)** denklemlerinde sıralama noktaları $z = z_{pp}$ olarak tanımlanırsa, bu takdirde;

$$f_N^{(m)}(z_{pp}) + \sum_{k=0}^{m-1} P_k(z_{pp}) f_N^{(k)}(z_{pp}) = S(z_{pp}), \quad p = 0, 1, \dots, N. \quad (26)$$

yazılır. **(26)** denklemini **(24)**'deki matris vektör formunda

$$F^{(m)} + \sum_{k=0}^{m-1} P_k F^{(k)} = L(M^T)^m + \sum_{k=0}^{m-1} P_k L(M^T)^k F = S \quad (27)$$

İfade edilebilir. Burada $S = [S(z_{00}) \quad S(z_{11}) \quad \dots \quad S(z_{NN})]^T$ olmak üzere

$$P_k = \begin{bmatrix} P_k(z_{00}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_k(z_{11}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_k(z_{NN}) \end{bmatrix} \quad (28)$$

olarak bilindiğinden dolayı, F bilinmeyen vektörü tespit edilmelidir. Bu yüzden **(27)** matris-vektör denklemi $W = L(M^T)^m + \sum_{k=0}^{m-1} P_k L(M^T)^k$ olmak üzere

$$WF = S$$

ya da

$$[W; S] = [w_{pq}; s_p] ; \quad p, q = 0, 1, \dots, N \quad (29)$$

gösterilebilir. Şimdi de **(1)** başlangıç şartının vektörel formu **(21)** denklemini yardımı ile yeniden yazılırsa,

$$f^{(r)}(0) = E(0)(M^T)^r F = \beta_r, \quad r = 0, 1, \dots, m-1 \quad (30)$$

bulunur. Diğer bir ifadeyle başlangıç şartının vektörel formu $U_r F = \beta_r$ şeklinde de temsil edilebilir. Burada;

$$U_r = E(0)(M^T)^r, \quad r = 0, 1, \dots, m-1.$$

Bu takdirde denklem:

$$[U_r; \beta_r] = [u_{r0} \quad u_{r1} \quad u_{r2} \quad \dots \quad u_{rN} \quad ; \quad \beta_r], \quad r = 0, 1, \dots, m-1. \quad (31)$$

formunu alır. Sonuç olarak, (2) denklemi ile (1) başlangıç şartları altında ifade edilen problemin yaklaşık çözümleriyle ilgili bilinmeyen f_n , $n = 0, 1, \dots, N$, Euler katsayılarını bulmak için (31)'deki m . satırlar, (29)'daki son m . satırlar ile yer değiştirilir. Buna göre yeni matris:

$$[\hat{W}; \hat{S}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \dots & w_{0N} & ; & s_0 \\ w_{10} & w_{11} & \dots & w_{1N} & ; & s_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{N-m,0} & w_{N-m,1} & \dots & w_{N-m,N} & ; & s_{N-m} \\ u_{00} & u_{01} & \dots & u_{0N} & ; & \beta_0 \\ u_{10} & u_{11} & \dots & u_{1N} & ; & \beta_1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & \dots & u_{m-1,N} & ; & \beta_{m-1} \end{bmatrix} \quad (32)$$

ya da matris-vektörüne karşılık gelen denklem;

$$\hat{W}F = \hat{S} \quad (33)$$

tarzındadır. Eğer $\det(\hat{W}) \neq 0$ ise, bu takdirde (31)'deki gösterim $F = (\hat{W})^{-1} \hat{S}$ şeklinde yazabiliriz. Böylece; F vektörü kesin bir şekilde belirlenmiş olur. Bu sonuca bağlı olarak; (2)'deki değişken katsayılı m . dereceden lineer karmaşık diferansiyel denklemin, (1)'deki başlangıç koşulları altında yaklaşık bir çözümü vardır. Bu çözüm, (3)'teki kestirilmiş Euler serisi ile verilmiştir. Ayrıca aşağıdaki gibi kolayca elde edilen çözümlerin doğruluğu [12-26] ile kontrol edebiliriz. (3) denklemiyle gösterilen kestirilmiş Euler serisi (2) denkleminin yaklaşık çözümü olduğundan, $f(z)$ fonksiyonu ve onun türevleri (2) denkleminde yerine yazıldığında denklemin yaklaşık olarak sağlandığı görülür. Yani $z = z_i \in D$, $i = 0, 1, 2, \dots$ için

$$B(z_i) = \left| f^{(m)}(z_i) + \sum_{k=0}^{m-1} P_k(z_i) f^{(k)}(z_i) - S(z_i) \right| \cong 0 \quad \text{ya}$$

da

$$B(z_i) \leq 10^{-ki}, \quad (ki; \text{ herhangi bir tamsayı}). \quad (34)$$

Eğer $\max(10^{-ki}) = 10^{-k}$, $(ki; \text{ herhangi bir tamsayı})$ olarak kabul edilirse, kestirilme sınırı olan $N, B(z_i)$ koşulu altında her z_i değeri için artırılabilir. Böylelikle $B(z_i); 10^{-k}$ 'dan daha küçük olacaktır [10-12,16,17].

4. Hata Analizi ve Analizin Doğruluğu

Bu bölüm, Euler polinomlarının yaklaşık çözümü için hata sınırını belirleme ile ilgilidir. Karmaşık adi diferansiyel denklemin, kısmi diferansiyel denklem sistemine eşdeğer olduğunu göstermek için, önerilen metotların Euler polinom yaklaşımlarını sağlayıp sağlamadığını vurgulamak gerekir. Özel durumda ((1)'deki şartlar altında) kısmi diferansiyel denklemlerden elde edilen sistem iki tane Volterra integral denklem sistemine dönüştürülür. Bu bölümde temel teoremi sunmadan önce birkaç yararlı sonuç ve bununla ilgili bazı yardımcı teoremleri hatırlatmak gerekir. Bu yüzden bu ana teorem, çeşitli şartlar altında yaklaşık çözümlere, kestirilmiş Euler serisinin yaklaşımını garanti altına alacak biçimde ortaya konulabilir.

Şimdi de $H = L^2[0,1]$ olmak üzere Euler polinomlarının kümesi $\{E_0(x), E_1(x), E_2(x), \dots, E_N(x)\} \subset H$ olarak kabul edilsin. Bu durumda

$$Y = \text{span}\{E_0(x), E_1(x), E_2(x), \dots, E_N(x)\}. \quad (35)$$

Buna ilaveten eğer g, H 'nin keyfi bir elemanı ve Y de sonlu boyutlu bir vektör uzayı ise,

$$\forall y \in Y, \|g - \hat{g}\|_\infty \leq \|g - y\|_\infty \quad (36)$$

olmak üzere g 'ye benzersiz en iyi bir tek yaklaşım $\hat{g} \in Y$ olarak ifade edilir. Bu takdirde:

$$\begin{aligned} g &\approx \hat{g} = \sum_{n=0}^N g_n E_n(x) = E(x) G^T \\ E(x) &= [E_0(x), E_1(x), \dots, E_N(x)] \\ G &= [g_0, g_1, \dots, g_N] \end{aligned} \quad (37)$$

için $\hat{g} \in Y$ iken $g_0, g_1, \dots, g_N$ (bir tek) katsayıları mevcuttur.

Sonuç 6

$g \in H = L^2[0,1]$ yeterince düzgün bir fonksiyon ve Euler yaklaşık serisi de $\sum_{n=0}^{\infty} g_n E_n$ olmak üzere $n = 0, 1, \dots, \infty$ için tüm g_n katsayıları;

$$g_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 g^{(n)}(x) dx \quad (38)$$

ile bulunur [21] . Pratikte ise yukarıda ki gibi sonlu seri kullanılabilir. Böylece **Sonuç 6**'nın varsayımları altında, öne sürülen yaklaşımın hata analizleri kolayca yapılabilir.

Yardımcı Teorem 7

Sonuç 6'da gösterildiği gibi ; $g(x)$ 'in yeterince düzgün bir fonksiyon olduğunu, bu aralıkta Euler polinomlarına yakınsadığını ve ayrıca $P_N[g](x)$ ' in de $g(x)$

polinomuna yakınsadığını, bunun yanında geriye kalan terimlerin ise $R_N[g](x)$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde:

$$\begin{aligned} g(x) &= P_N[g](x) + R_N[g](x), \quad x \in [0,1] \\ P_N[g](x) &= \int_0^1 g(x) dx + \sum_{j=1}^N \frac{E_j(x)}{j!} (g^{(j-1)}(1) - g^{(j-1)}(0)) \\ R_N[g](x) &= -\frac{1}{N!} \int_0^1 E_N^*(x-t) g^{(N)}(t) dt \end{aligned} \quad (39)$$

yazılabilir. Burada $E_N^* = E_N(x - [x])$ ve $[x]$, x 'den büyük olmayan en büyük tamsayıdır [20].

Yardımcı Teorem 8

$g(x) \in C^\infty[0,1]$ ve $g_N(x)$, Euler polinomları kullanılarak elde edilen yaklaşık polinomlar olsunlar. O zaman hata sınırı; $\hat{G}$, bütün türevler için bir sınırı temsil etmek üzere:

$$\|B(g_N(x))\|_\infty \leq C \hat{G} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{-N}, \quad x \in [0,1] \quad (40)$$

biçimindedir. Burada, C pozitif bir sabit ve $i = 0, 1, \dots$ olmak üzere $\|g^{(i)}(x)\|_\infty \leq \hat{G}$ dir.

İspat

Yardımcı teorem 7'den yararlanılarak;

$$\begin{aligned} \|B(g_N(x))\|_\infty &= \left\| \frac{1}{N!} \int_0^1 E_N^*(x-t) g^{(N)}(t) dt \right\|_\infty \\ &\leq \frac{1}{N!} \hat{G} \|E_N(x)\|_\infty \end{aligned} \quad (41)$$

yazılır. Böylece

$$\begin{aligned} E_N(x) &= \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} E_N(0) x^{N-n} \\ &= \sum_{l=0}^{[N/2]} \binom{N}{2l} E_{2l}(0) x^{N-2l} \\ &\quad - \frac{1}{2} \binom{N}{l} x^{N-l}, \quad x \in [0,1] \end{aligned} \quad (42)$$

bulunur [20]. Şimdi ise çift Euler sayıları kullanılarak

$$|E_{2l}(0)| \leq 4^{l+1} (2l)! (\pi)^{-2l-1} \quad (43)$$

ifade edilir. Bu nedenle;

$$\begin{aligned}
\|E_N(x)\|_\infty &\leq \frac{2^{2l+2}}{\pi} N! \sum_{l=0}^{[N/2]} \frac{\pi^{-2l}}{(N-2l)!} + \frac{N}{2} \\
&= \frac{4}{\pi} N! \sum_{l=0}^{[N/2]} \frac{\left(\frac{2}{\pi}\right)^{-2l}}{(N-2l)!} + \frac{N}{2} \\
&= \frac{4}{\pi} N! \left(\frac{2}{\pi}\right)^{-N} \sum_{l=0}^{[N/2]} \frac{\left(\frac{2}{\pi}\right)^{N-2l}}{(N-2l)!} + \frac{N}{2} \\
&\leq \frac{4}{\pi} N! \left(\frac{2}{\pi}\right)^{-N} \exp\left(\frac{2}{\pi}\right) + \frac{N}{2}
\end{aligned} \tag{44}$$

[27]. Diğer bir ifadeyle $\|E_N(x)\|_\infty \leq CN! \left(\frac{2}{\pi}\right)^{-N}$ olup, böylece C 'nin, N 'den bağımsız pozitif bir sabit olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Yardımcı Teorem 9

$u(x, y) \in H \times H = L^2[0,1] \times L^2[0,1]$ yeterince düzgün bir fonksiyon olduğunu ve bunun aynı zamanda $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n} E_m(x) E_n(y)$, biçimindeki iki değişkenli Euler serisine yakınsadığını kabul edelim. Bu takdirde her $m, n = 0, 1, \dots, \infty$ sabitleri için:

$$u_{m,n} = \frac{1}{m!n!} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^{m+n} u(x, y)}{\partial x^m \partial y^n} dx dy \tag{45}$$

yazılabilir.

İspat

Sonuç 6'da olduğu gibi benzer işlemler, iki değişkenli fonksiyonlar için de uygulanırsa istenilen sonuç elde edilir. Bunun sonucu olarak [28]'den ve **Yardımcı Teorem 7**'den bir genelleme yapılabilir. Bundan dolayı iki değişkenli fonksiyonlar için yaklaşık hatanın nasıl yapılacağı burada göz önüne alınmalıdır.

Yardımcı Teorem 10

$u(x, y)$, yeterince düzgün bir fonksiyon ve $u_N(x, y)$ 'nin ise, **Yardımcı Teorem 9**'daki Euler polinomunun lineer kombinasyonu cinsinden $u(x, y)$ 'ye yakınsayan bir polinom olduğunu kabul edelim. O zaman hatayla ilişkili olarak

$$\begin{aligned}
\|B(u_N(x, y))\|_\infty &:= \|u(x, y) - u_N(x, y)\|_\infty \\
&\leq C \hat{U} N \left(\frac{2}{\pi}\right)^{-N}
\end{aligned} \tag{46}$$

yazılabilir. Burada $\hat{U}$, N 'den bağımsız pozitif bir sabit ve $u(x, y)$ 'nin tüm kısmi türevleri için de bir sınırdır.

Şimdi (2) ile verilen temel denklem (1)'de ki başlangıç koşulları ile birlikte düşünölsün. Bu durumu daha net ortaya koymak için $m=1$, $P(z)=P_0(z)$ ve $\beta=\beta_0$ olarak kabul edilsin. Benzer bir uygulama, m 'nin büyük değeri için de yapılabilir. Böylece yukarıda belirtilen varsayımlar altında (2) denklemi

$$f'(z)+P(z)f(z)=G(z) \quad (47)$$

olarak ifade edilebilir. Burada;

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x,y)+iv(x,y), \quad P(z)=p(x,y)+iq(x,y) \\ G(z) &= g(x,y)+ih(x,y) \end{aligned} \quad (48)$$

dir. Ayrıca bununla ilgili başlangıç koşulu da $f(0)=u(0,0)+iv(0,0)=\beta=\beta_1+i\beta_2$ olur. Böylece $u(0,0)=\beta_1$ ve $v(0,0)=\beta_2$ olarak yazabiliriz. **Açıklama 5'e** göre $f(z)$, bir holomorf fonksiyonsa, (47)'deki varsayımlar kullanılarak (48) denklemi yeniden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} &u_x(x,y)+iv_x(x,y) \\ &+(p(x,y)+iq(x,y))(u(x,y)+iv(x,y)) \\ &=g(x,y)+ih(x,y). \end{aligned} \quad (49)$$

Diğer bir ifadeyle;

$$\begin{aligned} u_x(x,y)+(p(x,y)u(x,y)-q(x,y)v(x,y)) &=g(x,y) \\ v_x(x,y)+(q(x,y)u(x,y)+p(x,y)v(x,y)) &=h(x,y) \end{aligned} \quad (50)$$

olur. Şimdi ise bu denklemin $[0,x]\times[0,y]$ biçimindeki dikdörtgensel bölgede $u(0,0)=\beta_1$, $v(0,0)=\beta_2$ biçimindeki başlangıç koşulları ile birlikte önce y 'ye göre türevi daha sonra da hem x hem de y 'ye göre integralleri alınır. Diğer yandan, (50)'de ki denklemlerin her ikisinin de y 'e göre diferansiyeli alınırsa;

$$\begin{aligned} u_{xy}(x,y)+\frac{\partial}{\partial y}(p(x,y)u(x,y)-q(x,y)v(x,y)) &=g_y(x,y) \\ v_{xy}(x,y)+\frac{\partial}{\partial y}(q(x,y)u(x,y)+p(x,y)v(x,y)) &=h_y(x,y) \end{aligned} \quad (51)$$

bulunur. Benzer şekilde $[0,x]\times[0,y]$ dikdörtgensel bölgede bu denklemlerin integrali alınır;

$$\begin{aligned}
& \int_0^x \int_0^y u_{xy}(x, y) dy dx \\
& + \int_0^x \int_0^y \frac{\partial}{\partial y} (p(x, y)u(x, y) - q(x, y)v(x, y)) dy dx \\
& = \int_0^x \int_0^y g_y(x, y) dy dx \\
& \text{ve}
\end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^x \int_0^y v_{xy}(x, y) dy dx \\
& + \int_0^x \int_0^y \frac{\partial}{\partial y} (q(x, y)u(x, y) + p(x, y)v(x, y)) dy dx \\
& = \int_0^x \int_0^y h_y(x, y) dy dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $u(0, 0) = \beta_1$ ve $v(0, 0) = \beta_2$ başlangıç koşulları denklemde yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
& u(x, y) + \int_0^x [(p(x, y)u(x, y) - q(x, y)v(x, y)) - (p(x, 0)u(x, 0) - q(x, 0)v(x, 0))] \\
& = \hat{h}(x, y)
\end{aligned} \tag{53}$$

olduğu görülür. Burada;

$$\begin{aligned}
\hat{g}(x, y) &= \int_0^x \int_0^y g_y(x, y) dy dx + \beta_1 \\
\hat{h}(x, y) &= \int_0^x \int_0^y h_y(x, y) dy dx + \beta_2
\end{aligned} \tag{54}$$

$$u(x, y) = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}, \quad \hat{G}(x, y) = \begin{bmatrix} \hat{g}(x, y) \\ \hat{h}(x, y) \end{bmatrix} \text{ ve } H(x, y) = \begin{bmatrix} p(x, y) & -q(x, y) \\ q(x, y) & p(x, y) \end{bmatrix}.$$

Diğer yandan (53)'teki matris-vektörel form ise:

$$U(x, y) + \int_0^x H(x, y) U(x, y) dx - \int_0^x H(x, 0) U(x, 0) dx = \hat{G}(x, y) \tag{55}$$

biçimindedir. Buradaki esas amaç $\lim_{n \rightarrow \infty} U_N(x, y) = U(x, y)$ ya da $\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(z) = f(z)$

olduğunu göstermektir. Burada $U_N(x, y) = \begin{bmatrix} U_N(x, y) \\ V_N(x, y) \end{bmatrix}$, $f_N(z) = U_N(x, y) + iV_N(x, y)$

. Şimdi bununla ilgili temel teorem aşağıda ele alınacaktır. Ancak, bazı özel şartların kabul edilmesi gerekmektedir. Bu koşullar ise

i) $\|H(x, y)\|_{\infty} \leq \hat{H} \ll 1$, burada H bir reel sabit,

$$ii) \lim_{N \rightarrow \infty} \|U(x, 0) - U_N(x, 0)\|_{\infty} \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \|U(x, y) - U_N(x, y)\|_{\infty}$$

şeklindedir. Burada özellikle ikinci koşulun, **Yardımcı Teorem 8** ve (10) denkleminde dayalı olduğunu belirtmek gerekir.

Teorem 11

U ve $U_0 := U(x, 0)$ 'ın U_N ve $U_{0,N}$ 'ra yakınsadığını kabul edelim. Ayrıca sayısal çözümü bulmak için Euler polinomları kullanılarak sıralama düzeninin (55)'de ki gibi yapıldığını düşünelim. Diğer bir ifadeyle;

$$\begin{aligned} & U_N(x, y) + \int_0^x H(x, y) U_N(x, y) dx \\ & - \int_0^x H(x, 0) U_N(x, 0) dx \\ & = \hat{G}(x, y) + R_{N+1}(x, y) \end{aligned} \quad (56)$$

Burada $(N+1)$ sıralama noktaları için; $R_{N+1}(x, y)$ biçimindeki geriye kalan fonksiyonun sıfır olduğu açıktır. Ayrıca $[a, b] = [c, d] = [0, 1]$ kabulü altında ve yukarıda belirtilen varsayımlar ile birlikte;

$$\|U - U_N\|_{\infty} \leq \frac{\|R_{N+1}(x, y)\|_{\infty}}{1 - \hat{H} \left(1 + \frac{1}{N}\right)} \quad (57)$$

ve

$$\lim_{N \rightarrow \infty} U_N(x, y) = U(x, y).$$

İspat

(55) denkleminde (56) denklemi taraf tarafa çıkarılırsa,

$$\begin{aligned}
\|U - U_N\|_\infty &= \left\| \int_0^x (-HU + H_0U_0 + HU_N - H_0U_{0,N}) dx \right. \\
&\quad \left. + R_{N+1}(x, y) \right\|_\infty \\
&\leq \left\| \int_0^x (HU - HU_N) dx \right\|_\infty \\
&\quad + \left\| \int_0^x (H_0U_0 - H_0U_{0,N}) dx \right\|_\infty \\
&\quad + \|R_{N+1}(x, y)\|_\infty \\
&\leq \int_0^x \left(\hat{H} \|U - U_N\|_\infty + \hat{H} \|U_0 - U_{0,N}\| \right) dx \\
&\quad + \|R_{N+1}(x, y)\|_\infty \\
&\leq \hat{H} \left(\|U - U_N\|_\infty \left(1 + \frac{1}{N} \right) \right) + \|R_{N+1}(x, y)\|_\infty
\end{aligned} \tag{58}$$

bulunur. Buradan;

$$\|U - U_N\|_\infty \leq \frac{\|R_{N+1}(x, y)\|_\infty}{1 - \hat{H} \left(1 + \frac{1}{N} \right)}. \tag{59}$$

Diğer yandan $\lim_{N \rightarrow \infty} \|R_{N+1}(x, y)\|_\infty = 0$ ve $H \ll 1$ olup $\lim_{N \rightarrow \infty} \|U - U_N\|_\infty = 0$ elde edilir.

Diğer bir ifadeyle $\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(z) = f(z)$ yazılır. Böylece ispat tamamlanır.

5. ESY için Sayısal Örnekler

Bu bölümde; kullanılan yöntemin doğruluğunu ve etkinliğini göstermek için çeşitli sayısal örnekler ele alınarak ortaya konulmaya çalışılacaktır. Bu anlamda; belirli sınır şartları altında seçilen noktalarda, $f(z)$ 'in kesin çözümü, $f_N(z)$ polinomunun yaklaşık çözümü ve $b_N(z) = |f(z) - f_N(z)|$ mutlak hata fonksiyonunun değerleri tespit edilecektir. İlk örnekte, çözümü tam polinom olan karmaşık diferansiyel denklem ele alınacaktır. Diğer problemler ise tam polinom çözümü olan lineer cebirsel denklem sistemi ile çözülecektir.

Örnek 1

$f(0) = -1$ başlangıç koşulu altında

$$f'(z) + z f(z) = 2z^2 - z + 2, \quad z \approx x + iy \quad x \in [0,1], y \in [0,1] \quad (60)$$

biçimindeki değişken katsayılı birinci mertebeden karmaşık diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin tam çözümü $2z - 1$ 'dir. Bu problem Taylor sıralama metodu ile [26] çözülmüş olmasına rağmen aynı problem burada ele alınarak Euler sıralama yöntemi kullanılarak çözülmeye çalışılacaktır.

Başlangıçta bu problemin çözümü için $N = 3$ alınır. Böylece sıralama noktaları:

$$z_{00} = 0, z_{11} = (1+i)/3, z_{22} = (2+2i)/3 \text{ ve } z_{33} = 1+i.$$

olarak ifade edilir. Bu durumda (3) denklemine göre yaklaşık çözüm:

$$f_3 = \sum_{n=0}^3 f_n E_n(z), \quad z \in D \quad (61)$$

Buradaki amaç bilinmeyen Euler katsayıları olan f_0, f_1, f_2 ve f_3 'ü bulmaktır. Diğer yandan $P_0(z) = z$ olduğundan,

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3333 + 0.3333i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6667 + 0.6667i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}. \quad (62)$$

Ayrıca $N = 3$ için L matrisi;

$$E_0(z) = 1, E_1(z) = z - 1/2, E_2(z) = z^2 - z \text{ ve } E_3(z) = z^3 - (3/2)z^2 + (1/4)$$

olmak üzere

$$L = \begin{bmatrix} E(z_{00}) \\ E(z_{11}) \\ E(z_{22}) \\ E(z_{33}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_0(z_{00}) & E_1(z_{00}) & E_2(z_{00}) & E_3(z_{00}) \\ E_0(z_{11}) & E_1(z_{11}) & E_2(z_{11}) & E_3(z_{11}) \\ E_0(z_{22}) & E_1(z_{22}) & E_2(z_{22}) & E_3(z_{22}) \\ E_0(z_{33}) & E_1(z_{33}) & E_2(z_{33}) & E_3(z_{33}) \end{bmatrix} \quad (63)$$

$$= \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.5000 & 0 & 0.2500 \\ 1.0000 & -0.1667 + 0.3333i & -0.3333 - 0.1111i & 0.1759 - 0.2592i \\ 1.0000 & 0.1667 + 0.6667i & -0.6666 + 0.2222i & -0.3425 - 0.7407i \\ 1.0000 & 0.5000 + 1.0000i & -1.0000 + 1.0000i & -1.7500 - 1.0000i \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan da (29) denkleminde göre W katsayılar matrisi

$$W = L(M^T) + P_0 L = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 & -1.0000 & 0 \\ 0.3333 + 0.3333i & 0.8333 + 0.0555i & -0.4074 + 0.5185i & -0.8548 - 0.3610i \\ 0.6667 + 0.6667i & 0.6666 + 0.5556i & 0.6297 + 1.9260i & -1.7346 - 0.0555i \\ 1.0000 + 1.0000i & 0.5000 + 1.5000i & -1.0000 + 2.0000i & -3.7500 + 0.2500i \end{bmatrix} \quad (64)$$

olarak elde edilir. Buna ilaveten $S(z) = 2z^2 - z + 2$ olduğundan S vektörü:

$$S = \begin{bmatrix} S(z_{00}) \\ S(z_{11}) \\ S(z_{22}) \\ S(z_{33}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0000 \\ 1.6667 + 0.1111i \\ 1.3333 + 1.1111i \\ 1.0000 + 3.0000i \end{bmatrix}. \quad (65)$$

$f(0) = -1$ başlangıç koşulu (31) denkleminde yerine yazılırsa;

$$[U_0; \beta_0] = [E(0); S(0)] = [1.0000 \quad -0.5000 \quad 0 \quad 0.2500 \quad ; \quad -1]. \quad (66)$$

Şimdi de başlangıç şartı W ve S' de yerine konulursa:

$$\hat{W} = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 & -1.0000 & 0 \\ 0.3333 + 0.3333i & 0.8333 + 0.0555i & -0.4074 + 0.5185i & -0.8548 - 0.3610i \\ 0.6667 + 0.6667i & 0.6666 + 0.5556i & 0.6297 + 1.9260i & -1.7346 - 0.0555i \\ 1.0000 & -0.5000 & 0 & 0.2500 \end{bmatrix}$$

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} 2.0000 \\ 1.6667 + 0.1111i \\ 1.3333 + 1.1111i \\ -1 \end{bmatrix} . \quad (67)$$

Bu nedenle, $\hat{W} F = \hat{S}$ sisteminin çözümü; $\left(F = (\hat{W})^{-1} \hat{S} \right)$

$$F = \begin{bmatrix} -0.0000 + 0.0000i \\ 2.0000 - 0.0000i \\ -0.0000 - 0.0000i \\ -0.0000 + 0.0000i \end{bmatrix} \text{ ve } E(z) = \begin{bmatrix} 1 & z - \frac{1}{2} & z^2 - 2 & z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (68)$$

olmak üzere yaklaşık çözüm, $f_3 = E(z)F = 2z - 1$ elde edilmiş olur. Sonuçta elde edilen bu çözümünün tam çözümle aynı olduğu görülür.

Örnek 2

$f(0) = f'(0) = 1$ başlangıç koşulları altında

$$f''(z) + z f'(z) + z f(z) = \exp(z) + 2z \exp(z); z = x + iy, x \in [0,1], y \in [0,1] \quad (70)$$

ikinci dereceden karmaşık diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Bu diferansiyel denklemin tam çözümü $f(z) = \exp(z)$ biçimindedir [26].

Bu problemin Taylor sıralama metodu ile çözüldüğünü fakat bu örnekte ise, yine aynı problemin Euler sıralama yöntemi kullanılarak çözüldüğü görülür.

Öncelikle $P_0(z) = P_1(z)$, $S(z) = \exp(z) + 2z \exp(z)$ olup $N=5$ alınır. Buna göre sıralama noktaları:

$$z_{00} = 0, z_{11} = (1+i)/5, z_{22} = (2+2i)/5, z_{33} = (3+3i)/5, z_{44} = (4+4i)/5 \text{ ve } z_{55} = 1+i.$$

Buna göre (29) denkleminde temel matris-denklemini:

$$W = L(M^T)^2 + P_1 L M^T + P_0 L \quad (71)$$

olarak ifade edilir. Burada M^T ve L ifadelerinin tanımı (18) ve (25) denklemlerinde açıkça görülür. Ayrıca, $P_0 = P_1$ olup,

$$P_0 = P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2000 + 0.2000i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4000 + 0.4000i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6000 + 0.6000i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8000 + 0.8000i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 + 1.0000i \end{bmatrix} . \quad (72)$$

Bu durumda $N=5$ için L matrisi;

$$L = \begin{bmatrix} E(z_{00}) \\ E(z_{11}) \\ E(z_{22}) \\ E(z_{33}) \\ E(z_{44}) \\ E(z_{55}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_0(z_{00}) & E_1(z_{00}) & E_2(z_{00}) & E_3(z_{00}) & E_4(z_{00}) & E_5(z_{00}) \\ E_0(z_{11}) & E_1(z_{11}) & E_2(z_{11}) & E_3(z_{11}) & E_4(z_{11}) & E_5(z_{11}) \\ E_0(z_{22}) & E_1(z_{22}) & E_2(z_{22}) & E_3(z_{22}) & E_4(z_{22}) & E_5(z_{22}) \\ E_0(z_{33}) & E_1(z_{33}) & E_2(z_{33}) & E_3(z_{33}) & E_4(z_{33}) & E_5(z_{33}) \\ E_0(z_{44}) & E_1(z_{44}) & E_2(z_{44}) & E_3(z_{44}) & E_4(z_{44}) & E_5(z_{44}) \\ E_0(z_{55}) & E_1(z_{55}) & E_2(z_{55}) & E_3(z_{55}) & E_4(z_{55}) & E_5(z_{55}) \end{bmatrix} \quad (73)$$

$$= \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.5000 & 0 & 0.2500 & 0 & -0.5000 \\ 1.0000 & -0.3000+0.2000i & -0.2000-0.1200i & 0.2340-0.1040i & 0.2256-0.1680i & -0.4852+0.1987i \\ 1.0000 & -0.1000+0.4000i & -0.4000-0.0800i & 0.1220-0.3520i & 0.5536+0.1440i & -0.2849+0.7590i \\ 1.0000 & 0.1000+0.6000i & -0.6000+0.1200i & -0.1820-0.6480i & 0.9456-0.2640i & 0.4849+1.4889i \\ 1.0000 & 0.3000+0.8000i & -0.8000+0.4800i & -0.7740-0.8960i & 1.2096-1.2480i & 2.2852+1.8892i \\ 1.0000 & 0.5000+1.0000i & -1.0000+1.0000i & -1.7500-1.0000i & 1.0000-3.0000i & 5.5000+1.0000i \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan da (29) denklemine göre W katsayılar matrisi:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2.0000 & -3.0000 & 0 & 5.0000 \\ 0.2000+0.2000i & 0.1000+0.1800i & 1.7840-0.1038i & -1.7803+1.0340i & -2.0508-1.3244i & 4.9367-2.0798i \\ 0.4000+0.4000i & 0.1999+0.5200i & 1.4720+0.0479i & -0.7944+1.7319i & -3.8777-1.0489i & 2.8414-5.4552i \\ 0.6000+0.6000i & 0.3000+1.0200i & 0.9680+0.5520i & -0.5460+2.3675i & -6.5653-0.1042i & -4.0698-7.8107i \\ 0.8000+0.8000i & 0.3999+1.6800i & 0.1759+1.5040i & -1.1745+2.6959i & -7.2435+0.3852i & -5.3332-14.7339i \\ 1.0000+1.0000i & 0.5000+2.5000i & -1.0000+3.0000i & -3.7500+3.2500i & -11.0000-1.0000i & -10.5000-23.5000i \end{bmatrix} \quad (74)$$

elde edilir. Buna ilaveten S vektörü:

$$S = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.5788+0.8185i \\ 2.0086+2.1449i \\ 2.0739+4.0681i \\ 1.4770+6.6318i \\ -0.1686+9.7995i \end{bmatrix}. \quad (75)$$

$N = 5$ için başlangıç koşullarının genişletilmiş matris formu ise,

$$[E(0);1] = [1.0000 \quad -0.5000 \quad 0 \quad 0.2500 \quad 0 \quad -0.5000 \quad ; \quad 1] \quad (76)$$

$$[E(0)M^T;1] = [0 \quad 1.0000 \quad -1.0000 \quad 0 \quad 1.0000 \quad 0 \quad ; \quad 1]$$

biçimindedir. W matrisi ve S vektörüne başlangıç şartları uygulanırsa;

$$\hat{W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2.0000 & -3.0000 & 0 & 5.0000 \\ 0.2000 + 0.2000i & 0.1000 + 0.1800i & 1.7840 - 0.1038i & -1.7803 + 1.0340i & -2.0508 - 1.3244i & 4.9367 - 2.0798i \\ 0.4000 + 0.4000i & 0.1999 + 0.5200i & 1.4720 + 0.0479i & -0.7944 + 1.7319i & -3.8777 - 1.0489i & 2.8414 - 5.4552i \\ 0.6000 + 0.6000i & 0.3000 + 1.0200i & 0.9680 + 0.5520i & -0.5460 + 2.3675i & -6.5653 - 0.1042i & -4.0698 - 7.8107i \\ 1.0000 & -0.5000 & 0 & 0.2500 & 0 & -0.5000 \\ 0 & 1.0000 & -1.0000 & 0 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix} \quad (77)$$

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.5788 + 0.8185i \\ 2.0086 + 2.1449i \\ 2.0739 + 4.0681i \\ 1.0000 \\ 1.0000 \end{bmatrix}.$$

bulunur. Buna göre $\hat{W}F = \hat{S}$ matris-vektörel denkleminin yaklaşık çözümü:

$$F = \begin{bmatrix} 1.7184 - 0.0000i \\ 1.7189 + 0.0003i \\ 0.8603 + 0.0021i \\ 0.2864 + 0.0046i \\ 0.0693 + 0.0048i \\ 0.0107 + 0.0034i \end{bmatrix}. \quad (78)$$

Sonuçta F , denklemin yaklaşık çözümü olduğundan dolayı tam çözümün gerçekte ve sanal kısımları sırasıyla

$$\text{Re}(\exp(z)) = \exp(x)\cos(y) \text{ ve } \text{Im}(\exp(z)) = \exp(x)\sin(y).$$

olarak bulunur.

Tablo1: Örnek 2 için farklı N değerlerindeki mutlak hatalar

z	Tam Çözüm		$N=5$	$N=6$	$N=7$
$0.0 + 0.0i$	0.0000000000 $0.0000000000i$	+	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
$0.2 + 0.2i$	0.242655268 $0.242655268i$	+	$0.394722125E-7$	$0.164542518E-7$	$0.865221228E-8$
$0.4 + 0.4i$	0.580943900 $0.580943900i$	+	$0.849392875E-5$	$0.228923695E-6$	$0.025422364E-7$
$0.6 + 0.6i$	1.028845666 $1.028845666i$	+	$0.192821217E-4$	$0.132512364E-5$	$0.325623651E-7$
$0.8 + 0.8i$	1.596505341 $1.596505341i$	+	$0.090245337E-3$	$0.923212363E-5$	$0.025422881E-5$
$1.0 + 1.0i$	2.287355287 $2.287355287i$	+	$0.497756469E-3$	$0.552410259E-4$	$0.665910552E-5$

Örnek 3

$f(0)=0$ ve $f'(0)=1$ başlangıç koşulları altında

$$f''(z) + z f'(z) + 2z f(z) = 2z \sin(z) + z \cos(z) - \sin(z); z = x + iy, x \in [0,1], y \in [0,1]. \quad (79)$$

ikinci mertebeden karmaşık diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin tam çözümü; $f(z) = \sin(z)$ 'dir.

Burada $P_0(z) = 2z$, $P_1(z) = z$ ve $S(z) = 2z \sin(z) + z \cos(z) - \sin(z)$. Buna göre $N = 5$ için sıralama noktaları:

$$z_{00} = 0, z_{11} = (1+i)/5, z_{22} = (2+2i)/5, z_{33} = (3+3i)/5, z_{44} = (4+4i)/5 \text{ ve } z_{55} = 1+i.$$

Böylece

$$W = L(M^T)^2 + P_1 L M^T + P_0 L \quad (80)$$

Burada M^T ve L ifadelerinin tanımı (18) ve (25) denklemlerinde açıkça görülür. Ayrıca;

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4000 + 0.4000i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8000 + 0.8000i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.2000 + 1.2000i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6000 + 1.6000i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.0000 + 2.0000i \end{bmatrix} \quad (81)$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2000 + 0.2000i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4000 + 0.4000i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6000 + 0.6000i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8000 + 0.8000i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 + 1.0000i \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Şimdi $N=5$ için L matrisi;

$$L = \begin{bmatrix} E(z_{00}) \\ E(z_{11}) \\ E(z_{22}) \\ E(z_{33}) \\ E(z_{44}) \\ E(z_{55}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_0(z_{00}) & E_1(z_{00}) & E_2(z_{00}) & E_3(z_{00}) & E_4(z_{00}) & E_5(z_{00}) \\ E_0(z_{11}) & E_1(z_{11}) & E_2(z_{11}) & E_3(z_{11}) & E_4(z_{11}) & E_5(z_{11}) \\ E_0(z_{22}) & E_1(z_{22}) & E_2(z_{22}) & E_3(z_{22}) & E_4(z_{22}) & E_5(z_{22}) \\ E_0(z_{33}) & E_1(z_{33}) & E_2(z_{33}) & E_3(z_{33}) & E_4(z_{33}) & E_5(z_{33}) \\ E_0(z_{44}) & E_1(z_{44}) & E_2(z_{44}) & E_3(z_{44}) & E_4(z_{44}) & E_5(z_{44}) \\ E_0(z_{55}) & E_1(z_{55}) & E_2(z_{55}) & E_3(z_{55}) & E_4(z_{55}) & E_5(z_{55}) \end{bmatrix} \quad (82)$$

$$= \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.5000 & 0 & 0.2500 & 0 & -0.5000 \\ 1.0000 & -0.3000+0.2000i & -0.2000-0.1200i & 0.2340-0.1040i & 0.2256-0.1680i & -0.4852+0.1987i \\ 1.0000 & -0.1000+0.4000i & -0.4000-0.0800i & 0.1220-0.3520i & 0.5536+0.1440i & -0.2849+0.7590i \\ 1.0000 & 0.1000+0.6000i & -0.6000+0.1200i & -0.1820-0.6480i & 0.9456-0.2640i & 0.4849+1.4889i \\ 1.0000 & 0.3000+0.8000i & -0.8000+0.4800i & -0.7740-0.8960i & 1.2096-1.2480i & 2.2852+1.8892i \\ 1.0000 & 0.5000+1.0000i & -1.0000+1.0000i & -1.7500-1.0000i & 1.0000-3.0000i & 5.5000+1.0000i \end{bmatrix}$$

ve benzer şekilde W katsayılar matrisi ise

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2.0000 & -3.0000 & 0 & 5.0000 \\ 0.2000+0.2000i & 0.1601i & 1.7680-0.1679i & -1.7127+1.0600i & -1.9722-1.3130i & 4.8000-2.1370i \\ 0.8000+0.8000i & 0.6400i & 1.3439+0.6240i & -0.6048+1.6399i & -3.7138-0.7699i & 2.4240-5.2655i \\ 1.2000+1.2000i & 1.4400i & 0.5359+0.2640i & -0.1368+1.7670i & -4.6301+0.26580i & -1.2157-8.5468i \\ 1.6000+1.6000i & 2.5600i & -0.8480+0.2480i & -1.0769+1.3598i & -5.2774+0.3545i & -5.0160-11.3946i \\ 2.0000+2.0000i & 4.0000i & -3.0000+3.0000i & -4.5000+0.5000i & -7.0000-3.0000i & 29.0000-32.2000i \end{bmatrix}. \quad (83)$$

Ayrıca S vektörü:

$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0074+0.1546i \\ 0.0754+0.5954i \\ 0.3660+1.2796i \\ 0.8407+2.1420i \\ 1.8511+3.0767i \end{bmatrix}. \quad (84)$$

$N = 5$ için başlangıç koşullarının genişletilmiş matris formu ise,

$$\begin{bmatrix} E(0); 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.5000 & 0 & 0.2500 & 0 & -0.5000 & ; & 0 \end{bmatrix} \quad (85)$$

$$\begin{bmatrix} E(0)M^T; 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 & -1.0000 & 0 & 1.0000 & 0 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Buradan W matrisi ve S vektörüne başlangıç şartları uygulanırsa;

$$\hat{W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2.0000 & -3.0000 & 0 & 5.0000 \\ 0.2000+0.2000i & 0.1601i & 1.7680-0.1679i & -1.7127+1.0600i & -1.9722-1.3130i & 4.8000-2.1370i \\ 0.8000+0.8000i & 0.6400i & 1.3439+0.6240i & -0.6048+1.6399i & -3.7138-0.7699i & 2.4240-5.2655i \\ 1.2000+1.2000i & 1.4400i & 0.5359+0.2640i & -0.1368+1.7670i & -4.6301+0.2658i & -1.2157-8.5468i \\ 1.0000 & -0.5000 & 0 & 0.2500 & 0 & -0.5000 \\ 0 & 1.0000 & -1.0000 & 0 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix} \quad (86)$$

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0074+0.1546i \\ 0.0754+0.5954i \\ 0.3660+1.2796i \\ 0 \\ 1.0000 \end{bmatrix}.$$

Buna göre $\hat{W} F = \hat{S}$ matris-vektörel denkleminin yaklaşık çözümü:

$$F = \begin{bmatrix} 0.4526+0.0081i \\ 0.8592+0.0552i \\ -0.1286+0.1356i \\ -0.0994+0.1597i \\ 0.0118+0.0804i \\ -0.0082+0.0414i \end{bmatrix}. \quad (87)$$

Sonuçta F , denklemin yaklaşık çözümü olup, buradan tam çözüm; $f(z) = \sin(z)$.

Bunun yanında tüm örnekler $N=9$ ve $N=11$ için de kolaylıkla çözebilirdir.

Tablo 2: Örnek 3 için farklı N değerlerindeki mutlak hatalar:

z	Tam Çözüm	$N=5$	$N=6$	$N=7$
$0.0 + 0.0i$	$0.000000000 + 0.000000000i$	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
$0.2 + 0.2i$	$0.2026565675 + 0.197323110 i$	$0.201456669E-6$	$0.251441128E-8$	$0.525541029E-10$
$0.4 + 0.4i$	$0.4209895520 + 0.378328012 i$	$0.520144458E-5$	$0.996324412E-8$	$0.963221501E-9$
$0.6 + 0.6i$	$0.669364874 + 0.525453002 i$	$0.633521458E-5$	$0.123650147E-7$	$0.885200144E-9$
$0.8 + 0.8i$	$0.959417442 + 0.618749432 i$	$0.225144036E-4$	$0.960352145E-6$	$0.203314475E-9$
$1.0 + 1.0i$	$1.298457581 + 0.634963914i$	$0.201547896E-3$	$0.110548763E-5$	$0.662563351E-6$

6.Genocchi Polinomları ve Genocchi Polinomlarının Operasyonel Matrisleri

Genocchi polinomları; tıpkı Euler ve Bernoulli polinomları gibi üstel fonksiyonlar olup,

$$\frac{2t}{e^t + 1} = e^{G(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{t^n}{n!}, \quad (|t| < \pi) \quad (88)$$

şeklinde tanımlanır. (88) denkleminin sol tarafındaki ifade soldan e^{xt} ile çarpılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{2t}{e^t + 1} e^{xt}, \quad (|t| < \pi) \quad (89)$$

bulunur. Burada $G_n(x)$ Genocchi polinomlarıdır. (88) denkleminle gösterilen ifadenin iki tarafının x 'e göre türevi alınır;

$$\frac{d}{dx} G_n(x) = n G_{n-1}(x), \quad \deg G_{n+1}(x) = n \quad (90)$$

elde edilir. (90) denkleminin her iki yanının integrali alındığında:

$$\int_a^b G_n(x) dx = \frac{G_{n+1}(a) - G_{n+1}(b)}{n+1}. \quad (91)$$

Diğer yandan (88) denkleminde;

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} G_k x^{n-k} \quad (92)$$

yazılır. (89) ve (90) denklemleri birlikte göz önüne alınırsa;

$$\int_0^1 G_n(x) dx = -2 \frac{G_{n+1}}{n+1} \quad (93)$$

sonucuna ulaşılır. Buradan;

$$\begin{aligned} e^{tx} &= \frac{1}{2t} \left(\frac{2t}{e^t + 1} e^{(1+x)t} + \frac{2t}{e^t + 1} e^{xt} \right) \\ &= \frac{1}{2t} \sum_{n=0}^{\infty} (G_n(x+1) + G_n(x)) \frac{t^n}{n!} \end{aligned} \quad (94)$$

olup, (92) denkleminde;

$$2x^n = \frac{G_{n+1}(x+1) + G_{n+1}(x)}{n+1}. \quad (95)$$

Burada özellikle ileride kullanılacak olan Genocchi polinomlarının ilk birkaçı aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
G_1(x) &= 1, \\
G_2(x) &= 2x - 1, \\
G_3(x) &= 3x^2 - 3x, \\
G_4(x) &= 4x^3 - 6x^2 - 1, \\
G_5(x) &= 5x^4 - 10x^3 + 5x, \\
G_6(x) &= 6x^5 - 15x^4 + 15x^2 - 3.
\end{aligned} \tag{96}$$

Bunun yanında karmaşık uzayda Euler polinomları ve Genocchi polinomları arasındaki ilişki

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{(it)^n}{n!} = it \frac{2}{e^{it} + 1} = it \sum_{n=0}^{\infty} E_n(0) \frac{(it)^n}{n!} \tag{97}$$

biçimindedir. Diğer yandan Genocchi polinomlarının

$$\frac{G_n(0)}{n!} y^{(n)}(x) + \frac{G_{n-1}(0)}{(n-1)!} y^{(n-1)}(x) + \dots + \frac{G_2(0)}{2!} y''(x) + (2x-1)y'(x) + ny(x) = 0 \tag{98}$$

şeklindeki diferansiyel denklemini sağladığı kolayca görülebilir. Ayrıca $G(x)$, Genocchi vektörü olmak üzere $G(x) = [G_1(x), G_2(x), G_3(x), \dots, G_n(x)]$ 'dir. $G(x)$ 'in türevi ise (90) denklemi ile verilen özelliğe göre

$$\underbrace{\begin{bmatrix} G_1'(x) \\ G_2'(x) \\ G_3'(x) \\ \vdots \\ G_{n-1}'(x) \\ G_n'(x) \end{bmatrix}}_{G'(x)^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & N-1 & 0 \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{bmatrix} G_1(x) \\ G_2(x) \\ G_3(x) \\ \vdots \\ G_{n-1}(x) \\ G_n(x) \end{bmatrix}}_{G^T(x)}. \tag{99}$$

Burada M matrisi, $N \times N$ tipinde türevle ilgili operasyonel matristir. Bunun yanında reel değişkenli x değeri, karmaşık değerli z 'ye taşınırsa daha önce gösterildiği gibi sonucun değişmediği gözlemlenir. Buna göre, $(z^n)' = nz^{n-1}$ yazabiliriz. Diğer yandan $G(x)$ 'in k . türevi:

$$\begin{aligned}
G'(x)^T &= MG(x)^T \\
\Rightarrow G^{(1)}(x) &= G(x)M^T \\
G^{(2)}(x) &= G^{(1)}(x)M^T = G(x)(M^T)^2 \\
G^{(3)}(x) &= G^{(1)}(x)(M^T)^2 = G(x)(M^T)^3 \\
&\vdots \\
G^{(k)}(x) &= G(x)(M^T)^k.
\end{aligned} \tag{100}$$

7. Genocchi Matris Yöntemi

Bu bölümde; daha önce ifade edilen Euler polinomlarının diferansiyel operasyonel matrisi ve sıralama noktaları ele alınarak yapılan işlemler, burada Genocchi polinomlarının diferansiyel operasyonel matrisini ve sıralama noktaları kullanılarak karmaşık diferansiyel denklemlerin çözümü için yapılmaya çalışılacaktır. Bu durumda (2) ve (3) denklemleri Genocchi polinomu için düşünülürse bunların $f_N(z)$ yaklaşık çözümü vektörel formda;

$$f_N(z) = G(z)F, \quad G(z) = \begin{bmatrix} G_1(z) & G_2(z) & \cdots & G_N(z) \end{bmatrix} \quad (101)$$

$$F = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_N \end{bmatrix}^T$$

olarak ifade edilebilir. Böylece (100) denklemi kullanılarak;

$$f_N^{(k)}(z) = G(z)(M^T)^k F, \quad k \leq N \quad (102)$$

yazılır. $p = 1, 2, \dots, N$ olmak üzere $z = z_{pp}$ sıralama noktalarının (102) denklemi ile birlikte ilişkisi;

$$f_N^{(k)}(z_{pp}) = G(z_{pp})(M^T)^k F, \quad p = 1, 2, \dots, N. \quad (103)$$

Burada; $G(z_{pp}) = \begin{bmatrix} G_1(z_{pp}) & G_2(z_{pp}) & \cdots & G_N(z_{pp}) \end{bmatrix}$ 'dir. Diğer yandan (103) denklemi yeniden düzenlenirse;

$$\begin{aligned} f_N^{(k)}(z_{11}) &= G(z_{11})(M^T)^k F, \\ f_N^{(k)}(z_{22}) &= G(z_{22})(M^T)^k F, \\ &\vdots \\ f_N^{(k)}(z_{NN}) &= G(z_{NN})(M^T)^k F. \end{aligned} \quad (104)$$

olarak bulunur. Buna göre yukarıdaki matris-vektörel denklemi:

$$F^{(k)} = \begin{bmatrix} f_N^{(k)}(z_{11}) \\ f_N^{(k)}(z_{22}) \\ \vdots \\ f_N^{(k)}(z_{NN}) \end{bmatrix} = L(M^T)^k F. \quad (105)$$

Burada;

$$L = \begin{bmatrix} G(z_{11}) \\ G(z_{22}) \\ \vdots \\ G(z_{NN}) \end{bmatrix} \quad (106)$$

$$= \begin{bmatrix} G_1(z_{11}) & G_2(z_{11}) & G_3(z_{11}) & \dots & G_N(z_{11}) \\ G_1(z_{22}) & G_2(z_{22}) & G_3(z_{22}) & \dots & G_N(z_{22}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_1(z_{NN}) & G_2(z_{NN}) & G_3(z_{NN}) & \dots & G_N(z_{NN}) \end{bmatrix}.$$

Öte yandan (4) - (2) denklemlerinde sıralama noktaları $z = z_{pp}$ olarak tanımlanırsa, bu takdirde;

$$f_N^{(m)}(z_{pp}) + \sum_{k=1}^{m-1} P_k(z_{pp}) f_N^{(k)}(z_{pp}) = S(z_{pp}), \quad p = 1, 2, \dots, N. \quad (107)$$

Diğer taraftan (107) denklemi, (105) denklemi yardımı ile matris vektörel formunda:

$$F^{(m)} + \sum_{k=1}^{m-1} P_k F^{(k)} = L(M^T) + \sum_{k=1}^{m-1} P_k L(M^T)^k F = S \quad (108)$$

olarak ifade edilebilir. Burada ; $S = [S(z_{11}) \quad S(z_{22}) \quad \dots \quad S(z_{NN})]^T$ ve

$$P_k = \begin{bmatrix} P_k(z_{11}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_k(z_{22}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_k(z_{NN}) \end{bmatrix} \quad (109)$$

olarak bilindiğinden dolayı, F bilinmeyen vektörü tespit edilmelidir. Bu yüzden

$$(108) \text{ matris-vektör denklemi } W = L(M^T)^m + \sum_{k=0}^{m-1} P_k L(M^T)^k \text{ olmak üzere}$$

$$WF = S$$

ya da

$$[W; S] = [w_{pq}; s_p]; \quad p, q = 1, \dots, N \quad (200)$$

biçimindedir. Şimdi de (1) başlangıç şartının vektörel formu (102) denklemi yardımı ile yeniden yazılırsa;

$$f^{(r)}(0) = E(0)(M^T)^r F = \beta_r, \quad r = 1, \dots, m-1 \quad (201)$$

bulunur. Diğer bir ifadeyle başlangıç şartının vektörel formu $U_r F = \beta_r$ şeklinde de gösterilebilir. Burada;

$$U_r = E(0)(M^T)^r, \quad r = 1, \dots, m-1 \text{ 'dir.}$$

Bu takdirde denklem:

$$[U_r; \beta_r] = [u_{r1} \quad u_{r2} \quad u_{r3} \quad \dots \quad u_{rN} \quad ; \quad \beta_r], \quad r = 1, 2, \dots, m-1. \quad (202)$$

formunu alır. Sonuç olarak, (1) ile verilen başlangıç şartları altında (2) denklemiyle ifade edilen problemin yaklaşık çözümleriyle ilgili bilinmeyen f_n , $n = 1, \dots, N$, Euler katsayılarını bulmak için (202)'deki m . satırlar, (200)'deki son m . satırlar ile yer değiştirilir. Buna göre yeni matris:

$$[\hat{W}; \hat{S}] = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1N} & ; & s_1 \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2N} & ; & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{N-m,1} & w_{N-m,2} & \dots & w_{N-m,N} & ; & s_{N-m} \\ u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1N} & ; & \beta_1 \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2N} & ; & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m-1,1} & u_{m-1,2} & \dots & u_{m-1,N} & ; & \beta_{m-1} \end{bmatrix} \quad (203)$$

ya da matris-vektörüne karşılık gelen denklem;

$$\hat{W}F = \hat{S} \quad (204)$$

tarzındadır. Eğer $\det(\hat{W}) \neq 0$ ise, bu takdirde (202)'deki gösterim $F = (\hat{W})^{-1} \hat{S}$ şeklinde yazılabilir. Böylece; F vektörü kesin bir şekilde belirlenmiş olur. Bu sonuca göre; (2)'deki değişken katsayılı m . dereceden lineer karmaşık diferansiyel denklemin, (1)'deki başlangıç koşulları altında yaklaşık bir çözümü vardır. Bu çözüm, (3)'deki kestirilmiş Genocchi serisi ile verilmiştir. Ayrıca aşağıdaki gibi kolayca elde edilen çözümlerin doğruluğu [12-26] ile kontrol edebiliriz. (3) denklemiyle gösterilen kestirilmiş Genocchi serisi (2) denkleminin yaklaşık çözümü olduğundan, $f_1(z)$ fonksiyonu ve onun türevleri (2) denkleminde yerine yazıldığında sonuçta denklem yaklaşık olarak sağlanmalıdır. Yani $z = z_i \in D$, $i = 0, 1, 2, \dots$ için

$$B(z_i) = \left| f^{(m)}(z_i) + \sum_{k=0}^{m-1} P_k(z_i) f^{(k)}(z_i) - S(z_i) \right| \cong 0$$

ya da

$$B(z_i) \leq 10^{-ki}, \quad (ki; \text{ herhangi bir tamsayı}) \quad (205)$$

Eğer $\max(10^{-ki}) = 10^{-k}$, $(ki; \text{ herhangi bir tamsayı})$ olarak kabul edilirse, kestirilme sınırı olan $N B(z_i)$ koşulu altında her z_i değeri için artırılabilir. Böylelikle $B(z_i); 10^{-k}$ 'dan daha küçük olacaktır (10-12,16,17).

8. GSY için Sayısal Örnek

Şimdi Euler sıralama yöntemi ile çözülen problemleri Genocchi polinomları yardımı ile de çözmeye çalışalım.

Örnek 1

$f'(0) = -1$ başlangıç koşulu altında

$$f'(z) + z f(z) = 2z^2 - z + 2; z = x + iy \quad x \in [0,1], y \in [0,1]. \quad (206)$$

biçimindeki karmaşık diferansiyel denklemin tam çözümü $2z - 1$ 'dir.

Burada $N = 4$ alındığında sıralama noktaları:

$$z_{11} = \frac{(1+i)}{4}, z_{22} = \frac{(2+2i)}{4}, z_{33} = \frac{(3+3i)}{4} \text{ ve } z_{44} = 1+i \text{ olarak bulunur. Diğer yandan}$$

(3) denklemini yardımıyla yaklaşık çözüm:

$$f_4(z) = \sum_{n=1}^4 f_n G_n(z), z \in D \quad (207)$$

Burada öncelikle bilinmeyen f_1, f_2, f_3 ve f_4 Genocchi katsayıları bulunur. Böylece

$$P_0(z) = \begin{bmatrix} 0.2500 + 0.2500i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5000 + 0.5000i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7500 + 0.7500i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 + 1.0000i \end{bmatrix} \quad (208)$$

elde edilir. Ayrıca $N = 4$ için L matrisi

$$L = \begin{bmatrix} G(z_{11}) \\ G(z_{22}) \\ G(z_{33}) \\ G(z_{44}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1(z_{11}) & G_2(z_{11}) & G_3(z_{11}) & G_4(z_{11}) \\ G_1(z_{22}) & G_2(z_{22}) & G_3(z_{22}) & G_4(z_{22}) \\ G_1(z_{33}) & G_2(z_{33}) & G_3(z_{33}) & G_4(z_{33}) \\ G_1(z_{44}) & G_2(z_{44}) & G_3(z_{44}) & G_4(z_{44}) \end{bmatrix} \quad (209)$$

$$= \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.5000 + 0.5000i & -0.7500 - 0.3750i & -1.1250 - 0.6250i \\ 1.0000 & 1.0000i & -1.5000 & -2.0000 - 2.0000i \\ 1.0000 & 0.5000 + 1.5000i & -2.2500 + 1.1250i & -4.3750 - 3.3750i \\ 1.0000 & 1.0000 + 2.0000i & -3.0000 + 3.0000i & -9.0000 - 4.0000i \end{bmatrix}.$$

Böylece $G_1(z) = 1, G_2(z) = 2z - 1, G_3(z) = 3z^2 - 3z$ ve $G_4(z) = 4z^3 - 6z^2 - 1$ 'dir.

Diğer yandan (200) denklemine göre W katsayılar matrisi:

$$W = L(M^T) + P_0 L$$

$$= \begin{bmatrix} 0.2500 + 0.2500i & 0.7500 & -1.0937 + 0.7187i & -2.3750 - 1.5625i \\ 0.5000 + 0.5000i & 0.5000 + 0.5000i & -0.7500 + 1.2500i & -4.5000 - 2.0000i \\ 0.7500 + 0.7500i & 0.2500 + 1.5000i & -1.5312 + 2.1562i & -7.5000 - 2.4375i \\ 1.0000 + 1.0000i & 3.0000i & -4.0000 + 4.0000i & -14.0000 - 4.0000i \end{bmatrix} \quad (210)$$

olarak hesaplanır. Ayrıca $S(z) = 2z^2 - z + 2$ vektörü:

$$S = \begin{bmatrix} S(z_{11}) \\ S(z_{22}) \\ S(z_{33}) \\ S(z_{44}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7500 \\ 1.5000 + 0.5000i \\ 1.2500 + 1.5000i \\ 1.0000 + 3.0000i \end{bmatrix}. \quad (211)$$

Öte yandan $f(0) = -1$ başlangıç şartı altında;

$$[U_0; \beta_0] = [G(0); S(0)] = [1.0000 \quad -1.0000 \quad 0 \quad -1.0000 \quad ; \quad -1] \quad (212)$$

yazılır. Şimdi de başlangıç koşulu W ve S vektörel denklemlerinde yerine yazılırsa

$$\hat{W} = \begin{bmatrix} 0.2500 + 0.2500i & 0.7500 & -1.0937 + 0.7187i & -2.3750 - 1.5625i \\ 0.5000 + 0.5000i & 0.5000 + 0.5000i & -0.7500 + 1.2500i & -4.5000 - 2.0000i \\ 0.7500 + 0.7500i & 0.2500 + 1.5000i & -1.5312 + 2.1562i & -7.5000 - 2.4375i \\ 1.0000 & -1.0000i & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (213)$$

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} 1.7500 \\ 1.5000 + 0.5000i \\ 1.2500 + 1.5000i \\ -1 \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir. Ayrıca $\hat{W}F = \hat{S}$ sisteminin çözümü ($F = (\hat{W})^{-1} \hat{S}$):

$$F = \begin{bmatrix} 0 + 0i \\ 1 + 0i \\ -0 + 0i \\ -0 + 0i \end{bmatrix}. \quad (214)$$

Diğer yandan;

$$G(z) = [1 \quad 2z - 1 \quad 3z^2 - 3z \quad 4z^3 - 6z^2 - 1]$$

olmak üzere $f_4(z) = G(z)F$ yaklaşık çözümünün, tamamen tam çözüm ile aynı olduğu görülür.

Örnek 2

$f(0) = f'(0) = 1$ başlangıç koşulları altında

$$f''(z) + z f'(z) + z f(z) = \exp(z) + 2z \exp(z); z = x + iy, x \in [0,1], y \in [0,1] \quad (215)$$

ikinci dereceden karmaşık diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Bu diferansiyel denklemin tam çözümü $f(z) = \exp(z)$ biçimindedir [26].

Öncelikle $P_0(z) = P_1(z)$, $S(z) = \exp(z) + 2z \exp(z)$ ve $N = 6$ alınsın. Buna göre sıralama noktaları;

$$z_{11} = (1+i)/6, z_{22} = (2+2i)/6, z_{33} = (3+3i)/6, z_{44} = (4+4i)/6, z_{55} = (5+5i)/6 \text{ ve } z_{66} = 1+i.$$

Buna göre (200) denklemi vasıtasıyla temel matris-denklemini:

$$W = L(M^T)^2 + P_1 L M^T + P_0 L. \quad (216)$$

Burada, $P_0 = P_1$ olup,

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0.1666 + 0.1666i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3333 + 0.3333i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5000 + 0.5000i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6666 + 0.6666i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8333 + 0.8333i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 + 1.0000i \end{bmatrix} \quad (217)$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.1666 + 0.1666i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3333 + 0.3333i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5000 + 0.5000i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6666 + 0.6666i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8333 + 0.8333i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 + 1.0000i \end{bmatrix}.$$

Ayrıca $N = 6$ için L matrisi;

$$L = \begin{bmatrix} G(z_{11}) \\ G(z_{22}) \\ G(z_{33}) \\ G(z_{44}) \\ G(z_{55}) \\ G(z_{66}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1(z_{11}) & G_2(z_{11}) & G_3(z_{11}) & G_4(z_{11}) & G_5(z_{11}) & G_6(z_{11}) \\ G_1(z_{22}) & G_2(z_{22}) & G_3(z_{22}) & G_4(z_{22}) & G_5(z_{22}) & G_6(z_{22}) \\ G_1(z_{33}) & G_2(z_{33}) & G_3(z_{33}) & G_4(z_{33}) & G_5(z_{33}) & G_6(z_{33}) \\ G_1(z_{44}) & G_2(z_{44}) & G_3(z_{44}) & G_4(z_{44}) & G_5(z_{44}) & G_6(z_{44}) \\ G_1(z_{55}) & G_2(z_{55}) & G_3(z_{55}) & G_4(z_{55}) & G_5(z_{55}) & G_6(z_{55}) \\ G_1(z_{66}) & G_2(z_{66}) & G_3(z_{66}) & G_4(z_{66}) & G_5(z_{66}) & G_6(z_{66}) \end{bmatrix} \quad (218)$$

$$= \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.6666+0.3333i & -0.5000-0.3333i & 0.9629-0.2962i & 0.9104+0.7407i & -2.9567+0.8302i \\ 1.0000 & -0.3333+0.6666i & -1.0000-0.3333i & 0.7037-1.0370i & 2.1604+0.9259i & -2.3580+3.2345i \\ 1.0000 & 1.0000i & -1.5000 & -2.0000i & 3.7500 & 6.7500i \\ 1.0000 & 0.3333+1.3333i & -2.0000+0.6666i & -1.3703-2.9629i & 5.3086-2.5925i & 5.6913+10.1728i \\ 1.0000 & 0.6666+1.6666i & -2.5000+1.6666i & -3.6296-3.7037i & 6.0956-7.4074i & 16.2901+11.1882i \\ 1.0000 & 1.0000+2.0000i & -3.0000+3.0000i & -7.0000-4.0000i & 5.0000-15.0000i & 33.0000+6.0000i \end{bmatrix}.$$

Diğer yandan (216) denkleminde $S(z)$ vektörü ve W katsayılar matrisi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$W = \begin{bmatrix} 0.1666+0.1666i & 0.0002+0.1112i & 1.6393-0.2498i & -3.8733+1.6944i & -5.1330-3.2806i & 18.7682-4.9032i \\ 0.3333+0.3333i & 0.4443i & 1.1116-0.2222i & -2.0863+2.5557i & -9.2682-3.4150i & 14.2671-15.3048i \\ 0.5000+0.5000i & 1.0000i & 0.2500-0.2500i & -1.2500+2.7500i & -12.1250-2.1250i & 6.0000-27.2500i \\ 0.6666+0.6666i & 1.7774i & -1.1107+1.3330i & -2.2710+2.4448i & -14.4868-1.7442i & -4.0593-39.6305i \\ 0.8333+0.8333i & 2.7775i & -3.1386+3.1940i & -6.3547+1.8055i & -18.5012-5.5371i & -12.0807-56.6419i \\ 1.0000+1.0000i & 4.0000i & -6.0000+6.0000i & -15.0000+1.0000i & -28.0000-18.0000i & -13.0000-91.0000i \end{bmatrix} \quad (219)$$

$$S = \begin{bmatrix} 1.4879+0.6496i \\ 1.8935+1.6402i \\ 2.1033+3.0277i \\ 1.9657+4.8512i \\ 1.2873+7.1203i \\ -0.1686+9.7994i \end{bmatrix}.$$

Diğer yandan ;

$$\begin{aligned} [G(0);0] &= [1.0000 \quad -1.0000 \quad 0 \quad 1.0000 \quad 0 \quad -3.0000 \quad ; \quad 1] \\ [G(0)M^T;0] &= [0 \quad 1.0000 \quad -2.0000 \quad 0 \quad 4.0000 \quad 0 \quad ; \quad 1] \end{aligned} \quad (220)$$

biçimindeki başlangıç şartları W ve S vektörel denklemlerinde yerine yazıldığında:

$$\hat{W} = \begin{bmatrix} 0.1666+0.1666i & 0.0002+0.1112i & 1.6393-0.2498i & -3.8733+1.6944i & -5.1330-3.2806i & 18.7682-4.9032i \\ 0.3333+0.3333i & 0.4443i & 1.1116-0.2222i & -2.0863+2.5557i & -9.2682-3.4150i & 14.2671-15.3048i \\ 0.5000+0.5000i & 1.0000i & 0.2500-0.2500i & -1.2500+2.7500i & -12.1250-2.1250i & 6.0000-27.2500i \\ 0.6666+0.6666i & 1.7774i & -1.1107+1.3330i & -2.2710+2.4448i & -14.4868-1.7442i & -4.0593-39.6305i \\ 1.0000 & -1.0000 & 0 & 1.0000 & 0 & -3.0000 \\ 0 & 1.0000 & -2.0000 & 0 & 4.0000 & 0 \end{bmatrix} \quad (221)$$

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} 1.4879+0.6496i \\ 1.8935+1.6402i \\ 2.1033+3.0277i \\ 1.9657+4.8512i \\ 1.0000 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir. Ayrıca $F = (\hat{W})^{-1} \hat{S}$ olmak üzere, $\hat{W}F = \hat{S}$ sisteminin çözümü:

$$F = \begin{bmatrix} 2.9967-0.0366i \\ 1.9888-0.0193i \\ 0.5288+0.0044i \\ 0.0672+0.1137i \\ 0.0172+0.0071i \\ 0.0249+0.0322i \end{bmatrix} \quad (222)$$

Sonuçta F , denklemin yaklaşık çözümü olduğundan dolayı tam çözümün gerçekte ve sanal kısımları sırasıyla;

$$\text{Re}(\exp(z)) = \exp(x) \cos(y) \text{ ve } \text{Im}(\exp(z)) = \exp(x) \sin(y).$$

olarak bulunur.

Tablo3: Örnek 2 için farklı N değerlerindeki mutlak hatalar:

z	Tam Çözüm	$N=5$	$N=6$	$N=7$
$0.0 + 0.0i$	$0.0000000000 + 0.0000000000i$	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
$0.2 + 0.2i$	$0.242655268 + 0.242655268i$	$0.563210889E-9$	$0.996320145E-11$	$0.203654147E-11$
$0.4 + 0.4i$	$0.580943900 + 0.580943900i$	$0.503620147E-9$	$0.882012454E-10$	$0.896321541E-10$
$0.6 + 0.6i$	$1.028845666 + 1.028845666i$	$0.220546352E-8$	$0.103654785E-9$	$0.320365417E-10$
$0.8 + 0.8i$	$1.596505341 + 1.596505341i$	$0.520364105E-6$	$0.220365478E-9$	$0.203651247E-9$
$1.0 + 1.0i$	$2.287355287 + 2.287355287i$	$0.112055694E-5$	$0.863256984E-7$	$0.663201425E-8$

Örnek 3

$f(0)=0$ ve $f'(0)=1$ başlangıç koşulları altında

$$f''(z) + z f'(z) + 2z f(z) = 2z \sin(z) + z \cos(z) - \sin(z); z = x + iy, x \in [0,1], y \in [0,1]. \quad (223)$$

ikinci mertebeden karmaşık diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Bu diferansiyel denklemin tam çözümü $f(z) = \sin(z)$ biçimindedir [26].

Burada $P_0(z) = 2z$, $P_1(z) = z$ ve $S(z) = 2z \sin(z) + z \cos(z) - \sin(z)$ olup, $N = 6$ alınır. Buna göre sıralama noktaları:

$$z_{11} = (1+i)/6, z_{22} = (2+2i)/6, z_{33} = (3+3i)/6, z_{44} = (4+4i)/6, z_{55} = (5+5i)/6 \text{ ve } z_{66} = 1+i.$$

Buna göre (200) denkleminde temel matris-denklemini:

$$W = L(M^T)^2 + P_1 L M^T + P_0 L. \quad (224)$$

Burada, $P_0(z) = 2P_1(z)$ olup

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0.3332 + 0.3332i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6666 + 0.6666i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 + 1.0000i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.3332 + 1.3332i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6666 + 1.6666i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.0000 + 2.0000i \end{bmatrix} \quad (225)$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.1666 + 0.1666i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3333 + 0.3333i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5000 + 0.5000i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6666 + 0.6666i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8333 + 0.8333i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 + 1.0000i \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Ayrıca $N = 6$ için L matrisi;

$$L = \begin{bmatrix} G(z_{11}) \\ G(z_{22}) \\ G(z_{33}) \\ G(z_{44}) \\ G(z_{55}) \\ G(z_{66}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1(z_{11}) & G_2(z_{11}) & G_3(z_{11}) & G_4(z_{11}) & G_5(z_{11}) & G_6(z_{11}) \\ G_1(z_{22}) & G_2(z_{22}) & G_3(z_{22}) & G_4(z_{22}) & G_5(z_{22}) & G_6(z_{22}) \\ G_1(z_{33}) & G_2(z_{33}) & G_3(z_{33}) & G_4(z_{33}) & G_5(z_{33}) & G_6(z_{33}) \\ G_1(z_{44}) & G_2(z_{44}) & G_3(z_{44}) & G_4(z_{44}) & G_5(z_{44}) & G_6(z_{44}) \\ G_1(z_{55}) & G_2(z_{55}) & G_3(z_{55}) & G_4(z_{55}) & G_5(z_{55}) & G_6(z_{55}) \\ G_1(z_{66}) & G_2(z_{66}) & G_3(z_{66}) & G_4(z_{66}) & G_5(z_{66}) & G_6(z_{66}) \end{bmatrix} \quad (226)$$

$$= \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.6666+0.3333i & -0.5000-0.3333i & 0.9629-0.2962i & 0.9104+0.7407i & -2.9567+0.8302i \\ 1.0000 & -0.3333+0.6666i & -1.0000-0.3333i & 0.7037-1.0370i & 2.1604+0.9259i & -2.3580+3.2345i \\ 1.0000 & 1.0000i & -1.5000 & -2.0000i & 3.7500 & 6.7500i \\ 1.0000 & 0.3333+1.3333i & -2.0000+0.6666i & -1.3703-2.9629i & 5.3086-2.5925i & 5.6913+10.1728i \\ 1.0000 & 0.6666+1.6666i & -2.5000+1.6666i & -3.6296-3.7037i & 6.0956-7.4074i & 16.2901+11.1882i \\ 1.0000 & 1.0000+2.0000i & -3.0000+3.0000i & -7.0000-4.0000i & 5.0000-15.0000i & 33.0000+6.0000i \end{bmatrix}.$$

(224) denkleminde $S(z)$ vektörü ve W katsayılar matrisi:

$$W = \begin{bmatrix} 0.3332+0.3332i & -0.1665+0.0556i & 1.6112-0.3886i & -3.6632+1.8054i & -5.1047-3.0055i & 18.1372-5.2575i \\ 0.6666+0.6666i & -0.3332+0.5554i & 0.8891-0.6667i & -1.5060+2.4446i & -8.8567-2.3863i & 12.4031-15.0126i \\ 1.0000+1.0000i & -0.5000+1.5000i & -0.5000-0.5000i & -0.2500+1.7500i & -10.2500-0.2500i & 2.6250-23.8750i \\ 1.3332+1.3332i & -0.6666+2.8885i & -2.8883+0.4441i & -1.2093-0.4436i & -9.2198+0.0663i & -7.0466-29.0554i \\ 1.6666+1.6666i & -0.8333+4.7218i & -6.6107+2.4995i & -6.2930-4.3053i & -7.2491-6.6302i & -7.8292-33.7442i \\ 2.0000+2.0000i & -1.0000+7.0000i & -12.0000+6.0000i & -18.0000+10.0000i & -8.0000-28.0000i & 14.0000-52.0000i \end{bmatrix} \quad (227)$$

$$S = \begin{bmatrix} 0.0040+0.1079i \\ 0.0405+0.4189i \\ 0.1624+0.9104i \\ 0.4423+1.5512i \\ 0.9710+2.2963i \\ 1.8511+3.0767i \end{bmatrix}.$$

Ayrıca, $N = 6$ için

$$\begin{aligned} [G(0); 0] &= [1.0000 \quad -1.0000 \quad 0 \quad 1.0000 \quad 0 \quad -3.0000 \quad ; \quad 0] \\ [G(0)M^T; 0] &= [0 \quad 1.0000 \quad -2.0000 \quad 0 \quad 4.0000 \quad 0 \quad ; \quad 1] \end{aligned} \quad (228)$$

biçimindeki başlangıç şartları W ve S vektörel denklemlerinde yerine yazıldığında:

$$\hat{W} = \begin{bmatrix} 0.3332+0.3332i & -0.1665+0.0556i & 1.6112-0.3886i & -3.6632+1.8054i & -5.1047-3.0055i & 18.1372-5.2575i \\ 0.6666+0.6666i & -0.3332+0.5554i & 0.8891-0.6667i & -1.5060+2.4446i & -8.8567-2.3863i & 12.4031-15.0126i \\ 1.0000+1.0000i & -0.5000+1.5000i & -0.5000-0.5000i & -0.2500+1.7500i & -10.2500-0.2500i & 2.6250-23.8750i \\ 1.3332+1.3332i & -0.6666+2.8885i & -2.8883+0.4441i & -1.2093-0.4436i & -9.2198+0.0663i & -7.0466-29.0554i \\ 1.0000 & -1.0000 & 0 & 1.0000 & 0 & -3.0000 \\ 0 & 1.0000 & -2.0000 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (229)$$

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} 0.0040+0.1079i \\ 0.0405+0.4189i \\ 0.1624+0.9104i \\ 0.4423+1.5512i \\ 0 \\ 1.0000 \end{bmatrix}.$$

Öte yandan, $\hat{W}F = \hat{S}$ sisteminin çözümü: $(F = (\hat{W})^{-1} \hat{S})$

$$F = \begin{bmatrix} 0.1871+0.0554i \\ 0.7548-0.0632i \\ -0.0868-0.0137i \\ 0.0269+0.0749i \\ 0.0178+0.0091i \\ 0.0225+0.0224i \end{bmatrix}. \quad (230)$$

Böylelikle $f(z) = \sin(z)$ kesin çözümüne ulaşılır. Böylece ele alınan tüm örnekler $N=9$ ve $N=11$ için de kolaylıkla çözülebilir.

Tablo 4: Örnek 3 için farklı N değerlerindeki mutlak hatalar:

z	Tam Çözüm	$N=5$	$N=6$	$N=7$
$0.0 + 0.0i$	$0.0000000000+0.0000000000i$	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
$0.2 + 0.2i$	$0.2026565675 + 0.197323110 i$	$0.110452589E-8$	$0.996321451E-9$	$0.210548622E-12$
$0.4 + 0.4i$	$0.4209895520 + 0.378328012 i$	$0.441025635E-6$	$0.885021463E-9$	$0.114254871E-11$
$0.6 + 0.6i$	$0.669364874 + 0.525453002 i$	$0.990214521E-5$	$0.220145236E-8$	$0.996021458E-11$
$0.8 + 0.8i$	$0.959417442 + 0.618749432i$	$0.550214532E-5$	$0.489652112E-7$	$0.780124563E-10$
$1.0 + 1.0i$	$1.298457581+0.634963914i$	$0.441023658E-4$	$0.188524697E-6$	$0.105069981E-9$

9.Sonuç

Yüksek mertebeden karmaşık lineer diferansiyel denklemleri, genellikle analitik olarak çözmek zordur. Bu nedenle, Euler ve Genocchi polinomları kullanılarak, bu denklemlerin sayısal olarak çözümü bulunmaya çalışılır. Bu tezde değinilen yöntem; lineer karmaşık bir diferansiyel denklemin çözümünün; Euler ve Genocchi seri açılımındaki katsayıların bulunmasına dayalıdır. Burada Euler ve Genocchi polinomları kullanılarak yaklaşık çözümler bulunurken N sayısı artırıldığında analitik çözüme gittikçe yaklaşıldığı ve sonuçta bu yaklaşık çözümlerin tam çözümle çakıştığı tablolardan açık bir şekilde görülmektedir. Bu yöntemin ayrıca değişken katsayılı lineer karmaşık diferansiyel denklemlere genişletilmesinde ; $P_k(z)$ ve $S(z)$ fonksiyonları, dikdörtgensel koordinat sisteminde tanımlanıp çözümünün de bu bölgede aranması gerekmektedir.

KAYNAKLAR

1. L. Cveticanin, "Free vibration of a strong non-linear system described with complex functions," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 277, no. 4-5, pp. 815–824, 2004. [View at Publisher](#) · [View at Google Scholar](#) · [View at Zentralblatt MATH](#) · [View at MathSciNet](#).
2. L. Cveticanin, "Approximate solution of a strongly nonlinear complex differential equation," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 284, no. 1-2, pp. 503–512, 2005. [View at Publisher](#) · [View at Google Scholar](#) · [View at Zentralblatt MATH](#) · [View at MathSciNet](#).
3. G. A. Barsegian, *Gamma Lines: On the Geometry of Real and Complex Functions*, vol. 5 of Asian Mathematics Series, Taylor & Francis, New York, NY, USA, 2002. [View at MathSciNet](#).
4. G. Barsegian and D. T. Lê, "On a topological description of solutions of complex differential equations," *Complex Variables*, vol. 50, no. 5, pp. 307–318, 2005. [View at Publisher](#) · [View at Google Scholar](#) · [View at Zentralblatt MATH](#) · [View at MathSciNet](#).
5. K. Ishizaki and K. Tohge, "On the complex oscillation of some linear differential equations," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 206, no. 2, pp. 503–517, 1997. [View at Publisher](#) · [View at Google Scholar](#) · [View at Zentralblatt MATH](#) · [View at MathSciNet](#).
6. J. Heittokangas, R. Korhonen, and J. Rättyä, "Growth estimates for solutions of linear complex differential equations," *Annales Academiae Scientiarum Fennicae*, vol. 29, no. 1, pp. 233–246, 2004. [View at Google Scholar](#) · [View at Zentralblatt MATH](#) · [View at MathSciNet](#).
7. V. Andrievskii, "Polynomial approximation of analytic functions on a finite number of continua in the complex plane," *Journal of Approximation Theory*, vol. 133, no. 2, pp. 238–244, 2005. [View at Publisher](#) · [View at Google Scholar](#) · [View at Zentralblatt MATH](#) · [View at MathSciNet](#).
8. V. A. Prokhorov, "On best rational approximation of analytic functions," *Journal of Approximation Theory*, vol. 133, no. 2, pp. 284–296, 2005. [View at Publisher](#) · [View at Google Scholar](#) · [View at Zentralblatt MATH](#) · [View at MathSciNet](#).
9. M. Gülsu and M. Sezer, "Approximate solution to linear complex differential equation by a new approximate approach," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 185, no. 1, pp. 636–645, 2007. [View at Publisher](#) · [View at Google Scholar](#) · [View at Zentralblatt MATH](#) · [View at MathSciNet](#).
10. M. Gülsu, B. Gürbüz, Y. Öztürk, and M. Sezer, "Laguerre polynomial approach for solving linear delay difference equations," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 217, no. 15, pp. 6765–6776, 2011. [View at Publisher](#) · [View at Google Scholar](#) · [View at Zentralblatt MATH](#) · [View at MathSciNet](#).
11. Y. Öztürk and M. Gülsu, "Approximate solution of linear generalized pantograph equations with variable coefficients on Chebyshev-Gauss grid," *Journal of Advanced Research in Scientific Computing*, vol. 4, no. 1, pp. 36–51, 2012. [View at Google Scholar](#) · [View at MathSciNet](#).
12. M. Sezer and A. Akyuz-Das-cioglu, "A Taylor method for numerical solution of generalized pantograph equations with linear functional argument," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 200, no. 1, pp. 217–225, 2007. [View](#)

- [at Publisher](#) · [View at Google Scholar](#) · [View at Zentralblatt MATH](#) · [View at MathSciNet](#).
13. M. Sezer, M. Gülsu, and B. Tanay, “A Taylor collocation method for the numerical solution of complex differential equations with mixed conditions in elliptic domains,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 182, no. 1, pp. 498–508, 2006. [View at Publisher](#) · [View at Google Scholar](#) · [View at Zentralblatt MATH](#) · [View at MathSciNet](#).
 14. M. Sezer and S. Yuzbasi, “A collocation method to solve higher order linear complex differential equations in rectangular domains,” *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, vol. 26, no. 3, pp. 596–611, 2010. [View at Publisher](#) · [View at Google Scholar](#) · [View at Zentralblatt MATH](#) · [View at MathSciNet](#).
 15. E. Tohidi, “Legendre approximation for solving linear HPDEs and comparison with Taylor and Bernoulli matrix methods,” *Applied Mathematics*, vol. 3, no. 5, pp. 410–416, 2012. [View at Publisher](#) · [View at Google Scholar](#) · [View at MathSciNet](#) .
 16. S. Yuzbasi, M. Aynigul, and M. Sezer, “A collocation method using Hermite polynomials for approximate solution of pantograph equations,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 348, no. 6, pp. 1128–1139, 2011. [View at Publisher](#) · [View at Google Scholar](#) · [View at MathSciNet](#).
 17. S. Yuzbasi, “A numerical approximation based on the Bessel functions of first kind for solutions of Riccati type differential difference equations,” *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 64, no. 6, pp. 1691–1705, 2012. [View at Publisher](#) · [View at Google Scholar](#) .
 18. S. Yuzbasi, N. Sahin, and M. Sezer, “A collocation approach for solving linear complex differential equations in rectangular domains,” *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol. 35, no. 10, pp. 1126–1139, 2012. [View at Publisher](#) · [View at Google Scholar](#) · [View at MathSciNet](#) .
 19. S. Yuzbasi, N. Sahin, and M. Gulso, “A collocation approach for solving a class of complex differential equations in elliptic domains,” *Journal of Numerical Mathematics*, vol. 19, no. 3, pp. 225–246, 2011. [View at Publisher](#) · [View at Google Scholar](#) · [View at MathSciNet](#).
 20. A. H. Bhrawy, E. Tohidi, and F. Soleymani, “A new Bernoulli matrix method for solving high-order linear and nonlinear Fredholm integro-differential equations with piecewise intervals,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 219, no. 2, pp. 482–497, 2012. [View at Publisher](#) · [View at Google Scholar](#) · [View at MathSciNet](#).
 21. E. Tohidi, A. H. Bhrawy, and Kh. Erfani, “A collocation method based on Bernoulli operational matrix for numerical solution of generalized pantograph equation,” *Applied Mathematical Modelling*, vol. 37, no. 6, pp. 4283–4294, 2013. [View at Publisher](#) · [View at Google Scholar](#).
 22. E. Tohidi, “Bernoulli matrix approach for solving two dimensional linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 2, no. 4, pp. 136–139, 2012. [View at Google Scholar](#).
 23. O. R. N. Samadi and E. Tohidi, “The spectral method for solving systems of Volterra integral equations,” *Journal of Applied Mathematics and Computing*, vol. 40, no. 1-2,

- pp. 477–497, 2012. [View at Publisher](#) · [View at Google Scholar](#) · [View at MathSciNet](#).
24. E. Tohidi and O. R. N. Samadi, “Optimal control of nonlinear Volterra integral equations via Legendre polynomials,” *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, vol. 30, no. 1, pp. 67–83, 2013. [View at Publisher](#) · [View at Google Scholar](#).
 25. S. Mashayekhi, Y. Ordokhani, and M. Razzaghi, “Hybrid functions approach for nonlinear constrained optimal control problems,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 17, no. 4, pp. 1831–1843, 2012. [View at Publisher](#) · [View at Google Scholar](#) · [View at Zentralblatt MATH](#) · [View at MathSciNet](#).
 26. M. Sezer and M. Gülsu, “Approximate solution of complex differential equations for a rectangular domain with Taylor collocation method,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 177, no. 2, pp. 844–851, 2006. [View at Publisher](#) · [View at Google Scholar](#) · [View at Zentralblatt MATH](#) · [View at MathSciNet](#).
 27. V. I. Krylov, *Approximate Calculation of Integrals*, Dover, Mineola, NY, USA, 1962. [View at MathSciNet](#).
 28. F. A. Costabile and F. Dell'Accio, “Expansion over a rectangle of real functions in Bernoulli polynomials and applications,” *BIT Numerical Mathematics*, vol. 41, no. 3, pp. 451–464, 2001. [View at Publisher](#) · [View at Google Scholar](#) · [View at Zentralblatt MATH](#) · [View at MathSciNet](#).
 29. S. Araci, “Novel identities for q-Genocchi numbers and polynomials,” *Journal of Function Spaces and Applications*, vol. 2012, Article ID 214961, 13 pages, 2012. [View at Publisher](#) · [View at Google Scholar](#) · [View at MathSciNet](#).
 30. F. Toutounian, F. Tohidi and S. Shateyi, “A Collocation Method Based on the Bernoulli Operational Matrix for Solving High-Order Linear Complex Differential Equations in a Rectangular Domain” Volume 2013 (2013), Article ID 823098, 12 pages <http://dx.doi.org/10.1155/2013/823098>.
 31. S. Araci, “Novel identities involving Genocchi numbers and polynomials arising from applications from umbral calculus,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 233, pp. 599–607, 2014. [View at Google Scholar](#).
 32. S. Araci, E. Şen, and M. Acikgoz, “Theorems on Genocchi polynomials of higher order arising from Genocchi basis,” *Taiwanese Journal of Mathematics*, vol. 18, no. 2, pp. 473–482, 2014. [View at Publisher](#) · [View at Google Scholar](#).
 33. S. Araci, M. Acikgoz, A. Bagdasaryan, and E. Şen, “The Legendre polynomials associated with Bernoulli, Euler, Hermite and Bernstein polynomials,” *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, vol. 1, no. 1, pp. 1–3, 2013. [View at Google Scholar](#).
 34. S. Araci, M. Acikgoz, and E. Şen, “On the extended Kim's p-adic q-deformed fermionic integrals in the p-adic integer ring,” *Journal of Number Theory*, vol. 133, no. 10, pp. 3348–3361, 2013. [View at Publisher](#) · [View at Google Scholar](#) · [View at MathSciNet](#).
 35. T. Kim, “Some identities for the Bernoulli, the Euler and the Genocchi numbers and polynomials,” *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, vol. 20, no. 1, pp.

- 23–28, 2010. [View at Google Scholar](#) · [View at Zentralblatt MATH](#) · [View at MathSciNet](#).
36. A. Genocchi, “Intorno all' espressione generale de' Numeri Bernulliani,” *Annali Di SciEnzE MatEmatichE E FisichE*, vol. 3, pp. 395–405, 1852. [View at Google Scholar](#).
 37. A. F. Horadam, “Genocchi polynomials,” in *Proceedings of the 4th International Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications*, pp. 145–166, Kluwer Academic, 1991.
 38. A. F. Horadam, “Negative order Genocchi polynomials,” *The Fibonacci Quarterly*, vol. 30, no. 1, pp. 21–34, 1992. [View at Google Scholar](#) · [View at Zentralblatt MATH](#) · [View at MathSciNet](#).
 39. H. M. Srivastava, B. Kurt, and Y. Simsek, “Some families of Genocchi type polynomials and their interpolation functions,” *Integral Transforms and Special Functions*, vol. 23, no. 12, pp. 919–938, 2012. [View at Publisher](#) · [View at Google Scholar](#) · [View at Zentralblatt MATH](#) · [View at MathSciNet](#).
 40. H. M. Srivastava, “Some generalizations and basic (or q -) extensions of the Bernoulli, Euler and Genocchi polynomials,” *Applied Mathematics & Information Sciences*, vol. 5, no. 3, pp. 390–444, 2011. [View at Google Scholar](#) · [View at MathSciNet](#).
 41. T. Kim, “Symmetry of power sum polynomials and multivariate fermionic p -adic invariant integral on $\mathbb{Z}_p$,” *Russian Journal of Mathematical Physics*, vol. 16, no. 1, pp. 93–96, 2009. [View at Publisher](#) · [View at Google Scholar](#) · [View at MathSciNet](#).
 42. D. S. Kim, T. Kim, S. H. Lee, and Y. H. Kim, “Some identities for the product of two Bernoulli and Euler polynomials,” *Advances in Difference Equations*, vol. 2012, article 95, 2012. [View at Google Scholar](#).
 43. D. S. Kim, D. V. Dolgy, T. Kim, and S.-H. Rim, “Some formulae for the product of two Bernoulli and Euler polynomials,” *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2012, Article ID 784307, 15 pages, 2012. [View at Publisher](#) · [View at Google Scholar](#) · [View at Zentralblatt MATH](#) · [View at MathSciNet](#).
 44. D. S. Kim and T. Kim, “Bernoulli basis and the product of several Bernoulli polynomials,” *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol. 2012, Article ID 463659, 12 pages, 2012. [View at Publisher](#) · [View at Google Scholar](#) · [View at Zentralblatt MATH](#) · [View at MathSciNet](#).
 45. V. Gupta, T. Kim, J. Choi, and Y. H. Kim, “Generating functions for g -Bernstein, g -Meyer-König-Zeller and g -Beta basis,” *Automation, Computers, Applied Mathematics*, vol. 19, no. 1, pp. 7–11, 2010. [View at Google Scholar](#).
 46. L. Carlitz, “Multiplication formulas for products of Bernoulli and Euler polynomials,” *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 9, pp. 661–666, 1959. [View at Publisher](#) · [View at Google Scholar](#) · [View at MathSciNet](#).
 47. L. Carlitz, “The product of two Eulerian polynomials,” *Mathematics Magazine*, vol. 36, no. 1, pp. 37–41, 1963. [View at Publisher](#) · [View at Google Scholar](#) · [View at Zentralblatt MATH](#) · [View at MathSciNet](#).
 48. H. M. Srivastava and J. Choi, *Series Associated with the Zeta and Related Functions*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 2001. [View at MathSciNet](#).

49. K.-W. Chen, "Sums of products of generalized Bernoulli polynomials," Pacific Journal of Mathematics, vol. 208, no. 1, pp. 39–52, 2003. [View at Publisher](#) · [View at Google Scholar](#) · [View at Zentralblatt MATH](#) · [View at MathSciNet](#).
50. F. Qi, "Explicit formulas for computing Euler polynomials in terms of the second kind Stirling numbers," <http://arxiv.org/abs/1310.5921>.
51. F. Qi, "Explicit formulas for computing Bernoulli numbers of the second kind and Stirling numbers of the first kind," Filomat, vol. 28, pp. 1–9, 2014. [View at Google Scholar](#).
52. B.-N. Guo and F. Qi, "Some identities and an explicit formula for Bernoulli and Stirling numbers," Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 255, pp. 568–579, 2014. [View at Publisher](#) · [View at Google Scholar](#) · [View at MathSciNet](#).
53. Y. He and C. Wang, "Some formulae of products of the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials," Discrete Dynamics in Nature and Society, vol. 2012, Article ID 927953, 11 pages, 2012. [View at Publisher](#) · [View at Google Scholar](#) · [View at Zentralblatt MATH](#) · [View at MathSciNet](#).
54. S.-H. Rim and J. Jeong, "On the modified q-Euler numbers of higher order with weight," Advanced Studies in Contemporary Mathematics, vol. 22, no. 1, pp. 93–98, 2012. [View at Google Scholar](#) · [View at MathSciNet](#).

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Mehtap TOSUN

Doğum Yeri ve Yılı : İzmir, 1990

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : mhttp_ts@hotmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Eşrefpaşa Lisesi, 2003

Lisans : Erciyes Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2008

Yüksek Lisans : Celal Bayar Üniversitesi, Uygulamalı Matematik Bölümü, 2013

