



**T.C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

SS*-YARIYEREL MODÜLLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MUSTAFA ŞAHİN

ARALIK

MUSTAFA ŞAHİN

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

ARALIK 2024

SS*-YARIYEREL MODÜLLER

Mustafa ŞAHİN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman

Prof. Dr. Ergül TÜRKMEN

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ARALIK 2024

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Mustafa ŞAHİN tarafından hazırlanan “Ss*-Yarıyerel Modüller” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Ergül TÜRKMEN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan : Doç. Dr. Figen ERYILMAZ

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye : Dr. Öğretim Üyesi Sabahattin ILBIRA

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 24/12/2024

Jüri tarafından kabul edilen bu tezinYüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
 - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
 - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,
- bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Mustafa ŞAHİN

24/12/2024

SS*-YARIYEREL MODÜLLER
(Yüksek Lisans Tezi)

Mustafa ŞAHİN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Aralık 2024

ÖZET

Bu çalışmada yarı basit ve küçük modüller kullanılarak ss*-yariyerel modüller tanımlanmıştır ve bu modüllerin özellikleri temel olarak verilmiştir. $\mathcal{M}$ bir H -modül olmak üzere $\mathcal{M}$ nin her $\mathcal{M}_1$ alt modülü için, $\mathcal{M}_1$ ile $\mathcal{M}_2$ nin arakesiti yarı basit ve küçük olacak şekilde $\mathcal{M}$ de $Z^*(\mathcal{M}_2)$ tümleyenine sahipse, $\mathcal{M}$ ye ss*-yariyerel modül denir. Ss*-yariyerel modüllerin sınıfının alt modüller, bölüm modülleri ve toplamlarda kapalı olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, bütün modülleri ss*-yariyerel olan halkalar nitelendirilmiş ve bir örnekle gösterilmiştir.

Sayfa Adedi : 41
Anahtar Kelimeler : $Z_s^*(\mathcal{M})$ alt modül, yariyerel modül, Z^* -tümleyen alt modül
Danışman : Prof. Dr. Ergül TÜRKMEN

SS*-SEMILOCAL MODULES

(M. Sc. Thesis)

Mustafa ŞAHİN

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

December 2024

ABSTRACT

In this study, ss^* -semilocal modules are defined using semi-simple and small modules and the basic features of these modules are given. Let $\wp$ is an H -module. If for every $\wp_1$ submodule of $\wp$, $\wp$ has $Z^*(\wp_2)$ supplement such that the intersection of $\wp_1$ and $\wp_2$ is semi-simple and small, then $\wp$ is called ss^* -semilocal module. It is shown that the class of ss^* -semilocal modules is closed under submodules, factor modules and direct sums. Additionally, rings with all modules ss^* -semilocal are characterized and illustrated with an example.

Number of pages : 41

Keywords : $Z_s^*(\wp)$ submodule, semilocal module, Z^* -supplement submodule

Supervisor : Prof. Dr. Ergül TÜRKMEN

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitimim boyunca bana her konuda rehberlik eden, bilgi ve deneyimleriyle her türlü yardımı sağlayan danışmanım saygı değer hocam Prof. Dr. Ergül TÜRKMEN'e en içten saygılarımla teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER.....	3
2.1. Halkalar.....	3
2.2. Modüller.....	4
2.3. Homomorfizmalar.....	7
2.4. Projektif ve İnjektif Modüller.....	11
2.5. Basit ve Yarı Basit Modüller.....	13
2.6. Büyük Alt Modüller.....	17
2.7. Küçük Alt Modüller.....	18
2.8. Küçük Modül.....	19
2.9. Bir Modülün Radikali.....	20
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	23
3.1. Yerel ve Yarıyerel Modüller.....	23
3.2. Tümlenmiş, Zayıf Tümlenmiş ve Rad-Tümlenmiş Modüller.....	24
3.3. Ss-Tümlenmiş Modüller.....	28
3.4. Ss-Yarıyerel Modüller.....	29
3.5. $Z^*(\varphi)$ Alt Modüller.....	30

3.6. $Z_s^*(\wp)$ Alt Modüller.....	30
4. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	32
4.1. Ss^* -Yarıyerel Modüller.....	32
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	38
KAYNAKLAR.....	39
ÖZGEÇMİŞ.....	41



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{N}$	doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{P}$	asal sayılar kümesi
$\subseteq$	alt küme
$\subset$	öz alt küme
$\cap$	kümelerde kesişim işlemi
0_H	$(H, +, \cdot)$ halkasında $(H, +)$ abel grubunun birimi
1_H	$(H, +, \cdot)$ halkasında $(H, \cdot)$ cebirsel yapısının birimi
$J = Rad(H)$	H Halkasının Jacobson Radikali
$\leq$	alt modül
$<$	öz alt modül
$\leq$	büyük alt modül
$\frac{\wp}{\wp_1}$	$\wp$ modülünün $\wp_1$ alt modülüne göre bölüm modülü
$\ll$	küçük alt modül
$\wp \cong \wp_1$	izomorf modüller
$\prod_{i \in I} V_i$	V_i alt modüllerinin direkt çarpımı
$\sum_{i \in I} V_i$	V_i alt modüllerinin toplamı
$\oplus_{i \in I} V_i$	V_i alt modüllerinin direkt toplamı
$\langle Y \rangle$	Y kümesi tarafından üretilen modül

Hd d elemanı tarafından üretilen devirli modül

Kısaltmalar

Açıklama

$Rad(\wp)$	$\wp$ modülünün radikali
$Des(\wp)$	$\wp$ modülünün desteği
$E(\wp)$	$\wp$ modülünün injektif bürümü
$Z(\wp)$	$\wp$ modülünün singüler alt modülü
$P(\wp)$	$\wp$ modülünün tüm radikal alt modüllerinin toplamı
$Gör(f)$	Bir f homomorfizmasının görüntü kümesi
$Çek(f)$	Bir f homomorfizmasının çekirdeği
$End(\wp)$	$\wp$ modülünün endomorfizmalarının kümesi
$Des_s(\wp)$	$\wp$ modülünün basit ve küçük alt modüllerinin toplamı

1.GİRİŞ

Bu makalede, tüm halkalar birimli H halka ve bütün modüller üniter sol H -modül olarak alınmıştır.

H bir halka ve φ bir H -modül olmak üzere φ_1 modülü φ modülünün alt modülü ise $\varphi_1 \leq \varphi$ şeklinde gösterilmiştir. φ nin bütün φ_2 öz alt modülü ile $\varphi \neq \varphi_1 + \varphi_2$ oluyorsa, φ_1 modülü φ modülünün *küçük alt modülü* olarak tanımlanır ve $\varphi_1 \ll \varphi$ şeklinde gösterilir (Wisbauer, 1991). φ alt modülü birtakım modüllerin küçük alt modülü ise φ modülüne *küçük modül* denir (Leonard, 1966). φ nin bütün küçük alt modüllerinin toplamı φ nin *radikalidir* ve $Rad(\varphi)$ şeklinde ifade edilir (Clark ve diğerleri, 2006). φ nin bütün maksimal alt modüllerinin arakesiti $Rad(\varphi)$ ye eşittir. φ_1 modülü φ modülünün alt modülü olmak üzere, φ nin sıfırdan farklı bütün alt modülü ile kesişimi sıfırdan farklı oluyorsa φ_1 alt modülüne φ modülünde *büyüktür* denir ve $\varphi_1 \trianglelefteq \varphi$ şeklinde gösterilir (Wisbauer, 1991). φ modülünün bütün basit alt modüllerinin toplamına φ modülünün *desteği* denir ve $Des(\varphi)$ şeklinde gösterilir (Wisbauer, 1991). φ nin bütün büyük alt modüllerinin kesişimi $Des(\varphi)$ ye eşittir (Kasch, 1982).

$\varphi_1 \leq \varphi$ olmak üzere, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ şartını gerçekleyen φ_2 minimal alt modül ise, φ_2 ye φ_1 nın φ de *tümleyeni* denir. φ_2 alt modülünün φ_1 in φ de tümleyeni olması için gerek ve yeter koşul $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ ve $\varphi_1 \cap \varphi_2 \ll \varphi_2$ olmasıdır. Bütün alt modüllerinin tümleyeni bulunan modüle *tümlenmiş modül* denir (Wisbauer, 1991). φ_2 alt modülünün bütün küçük alt modüllerinin toplamı $Rad(\varphi_2)$ ye eşittir buradan $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ ve $\varphi_1 \cap \varphi_2 \ll \varphi_2$ olduğunda $\varphi_1 \cap \varphi_2 \leq Rad(\varphi_2)$ olur. $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ ve $\varphi_1 \cap \varphi_2 \leq Rad(\varphi_2)$ olmasını sağlayan $\varphi_2 \leq \varphi$ alt modülüne φ_1 in φ de *Radikal tümleyeni* denir ve kısaca *Rad-tümleyeni* olarak adlandırılır. Bütün alt modülleri Rad-tümleyene sahip olan modüle *Radikal tümlenmiş (Rad-tümlenmiş) modül* denir (Xue, 1996). Bu bilgiye göre tümlenmiş modüllerin her biri Rad-tümlenmiştir.

Özcan A. Ç. 2002 de φ bir H -modül olmak üzere, φ nin $Z^*(\varphi)$ alt modülü $Z^*(\varphi) = \{d \in \varphi \mid Hd \text{ küçük modüldür}\}$ şeklinde tanımlamıştır. Emine Önal Kır ve Ergül Türkmen 2024 te φ nin $Z_s^*(\varphi)$ alt modülünü $Z_s^*(\varphi) = \{d \in \varphi \mid Hd \text{ yarı basit ve küçük modüldür}\}$ şeklinde tanımlamışlardır ve φ bir H -modül olmak üzere $Z_s^*(\varphi) = Des(\varphi) \cap Rad(E(\varphi))$ eşitliğini göstermişlerdir.

Bu çalışmada, $\wp$ bir H -modül ve $\wp_1 \leq \wp$ olmak üzere $\wp = \wp_1 + \wp_2$, $\wp_1 \cap \wp_2$ yarı basit ve $\wp_1 \cap \wp_2 \leq Z^*(\wp_2)$ olacak şekilde $\wp$ nin bir $\wp_2$ alt modülü bulunuyorsa, $\wp_2$ ye $\wp_1$ in $\wp$ de ss^* -tümleyeni denir. $\wp$ nin bütün $\wp_1$ alt modülü için $\wp$ de bir $\wp_2$ ss^* -tümleyeni bulunuyorsa $\wp$ ye ss^* -yarıyerel modül denir. Bu çalışmada ss^* -yarıyerel modüllerin genel özellikleri verilerek ss^* -yarıyerel modüllerin alt modüllerinin, direkt toplamalarının ve bölüm modüllerinin de ss^* -yarıyerel modül olduğu gösterilmiştir. Küçük ve yarı basit modüllerin ss^* -yarıyerel modül olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, H bir halka olmak üzere H ss^* -yarıyereldir, her sol H -modülü ss^* -yarıyereldir ve her injektif sol H -modülü ss -yarıyereldir ifadeleri birbirine denktir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Halkalar

2.1.1. Tanım Aşağıdaki şartları bulunduran $(H, +, \cdot)$ cebirsel yapısına *halka* denir.

i) $(H, +)$ abel gruptur,

ii) Her $d, e, h \in H$ için $(de)h = d(eh)$ dir,

iii) Her $d, e, h \in H$ için $d(e + h) = de + dh$ ve $(d + e)h = dh + eh$ dir (Hungerford, 1974).

2.1.2. Tanım $(H, +, \cdot)$ cebirsel yapısı halka olsun. $e \in H$ olmak üzere $\forall x \in H$ için $xe = ex = x$ oluyorsa, $e \in H$ elemanına H halkasının *birim elemanı* denir. $e = 1_H$ yazılışı ile gösterilir. Birim elemanı olan halkaya *birimli halka* denir.

Bu çalışmada bütün halkalar birimli halka olacak şekilde alınmış ve H ile $(H, +, \cdot)$ halkası kastedilmiştir.

Her $a, b \in H$ için “.” işlemine göre $ab = ba$ oluyorsa (değişmeli ise) $(H, +, \cdot)$ halkasına *değişmeli halka* denir. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ değişmeli halkalardır (Hungerford, 1974).

2.1.3. Tanım H halka ve $\emptyset \neq I \subseteq H$ olsun. $I, (H, +)$ abel grubunun alt grubu ve herhangi $x, y \in I$ iken $xy \in I$ oluyorsa, I alt grubuna H nin *alt halkası* denir. Ayrıca her $h \in H$ ve her $a \in I$ iken $ah \in I$ ($ha \in I$) oluyorsa, I ya H nin *sağ ideali* (*sol ideali*) denir. Burada I, H nin aynı anda sağ ve sol ideali oluyorsa, I ya H nin *ideali* denir.

Bir halkanın bütün idealleri alt halkadır ancak her alt halka ideal olmak zorunda değildir.

Örneğin $2\mathbb{Z}$ halkası $\mathbb{Q}$ nun bir alt halkası iken $a = 4 \in 2\mathbb{Z}$ ve $h = \frac{1}{5} \in \mathbb{Q}$ için, $ha = \frac{4}{5} \notin 2\mathbb{Z}$ olduğundan $2\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ nun bir ideali değildir. $\mathbb{Z}$ halkasının her alt halkası bir idealdir.

0 ve H ideallerine H halkasının *aşık idealleri* denir. H halkasının kendisinden farklı bütün ideallerine *öz ideal* denir (Hungerford, 1974).

2.1.4. Tanım H halka ve $0_H \neq h \in H$ olsun. $hb = 0_H$ eşitliğini sağlayan bir $0_H \neq b \in H$ elemanı varsa, h elemanına H halkasının *sıfır bölen elemanı* denir. Sıfır böleni olmayan birimli ve değişmeli H halkasına *tamlık bölgesi* denir (Hungerford, 1974).

2.1.5. Tanım H halka olsun. $a \in H$ elemanı iken $ab = ba = 1_H$ koşulunu sağlayan $b \in H$ elemanı varsa, b elemanına $a \in H$ elemanının *tersi* denir. Bu durumda a elemanına H halkasının *terslenebilir elemanı* denir (Hungerford, 1974).

2.1.6. Tanım H birimli halka olsun. H nin sıfır hariç bütün elemanları çarpma işleminde terslenebilirse H ye *bölme halkası* denir (Hungerford, 1974).

2.1.7. Tanım Değişmeli olan bölme halkasına *cisim* denir (Hungerford, 1974).

2.2. Modüller

2.2.1. Tanım H bir halka ve $(\wp, +)$ abel grubu olmak üzere $(h, c) \mapsto f(h, c) = hc$ şeklinde tanımlı $f : H \times \wp \rightarrow \wp$ fonksiyonu verilsin. Her $h, k \in H$ ve her $c, d \in \wp$ için;

- i) $h(c + d) = hc + hd$;
- ii) $(h + k)c = hc + kc$;
- iii) $(hk)c = h(kc)$

şartları sağlanıyorsa $\wp$ ye *sol H -modül* denir ve ${}_H\wp$ şeklinde gösterilir. Birimi 1_H olan bir H halkası için keyfi $d \in \wp$ elemanı olmak üzere $1_H d = d$ eşitliği gerçekleşiyorsa $\wp$ modülüne *üniter sol H -modül* denir. Sağ H -modül tanımı da aynı şekilde yapılabilir (Hungerford, 1974).

$\wp$ abel grup ise, $\wp$ üniter sol (sağ) $\mathbb{Z}$ -modüldür. O halde ${}_Z\mathbb{Q}$ sol $\mathbb{Z}$ -modüldür. Her H halkası H halkasında üniter sol H -modüldür ve ${}_HH$ şeklinde gösterilir. Buna göre $H = \mathbb{Z}_n$ olursa, $\mathbb{Z}_n$ sol $\mathbb{Z}_n$ -modüldür. Vektör uzaylarının hepsi üniter sol modüldür. Bu çalışmada bahsedilen modüllerin hepsi üniter sol H -modül olacaktır ve kısaca H -modül şeklinde yazılacaktır.

2.2.2. Tanım H halka, $\wp$ bir H -modül ve $\emptyset \neq \wp_1 \subseteq \wp$ alt küme olsun. Her $a, b \in \wp_1$ ve her $h \in H$ için

i) $a - b \in \wp_1$,

ii) $h \cdot a \in \wp_1$ ($a \cdot h \in \wp_1$)

oluyorsa, $\wp_1$ e $\wp$ nin bir sol (sağ) *alt modülü* denir ve $\wp_1 \leq \wp$ şeklinde gösterilir. Bu tanımdan yola çıkarak 0 ve $\wp$, $\wp$ modülünün aşikar alt modülleridir. $\wp$ modülünün kendisi hariç alt modüllerinin her birine *öz alt modül* denir. $\wp_1$, $\wp$ nin öz alt modülü olsun, $\wp_1 < \wp$ şeklinde gösterilir. H halkasının I öz sol ideali ayrıca ${}_H H$ nin öz alt modülüdür. $\wp$ modülünün herhangi sayıdaki alt modüllerinin kesişimi $\wp$ nin alt modülüdür. $\wp$ bir H -modül ve $a \in \wp$ olsun. $Ha = \{ha \mid h \in H\} \leq \wp$ alt modüldür (Hungerford, 1974).

2.2.3. Tanım $\wp$ bir H -modül ve $Y \subseteq \wp$ alt kümesi olsun. $\wp$ modülünün Y alt kümesini kapsayan alt modüllerinin tamamının kesişimine $\wp$ modülünün Y alt kümesi tarafından üretilen alt modülü denir ve $\langle Y \rangle$ şeklinde gösterilir. Y kümesine $\langle Y \rangle$ alt modülünün *üreteç kümesi* denir. Burada Y sonlu küme ise, $\langle Y \rangle$ alt modülüne *sonlu üretilmiş alt modül*, $Y = \{a\}$ olacak şekilde bir tane elemanı varsa $\langle Y \rangle = \langle a \rangle$ alt modülüne *devirli alt modül* denir. Eğer $\wp$ nin Y alt kümesi sonlu bir alt küme ve $\wp = \langle Y \rangle$ şeklinde oluyorsa $\wp$ ye *sonlu üretilmiş modül* denir ve özel olarak $a \in \wp$ olmak üzere $\wp = \langle a \rangle$ oluyorsa $\wp$ ye a tarafından üretilen devirli modül denir. Bu durumda $\langle a \rangle = Ha = \{ha \mid h \in H\}$ şeklindedir. Ayrıca $\{V_i \mid i \in I\}$, $\wp$ nin alt modüllerinin ailesi ise, $Y = \bigcup_{i \in I} V_i$ kümesinin ürettiği alt modüle V_i modüllerinin toplamı denir. $\langle Y \rangle = \langle \bigcup_{i \in I} V_i \rangle = \sum_{i \in I} V_i$ şeklinde gösterilir (Hungerford, 1974).

2.2.4. Tanım $\wp$ bir H -modül ve $\wp_1 \leq \wp$ olsun. $\frac{\wp}{\wp_1}$ bölüm grubu, $h \in H$ ve $a + \wp_1 \in \frac{\wp}{\wp_1}$ elemanları için, $h(a + \wp_1) = ha + \wp_1$ şeklinde tanımlı $\bullet : H \times \frac{\wp}{\wp_1} \rightarrow \frac{\wp}{\wp_1}$ dış işleminde bir H -modül yapısına sahiptir. Bu modüle $\wp$ modülünün $\wp_1$ alt modülüne göre *bölüm modülü* denir (Hungerford, 1974).

2.2.5. Tanım $\wp$ bir H -modül ve $\{V_i\}_{i \in I}$, $\wp$ nin alt modüllerinin ailesi olsun.

i) $\wp = \sum_{i \in I} V_i$,

ii) Her $i \in I$ için $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{0\}$

koşullarını sağlayan $\wp$ modülüne $\{V_i\}_{i \in I}$ alt modüller ailesinin *iç direkt toplamı* veya *direkt toplamı* denir. $\wp = \bigoplus_{i \in I} V_i$ şeklinde gösterilir. Burada V_i alt modüllerinin her birine $\wp$ modülünün *direkt toplam terimi* denir.

$\wp_1$ ve $\wp_2$ modülleri $\wp$ modülünün alt modülleri olmak üzere $\wp = \wp_1 \oplus \wp_2$ olması için gerek ve yeter koşulun $\wp = \wp_1 + \wp_2$ ve $\wp_1 \cap \wp_2 = 0$ olduğu açıktır.

$\wp = \wp \oplus \{0\}$ şeklinde yazılabilir, $\wp = \wp + 0$ ve $\wp \cap \{0\} = \{0\}$ olduğundan $\wp$ ve $\{0\}$, $\wp$ modülünün direkt toplam terimleridir. Burada $\wp$ modülünün $\wp$ ve $\{0\}$ alt modüllerine *aşıkarak direkt toplam terimleri* denir (Sharpe ve Vamos, 1972).

2.2.6. Tanım H halka ve $\emptyset \neq I$ bir indis kümesi olmak üzere, $\{V_i\}_{i \in I}$ H -modüllerin bir ailesi olsun. $\{\delta \mid \delta: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} V_i, \forall i \in I \text{ için } \delta(i) \in V_i\}$ şeklinde verilen dönüşümlerin kümesine $\{V_i\}_{i \in I}$ modüller ailesinin *çarpımı* denir ve bu küme $\prod_{i \in I} V_i$ şeklinde gösterilir. Her $i \in I$ için $\delta(i) = \delta_i$ ve $\delta = (\delta_i)_{i \in I}$ olarak gösterelim. Burada δ_i ye δ *dönüşümünün i . bileşeni* denir. Eğer I indis kümesi sayılabilir ise, $\delta = (\delta_i)_{i \in I} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_i, \dots)$ şeklindedir.

$\mu, \delta \in \prod_{i \in I} V_i$ olmak üzere

(i) $\mu = \delta \iff$ her $i \in I$ için $\mu_i = \delta_i$

(ii) $\mu + \delta = (\mu_i + \delta_i)_{i \in I}$

(iii) $-\delta = (-\delta_i)_{i \in I}$

(iv) $h \in H$ olmak üzere $h\delta = (h\delta_i)_{i \in I}$ şeklinde tanımlı cebirsel işlemlerine göre $\prod_{i \in I} V_i$ bir H -modül yapısına sahiptir. Bu modüle $\{V_i\}_{i \in I}$ modüller ailesinin *dış direkt çarpımı* denir. $\bigoplus_{i \in I}^w V_i = \{(\delta_i)_{i \in I} \mid \text{sonlu sayıda } i \in I \text{ için } \delta_i \neq 0\}$ kümesi $\prod_{i \in I} V_i$ modülünün bir alt modülüdür. $\bigoplus_{i \in I}^w V_i$ alt modülüne $\{V_i\}_{i \in I}$ modüller ailesinin *dış direkt toplamı* denir. I indis kümesi sonlu ise, $\prod_{i \in I} V_i = \bigoplus_{i \in I}^w V_i$ dir. İç direkt toplam ile dış direkt toplam izomorftur. Bundan dolayı iç direkt toplam ve dış direkt toplam ifadeleri yerine yalnızca direkt toplam ifadesi kullanılır (Alizade ve Pancar, 2016).

$\wp$ bir H -modül olmak üzere, dış direkt toplam tanımında yer alan her bir $i \in I$ için $V_i = \wp$ alınırsa $\bigoplus_{i \in I} V_i$ direkt toplamına, $\wp$ nin *kopyalarının toplamı* denir ve $\wp^{(I)}$ şeklinde gösterilir (Sharpe ve Vamos, 1972).

2.2.7. Teorem (Modüler Kural) $\wp$ modül, $\wp_1, \wp_2$ ve $\wp_3$ de $\wp$ nin alt modülleri ve $\wp_3 \leq \wp_2$ olsun. Bu durumda, $(\wp_3 + \wp_1) \cap \wp_2 = \wp_3 + (\wp_1 \cap \wp_2)$ dir (Alizade ve Pancar, 2016).

İspat Keyfi $d \in (\wp_3 + \wp_1) \cap \wp_2$ olsun. $d \in (\wp_3 + \wp_1)$ ve $d \in \wp_2$ olduğundan $d = t + l$ olacak şekilde $t \in \wp_3$ ve $l \in \wp_1$ vardır. $\wp_3 \leq \wp_2$ olduğundan $t \in \wp_2$ olur. Buradan $l =$

$d - t$ dir. $\wp_2 \leq \wp$ olduğundan $d \in \wp_2$ ve $t \in \wp_2$ iken $d - t = l \in \wp_2$ olur. Bu durumda $l \in \wp_1 \cap \wp_2$ bulunur. Dolayısıyla $d \in \wp_3 + (\wp_1 \cap \wp_2)$ olur. Tersine; $\wp_3 + (\wp_1 \cap \wp_2) \leq (\wp_3 + \wp_1) \cap \wp_2$ olduğu açıktır. O halde $(\wp_3 + \wp_1) \cap \wp_2 = \wp_3 + (\wp_1 \cap \wp_2)$ dir.

2.3. Homomorfizmalar

2.3.1. Tanım H halkası üzerinde $\wp$ ve $\wp_1$ H -modülleri verilsin. $f: \wp \rightarrow \wp_1$ fonksiyonu için aşağıdaki koşullar sağlayanıyorsa f fonksiyonuna *sol H -modül homomorfizması* denir.

- i) Her $c, k \in \wp$ için $f(c + k) = f(c) + f(k)$ dır,
- ii) Her $k \in \wp$ ve her $h \in H$ için $f(hk) = hf(k)$ dır.

Bu çalışmada homomorfizma ifadesi ile sol R -modül homomorfizmaları kastedilecektir. $f: \wp \rightarrow \wp_1$ homomorfizma olmak üzere f bire-bir ise f homomorfizmasına bir *monomorfizma*, f örten ise f homomorfizmasına bir *epimorfizma* denir. Burada f hem bire-bir hem de örten ise f homomorfizmasına bir *izomorfizma* denir. $f: \wp \rightarrow \wp_1$ homomorfizması bir izomorfizma ise, $\wp$ ile $\wp_1$ modüllerine *izomorf modüller* denir. İzomorf modüller $\wp \cong \wp_1$ şeklinde gösterilir. $\wp$ modülünden $\wp_1$ modülüne tanımlanan bütün homomorfizmaların kümesi $Hom(\wp, \wp_1) = \{f \mid f: \wp \rightarrow \wp_1 \text{ modül homomorfizması}\}$ şeklinde gösterilir. Eğer $f: \wp \rightarrow \wp$ homomorfizma ise f homomorfizmasına *endomorfizma* adı verilir. $\wp$ modülünün bütün endomorfizmalarının kümesi $End(\wp)$ şeklinde gösterilir (Hungerford, 1974).

2.3.2. Tanım D modül ve $T \leq D$ olsun. Her $t \in T$ için $i(t) = t$ şeklinde tanımlı $i: T \rightarrow D$ dönüşümü monomorfizma olur ve bu i monomorfizmasına *içerme monomorfizması* denir. Her $a \in D$ için $\varphi(a) = a + T$ şeklinde tanımlı $\varphi: D \rightarrow \frac{D}{T}$ dönüşümü epimorfizma olur. Bu φ epimorfizmasına *doğal (kanonik) homomorfizma* denir (Hungerford, 1974).

2.3.3. Tanım $\wp$ H -modül olsun. $f(d) = d$ şeklinde tanımlı $f: \wp \rightarrow \wp$ fonksiyonu H -modül izomorfizmasıdır. Bu f izomorfizmasına *birim (idantik) homomorfizma* denir. $\wp$ den $\wp$ ye birim homomorfizması $I_\wp$ şeklinde gösterilir (Hungerford, 1974).

2.3.4. Teorem $f: \wp \rightarrow \wp_1$ ve $g: \wp_1 \rightarrow \wp_2$ birer homomorfizma olsun. $gf: \wp \rightarrow \wp_2$ bileşke fonksiyonu da homomorfizma olur (Kasch, 1982).

2.3.5. Tanım $f: \wp \rightarrow \wp_1$ homomorfizma olsun. $\{c \in \wp \mid f(c) = 0\}$ kümesine f homomorfizmasının *çekirdeği* denir ve $\text{Çek}(f)$ şeklinde gösterilir. $\text{Çek}(f) \leq \wp$ dir (Hungerford, 1974).

2.3.6. Tanım $f: \wp \rightarrow \wp_1$ homomorfizma olsun. $\{f(d) \mid d \in \wp\}$ kümesine, $\wp$ modülünün f altındaki *homomorfik görüntüsü* denir ve $\text{Gör}(f)$ şeklinde gösterilir. $\text{Gör}(f) \leq \wp_1$ dir (Hungerford, 1974).

$\varphi: \wp \rightarrow \frac{\wp}{\wp_1}$ homomorfizması için $\text{Çek}(\varphi) = \wp_1$ olduğu açıktır.

2.3.7. Teorem (Homomorfizma Teoremi) $f: \wp \rightarrow \wp_1$ homomorfizma olsun. Bu durumda, $\frac{\wp}{\text{Çek}(f)} \cong \text{Gör}(f)$ dir. Burada f epimorfizma ise, $\frac{\wp}{\text{Çek}(f)} \cong \wp_1$ dir (Sharpe ve Vamos, 1972).

İspat $\varphi: \wp \rightarrow \frac{\wp}{\text{Çek}(f)}$ şeklinde tanımlı olmak üzere her $f: \wp \rightarrow \wp_1$ homomorfizması için $f = \bar{f} \varphi$ olacak şekilde bir $\bar{f}: \frac{\wp}{\text{Çek}(f)} \rightarrow \wp_1$ monomorfizması vardır. $\text{Çek}(f) = \wp_2$ olsun. $\bar{f}: \frac{\wp}{\wp_2} \rightarrow \wp_1$ fonksiyonunu $\bar{f}(c + \wp_2) = f(c)$ ile tanımlayalım. $c + \wp_2 = k + \wp_2$ ise $c - k \in \wp_2$ olup, buradan da $f(c - k) = 0$ ve $f(c) = f(k)$ elde ederiz. Dolayısıyla, $\bar{f}$ iyi tanımlıdır.

$$\begin{aligned} \bar{f}((c + \wp_2) + (k + \wp_2)) &= \bar{f}(c + k + \wp_2) = f(c + k) \\ &= f(c) + f(k) = \bar{f}(c + \wp_2) + \bar{f}(k + \wp_2) \end{aligned}$$

ve

$$\bar{f}(h(c + \wp_2)) = \bar{f}(hc + \wp_2) = f(hc) = hf(c) = h\bar{f}(c + \wp_2)$$

olduğundan $\bar{f}$, bir homomorfizmadır. Her $c + \wp_2 \in \text{Çek}(\bar{f})$ için $f(c) = \bar{f}(c + \wp_2) = 0$ olup $c \in \text{Çek}(f) = \wp_2$ ve buradan da $c + \wp_2 = \wp_2$ elde edilir. Böylece $\text{Çek}(\bar{f}) = 0$ olur. Dolayısıyla, $\bar{f}$ bir monomorfizmadır.

Her $c \in \wp$ için

$$(\bar{f} \varphi)(c) = \bar{f}(\varphi(c)) = \bar{f}(c + \wp_2) = f(c)$$

yani $\bar{f} \varphi = f$ dir. Buradan $\text{Gör}(f) \subseteq \text{Gör}(\bar{f})$ sağlanır. Diğer taraftan, her $k \in \text{Gör}(\bar{f})$ bir $c + \wp_2$ elemanının görüntüsüdür. O halde, $k = \bar{f}(c + \wp_2) = f(c) \in \text{Gör}(f)$ olduğundan, $\text{Gör}(\bar{f}) \subseteq \text{Gör}(f)$ olur. Böylece $\text{Gör}(f) = \text{Gör}(\bar{f})$ ve dolayısıyla $\bar{f}: \frac{\wp}{\wp_2} \rightarrow \text{Gör}(f)$ bir izomorfizmadır: $\frac{\wp}{\wp_2} \cong \text{Gör}(f)$ olur.

f epimorfizma ise, $Gör(f) = \wp_1$ olacağından $\frac{\wp}{Çek(f)} \cong \wp_1$ dir.

2.3.8. Teorem (1. İzomorfizma Teoremi) $\wp$ modül olmak üzere, $\wp$ nin alt modülleri $\wp_1$ ve $\wp_2$ için $\frac{(\wp_1 + \wp_2)}{\wp_2} \leq \frac{\wp}{\wp_2}$ alt modülü olup $\frac{(\wp_1 + \wp_2)}{\wp_2} \cong \frac{\wp_1}{(\wp_1 \cap \wp_2)}$ dir (Sharpe ve Vamos, 1972).

İspat $\alpha : \wp \longrightarrow \frac{\wp}{\wp_2}$ doğal homomorfizmasının $\wp_1$ ya kısıtlanmışını α' ile gösterelim. $Çek(\alpha') = \wp_1 \cap Çek(\alpha) = \wp_1 \cap \wp_2$ olduğu açıktır. Her $c \in \wp_1$ için $\alpha'(c) = c + \wp_2 = (c + 0) + \wp_2 \in \frac{(\wp_1 + \wp_2)}{\wp_2}$, dolayısıyla $Gör(\alpha') \subseteq \frac{(\wp_1 + \wp_2)}{\wp_2}$ dir. Diğer taraftan her $c \in \wp_1$, her $t \in \wp_2$ için, $(c + t) + \wp_2 = c + \wp_2 = \alpha'(c)$ olduğundan, $\frac{(\wp_1 + \wp_2)}{\wp_2} = Gör(\alpha')$ elde edilir. Bu durumda Teorem 2.3.7den $Gör(\alpha') \cong \frac{\wp_1}{Çek(\alpha')}$, yani $\frac{(\wp_1 + \wp_2)}{\wp_2} \cong \frac{\wp_1}{(\wp_1 \cap \wp_2)}$ izomorfizması sağlanır.

2.3.9. Teorem (2. İzomorfizma Teoremi) $\wp_2 \leq \wp_1 \leq \wp$ modüller olsun. Bu durumda $\frac{\frac{\wp}{\wp_2}}{\frac{\wp_1}{\wp_2}} \cong \frac{\wp}{\wp_1}$ dır (Sharpe ve Vamos, 1972).

İspat $f(c + \wp_2) = c + \wp_1$ ile $f : \frac{\wp}{\wp_2} \rightarrow \frac{\wp}{\wp_1}$ fonksiyonunu tanımlayalım. $\frac{\wp}{\wp_2}$ bölüm modülünde $c + \wp_2 = c' + \wp_2$ olsun. Buradan, $c - c' \in \wp_2 \subseteq \wp_1$ olur. O halde, $\frac{\wp}{\wp_1}$ de

$$c + \wp_1 = c' + \wp_1$$

dir. Dolayısıyla, f fonksiyonu iyi tanımlıdır. f nin bir epimorfizma olduğu kolayca kontrol edilir. $c + \wp_2 \in Çek(f)$ olması için gerek ve yeter koşul $c + \wp_1 = \wp_1$, yani $c \in \wp_1$, diğer bir deyişle $c + \wp_2 \in \frac{\wp_1}{\wp_2}$ olmasıdır. Böylece, $Çek(f) = \frac{\wp_1}{\wp_2} \leq \frac{\wp}{\wp_2}$ ve Teorem 2.3.7 den

$$\frac{\wp}{\wp_1} \cong \frac{\frac{\wp}{\wp_2}}{Çek(f)} = \frac{\frac{\wp}{\wp_2}}{\frac{\wp_1}{\wp_2}}$$

izomorfizması elde edilir.

2.3.10. Tanım $\wp$ modül olmak üzere $\wp_1$, $\wp$ nin öz alt modülü ($\wp_1 < \wp$) olsun. $\wp$ nin $\wp_1$ alt modülünü kapsayan $\wp_1$ den başka öz alt modülü bulunmuyorsa, $\wp_1$ öz alt modülüne $\wp$

modülünün *maksimal alt modülü* denir. Örneğin $p \in \mathbb{P}$ olsun, $\langle p \rangle = p\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$ olduğundan maksimal alt modüldür (Kasch, 1982).

2.3.11. Önerme H halka olmak üzere $\wp$ bir H -modül ve $\wp_1 < \wp$ öz alt modülü olsun. $\wp_1$ öz alt modülünün $\wp$ de maksimal olması için gerek ve yeter koşul her $d \in \wp \setminus \wp_1$ için $\wp_1 + Hd = \wp$ olmasıdır (Kasch, 1982).

İspat ($\Rightarrow$) Herhangi bir $d \in \wp \setminus \wp_1$ için $\wp_1 \subsetneq \wp_1 + Hd$ ve $\wp$ nin maksimalliğinden, $\wp_1 + Hd = \wp$ dir.

($\Leftarrow$) $\wp_2$, $\wp$ nin $\wp_1 \subsetneq \wp_2$ koşulunu sağlayan bir alt modülü olsun. Burada $\wp_1$ in maksimal olması için $\wp_2 = \wp$ olduğunu göstermeliyiz. $\wp_1 \neq \wp_2$ olduğundan $d \in \wp_2 \setminus \wp_1$ elemanı vardır. Bu durumda, $d \in \wp \setminus \wp_1$ olup hipotezden $\wp_1 + Hd = \wp$ dir. Aynı zamanda $d \in \wp_2$ olduğundan $Hd \leq \wp_2$ olur ve bu durumda $\wp = \wp_1 + Hd \leq \wp_2$ olup $\wp_2 = \wp$ dir.

2.3.12. Teorem $\wp$ modül olmak üzere $\wp_2 \leq \wp$ alt modülü olsun. Bu takdirde $\wp$ nin $\wp_2$ yi içeren bütün alt modüllerinin kümesi ile $\frac{\wp}{\wp_2}$ nin bütün alt modüllerinin kümesi arasında bire-bir eşleme vardır. $\wp_2 \leq \wp_1 \leq \wp$ olmak üzere $\frac{\wp}{\wp_2}$ nin alt modülleri $\frac{\wp_1}{\wp_2}$ şeklindedir (Alizade ve Pancar, 2016).

İspat (i) $\varphi: \wp \rightarrow \frac{\wp}{\wp_2}$ doğal homomorfizması için $\wp_2 \leq \wp_1 \leq \wp$ ise, $\varphi(\wp_1) = \frac{\wp_1}{\wp_2} \leq \frac{\wp}{\wp_2}$ dir.

Tersine; $\wp_3 \leq \frac{\wp}{\wp_2}$ ise $\varphi^{-1}(\wp_3) = \{d \in \wp \mid d + \wp_2 \in \wp_3\} = \wp_1$ için $\wp_2 = \varphi^{-1}(0) \leq \wp_1 \leq \wp$ ve $\varphi(\wp_1) = \frac{\wp_1}{\wp_2} = \wp_3$ olduğundan $\wp$ nin $\wp_2$ yi içeren $\wp_3$ alt modülü belirlenir.

2.3.13. Tanım $\{\wp_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ modüller ailesi olmak üzere bunların $f_n: \wp_n \rightarrow \wp_{n-1}$ homomorfizmalarından oluşan

$$\dots \rightarrow \wp_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \wp_n \xrightarrow{f_n} \wp_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \dots$$

dizisinde her $n \in \mathbb{Z}$ için $Gör(f_n) = Çek(f_{n-1})$ eşitliği sağlanıyorsa, bu diziye *tam dizi* denir. $0 \rightarrow \wp \rightarrow \wp_1 \rightarrow \wp_2 \rightarrow 0$ şeklindeki tam diziye ise, *kısa tam dizi* denir (Alizade ve Pancar, 2016).

2.4. Projektif ve İnjektif Modüller

2.4.1. Tanım $\wp, \wp_1$ ve $\wp_2$ birer H -modül olsunlar. Satır tam dizi olmak üzere aşağıdaki diyagram değişmeli ise, $\wp_2$ modülüne $\wp$ -projektiftir denir.

$$\begin{array}{ccccc} & & \wp_2 & & \\ & \swarrow h & \downarrow g & & \\ \wp & \xrightarrow{f} & \wp_1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Şu şekilde de tanımlayabiliriz; yukarıdaki diyagramda f keyfi bir epimorfizma olsun. f, g homomorfizmaları için $g = fh$ eşitliğini sağlayan bir $h: \wp_2 \rightarrow \wp$ homomorfizması varsa, $\wp_2$ ye $\wp$ -projektiftir denir. Şayet bu diyagramdaki $\wp \xrightarrow{f} \wp_1 \rightarrow 0$ satır tam dizisi rastgele alınırsa $\wp_2$ ye *projektif modül* denir (Alizade ve Pancar, 2016).

2.4.2. Tanım I modül olsun. Verilen her $g: \wp_1 \rightarrow \wp_2$ monomorfizması ve her $f: \wp_1 \rightarrow I$ homomorfizması için $f = hg$ eşitliğini sağlayan bir $h: \wp_2 \rightarrow I$ homomorfizması varsa, I modülüne $\wp_2$ -injektiftir denir.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \wp_1 & \xrightarrow{g} & \wp_2 \\ & & \downarrow f & \swarrow h & \\ & & I & & \end{array}$$

Yukarıdaki diyagramda $0 \rightarrow \wp_1 \xrightarrow{g} \wp_2$ satır tam dizisi rastgele alınırsa I ya *injektif modül* denir (Alizade ve Pancar, 2016).

2.4.3. Sonuç Aşağıdakiler sağlanır.

- i) I injektif ve $I \cong \wp$ ise $\wp$ injektiftir.
- ii) $\wp$ projektif ve $\wp \cong \wp_1$ ise $\wp_1$ projektiftir (Kasch, 1982).

2.4.4. Tanım H tamlık bölgesi, $\wp$ bir H -modül ve $a \in \wp$ olsun. Sıfırdan farklı olmak üzere her $h \in H$ için $a = hb$ eşitliğini sağlayan b elemanı bulunuyorsa $a \in \wp$ elemanına

bölünebilirdir denir. Eğer $\wp$ nin bütün elemanları bölünebilir ise, $\wp$ ye *bölünebilir modül* denir. Başka bir deyişle, her $h \in H$ ($h \neq 0$) için $\wp = h\wp$ oluyorsa $\wp$ ye *bölünebilir modül* denir (Sharpe ve Vamos, 1972).

2.4.5. Tanım H tamlık bölgesi olmak üzere $\wp$ bir H -modül olsun. Bir $d \in \wp$ için $hd = 0$ eşitliğini sağlayan bir $h \in H$ varsa d ye $\wp$ nin bir *burulmalı elemanı* denir. $\wp$ nin bütün burulma elemanlarının kümesi $T(\wp)$ şeklinde gösterilir. $T(\wp)$, $\wp$ nin bir alt modülü olup $T(\wp)$ ye $\wp$ nin *burulma alt grubu* denir. $T(\wp) = \wp$ ise $\wp$ ye bir burulma modülü, $T(\wp) = 0$ oluyorsa $\wp$ ye bir *burulmasız modül* denir (Alizade ve Pancar, 2016).

2.4.6. Tanım $\wp$ ve $\wp_1$ birer modül olmak üzere $\wp_1 \leq \wp$ olsun. Bu durumda $\wp$ modülüne $\wp_1$ in *genişlemesi* denir (Zöschinger, 1974).

2.4.7. Teorem (Baer Kriteri) H halka olmak üzere $\wp$ bir H -modül olsun. $\wp$ modülünün injektif olması için gerek ve yeter koşul bütün $I \subseteq H$ sol ideali olmak üzere $f: I \rightarrow \wp$ homomorfizmasının $g: H \rightarrow \wp$ homomorfizmasına genişletilebilmesidir (Alizade ve Pancar, 2016).

2.4.8. Yardımcı Teorem $\wp$ injektif modül olsun. Bu durumda $\wp$ modülünün her direkt toplam terimi injektiftir (Alizade ve Pancar, 2016).

2.4.9. Teorem (Gömülme Teoremi) H keyfi bir birimli halka olmak üzere her H -modül bir injektif H -modül içine gömülebilirdir (Kasch, 1982).

2.4.10. Teorem $\wp$ bir modül olmak üzere $\wp$ nin injektif modül olması için gerek ve yeter koşul $\wp$ nin kendisini kapsayan bütün modüllerde direkt toplam terimi olmasıdır (Sharpe ve Vamos, 1972).

İspat ($\Rightarrow$) $\wp$ bir injektif modül olmak üzere $\wp \leq \wp_1$ olsun. Bu durumda, i içerme fonksiyonu ve $I_\wp$ birim dönüşüm olmak üzere aşağıdaki diyagram değişmelidir.

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & \wp & \xrightarrow{i} & \wp_1 \\
 & & \downarrow I_\wp & \searrow f & \\
 & & \wp & &
 \end{array}$$

$c \in \wp_1$ herhangi bir eleman olsun. Bu durumda, $f(c) \in \wp$ olur ve $fi = I_\wp$ eşitliğinden $f(c) = f(f(c))$ olur. Buradan $c - f(c) \in \text{Çek}(f)$ olur. Bu durumda

$$c = f(c) + (c - f(c)) \in \wp + \text{Çek}(f)$$

olup $\wp_1 \leq \wp + \text{Çek}(f) \leq \wp_1$ den $\wp_1 = \wp + \text{Çek}(f)$ elde edilir. $e \in \wp \cap \text{Çek}(f)$ keyfi elemanını alalım. $fi = I_\wp$ olduğundan $e = f(e) = 0$ olur ve $e = 0$ bulunur. O halde $\wp_1 = \wp \oplus \text{Çek}(f)$ dir.

($\Leftarrow$) Teorem 2.4.9 dan $\wp$ modülü $\wp_1$ injektif modülünün alt modülü olduğundan injektif bir $\wp_1$ H -modülü içine gömülebilir. Hipotezden ve Yardımcı Teorem 2.4.8 den $\wp$, injektiftir.

2.5. Basit ve Yarı Basit Modüller

2.5.1. Tanım H halka olmak üzere sıfırdan farklı bir $\wp$ H -modül olsun. $\wp$ nin sıfır ve kendisinden başka (aşıkâr) alt modülü yoksa $\wp$ ye *basit modül* denir (Lam, 1991).

Örneğin $p \in \mathbb{P}$ olsun $\mathbb{Z}_p$ $\mathbb{Z}$ -modülü basittir. C cisim olsun ${}_C C$ nin alt modülleri sadece 0 ve C olduğundan ${}_C C$ basittir.

2.5.2. Önerme H halka ve $\wp$ basit bir H -modül olsun. $\wp$ nin maksimal alt modülü $\{0\}$ dır. Ayrıca $a \neq 0$ ve $a \in \wp$ elemanı için $Ha = \wp$ eşitliğinden $\wp$ devirlidir (Kasch, 1982).

İspat $\wp$ basit modül olsun. Bu durumda $\wp$ nin 0 alt modülünü kapsayan $\wp$ den farklı bir alt modülü bulunamaz ve maksimal alt modülün tanımından 0 alt modülü $\wp$ nin maksimal alt modülüdür. Herhangi bir $0 \neq a \in \wp$ elemanı olsun. Ha , $\wp$ nin alt modülüdür ve $a \in Ha$ dır. O halde $0 \neq Ha$ dır. Kabulümüz gereği $\wp$ basit modül olduğundan $Ha = \wp$ eşitliği sağlanır ve $\wp$ devirlidir.

2.5.3. Teorem $\wp$ bir modül olmak üzere $\wp_1 \leq \wp$ olsun. $\wp_1$ alt modülünün $\wp$ de maksimal alt modül olması için gerek ve yeter koşul $\frac{\wp}{\wp_1}$ bölüm modülünün basit modül olmasıdır (Wisbauer, 1991).

İspat ($\Rightarrow$) $\wp_1$, $\wp$ nin maksimal bir alt modülü olmak üzere $\frac{\wp_2}{\wp_1} \leq \frac{\wp}{\wp_1}$ olsun. Burada $\wp_1 \leq \wp_2$ dir. Kabulümüz gereği $\wp_1$, $\wp$ nin maksimal alt modülü olup $\wp_1 = \wp_2$ veya $\wp = \wp_2$

olmalıdır. Bu durumda $\frac{\wp}{\wp_1}$ nin alt modülleri $\frac{\wp_1}{\wp_1}$ veya $\frac{\wp}{\wp_1}$ olup $\frac{\wp}{\wp_1}$ bölüm modülü basit modüldür.

($\Leftarrow$) $\frac{\wp}{\wp_1}$ bölüm modülü basit modül olsun. $\wp_1 < \wp_2 \leq \wp$ olacak şekilde $\wp$ nin bir $\wp_2$ alt modülü olsun. Buradan $\frac{\wp_1}{\wp_1} < \frac{\wp_2}{\wp_1} \leq \frac{\wp}{\wp_1}$ olur. $\frac{\wp}{\wp_1}$ in basit modül olmasından dolayı $\frac{\wp_2}{\wp_1} = \frac{\wp}{\wp_1}$ olur. Bu durumda $\wp_2 = \wp$ eşitliği elde edilir bu da $\wp_1$ in $\wp$ de maksimal alt modül olduğunu gösterir.

2.5.4. Tanım H halka olmak üzere $\wp$ bir H -modül olsun. $\wp$ modülünün bütün alt modülleri $\wp$ nin birer direkt toplam terimi oluyorsa $\wp$ ye *yarı basit modül* denir (Lam, 1991).

$\mathbb{Z}_4$ $\mathbb{Z}$ -modülünü ele alalım. $\mathbb{Z}_4$ ün alt modülleri $\{\bar{0}\} \leq \mathbb{Z}_4$ ve $\{\bar{0}, \bar{2}\} \leq \mathbb{Z}_4$ olup $\mathbb{Z}_4$ ün direkt toplam terimi olamaz. O halde $\mathbb{Z}_4$ yarı basit değildir. $\mathbb{Z}_6$ $\mathbb{Z}$ -modülünü ele alalım. $\mathbb{Z}_6$ nın alt modülleri $\{\bar{0}\} \leq \mathbb{Z}_6$, $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \leq \mathbb{Z}_6$ ve $\{\bar{0}, \bar{3}\} \leq \mathbb{Z}_6$ olup $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}\} \oplus \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \oplus \{\bar{0}, \bar{3}\}$ olduğundan $\mathbb{Z}_6$ yarı basittir.

$\wp$ modülünün bütün basit alt modüllerinin toplamına $\wp$ nin *desteği* denir. $\wp$ modülünün desteği $Des(\wp)$ şeklinde gösterilir. $\wp$ nin basit alt modülü bulunmuyorsa $Des(\wp) = 0$ olur (Wisbauer, 1991).

0 alt modülü Tanım 2.5.4 e göre yarı basit modüldür fakat Tanım 2.5.1 e göre basit modül değildir.

2.5.5. Yardımcı Teorem $\wp$ herhangi bir modül olmak üzere $\wp$ modülü yarı basit ve sıfırdan farklı bir modül ise, $\wp$ nin basit bir alt modülü vardır (Lam, 1991).

İspat a , $\wp$ nin sıfıra eşit olmayan sabit bir elemanı olsun. Zorn Lemması gereği $a \notin \wp_1$ şartını sağlayan $\wp$ nin maksimal bir $\wp_1$ alt modülü bulunur. Kabulümüzden $\wp_1$, $\wp$ nin direkt toplam terimi olur ve $\wp = \wp_1 \oplus \wp_2$ eşitliğini sağlayan $\wp_2$ alt modülü bulunur. Teorem 2.5.3 ten $\frac{\wp}{\wp_1}$ basit modül olur. Buradan $\wp_2$ basit modül olur.

2.5.6. Yardımcı Teorem $\wp$ bir modül ve $\wp = Des(\wp)$ eşitliği sağlansın. Bu durumda,

i) $\wp$ yarı basit modüldür,

ii) $\wp$ nin bütün alt modülleri basit alt modüllerin direkt toplamına eşittir (Alizade ve Pancar, 2016).

İspat $\wp = Des(\wp)$ kabulünden $\wp = \sum_{i \in I} \wp_i$ olacak şekilde $\wp_i$ basit modüllerinin toplamına eşittir.

(i) X , $\wp$ nin keyfi bir alt modülü olmak üzere alt küme " $\subseteq$ " bağıntısıyla $\beta = \{V \subseteq T|X + (\sum_{v \in V} \wp_v) = X \oplus (\oplus_{v \in V} \wp_v)\}$ kümesinden kısmi sıralı bir küme buluruz. $\emptyset \in \beta$ olup $\beta \neq \emptyset$ olur. Zorn Lemmasını gerçekleştirmek için keyfi bir $\delta \subseteq \beta$ zincirini ele alalım. $V_0 = \bigcup_{V \in \delta} V \in \beta$ eşitliğinin sağlandığını gösterelim. $b + a_{i_1} + \dots + a_{i_n} = 0$ eşitliğini sağlayan $i_1, i_2, \dots, i_n \in V_0$; $b \in X, a_{i_t} \in \wp_{i_t}$ ($t = 1, 2, \dots, n$) bulunabilirse, δ zincir olduğu için $i_1, i_2, \dots, i_n$ indislerini kapsayan bir $V \in \beta$ mevcuttur. Öyleyse $b = a_{i_1} = \dots = a_{i_n} = 0$ olur. Buradan $V_0 \in \beta$ dır. V_0 in δ nin üst sınırı olduğu açıktır. Zorn Lemmasına göre β nin bir J maksimal elemanı bulunur. $X_1 = X \oplus (\oplus_{j \in J} \wp_j)$ olsun. Herhangi bir $c \in T$ elemanını alalım. J nin maksimalliğinden $X_1 + \wp_c = X_1 \oplus \wp_c$ olamaz. O halde $X_1 \cap \wp_c \neq 0$ olur. $\wp_c$ basit modül olduğu için $X_1 \cap \wp_c = \wp_c$, yani $\wp_c \subseteq X_1$ bulunur. Böylece $\wp = \sum_{c \in T} \wp_c = X_1$ olur.

(ii) X , $\wp$ nin keyfi bir alt modülü olmak üzere (i) gereği $\wp = X \oplus (\oplus_{j \in J} \wp_j)$ eşitliğini sağlayan $J \subseteq T$ alt kümesi vardır. (i) yi $\oplus_{j \in J} \wp_j$ alt modülünde (X in yerine) yazarak $\wp = (\oplus_{i \in I} \wp_i) \oplus (\oplus_{j \in J} \wp_j)$ eşitliği elde edilir. O halde $X \cong \frac{\wp}{\oplus_{j \in J} \wp_j} \cong \oplus_{i \in I} \wp_i$ olur.

2.5.7. Teorem $\wp$ bir sol H -modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

i) $\wp$ nin $\wp_1 \leq \wp$ olacak şekildeki bütün alt modülleri için $\wp_1 = Des(\wp_1)$ dır;

ii) $\wp = Des(\wp)$ dir;

iii) $\wp$ nin basit alt modüllerinin direkt toplamı $\wp$ ye eşit olur;

iv) $\wp$ yarı basit modüldür (Alizade ve Pancar, 2016).

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) $\wp \leq \wp$ olduğundan (i) gereği $\wp = Des(\wp)$ dir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Yardımcı Teorem 2.5.6 da (i) yi ispatlarken kullandığımız X alt modülünü $X = 0$ olarak aldığımızda $\wp = \oplus_{j \in I} \wp_j$ bulunur.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Yardımcı Teorem 2.5.6 (i) gereği $\wp$ yarı basittir.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Herhangi bir $\wp_1 \leq \wp$ alt modül olmak üzere $Des(\wp_1) \leq \wp_1$ açık bir şekilde görülür. (iv) kabulünden $\wp = Des(\wp_1) \oplus \wp_2$ eşitliğini sağlayan bir $\wp_2 \leq \wp$ alt modülü vardır. Modüler kural gereği; $\wp_1 = (Des(\wp_1) + \wp_2) \cap \wp_1 = Des(\wp_1) + (\wp_2 \cap \wp_1)$ eşitliği bulunur. Buradan iki farklı olay ortaya çıkar:

1.olay. $\wp_2 \cap \wp_1 = 0$ ise $\wp_1 = Des(\wp_1)$ olur.

2.olay. $\wp_2 \cap \wp_1 \neq 0$ olsun. O halde $0 \neq c \in \wp_2 \cap \wp_1$ elemanı olsun. $Hc \leq \wp_2 \cap \wp_1$ devirli alt modülü için c yi kapsamayan bütün alt modüllerin kümesi X olsun:

$X = \{V \leq Hc \mid c \notin V\}$. $\leq$ alt modül bağıntısından X kümesi kısmi sıralı bir küme olacak şekilde dönüştürülür. $0 \in X$ olduğu için $X \neq \emptyset$ olur. X te bir $\{V_x\}_{x \in X}$ zincirini alarak Zorn Lemmasını uygulayabiliriz. Buradan $V_0 = \bigcup_{x \in X} V_x \leq Hc$ olur ve $c \notin V_0$ olduğu için $V_0 \in X$ bulunur. Zorn Lemmasına göre X te bir U maksimal elemanı vardır. Aslında U, Hc nin de maksimal alt modülü olur. Çünkü, $U \leq U^* \leq Hc$ koşulunu sağlayan bir U^* alt modülünü ele alalım, U nun X de maksimal olması için $U^* \notin X$ olmalıdır. Böylelikle $c \in U^*$ olur. O halde $U^* = Hc$ eşitliği bulunur. Şimdi (iv) gereği $U, \wp$ de direkt toplam terim olup buradan da Hc de direkt toplam terim olur. Şöyle ki, $Hc = U \oplus Y$ koşulunu sağlayan bir $Y \leq Hc \leq \wp_2 \cap \wp_1$ alt modülü bulunur. U, Hc de maksimal alt modül olduğu için Teorem 2.5.3 den $\frac{Hc}{U} \neq 0$ bölüm modülü basit modül olur. Öyleyse buna izomorf olan $Y \neq 0$ alt modülü de basit modül olur. Böylelikle $Y \subseteq Des(\wp_1) \cap (\wp_2 \cap \wp_1) = 0$ çelişkisi bulunur. Bu durumda yalnızca 1. olay gerçekleşebilir.

Bu teoreme bakıldığında, yarı basit modülleri basit modüllerin direkt toplamı olarak yazabildiğimiz için bir basit modülün ayrıca yarı basit modül olduğunu söyleyebiliriz.

$Des(\wp)$ nin tanımından basit alt modüllerin toplamı olduğu için yarı-basit olur. $\wp_1, \wp$ nin yarı basit alt modülü olmak üzere $\wp_1, i: \wp_1 \rightarrow \wp$ içerme dönüşümünde görüntüsü $Des(\wp)$ de kapsanır. Şöyle ki $Des(\wp), \wp$ nin yarı-basit olan en büyük alt modülü olur (Dung ve diğerleri, 1994).

2.5.8. *Sonuç* (i) Yarı basit modüllerin bütün alt modülleri de yarı basittir.

(ii) Yarı basit modüllerin her homomorfik görüntüsü de yarı basit modüldür.

(iii) Yarı basit modüllerin keyfî sayıdaki toplamaları da yarı basittir (Kasch, 1982).

İspat (i) $\wp_1 \leq \wp$ keyfi bir alt modülü olmak üzere $\wp_2 \leq \wp_1$ olsun. Buradan $\wp_2 \leq \wp$ olur ve $\wp$ yarı basit olduğuna göre $\wp = \wp_2 \oplus \wp_3$ eşitliğini sağlayan $\wp_3 \leq \wp$ alt modülü bulunur. Modüler kural gereği;

$$\wp_1 = \wp \cap \wp_1 = (\wp_2 \oplus \wp_3) \cap \wp_1 = \wp_2 \oplus (\wp_3 \cap \wp_1)$$

olur ve $\wp_1$ yarı basit olur.

(ii) $\wp$ yarı basit modül ve $f: \wp \rightarrow \wp_1$ epimorfizma olmak üzere Teorem 2.5.7 den $\wp = \sum_{i \in I} T_i$ şeklinde basit alt modüllerin toplamı olarak yazılır. Her $i \in I$ olmak üzere T_i basit modüller olduğu için $f(T_i)$ basit ya da $f(T_i) = 0$ olur. $\wp_1 = f(\wp) = \sum_{i \in I} f(T_i)$ olduğu için $\wp_1$ bazı basit alt modüllerin toplamına eşit olur. Sonuç olarak Teorem 2.5.7 den $\wp_1$ yarı basit olur.

(iii) $\wp$ yarı basit modüllerin toplamı olmak üzere $\wp = Des(\wp)$ olur. Bütün yarı basit modüller basit modüllerin toplamına eşit olduğu için $\wp$ basit modüllerin toplamı şeklinde yazılabilir. Böylece $\wp$ yarı basit olur.

2.6. Büyük Alt Modüller

2.6.1. Tanım $\wp$ bir H -modül ve $0 \neq \wp_1 \leq \wp$ olmak üzere şayet $\wp$ nin sıfırdan farklı bütün $\wp_2$ alt modülleri için $\wp_1 \cap \wp_2 \neq 0$ oluyorsa, başka bir deyişle, $\wp_1 \cap \wp_2 = 0$ olması için $\wp_2 = 0$ olmasını gerektiriyorsa, $\wp_1$ e $\wp$ nin *büyük (essential) alt modülü* denir ve $\wp_1 \trianglelefteq \wp$ şeklinde gösterilir. Burada $\wp$ ye de $\wp_1$ in *büyük genişlemesi* denir (Anderson ve Fuller, 1992).

$\mathbb{Z}$ nin sıfır hariç bütün alt modülleri büyük alt modüldür. Keyfi $0 \neq \wp \leq \mathbb{Z}$ alt modülünü göz önüne alalım. Bu durumda $\wp = n\mathbb{Z}$ olacak şekilde $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ vardır. $\wp_1 \leq \mathbb{Z}$ olmak üzere $\wp \cap \wp_1 = 0$ olsun. Eğer $\wp_1 \neq 0$ olursa, $\wp_1 = t\mathbb{Z}$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir t tamsayısı vardır. Buradan $0 \neq nt \in \wp \cap \wp_1 = 0$ çelişkisi elde edilir. O halde $\wp_1 = 0$ olur. Dolayısıyla $\wp \trianglelefteq \mathbb{Z}$ olur. Bu ise $\mathbb{Z}$ nin sıfır hariç bütün alt modüllerinin büyük alt modül olduğu anlamına gelir.

2.6.2. Önerme $\wp_2$ ve $\wp_1$, $\wp$ nin alt modülleri olmak üzere;

i) $\wp_1 \trianglelefteq \wp$ olması için gerek ve yeter koşul her $0 \neq a \in \wp$ için $\wp_1 \cap Ha \neq 0$ olmasıdır.

- ii) $\wp_2 \leq \wp_1$ verilsin. $\wp_2 \trianglelefteq \wp$ olması için gerek ve yeter koşul $\wp_2 \trianglelefteq \wp_1$ ve $\wp_1 \trianglelefteq \wp$ olmasıdır.
- iii) Eğer $\wp_1 \trianglelefteq \wp$ ise $\wp_1 \cap \wp_2 \trianglelefteq \wp_2$ dir.
- iv) $\wp_2 \trianglelefteq \wp$ ve $\wp_1 \trianglelefteq \wp$ olması için gerek ve yeter koşul $\wp_1 \cap \wp_2 \trianglelefteq \wp$ olmasıdır.
- v) $\wp_2 \subset \wp_1$ verilsin. Eğer $\frac{\wp_1}{\wp_2} \trianglelefteq \frac{\wp}{\wp_2}$ ise $\wp_1 \trianglelefteq \wp$ dir (Dung ve diğerleri, 1994).

2.6.3. Önerme H bir halka olsun. H nin büyük ideallerinin tamamının kümesini $X(H)$ ile gösterelim. Bu takdirde;

- i) $H \in X(H)$,
- ii) Eğer $\wp_1 \leq \wp_1 \leq H$ ve $\wp_1 \in X(H)$ ise $\wp \in X(H)$,
- iii) Eğer $\wp_1, \wp \in X(H)$ ise $\wp_1 \cap \wp \in X(H)$,
- iv) Eğer $\wp_1 \in X(H)$ ve $h \in H$ ise $h^{-1}\wp_1 \in X(H)$ dir (Goodearl, 1976).

2.6.4. Tanım $f: \wp \rightarrow \wp_1$ monomorfizma olsun. Eğer $\text{Gör} f \trianglelefteq \wp_1$ ise, f homomorfizmasına *büyük monomorfizma* denir (Kasch, 1982).

2.6.5. Tanım $\wp$ modül ve I injektif modül olmak üzere I ya, $f: \wp \rightarrow I$ büyük monomorfizması ile birlikte $\wp$ nin *injektif bürümü* denir. $\wp$ modülünün injektif bürümü $E(\wp)$ şeklinde gösterilir (Wisbauer, 1991).

2.6.6. Tanım $\wp$ bir H -modül olmak üzere $\wp_1 \leq \wp$ alt modülü $\wp$ de bir öz büyük genişlemeye sahip değilse $\wp_1 \leq \wp$ alt modülüne $\wp$ de *kapalıdır* denir. Yani, eğer $\wp_1 \trianglelefteq \wp_2$ olacak şekilde $\wp_2 \leq \wp$ alt modülü alınırsa $\wp_1 = \wp_2$ dir (Dung ve diğerleri, 1994).

2.7. Küçük Alt Modüller

2.7.1. Tanım H halka ve $\wp$ bir H -modül olsun. $\wp$ modülünün $\wp_1 < \wp$ öz alt modülü ve $\wp_2 \leq \wp$ alt modülü olsun. $\wp = \wp_1 + \wp_2$ eşitliği sağlandığında $\wp_2 = \wp$ oluyorsa, $\wp_1$ ye $\wp$ nin *küçük alt modülü* denir ve $\wp_1 \ll \wp$ şeklinde gösterilir (Wisbauer, 1991).

$\wp \neq 0$ olsun. Bu durumda $0 \ll \wp$ olur.

2.7.2. Önerme (Küçük Alt Modüllerin Özellikleri)

- i) $\wp$ modül ve $\wp_2 < \wp_1 \leq \wp$ olsun. Şayet $\wp_1 \ll \wp$ olması durumunda $\wp_2 \ll \wp$ dir,

- ii) $\wp$ modül ve $\wp_2 < \wp_1 \leq \wp$ olmak üzere $\wp_2 \ll \wp_1$ ise, $\wp_2$ ve $\wp_2$ nin alt modülleri $\wp_1$ alt modülünü içeren $\wp$ modülünün alt modüllerinde küçük olur,
- iii) $\wp$ modül, $K_1, K_2, \dots, K_n, \wp_1, \wp_2, \dots, \wp_n, D$ modülünün alt modülleri olmak üzere her $i = 1, 2, \dots, n$ için $K_i \ll \wp_i$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $K_1 + K_2 + \dots + K_n \ll \wp_1 + \wp_2 + \dots + \wp_n$ dir,
- iv) $\wp$ ve $\wp_1$ birer H -modül olmak üzere $f: \wp \longrightarrow \wp_1$ bir homomorfizma olsun. $\wp_2 \ll \wp$ olması durumunda $f(\wp_2) \ll \wp_1$ olur,
- v) $\wp$ modül, $\wp_1 \leq \wp, \wp_2 \leq \wp_1$ ve $\wp_1, \wp$ nin direkt toplam terimi olmak üzere $\wp_2 \ll \wp_1$ olması için gerek ve yeter koşul $\wp_2 \ll \wp$ olmasıdır,
- vi) $\wp_1 \leq \wp$ alt modülü $\wp$ nin hem küçük alt modülü hem de direkt toplam terimi olması için $\wp_1 = 0$ olmalıdır.
- vii) $\frac{\wp}{\wp_1}$ sonlu üretilmiş bölüm modülü ve $\wp_1 \ll \wp$ oluyorsa, $\wp$ modülü sonlu üretilmiştir (Wisbauer, 1991).

Önerme 2.7.2 (vi) den yarı basit modüllerin sadece sıfır alt modülü küçük alt modülüdür, sıfırdan başka alt modülleri küçük alt modülü olamaz. $0 \neq c \in \mathbb{Z}$ için $c\mathbb{Z} + d\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ eşitliğini sağlayan $d\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$ öz ideali var olduğundan ${}_Z\mathbb{Z}$ nin sadece sıfır alt modülü küçük alt modülü olur.

$\mathbb{Z}_4$ $\mathbb{Z}$ -modülünün alt modülleri; $\{\bar{0}\} \longrightarrow \{\bar{0}, \bar{2}\} \longrightarrow \mathbb{Z}_4$ olduğu için $\mathbb{Z}_4$ ün bütün öz alt modülleri küçüktür.

2.8. Küçük Modül

2.8.1. Tanım H halka ve $\wp$ bir H -modül olmak üzere $\wp$ herhangi bir modülün küçük alt modülü oluyorsa $\wp$ modülüne *küçük modül* denir (Leonard, 1966).

2.8.2. Teorem $E(\wp)$, $\wp$ modülünün injektif bürümü olsun. $\wp$ nin küçük modül olması için gerek ve yeter koşul $\wp$ modülü $E(\wp)$ nin küçük alt modülüdür (Leonard, 1966).

İspat ($\Leftarrow$) $\wp$ modülü $E(\wp)$ nin küçük alt modülü olsun. Tanım 2.8.1 gereği $\wp$ küçük modüldür.

($\Rightarrow$) $\wp$ modülü $\wp_1$ modülünün küçük alt modülü olsun. O halde $\wp < \wp_1 < E(\wp_1)$ dir.

Önerme 2.7.2 (ii) den $\wp \ll E(\wp_1)$ olur. $E(\wp)$ nin $\wp + \wp_2 = E(\wp)$ olacak şekilde bir $\wp_2$

alt modülü olsun. $E(\wp)$ injektif bürüm olduğundan $E(\wp_1)$ in direkt toplam terimidir ve $\wp < E(\wp)$ olur. Önerme 2.7.2 (v) den $\wp \ll E(\wp)$ dir.

2.9. Bir Modülün Radikali

2.9.1. Tanım H halka ve $\wp$ bir H -modül olmak üzere $\wp$ modülünün bütün maksimal alt modüllerinin kesişimine $\wp$ modülünün *radikali* denir. $\wp$ nin radikali $Rad(\wp)$ şeklinde gösterilir. $\wp$ modülünün maksimal alt modülü mevcut değilse, $Rad(\wp) = \wp$ şeklinde modülün kendisi olarak tanımlanır. Bu durumda, $\wp$ modülüne *radikal modül* denir (Clark ve diğerleri, 2006).

$\wp$ nin bütün radikal alt modüllerinin toplamı $P(\wp)$ şeklinde gösterilir. $P(\wp) = \sum_{\substack{\wp_1 \leq \wp \\ \wp_1 = Rad(\wp_1)}} \wp_1$ şeklindedir (Lomp, 1999).

${}_Z\mathbb{Q}$ modülünün maksimal alt modülü olmadığından $Rad({}_Z\mathbb{Q}) = {}_Z\mathbb{Q}$ olur. $\cap_{p \in P} p\mathbb{Z} = 0$ olduğu için $Rad({}_Z\mathbb{Z}) = \cap_{p \in P} p\mathbb{Z} = 0$ dir. Diğer taraftan $Rad({}_Z\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ olur.

2.9.2. Yardımcı Teorem H halka ve $\wp$ bir H -modül olmak üzere $d \in \wp$ elemanı için Hd devirli modülünün $\wp$ nin küçük alt modülü olmaması için gerek ve yeter koşul $d \notin \wp_1$ şartını sağlayan $\wp_1 < \wp$ maksimal alt modülünün bulunmasıdır (Kasch, 1982).

İspat ($\Leftarrow$) $d \notin \wp_1$ olmak üzere $\wp_1 < \wp$ maksimal alt modülü olsun. $\wp_1$ maksimal olduğu için Önerme 2.3.11 gereği $\wp_1 + Hd = \wp$ olur. Bu durumda Hd , $\wp$ modülünde küçük değildir.

($\Rightarrow$) Hd , $\wp$ de küçük olmadığını kabul edelim. $X = \{T | T \not\leq \wp, Hd + T = \wp\}$ şeklinde X kümesini belirtelim. Kabulümüzden $\wp_2 \in X$ olur ve $X \neq \emptyset$ dir. X , kapsama bağıntısına bağlı olarak sıralı bir küme olur. Y , X kümesinin tam sıralı bir alt kümesi olmak üzere $T_0 = \bigcup_{T \in Y} T$, Y tam sıralı kümesinin bir üst sınırı olur ve $d \notin T_0$ olur. $d \in T_0$ olursa $d \in T$ olması için bir $T \in Y$ bulunur ve $Hd \leq T$ olur. Bu da $T = Hd + T = \wp$ çelişmesini oluşturur. Bu durumda $T_0 < D$ öz alt modülü olur. $T \in Y$ için $T \leq T_0$ olup $Hd + T_0 = \wp$ olur. Sonuç olarak $T_0 \in X$ bulunur. Buradan Y , X kümesinin bir üst sınırına sahip olur ve Zorn Lemmasından X kümesi bir $\wp_1$ maksimal elemanını kapsar. Son olarak $\wp_1$ in $\wp$ de maksimal alt modül olduğunu gösterelim.

$\wp_1 \not\leq \wp_2 \leq \wp$ olmak üzere $\wp_1$, X te maksimal olduğu için $\wp_2 \notin X$ olur. $\wp = Hd + \wp_1 \leq Hd + \wp_2 \leq \wp$ olduğu için $Hd + \wp_2 = \wp$ olur ve $\wp_2 \notin X$ olduğundan $\wp_2 = \wp$ eşitliği bulunur. Bu da $\wp_1$ in maksimal alt modül olduğunu gösterir.

2.9.3. *Sonuç* H halka, $\wp$ bir H -modül olmak üzere $a \in \wp$ olsun. $Ha \ll \wp$ olması için gerek ve yeter koşul $a \in \text{Rad}(\wp)$ olmasıdır (Wisbauer, 1991).

2.9.4. *Teorem* $\wp$ modül olmak üzere $\wp$ modülünün bütün öz alt modülleri bir maksimal alt modül ile kapsıyor ise, $\text{Rad}(\wp) \ll \wp$ olur (Wisbauer, 1991).

İspat $\text{Rad}(\wp) + \wp_1 = \wp$ koşulunu sağlayan bir $\wp_1$ alt modül olmak üzere $\wp_1 \neq \wp$ olsun. Hipotezden $\wp_1$, $\wp$ nin bir $\wp_2$ maksimal alt modülü ile kapsanır. O halde $\wp_1 \leq \wp_2$ ve $\text{Rad}(\wp) \leq \wp_2$ olduğu için $\wp = \text{Rad}(\wp) + \wp_1 \leq \wp_2$ bulunur. Bu da $\wp = \wp_2$ çelişkisini oluşturur. Öyleyse $\wp_1 = \wp$ olur ve $\text{Rad}(\wp) \ll \wp$ olur.

2.9.5. *Sonuç* $\wp$ sonlu üretilmiş modül olmak üzere $\text{Rad}(\wp) \ll \wp$ olur (Wisbauer, 1991).

İspat $\wp$ sonlu üretilmiş modül olsun. O halde $\wp$ nin bütün öz alt modülleri için her birini kapsayan bir maksimal alt modül vardır. Bundan dolayı Teorem 2.9.4 den $\text{Rad}(\wp) \ll \wp$ olur.

2.9.6. *Teorem* H halka ve $\wp$ bir H -modül olmak üzere, $\text{Rad}(\wp) = \sum_{\wp_1 \ll \wp} \wp_1$ olur (Wisbauer, 1991).

İspat Keyfi $a \in \text{Rad}(\wp)$ elemanı olsun. Sonuç 2.9.3 gereği $Ha \ll \wp$ olur ve $a \in Ha \leq \sum_{K \ll \wp} K$ dır. Buradan $\text{Rad}(\wp) \subseteq \sum_{K \ll \wp} K$ elde edilir.

Tersine; $a \in \sum_{K \ll \wp} K$ herhangi bir elemanı olsun. $\wp_1$, $\wp$ nin maksimal alt modülü ve $a \notin \wp_1$ olduğunu var sayalım. Bu durumda $\wp = Ha + \wp_1$ olur. $a \in \sum_{K \ll \wp} K$ olduğu için $a = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ olacak şekilde $b \in K_i \ll \wp$ ($i = 1, 2, \dots, n$) koşulunu sağlayan $K_i \leq \wp$ alt modülleri bulunur ve $Ha \subseteq Hb_1 + Hb_2 + \dots + Hb_n \leq B_1 + B_2 + \dots + B_n$ olur. Ayrıca Önerme 2.7.2 (i) ve (iii) gereği Ha ve $K_1 + K_2 + \dots + K_n$, $\wp$ nin küçük alt modülleri olur. $Ha \ll \wp$ ve $\wp = Ha + \wp_1$ olduğu için $\wp = \wp_1$ çelişkisi bulunur. Bundan dolayı $\sum_{K \ll \wp} K \subseteq \text{Rad}(\wp)$ olup $\text{Rad}(\wp) = \sum_{K \ll \wp} K$ eşitliği sağlanır.

2.9.7. *Önerme* $\wp$ rastgele bir modül olmak üzere $\text{Rad}(P(\wp)) = P(\wp)$ olur (Lomp, 1999).

2.9.8. Teorem (Radikal Modüllerin Özellikleri) H halka ve $\wp$ bir H -modül olmak üzere;

i) $Rad(\wp/Rad(\wp)) = 0$ dir,

ii) $\wp_1 \leq \wp$ ise, $Rad(\wp_1) \leq Rad(\wp)$ dir,

iii) $\wp_1$ bir H -modül olsun. Bu durumda her $f \in Hom(\wp, \wp_1)$ için $f(Rad(\wp)) \leq Rad(\wp_1)$ dir. Eğer $\wp_1 \leq Rad(\wp)$ ise, $f(Rad(\wp)) = Rad(f(\wp))$ dir. Özel olarak her $f \in End(\wp)$ için $f(Rad(\wp)) \leq Rad(\wp)$ dir,

iv) $\wp_1 \leq \wp$ iken $\frac{\wp_1 + Rad(\wp)}{\wp_1} \leq Rad(\frac{\wp}{\wp_1})$ ve $\wp_1 \leq Rad(\wp)$ ise $Rad(\frac{\wp}{\wp_1}) = \frac{Rad(\wp)}{\wp_1}$ dir,

v) $\wp = \bigoplus_{i \in I} \wp_i$ ise, $Rad(\wp) = \bigoplus_{i \in I} Rad(\wp_i)$ ve $\frac{\wp}{Rad(\wp)} \cong \bigoplus_{i \in I} (\frac{\wp_i}{Rad(\wp_i)})$ dir,

vi) $\wp$ modülünün radikal modül olması için gerek ve yeter koşul $\wp$ nin bütün sonlu üretilmiş $\wp_1$ öz alt modülünde $\wp_1 \ll \wp$ olmalıdır,

vii) $\wp_2 \leq \wp_1 \leq \wp$ olsun. $\wp_2 \subseteq Rad(\wp)$ ve $\wp_1, \wp$ nin direkt toplam terimi olmak üzere $\wp_2 \subseteq Rad(\wp_1)$ olur,

viii) $\wp$ modülü yarı basit modül olmak üzere $Rad(\wp) = 0$ olur (Kasch, 1982; Wisbauer, 1991).

3. MATERİYAL VE YÖNTEM

3.1. Yerel ve Yarıyerel Modüller

3.1.1. Tanım $\wp$ bir modül olmak üzere $\wp$ nin bütün öz alt modüllerinin toplamı tekrar $\wp$ nin öz alt modülü oluyorsa $\wp$ modülüne *yerel modül* denir. $p \in \mathbb{P}$ ve $k \geq 1$ olmak üzere $\mathbb{Z}_{p^k}$ yerel $\mathbb{Z}$ -modüldür (Wisbauer, 1991).

3.1.2. Tanım H birimli halka olmak üzere ${}_H H$ yerel modül olsun. Bu durumda H ye *yerel halka* denir (Wisbauer, 1991).

Cisimlerde maksimal ideal sadece 0 (sıfır) olduğundan bütün cisimler yerel halkadır.

$\mathbb{Z}_6$ halkasının ideallerinin hepsi $\mathbb{Z}_6$, $\langle \bar{0} \rangle$, $\langle \bar{2} \rangle$ ve $\langle \bar{3} \rangle$ olduğundan maksimal idealleri $\langle \bar{2} \rangle$ ve $\langle \bar{3} \rangle$ olup $\mathbb{Z}_6$ halkası yerel olmaz. $p \in \mathbb{P}$ ve $k \geq 1$ olur ise $\mathbb{Z}_{p^k}$ yerel halka olur.

3.1.3. Tanım H halka ve $\wp$ bir H -modül olmak üzere $\frac{\wp}{Rad(\wp)}$ yarı basit oluyorsa, $\wp$ modülüne *yarıyerel modül* denir. H halkası sol (sağ) H -modül olmak üzere yarı yerel oluyorsa, H halkasına *yarıyerel halka* denir (Facchini, 1998).

3.1.4. Teorem H halkasının yarıyerel olması için gerek ve yeter koşul bütün sol H -modüllerin yarıyerel olmasıdır (Lomp, 1999).

3.1.5. Teorem (i) Yarıyerel modülün bölüm modülü de yarıyerel olur.

(ii) $\{\wp_i \mid i \in I\}$ yarıyerel modüllerin ailesi olmak üzere $\wp = \bigoplus_{i \in I} \wp_i$ yarıyerel olur (Kasch, 1982).

İspat (i) $\wp$ yarıyerel modül olmak üzere $f: \wp \rightarrow \wp_1$ epimorfizması olsun. Bu durumda, her $c + Rad(\wp) \in \frac{\wp}{Rad(\wp)}$ olmak üzere $\bar{f}(c + Rad(\wp)) = f(c) + Rad(\wp)$ şeklinde tanımlı $\bar{f}: \frac{\wp}{Rad(\wp)} \rightarrow \frac{\wp_1}{Rad(\wp_1)}$ dönüşümü epimorfizmadır. $\wp$ yarı yerel olduğu için $\frac{\wp}{Rad(\wp)}$ yarı basit olur ve Sonuç 2.5.8 (ii) den $\frac{\wp_1}{Rad(\wp_1)}$ yarı basit olur. Böylelikle $\wp_1$ yarıyerel olur.

(ii) Her $i \in I$ olmak üzere $\frac{\wp_i}{\text{Rad}(\wp_i)}$ yarı basit olur. Teorem 2.9.8 (v) ve Sonuç 2.5.8 (iii) ten $\frac{\wp}{\text{Rad}(\wp)} \cong \bigoplus_{i \in I} \left(\frac{\wp_i}{\text{Rad}(\wp_i)} \right)$ yarı basit olur ve $\wp$ yarıyereldir.

3.1.6. Teorem H yarıyerel halka olmak üzere $\wp$ keyfi bir sol H -modül olsun. Bu durumda,

(i) $\wp$ yarıyerel olur.

(ii) $\text{Rad}(\wp) = \text{Rad}(H)\wp$ dir (Kasch, 1982).

İspat (i) $\wp$ H -üretilmiş olduğu için I boş kümeden farklı olan bir indis kümesi olsun. Bu durumda $f: H^{(I)} \rightarrow \wp$ epimorfizması bulunur. H yarıyerel olduğu için Teorem 3.1.5 (ii) gereği $H^{(I)}$ sol yarıyerel H -modüldür. Dolayısıyla Teorem 3.1.5 (i) den $\wp$ yarıyerel olur.

(ii) Teorem 2.9.8 (i) gereği $\text{Rad}(H)\wp \leq \text{Rad}(\wp)$ olur. H yarıyerel olduğu için $\frac{H}{\text{Rad}(H)}$ yarı basit halka olur. Bundan dolayı $\frac{\wp}{\text{Rad}(H)\wp}$ bir sol $\frac{H}{\text{Rad}(H)}$ - modül olur ve $\frac{\wp}{\text{Rad}(H)\wp}$ yarı basit olur. Böylece $\text{Rad}\left(\frac{\wp}{\text{Rad}(H)\wp}\right) = 0$ olur ve $\text{Rad}(H)\wp \subseteq \text{Rad}(\wp)$ olduğu için Teorem 2.9.8 (iv) ten $0 = \text{Rad}\left(\frac{\wp}{\text{Rad}(H)\wp}\right) = \frac{\text{Rad}(\wp)}{\text{Rad}(H)\wp}$ olur. Buradan da $\text{Rad}(\wp) = \text{Rad}(H)\wp$ eşitliği bulunur.

3.2. Tümlenmiş, Zayıf Tümlenmiş ve Rad-Tümlenmiş Modüller

3.2.1. Tanım $\wp$ modül ve $\wp_1 \leq \wp$ olmak üzere $\wp = \wp_1 + \wp_2$ eşitliğini sağlayan bir $\wp_2$ alt modülü var ve bu koşula göre $\wp_2$ minimal ise, başka bir deyişle $\wp_1 + \wp_3 = \wp$ eşitliğini sağlayan bütün $\wp_3 \leq \wp_2$ için $\wp_3 = \wp_2$ oluyorsa, $\wp_2$ ye $\wp$ de $\wp_1$ in *tümleyeni* denir. Burada $\wp_1$ e $\wp$ de *tümleyene sahiptir* denir (Wisbauer, 1991).

$\wp$ modül ve $\wp_1 \ll \wp$ olmak üzere, küçük alt modül tanımına bakılarak $\wp$, $\wp_1$ alt modülünün tümleyeni olduğu görülür. Bu yüzden modülün sıfırının tümleyeni sadece kendisi olur.

3.2.2. Önerme $\wp$ modül olmak üzere $\wp_1, \wp_2 \leq \wp$ alt modülleri olsun. $\wp_2$ alt modülünün $\wp$ de $\wp_1$ in tümleyeni olması için gerek ve yeter koşul $\wp = \wp_1 + \wp_2$ ve $\wp_1 \cap \wp_2 \ll \wp_2$ koşullarını sağlamasıdır (Wisbauer, 1991).

İspat ($\Rightarrow$) $\wp_2$ alt modülü, $\wp_1$ in $\wp$ de bir tümleyeni olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\wp = \wp_1 + \wp_2$ olur. Herhangi bir $\wp_3 \leq \wp_2$ alt modülü için $\wp_2 = (\wp_1 \cap \wp_2) + \wp_3$ olsun. Böylece $\wp = \wp_1 + \wp_2 = \wp_1 + (\wp_1 \cap \wp_2) + \wp_3 = \wp_1 + \wp_3$ olur ve $\wp_2$, $\wp_1$ in tümleyeni olduğu için $\wp_3 = \wp_2$ bulunur. Bu yüzden $\wp_1 \cap \wp_2 \ll \wp_2$ olur.

($\Leftarrow$) $\wp = \wp_1 + \wp_2$ ve $\wp_1 \cap \wp_2 \ll \wp_2$ olduğunu kabul edelim. Herhangi bir $\wp_3 \leq \wp_2$ için $\wp = \wp_1 + \wp_3$ oluyorsa, Modüler kural gereği; $\wp_2 = (\wp_1 \cap \wp_2) + \wp_3$ olur ve $\wp_1 \cap \wp_2 \ll \wp_2$ olduğu için $\wp_3 = \wp_2$ bulunur. Dolayısıyla $\wp_2$, $\wp_1$ in $\wp$ de tümleyeni olur.

$\wp$ modül ve $\wp_1 \leq \wp$ alt modülü olmak üzere $\wp_1$, $\wp$ nin bir direkt toplam terimi ise, $\wp = \wp_1 + \wp_2$ ve $\wp_1 \cap \wp_2 = 0$ koşullarını sağlayan $\wp_2 \leq \wp$ alt modülü bulunur. $\wp_1 \cap \wp_2 = 0 \ll \wp_1$ ve $\wp_1 \cap \wp_2 = 0 \ll \wp_2$ olduğu için Önerme 3.2.2 den $\wp_1$ ve $\wp_2$, $\wp$ modülünün tümleyen alt modülleri olur.

3.2.3. Teorem (Tümleyen Alt Modülün Özellikleri) H bir halka ve $\wp$ bir H -modül olmak üzere $\wp_1$ ve $\wp_2$, $\wp$ nin alt modülleri olsun. $\wp_2$, $\wp_1$ in tümleyeni ise,

- (i) $\wp$ sonlu üretilmiş olduğunda $\wp_2$ de sonlu üretilmiştir.
- (ii) $\wp_1$, $\wp$ nin maksimal alt modülü olduğunda $\wp_2$ yerel ve $Rad(\wp_2) = \wp_1 \cap \wp_2$ olur.
- (iii) $\wp_3 \ll \wp$ ise $\wp_3 \cap \wp_2 \ll \wp_2$ olur ve $Rad(\wp_2) = \wp_2 \cap Rad(\wp)$ olur.
- (iv) $\wp_3 \leq \wp$ için $\frac{\wp_2 + \wp_3}{\wp_3}$, $\frac{\wp}{\wp_3}$ de $\frac{\wp_1}{\wp_3}$ bölüm modülünün tümleyeni olur (Wisbauer, 1991).

İspat i) $\wp$ sonlu üretilmiş olmak üzere $\wp = \wp_1 + \wp_2$ ve $\wp_1 \cap \wp_2 \ll \wp_2$ olsun. Buna göre $\frac{\wp}{\wp_1}$ de sonlu üretilmiş olur. Öyleyse $\frac{\wp}{\wp_1} = \frac{\wp_1 + \wp_2}{\wp_1} \cong \frac{\wp_2}{\wp_1 \cap \wp_2}$ sonlu üretilmiştir. $\wp_1 \cap \wp_2 \ll \wp_2$ olduğu için Önerme 2.7.2 (vii) gereği $\wp_2$ sonlu üretilmiş olur.

(ii) $\wp_1$, $\wp$ nin maksimal alt modülü olsun. Bu durumda $\frac{\wp}{\wp_1}$ basittir. Öyleyse

$$\frac{\wp}{\wp_1} = \frac{\wp_1 + \wp_2}{\wp_1} \cong \frac{\wp_2}{\wp_1 \cap \wp_2}$$

basit olur ve devirlidir. $\wp_1 \cap \wp_2 \ll \wp_2$ olduğu için Önerme 2.7.2 (vii) gereği $\wp_2$ devirlidir.

$\frac{\wp_2}{\wp_1 \cap \wp_2}$ basit olduğu için Teorem 2.5.3 gereği $\wp_1 \cap \wp_2$, $\wp_2$ nin maksimal alt modülü olur.

$Rad(\wp_2) \leq \wp_1 \cap \wp_2$ olduğu açıktır. Tersine $\wp_1 \cap \wp_2 \ll \wp_2$ olduğu için Teorem 2.9.6 gereği $\wp_1 \cap \wp_2 \leq Rad(\wp_2)$ olur. Böylece $Rad(\wp_2) = \wp_1 \cap \wp_2$ olur ve $\wp_2$ nin tek maksimal alt modülü $\wp_1 \cap \wp_2$ dir.

(iii) $\wp_3 \ll \wp$ ve $\wp_4 \leq \wp_2$ olmak üzere $(\wp_3 \cap \wp_2) + \wp_4 = \wp_2$ olsun. $\wp = \wp_1 + \wp_2$ den $\wp = \wp_1 + (\wp_3 \cap \wp_2) + \wp_4$ olur ve $\wp_3 \cap \wp_2 \leq \wp_3 \ll \wp$ olduğunda $\wp_3 \cap \wp_2 \ll \wp$ bulunur. Buradan $\wp = \wp_1 + \wp_4$ eşitliği sağlanır. $\wp_2$ nin minimal olmasından dolayı $\wp_4 = \wp_2$ dir. Yani $\wp_3 \cap \wp_2 \ll \wp_2$ olur. $\wp_3 \ll \wp$ ve $\wp_3 \cap \wp_2 \ll \wp_2$ olduğu için Teorem 2.9.6 gereği $Rad(\wp) \cap \wp_2 \subseteq Rad(\wp_2)$ bulunur.

Tersine $t \in Rad(\wp_2)$ herhangi bir elemanı olmak üzere Sonuç 2.9.3 ten $Ht \ll \wp_2$ olur. Buradan $Ht \ll \wp$ bulunur ve yine Sonuç 2.9.3 ten $t \in Rad(\wp)$ olur. Böylece $t \in \wp_2 \cap Rad(\wp)$ bulunur. Dolayısıyla $Rad(\wp_2) \subseteq \wp_2 \cap Rad(\wp)$ olur. Sonuç olarak $Rad(\wp_2) = \wp_2 \cap Rad(\wp)$ olur.

(iv) $\wp_3 \leq \wp_1$ olduğunda $\wp = \wp_1 + \wp_2$ için $\frac{\wp}{\wp_3} = \frac{\wp_1}{\wp_3} + \frac{\wp_2 + \wp_3}{\wp_3}$ eşitliğini yazabiliriz.

Modüler kuraldan $\wp_1 \cap (\wp_2 + \wp_3) = (\wp_1 \cap \wp_2) + \wp_3$ olur. Bundan dolayı $\frac{\wp_1}{\wp_3} \cap$

$\frac{\wp_2 + \wp_3}{\wp_3} = \frac{\wp_1 \cap (\wp_2 + \wp_3)}{\wp_3} = \frac{(\wp_1 \cap \wp_2) + \wp_3}{\wp_3}$ eşitliği sağlanır. $\wp_1 \cap \wp_2 \ll \wp_2$ olduğu için

$\frac{(\wp_1 \cap \wp_2) + \wp_3}{\wp_3} \ll \frac{\wp_2 + \wp_3}{\wp_3}$ olur ve $\frac{\wp}{\wp_3}$ de $\frac{\wp_1}{\wp_3}$ ün tümleyeni $\frac{\wp_2 + \wp_3}{\wp_3}$ olarak bulunur.

3.2.4. Tanım $\wp$ bir modül olmak üzere $\wp$ nin bütün alt modüllerinin tümleyeni varsa, $\wp$ ye *tümlenmiş modül* denir (Wisbauer, 1991).

3.2.5. Tanım $\wp$ bir modül ve $\wp_1, \wp_2 \leq \wp$ alt modülleri olsun. $\wp = \wp_1 + \wp_2$ ve $\wp_1 \cap \wp_2 \ll \wp$ oluyorsa, $\wp_2$ alt modülüne $\wp$ modülünde $\wp_1$ in *zayıf tümleyeni* denir (Clark ve diğerleri, 2006).

3.2.6. Tanım $\wp$ modülünün bütün alt modüllerinin zayıf tümleyeni bulunuyorsa, $\wp$ ye *zayıf tümlenmiş modül* denir (Clark ve diğerleri, 2006).

3.2.7. Teorem $\wp$ bir modül olmak üzere $\wp$ tümlenmiş modül ise, $\wp$ modülünün bütün bölüm modülleri de tümlenmiştir (Wisbauer, 1991).

İspat $\wp$ tümlenmiş bir modül ve $\wp_1 \leq \wp_2 \leq \wp$ alt modülleri olsun. $\wp$ tümlenmiş olduğu için $\wp_2 + \wp_3 = \wp$ ve $\wp_2 \cap \wp_3 \ll \wp_2$ şartlarını sağlayan $\wp_3 \leq \wp$ alt modülü bulunur.

Teorem 3.2.3 (iv) den $\frac{\wp_3 + \wp_1}{\wp_1}$, $\frac{\wp_2}{\wp_1}$ in $\frac{\wp}{\wp_1}$ de tümleyeni olur ve $\frac{\wp}{\wp_1}$ bölüm modülü tümlenmiştir.

3.2.8. Teorem $\wp$ bir modül olsun. $\wp$ tümlenmiş modül ise, $\wp$ yarıyerel modüldür (Wisbauer, 1991).

İspat $\wp$ tümlenmiş modül olsun. Teorem 3.2.7 den $\frac{\wp}{Rad(\wp)}$ de tümlenmiş olur. Teorem 2.9.8 (i) den $Rad(\frac{\wp}{Rad(\wp)}) = 0$ olduğu için bütün alt modülleri bir direkt toplam terimi olur ve yarı basittir. Bundan dolayı $\wp$ yarıyerel modüldür.

3.2.9. Tanım $\wp$ bir modül ve $\wp_1 \leq \wp$ alt modülü olsun. $\wp = \wp_1 + \wp_2$ ve $\wp_1 \cap \wp_2 \leq Rad(\wp_2)$ koşullarını sağlayan $\wp$ nin bir $\wp_2$ alt modülü bulunuyorsa, $\wp_2$ ye $\wp_1$ in *Rad-tümleyeni* denir. Burada $\wp_1$ e $\wp$ de *Rad-tümleyene sahiptir* denir (Xue, 1996).

3.2.10. Önerme Bütün modüller, radikalinin Rad-tümleyeni olur (Türkmen, 2010).

İspat $\wp$ herhangi bir modül olmak üzere, $\wp = \wp + Rad(\wp)$ ve $\wp \cap Rad(\wp) = Rad(\wp) \leq Rad(\wp)$ olur. O halde $\wp$ modülü $Rad(\wp)$ nin Rad-tümleyeni olur.

3.2.11. Tanım $\wp$ bir modül olmak üzere $\wp$ nin bütün alt modülleri Rad-tümleyene sahip oluyorsa, $\wp$ ye *Rad-tümlenmiş modül* denir (Xue, 1996).

3.2.12. Önerme H bir halka olmak üzere;

- (i) $\wp$ Rad-tümlenmiş H -modül ve $Rad(\wp) = 0$ oluyorsa, $\wp$ yarı basit modül olur.
- (ii) $\wp$ Rad-tümlenmiş H -modül oluyorsa, $\wp$ nin bütün bölüm modülleri Rad-tümlenmiştir.
- (iii) $\wp_1 \leq \wp$ Rad-tümlenmiş ve $\wp_2 \leq \wp$ olsun, $\wp_1 + \wp_2$ nin $\wp$ de Rad-tümleyeni varsa, $\wp_2$ nin $\wp$ de Rad-tümleyeni vardır.
- (iv) Rad-tümlenmiş H -modüllerin bütün sonlu toplamaları Rad-tümlenmiştir.
- (v) $\wp$ Rad-tümlenmiş H -modül ise, $\wp$ yarıyerel modüldür (Wang ve Ding, 2006).

3.3. Ss-Tümlemiş Modüller

3.3.1. Tanım $\wp$ bir modül ve $\wp_1, \wp_2 \leq \wp$ alt modülleri olsun. $\wp = \wp_1 + \wp_2$ ve $\wp_1 \cap \wp_2 \ll \wp_2$ olmak üzere $\wp_1 \cap \wp_2$ yarı basit oluyorsa, $\wp_2$ ye $\wp_1$ in *ss-tümleyeni* denir (Kaynar ve diğerleri, 2020).

3.3.2. Tanım $\wp$ bir modül olmak üzere, $\wp$ nin bütün alt modülleri ss-tümleyene sahip oluyorsa, $\wp$ modülüne *ss-tümlemiş modül* denir (Kaynar ve diğerleri, 2020).

3.3.3. Tanım $\wp$ bir modül olmak üzere, $\wp$ nin basit ve küçük alt modüllerinin toplamı $Des_s(\wp) = \sum\{\wp_1 \ll \wp \mid \wp_1, \wp \text{ nin basit alt modülü}\}$ olarak tanımlanır (Zhou ve Zhang, 2011).

3.3.4. Lemma $\wp$ bir modül olmak üzere, $Des_s(\wp) = Rad(\wp) \cap Des(\wp)$ eşitliği sağlanır (Kaynar ve diğerleri, 2020).

İspat $Des_s(\wp) \subseteq Rad(\wp)$ ve $Des_s(\wp) \subseteq Des(\wp)$ kapsamaları açık olduğundan $Des_s(\wp) \subseteq Rad(\wp) \cap Des(\wp)$ olur. Tersine herhangi bir $d \in Rad(\wp) \cap Des(\wp)$ elemanını alalım. Bu durumda, Hd yarı basit olur. Buradan $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $1 \leq i \leq n$ olmak üzere Teorem 2.5.7 gereği

$$Hd = K_1 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_n$$

eşitliğini sağlayan $\wp$ nin K_i basit alt modülleri bulunur. $Hd \ll \wp$ olduğu için Önerme 2.7.2 (i) gereği $1 \leq i \leq n$ olmak üzere $K_i \ll \wp$ olur. Böylece $d \in Hd \subseteq Des_s(\wp)$ olur. Sonuç olarak $Des_s(\wp) = Rad(\wp) \cap Des(\wp)$ eşitliği elde edilir.

3.3.5. Önerme $\wp$ ss-tümlemiş bir modül olmak üzere $\wp_1 \ll \wp$ olsun. Bu durumda, $\wp_1 \subseteq Des_s(\wp)$ dir (Kaynar ve diğerleri, 2020).

İspat $\wp_1 \ll \wp$ olduğu için $\wp_1$ in sadece $\wp$ ss-tümleyeni olur. O halde $\wp_1 = \wp_1 \cap \wp$ yarı basit olur ve $\wp_1 \subseteq Des(\wp)$ bulunur.

3.4. Ss-Yarıyerel Modüller

3.4.1. Tanım $\wp$ bir modül olmak üzere $\wp_1, \wp_2 \leq \wp$ alt modülleri olsun. Eğer $\wp_2, \wp_1$ in zayıf tümleyenini ve $\wp_1 \cap \wp_2$ yarı basit oluyorsa, $\wp_2$ ye $\wp_1$ in bir *zayıf ss-tümleyenini* denir (Olgun ve Türkmen, 2020).

3.4.2. Teorem $\wp$ bir modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) $\frac{\wp}{Des_S(\wp)}$ yarı basittir;
- (ii) $\wp$ modülünün bütün alt modülleri zayıf ss-tümleyenine sahiptir;
- (iii) $\wp_1$ yarı basit, $Des_S(\wp) \leq \wp_2$ ve $\frac{\wp_2}{Des_S(\wp)}$ yarı basit olacak şekilde $\wp = \wp_1 \oplus \wp_2$ parçalanışı vardır (Olgun ve Türkmen, 2020).

İspat (i) $\Rightarrow$ (iii) $\frac{\wp}{Des_S(\wp)}$ yarı basit olmak üzere $\wp_1 \cap Des_S(\wp) = 0$ olacak şekilde herhangi bir $\wp_1 \leq \wp$ modülü için, $\frac{\wp}{Des_S(\wp)}$ yarı basit olduğu için $\frac{\wp_1 \oplus Des_S(\wp)}{Des_S(\wp)}$ alt modülü yarı basit ve $\frac{\wp}{Des_S(\wp)}$ nin bir direkt toplam terimi olur. Bu durumda $\frac{\wp_1 \oplus Des_S(\wp)}{Des_S(\wp)} \cong \wp_1$ yarı basit ve $\frac{\wp_1 \oplus Des_S(\wp)}{Des_S(\wp)} \oplus \frac{\wp_2}{Des_S(\wp)} = \frac{\wp}{Des_S(\wp)}$ eşitliğini sağlayan $\frac{\wp_2}{Des_S(\wp)} \leq \frac{\wp}{Des_S(\wp)}$ yarı basit alt modülü bulunur.

$\wp = \wp_1 + \wp_2$ ve $\wp_1 \cap \wp_2 \subseteq \wp_1 \cap Des_S(\wp) = 0$ olduğu için $\wp = \wp_1 \oplus \wp_2$ olur.

1. İzomorfizma Teoremi gereği; $Des_S(\wp) \cong \frac{Des_S(\wp) \oplus \wp_1}{\wp_1} \trianglelefteq \frac{\wp}{\wp_1} \cong \wp_2$ elde edilir ve $Des_S(\wp) \trianglelefteq \wp_2$ olur.

(iii) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (ii) Açıktır.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $\frac{\wp_1}{Des_S(\wp)} \leq \frac{\wp}{Des_S(\wp)}$ alalım. $\wp_1 \leq \wp$, $\wp$ modülünde $\wp = \wp_1 + \wp_2$ ve $\wp_1 \cap \wp_2 \subseteq Des_S(\wp)$ olacak şekilde $\wp_2 \leq \wp$ zayıf ss-tümleyenine sahip olsun. Bu durumda $\frac{\wp}{Des_S(\wp)} = \frac{\wp_1}{Des_S(\wp)} \oplus \frac{\wp_2 + Des_S(\wp)}{Des_S(\wp)}$ olur. Dolayısıyla $\frac{\wp}{Des_S(\wp)}$ modülünün bütün alt modülleri direkt toplam terimi olur ve $\frac{\wp}{Des_S(\wp)}$ yarı basittir.

3.4.3. Tanım $\wp$ bir modül olmak üzere Teorem 3.4.2 deki denk koşulları gerçekleyen $\wp$ modülüne *ss-yarıyerel modül* denir (Olgun ve Türkmen, 2020).

3.5. $Z^*(\wp)$ Alt Modüller

3.5.1. Tanım $\wp$ bir H -modül olmak üzere, $\wp$ nin $Z^*(\wp)$ alt modülü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$Z^*(\wp) = \{ d \in \wp \mid Hd \text{ küçük modüldür} \} \text{ (Özcan, 2002).}$$

3.5.2. Önerme $\wp$ bir H -modül olmak üzere, $Z^*(\wp) = \wp \cap \text{Rad}(E(\wp))$ eşitliği sağlanır (Özcan, 2002).

İspat $d \in Z^*(\wp)$ ise $d \in \wp$ olup $Z^*(\wp) \leq \wp$ dir. $Hd \ll E(Hd)$ ve $Hd \leq \wp$ olduğundan $Hd \ll E(\wp)$ olup $d \in \text{Rad}(E(\wp))$ dir. Buradan $d \in \wp \cap \text{Rad}(E(\wp))$ olur ve $Z^*(\wp) \subseteq \wp \cap \text{Rad}(E(\wp))$ dir. Tersine, $d \in \wp \cap \text{Rad}(E(\wp))$ olsun. O halde $Hd \ll E(\wp)$ ise Hd küçük modül ve $d \in Z^*(\wp)$ olur. Bu durumda $\wp \cap \text{Rad}(E(\wp)) \subseteq Z^*(\wp)$ dir. O halde $Z^*(\wp) = \wp \cap \text{Rad}(E(\wp))$ dir.

3.6. $Z_s^*(\wp)$ Alt Modüller

3.6.1. Tanım $\wp$ bir H -modül olmak üzere $\wp$ nin $Z_s^*(\wp)$ alt modülü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$Z_s^*(\wp) = \{ d \in \wp \mid Hd \text{ yarı basit ve küçük modüldür} \} \text{ (Önal ve Türkmen, 2024).}$$

3.6.2. Önerme $\wp$ bir H -modül olmak üzere $Z_s^*(\wp) = \text{Des}(\wp) \cap Z^*(\wp)$ dir (Önal ve Türkmen, 2024).

İspat $d \in Z_s^*(\wp)$ olsun. O halde Hd yarı basit ve küçük modüldür. Buradan $Hd \leq \text{Des}(\wp)$ ve $Hd \leq Z^*(\wp)$ olup $Z_s^*(\wp) \leq \text{Des}(\wp) \cap Z^*(\wp)$ bulunur. Tersine, $d \in \text{Des}(\wp) \cap Z^*(\wp)$ olsun. O halde $Hd \leq \text{Des}(\wp)$ olup yarı basittir ve $Hd \leq Z^*(\wp)$ olup küçük alt modüllerin özelliğinden küçük modüldür. $Z_s^*(\wp)$ nin tanımından $d \in Z_s^*(\wp)$ olur ve $\text{Des}(\wp) \cap Z^*(\wp) \leq Z_s^*(\wp)$ dir. Sonuç olarak $Z_s^*(\wp) = \text{Des}(\wp) \cap Z^*(\wp)$ dir.

3.6.3. Sonuç $\wp$ bir H -modül olmak üzere, $Z_s^*(\wp) = \text{Des}(\wp) \cap \text{Rad}(E(\wp))$ dir (Önal ve Türkmen, 2024).

İspat Önerme 3.6.2 den $Z_s^*(\wp) = Des(\wp) \cap Z^*(\wp)$ dir. Yine Önerme 3.5.2 den $Z^*(\wp) = \wp \cap Rad(E(\wp))$ dir. O halde $Z_s^*(\wp) = Des(\wp) \cap (\wp \cap Rad(E(\wp)))$ yazabiliriz. Buradan $Des(\wp) \cap \wp = Des(\wp)$ olduğundan $Z_s^*(\wp) = Des(\wp) \cap Rad(E(\wp))$ olduğu görülür.

3.6.4. Lemma H bir halka ve $\wp$ ve $\wp'$ H -modülleri olmak üzere $f: \wp \longrightarrow \wp'$ bir homomorfizma olsun. O halde $f(Z_s^*(\wp)) \leq Z_s^*(\wp')$ olur (Önal ve Türkmen, 2024).

İspat $\wp$ ve $\wp'$ H -modüller ve $f: \wp \longrightarrow \wp'$ bir homomorfizma olsun. $i: \wp' \longrightarrow E(\wp')$ içermeye homomorfizması olmak üzere $if: \wp \longrightarrow E(\wp')$ homomorfizması $\beta: E(\wp) \longrightarrow E(\wp')$ homomorfizmasına genişletilebilir. Buradan radikal modülün özellikleri Teorem 2.9.8 (iii) den $\beta(Rad(E(\wp))) \leq Rad(E(\wp'))$ dür. Yine Sonuç 2.5.8 (ii) den yarı basit modüllerin her homomorfik görüntüsü de yarı basit modül olduğundan $f(Des(\wp)) \leq Des(\wp')$ dür. O halde $f(Z_s^*(\wp)) \leq Z_s^*(\wp')$ olur.

3.6.5. Lemma $\wp$ bir H -modül ve $\wp_1 \leq \wp$ olmak üzere, $Z_s^*(\wp_1) = \wp_1 \cap Z_s^*(\wp)$ dir (Önal ve Türkmen, 2024).

İspat $d \in Z_s^*(\wp_1)$ olsun. Bu durumda $d \in \wp_1$, $d \in Des(\wp_1)$ ve $d \in Rad(E(\wp_1))$ dir. $\wp_1 \leq \wp$ olduğundan $Des(\wp_1) \leq Des(\wp)$ ve $Rad(E(\wp_1)) \leq Rad(E(\wp))$ olup $d \in \wp_1 \cap Z_s^*(\wp)$ dir. Buradan $Z_s^*(\wp_1) \leq \wp_1 \cap Z_s^*(\wp)$ dir. Tersine $d \in \wp_1 \cap Z_s^*(\wp)$ olsun. O halde $d \in \wp_1$ ve $d \in Z_s^*(\wp)$ dir. $d \in Z_s^*(\wp)$ ise $d \in Des(\wp)$ ve $d \in Rad(E(\wp))$ dir. $\wp_1 \leq \wp$ ve $d \in \wp_1$ olduğundan $d \in Des(\wp_1)$ ve $d \in Rad(E(\wp_1))$ bulunur. Buradan $d \in Des(\wp_1) \cap Rad(E(\wp_1))$ olup $d \in Z_s^*(\wp_1)$ dir. O halde $\wp_1 \cap Z_s^*(\wp) \leq Z_s^*(\wp_1)$ olup $Z_s^*(\wp_1) = \wp_1 \cap Z_s^*(\wp)$ dir.

3.6.6. Lemma $\wp_i$ ($i \in I$) keyfi bir H -modüllerinin ailesi ve $\wp = \bigoplus_{i \in I} \wp_i$ olsun. O halde $Z_s^*(\wp) = \bigoplus_{i \in I} Z_s^*(\wp_i)$ dir (Önal ve Türkmen, 2024).

İspat Lemma 3.6.5 den her $i \in I$ için $Z_s^*(\wp_i) \leq Z_s^*(\wp)$ dir. Buradan $\bigoplus_{i \in I} Z_s^*(\wp_i) \leq Z_s^*(\wp)$ dir. Tersine her $i \in I$ için $\pi_i: \wp \longrightarrow \wp_i$ kanonik projektif olsun. $d \in Z_s^*(\wp)$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $d = d_1 + d_2 + \dots + d_n$ olup I 'daki farklı her $i(1), \dots, i(n)$ için $d_j \in \wp_{i(j)}$ ($1 \leq j \leq n$) dir. Her bir $1 \leq j \leq n$ için; $d_j = \pi_{i(j)}(d) \in \pi_{i(j)}(Z_s^*(\wp)) \leq Z_s^*(\wp_{i(j)})$ olup Lemma 3.6.4 ten, $d \in \bigoplus_{i \in I} Z_s^*(\wp_i)$ olur. Buradan $Z_s^*(\wp) \leq \bigoplus_{i \in I} Z_s^*(\wp_i)$ olup $Z_s^*(\wp) = \bigoplus_{i \in I} Z_s^*(\wp_i)$ dir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. ss^* -Yarıyerel Modüller

4.1.1. Tanım H bir halka, $\wp$ bir H -modül ve $\wp_1 \leq \wp$ olmak üzere, $\wp = \wp_1 + \wp_2$, $\wp_1 \cap \wp_2$ yarı basit ve $\wp_1 \cap \wp_2 \leq Z^*(\wp_2)$ olacak şekilde $\wp$ nin bir $\wp_2$ alt modülü varsa, $\wp_2$ ye $\wp_1$ in $\wp$ de ss^* tümleyeni denir.

4.1.2. Lemma H bir halka ve $\wp$ bir H -modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) $\wp$ nin bütün $\wp_1$ alt modülleri $\wp$ de bir $\wp_2$ ss^* -tümleyenine sahiptir;
- (ii) $\wp$ nin herhangi bir $\wp_1$ alt modülü için, $\wp = \wp_1 + \wp_2$ ve $\wp_1 \cap \wp_2 \leq Z_s^*(\wp)$ olacak şekilde $\wp$ nin bir $\wp_2$ alt modülü vardır.
- (iii) $\frac{\wp}{Z_s^*(\wp)}$ yarı basittir.

İspat (i) $\implies$ (ii) $\wp_1 \leq \wp$ olsun. (i) den $\wp = \wp_1 + \wp_2$, $\wp_1 \cap \wp_2 \leq Z^*(\wp_2)$ ve $\wp_1 \cap \wp_2$ yarı basit olacak şekilde $\wp_2 \leq \wp$ vardır. $\wp_1 \cap \wp_2 \leq Z^*(\wp_2) \leq Z^*(\wp)$ dir. $Z^*(\wp) = \wp \cap \text{Rad}(E(\wp))$ olduğundan $\wp_1 \cap \wp_2 \leq \wp \cap \text{Rad}(E(\wp))$ dir. Buradan $\wp_1 \cap \wp_2 \leq \text{Rad}(E(\wp))$ dir. $\wp_1 \cap \wp_2$ yarı basit olduğundan $\wp_1 \cap \wp_2 \leq \text{Des}(\wp)$ olup $\wp_1 \cap \wp_2 \leq \text{Des}(\wp) \cap \text{Rad}(E(\wp))$ bulunur. Sonuç 3.6.3 ten $\wp_1 \cap \wp_2 \leq Z_s^*(\wp)$ dir.

(ii) $\implies$ (iii) $\frac{\wp_1}{Z_s^*(\wp)} \leq \frac{\wp}{Z_s^*(\wp)}$ keyfi bir alt modül olsun. (ii) gereği $\wp = \wp_1 + \wp_2$ ve $\wp_1 \cap \wp_2 \leq Z_s^*(\wp)$ olacak şekilde $\wp_2 \leq \wp$ vardır.

$$\frac{\wp}{Z_s^*(\wp)} = \frac{\wp_1}{Z_s^*(\wp)} + \frac{\wp_2 + Z_s^*(\wp)}{Z_s^*(\wp)}$$

dir.

$$\frac{\wp_1}{Z_s^*(\wp)} \cap \frac{\wp_2 + Z_s^*(\wp)}{Z_s^*(\wp)} = \frac{\wp_1 \cap (\wp_2 + Z_s^*(\wp))}{Z_s^*(\wp)}$$

olup modüler kuraldan,

$$\frac{\wp_1 \cap \wp_2 + Z_s^*(\wp)}{Z_s^*(\wp)}$$

olur.

$\wp_1 \cap \wp_2 \leq Z_s^*(\wp)$ olduğundan

$$\frac{\wp_1 \cap \wp_2 + Z_s^*(\wp)}{Z_s^*(\wp)} = \frac{Z_s^*(\wp)}{Z_s^*(\wp)} = 0$$

bulunur. Dolayısıyla $\frac{\wp}{Z_s^*(\wp)}$ yarı basittir.

(iii) $\implies$ (i) $\wp_1 \leq \wp$ olsun. O halde $\frac{\wp_1 + Z_s^*(\wp)}{Z_s^*(\wp)} \leq \frac{\wp}{Z_s^*(\wp)}$ olur. $\frac{\wp}{Z_s^*(\wp)}$ yarı basit modül olduğundan $\frac{\wp}{Z_s^*(\wp)} = \frac{\wp_1 + Z_s^*(\wp)}{Z_s^*(\wp)} + \frac{\wp_2}{Z_s^*(\wp)}$ olacak şekilde bir $\wp_2$ modülü vardır. O halde $Z^*(\wp) \leq \wp_2 \leq \wp$ dir. Buradan $\wp = \wp_1 + \wp_2$ dir. (iii)'den ve modüler kural gereği,

$$\frac{\wp_1 + Z_s^*(\wp)}{Z_s^*(\wp)} \cap \frac{\wp_2}{Z_s^*(\wp)} = \frac{\wp_1 \cap \wp_2 + Z_s^*(\wp)}{Z_s^*(\wp)} = 0$$

Olduğundan $\wp_1 \cap \wp_2 \leq Z_s^*(\wp)$ olup $\wp_1 \cap \wp_2$ yarı basit ve küçük modüldür. $\wp_1 \cap \wp_2$ küçük modül olduğundan $\wp_1 \cap \wp_2 \leq Z^*(\wp_2)$ dir.

4.1.3. Tanım H bir halka ve $\wp$ bir H -modül olmak üzere Lemma 4.1.2.'deki denk koşullardan birini sağlayan $\wp$ modülüne *ss*-yarıyerel modül* denir.

4.1.4. Lemma $\wp$ bir H -modül olmak üzere, $\wp$ yarı basit ve küçük modül ise, $\wp$ modülü *ss*-yarıyereldir*.

İspat $\wp$ yarı basit ve küçük modül olsun. O halde $Z_s^*(\wp) = \wp$ dir.

$$\frac{\wp}{Z_s^*(\wp)} = \frac{Z_s^*(\wp)}{Z_s^*(\wp)} = 0$$

Olduğundan $\frac{\wp}{Z_s^*(\wp)}$ yarı basittir. Buradan $\wp$ *ss*-yarıyereldir*.

4.1.5. *Sonuç* $\wp$ keyfi bir halka üzerinde bir modül ve $Z_s^*(\wp) \ll \wp$ olsun. $\wp$ nin *ss*-yarıyerel modül* olması için gerek ve yeter koşul $\wp$ nin *ss-yarıyerel modül* olmasıdır.

İspat $\wp$ keyfi bir halka üzerinde bir modül ve $Z_s^*(\wp) \ll \wp$ olsun. $\wp$ *ss*-yarıyerel* ise

Tanım 4.1.3 ten $\frac{\wp}{Z_s^*(\wp)}$ yarı basittir. $\wp$ *ss-yarıyerel* ise Teorem 3.4.2 den $\frac{\wp}{Des_s(\wp)}$ yarı

basittir. O halde $Des_s(\wp) = Z_s^*(\wp)$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

Sonuç 3.6.3 ten $Z_s^*(\wp) = Des(\wp) \cap Rad(E(\wp))$ dir ve $Z_s^*(\wp) = Des(\wp) \cap Rad(E(\wp)) \ll \wp$ olduğundan $Z_s^*(\wp) \leq Rad(\wp)$ dir. O halde $Z_s^*(\wp) \leq Des(\wp) \cap$

$Rad(\wp)$ dir. Lemma 3.3.4 ten $Des_s(\wp) = Des(\wp) \cap Rad(\wp)$ olduğundan $Z_s^*(\wp) \leq Des_s(\wp)$ bulunur.

Tersine, $Des_s(\wp) = Des(\wp) \cap Rad(\wp) \leq Des(\wp) \cap Rad(E(\wp)) = Z_s^*(\wp)$ dir. Buradan $Des_s(\wp) \leq Z_s^*(\wp)$ bulunur. Sonuç olarak $Des_s(\wp) = Z_s^*(\wp)$ dir.

4.1.6. Önerme Herhangi bir ss^* -yarıyerel modülün her alt modülü de ss^* -yarıyereldir.

İspat $\wp$ herhangi bir ss^* -yarıyerel modül olmak üzere $\wp_1 \leq \wp_3 \leq \wp$ alt modüller olsun. $\wp$ ss^* -yarıyerel modül olduğundan, $\wp$ nin bir $\wp_2$ alt modülü için $\wp = \wp_1 + \wp_2$ ve $\wp_1 \cap \wp_2 \leq Z_s^*(\wp)$ yazabiliriz. Modüler kural gereği,

$$\wp_3 = \wp \cap \wp_3 = (\wp_1 + \wp_2) \cap \wp_3 = \wp_1 + (\wp_2 \cap \wp_3)$$

ve Lemma 3.6.5 ten

$$\wp_1 \cap (\wp_3 \cap \wp_2) = (\wp_1 \cap \wp_3) \cap \wp_2 = \wp_1 \cap \wp_2 \leq Z_s^*(\wp) \cap \wp_3 = Z_s^*(\wp_3)$$

olup $\wp_3$ modülü ss^* -yarıyereldir.

4.1.7. Önerme Herhangi bir ss^* -yarıyerel modülün bütün bölüm modülleri de ss^* -yarıyerel modüldür.

İspat $\wp$ herhangi bir ss^* -yarıyerel modül olmak üzere $\wp_3 \leq \wp_1 \leq \wp$ alt modülleri olsun. O halde, $\wp = \wp_1 + \wp_2$ ve $\wp_1 \cap \wp_2 \leq Z_s^*(\wp)$ koşullarını sağlayan $\wp$ nin bir $\wp_2$ alt modülü vardır. Buradan $\frac{\wp}{\wp_3} = \frac{\wp_1}{\wp_3} + \frac{\wp_2 + \wp_3}{\wp_3}$ tür.

$\pi: \wp \longrightarrow \frac{\wp}{\wp_3}$ doğal homomorfizmasını alalım.

$$\pi(\wp_1 \cap \wp_2) = \frac{(\wp_1 \cap \wp_2) + \wp_3}{\wp_3} = \frac{\wp_1 \cap (\wp_2 + \wp_3)}{\wp_3} = \frac{\wp_1}{\wp_3} \cap \frac{\wp_2 + \wp_3}{\wp_3}$$

elde edilir ve Lemma 3.6.4 ten

$$\pi(\wp_1 \cap \wp_2) = \frac{\wp_1}{\wp_3} \cap \left(\frac{\wp_2 + \wp_3}{\wp_3} \right) \leq Z_s^*\left(\frac{\wp}{\wp_3}\right)$$

alt modülü bulunur. Böylece, $\frac{\wp}{\wp_3}$ bölüm modülü ss^* -yarıyerel modül olur.

4.1.8. Teorem ss^* -yarıyerel modüllerin her direkt toplamı da ss^* -yarıyereldir.

İspat I herhangi bir indeks kümesi olmak üzere $\{\wp_i\}_{i \in I}$ ss^* -yarıyerel modüllerin ailesi ve $\wp = \bigoplus_{i \in I} \wp_i$ olsun. Lemma 3.6.6 dan

$$\frac{\wp}{Z_s^*(\wp)} = \frac{\bigoplus_{i \in I} \wp_i}{\bigoplus_{i \in I} Z_s^*(\wp_i)} \cong \bigoplus_{i \in I} \frac{\wp_i}{Z_s^*(\wp_i)}$$

bulunur. Sonuç 2.5.8 (iii) den yarı basit modüllerin direkt toplamı yarı basit olduğundan

$\frac{\wp}{Z_s^*(\wp)}$ yarı basittir. Sonuç olarak $\wp$ modülü ss^* -yarıyereldir.

4.1.9. *Sonuç* Bir $\wp$ modülünün herhangi bir ss^* -yarıyerel alt modüllerinin toplamı ss^* -yarıyereldir.

İspat $\{V\}_{i \in I}$ $\wp$ modülünün ss^* -yarıyerel alt modüllerinin ailesi olsun. Şimdi, $\psi((d_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I_0} d_i$ ile tanımlı $\psi: \bigoplus_{i \in I} V_i \longrightarrow \sum_{i \in I} V_i$ dönüşümünü alalım. ψ 'nin epimorfizma olduğunu gösterelim (burada I_0, I indeks kümesinin sonlu alt kümesidir).

$\forall d_i \in \bigoplus_{i \in I} V_i$ için $\psi((d_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I_0} d_i \in \sum_{i \in I} V_i$ olduğundan ψ kapalıdır. $d_i, k_i \in \bigoplus_{i \in I} V_i$ keyfi olmak üzere $d_i = k_i$ olsun. $\psi((d_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I_0} d_i = \sum_{i \in I_0} k_i = \psi((k_i)_{i \in I})$ olduğundan ψ iyi tanımlıdır. $\forall d_i, k_i \in \bigoplus_{i \in I} V_i$ ve $\forall h \in H$ için $\psi(d_i + k_i) = \sum_{i \in I_0} d_i + k_i = d_1 + d_2 + \dots + d_n + k_1 + k_2 + \dots + k_n = \sum_{i \in I_0} d_i + \sum_{i \in I_0} k_i$ dir ve $\psi(hd_i) = \sum_{i \in I_0} hd_i = hd_1 + hd_2 + \dots + hd_n = h(d_1 + d_2 + \dots + d_n) = h \sum_{i \in I_0} d_i$ olduğundan ψ bir homomorfizmadır. $\forall \sum_{i \in I_0} d_i \in \sum_{i \in I} V_i$ olup I_0, I indeks kümesinin sonlu alt kümesi olduğun için $\psi((d_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I_0} d_i$ olacak şekilde bir $d_i \in \bigoplus_{i \in I} V_i$ varoldüğundan ψ bir epimorfizmadır. Teorem 4.1.8' e göre, $\bigoplus_{i \in I} V_i$ dış direkt toplamı bir ss^* -yarıyerel modüldür. Önerme 4.1.7.'den $\sum_{i \in I} V_i$ alt modülünün ss^* -yarıyerel olduğu sonucu çıkar.

4.1.10. Teorem E injektif modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) E ss^* -yarıyereldir,
- (ii) E ss -yarıyereldir,
- (iii) E yarıyerel ve $Rad(E) \leq Des(E)$ dir.

İspat (i) $\implies$ (ii) E bir ss^* -yarıyerel modül ve $\wp_1 \leq E$ olmak üzere, $E = \wp_1 + \wp_2$ ve $\wp_1 \cap \wp_2 \leq Z_s^*(E)$ koşullarını sağlayan E nin bir $\wp_2$ alt modülü vardır. E injektif modül olduğundan, $Z_s^*(E) = Des(E) \cap Rad(E) = Des_s(E)$ olup $\wp_2, \wp_1$ in zayıf ss -tümleyenidir. Teorem 3.4.2 ve Tanım 3.4.3 ten E ss -yarıyereldir.

(ii) $\implies$ (iii) E nin yarıyerel olduğu açıktır. $a \in Rad(E)$ olsun. E ss -yarıyerel ve $Ha \ll E$ olduğundan $E = Ha + E, Ha \cap E = Ha \ll E$ ve Ha yarı basittir. O halde $Ha \leq Des(E)$ ise $a = 1_H. a \in Ha \leq Des(E)$ olup $Rad(E) \leq Des(E)$ dir.

(iii) $\implies$ (i) E yarıyerel modül ve $\wp_1 \leq E$ olsun. $E = \wp_1 + \wp_2$ ve $\wp_1 \cap \wp_2 \leq \text{Rad}(E)$ koşullarını sağlayan E nin bir $\wp_2$ alt modülü vardır. (iii) gereği $\wp_1 \cap \wp_2 \leq \text{Rad}(E) \leq \text{Des}(E)$ olduğundan $\wp_1 \cap \wp_2 \ll E$ ve $\wp_1 \cap \wp_2$ yarı basittir. Dolayısıyla E ss*-yarıyereldir.

Son olarak bütün modülleri ss*-yarıyerel olan halkaları karakterize edelim.

4.1.11. Teorem Herhangi bir H halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) H ss*-yarıyereldir,
- (ii) Her sol H -modülü ss*-yarıyereldir,
- (iii) Her injektif sol H -modülü ss-yarıyereldir.

İspat (i) $\implies$ (ii) $\wp$ herhangi bir sol H -modül olsun. O halde, bir I indeks kümesi için, bir $\psi: H^{(I)} \longrightarrow \wp$ epimorfizması vardır. H ss*-yarıyerel olduğu için, Teorem 4.1.8 den serbest sol H -modülü $H^{(I)}$ ss*-yarıyereldir. Bu nedenle, $\wp$ Önerme 4.1.7 ye göre ss*-yarıyereldir.

(ii) $\implies$ (iii) Teorem 4.1.10 dan açıktır.

(iii) $\implies$ (ii) $\wp$ bir keyfi H -modül olsun. $E(H)$ injektif bürümünü alalım. (iii) gereği $E(\wp)$ ss-yarıyereldir. Bu nedenle Teorem 4.1.10 dan $E(\wp)$ ss*-yarıyereldir. $\wp \leq E(\wp)$ olduğundan Önerme 4.1.6 dan $\wp$ nin ss*-yarıyerel olduğu sonucuna varırız.

(ii) $\implies$ (i) (ii)'den ${}_H H$ nin ss*-yarıyerel olduğu sonucu çıkar. Böylece, H bir ss*-yarıyerel halkadır.

4.1.12. Örnek $H = \mathbb{Z}_4$ alalım. $\text{Rad}(H) = \text{Des}(H) = \{0, 2\}$ olduğundan $\mathbb{Z}_4$ tüm modülleri ss*-yarıyerel olan bir halkadır.

Her ss*-yarıyerel modülün yarı yerel modül olduğunu ancak yarı yerel bir modülün ss*-yarıyerel olmayabileceğini bir örnekle gösterelim,

4.1.13. Örnek $\wp = \mathbb{Q}$ $\mathbb{Z}$ -modülünde $\wp$ nin maksimal alt modülü olmadığından $\wp = \text{Rad}(\wp)$ olup $\frac{\wp}{\text{Rad}(\wp)} = 0$ dır. Buradan $\wp$ yarı basit modüldür. Dolayısıyla $\wp$ yarı yerel modüldür. $\wp$ nin ss*-yarıyerel olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\wp_1 \leq \wp$ vardır.

Buradan $\wp_1 \cap \wp_2 \leq \text{Rad}(E(\wp)) \cap \text{Des}(\wp)$ olup $\wp_1 \cap \wp_2 \leq \text{Des}(\wp)$ dir. $\text{Des}(\wp) = 0$ olduğundan $\wp_1 \cap \wp_2 \leq 0$ olur ve bir çelişki elde edilir. Dolayısıyla $\wp$ ss*-yarıyerel değildir.



5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, ss^* -yariyerel modüllerin temel özellikleri çalışıldı, ss^* -yariyerel modüllerin sınıfının alt modüllerde toplamlarda ve bölüm modüllerinde kapalı olduğu gösterildi. Özellikle, her modülün ss^* -yariyerel olması ile injektif modüllerin ss -yariyerel olmasının denk olduğu kanıtlandı. Ss^* -yariyerel halka sınıfının homolojik karakterizasyonları üzerine çalışmalar yapılabilir. Diğer halka sınıfları ile ilişkileri araştırılabilir.



KAYNAKLAR

- Alizade, R. ve Pancar, A. (2016). *Homoloji Cebire Giriş*. Samsun: Ondokuz Mayıs Üniversitesi Yayınları.
- Anderson, F.W. and Fuller, K. R. (1992). *Rings and Categories of Modules*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 363.
- Clark, J., Lomp, C., Vanaja, N. and Wisbauer, R. (2006). *Lifting Modules. Supplements and Projectivity in Module Theory*. Frontiers in Mathematics, Basel, 394.
- Dung, N. V., Huynh, D., Smith, P. F. and Wisbauer, R. (1994). *Extending Modules*, No.313 in Putman Research Notes in Mathematics Series, Harlow: Longman.
- Facchini, A. (1998). *Module Theory*. Progress in Mathematics, 167, Birkhauser, Verlag, Basel, 281.
- Goodearl, K. R. (1976). *Ring Theory: Nonsingular Rings and Modules*. New York: Vol. 33. CRC Press, 30-36.
- Hungerford, T. W. (1974). *Algebra*. Springer Verlag, 502.
- Kasch, F. (1982). *Modules and Rings*. London: Academic Press Inc.
- Kaynar, E., Çalışıcı, H. and Türkmen, E. (2020). ss-supplemented modules. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 69 (1), 473-485.
- Lam, T.Y. (1991). *A First Course in Noncommutative Rings*. Springer-Verlag, 397.
- Leonard, W. W. (1966). Small modules. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 17, 527-531.
- Lomp, C. (1999). On Semilocal Modules and Rings, *Communications in Algebra*, 27(4), 1921-1935.
- Olgun, A. and Türkmen, E. (2020). On a class of perfect rings. *Honam Mathematical Journal*, 42, No 3, 591-600.
- Önal Kır, E. and Türkmen, E. (2024). Semisimple modules that are small cyclic in their injective envelopes. *Asian-European Journal of Mathematics*, Vol. 17, No. 06, 2450042
- Özcan A.Ç. (2002). Modules with small cyclic submodules in their injective hulls. *Communications in Algebra*, 30, No 4. P. 1575 – 1589.
- Sharpe, D.W. and Vamos, P. (1972). *Injective Modules*. Cambridge: Cambridge University Press.

- Türkmen, E. (2010). Radikal tümlenmiş ve eş sonlu radikal tümlenmiş modüllerin karakterizasyonları. Doktora Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, 41.
- Wang, Y. and Ding, N. (2006). Generalized supplemented modules. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 10(6), 1589- 1601.
- Wisbauer, R. (1991). *Foundations of Module and Ring Theory*. Gordon and Breach.
- Xue, W. (1996). Characterizations of semiperfect and perfect rings. *Publicacions Matematiques*, 40: 115- 125.
- Zhou D. X. and Zhang X. R. (2011). Small-essential submodules and Morita Duality. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 35: 1051-1062.
- Zöschinger, H. (1974). Modules That Have A Supplement In Every Extension. *Mathematica Scandinavica*, 35(2), 267-287.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: Mustafa ŞAHİN

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi: Sakarya Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü

İŞ DENEYİMİ

Atatürk Ortaokulu, Sakarya/Kocaali, 2012-2014

Dodurga İmam Hatip Ortaokulu, Çorum/Dodurga, 2014-2017

Alaca İmam Hatip Lisesi, Çorum/Alaca, 2017-2018

Atatürk Ortaokulu, Çorum/Laçin, 2018-