

**T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
TOPOLOJİ BİLİM DALI**

**STEİNHAUS TRANSFORM ESNEK METRİK UZAYLARDA ESNEK
SABİT NOKTA TEOREMLERİ**

Nurettin YILMAZ

**Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Simge ÖZTUNÇ**



MANİSA-2022

TEZ ONAYI

Nurettin YILMAZ tarafından hazırlanan “**Steinhaus Transform Esnek Metrik Uzaylarda Esnek Sabit Nokta Teoremleri**” adlı tez çalışması 06/01/2022 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**’nda **YÜKSEK LİSANS** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Simge ÖZTUNÇ
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

Jüri Üyesi

Prof. Dr. Ali MUTLU
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

Jüri Üyesi

Dr. Öğr. Üyesi Utku GÜRDAL
Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Nurettin YILMAZ



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	II
TEŞEKKÜR.....	III
ÖZET.....	IV
ABSTRACT.....	V
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	3
2.1. Esnek Küme Teorisi	3
2.2. Metrik Uzaylar ve Esnek Metrik Uzaylar	6
3. MATERYAL VE YÖNTEMLER.....	11
3.1. Steinhaus Transform Esnek Metrik Uzaylar	11
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	18
4.1. Steinhaus Transform Esnek Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri	18
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	33
KAYNAKLAR	34
ÖZGEÇMİŞ	38

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Φ	Boş Esnek Küme
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\subseteq$	Esnek Alt Küme
$\preceq$	Esnek Anlamda önce gelme
$\{(F_n, A)\}_{n=1}^{\infty}$	Esnek Dizi
(F, E)	Esnek Küme
$\cup$	Esnek Kümelerde Birleşim
$(F, E)^c$	(F, E) Esnek Kümesinin Esnek Tümlenyeni
$\cap$	Esnek Kümelerde Kesişim
$\tilde{\mathcal{D}}$	Esnek Metrik
$(x, F(x))$	Esnek Nokta
(a, r)	Esnek Parametrik Skaler
(X, τ, E)	Esnek Topolojik Uzay
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\tilde{\pi}$	Skaler Değerli Parametrik Fonksiyon
$\tilde{\mathcal{D}}_p$	Steinhaus Transform Esnek Metrik
$((F, E), \tilde{\mathcal{D}}_p)$	Steinhaus Transform Esnek Metrik Uzay

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında ve yüksek lisans eğitimim boyunca bana şans veren, çalışma sürecinde yol gösteren, daima yanımda olup değerli bilgi, birikimini ve tecrübesini benimle paylaşan, desteklerini esirgemeyen değerli hocalarım Prof. Dr. Ali MUTLU ve Dr. Öğr. Üyesi Simge Öztunç'a sonsuz saygımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca hayatım boyunca beni en iyi şekilde yetiştiren, daima yanımda olan, aldığı kararları her zaman destekleyen, her şeyin en iyisine layık olan annem Ayşe Yılmaz'a, babam Alattin Yılmaz'a ve biricik kardeşim Gözde Yılmaz'a çok teşekkür ederim.

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca yanımda olan, bana inanan daima beni cesaretlendiren, motive eden hayat arkadaşım sevgili eşim Öznur Yılmaz'a ve tüm dostlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Nurettin YILMAZ
Manisa, 2022

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Steinhaus Transform Esnek Metrik Uzaylarda Esnek Sabit Nokta Teoremleri

Nurettin YILMAZ

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Simge ÖZTUNÇ

Bu tez çalışmasında öncelikle çalışma boyunca kullandığımız metot ve teknikler için temel kavramlar niteliğinde olan esnek küme teorisi, esnek topolojik uzaylar, esnek metrik uzaylar, sabit nokta teorisi, esnek sabit nokta teorisi ile ilgili tanım ve teoremler verilmiştir.

Bir parametre kümesiyle birlikte esnek kümeler göz önünde bulundurularak $\tilde{\mathfrak{D}}_p$ ile gösterilen Steinhaus transform esnek metrik tanımlanmıştır. Steinhaus transform esnek metrik uzaylarda esnek dizi, esnek yakınsak dizi, esnek Cauchy dizisi, esnek büzüme dönüşümü, esnek sabit nokta gibi kavramların tanımları verilerek tez çalışması için esnek sabit nokta teoremlerini elde etmek ve ispatlamaya yönelik gerekli altyapı oluşturulmuştur.

Araştırma bulguları olarak Steinhaus transform esnek metrik uzaylar için Banach büzülme teoremi ispatlanmış. Daha sonra Caristi ve Kannan tipi büzülmeler kullanarak Steinhaus transform esnek metrik uzaylarda esnek sabit nokta teoremleri elde edilmiştir.

Son olarak Steinhaus transform esnek metrik uzaylarda devirli büzülme dönüşümü tanımlanarak Kannan tipinde yeni bir esnek sabit nokta teoremi ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Parametre Kümesi, Esnek Küme, Esnek Metrik Uzay, Steinhaus transform Esnek Metrik Uzay, Esnek Sabit Nokta Teoremi.

2022, 38 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

Soft Fixed Point Theorems in Steinhaus Transform Soft Metric Spaces

Nurettin YILMAZ

Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Dr. Öğr. Üyesi Simge ÖZTUNÇ

In this thesis study, firstly definitions and theorems about soft set theory, soft topological spaces, soft metric spaces, fixed point theory and soft fixed point theory which are basic concepts for the methods and techniques we used throughout the study are given.

The Steinhaus transform soft metric which is symbolized by $\tilde{\mathcal{D}}_p$ is defined considering soft sets with a parameter set. By giving the definitions of concepts such as soft sequence, soft convergent sequence, soft Cauchy sequence, soft contraction mapping, soft fixed point in Steinhaus transform soft metric spaces, the necessary background has been created in order to obtain and prove the soft fixed point theorems for the thesis study.

Banach contraction theorem has been proved for Steinhaus transform soft metric spaces as research findings. Then soft fixed point theorems have been obtained in Steinhaus transform soft metric spaces by using Kannan and Caristi type contractions.

Finally, by defining the cyclic contraction mapping in Steinhaus transform soft metric spaces, a new Kannan type soft fixed point theorems is proved.

Keywords: Parameter Set, Soft Set, Soft Metric Space, Steinhaus Transform Soft Metric Space, Soft Fixed Point Theorem.

2022, 38 pages

1. GİRİŞ

Günlük hayattaki birçok problem de mühendislik, tıp, ekonomi ve sosyoloji gibi birçok alanda belirsizliklerle karşılaşmaktayız. Bu durum bilim insanlarını bu belirsizliklerin üstesinden gelmek için farklı matematiksel modellemeler geliştirmeye yöneltmiştir. Belirsizlik içeren problemlerin çözümü için Fuzzy (bulanık Küme Teorisi), rough (yaklaşımlı) küme teorisi, esnek (soft) küme teorisi son yıllarda bu amaçla geliştirilen teorilerden bazılarıdır. Fuzzy (bulanık) küme teorisi 1965 yılında Azeri matematikçi olan Lütü Aliasker Zadeh [1] tarafından ortaya atılmıştır. Zadeh'e göre Aristo mantığından farklı olarak bir önermenin doğruluk değeri 0 veya 1 değilde $[0,1]$ aralığında tüm sayılardır. Fuzzy (Bulanık) küme teorisinde kullanılan üyelik fonksiyonu ile yaşanan birtakım zorluklardan dolayı Rus matematikçi Dmitri Molodtsov [2] 1999 yılında belirsizlikler için yeni bir araç olarak üyelik fonksiyonundan bağımsız olan esnek küme kavramını literatüre kazandırmıştır. Esnek küme teorisini bulanık küme teorisinden ayıran en önemli özelliklerden birisi belirsizliğin reel değerli bir fonksiyonla değil, küme değerli bir fonksiyonla ortadan kaldırılmasıdır. Böylece üyelik fonksiyonu tanımlama probleminin ortadan kaldırılmış olması bir avantaja çevrilerek esnek küme teorisi ile tıp, mühendislik, ekonomi, sosyal bilimler gibi pek çok alanda hızla gelişen uygulama imkanına sahip olunmuştur. 1999 yılında esnek küme tanımının Dmitri Molodtsov tarafından verilmesinin ardından Maji ve arkadaşları [3], [4] esnek kümelerle ilgili iki esnek kümenin kesişimi, birleşimi, esnek altküme, bir esnek kümenin tümleyeni, gibi elementer cebirsel işlemleri ve esnek eşit küme, esnek boş küme gibi temel kavramları tanımlamışlardır. 2011 de Shabir ve Naz [5] esnek küme teorisini topolojik açıdan incelemişlerdir. Bu çalışmada esnek topolojik uzayların tanımlanmasıyla esnek küme teorisinin topolojik alanda ilerlemesi hız kazanmıştır. Esnek kümelerin, esnek dönüşümlerin ve esnek topolojik uzayların çeşitli özellikleri için literatürde yer alan çeşitli çalışmalara [6-14] başvurulabilir.

Diğer taraftan sabit nokta teorisi gerek matematiğin birçok dalında gerekse diğer farklı bilimsel dallarda oldukça fazla uygulama alanlarına sahip bir alan olarak çalışılmaktadır. Bu teoremin temelleri Brouwer'ın [15] 1912 yılında ortaya koyduğu çalışmaya dayanmaktadır. Brouwer bu çalışmasında $\mathbb{R}^n$ de kapalı birim yuvardan yine aynı kapalı birim yuvara olan sürekli dönüşümün sabit noktasının varlığını göstermiştir. Brouwer sabit nokta teoremi olarak bilinen bu teorem sabit nokta

teorisinde temel niteliğinde öneme sahiptir. Ayrıca 1922 yılında Banach büzülme prensibinin [16] ortaya atılmasıyla bu teori farklı metotlar, farklı metrik uzaylar kullanılarak geliştirilmiş, bu gelişim sürecinin çıktıları arasında yer alan farklı büzülme dönüşümleri de elde edilmiştir. Böylece günümüze dek pek çok sabit nokta teoremi literatüre kazandırılmıştır [17-22].

Esnek kümelerin göz önüne alınmasıyla tanımlanan esnek metrik uzaylar ve bu uzaylarda elde edilen sabit nokta teoremleri üzerine yapılan çalışmalar [23-35] son yıllarda hız ve önem kazanmıştır.

Bu tez çalışmasında Husseinzadeh tarafından esnek elemanlarla yeniden ifade edilen esnek metrik tanımı ve 1958 yılında Marczewski ve Steinhaus [36] tarafından verilen Steinhaus transform metrik göz önüne alınarak Steinhaus Transform esnek metrik tanımlanmış ve çeşitli sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır. Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar çeşitli uluslararası sempozyumlarda sunulmuş olup, yayımlanan bildiriler [37-39] bu tez çalışmasının son halini almasına katkı sağlamıştır.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde esnek küme teorisi ve sabit nokta teorisi ile ilgili temel kavramlardan bahsedilmiştir.

2.1. Esnek küme teorisi

Bu alt bölümde esnek kümeler ve esnek topolojilerle ilgili temel tanımlar ve özellikler verilir.

X nesnelerin evrensel kümesi ve E , X 'deki nesnelerle ilgili parametrelerin kümesi olsun. $P(X)$, X 'in kuvvet kümesini göstere ve $A, B \subseteq E$ olsun.

Tanım 2.1.1. [2] X evrensel bir küme ve E parametrelerin bir kümesi olsun. $P(X)$, X 'in kuvvet kümesi ve $A \subseteq E$ olmak üzere;

$$F : A \rightarrow P(X)$$

ise (F, A) çifti X üzerinde bir esnek küme olarak adlandırılır.

Herhangi bir (F, A) esnek kümesi, her $e \in A$ için $F(e) \neq \emptyset$ ve her $e \in E \setminus A$ için $F(e) = \emptyset$ olmak üzere (F, E) şeklinde bir esnek kümeye genişletilebilir.

Tanım 2.1.2. [3] (F, A) ve (G, B) , X üzerinde iki esnek küme olsun.

(i) $A \subseteq B$, ve

(ii) Her $a \in A$ için $F(a) \subseteq G(a)$ ise

(F, A) 'ya (G, B) 'nin esnek alt kümesidir denir ve $(F, A) \tilde{\subset} (G, B)$ ile gösterilir.

(F, A) , (G, B) 'nin esnek alt kümesi ise (G, B) 'ye (F, A) 'nın esnek üst kümesi denir ve $(F, A) \tilde{\supset} (G, B)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.3. [3] X üzerinde iki (F, A) ve (G, B) esnek kümesinin kesişimi (H, C) esnek kümesidir. $C = A \cap B$ ve $\forall c \in C$ olmak üzere $H(c) = F(c) \cap G(c)$ dir. Bu kesişim $(F, A) \tilde{\cap} (G, B) = (H, C)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4. [3] X üzerinde iki (F, A) ve (G, B) esnek kümesinin birleşimi yine bir esnek kümedir. $C = A \cup B$ ve $\forall e \in C$ için,

$$H(\varepsilon) = \begin{cases} F(\varepsilon), & \varepsilon \in A - B \\ G(\varepsilon), & \varepsilon \in B - A \\ F(\varepsilon) \cup G(\varepsilon), & \varepsilon \in A \cap B. \end{cases}$$

Bu bağıntı $(F, A) \tilde{\cup} (G, B) = (H, C)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.5. [3] (F, A) ve (G, B) , X üzerinde iki esnek küme olsun. Bu takdirde bu iki esnek kümenin farkı $(F, A) - (G, B) = \{(x, F(x)) : F(x) \notin G(B), x \notin B\}$ esnek kümesidir.

Tanım 2.1.6. [3] X üzerindeki bir (F, A) esnek kümesi $\forall a \in A$ için $F(a) = \emptyset$ ise bir boş (null) esnek küme olarak adlandırılır ve Φ ile gösterilir.

Tanım 2.1.7. [3] X üzerindeki $\tilde{X}$ mutlak esnek kümesi $\forall a \in A$ için $F(a) = X$ olacak şekilde tanımlı bir (F, X) esnek kümesidir.

Tanım 2.1.8. [5] τ , X üzerinde esnek kümelerin bir koleksiyonu ve E parametre kümesi olsun. Bu takdirde τ aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa X üzerinde bir esnek topoloji olarak adlandırılır.

i) $\Phi, \tilde{X} = (F, X) \in \tau$

ii) τ 'daki herhangi (keyfi) sayıda esnek kümelerin birleşimi τ 'ya aittir.

iii) τ 'daki herhangi iki esnek kümenin kesişimi yine τ 'ya aittir.

(X, τ, E) üçlüsüne X üzerinde bir esnek topolojik uzay denir.

Tanım 2.1.9.[3] (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay olmak üzere τ 'nün elamanlarına X kümesi üzerinde esnek açık küme denir.

Tanım 2.1.10.[2] (X, τ, E) esnek topolojik uzay ve (F, E) , X üzerinde esnek küme olsun. Eğer $(F, E)^C \in \tau$ ise (F, E) esnek kümesine X kümesi üzerinde esnek kapalı küme denir.

Tanım 2.1.11. [9] (X, τ, E) ve (Y, τ', E) iki esnek topolojik uzay olsun. $f : (X, \tau, E) \rightarrow (Y, \tau', E)$ bir dönüşüm olsun. $(f(x_e), E)$ 'nin her bir (H, E) esnek

komşuluğu için $f((F, E)) \subset (H, E)$ olacak şekilde (x_e, E) 'nin bir (F, E) esnek komşuluğu mevcutsa bu takdirde f 'e (x_e, E) 'de esnek sürekli dönüşüm denir.

Önerme 2.1.12. [9] (X, τ, E) esnek topolojik uzay olsun. $1_X : X \rightarrow X$ birim dönüşümü esnek sürekli olmak zorunda değildir.

İspat: $X = \{h_1, h_2, h_3\}$, $E = \{e_1, e_2\}$, $\tau = \{\phi, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E)\}$ ve

$\tau' = \{\phi, \tilde{X}, (G_1, E), (G_2, E), (G_3, E), (G_4, E)\}$, X üzerinde iki esnek topolojik uzay ve $(F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E), (G_1, E), (G_2, E), (G_3, E), (G_4, E)$, X üzerinde esnek açık kümeler olmak üzere

$$F_1(e_1) = \{h_2\}, F_1(e_2) = \{h_1\}, F_2(e_1) = \{h_2, h_3\}, F_2(e_2) = \{h_1\}, F_3(e_1) = \{h_1\}, F_3(e_2) = \{h_1, h_2\}, F_4(e_1) = \{h_3\},$$

$$F_4(e_2) = \{h_1, h_2\}, F_4(e_1) = \emptyset, F_2(e_2) = \{h_1\};$$

ve

$$G_1(e_1) = \{h_2\}, G_1(e_2) = \{h_1\}, G_2(e_1) = \{h_2, h_3\}, G_2(e_2) = \{h_1, h_2\}, G_3(e_1) = \{h_1, h_2\},$$

$$G_3(e_2) = X, G_4(e_1) = \{h_2\}, G_4(e_2) = \{h_1, h_2\}$$

olarak tanımlansın. $f^{-1}((G_3, E)) = \{(e_1, \{h_1, h_2\}), (e_2, X)\} \notin (X, \tau, E)$ ve

$f^{-1}((G_4, E)) = \{(e_1, \{h_2\}), (e_2, \{h_1, h_2\})\} \notin (X, \tau, E)$ dir. Bundan dolayı $f = 1_X : X \rightarrow X$ dönüşümü esnek sürekli değildir.

Tanım 2.1.13. [25] $A \subseteq E$ parametrelerin bir kümesi olsun. (a, r) ve (b, r') iki esnek parametrik skaler olsun. Bu takdirde esnek parametrik skalerler arasındaki toplamayı ve esnek parametrik skalerler üzerindeki skalerler çarpımını aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(a, r) \dot{+} (b, r') = (\{a, b\}, r + r') \text{ ve her } \lambda \in \mathbb{R} \text{ için } \lambda(a, r) = (a, \lambda r).$$

Tanım 2.1.14. [25] (F, A) , X üzerinde bir esnek küme olsun.

$$f(A, F(A)) = (f_1, f_2)(A, F(A)) \text{ olacak şekilde } f_1 : A \rightarrow A \text{ ve } f_2 : F(A) \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonları varsa (F, A) üzerindeki bir f fonksiyonu parametrik skaler değerli bir fonksiyon olarak adlandırılır. Benzer şekilde yukarıdaki tanımı $f_1 : A \times A \rightarrow A$ ve $f_2 : F(A) \times F(A) \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$f(A \times A, F(A) \times F(A)) = (f_1, f_2)(A \times A, F(A) \times F(A))$ ile $f : (F, A) \times (F, A) \rightarrow (A, \mathbb{R})$ şeklinde genişletilebilir.

2.2. Metrik uzaylar ve esnek metrik uzaylar

Bu bölümde esnek kümeler (uzaylar) üzerinde tanımlı esnek metriklerle ilgili temel kavramlardan bahsedilecektir.

Tanım 2.2.1. [40] X boştan farklı bir küme olmak üzere $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

$$M(1) \quad \forall x, y \in X, \quad d(x, y) \geq 0$$

$$M(2) \quad \forall x, y \in X, \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$M(3) \quad \forall x, y \in X, \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$M(4) \quad \forall x, y, z \in X, \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

özelliklerini sağlıyorsa d 'ye X üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine de metrik uzay denir.

Tanım 2.2.2. [36] X boştan farklı bir küme olsun ve $d : X \times X \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonunun her $x, y \in X$ ve p sabit nokta olmak üzere aşağıdaki şartları sağladığını kabul edelim.

$$1. \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$2. \quad d(x, y) = d(y, x),$$

$$3. \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

$$4. \quad d^p(x, y) = \frac{2d(x, y)}{d(x, p) + d(y, p) + d(x, y)}$$

Bu takdirde d dönüşümü bir Steinhaus Transform metrik olarak adlandırılır ve (X, d) ikilisine Steinhaus Transform metrik uzay denir.

Tanım 2.2.3. [41] $X \neq \emptyset$ ve $x \in X$ olsun. $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu için $f(x) = x$ ise $x \in X$ 'e f 'in sabit noktası denir.

Tanım 2.2.4. [41] (X, d) metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y)$$

şartını sağlayan bir $\lambda \geq 0$ sabiti varsa T 'ye Lipschitz dönüşümü (Lipschitz mapping) denir. Burada $0 \leq \lambda < 1$ ise T 'ye büzülme veya daralma (contraction) dönüşümü ve $\lambda = 1$ ise T 'ye genişlemeyen (non-expansive) dönüşüm denir. Eğer her $x, y \in X$ için ($x \neq y$)

$$d(Tx, Ty) < \lambda d(x, y)$$

şartı sağlanıyorsa T 'ye büzülebilir (contractive) dönüşüm denir. Bu durumda aşağıdaki gerektirmenin doğruluğu kolayca görülebilir.

Büzülme dönüşümü $\Rightarrow$ Büzülebilir dönüşüm $\Rightarrow$ Genişlemeyen dönüşüm $\Rightarrow$ Lipschitz şartını sağlar.

Teorem 2.2.5. [16] (Banach Büzülme Teoremi) (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y)$$

olacak şekilde bir $\lambda \in (0, 1)$ sabiti bulunabiliyorsa T 'nin X 'de bir tek sabit noktası vardır.

Tanım 2.2.6. [29] $A \subseteq E$ parametrelerin bir kümesi olsun. Eğer $r \in \mathbb{R}$ ve $a \in A$ ise (a, r) sıralı ikilisi esnek parametrik skaler olarak adlandırılır. $r = 0$ ise (a, r) sıralı ikilisi esnek anlamda 0 (sıfır) olarak adlandırılır. $r \geq 0$ ise (a, r) esnek parametrik skaleri negatif olmayan olarak adlandırılır. (a, r) ve (b, r') iki esnek parametrik skalerler olsun. $r \geq r'$ ise (a, r) 'nin (b, r') 'den küçük olmadığını söylenir ve $(a, r) \succeq (b, r')$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.2.7. [25] (F, A) , X üzerinde bir esnek küme olsun. $\tilde{\pi}: A \times A \rightarrow A$ bir parametrik skaler değerli bir fonksiyon olsun. $\tilde{\mathfrak{D}}$ aşağıdaki şartları sağlıyorsa

$\tilde{\mathcal{D}} : (F, A) \times (F, A) \rightarrow (A, \mathbb{R}^+ \cup \{0\})$ parametrik skaler değerli fonksiyonunun (F, A) , X üzerinde bir esnek metrik olduğu söylenir.

1. $\tilde{\mathcal{D}}((a, F(a)), (b, F(b))) \succeq (\tilde{\pi}(a, b), 0)$, $a = b$ iken eşitlik sağlanır.
2. Her $a, b \in A$ için $\tilde{\mathcal{D}}((a, F(a)), (b, F(b))) = \tilde{\mathcal{D}}((b, F(b)), (a, F(a)))$
3. Her $a, b, c \in A$ için

$$\tilde{\mathcal{D}}((a, F(a)), (c, F(c))) \prec \tilde{\mathcal{D}}((a, F(a)), (b, F(b))) \dot{+} \tilde{\mathcal{D}}((b, F(b)), (c, F(c)))$$

$((F, A), \tilde{\mathcal{D}})$ ikilisine X üzerinde bir esnek metrik uzay denir.

Tanım 2.2.8. [25] (F, A) ve (F', A') sırasıyla X ve Y üzerinde iki esnek küme olsun.

$f_1 : A \rightarrow A'$, $f_2 : F(A) \rightarrow F'(A')$, $F(A) = \{F(a) : a \in A\}$ ve $F'(A') = \{F'(a') : a' \in A'\}$ olmak üzere dönüşümler olsun. Bu takdirde $f = (f_1, f_2) : (F, A) \rightarrow (F', A')$ ikilisi

$$f(V, B)(e') = \begin{cases} \bigcup_{e \in f_1^{-1}(e') \cap B} f_2(V(e)) & f_1^{-1}(e') \cap B \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlıdır.

Bu durumda f esnek dönüşüm olarak adlandırılır ve $(f(V, A), C)$, (V, B) esnek kümesinin esnek görüntüsü olarak adlandırılır. $(W, C) \in (F', A')$ olsun. Bu takdirde (W, C) 'nin yukarıda tanımlanan f esnek dönüşümü altındaki ters görüntüsü

$$f^{-1}(W, C)(e) = \begin{cases} f_2^{-1}(W(f_1(e))) & f_1(e) \in C \\ \emptyset & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere, $f^{-1}(W, C)$ ile gösterilen X üzerinde esnek kümedir.

Tanım 2.2.9. [25] $A \subseteq E$ parametrelerin kümesi olsun. Esnek parametrik skalerlerin bir dizisi $\{(a_n, r_n)\}$ 'dir. ($i \neq j$ için $a_i = a_j$ olabilir) $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r$ olacak şekilde bir $r \in \mathbb{R}$ mevcutsa $\{(a_n, r_n)\}$ bir esnek parametrik skalere yakınsaktır denir ve $\forall a \in A$ için $(a_n, r_n) \rightarrow (a, r)$ olarak yazılır.

Tanım 2.2.10. [25] $A \subseteq E$ parametrelerin bir kümesi olsun. $\{(a_n, r_n)\}$ ($i \neq j$ için $a_i = a_j$ olabilir) esnek parametrik skalerlerin bir dizisi olsun. $(a_{n+1}, r_{n+1}) \preceq (a_n, r_n)$ ise $\{(a_n, r_n)\}$ azalan $(a_n, r_n) \preceq (a_{n+1}, r_{n+1})$ ise $\{(a_n, r_n)\}$ artan olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.11. [25] (F, A) , X üzerinde bir esnek küme olsun. $f(F, A) = (f_1, f_2)(A, F(A))$ olacak şekilde $f_1 : A \rightarrow A$ ve $f_2 : F(A) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları varsa f 'e (F, A) üzerinde parametrik skaler değerli fonksiyon denir.

Tanım 2.2.12. [25] (F, A) , X üzerinde bir esnek ve $\tilde{\mathcal{D}}, (F, A)$ üzerinde bir esnek metrik olsun. Her $(c, x) \in (F, A)$ esnek noktası için (c, x) ve $(a, F(a))$ arasındaki uzaklık $\tilde{\mathcal{D}}((c, x), (a, F(a)))$ ile gösterilir.

X , d metriği ile birlikte bir metrik uzay ise (c, x) ve $(a, F(a))$ arasındaki uzaklık

$\tilde{\mathcal{D}}((c, x), (a, F(a))) = (\tilde{\pi}(c, a), \inf_{y \in F(a)} d(x, y))$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.13. [5] (X, τ) bir esnek topolojik uzay ve $x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in X$ olsun. $x \in F_A$, $y \in G_B$ ve $F_A \tilde{\cap} G_B = \Phi$ olacak şekilde F_A ve G_B esnek açık kümeleri mevcutsa (X, τ) esnek topolojik uzayı esnek Hausdorff uzayı veya esnek T_2 uzayı olarak adlandırılır.

Önerme 2.2.14. [25] Her esnek metrik uzay esnek Hausdorff uzayıdır.

İspat: $(\tilde{X}, d)$ en az iki esnek elemana sahip bir esnek metrik olsun. $a, \tilde{b}$ $d(a, \tilde{b}) \succ 0$ yani $\forall \lambda \in A$ için $d(a, \tilde{b})(\lambda) \succ 0$ olacak şekilde X de iki esnek eleman olsun.

$\forall \lambda \in A$ için $0 \prec r_\lambda \prec \frac{1}{2} d(a, \tilde{b})(\lambda)$ koşulunu sağlayan herhangi bir $\tilde{r}(\lambda)$ reel sayısını

göze alalım. $\forall \lambda \in A$ için $\tilde{r}(\lambda) = r_\lambda$ olsun. Bu taktirde $\tilde{r} \in R$ ve $a, \tilde{b}$ merkezli $\tilde{r}$

yarıçaplı esnek açık yuvarlar $B(a, \tilde{r}) = \{x \in X; d(x, a) \prec \tilde{r}\}$ ve

$B(\tilde{b}, \tilde{r}) = \{x \in X; d(x, \tilde{b}) \prec \tilde{r}\}$ dir. Açık olarak, $B(a, \tilde{r}) \cap B(\tilde{b}, \tilde{r}) = \Phi$ ve sonuç

olarak $S(B(a, \tilde{r}) \cap B(\tilde{b}, \tilde{r})) = \Phi$.

3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

3.1. Steinhaus Transform esnek metrik uzaylar

Bu bölümde Steinhaus Transform esnek metrik uzay tanımı verilerek, sabit nokta teoremlerinde kullanmaya yönelik Steinhaus Transform esnek metriğin kullanılmasıyla esnek dizi, esnek yakınsak dizi, esnek Cauchy dizisi tanımları ifade edilmiştir.

Tanım 3.1.1. (F, A) , X üzerinde bir esnek küme ve $\tilde{\pi}: A \times A \rightarrow A$ bir parametrik skaler değerli fonksiyon olsun. $(\tilde{\pi}(a, b), 0)$ esnek parametrik skaleri $\tilde{\pi}(a, b) \in A$, $0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere esnek anlamda 0 (sıfır) elemanını gösterebilir.

$\tilde{\mathfrak{D}} : (F, A) \times (F, A) \rightarrow (A, \mathbb{R}^+ \cup \{0\})$, (F, A) üzerinde bir esnek metrik olmak üzere $\tilde{\mathfrak{D}}_p$ aşağıdaki şartları sağlıyorsa

$\tilde{\mathfrak{D}}_p : (F, A) \times (F, A) \rightarrow (A, \mathbb{R}^+ \cup \{0\})$ parametrik skaler değerli fonksiyonu (F, A) üzerinde bir Steinhaus Transform esnek metrik olarak adlandırılır. $((F, A), \tilde{\mathfrak{D}}_p)$ ikilisine de Steinhaus Transform esnek metrik uzay denir.

$\forall (a, F(a)), (b, F(b)), (c, F(c)) \in (F, A)$ için

1. $\tilde{\mathfrak{D}}_p((a, F(a)), (b, F(b))) \succeq (\tilde{\pi}(a, b), 0)$ ve $a = b$ ise eşitlik sağlanır.
2. $\tilde{\mathfrak{D}}_p((a, F(a)), (b, F(b))) = (\tilde{\pi}(a, b), 0) \Leftrightarrow$ her $(a, F(a)), (b, F(b)) \in (F, A)$ ve $(a, F(a)) = (b, F(b))$ $[\forall a, b \in A, a = b]$
3. $\tilde{\mathfrak{D}}_p((a, F(a)), (b, F(b))) = \tilde{\mathfrak{D}}_p((b, F(b)), (a, F(a)))$
4. $\tilde{\mathfrak{D}}_p((a, F(a)), (c, F(c))) \preceq \tilde{\mathfrak{D}}_p((a, F(a)), (b, F(b))) + \tilde{\mathfrak{D}}_p((b, F(b)), (c, F(c)))$
- 5.

$$\tilde{\mathfrak{D}}_p((a, F(a)), (b, F(b))) = \frac{2\tilde{\mathfrak{D}}((a, F(a)), (b, F(b)))}{\tilde{\mathfrak{D}}((a, F(a)), (p, F(p))) + \tilde{\mathfrak{D}}((b, F(b)), (p, F(p))) + \tilde{\mathfrak{D}}((a, F(a)), (b, F(b)))}$$

Tanım 3.1.2. (F, A) , X üzerinde bir esnek küme olsun. (F, A) 'daki bir esnek dizi $n \in \mathbb{N}$ için (F_n, A) , (F, A) 'nın bir esnek alt kümesi olacak şekilde $f(n) = (F_n, A)$ ile tanımlı bir $f: \mathbb{N} \rightarrow (F, A)$ fonksiyonudur ve $\{(F_n, A)\}_{n=1}^{\infty}$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.3. (F, A) , X üzerinde bir esnek küme olsun. $\tilde{\mathfrak{D}}_p$, (F, A) üzerinde bir Steinhaus Transform esnek metrik $\{(F_n, A)\}_{n=1}^{\infty}, (F, A)$ 'da bir esnek dizi ve $(x, F(x)) \in (F, A)$ olsun. Bu takdirde her ϵ pozitif sayısı için $n \geq N$ olmak üzere her n doğal sayısı için $\tilde{\mathfrak{D}}_p((a, F_n(a)), (x, F(x))) \preceq (\tilde{\pi}(a, x), \epsilon)$ olacak şekilde bir N doğal sayısı mevcut ise $\{(F_n, A)\}_{n=1}^{\infty}$ esnek dizisi $(x, F(x))$ 'e esnek yakınsaktır denir.

Teorem 3.1.4. (F, A) , X üzerinde bir esnek küme olsun. $\tilde{\mathfrak{D}}_p$, (F, A) üzerinde bir Steinhaus Transform esnek metrik, $\{(F_n, A)\}_{n=1}^{\infty}, (F, A)$ 'da bir esnek dizi olsun. $\{(F_n, A)\}_{n=1}^{\infty}, (F, A)$ 'da $\tilde{\mathfrak{D}}_p$ metriğine göre esnek yakınsak ise bu taktide (F, A) 'nın bir tek elemanına yakınsar.

İspat: $(x, F(x)), (y, F(y)) \in (F, A)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$(F_n, A) \rightarrow (x, F(x))$ ve $(F_n, A) \rightarrow (y, F(y))$ olacak şekilde farklı iki esnek eleman olsun. Bu takdirde Steinhaus Transform esnek metrik uzayın 4. Koşulundan $\forall x, y \in A$ ve $(p, F(p)) \in (F, A)$ 'nın sabit bir elemanı olmak üzere

$$\tilde{\mathfrak{D}}_p((x, F(x)), (y, F(y))) = \frac{2\tilde{\mathfrak{D}}((x, F(x)), (y, F(y)))}{\tilde{\mathfrak{D}}((x, F(x)), (p, F(p))) + \tilde{\mathfrak{D}}((y, F(y)), (p, F(p))) + \tilde{\mathfrak{D}}((x, F(x)), (y, F(y)))}$$

$$\leq 2\tilde{\mathfrak{D}}((x, F(x)), (y, F(y)))$$

$$\leq 2[\tilde{\mathfrak{D}}((x, F(x)), (a, F_n(a))) + \tilde{\mathfrak{D}}((a, F_n(a)), (y, F(y)))] \quad (a, F(a)) \in (F, A)$$

ϵ keyfi pozitif bir sayı olsun. $\{(F_n, A)\}_{n=1}^{\infty}$ $(x, F(x))$ ve $(y, F(y))$ ye yakınsak olduğundan $\forall n > N_1$ ve $n > N_2$ için aşağıdaki eşitsizler sağlanacak şekilde N_1 ve N_2 doğal sayıları mevcuttur.

$$\tilde{\mathfrak{D}}((x, F(x)), (a, F_n(a))) \preceq (\tilde{\pi}(x, a), \epsilon/4) \preceq 2(\tilde{\pi}(x, a), \epsilon/4) \quad (1)$$

ve

$$\tilde{\mathfrak{D}}_p((a, F_n(a)), (y, F(y))) \preceq (\tilde{\pi}(a, y), \epsilon/4) \preceq 2(\tilde{\pi}(a, y), \epsilon/4) \quad (2)$$

$n \succeq \max\{N_1, N_2\}$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde 1 ve 2 den

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{D}}_p((x, F(x)), (y, F(y))) &\preceq 2((\tilde{\pi}(x, a), \epsilon/4) + (\tilde{\pi}(a, y), \epsilon/4)) \\
&\preceq 2(\{\tilde{\pi}(x, a), \tilde{\pi}(a, y)\}, \epsilon/2) \\
&= (\{\tilde{\pi}(x, a), \tilde{\pi}(a, y)\}, \epsilon)
\end{aligned}$$

Bu $\forall \epsilon > 0$ için $\tilde{\mathfrak{D}}_p((x, F(x)), (y, F(y))) \preceq (\{\tilde{\pi}(x, a), \tilde{\pi}(a, y)\}, \epsilon)$ olduğu anlamına gelir. Bundan dolayı $\tilde{\mathfrak{D}}_p((x, F(x)), (y, F(y))) = (\tilde{\pi}(x, y), 0)$. Bu taktirde Steinhaus Transform esnek metrik tanımının 1. Şartı $x = y$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak $(x, F(x)) = (y, F(y))$ dir.

Tanım 3.1.5. (F, A) , X üzerinde bir esnek küme olsun. $\tilde{\mathfrak{D}}_p$, (F, A) üzerinde bir Steinhaus Transform esnek metrik ve $\{(F_n, A)\}_{n=1}^\infty$, (F, A) 'da bir esnek dizi olsun. Bu takdirde her ϵ pozitif sayısı için $n, m \geq N$ olmak üzere her n, m doğal sayısı için $\tilde{\mathfrak{D}}_p((a, F_n(a)), (a, F_m(a))) \preceq (\tilde{\pi}(a, a), \epsilon)$ olacak şekilde bir N doğal sayısı mevcut ise $\{(F_n, A)\}_{n=1}^\infty$ dizisine bir esnek Cauchy dizisi denir.

Önerme 3.1.6. $((F, A), \tilde{\mathfrak{D}}_p)$, X üzerinde bir Steinhaus Transform esnek metrik uzay ve $\{(F_n, A)\}_{n=1}^\infty$ (F, A) da yakınsak esnek dizi olsun. Bu taktirde $\{(F_n, A)\}_{n=1}^\infty$ esnek Cauchy dizisidir.

İspat: $\{(F_n, A)\}_{n=1}^\infty$ (F, A) da yakınsak esnek dizi, yani $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $(x, F(x)) \in (F, A)$ için $(F_n, A) \rightarrow (x, F(x))$ olsun. (F_n, A) esnek Cauchy esnek dizisinin bir esnek Cauchy dizisi olduğunu göstermek istiyoruz. $\forall a \in A$ için $(a, F(a)), (b, F(b)) \in (F, A)$ olmak üzere Steinhaus Transform esnek metriğin 3. özelliğinden yani üçgen eşitsizliği özelliğinden

$$\tilde{\mathfrak{D}}_p((a, F_n(a)), (b, F_n(b))) \preceq \tilde{\mathfrak{D}}_p((a, F_n(a)), (x, F(x))) + \tilde{\mathfrak{D}}_p((x, F(x)), (b, F_n(b))) \quad (1)$$

ϵ keyfi bir pozitif tamsayı olsun. $\{(F_n, A)\}_{n=1}^\infty$ (F, A) da yakınsak olduğundan $\forall n$ için $n > N_1$ ve $n > N_2$ olacak şekilde N_1 ve N_2 doğal sayıları vardır öyle ki

$$\tilde{\mathfrak{D}}_p((a, F_n(a)), (x, F(x))) \leq (\pi(a, x), \frac{\epsilon}{2}) \quad (2)$$

$$\tilde{\mathfrak{D}}_p((x, F(x)), (b, F_n(b))) \leq (\pi(x, b), \frac{\epsilon}{2}) \quad (3)$$

Şimdi $n \geq \max \{N_1, N_2\}$ olduğunu varsayalım. 1,2 ve 3 ten

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{D}}_p((a, F_n(a)), (b, F_n(b))) &\preceq (\pi(a, x), \frac{\epsilon}{2}) \dot{+} (\pi(a, x), \frac{\epsilon}{2}) \\ &\leq \left(\left\{ \pi(a, x), \pi(x, b) \right\}, \epsilon \right) \end{aligned}$$

Her $\epsilon > 0$ ve $a \in A$ için $\tilde{\mathfrak{D}}_p((a, F_n(a)), (b, F_n(b))) \leq \left(\left\{ \pi(a, x), \pi(x, b) \right\}, \epsilon \right)$ olduğundan $\{(F_n, A)\}_{n=1}^{\infty}$ esnek dizisi bir esnek Cauchy dizisidir. ■

Tanım 3.1.7. (F, A) X üzerinde bir esnek küme, $\tilde{\mathfrak{D}}_p(F, A)$ üzerinde bir Steinhaus Transform esnek metrik olsun. Eğer her esnek Cauchy dizisi (F, A) da yakınsak ise (F, A) ya tam Steinhaus Transform esnek metrik uzay denir.

Tanım 3.1.8. $((F, A), \tilde{\mathfrak{D}}_p)$ ve $((F', A'), \tilde{\mathfrak{D}}'_p)$ sırasıyla X ve Y üzerinde iki Steinhaus Transform esnek metrik uzay olsun. $f = (f_1, f_2) : ((F, A), \tilde{\mathfrak{D}}_p) \rightarrow ((F', A'), \tilde{\mathfrak{D}}'_p)$ bir esnek dönüşüm olsun. Bu taktirde f esnek süreklidir ancak ve ancak her $(x, F(x)) \in (F, A)$ ve $\forall \epsilon > 0$ için en az bir pozitif δ sayısı vardır öyle ki her $(y, F(y)) \in (F, A)$ için

$$\tilde{\mathfrak{D}}'_p(f(x, F(x)), f(y, F(y))) \preceq (\tilde{\pi}(x, y), \delta) \text{ iken}$$

$$\tilde{\mathfrak{D}}'_p(f(x, F(x)), f(y, F(y))) \preceq (\tilde{\pi}'(\tilde{\pi}(x, y)), \epsilon) .$$

Tanım 3.1.9. $((F, A), \tilde{\mathfrak{D}}_p)$ X üzerinde Steinhaus Transform esnek metrik ve bir esnek dönüşüm olsun. $\forall x, y \in A$ için

$\tilde{\mathfrak{D}}_p(f(x, F(x)), f(y, F(y))) \preceq c \cdot \tilde{\mathfrak{D}}_p((x, F(x)), (y, F(y)))$ olacak şekilde $0 < c < 1$ olmak üzere bir pozitif c sayısı varsa f esnek büzülme olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.10. $((F, A), \tilde{\mathcal{D}}_p)$ X üzerinde tam Steinhaus Transform esnek metrik uzay ve $f : ((F, A), \tilde{\mathcal{D}}_p) \rightarrow ((F, A), \tilde{\mathcal{D}}_p)$ bir esnek dönüşüm olsun. f için bir esnek sabit küme $f((x, F(x))) = (x, F(x))$ olacak şekilde (F, A) nın $(x, F(x))$ şeklinde bir esnek alt kümesidir.

Teorem 3.1.11. (F, A) , X üzerinde bir esnek küme olsun. $\tilde{\mathcal{D}}_p$, (F, A) üzerinde bir Steinhaus Transform esnek metrik, $\{(F_n, A)\}_{n=1}^{\infty}$, (F, A) 'da bir esnek Cauchy dizisi olsun. $\{(F_n, A)\}_{n=1}^{\infty}$, (F, A) 'da esnek yakınsak ise bu takdirde (F, A) 'nın bir tek elamanına yakınsar.

İspat: İspatı çelişki yöntemiyle yapmaya yönelik $(F_n, A) \rightarrow (x, F(x))$ 'e esnek yakınsak ve $(F_n, A) \rightarrow (y, F(y))$ 'a esnek yakınsak olacak şekilde $(x, F(x)), (y, F(y)) \in (F, A)$ elemanlarının olduğunu kabul edelim. Tanım 3.1.1 de gösterilen Steinhaus transform esnek metriğin 4. özelliğinden yararlanarak her $n \in \mathbb{N}$ ve her $a \in A$ için

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}_p((x, F(x)), (y, F(y))) &= \frac{2\tilde{\mathcal{D}}((x, F(x)), (y, F(y)))}{\tilde{\mathcal{D}}((x, F(x)), (p, F(p))) + \tilde{\mathcal{D}}((y, F(y)), (p, F(p))) + \tilde{\mathcal{D}}((x, F(x)), (y, F(y)))} \\ &\preceq 2 \tilde{\mathcal{D}}((x, F(x)), (y, F(y))) \\ &\preceq 2 \left[\tilde{\mathcal{D}}((x, F(x)), (a, F_n(a))) + \tilde{\mathcal{D}}((a, F_n(a)), (y, F(y))) \right] \end{aligned}$$

eşitsizliğine sahibiz. Şimdi ϵ keyfi bir pozitif tamsayı sayı olsun. $(F_n, A)_{n=1}^{\infty}$, $(x, F(x))$ ve $(y, F(y))$ 'ye yakınsadığı için, her $n > N_1$ ve $n > N_2$ için

$$\tilde{\mathcal{D}}((x, F(x)), (a, F_n(a))) \preceq \left(\tilde{\pi}(x, a), \frac{\epsilon}{4} \right) \preceq 2 \left(\tilde{\pi}(x, a), \frac{\epsilon}{4} \right) \quad (2.1)$$

ve

$$\tilde{\mathcal{D}}((a, F_n(a)), (y, F(y))) \preceq \left(\tilde{\pi}(a, y), \frac{\epsilon}{4} \right) \preceq 2 \left(\tilde{\pi}(a, y), \frac{\epsilon}{4} \right) \quad (2.2)$$

olacak şekilde N_1 ve N_2 doğal sayıları vardır. Şimdi $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde (2.1) ve (2.2)'den

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{D}}_p((x, F(x)), (y, F(y))) &\leq 2 \left(\left(\tilde{\pi}(x, a), \frac{\epsilon}{4} \right) \dot{+} \left(\tilde{\pi}(a, y), \frac{\epsilon}{4} \right) \right) \\ &\leq 2 \left(\{ \tilde{\pi}(x, a), \tilde{\pi}(a, y) \}, \frac{\epsilon}{2} \right) \\ &\leq (\{ \tilde{\pi}(x, a), \tilde{\pi}(a, y) \}, \epsilon)\end{aligned}$$

eşitsizliğine sahip oluruz. Bu taktirde her $\epsilon > 0$ ve $a \in A$ için

$\tilde{\mathfrak{D}}_p((x, F(x)), (y, F(y))) \leq (\{ \tilde{\pi}(x, a), \tilde{\pi}(a, y) \}, \epsilon)$ anlamına gelir. Bundan dolayı $\tilde{\mathfrak{D}}_p((x, F(x)), (y, F(y))) = (\tilde{\pi}(x, y), 0)$ 'dir. Tanım 3.1.1'nin (1) koşulu $x = y$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak $(x, F(x)) = (y, F(y))$ 'dir. ■

Teorem 3.1.12. $((F, A), \tilde{\mathfrak{D}}_p)$, X üzerinde Steinhaus Transform esnek metrik uzayında esnek büzülme dönüşümü esnek süreklidir.

İspat: f 'in esnek sürekli olduğunu göstermek için keyfi bir $(x_0, F(x_0)) \in (F, A)$

noktasında esnek sürekli olduğunu gösterelim. $\delta = \frac{\epsilon}{c}$ alırsak;

$\forall (x, F(x)), (x_0, F(x_0)) \in (F, A)$ için $\tilde{\mathfrak{D}}_p((x, F(x)), (x_0, F(x_0))) < (\tilde{\pi}(x, x_0), \delta)$ iken

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{D}}_p(f(x, F(x)), f(x_0, F(x_0))) &= \frac{2\tilde{\mathfrak{D}}((x, F(x)), (x_0, F(x_0)))}{\tilde{\mathfrak{D}}((x, F(x)), (p, F(p))) + \tilde{\mathfrak{D}}((x_0, F(x_0)), (p, F(p))) + \tilde{\mathfrak{D}}((x, F(x)), (x_0, F(x_0)))} \\ &\leq 2\tilde{\mathfrak{D}}((x, F(x)), (x_0, F(x_0))) \\ &\leq c \cdot \tilde{\mathfrak{D}}_p((x, F(x)), (x_0, F(x_0))) \\ &\leq c \cdot (\tilde{\pi}(x, x_0), \delta) \\ &= (\tilde{\pi}(x, x_0), c \cdot \delta) \\ &= (\tilde{\pi}(x, x_0), \epsilon)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece f , $(x_0, F(x_0))$ noktasında esnek süreklidir. $(x_0, F(x_0)) \in (F, A)$ 'nın keyfi bir noktası olduğundan esnek süreklidir. ■

Lemma 3.1.13. Her Steinhaus Transform esnek metrik uzay esnek Hausdorff uzayıdır.

İspat: $(F, A), X$ üzerinde bir esnek küme, $\tilde{\mathfrak{D}}_p$ Steinhaus Transform esnek metrik ve $((F, A), \tilde{\mathfrak{D}}_p)$ en az esnek iki elemana sahip Steinhaus Transform esnek metrik uzay olsun. $(a, F(a))$ ve $(b, F(b))$ $\tilde{\mathfrak{D}}_p((a, F(a)), (b, F(b))) = (\pi(a, b), r) > (\pi(a, b), 0)$ olacak şekilde $((F, A), \tilde{\mathfrak{D}}_p)$ de iki farklı esnek eleman olsun. Bu taktirde $(a, F(a))$

merkezli $(a', \frac{r}{5})$ yarıçaplı bir $B_{\tilde{\mathfrak{D}}_p}((a, F(a)), (a', \frac{r}{5}))$ esnek açık yuvarı ve $(b, F(b))$

merkezli $(b', \frac{r}{5})$ yarıçaplı bir $B_{\tilde{\mathfrak{D}}_p}((b, F(b)), (b', \frac{r}{5}))$ esnek açık yuvarı vardır öyle ki

$$B_{\tilde{\mathfrak{D}}_p}((a, F(a)), (a', \frac{r}{5})) \cap B_{\tilde{\mathfrak{D}}_p}((b, F(b)), (b', \frac{r}{5})) = \Phi. \quad \text{Çünkü}$$

$$B_{\tilde{\mathfrak{D}}_p}((a, F(a)), (a', \frac{r}{5})) \cap B_{\tilde{\mathfrak{D}}_p}((b, F(b)), (b', \frac{r}{5})) \neq \Phi \quad \text{olsaydı en az bir}$$

$$(c, F(c)) \in B_{\tilde{\mathfrak{D}}_p}((a, F(a)), (a', \frac{r}{5})) \cap B_{\tilde{\mathfrak{D}}_p}((b, F(b)), (b', \frac{r}{5})) \quad \text{olurdu. Steinhaus}$$

Transform esnek metriğin 4. Özelliğinden yani üçgen eşitsizliği özelliğinden

$$\tilde{\mathfrak{D}}_p((a, F(a)), (b, F(b))) \preceq \tilde{\mathfrak{D}}_p((a, F(a)), (c, F(c))) \dot{+} \tilde{\mathfrak{D}}_p((c, F(c)), (b, F(b)))$$

$$(\pi(a, b), r) \preceq (\pi(a, b), \frac{r}{5}) \dot{+} (\pi(c, b), \frac{r}{5})$$

$$\leq (\{\pi(a, b), \pi(c, b)\}, \frac{2r}{5})$$

$$\text{olup, bu ise bir çelişkidir. Böylece } B_{\tilde{\mathfrak{D}}_p}((a, F(a)), (a', \frac{r}{5})) \cap B_{\tilde{\mathfrak{D}}_p}((b, F(b)), (b', \frac{r}{5})) = \Phi.$$

Sonuç olarak $((F, A), \tilde{\mathfrak{D}}_p)$ Steinhaus Transform esnek metrik uzayın farklı iki

$(a, F(a)), (b, F(b))$ noktaları esnek ayırık açık yuvarlara ait olduğundan $((F, A), \tilde{\mathfrak{D}}_p)$

Steinhaus Transform esnek metrik uzayı esnek Hausdorff tur.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Steinhaus Transform Esnek Metrik Uzaylarda Esnek Sabit Nokta Teoremleri

Teorem 4.1.1. (Steinhaus Transform Esnek Metrik Uzaylar için Banach Büzülme Teoremi)

$((F, A), \tilde{\mathcal{D}}_p)$, X üzerinde bir tam Steinhaus Transform esnek metrik uzay olsun ve $f : ((F, A), \tilde{\mathcal{D}}_p) \rightarrow ((F, A), \tilde{\mathcal{D}}_p)$ bir Steinhaus Transform esnek büzülme dönüşümü olsun. Bu taktirde f bir tek sabit esnek noktaya sahiptir.

İspat: (F_0, A) , (F, A) 'da keyfi bir esnek nokta olsun. $\{(F_n, A)_{n=1}^\infty\}$ esnek dizisini aşağıdaki gibi oluşturalım.

$$(F_{n+1}, A) = f((F_n, A)) = f^{n+1}((F_0, A)) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.1)$$

f esnek büzülme olduğundan, bu taktirde her $n \geq 1$ için

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}_p((F_{n+1}, A), (F_n, A)) &= \frac{2\mathcal{D}((F_{n+1}, A), (F_n, A))}{\mathcal{D}((F_{n+1}, A), (F_i, A)) \dot{+} \mathcal{D}((F_n, A), (F_i, A)) \dot{+} \mathcal{D}((F_{n+1}, A), (F_n, A))} \\ &= \frac{2\mathcal{D}(f(F_n, A), f(F_{n-1}, A))}{\mathcal{D}(f(F_n, A), f(F_{i-1}, A)) \dot{+} \mathcal{D}(f(F_{n-1}, A), f(F_{i-1}, A)) \dot{+} \mathcal{D}(f(F_n, A), f(F_{n-1}, A))} \\ &\preceq 2\mathcal{D}(f(F_n, A), f(F_{n-1}, A)) \\ &\preceq 2c\mathcal{D}((F_n, A), (F_{n-1}, A)) \end{aligned} \quad (4.2)$$

olacak şekilde bir $0 < c < 1$ mevcuttur. İndiksiyonla $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$\tilde{\mathcal{D}}_p((F_{n+1}, A), (F_n, A)) \preceq 2^n c^n \tilde{\mathcal{D}}((F_1, A), (F_0, A)) \quad (4.3)$$

olduğu sonucuna varırız.

Herhangi bir $i > m > n$ için,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}_p(F_n, A), (F_m, A)) &= \frac{2\mathfrak{D}((F_n, A), (F_m, A))}{\mathfrak{D}((F_n, A), (F_i, A)) \dot{+} \mathfrak{D}((F_m, A), (F_i, A)) \dot{+} \mathfrak{D}((F_n, A), (F_m, A))} \\
&\preceq 2\mathfrak{D}_p((F_n, A), (F_m, A)) \\
&\preceq 2[\mathfrak{D}((F_n, A), (F_{n+1}, A)) \dot{+} \dots \dot{+} \mathfrak{D}((F_{m-1}, A), (F_m, A))] \\
&\preceq 2[c^n \mathfrak{D}((F_1, A), (F_0, A)) \dot{+} \dots \dot{+} c^{m-1} \mathfrak{D}((F_1, A), (F_0, A))] \\
&= (2 \cdot c^n \dot{+} 2 \cdot c^{n+1} \dot{+} \dots \dot{+} 2 \cdot c^{m-1}) \mathfrak{D}((F_1, A), (F_0, A)) \\
&\preceq \left(\sum_{n=0}^{\infty} (2c)^n \right) \mathfrak{D}((F_1, A), (F_0, A)) \\
&\preceq \frac{1}{1-2c} \mathfrak{D}((F_1, A), (F_0, A)). \tag{4.4}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine sahibiz. Şu hâlde (4.4) $\{(F_n, A)\}_{n=1}^{\infty}$ 'un (F, A) da bir Cauchy esnek dizisi olduğunu gösterir. (F, A) tam Steinhaus Transform esnek metrik uzay olduğundan, bu takdirde $\{(F_n, A)\}_{n=1}^{\infty} (x, F(x))$ 'e yakınsayacak şekilde $(x, F(x)) \in (F, A)$ vardır. f esnek sürekli olduğundan, Teorem 3.1.13'den $f((F, A)) f((x, F(x)))$ e yakınsar. Bununla birlikte $\{(F_n, A)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin tanımına göre, $f((F_n, A)) (x, F(x))$ e yakınsar. Teorem 3.1.13'den $f((x, F(x))) = (x, F(x))$ olduğu elde edilir. $(x, F(x))$ 'in teklik özelliğini ispatlamak için $(x, F(x)) \neq (y, F(y))$ ve $f((y, F(y))) = (y, F(y))$ olacak şekilde başka bir $(y, F(y)) \in (F, A)$ elemanının mevcut olduğunu varsayalım. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}_p((x, F(x)), (y, F(y))) &= \mathfrak{D}_p(f((x, F(x))), f((y, F(y)))) \\
&\preceq c\mathfrak{D}_p((x, F(x)), (y, F(y)))
\end{aligned}$$

Bu takdirde yukarıdaki eşitsizlik $c > 1$ olduğunu gerektirir ki bu bir çelişkidir. Bu ispatı tamamlar. ■

Önerme 4.1.2. [29] $A \subseteq E$ parametrelerin bir kümesi (a, r) ve (b, r') iki esnek parametrik skaler olsun. Her $\epsilon > 0$ için $(a, r) \prec (b, r' + \epsilon)$ ise bu takdirde

$$(a, r) \preceq (b, r').$$

Teorem 4.1.3. $((F, A), \tilde{\mathcal{D}}_p)$, X üzerinde tam Steinhaus Transform esnek metrik uzay olsun. $T = (T_1, T_2) : ((F, A), \tilde{\mathcal{D}}_p) \rightarrow ((F, A), \tilde{\mathcal{D}}_p)$ 'ye her $(a, F(a)) \in (F, A)$ için $T(a, F(a)) = (T_1(a), T_2(F(a))) = (T_1(a), F(T_1(a)))$ olacak şekilde esnek sürekli bir dönüşüm olsun ve parametrik skaler değerli $\varphi : (F, A) \rightarrow (A, \mathbb{R}^+)$ dönüşümü

$$\tilde{\mathcal{D}}_p(T((a, F(a))), (a, F(a))) \prec \varphi((a, F(a))) - \varphi(T(a, F(a))) \quad (5.1)$$

sağlasın. Bu takdirde her $(a, F(a)) \in (F, A)$ için $\{T^n((a, F(a)))\}$ bir esnek sabit noktaya yakınsar.

İspat: $T = (T_1, T_2)$ ve $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ olsun. Şimdi $T((a, F(a))) = (T_1(a), T_2(F(a)))$ ise $T((a, F(a))) = (a_1, F(a_1))$ alalım. Bu takdirde

$$\varphi(T((a, F(a)))) = (\varphi_1(a_1), \varphi_2(F(a_1))) = (b_1, r_1).$$

Benzer bir yolla $n = 1, 2, \dots$ için $T^n((a, F(a))) = (a_n, F(a_n))$ yazarız. Şu hâlde

$$\varphi(T^n((a, F(a)))) = (\varphi_1(a_n), \varphi_2(F(a_n))) = (b_n, r_n).$$

(4.6) bağıntısı

$$\mathcal{D}_p(T((a, F(a))), (a, F(a))) \dot{+} \varphi(T((a, F(a)))) \prec \varphi((a, F(a))) \quad (5.2)$$

$$\frac{2\mathcal{D}(T((a, F(a))), (a, F(a)))}{\mathcal{D}(T((a, F(a))), (c, F(c))) \dot{+} \mathcal{D}(T((a, F(a))), (c, F(c))) \dot{+} \mathcal{D}(T((a, F(a))), (a, F(a)))} \dot{+} \varphi(T((a, F(a)))) \prec \varphi((a, F(a))) \quad (5.3)$$

olmasını gerektirir. Bundan dolayı Önerme 4.1.2'den $\varphi(T((A, F(a)))) < \varphi((a, F(a)))$ elde edilir. Bu $\varphi(T^2((a, F(a)))) \preceq \varphi(T((a, F(a))))$ olması anlamına gelir. Bu metodu devam ettirirsek, $\varphi(T^{n+1}((a, F(a)))) \preceq \varphi(T^n((a, F(a))))$ elde ederiz. Bu ise $\{\varphi(T^n((a, F(a))))\}$ 'nin artan olması anlamına gelir ve böylece reel sayıların $\{r_n\}$ dizisi artandır. Bundan dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(T^n((a, F(a)))) = (b, r) \quad (\text{Her } b \in E \text{ için}) \quad (5.3)$$

olacak şekilde bir $r \in R$ vardır.

Açık olarak (b, r) negatif değildir. Bu takdirde $p \geq m \geq n$ olmak üzere tüm $n, m, p \in N$ için

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathfrak{D}}_p(T^n((a, F(a))), T^m((a, F(a)))) \\ &= \frac{2\mathfrak{D}(T^n((a, F(a))), T^m((a, F(a))))}{\mathfrak{D}(T^n((a, F(a))), T^p((a, F(a)))) + \mathfrak{D}(T^m((a, F(a))), T^p((a, F(a)))) + \mathfrak{D}(T^n((a, F(a))), T^m((a, F(a))))} \\ &\preceq 2\tilde{\mathfrak{D}}(T^n((a, F(a))), T^m((a, F(a)))) \\ &\preceq 2[\tilde{\mathfrak{D}}(T^n((a, F(a))), T^{n+1}((a, F(a)))) + \tilde{\mathfrak{D}}(T^{n+1}((a, F(a))), T^{n+2}((a, F(a)))) \\ &\quad + \tilde{\mathfrak{D}}(T^{n+2}((a, F(a))), T^{n+3}((a, F(a)))) + \dots + \tilde{\mathfrak{D}}(T^{m-1}((a, F(a))), T^m((a, F(a))))] \\ &\preceq 2 \sum_{i=n}^{m-1} \mathfrak{D}(T^i((a, F(a))), T^{i+1}((a, F(a)))) \\ &\preceq 2\varphi(T^n((a, F(a)))) - 2\varphi(T^{n+1}((a, F(a)))) \\ &\quad + 2\varphi(T^{n+1}((a, F(a)))) - 2\varphi(T^{n+2}((a, F(a)))) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + 2\varphi(T^{m-1}((a, F(a)))) - 2\varphi(T^m((a, F(a)))) \\ &= 2\varphi(T^n((a, F(a)))) - 2\varphi(T^m((a, F(a)))). \end{aligned}$$

elde edilir. Şu halde $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \tilde{\mathfrak{D}}_p(T^n((a, F(a))), T^m((a, F(a)))) = (b, 0)$. Bundan dolayı

$\{T^n((a, F(a)))\}$ bir esnek Cauchy dizisidir. Böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n((a, F(a))) = (x, F(x))$

olacak şekilde bir $(x, F(x)) \in (F, A)$ mevcuttur. ■

Tanım 4.1.4. [29] X üzerinde bir (F, A) esnek kümesini göz önüne alalım. $c \in A$ olmak üzere her $(c, F(c)) \in (F, A)$ elemanı (F, A) 'nin bir esnek noktası olarak adlandırılır. $c \in A$ için $x \in F(c)$ ise (c, x) 'in (F, A) 'ye ait olmasına gerek yoktur. Fakat ait oluyorsa (c, x) 'i bir esnek nokta olarak kabul edebiliriz.

Tanım 4.1.5. (F, A) 'nin X üzerinde bir esnek küme olduğunu kabul edelim. $\tilde{\mathcal{D}}_p$, (F, A) üzerinde Steinhaus Transform esnek metrik ve t bir pozitif reel sayı olsun. (e', t) yarıçaplı, $(e, F(e))$ merkezli esnek yuvar

$$\{(c, F(c)) \in (F, A) : \tilde{\mathcal{D}}_p((c, F(c)), (e, F(e))) \preceq (\tilde{\varphi}(c, e) = (e', t))\}$$

kümesidir. $(e, F(e))$ merkezli (e', t) yarıçaplı esnek yuvarı $\mathcal{B}_{\tilde{\mathcal{D}}_p}((e, F(e)), (e', t))$ ile gösteririz, ifadeyi biraz daha kısaltmak için sadece $\mathcal{B}_{\tilde{\mathcal{D}}_p}((e, F(e)), (e', t))$ yada $\mathcal{B}_{(e', t)}(e, F(e))$ yazarız.

Teorem 4.1.6. $((F, A), \tilde{\mathcal{D}}_p)$, X üzerinde tam Steinhaus Transform esnek metrik uzay olsun ve $T : \mathcal{B}_{\tilde{\mathcal{D}}_p}((a, F(a)), (a', r)) \rightarrow ((F, A), \tilde{\mathcal{D}}_p)$, $0 < c < 1$ iken

$$\tilde{\mathcal{D}}_p(T((a, F(a)), (a, F(a)))) \prec (1-c)(a', r) \quad (4.9)$$

olmak üzere bir esnek büzülme dönüşümü olsun. Bu takdirde T , $\mathcal{B}_{\tilde{\mathcal{D}}_p}((a, F(a)), (a', r))$ bir tek esnek sabit nokta kümesine sahiptir.

İspat: $\tilde{\mathcal{D}}_p(T((a, F(a)), (a, F(a)))) \prec (1-c)(a', r_0)$ olmak üzere $0 \preceq (a', r_0) \preceq (a', r)$ olacak şekilde bir $r_0 \geq 0$ mevcut olduğu açıktır.

$T : \overline{\mathcal{B}_{\tilde{\mathcal{D}}_p}((a, F(a)), (a', r_0))} \rightarrow \overline{\mathcal{B}_{\tilde{\mathcal{D}}_p}((a, F(a)), (a', r_0))}$ alarak,

$(a, F(a)), (b, F(b)) \in \overline{\mathcal{B}_{\tilde{\mathcal{D}}_p}((a, F(a)), (a', r_0))}$ ise bu takdirde Steinhaus Transform esnek metriğin 4. özelliğinden

$$\mathcal{D}_p(T(b, F(b)), (a, F(a))) =$$

$$\frac{2\mathcal{D}_p(T(b, F(b)), (a, F(a)))}{\mathcal{D}_p((a, F(a)), (c, F(c))) \dot{+} \mathcal{D}_p(T(b, F(b)), (c, F(c))) \dot{+} \mathcal{D}_p((a, F(a)), T(b, F(b)))}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2\mathfrak{D}_p(T(b, F(b)), (a, F(a))) \\
&\leq 2[\mathfrak{D}_p(T(b, F(b)), T(a, F(a))) \dot{+} \mathfrak{D}_p(T(a, F(a)), (a, F(a)))] \\
&\leq 2\mathfrak{D}_p(T(b, F(b)), T(a, F(a))) \dot{+} 2\mathfrak{D}_p(T(a, F(a)), (a, F(a))) \\
&\leq 2c\mathfrak{D}_p((b, F(b)), (a, F(a))) \dot{+} 2(1-c)(a', r_0) \\
&= 2(a', r_0) .
\end{aligned}$$

Şimdi Steinhaus Transform esnek metrik uzay için Banach Sabit nokta teoreminden T 'nin $\overline{\mathcal{B}_{\mathfrak{D}_p}((a, F(a)), (a', r_0))} \cong \overline{\mathcal{B}_{\mathfrak{D}_p}((a, F(a)), (a', r))}$ esnek yuvarında bir tek esnek sabit nokta kümesine sahip olduğunu elde ederiz. ■

Teorem 4.1.7. $((F, A), \mathfrak{D}_p)$ X üzerinde bir tam Steinhaus Transform esnek metrik uzay olsun. Her $(a, F(a)) \in (F, A)$ için

$$T(a, F(a)) = (T_1(a), T_2(F(a))) = (T_1(a), F(T_1(a)))$$

olacak şekilde bir $T : (F, A) \rightarrow (F, A)$ esnek dönüşümü için her $(a, F(a)), (b, F(b)) \in (F, A)$ olmak üzere

$$\mathfrak{D}_p(T(a, F(a)), (b, F(b))) \preceq 2\alpha(\mathfrak{D}_p((a, F(a)), (b, F(b)))\mathfrak{D}_p((a, F(a)), (b, F(b)))) \dots (1)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir α sayısının mevcut olduğunu kabul edelim. Bu takdirde T bir tek esnek sabit kümeye sahiptir.

İspat: $(a, F(a)) \in (F, A)$ esnek sabit kümesini alalım ve $n \in \mathbb{N}$ için

$(a_n, F(a_n)) = T^n(a, F(a))$ olsun. İspatı iki aşamada gerçekleştireceğiz.

1. Adım:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{D}_p((a_n, F(a_n)), (a_{n+1}, F(a_{n+1}))) = 0$ olduğunu iddia ediyoruz.

T esnek büzülme dönüşümü olduğundan

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{D}_p((a_n, F(a_n)), (a_{n+1}, F(a_{n+1}))) = \mathfrak{D}_p(T^n(a, F(a)), T^{n+1}(a, F(a))) \\
&= \frac{2\mathfrak{D}_p(T^n(a, F(a)), T^{n+1}(a, F(a)))}{\mathfrak{D}_p(T^n(a, F(a)), T^{n-1}(a, F(a))) \dot{+} \mathfrak{D}_p(T^{n+1}(a, F(a)), T^{n-1}(a, F(a))) \dot{+} \mathfrak{D}_p(T^n(a, F(a)), T^{n-1}(a, F(a)))} \\
&\preceq \mathfrak{D}_p(T^n(a, F(a)), T^{n+1}(a, F(a))) \\
&\preceq 2\alpha(\mathfrak{D}_p(T^{n-1}(a, F(a)), T^n(a, F(a))) \cdot \mathfrak{D}_p(T^{n-1}(a, F(a)), T^n(a, F(a))))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\alpha(\mathfrak{D}_p((a_{n-1}, F(a_{n-1})), T(a_n, F(a_n))) \cdot \mathfrak{D}_p(T(a_{n-1}, F(a_{n-1})), T(a_n, F(a_n)))) \\
&\preceq 2\mathfrak{D}_p((a_{n-1}, F(a_{n-1})), (a_n, F(a_n)))
\end{aligned}$$

Şu hâlde

$$\mathfrak{D}_p((a_n, F(a_n)), (a_{n+1}, F(a_{n+1}))) \preceq 2\mathfrak{D}_p((a_{n-1}, F(a_{n-1})), (a_n, F(a_n))), \quad \text{böylece}$$

$\{(F_n, A)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi artandır. Bu taktirde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{D}_p((a_n, F(a_n)), (a_{n+1}, F(a_{n+1}))) = (b, r).$$

Aksine $(b, r) \neq 0$ ve $r \neq 0$ olduğunu kabul edelim. 1 eşitsizliğinde

$$\mathfrak{D}_p((a_{n+1}, F(a_{n+1})), (a_{n+2}, F(a_{n+2}))) \preceq 2\alpha(\mathfrak{D}_p((a_n, F(a_n)), (a_{n+1}, F(a_{n+1}))) \mathfrak{D}_p((a_n, F(a_n)), (a_{n+1}, F(a_{n+1}))))).$$

eşitsizliğine sahip oluruz. $n \rightarrow \infty$ için

$$(b, r) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 2\alpha(\mathfrak{D}_p((a_n, F(a_n)), (a_{n+1}, F(a_{n+1}))))(b, 1).$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada,

$$(b, 1) \leq (b, \lim_{n \rightarrow \infty} 2\alpha(\mathfrak{D}_p((a_n, F(a_n)), (a_{n+1}, F(a_{n+1})))))) \geq 1.$$

elde edilir. Bu bir çelişkidir ve iddiamızın doğru olduğu gösterilmiş olur.

2. Adım:

$(a_n, F(a_n))$ in bir esnek Cauchy dizisi olduğunu iddia ediyoruz. Aksine $\forall a \in A$ için

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \mathfrak{D}_p((a_n, F(a_n)), (a_m, F(a_m))) > (a, 0) \text{ olduğunu kabul edelim.}$$

Üçgen eşitsizliğinden ve Steinhaus Transform esnek metriğin 4. özelliğinden

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{D}_p((a_n, F(a_n)), (a_m, F(a_m))) = \\
&\frac{2\mathfrak{D}_p((a_n, F(a_n)), (a_m, F(a_m)))}{\mathfrak{D}_p((a_n, F(a_n)), (a_{m+1}, F(a_{m+1}))) \dot{+} \mathfrak{D}_p((a_m, F(a_m)), (a_{m+1}, F(a_{m+1}))) \dot{+} \mathfrak{D}_p((a_n, F(a_n)), (a_m, F(a_m)))} \\
&\preceq 2\mathfrak{D}_p((a_n, F(a_n)), (a_m, F(a_m))) \\
&\preceq 2[\mathfrak{D}_p((a_n, F(a_n)), (a_{n+1}, F(a_{n+1}))) \dot{+} \mathfrak{D}_p((a_{n+1}, F(a_{n+1})), (a_{m+1}, F(a_{m+1}))) \\
&\quad \dot{+} \mathfrak{D}_p((a_{m+1}, F(a_{m+1})), (a_m, F(a_m)))] \\
&\preceq 2\mathfrak{D}_p((a_n, F(a_n)), (a_{n+1}, F(a_{n+1}))) \dot{+} 2\mathfrak{D}_p((a_{n+1}, F(a_{n+1})), (a_{m+1}, F(a_{m+1}))) \\
&\quad \dot{+} 2\alpha\mathfrak{D}_p((a_n, F(a_n)), (a_m, F(a_m))) \cdot \mathfrak{D}_p((a_n, F(a_n)), (a_m, F(a_m)))
\end{aligned}$$

Bu taktirde

$$[1 - 2\alpha \mathfrak{D}_p((a_n, F(a_n)), (a_m, F(a_m)))] \mathfrak{D}_p((a_n, F(a_n)), (a_m, F(a_m))) \\ \preceq 2\mathfrak{D}_p((a_n, F(a_n)), (a_{n+1}, F(a_{n+1}))) \dot{+} 2\mathfrak{D}_p((a_{m+1}, F(a_{m+1})), (a_m, F(a_m)))$$

1.adım $\forall a \in A$ için

$$(1 - 2\alpha) \mathfrak{D}_p((a_n, F(a_n)), (a_m, F(a_m))) \cdot \mathfrak{D}_p((a_n, F(a_n)), (a_m, F(a_m))) \leq (a, 0)$$

olmasını gerektirir. Bundan dolayı aşağıdaki durumlardan biri meydana gelebilir.

$$i) 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} 2\alpha(\mathfrak{D}_p((a_n, F(a_n)), (a_m, F(a_m)))) = 0$$

$$ii) \text{ Her } a \in A \text{ için } \mathfrak{D}_p((a_n, F(a_n)), (a_m, F(a_m))) = (a, 0) .$$

Bizim kabulümüze göre (ii) mümkün olamaz. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2\alpha(\mathfrak{D}_p((a_n, F(a_n)), (a_m, F(a_m)))) = 1. \quad \alpha \text{ nın tanımını her } a \in A \text{ için}$$

$2\mathfrak{D}_p((a_n, F(a_n)), (a_m, F(a_m))) \rightarrow (a, 0)$, olmasını gerektirir. Böylece $(a_n, F(a_n))$ bir esnek Cauchy dizisidir.

$(a, F(a)) \in (F, A)$ olsun. (F, A) tam Steinhaus Transform esnek metrik uzay olduğundan ve $T^n(a, F(a))$ bir esnek Cauchy dizisi olduğundan

$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(a, F(a)) = (z, F(z))$ alırsak bir $(z, F(z)) \in (F, A)$ vardır. T nin esnek sürekliliğinden $T(z, F(z)) = (z, F(z))$ olduğunu elde ederiz.

Teklik için, T nin başka bir $(b, F(b))$ esnek sabit noktasının var olduğunu kabul edelim. Yani, $T(b, F(b)) = (b, F(b))$. Steinhaus Transform esnek metriğin özelliğinden ve T üzerindeki büzülme şartından

$$\mathfrak{D}_p(T(a, F(a)), T(b, F(b))) \\ = \frac{2\mathfrak{D}_p(T(a, F(a)), T(b, F(b)))}{\mathfrak{D}_p(T(a, F(a)), T(c, F(c))) \dot{+} \mathfrak{D}_p(T(b, F(b)), T(c, F(c))) \dot{+} \mathfrak{D}_p(T(a, F(a)), T(b, F(b)))} \\ \leq 2\mathfrak{D}_p(T(a, F(a)), T(b, F(b))) \preceq 2\alpha \mathfrak{D}_p(T(a, F(a)), T(b, F(b))) \cdot \mathfrak{D}_p(T(a, F(a)), T(b, F(b)))$$

eşitsizliğine sahip oluruz. Şu hâlde

$$2\mathfrak{D}_p(T(a, F(a)), T(b, F(b)))(1 - \alpha(\mathfrak{D}_p(T(a, F(a)), T(b, F(b)))) \leq 0$$

Bundan dolayı

$$\mathfrak{D}_p(T(a, F(a)), T(b, F(b))) = 0 \text{ veya } 1 - \alpha \mathfrak{D}_p(T(a, F(a)), T(b, F(b))) = 0$$

α nın özelliğinden

$$T(b, F(b)) = (b, F(b)) = (a, F(a))$$

olduğu sonucuna varırız. ■

Tanım 4.1.8. [17] (X, d) bir genelleştirilmiş metrik uzay olsun. $\alpha : [0, \infty] \rightarrow [0, \frac{1}{2})$

artan dönüşüm olmak üzere herhangi bir $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \preceq \alpha(d(x, y))[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$$

ise $T : X \rightarrow X$ dönüşümüne genelleştirilmiş Kannan büzülme dönüşümü denir.

Teorem 4.1.9. (F, E) bir $((F, E), \tilde{\mathfrak{D}}_p)$ Steinhaus Transform tam esnek metrik uzayın boş olmayan esnek kapalı alt kümesi ve $T : (F, E) \rightarrow (F, E)$ Kannan tipinde bir dönüşüm olsun $K < 1$ için

$$\tilde{\mathfrak{D}}_p(T(x, F(x)), T(y, F(y))) \preceq K[\tilde{\mathfrak{D}}_p((x, F(x)), T(x, F(x))) + \tilde{\mathfrak{D}}_p((y, F(y)), T(y, F(y)))]$$

eşitsizliği sağlasın. $a, b \in E$ olmak üzere $0 \leq r < 1$ ve $r' > 0$ olacak şekilde (a, r) , (b, r') parametrik skalerlerinin mevcut olduğunu kabul edelim. Keyfi $(x, F(x)) \in (F, E)$ için

$$\tilde{\mathfrak{D}}_p((u, F(u)), T(u, F(u))) \preceq r \cdot [\tilde{\mathfrak{D}}_p((x, F(x)), T(x, F(x)))]$$

$$\tilde{\mathfrak{D}}_p((u, F(u)), T(x, F(x))) \preceq r' \cdot [\tilde{\mathfrak{D}}_p((x, F(x)), T(x, F(x)))]$$

olacak şekilde $(u, F(u)) \in (F, E)$ mevcut ise, bu takdirde T en az bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: $(x_0, F(x_0)) \in (F, E)$ keyfi bir esnek nokta olsun. $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$\tilde{\mathfrak{D}}_p(T(F(n+1), E), (F(n+1), E)) \preceq r \cdot \tilde{\mathfrak{D}}_p(T(F(n), E), (F(n), E))$$

$$\tilde{\mathfrak{D}}_p((F(n+1), E), (F(n), E)) \preceq r' \cdot \tilde{\mathfrak{D}}_p(T(F(n), E), (F(n), E))$$

eşitsizliklerini sağlayan $\{(F_n, E)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisini göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{D}}_p((F(n+1), E), (F(n), E)) &\preceq r' \cdot \tilde{\mathfrak{D}}_p(T(F(n), E), (F(n), E)) \\ &\preceq r' \cdot r^n \cdot \tilde{\mathfrak{D}}_p(T(F(0), E), (F(0), E)) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{D}}_p(T(v, F(v)), (v, F(v))) &= \frac{2\tilde{\mathfrak{D}}(T(v, F(v)), (v, F(v)))}{\tilde{\mathfrak{D}}(T(v, F(v)), (F(n), E)) + \tilde{\mathfrak{D}}((v, F(v)), (F(n), E)) + \tilde{\mathfrak{D}}(T(v, F(v)), (v, F(v)))} \\
&\preceq 2\tilde{\mathfrak{D}}_p(T(v, F(v)), (v, F(v))) \\
&\preceq 2 \left[\tilde{\mathfrak{D}}_p((v, F(v)), T(v, F(v))) + \tilde{\mathfrak{D}}_p(T(F(n), E), (F(n), E)) \right. \\
&\quad \left. + \tilde{\mathfrak{D}}_p((F(n), E), (v, F(v))) + \tilde{\mathfrak{D}}_p((F(n), E), (v, F(v))) \right] \\
&\preceq 2 \left[K \left(\tilde{\mathfrak{D}}_p((v, F(v)), T(v, F(v))) + \tilde{\mathfrak{D}}_p((F(n), E), T(F(n), E)) \right) \right. \\
&\quad \left. + \tilde{\mathfrak{D}}_p(T(F(n), E), (F(n), E)) + \tilde{\mathfrak{D}}_p((F(n), E), (v, F(v))) \right] \\
\tilde{\mathfrak{D}}_p(T(v, F(v)), (v, F(v))) &\preceq 2K \cdot \tilde{\mathfrak{D}}_p((v, F(v)), T(v, F(v))) + 2K \cdot \tilde{\mathfrak{D}}_p((F(n), E), T(F(n), E)) \\
&\quad + 2 \cdot \tilde{\mathfrak{D}}_p(T(F(n), E), (F(n), E)) + 2 \cdot \tilde{\mathfrak{D}}_p((F(n), E), (v, F(v))) \\
\tilde{\mathfrak{D}}_p(T(v, F(v)), (v, F(v))) - 2K \cdot \tilde{\mathfrak{D}}_p((v, F(v)), T(v, F(v))) &\preceq 2K \cdot \tilde{\mathfrak{D}}_p((F(n), E), T(F(n), E)) \\
&\quad + 2 \cdot \tilde{\mathfrak{D}}_p(T(F(n), E), (F(n), E)) \\
&\quad + 2 \cdot \tilde{\mathfrak{D}}_p((F(n), E), (v, F(v))) \\
(1-2K)\tilde{\mathfrak{D}}_p(T(v, F(v)), (v, F(v))) &\preceq (2K+2)\tilde{\mathfrak{D}}_p((F(n), E), T(F(n), E)) \\
&\quad + 2\tilde{\mathfrak{D}}_p((F(n), E), T(v, F(v))) \\
\tilde{\mathfrak{D}}_p(T(v, F(v)), (v, F(v))) &\preceq \frac{2K+2}{1-2K} \tilde{\mathfrak{D}}_p((F(n), E), T(F(n), E)) \\
&\quad + \frac{2}{1-2K} \tilde{\mathfrak{D}}_p((F(n), E), (v, F(v)))
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{2K+2}{1-2K} r^n \tilde{\mathfrak{D}}_p(T(X_0, F(X_0)), (X_0, F(X_0))) \\ + \frac{2}{1-2K} \tilde{\mathfrak{D}}_p((F(n), E), (v, F(v))) \rightarrow 0$$

(F, E) nin tamlığından dolayı $\lim_{x \rightarrow \infty} (F(n), E) = (v, F(v))$ olacak şekilde $(v, F(v)) \in (F, E)$ mevcuttur.

Böylece

$$T(v, F(v)) = (v, F(v))$$

elde edilir.

Teorem 4.1.10. Let $((F, E), \tilde{\mathfrak{D}}_p)$ Steinhaus Transform tam esnek metrik uzay ve $T : (F, E) \rightarrow (F, E)$, her $x, y \in X$ için

$$\tilde{\mathfrak{D}}_p(T(x, F(x)), T(y, F(y))) \leq K \left[\tilde{\mathfrak{D}}_p((x, F(x)), T(x, F(x))) + \tilde{\mathfrak{D}}_p((y, F(y)), T(y, F(y))) \right]$$

eşitsizliğini sağlayan $K < \frac{1}{2}$ mevcut olacak şekilde bir dönüşüm olsun.

Bu taktirde T bir tek sabit esnek $(v, F(v)) \in (F, E)$ noktasına sahiptir ve herhangi bir $(x, F(x)) \in (F, E)$ için $\{T^n(x, F(x))\}$ iterasyon esnek dizisi $(v, F(v))$ esnek noktasına yakınsar ve $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$\tilde{\mathfrak{D}}_p(T^{n+1}(x, F(x)), (v, F(v))) \leq 2K \cdot \left(\frac{2K}{1-2K} \right)^n \tilde{\mathfrak{D}}_p((x, F(x)), T(x, F(x))).$$

İspat: Herhangi bir $(x, F(x)) \in (F, E)$ için $(u, F(u)) = T(x, F(x))$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{D}}_p((u, F(u)), T(u, F(u))) &= \\ &= \frac{2\tilde{\mathfrak{D}}_p((u, F(u)), T(u, F(u)))}{\tilde{\mathfrak{D}}_p(T(u, F(u)), T(x_n, F(x_n))) + \tilde{\mathfrak{D}}_p((u, F(u)), T(x_n, F(x_n))) + \tilde{\mathfrak{D}}_p((u, F(u)), T(u, F(u)))} \\ \tilde{\mathfrak{D}}_p(T(x, F(x)), T(u, F(u))) &= \\ &= \frac{2\tilde{\mathfrak{D}}_p(T(x, F(x)), T(u, F(u)))}{\tilde{\mathfrak{D}}_p(T(u, F(u)), T(x_n, F(x_n))) + \tilde{\mathfrak{D}}_p((x, F(x)), (x_n, F(x_n))) + \tilde{\mathfrak{D}}_p(T(x, F(x)), T(u, F(u)))} \end{aligned}$$

$$\preceq 2\tilde{\mathfrak{D}}_p((u, F(u)), T(u, F(u))) = 2\tilde{\mathfrak{D}}_p(T(x, F(x)), T(u, F(u)))$$

$$\preceq 2K \left[\tilde{\mathfrak{D}}_p((x, F(x)), T(x, F(x))) + \tilde{\mathfrak{D}}_p((u, F(u)), T(u, F(u))) \right]$$

$$\tilde{\mathfrak{D}}_p((u, F(u)), T(u, F(u))) = \tilde{\mathfrak{D}}_p(T(x, F(x)), T(u, F(u)))$$

$$\preceq 2K\tilde{\mathfrak{D}}_p((x, F(x)), T(x, F(x))) + 2K\tilde{\mathfrak{D}}_p((u, F(u)), T(u, F(u))) \Big]$$

$$\tilde{\mathfrak{D}}_p((u, F(u)), T(u, F(u))) - 2K\tilde{\mathfrak{D}}_p((u, F(u)), T(u, F(u))) \preceq 2K\tilde{\mathfrak{D}}_p((x, F(x)), T(x, F(x)))$$

$$(1-2K)\tilde{\mathfrak{D}}_p((u, F(u)), T(u, F(u))) \preceq 2K\tilde{\mathfrak{D}}_p((x, F(x)), T(x, F(x)))$$

$$\tilde{\mathfrak{D}}_p((u, F(u)), T(u, F(u))) \preceq \frac{2K}{(1-2K)} \tilde{\mathfrak{D}}_p((x, F(x)), T(x, F(x)))$$

$$0 < \tilde{\mathfrak{D}}_p((v, F(v)), (z, F(z))) = \tilde{\mathfrak{D}}_p(T(v, F(v)), T(z, F(z))) \preceq 2K \left[\tilde{\mathfrak{D}}_p((v, F(v)), T(v, F(v))) \right. \\ \left. + \tilde{\mathfrak{D}}_p((z, F(z)), T(z, F(z))) \right] = 0$$

$$\tilde{\mathfrak{D}}_p(T^{n+1}(x, F(x)), T^n(x, F(x))) \preceq 2K \left[\tilde{\mathfrak{D}}_p(T^n(x, F(x)), T^{n+1}(x, F(x))) + \tilde{\mathfrak{D}}_p(T^{n-1}(x, F(x)), T^n(x, F(x))) \right]$$

$$\tilde{\mathfrak{D}}_p(T^{n+1}(x, F(x)), T^n(x, F(x))) \preceq \frac{2K}{1-2K} \tilde{\mathfrak{D}}_p(T^n(x, F(x)), T^{n-1}(x, F(x)))$$

$$\tilde{\mathfrak{D}}_p(T^{n+1}(x, F(x)), T(v, F(v))) \preceq 2K \left[\tilde{\mathfrak{D}}_p(T^n(x, F(x)), T^{n+1}(x, F(x))) + \tilde{\mathfrak{D}}_p((v, F(v)), T(v, F(v))) \right] \\ = 2K\tilde{\mathfrak{D}}_p(T^{n+1}(x, F(x)), T^n(x, F(x)))$$

$$\preceq 2K \cdot \left(\frac{2K}{1-2K} \right)^n \tilde{\mathfrak{D}}_p(T(x, F(x)), (x, F(x))), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Tanım 4.1.11. E bir parametre kümesi ve A, B E parametre kümesinin birer alt kümeleri olsun.

$((F, E), \tilde{\mathfrak{D}}_p)$ bir Steinhaus transform esnek metrik uzay olsun. (G, A) ve (H, B) ,

$((F, E), \tilde{\mathfrak{D}}_p)$ Steinhaus transform esnek metrik uzayının esnek alt kümeleri olsun.

$$T : (G, A) \tilde{\cup} (H, B) \rightarrow (G, A) \tilde{\cup} (H, B)$$

dönüşümünü göz önüne alalım. Bu taktirde

$$i. \quad T((G, A)) \tilde{\subset} (H, B)$$

$$ii. \quad T((H, B)) \tilde{\subset} (G, A)$$

ise T esnek devirli dönüşüm olarak adlandırılır.

Tanım 4.1.12. E bir parametre kümesi ve A, B E parametre kümesinin birer alt kümeleri olsun. (G, A) ve (H, B) $((F, E), \tilde{\mathcal{D}}_p)$ Steinhaus transform esnek metrik uzayının esnek alt kümeleri olsun.

$$G' : A \cup B \rightarrow P(X),$$

$$G'(\varepsilon) = \begin{cases} F(\varepsilon) & , \varepsilon \in A - B \\ G(\varepsilon) & , \varepsilon \in B - A \\ F(\varepsilon) \cup G(\varepsilon) & , \varepsilon \in A \cap B \end{cases}$$

ile tanımlı olmak üzere her $(x, G'(x)) \in (G, A)$ ve her $(y, G'(y)) \in (H, B)$ için

$$\tilde{\mathcal{D}}_p(T(x, G'(x)), T(y, G'(y))) \preceq \lambda [\tilde{\mathcal{D}}_p(T(x, G'(x)), (x, G'(x))) + \tilde{\mathcal{D}}_p(T(y, G'(y)), (y, G'(y)))]$$

olacak şekilde bir $\lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ varsa

$$T : (G, A) \tilde{\cup} (H, B) \rightarrow (G, A) \tilde{\cup} (H, B)$$

esnek devirli dönüşümü Kannan tipi devirli esnek büzülme dönüşümü olarak adlandırılır.

Teorem 4.1.13. (F, E) X üzerinde tam Steinhaus Transform esnek metrik uzay, (G, A) ve (H, B) boştan farklı kapalı alt kümeleri ve $T : (G, A) \tilde{\cup} (H, B) \rightarrow (G, A) \tilde{\cup} (H, B)$ Kannan tipindeki devirli esnek büzülme olsun. Bu taktirde $T : (G, A) \tilde{\cap} (H, B)$ de bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: T Kannan tipinde esnek devirli büzülme olduğundan $(x, G(x)) \in (G, A)$ esnek sabit elemanını alarak

$$\tilde{D}(T(x, G'(x)), T(y, G'(y))) \preceq \lambda [\tilde{D}(T(x, G'(x)), (x, G'(x))) + \tilde{D}(T(y, G'(y)), (y, G'(y)))]$$

eşitsizliğini elde ederiz. Şu halde yukarıdaki eşitsizliği kullanarak

$$\tilde{D}_p(T^2(x, G'(x)), T(x, G'(x))) \leq \lambda [\tilde{D}_p(T^2(x, G'(x)), T(x, G'(x))) + \tilde{D}_p(T(x, G'(x)), (x, G'(x)))]$$

eşitsizliğini elde ederiz. Basit hesaplamalarla

$$\tilde{D}_p(T^2(x, G'(x)), T(x, G'(x))) \preceq \frac{\lambda}{1-\lambda} \tilde{D}_p(T(x, G'(x)), (x, G'(x)))$$

eşitsizliğine sahip oluruz. Steinhaus Transform esnek metriğin 4. Özelliğinden

$$\frac{2\tilde{D}(T^2(x, G'(x)), T(x, G'(x)))}{\tilde{D}(T^2(x, G'(x)), T(p, G'(p))) + \tilde{D}(T(x, G'(x)), T(p, G'(p))) + \tilde{D}(T^2(x, G'(x)), T(x, G'(x)))}$$

$$\leq 2\tilde{D}(T^2(x, G'(x)), T(x, G'(x))) \preceq 2\lambda[\tilde{D}(T^2(x, G'(x)), T(x, G'(x))) + \tilde{D}(T(x, G'(x)), (x, G'(x)))]$$

$$2\tilde{D}(T^2(x, G'(x)), T(x, G'(x))) \preceq 2\lambda\tilde{D}(T^2(x, G'(x)), T(x, G'(x))) + 2\lambda\tilde{D}(T(x, G'(x)), (x, G'(x)))$$

$$(2 - 2\lambda)\tilde{D}(T^2(x, G'(x)), T(x, G'(x))) \preceq 2\lambda\tilde{D}(T(x, G'(x)), T(x, G'(x)))$$

$$\tilde{D}(T^2(x, G'(x)), T(x, G'(x))) \preceq \frac{2\lambda}{2-2\lambda} \tilde{D}(T(x, G'(x)), T(x, G'(x)))$$

$$\tilde{D}_p(T^2(x, G'(x)), T(x, G'(x))) \preceq 2\tilde{D}(T^2(x, G'(x)), T(x, G'(x)))$$

$$\preceq \frac{\lambda}{1-\lambda} \tilde{D}(T(x, G'(x)), T(x, G'(x)))$$

eşitsizliğini yazabiliriz. İndiksiyonla

$$\tilde{D}_p(T^{n+1}(x, G'(x)), T^n(x, G'(x))) \preceq \frac{\lambda}{1-\lambda} \tilde{D}(T(x, G'(x)), (x, G'(x)))$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{D}_p(T^{n+1}(x, G'(x)), T^n(x, G'(x))) \preceq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^n\right) \tilde{D}(T(x, G'(x)), (x, G'(x))) < \infty$$

yazabiliriz.

(G, A) ve (H, B) nin esnek kapalılığından $T^n(x, G(x))$ in bir esnek Cauchy olduğu açıktır ve $T^n(x, G'(x)) \rightarrow (z, G'(z))$ olacak şekilde $(z, G'(z)) \in (G, A) \tilde{\cup} (H, B)$ vardır.

$T^{2n}(x, G'(x))$ in (G, A) da bir esnek dizi olduğunu kabul edelim ve $T^{2n-1}(x, G'(x))$ aynı $(z, G'(z))$ limit noktasına sahip (H, B) de bir esnek alt dizi olsun. Buradan $(z, G'(z)) \in (G, A)$ ve $(z, G'(z)) \in (H, B)$ olup $z \in (G, A) \tilde{\cap} (H, B)$ dir. Böylece $(G, A) \cap (H, B) \neq \Phi$. Şimdi $(z, G'(z))$ nin ve T nin bir esnek sabit noktası olduğunu yani $T(z, G'(z)) = (z, G'(z))$ olduğunu gösterelim.

$$D_p(T(z, G'(z)), (z, G'(z))) = \lim_{n \rightarrow \infty} D_p(T(z, G'(z)), T^{2n}(x, G'(x)))$$

$$\leq \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{D}_p(T^{2n}(x, G'(x)), T^{2n-1}(x, G'(x))) + \tilde{D}_p(T(z, G'(z)), (z, G'(z))) \leq \lambda \tilde{D}_p(T(z, G'(z)), (z, G'(z)))$$

eşitsizliğini göz önüne alalım. Son eşitsizlik

$$(1 - \lambda) \tilde{D}_p(T(z, G'(z)), (z, G'(z))) \leq (\tilde{\pi}(T_z, z), \phi)$$

olmasını gerektirir. Steinhaus Transform esnek metriğin non-negatiflik özelliğini de göz önüne alınmasıyla $\tilde{D}_p(T(z, G'(z)), (z, G'(z))) = (\tilde{\pi}(T_z, z), \phi)$ elde edilir. Şu halde $T(z, G'(z)) = (z, G'(z))$ olup $(z, G'(z))$ T nin bir esnek sabit noktasıdır. $(z, G'(z))$ nin tekliğini için $(z, G'(z)) \neq (w, G'(w))$ ve $(w, G'(w)) \in (G, A) \cup (H, B)$ olduğunu kabul edelim.

T Kannan tipi esnek devirli büzülme olduğundan,

$$\begin{aligned} \tilde{D}_p((z, G'(z)), (w, G'(w))) &= \tilde{D}_p(T(z, G'(z)), T(w, G'(w))) \\ &= \frac{2\tilde{D}(T(z, G'(z)), T(w, G'(w)))}{\tilde{D}(T(z, G'(z)), T(p, G'(p))) + \tilde{D}(T(w, G'(w)), T(p, G'(p))) + \tilde{D}(T(z, G'(z)), T(w, G'(w)))} \\ &\preceq 2\tilde{D}(T(z, G'(z)), T(w, G'(w))) \\ &\preceq 2\lambda[\tilde{D}(T(z, G'(z)), (z, G'(z))) + \tilde{D}(T(w, G'(w)), (w, G'(w)))] \\ &= 2\lambda\tilde{\pi}((T_z, z), \phi) + 2\lambda\tilde{\pi}((T_w, w), \phi) \\ &= 2\lambda(\tilde{\pi}(T_z, z), \tilde{\pi}(T_w, w), \phi) \end{aligned}$$

Yazabiliriz. Sonuç olarak $(z, G'(z)) = (w, G'(w))$ olduğu elde edilir. ■

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında esnek noktaların kullanılmasıyla Steinhaus transform esnek metrik tanımlanmış olup tanımladığımız bu yeni metriğe göre esnek dizi, esnek yakınsak dizi, esnek Cauchy dizisi, esnek büzülebilirlik gibi kavramlar Steinhaus transform esnek metrik ile ifade edilmiş olup bazı esnek sabit nokta teoremlerini ispatlayabilmek üzere gerekli altyapı oluşturulmuştur.

Steinhaus transform esnek metriğin kullanılmasıyla literatürde oldukça önemli bir yere sahip olan Banach büzülme teoremi, Caristi, Kannan gibi bazı sabit nokta teoremleri ifade ve ispat edilmiştir. Çalışmada son olarak esnek kapsama dönüşümüyle birlikte göze alınan devirli dönüşümler Steinhaus transform esnek metrik uzaylarda tanımlanmıştır. Kannan tipi devirli esnek büzülme dönüşümleri kullanılarak iki esnek kümenin esnek kesişimin de bir tek sabit noktaya sahip olmamızı saplayan teorem ifade ve ispat edilmiştir.

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlardan farklı olarak literatürde yer alan diğer sabit nokta teoremleri ifade ve ispat edilebilir. Bununla birlikte üzerinde çalıştığımız Steinhaus transform esnek metrik uzayların esnek kompaktlık, esnek Hausdorff uzay olma, esnek tamlık gibi özelliklerle birlikte göz önüne alınmasıyla yeni teorem ve sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Zadeh, L.A. Fuzzy Sets. Information and Control. 1965, 8(3), 338-353.
- [2] Molodtsov, D. Soft set theory-first result. Computers & Mathematics with Applications. 1999, 37, 19-31.
- [3] Maji, P. K., Biswas R., Roy A. R. Soft set theory. Computers & Mathematics with Applications. 2003, 45, 555-562.
- [4] Maji, P. K., Roy, A. R. and Biswas, R. An application of soft sets in a decision making problem, Comput. Math. Appl. 2002, 44, 1077-1083.
- [5] Shabir, M., Naz, M. On soft topological spaces. Computers & Mathematics with Applications. 2011, 61(7), 1786-1799.
- [6] Aygünoğlu, A., Aygün, H. Some notes on soft topological spaces, Neural Computing and Applications. 2012, 21, 113-119.
- [7] Varol, B.P., Aygün, H. On soft Hausdorff spaces. Ann. Fuzzy Math. Inform. 5(1), 15-24 (2013).
- [8] Zorlutuna, İ., Akdağ, M., Min, W. K., Atmaca, S. Remarks on soft topological spaces, Ann. Fuzzy Math. Inform. 2012, 3, 171-185.
- [9] Aras, Ç. G., Sönmez, A., Çakallı, H. On soft mappings. ArXiv, Computers & Mathematics with Applications. 2013, 1-12.
- [10] Aras, Ç. G., Poşul, H. On some new operations in probabilistic soft set theory. European Journal of Pure and Applied Mathematics. 2016, 9(3), 333-339.
- [11] Zorlutuna, İ., Çakır, H. On continuity of soft mappings. Applied Mathematics and Information Science. 2015, 9(1), 403-409.
- [12] Taşköprü, K., Altıntaş, İ. A new approach for soft topology and soft function via soft element, Mathematical Methods in the Applied Science, 2021, 44(9), 7556-7570. <https://doi.org/10.1002/mma.6354>
- [13] Altıntaş, İ., Taşköprü, K., Selvi B. Countable and separable elementary soft topological spaces, Mathematical Methods in the Applied Science, 2020, 44(9), 7814-7819. <https://doi.org/10.1002/mma.6976>
- [14] Çetkin, V., Aygün, H., On convergence of soft nets. J Mult-Valued Logic Soft Comput. 2016, 26(3-5), 175-187.

- [15] Brouwer, L. E. J. Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*. 1910, 71, 97-115.
- [16] Banach, S. Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrals. *Fund Math*. 1922, 3, 133-181.
- [17] Kannan, R. Some results on fixed point. *Bull. Cal. Math. Soc.* 1968, 60, 71-76.
- [18] Kannan, R. Some results on fixed point II. *Amer. Math. Monthly*. 1969, 76, 405-408.
- [19] Caristi, J. Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1976, 215, 241-251.
- [20] Hardy, G. E., Rogers, T.D. A generalization of a fixed point theorem of Reich. *Canadian Mathematical Bulletin*. 1973, 16, 201-206.
- [21] Mutlu, A., Yolcu, N., Mutlu, B. Fixed point theorems in partially ordered rectangular metric spaces. *British Journal of Mathematics and Computer Science*. 2016, 15(2), 1-9.
- [22] Mutlu, A., Yolcu, N., Mutlu, B. A survey on Kannan mappings in universalized metric space. *British Journal of Mathematics and Computer Science*. 2016, 15(6), 1-6.
- [23] Das, S., Samanta, S. K. Soft real sets, soft real numbers and their properties, *J. Fuzzy Math*. 2012, 20, 551-576.
- [24] Das, S., Samanta, S.K. Soft metric. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*. 2013, 6(1), 77-94.
- [25] Hosseinzadeh, H. Fixed point theorems on soft metric spaces. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*. 2017, 19(2), 1625-1647.
- [26] Majumdar, P., Samanta, S. K. On soft mappings, *Comput. Math. Appl.* 2010, 60, 2666–2672.
- [27] Wardowski, D. On a soft mapping and its fixed points, *Fixed Point Theory Appl.* 2013, 182.
- [28] Güler, A.C., Yıldırım, E.D., Ozbakır, O.B. A fixed point theorem on soft G-metric spaces. *J. Nonlinear Sci. Appl.* 2016, 9, 885–894.
- [29] Yazar, M. I., Aras, Ç.G., Bayramov, S. Fixed point theorems of soft contractive mappings. *Filomat*. 2016, 30(2), 269-279.
- [30] Abbas, M., Murtaza, G., Romaguera S. On the fixed point theory of soft metric spaces, *Fixed Point Theory Appl.* 2016, 17.

- [31] Altıntaş, İ., Şimşek, D., Taşköprü, K. Topology of Soft Cone Metric Spaces. JAIIP Conference Proceeding. 2017, 1880(1), 030006. <https://doi.org/10.1063/1.50006056>
- [32] Altıntaş, İ., Taşköprü, K. Compactness of soft cone metric spaces and fixed point theorems related to diametrically contractive mapping. Turkish Journal of Mathematics. 2020, 44, 2199-2216. doi:10.3906/mat-2004-63
- [33] Şimşek, D., Altıntaş, İ., Ersoy, S., Abdullayev, F., İmaşkıızı, M., Taşköprü, K., Kesik, D., Ablayeva, E., Oğul, B., Cemşitov, N. An introduction to soft cone metric spaces and some fixed point theorems. Manas Journal of Engineering(MJEN). 2018, 6(1), 59-89.
- [34] Öztunç, S., Mutlu, A., Aslan, S. Some Kannan type fixed point results in rectangular soft metric space and an application of fixed point for thermal science problem. Therm. Sci. 2019, 23(Suppl. 1), S215–S225.
- [35] Öztunç, S., Aslan, S. Jungck type fixed point results for weakly compatible mappings in a rectangular soft metric space, Journal of Inequalities and Applications. 2019,145. <https://doi.org/10.1186/s13660-019-2096-5>
- [36] E. Marczewski, H. Steinhaus. On a certain distance of sets and the corresponding distance of functions. Colloquium Mathematicum, 6:319–327, 1958.
- [37] Öztunç, S., Mutlu, A., Yılmaz, N. Some fixed point theorems by using Steinhaus transform soft metric, 2. International Students Science Conference, İzmir/Turkey. Proceeding Book pp. 83-89 (2018).
- [38] Öztunç, S., Mutlu, A., Yılmaz, N. On Kannan Type Mappings in Steinhaus transform soft metric spaces, 3. International Students Science Conference, İzmir/Turkey. Proceeding Book pp. 354-359 (2019).
- [39] Öztunç, S., Mutlu, A., Yılmaz, N. Some Remarks on Steinhaus transform soft metric spaces, 3. International Students Science Conference, İzmir/Turkey. Proceeding Book pp. 360-365 (2019).

- [40] Kurepa, D. Tableaux ramifiés d'ensembles, Espaces pseudo-distances. Comptes Rendus Mathématique. 1934, 198, 1563-1565.
- [41] Granas, A., Dugundji, J. Fixed Point Theory. Springer. 2002, 690.



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Nurettin YILMAZ

Doğum Yeri ve Yılı :

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta

Eğitim Durumu

Lise : Keşan Anadolu Lisesi, 2010

Lisans : Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2015

Yayınları

- [1] Öztunç, S., Mutlu, A., Yılmaz, N. Some fixed point theorems by using Steinhaus transform soft metric, 2. International Students Science Conference, İzmir/Turkey. Proceeding Book pp. 83-89 (2018).
- [2] Öztunç, S., Mutlu, A., Yılmaz, N. On Kannan Type Mappings in Steinhaus transform soft metric spaces, 3. International Students Science Conference, İzmir/Turkey. Proceeding Book pp. 354-359 (2019).
- [3] Öztunç, S., Mutlu, A., Yılmaz, N. Some Remarks on Steinhaus transform soft metric spaces, 3. International Students Science Conference, İzmir/Turkey. Proceeding Book pp. 360-365 (2019).