



STEM'E DAYALI ÖĞRENME ORTAMINDA

11.SINIF

ÖĞRENCİLERİNİN MATEMATİKSEL

MUHAKEMELERİNİN GELİŞİMİ

**STEM'E DAYALI ÖĞRENME ORTAMINDA 11. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN
MATEMATİKSEL MUHAKEMELERİNİN GELİŞİMİ**

Yeşim YANARDAĞ

DOKTORA YETERLİK TEZİ

**Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana
Bilimdalı**

Matematik Eğitimi Programı

Danışman: Prof. Dr. Tangül KABAE

Anadolu

Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Temmuz 2025

Eskişehir

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Yeşim YANARDAĞ'ın "STEM'E DAYALI ÖĞRENME ORTAMINDA 11. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN MATEMATİKSEL MUHAKEMELERİNİN GELİŞİMİ" başlıklı tezi 23/06/2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim dalında Matematik Eğitimi Programında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

	Ünvanı	Adı Soyadı	İmza
Üye (Danışman)	:	Prof. Dr. Tangül KABAEI	
Üye	:	Prof. Dr. Hüseyin Bahadır YANIK	
Üye	:	Prof. Dr. Burçak BOZ YAMAN	
Üye	:	Prof. Dr. Pınar ANAPA SABAN	
Üye	:	Doç. Dr. Fatma Aslan TUTAK	

Prof. Dr. Nafiz ÖNCÜ CAN

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

ÖZET

STEM'E DAYALI ÖĞRENME ORTAMINDA 11. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN MATEMATİKSEL MUHAKEMELERİNİN GELİŞİMİ

Yeşim YANARDAĞ

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı

Matematik Eğitimi Programı

Anadolu Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Temmuz 2025

Danışman: Prof. Dr. Tangül KABAEL

Bu araştırmada 11. sınıf öğrencilerinin STEM'e dayalı öğrenme ortamında matematiksel muhakemelerinin gelişimi amaçlanmıştır. Araştırmanın yönteminde araştırmanın amacı doğrultusunda nitel araştırma yöntemlerinden öğretim deneyi ile çalışma yürütülmüştür. Katılımcıların belirlenmesi amacıyla uygulama öncesinde Kilis ilindeki bir Anadolu Lisesi'nde öğrenim gören 35 öğrenciye PISA-1 testi uygulanmıştır. PISA-1 testi sonrası yapılan görüşmede elde edilen verilerin betimsel analizi ile muhakeme yeterlilikleri açısından her düzeyden en az bir katılımcı olmak şartıyla yedi katılımcı belirlenmiştir. STEM yaklaşımıyla gerçek yaşama dayalı desenlenen altı farklı öğretim deneyi gerçekleştirilip araştırma sürecinin başında, ortasında ve sonunda olmak üzere önce testler sonrasında görüşmeler yapılmıştır. Araştırma sonucunda tüm katılımcıların matematiksel muhakeme düzeyleri tek tek incelenmiştir. Bazı katılımcılar iki düzey üst yeterlilik seviyesine ilerleyebilirken bazıları ise aynı düzeyde kalmıştır. Katılımcıların formüle etme sürecinde gelişim gösterirken zorluk yaşamasına rağmen yorumlama ve değerlendirme sürecinde nispeten daha kolay gelişim gösterdikleri gözlemlenmiştir. Ayrıca formüle etme sürecinde farklı yollarla soru çözümüne yöneldikleri de görülmüştür.

Anahtar Sözcükler: STEM, Matematiksel muhakeme, Matematik okuryazarlığı, PISA.

ABSTRACT

DEVELOPMENT OF 11TH GRADE STUDENTS' MATHEMATICAL REASONING IN A STEM-BASED LEARNING ENVIRONMENT

Yeşim YANARDAĞ

**Department of Mathematics and
Science Education**

Programme in Mathematics Education

Graduate School of Anadolu University, July 2025

Supervisor: Prof. Dr. Tangül KABAEL

This study aimed to develop the mathematical reasoning of eleventh grade students in a learning environment designed based on STEM. In the method of the study, the study was conducted with a teaching experiment, one of the qualitative research methods, in line with the purpose of the study. In order to determine the participants, the PISA-1 test was applied to 35 students studying at an Anatolian High School in Kilis before the application. Seven participants were determined with the descriptive analysis of the data obtained in the interview after PISA-1, with at least one participant from each level in terms of reasoning competencies. Six different teaching experiments designed based on real life with the STEM approach were carried out and interviews were conducted after the tests at the beginning, middle and end of the research process. As a result of the research, the mathematical reasoning levels of all participants were examined one by one. While some participants could advance to two levels of proficiency, some remained at the same level. It was observed that although the participants had difficulty in developing in the formulation process, they developed relatively more easily in the interpretation and evaluation process. It was also observed that they turned to question solutions in different ways in the formulation process.

Keywords: STEM, Mathematical reasoning, Mathematical literacy, PISA.

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmamın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan “Bilimsel İntihal Tespit Programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Yeşim Yanardağ

NOT: Bu belgenin ciltlenmiş tezin “Abstract”tan sonraki sayfasında ıslak imzanız ile (fotokopi olmayacak) yer alması gerekmektedir.

STATEMENT OF COMPLIANCE WITH ETHICAL PRINCIPLES AND RULES

I hereby truthfully declare that this thesis/dissertation is an original work prepared by me; that I have behaved in accordance with the scientific ethical principles and rules throughout the stages of preparation, data collection, analysis and presentation of my work; that I have cited the sources of all the data and information that could be obtained within the scope of this study, and included these sources in the references section; and that this study has been scanned for plagiarism with “Scientific Plagiarism Detection Program” used by Anadolu University, and that “it does not have any plagiarism” whatsoever. I also declare that, if a case contrary to my declaration is detected in my work at any time, I hereby express my consent to all the ethical and legal consequences that are involved.

Yeşim Yanardağ

** This document has to be included with your original signature (no photocopies) on the page following the “Abstract” page of the bound copy of the thesis.*

ÖN SÖZ /TEŞEKKÜR

Tüm çalışma sürecimde deneyimlerini paylaşan, sabırla ve ısrarla gelişimime katkı sunan, her aşamada beni destekleyen danışmandan öte Sayın Prof. Dr. Tangül KABAEL'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tez sürecimde daha nitelikli bir çalışma adına bilgilerini paylaşan, beni yönlendiren Sayın Prof. Dr. Bahadır YANIK ile Sayın Doç. Dr. Fatma Arslan Tutak'a ve savunma sürecimde yer alan Sayın Prof. Dr. Burçak BOZ YAMAN ve Sayın Prof. Dr. Pınar ANAPA SAPAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca lisanüstü eğitim sürecimde her anlamda yanımda olan her türlü zorlukta beni motive eden aileme, eşime ve biricik oğluma da en içten sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak doktora araştırma sürecimde 2211-A Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı ile bana maddi destek veren Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığı'na (BİDEB) çok çok teşekkürlerimi sunarım.

20/07/2025

ETİK KURUL BELGESİ BEYANNAMESİ

Evrak Kayıt Tarihi: 05.04.2024 Protokol No: 720913

Tarih: 06.05.2024



ANADOLU ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL VE BEŞERİ BİLİMLER BİLİMSEL ARAŞTIRMA VE YAYIN ETİĞİ KURULU
KARAR BELGESİ

ÇALIŞMANIN TÜRÜ:	Doktora Tez Çalışması
KONU:	Eğitim Bilimleri
BAŞLIK:	STEM'e Dayalı Öğrenme Ortamında 11. Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Muhakemelerinin İncelenmesi
PROJE/TEZ YÜRÜTÜCÜSÜ:	
TEZ YAZARI:	Yeyim YANARDAĞ
ALT KOMİSYON GÖRÜŞÜ:	-
KARAR:	Olumlu

ÜRETKEN YAPAY ZEKÂ KULLANIM BEYANI

Bu tezi hazırlarken (örneğin ChatGPT, Gemini, DALL-E vb.) üretken yapay zekâ programlarından destek aldığımı/almadığımı beyan ederim. Tezin hazırlığı aşamasında üretken yapay zekâ programlarından (örneğin çeviri, bilimsel makale vb.) desteği aldım. Üretken yapay zekâ programlarından aldığım bilgilerin doğruluğunu kontrol ettiğimi bildiririm.

Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Yeşim Yanardağ

DİKKAT: Eğer tez çalışmasının herhangi bir evresinde üretken yapay zekâ programlarından yararlanılmamışsa öğrenci bu sayfayı; *“Bu tez çalışmasının hazırlanması, yürütülmesi, verilerin analizi vb. aşamalarının herhangi birinde üretken yapay zekâ programlarından yararlanmadığımı beyan ederim”* ifadesi ile imzalayarak teze eklemelidir.

DECLARATION OF GENERATIVE ARTIFICIAL INTELLIGENCE USAGE

I declare that I received support from generative artificial intelligence programs (for example ChatGPT, Gemini, DALL-E, etc.) while preparing this thesis/dissertation. I have received support from generative artificial intelligence programs (e.g. language translation, access to scientific articles, etc.) during the preparation of the thesis/dissertation. I declare that I have checked the accuracy of the information I received from generative artificial intelligence programs.

I also declare that, if a case contrary to my declaration is detected in my work at any time, I hereby express my consent to all the ethical and legal consequences that are involved.

Yeşim Yanardağ

ATTENTION: If generative artificial intelligence programs were not utilized at any stage of the study, the student should sign this page; *“I declare that I have not used generative artificial intelligence programs at any stage of the preparation, execution, data analysis, etc. of this study”* and add it to the thesis/dissertation.

İÇİNDEKİLER

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI.....	iii
ÖZET	iii
ABSTRACT.....	iv
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	v
STATEMENT OF COMPLIANCE WITH ETHICAL PRINCIPLES AND RULES.....	vi
ÖN SÖZ /TEŞEKKÜR	vii
ETİK KURUL BELGESİ BEYANNAMESİ	viii
ÜRETKEN YAPAY ZEKÂ KULLANIM BEYANI	ix
DECLARATION OF GENERATIVE ARTIFICIAL INTELLIGENCE USAGE ..	x
İÇİNDEKİLER.....	xi
TABLolar DİZİNİ	xiv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xv
GÖRSELLER DİZİNİ.....	xvi
1 GİRİŞ	1
1.1 Problem Durumu	1
1.2 Araştırmanın Önemi.....	4
1.3 Araştırmanın Amacı	5
1.4 Araştırmanın Sınırlılıkları.....	6
1.5 Araştırmanın Varsayımları.....	6
1.6 Tanımlar	6
2 KURAMSAL ÇERÇEVE.....	7
2.1 PISA Matematik Okuryazarlığı Çerçevesi.....	7
2.1.1 Matematik Okuryazarlığı.....	7
2.1.2 PISA matematik okuryazarlığı çerçevesi	9
2.1.3 PISA 2021 Matematik Okuryazarlığı Çerçevesi ve Matematiksel Muhakeme	11

2.1.4. Matematiksel Muhakeme Düzeyleri (Turner vd., 2015)	18
2.2 STEM'e Ait Kuramsal Çerçeve	18
2.3 İlgili Çalışmalar.....	23
2.3.1 Matematiksel muhakeme ile ilgili çalışmalar	23
2.3.2 STEM eğitimi ile ilgili çalışmalar	29
3 YÖNTEM	34
3.1 Araştırma Modeli	34
3.1.1 Nitel araştırma yaklaşımı	34
3.1.2 Öğretim deneyi.....	34
3.1.3 Katılımcılar	36
3.1.4 Veri Toplama Tekniği ve Araçları	39
3.1.5 Verilerin Toplanması.....	58
3.1.6 Veri Analizi	60
3.1.7 Etik Bildirim	62
4 BULGULAR.....	63
4.1 Ön Görüşmeye İlişkin Bulgular.....	63
4.1.1 Grup 1'in temsilcisi olarak seçilen Fatime'nin ön görüşme bulguları.....	63
4.1.2 Grup 2'nin temsilcileri olan Elif ve Hamza'nın ön görüşme bulguları	67
4.1.3 Grup 3'ün temsilcileri olan İlknur ve Aydan'ın ön görüşme bulguları	74
4.1.4 Grup 4'ün temsilcileri olan Necati ve Hatice'nin ön görüşme bulguları	80
4.2. Öğretilere İlişkin Bulgular	87
4.2.1 Birinci öğretim bölümü	87
4.2.2 İkinci öğretim bölümü	106
4.2.3 Üçüncü öğretim bölümü.....	121
4.3. Orta Görüşmeye İlişkin Bulgular	138
4.3.1 Grup 1'nin temsilcisi olan Fatime'nin orta görüşme bulguları.....	138
4.3.2 Grup 2'nin temsilcileri olan Elif ve Hamza'nın orta görüşme bulguları	145
4.3.3 Grup 3'ün temsilcileri olan İlknur ve Aydan'ın orta görüşme bulguları	158
4.3.4 Grup 4'ün temsilcileri olan Hatice ve Necati'nin orta görüşme bulguları..	167
4.4 Öğretimler	175
4.4.1 Dördüncü öğretim bölümü	175
4.4.2 Beşinci öğretim bölümü	188

4.4.3 Altıncı öğretim bölümü	198
4.5 Son Görüşmeye İlişkin Bulgular	213
4.5.1 Grup 1'nin temsilcisi olan Fatime'nin son görüşme bulguları.....	213
4.5.2 Grup 2'nin temsilcisi olan Elif ve Hamza'nın son görüşme bulguları.....	219
4.5.3 Grup 3'ün temsilcisi olan İlknur ve Aydan'ın son görüşme bulguları	227
4.5.4 Grup 4'ün temsilcisi olan Necati ve Hatice'nin son görüşme bulguları	234
5 SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER.....	242
5.1 SONUÇ.....	242
5.2 TARTIŞMA.....	258
5.3 ÖNERİLER.....	261
5.3.1 Uygulamaya yönelik öneriler.....	262
5.3.2 İleride yapılabilecek araştırmalara yönelik öneriler	262
KAYNAKÇA.....	263
EKLER	280

TABLÖLAR DİZİNİ

Sayfa

Tablo 1.1 Bütünleşik STEM Entegrasyonu (Bybee, 2013, Akt. Gencer vd., 2019).....	20
Tablo 3.1 Katılımcılara Ait Kodlar, Muhakeme Düzeyleri Ve Gösterdikleri Performanslar.....	38
Tablo 3.2 PISA-1 Testinde Yer Alan Sorulara Ait Bilgiler	40
Tablo 3.3 PISA-2 Testinde Yer Alan Sorulara Ait Bilgiler	42
Tablo 3.4 PISA-3 Testinde Yer Alan Sorulara Ait Bilgiler	48
Tablo 3.5 Arıların Çiçek Bulma Oyunu etkinliğinde gerçekleşmesi beklenen matematiksel muhakeme eylemleri	52
Tablo 3.6 Veri Toplama ve Analiz Süreci	59
Tablo 5.1 Ön Görüşmeye Dayalı Katılımcıların Matematiksel Muhakeme Düzeyleri	245
Tablo 5.2 Katılımcıların Ön ve Orta Görüşmelerinin Analizine Dayalı Matematiksel Muhakeme Düzeyleri.....	251
Tablo 5.3 Katılımcıların Ön, Orta ve Son Görüşmelerinin Analizine Dayalı Matematiksel Muhakeme Düzeyleri.....	255

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 2.1 Matematik Okuryazarlığı Modeli (Pugalee, 1999).....	8
Şekil 2.2 Niss ve Højgaard (2011) sekiz matematiksel yeterlik.....	10
Şekil 2.3 Matematiksel muhakeme ve problem çözme döngüsü arasındaki ilişki (PISA, 2021b).....	13
Şekil 2.4 Matematik okuryazarlığı 2021 boyutları (MEB, 2022a).....	17
Şekil 2.5 İnterdisipliner ve transdisipliner STEM entegrasyon modelleri (Bybee, 2013)	19
Şekil 2.6 STEM matematik anlamına gelir	22
Şekil 3.1 Öğretim esnasında sınıf ortamı.....	54

GÖRSELLER DİZİNİ

	Sayfa
Görsel 3.1 Gazete Satma 1 Sorusu.....	41
Görsel 4.1 Fatime'nin Bisiklet Sürücüsü Hale-3 sorusuna ilişkin çözümü	65
Görsel 4.2 Fatime'nin Bisiklet Sürücüsü Hale-1 sorusuna ilişkin çözümü	66
Görsel 4.3 Elif'in Gazete Satma 1 Sorusuna İlişkin Çözümü.....	68
Görsel 4.4 Hamza'nın Gazete Satma 1 Sorusuna İlişkin Çözümü.....	69
Görsel 4.5 Elif'in Bisiklet Sürücüsü Hale-3 Sorusuna İlişkin Çözümü.....	70
Görsel 4.6 Hamza'nın Bisiklet Sürücüsü Hale-3 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	71
Görsel 4.7 Elif'in Bisiklet Sürücüsü Hale-1 Sorusuna İlişkin Çözümü.....	72
Görsel 4.8 Hamza'nın Bisiklet Sürücüsü Hale-1 Sorusuna İlişkin Çözümü	73
Görsel 4.9 Elif'in En İyi Araba 1 Sorusuna İlişkin Çözümü	74
Görsel 4.10 Hamza'nın En İyi Araba 1 Sorusuna İlişkin Çözümü	74
Görsel 4.11 Aydan'ın En İyi Araba 1 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	75
Görsel 4.12 İlknur'un En İyi Araba 1 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	76
Görsel 4.13 Aydan'ın Bisiklet Sürücüsü Hale-1 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	77
Görsel 4.14 İlknur'un Bisiklet Sürücüsü Hale-1 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	78
Görsel 4.15 Aydan'ın Bisiklet Sürücüsü Hale-3 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	79
Görsel 4.16 İlknur'un Bisiklet Sürücüsü Hale-3 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	80
Görsel 4.17 Necati'nin Gazete Satma 1 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü.....	81
Görsel 4.18 Hatice'nin Gazete Satma 1 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü.....	82
Görsel 4.19 Necati'nin En İyi Araba 1 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	82

Görsel 4.20 Hatice'nin En İyi Araba 1 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	83
Görsel 4.21 Necati'nin Bisiklet Sürücüsü Hale-1 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	84
Görsel 4.22 Hatice'nin Bisiklet Sürücüsü Hale-1 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	85
Görsel 4.23 Necati'nin Bisiklet Sürücüsü Hale-3 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	85
Görsel 4.24 Necati'nin Bisiklet Sürücüsü Hale-3 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Diğer Çözümü.....	86
Görsel 4.25 Hatice'nin Bisiklet Sürücüsü Hale-3 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	86
Görsel 4.26 Necati'nin Güneş Paneli Öğretimindeki Çözüm Önerisi	88
Görsel 4.27 Fatime'nin Güneş Panelleri Öğretiminde Çözümü Canlandırması	90
Görsel 4.28 Fatime'nin Güneş Panelleri Öğretiminde Çözümü Canlandırması	92
Görsel 4.29 Elif Ve Hamza'nın Güneş Panelleri Öğretiminde Çözümü Canlandırması	93
Görsel 4.30 Güneş Panelleri Öğretimine İlişkin Çözüme Ait Çizimler.....	96
Görsel 4.31 Hatice'nin Güneş Panellerine İlişkin Çözümü	101
Görsel 4.32 Aydan'ın Güneş Panellerine İlişkin Çözümü	101
Görsel 4.34 Elif'in Güneş Panellerine İlişkin Çözümü -1	102
Görsel 4.35 Elif'in Güneş Panellerine İlişkin Çözümü -2	103
Görsel 4.36 Elif'in Güneş Panellerine İlişkin Çözümü -3	103
Görsel 4.37 Necati'nin Güneş Panellerine İlişkin Çözümü	104
Görsel 4.38 İlknur'un Güneş Panellerine İlişkin Çözümü	104
Görsel 4.39 Hamza'nın Güneş Panellerine İlişkin Çözümü	105
Görsel 4.40 Fatime'nin Güneş Panellerine İlişkin Çözümü.....	105
Görsel 4.41 Necati'nin Sese Ait Trigonometrik Denklemi.....	109
Görsel 4.42 Elif'in Sese Ait Trigonometrik Denklemi	109

Görsel 4. 43 Sese Ait Trigonometrik Denklem.....	109
Görsel 4.44 Hatice'nin Geogebra'da Sinüs Fonksiyonuna Ait Denklemi Yazarkenki Görseli.....	110
Görsel 4.45 Hatice'nin Geogebra Yazılımında Sinüs Fonksiyonuna Ait Denkleminin Ait Grafiğinin Görseli	110
Görsel 4.46 Ses Frekansı Etkinliğinde Denklemlerin Farklı Gösterimlerinin Eşitliği. 113	
Görsel 4.47 Elif'in Çözüm Önerisi	120
Görsel 4.48 Teknofest Öğretiminde Grup Olarak Sunulan Çözüm Önerisi	120
Görsel 4.49 Maket Dost Aracın Katılımcılar Tarafından İncelenmesi	122
Görsel 4.50 Necati'nin Dost Araç Öğretimindeki Çözüm Önerisi	124
Görsel 4.51 Dost Araç Öğretiminin Çözümüne İlişkin Küre Ve Koninin Karşılaştırılması	127
Görsel 4.52 Dost Araç Öğretiminin Çözümüne İlişkin Düz Ve Ters Koni Karşılaştırılması	128
Görsel 4.53 Fatime'nin Dost Araç Çözümüne İlişkin Çizimleri.....	128
Görsel 4.54 Elif'in Dost Araç Deposunun Çözümüne İlişkin Çizimleri	129
Görsel 4.55 Hamza'nın Dost Araç Deposunun Çözümüne İlişkin Çizimleri	129
Görsel 4.56 Aydan'ın Dost Araç Deposunun Çözümüne İlişkin Çizimleri.....	130
Görsel 4.57 İlknur'un Dost Araç Deposunun Çözümüne İlişkin Çizimleri.....	130
Görsel 4.58 Hatice'nin Dost Araç Çözümüne İlişkin Çizimleri	131
Görsel 4.59 Necati'nin Dost Araç Çözümüne İlişkin Çizimleri	131
Görsel 4.60 Necati'nin Su Deposunun Üç Farklı Biçimine İlişkin Grafik Çizimleri ..	133
Görsel 4.61 Fatime'nin Depo Şekillerine Bağlı Yükseklik Zaman Grafikleri.....	133
Görsel 4.62 Aydan'ın Depo Şekillerine Bağlı Yükseklik Zaman Grafikleri	134
Görsel 4.63 Hatice'nin Depo Şekillerine Bağlı Yükseklik Zaman Grafikleri	135
Görsel 4.64 Dost Araç Öğretimine İlişkin Genel Çözüm	137
Görsel 4.65 Deposuz Serbest Bırakılma Ve Ters Su Deposuyla Olan Hızları	138

Görsel 4.66	Fatime'nin Büyüme Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü.....	139
Görsel 4. 67	Fatime'nin Damlama Oranı Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü.....	140
Görsel 4.68	Fatime'nin Büyüme Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü.....	142
Görsel 4.69	Fatime'nin Yarış Arabası Hızı Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü .	143
Görsel 4.70	Fatime'nin İnternette Sohbet Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü....	145
Görsel 4.71	Elif'in Damlama Oranı Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü.....	147
Görsel 4. 72	Hamza'nın Damlama Oranı Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	147
Görsel 4.73	Elif'in Büyüme Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü.....	149
Görsel 4.74	Hamza'nın Büyüme Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü.....	151
Görsel 4.75	Elif'in Yarış Arabası Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	152
Görsel 4.76	Hamza'nın Araba Yarışı Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü.....	153
Görsel 4.77	Elif'in İnternette Sohbet Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	155
Görsel 4.78	Hamza'nın İnternette Sohbet Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü....	157
Görsel 4.79	İlknur'un Damlama Oranı Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	160
Görsel 4.80	Aydan'ın Damlama Oranı Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	160
Görsel 4.81	İlknur'un Büyüme Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	162
Görsel 4.82	Aydan'ın Büyüme Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	163
Görsel 4. 83	İlknur'un Yarış Arabası Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü.....	164
Görsel 4.84	Aydan'ın Yarış Arabası Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü.....	165
Görsel 4.86	Aydan'ın İnternette Sohbet Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	166
Görsel 4.87	Necati'nin Damlama Oranı Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	168
Görsel 4.88	Hatice'nin Damlama Oranı Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	169
Görsel 4.89	Necati'nin Büyüme Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	170
Görsel 4.90	Hatice'nin Büyüme Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	171
Görsel 4.91	Necati'nin Yarış Arabası Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	172
Görsel 4.92	Hatice'nin Yarış Arabası Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	173

Görsel 4.93 Necati'nin İnternette Sohbet Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü.....	174
Görsel 4.94 Hatice'nin İnternette Sohbet Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü.....	175
Görsel 4.95 Uzay Teleskopları'nda Elif'in Görsel Temsile Ait Çizimi.....	176
Görsel 4.96 Elif'in F_1 ve F_2 Kuvvetlerine Dair Matematikleştirmesi	177
Görsel 4.97 Uzay Teleskoplarında Gerçek Durumun Matematikleştirilmesi.....	179
Görsel 4.98 Uzay Teleskopları'nda Uzaklıklara Dair Eşitlik Durumunun Bulunması	180
Görsel 4.99 Uzay Teleskopları'nda Yörüngeye Ait Noktaların Bulunması	181
Görsel 4.100 Uzay Teleskopları'nda Pisagor Teoremi Yardımıyla Uzaklığın Bulunması	183
Görsel 4.101 Uzay Teleskopları'nda Doğrusallıkla Noktaların Yeniden Bulunması..	183
Görsel 4.102 Uzay Teleskopları'nda Uzaklıkların Eşitlenip İşlem Yapılması	184
Görsel 4.103 Uzay Teleskopları'nda Hatice'nin Yeni Yörüngeye Dair Çözümü	185
Görsel 4.104 Uzay Teleskopları'nda Aydan'ın Yeni Yörüngeye Dair Çözümü	186
Görsel 4.105 Uzay Teleskopları'nda İlknur'un Yeni Yörüngeye Dair Çözümü	186
Görsel 4.106 Uzay Teleskopları'nda Hamza Ve Elif'in Yeni Yörüngeye Dair Çözümü Matematikleştirmesi.....	187
Görsel 4.107 Uzay Teleskopları'nda Katılımcıların Genel Çözümü	188
Görsel 4.108 Necati'nin Arıların Çiçek Bulma Oyunu'nda Verilenleri Görsel Temsil Etmesi	189
Görsel 4.109 Oyuna Ait Verilen Görsel Temsiller	190
Görsel 4.110 Grubun Birinci Sorunun Çözümüne Ait Görsel Temsili.....	191
Görsel 4.111 Hatice'nin Birinci Sorunun Çözümüne Ait Görsel Temsili	192
Görsel 4.112 Grubun İlk Soruya Ait Sözel İfadesi	193
Görsel 4.113 Grubun İkinci Soruya Ait Sözel İfadesi	195
Görsel 4.114 Grubun Üçüncü Soruya Ait Çözümü	196
Görsel 4.115 Elif'in Kosinüs Teoremine Ait İşlemler	198

Görsel 4.116	Katılımcılar Tarafından Piramidal Yapının Oluşturulması	200
Görsel 4.117	Piramidal Yapının Denenmesi.....	201
Görsel 4.118	Elif'in Ardışık Sayı Toplamına Dair İspatı	204
Görsel 4.119	Necati'nin Ardışık Sayı Toplamına Dair İspatı	205
Görsel 4.120	Elif'in Eşitsizliği Tahtada Çözümü	206
Görsel 4.121	Katılımcıların Eşitsizliğe Dair Ortak Çözümü	207
Görsel 4.122	Hamza'nın Afişi	209
Görsel 4.123	Necati'nin Afişi	209
Görsel 4.124	Elif'in Afişi.....	210
Görsel 4.125	Hatice'nin Afişi	210
Görsel 4.126	Aynur'un Afişi.....	211
Görsel 4.127	Fatime'nin Afişi.....	211
Görsel 4.128	İlknur'un Afişi	212
Görsel 4.129	Fatime'nin En İyi Araba 2 Sorusuna Ait Çözümünde Değişkenleri Belirleyebilmesi	214
Görsel 4.130	Fatime'nin Fuji Dağı Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	215
Görsel 4.131	Fatime'nin Araba Gezintisi Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	216
Görsel 4.132	Fatime'nin Bisiklet Sürücüsü Hale Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	217
Görsel 4.133	Fatime'nin En İyi Araba 2 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü.....	218
Görsel 4.134	Hamza'nın En İyi Araba 2 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	220
Görsel 4.135	Elif'in En İyi Araba 2 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü.....	221
Görsel 4.136	Hamza'nın Fuji Dağı Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü.....	221
Görsel 4.137	Elif'in Fuji Dağı Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	222
Görsel 4.138	Elif'in Araba Gezintisi Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	223
Görsel 4.139	Hamza'nın Araba Gezintisi Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	223

Görsel 4.140	Elif'in Bisiklet Sürücüsü Hale Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	224
Görsel 4.141	Hamza'ın Bisiklet Sürücüsü Hale Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	225
Görsel 4.142	Elif'in En İyi Araba 2 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	226
Görsel 4.143	Hamza'nın En İyi Araba 2 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	226
Görsel 4.144	İlknur'un En İyi Araba 2 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	227
Görsel 4.145	Aydan'ın En İyi Araba 2 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	228
Görsel 4.146	İlknur'un Fuji Dağı Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	229
Görsel 4.147	Aydan'ın Fuji Dağı Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	229
Görsel 4.148	İlknur'un Araba Gezintisi Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	230
Görsel 4.149	Aydan'ın Araba Gezintisi Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	231
Görsel 4.150	İlknur'un Bisiklet Sürücüsü Hale Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	231
Görsel 4.151	Aydan'un Bisiklet Sürücüsü Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü...	232
Görsel 4.152	İlknur'un En İyi Araba 2 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	233
Görsel 4.153	Aydan'ın En İyi Araba 2 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	233
Görsel 4.154	Necati'nin En İyi Araba 2 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	235
Görsel 4.155	Hatice'nin En İyi Araba 2 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	236
Görsel 4.156	Necati'nin Fuji Dağı Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	237
Görsel 4.157	Hatice'nin Fuji Dağı Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	237
Görsel 4.158	Hatice'nin Araba Gezintisi Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	238
Görsel 4.159	Necati'nin Araba Gezintisi Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	238
Görsel 4.160	Necati'nin Bisiklet Sürücüsü Hale Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	239
Görsel 4.161	Hatice'nin Bisiklet Sürücüsü Hale Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	239
Görsel 4.162	Necati'nin En İyi Araba 2 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü	240

Görsel 4.163 Hatice'nin En İyi Araba 2 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü 241



KISALTMALAR DİZİNİ

KOM	: Kompetencer og matematikl�ring / Competencies and the Learning of Mathematics (Matematiksel Yeterlikler)
MCRF	: Mathematical Competency Research Framework (Matematiksel Yeterlik Araştırma �er�evesi)
NCTM	: National Council Teacher of Mathematics (Ulusal Matematik �ğretmenleri Konseyi)
NEPS	: National Educational Panel Study (Ulusal Eğitim Panel �alışması)
NRC	: National Research Council (Ulusal Araştırma Konseyi)
OECD	: Organization for Economic Cooperation and Development (Ekonomik İş birliği ve Kalkınma �rg�t�)
PISA	: Programme for International Student Assessment (Uluslararası �ğrenci Değerlendirme Programı)

BÖLÜM 1

1 GİRİŞ

Bu bölümde yapılan araştırmaya yönelik problem durumu, araştırmanın amacı, önemi, varsayımları, sınırlılıkları ve tanımlar yer almaktadır.

1.1 Problem Durumu

Hızla gelişen dünyada değişime ayak uydurabilmek için üst düzey düşünme ve problem çözme becerilerine ve dolayısıyla nitelikli eğitime ihtiyaç duyulmaktadır. İhtiyaç duyulan eğitimin hedeflerinde ise bireylerin problem çözümünde muhakemede bulunmalarını sağlamak vardır (Kosonen 1992). Gerçekten de muhakeme insan zihninin temel işlevlerinden biri olup problem çözümünde etkin rol oynamaktadır (Căprioară, 2015). Günlük hayat ve diğer disiplinlerle ilişkilendirilen matematikte de muhakemeye dair vurgu yapılmaktadır (Brodie, 2010). Dolayısıyla matematiksel muhakeme de matematik öğrenme sürecinin önemli bileşenleri arasında yer edinmektedir.

İngilizce’de “*reasoning*” şeklinde yazılan bu kavramın Türkçe’de “muhakeme” veya “akıl yürütme” şeklinde karşılık bulduğu görülmektedir. Ulusal matematik eğitimi alanyazınına bakıldığında ise “matematiksel muhakeme” ve “matematiksel akıl yürütme” ifadelerinin kimi zaman birbirinin yerine kullanıldığı (Umay, 2003; Ateş vd., 2019; Barak, 2022) kimi zaman da birbirinden farklı yönlerinin olduğu (Çötök ve Kabil, 2023) vurgulanmıştır. Muhakeme her zaman bilginin anlamlandırılmasında ve açıklanmasında ön koşul olarak gösterilmiştir (Umay, 2003). Çünkü muhakemenin olabilmesi için bir düşüncenin bilgiye dayandırılması, gerekçelendirilmesi ve mantıklı yaklaşımlar içermesi beklenmektedir (Umay, 2003).

Matematiksel muhakeme, Mason (2001) tarafından varsayımda bulunma, sonuç çıkarma ve bunları yaparken “eğer... ise...” kalıplarını kullanma olarak ifade edilmiştir. Ball ve Bass (2003) ise matematiksel anlamının, muhakeme olmadan gerçekleşemeyeceğini belirtmiş, matematik öğreniminde temel teşkil etmesi ve bilgilerin tekrar yapılandırılmasındaki gerekliliği nedeniyle matematiksel muhakemeyi bir bilişsel beceri olarak görmüştür. Benzer şekilde Uluslararası Matematik ve Fen Eğilimleri Araştırması (Trends in International Mathematics and Science Study [TIMSS]) 2003 yılındaki değerlendirmesinde de matematiksel muhakemeyi bir bilişsel beceri olarak ele almaktadır (IEA, 2005). Diğer yandan gerçek hayatta matematiği etkin olarak kullanabilen, matematiksel yapılar arasındaki ilişkiyi gören ve çözümleyen, durumlar

arasındaki neden ve sonuç ilişkisini fark eden bireylere olan gereksinim matematiksel muhakemenin matematik öğretimindeki önemini ortaya koyar. Bu nedenle öğretim ortamında muhakemenin desteklenmesine yer verilmelidir (Sumarsih ve vd., 2018). Brodie (2010)'ye göre matematiksel muhakeme birçok yeterlik için anahtar bir rol oynadığından matematiksel muhakeme gelişimine destek verilmelidir (NCTM, 2010). Farklı çalışma sonuçlarında da geleneksel problem çözme sürecinin muhakeme, ilişkilendirme ve matematik okuryazarlığı gibi temel becerilerin kazandırılmasına yetmediği (Mousoulides vd., 2006, Zawojewski vd., 2003), soyut işlemlerin yer aldığı muhakeme süreçlerinde değişkenlerin belirlenmesinde, ilişkilendirilmesinde, varsayımlar oluşturup çözümünün sunulmasında ve durumlar arası karşılaştırılmasında sıkıntılar yaşandığı (Erlina vd., 2018) belirlenmiştir. Bu durum matematiksel muhakemenin problem çözmedeki gerekliliğini ön plana çıkarmıştır (Pellerin, 2012; Schoenfeld, 1985). Böylece matematiksel muhakeme ile problem çözümüne yönelik daha uygun durumların sunulduğu (Kramarski vd., 2001; Toole, 2001) ve matematiksel muhakemenin matematiksel kavramların gelişiminde etkili olduğu (Singley ve Bunge, 2014) anlaşılmıştır. Ayrıca problem çözme ve matematiksel muhakeme ilişkisi incelendiğinde, matematiksel muhakemenin var olan bilgileri problemde kullanmalarına imkan sağlayan bir araç şeklinde ele alınabileceği ifade edilmiştir (Çiltaş, 2011). Ulusal Araştırma Konseyi (National Research Council [NRC])'nde (2006) ise muhakeme, uygun çözüm bulma adına problem çözme sürecine ait bir bileşen şeklinde düşünülmektedir. Bu da muhakemeyi aktif kılacak eğitim anlayışlarına olan gereksinimi ortaya çıkarmaktadır (Sumarsih vd., 2018).

Matematiksel muhakemenin yer edindiği çerçeveler incelendiğinde ise matematiksel muhakemenin birçok çerçevede yeterlik olarak ele alındığı görülmüştür (NCTM, 2020; OECD, 2021) Bunlardan Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı (The Programme for International Student Assessment [PISA]) üç yılda bir uygulanan uluslararası bir değerlendirmedir. Hem bilişsel hem duyuşsal alanlarda değerlendirme yapmaktadır. Bilişsel ölçme alanlarında fen, matematik ve anadil vardır. 15 yaş üzerindeki öğrencilere uygulanan PISA, matematiksel bilgi ve becerileri gerçek yaşam durumlarında değerlendirmektedir. PISA 2012 matematik okuryazarlığı çerçevesinde matematiksel muhakeme yedi yeterlikten biri olarak ele alınarak diğer yeterliklerle ilişkisi verilmiştir. Güncellenen PISA 2022 matematik okuryazarlığı çerçevesinde ise problem çözme sürecinin her bir aşamasında matematiksel muhakeme aktif kılınmış ve çerçevenin

merkezinde yerleştirmiştir. Bu da matematiksel muhakemenin problem çözeninin her bir aşamasındaki işlerliğini ortaya çıkarmıştır. Ancak çerçevenin yeni yayınlanmış olması sebebiyle matematiksel muhakemeye ilişkin birkaç çalışma yapılmış olsa da (Özaydın ve Arslan, 2022; Ingram ve Stiff, 2022; Almarashdi ve Jarrah; 2022) gerçek yaşam problemlerinin çözümlerine ilişkin muhakemenin detaylı olarak ele alınmamış olması bu anlamda bir boşluğu işaret etmektedir. Ayrıca 2003'ten beri PISA katılımcısı olan Türkiye'nin matematik okuryazarlığı puanı düşüktür. Açıklanan PISA 2022 verilerine göre Türkiye matematik ortalama performans puanı olan 453, Ekonomik İşbirliği ve Kalkınma Teşkilatı (Organization of Economic Cooperation and Development [OECD])'na ait genel ortalama matematik puanının (472) altındadır (MEB, 2022b). Ayrıca genel içerik alanlarına tek tek bakıldığında değişim ve ilişkilerde 449 puanla yine OECD ölkelerinin ortalamasından (470 puan) daha düşüktür (MEB, 2022b).

PISA değerlendirmesinin 2022 matematik ortalama performans ve süreç alt ölçeğindeki ortalama performanslar sırasıyla formölleştirme, kullanma, yorumlama ve muhakeme şeklinde ele alınırsa Türkiye'ye ait puanlar sırasıyla 453, 451, 452, 455 ve 454'tür. Araştırmaya dahil olan muhakeme için OECD ortalama puanı 473 olduğundan ölkemiz (454) yine ortalamadan daha düşüktür. Bu nedenle Türkiye'de matematik okuryazarlığının geliştirilmesi gereklidir. PISA'da görölen önemi ile paralel şekilde olan bilgi ve becerinin gerçek yaşamda kullanımı bir kez daha ortaya koyulmalıdır.

Diğer yandan gerçek yaşam problemlerinin çözümlerinde matematiksel muhakemenin desteklendiği bir öğrenme ortamının nasıl olabileceği sorgulandığında, 21. yüzyılda oldukça yaygın kullanılan gerçek yaşam problemlerinin de sunulduğu STEM'e dayalı öğrenme ortamı (Bybee, 2013) akla gelir. Ayrıca STEM'e dayalı öğrenme ortamında matematiksel muhakemeye ilişkin alanyazın incelendiğinde benzer bir boşluk daha görölmüştür. Yapılan çalışmalarda her ne kadar STEM, problem çözümler ve muhakeme kavramları yer alsada (Sokolowski, 2019; English, 2023) STEM'e dayalı öğrenme ortamının matematiksel muhakeme gelişimindeki rolü ve bu rolün problem çözümlerine dayalı açıklığa kavuşturulma ihtiyacı devam etmektedir.

Ayrıca STEM eğitimi alan öğrencilerin matematik disiplninde aktif rol alarak düşünme ve iletişim kurmalarında iyileşme tespit edilmiştir (SCANS, 1991). Diğer yandan matematiksel kavrayışları ileri düzeyde olan öğrenciler de STEM'de başarılı olmuşlardır (Leopold ve Edgar, 2008). Bu da matematik ve STEM arasındaki güçlü ilişkinin araştırılma nedenlerindendir. Carnevalle ve arkadaşları (2011) yaptığı çalışmada

matematiksel muhakemenin STEM becerilerinden en çok kullanılan beceri olduğunu belirtmiştir. Bu ise aradaki kesin ilişkinin nasıl öğretileceği sorusunu akıllara getirmektedir. Matematiksel muhakemeyi geliştirmenin matematik eğitiminin de temelleri arasında (NCTM, 2000) olmasından dolayı, matematiksel muhakemenin gelişimi STEM’e dayalı öğrenme ortamında araştırılmalıdır.

Ayrıca PISA 2022 matematik okuryazarlığı çerçevesinin STEM becerilerini de kapsadığı görülmüştür. Bu da her iki çerçevenin bir arada olabileceğine ve ortak sorunlara karşı mücadele ettiğine kanıt niteliğindedir. Bu nedenle gerçek yaşam problemi çözüm sürecinin PISA çerçevesinde ele alınarak, STEM öğrenme ortamında matematiksel muhakeme gelişimine odaklanmak uygun olacaktır.

Ayrıca PISA 2022 uygulamasının okul türlerine göre ortalama matematik puanlarına bakıldığı zaman en yüksekte en düşüğe doğru fen liseleri (598 puan), sosyal bilimler liseleri (518 puan), anadolu liseleri (467 puan), anadolu imam hatip liseleri (444 puan) ve diğer liseler şeklindedir. Bu anlamda genel lise öğrenci sayısının çoğunluğunu oluşturan anadolu liselerinde yer alan öğrencilerle çalışmanın Türkiye geneli öğrencileri kısmen de olsa daha iyi temsil edeceği düşünülmektedir. Bu anlamda çalışmaların lise düzeyi öğrenci sayısında çoğunluğu oluşturan anadolu lisesi öğrencilerini ele almanın önemi ortaya çıkmıştır.

Matematiksel muhakeme ile ilgili yapılan çalışmalara bakılınca nicel çalışmalar göze çarpmaktadır (Hermawan vd., 2019; Çoban, 2019; Pilten, 2008; Ywankelewitz, 2009; Erdem, 2015). Oysa öğrencinin öğrenmelerine dayalı böyle bir becerinin süreç olarak derinden incelenmesine ve alana sunulmasına ihtiyaç vardır. Bu nedenle araştırmalarda nitel yöntemlere duyulan eksiklik de öne çıkmaktadır. Böylece yapılacak olan araştırmanın nitel olarak ele alınması ile belirlenen birçok eksikliğe çözüm olması beklenmektedir.

1.2 Araştırmanın Önemi

Öncelikle bir öğrencinin matematik yeterliğini kazanması için zihinsel yeterlikleri gelişmelidir (Mesleki Yeterlik Kurumu, 2015; 2021). Bu da bizi temel zihinsel işlevlerden biri olan muhakemeye götürmektedir. Matematiksel kavramlardaki yapı ve aralarındaki ilişkiyi ele alırken yapılan gerekçelendirme, sunma gibi eylemler ise matematiksel muhakeme olarak yer edinmektedir (Umay, 2003). Matematik eğitiminin en genel amacı olan matematik okuryazarlığının gelişimi ise gerçek yaşam

problemlerinde matematiksel muhakemenin önemini ortaya koyar. Bu önem ise gerçek yaşam problemlerinin çözüm sürecini içeren öğrenme ortamında matematiksel muhakemenin desteklenmesini vurgular. Dolayısıyla bu öğrenme ortamlarının nasıl olması gerektiği yönündeki sorgulamaların son bulduğu çerçevelerden birisi STEM olur. STEM'in doğal döngü sürecindeki aşamalarda düşünülmesi gerekenler matematiksel muhakeme ile uyum sağlayacak nitelikte ve problem durumları muhakemeyi tetikleyecek şekilde düzenlenmesiyle birçok öğrencinin sadece kural ve işlem olarak gördüğü matematik, STEM öğrenme ortamında gerçek yaşamla içi içe olarak sunulabilecek ve matematiksel muhakeme eylemleri bu süreçte daha detaylı olarak ele alınabilecektir. Bir bireyin gerçek yaşama dair önüne gelen her türlü problem durumuna karşı yaratıcı ve en mantıklı çözümü bulmasında matematik okuryazarlığı ve STEM eğitiminin etkisi kaçınılmaz olacaktır. Çünkü STEM eğitimi ve matematik okuryazarlığının amaçlarından birisi budur ve yapılan ilgili araştırmalar bu yönde olumlu sonuçlar elde edildiğini göstermektedir (Bybee, 2013; English, 2016; OECD, 2019). Bu doğrultuda bu çalışmada STEM öğrenme ortamında matematiksel muhakemenin incelenmesine odaklanılacaktır. Detaylarıyla ortaya konulacak bu çalışmanın alana da katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Çünkü daha önce bu iki çerçevenin de yer aldığı bir öğrenme ortamı için matematiksel muhakeme ele alınsa da ya nicel çalışılmış ya da detaylı süreç incelemesi yapılmamıştır. Ayrıca matematiksel muhakemenin STEM öğrenme ortamındaki gelişiminin incelenmesi, öğrenme ortamlarına yön verme adına oldukça önemlidir.

1.3 Araştırmanın Amacı

Bu araştırmada 11. sınıf öğrencilerinin STEM'e dayalı öğrenme ortamında matematiksel muhakeme gelişimlerinin incelenmesi amaçlanmaktadır. Bu amaç doğrultusunda aşağıdaki araştırma sorularına yanıt aranacaktır.

Araştırma Soruları

1. 11. sınıf öğrencilerinin öğretim uygulaması öncesi matematiksel muhakemeleri nasıldır?
2. 11. sınıf öğrencilerinin öğretim uygulaması sürecinde matematiksel muhakemeleri nasıl değişmektedir?
3. 11. sınıf öğrencilerinin öğretim uygulaması sonrasında matematiksel muhakemeleri nasıldır?

4. STEM’e dayalı öğrenme ortamı matematiksel muhakemeye nasıl etki etmektedir?

1.4 Araştırmanın Sınırlılıkları

Bu araştırmanın sınırlılıkları aşağıdaki şekilde belirlenmiştir.

1. Araştırmadaki veri toplama süreci yaklaşık altı aylık bir zaman dilimi ile sınırlı olacaktır.
2. Araştırma 2023 – 2024 eğitim öğretim yılında Kilis il merkezinde bulunan bir Anadolu lisesinde öğrenim görmekte olan 11. sınıf öğrencileri ile sınırlı olacaktır (Pilot ve esas uygulama için 2023-2024 eğitim öğretim yılı planlanmıştır).
3. Araştırma verileri kullanılacak veri toplama araçları ile sınırlı olacaktır.

1.5 Araştırmanın Varsayımları

Araştırmanın varsayımları aşağıda sunulduğu şekilde belirlenmiştir.

1. Katılımcı seçimi sürecinde öğrencilerin mevcut bilgi ve becerilerini işe koşarak içtenlikle yanıt verdikleri varsayılacaktır. Benzer şekilde yine bu süreçte gerçekleştirilen görüşmelerde öğrencilerin yöneltilen soruları samimiyetle yanıtladıkları ve düşüncelerini doğru bir şekilde yansıttıkları düşünülecektir.
2. Ön, orta ve son klinik görüşme süreçlerinde öğrencilerin kullanılan ölçme araçlarına ilişkin yanıtlarının doğruluğu/yanlışlığı konusunda çekinmeden açıklama yaptıkları varsayılacaktır.

1.6 Tanımlar

Bu bölümde, araştırmada geçen bazı terimlerin tanımlarına yer verilmiştir.

Muhakeme: Sonuca ulaşma veya bir iddia üretmede takip edilen düşünme sürecidir (Lithner, 2008).

Matematiksel muhakeme: Bireyin matematiksel durumları analiz etme, varsayımları sorgulama, sonuç çıkarma ve bu sonuçları mantıksal bir bütünlük içinde temellendirmeye dayalı düşünmesi sürecidir (NCTM, 2000).

Beceri: Problemleri çözebilmek için yeterli bilgi ve niteliği belirli bağlamlarda kullanarak karmaşık görevlerin üstesinden gelmedir (Ananiadou ve Claro, 2009).

Yeterlik: Kişinin verilen durumlarla ilgili her türlü matematiksel zorluğa yanıt olarak uygun şekilde hareket etmeye yönelik hazır bulunuşluğudur (Højgaard, 2019).

BÖLÜM 2

2 KURAMSAL ÇERÇEVE

Bu bölümde çalışmada kullanılan kuramsal çerçevelere yer verilecektir. Bu tez çalışmasında matematiksel muhakeme, PISA matematik okuryazarlığı çerçevesinde ele alınmıştır. PISA matematik okuryazarlığı çerçevesindeki yedi yeterlikten biri olan matematik okuryazarlığı yeterliğinin gelişimi, çözüm sürecinde STEM etkinlikleri ile desteklenmiş gerçek yaşam problemlerine dayalı öğrenme sürecinde incelenmiştir. Dolayısıyla öğrenme ortamlarının tasarımında PISA matematik okuryazarlığı çerçevesi ve STEM kuramsal çerçevesi kullanılmıştır. Elde edilen verilerin yorumlanmasında ise PISA çerçevesinin yanı sıra Turner ve arkadaşları (2015) tarafından oluşturulan matematiksel muhakeme düzeyleri kullanılmıştır.

2.1 PISA Matematik Okuryazarlığı Çerçevesi

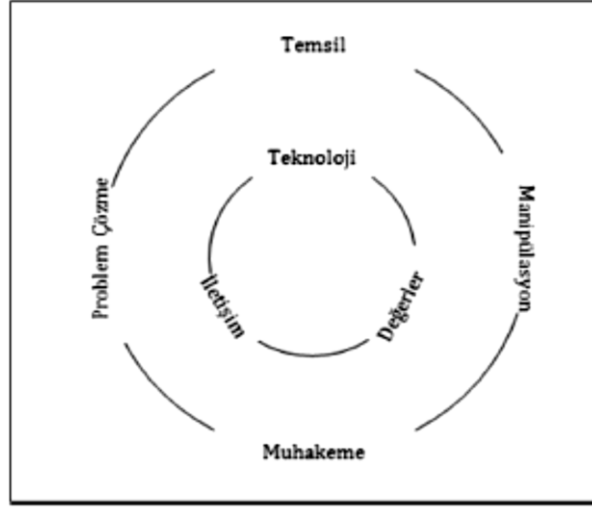
PISA çerçevesine geçmeden önce matematik okuryazarlığının anlaşılmasına ihtiyaç duyulacağından öncelikle matematik okuryazarlığının ne olduğunu detaylandıralım.

2.1.1 Matematik Okuryazarlığı

Matematik okuryazarlığı ilk kez NCTM'nin 1944 Savaş Sonrası Planı ve ileriki raporlarında yer bulsa da hiçbirinde tam olarak tanımına yer verilmemiştir (Niss ve Jablonka, 2014). Matematik okuryazarlığı kavramının tanımına dair farklı yaklaşımlar vardır. Pugalee (1999)'e göre NCTM (1989) matematik okuryazarlığını niceliksel anlamlandırmalar gerektiren matematiksel ve teknolojik etkilerin artışından kaynaklanan toplumsal bir ihtiyaç olarak tanımlamıştır. Jablonka (2003) matematik okuryazarlığını matematiksel düşünmeyi öğrenme ile ilişkilendirmiştir. Matematik okuryazarlığını, temel matematiksel kavramların bilgisi ve anlayışı olarak günlük yaşam bağlamında temel işlemsel becerileri kullanabilme yeteneği şeklinde ifade etmiştir (Jablonka, 2003).

NCTM (1989) standartlarında ise öğrencilerin matematik okuryazarlığı bilgilerini edindikleri ve kullandıkları süreçlere yer verilmiştir. Bu süreçler matematiğe değer verme, matematik yapmadaki yeteneklerine güvenme, matematiksel problemleri çözme, matematiksel olarak iletişim kurma ve matematiksel muhakeme yapmadır (Pugalee, 1999; Niss ve Jablonka, 2014). Şekil 2.1 ile gösterilen bu süreçlerde iç içe iki halka vardır.

Şekil 2.1 Matematik Okuryazarlığı Modeli (Pugalee, 1999)



Dış halkada matematik yapmada önemli olan temsil, manipülasyon, muhakeme ve problem çözme süreçleri verilirken, iç halkada ise matematik yapmanın kolaylaştırıcıları olan iletişim, teknoloji ve değerler sunulmuştur.

Matematik okuryazarlığı bazı araştırmacılara göre bilgi ve üst düzey beceriden ziyade temel bir gereksinim olarak da görülmüştür. McCrone ve Dossey (2007) matematik okuryazarlığını matematiğin günlük yaşamdaki rolünü anlama ve günlük hayatta karşılaşılan sorunları çözmek için matematiği kullanma kapasitesi olarak ele almıştır. Martin (2007) matematik okuryazarlığı kavramından bir bireyin gerçek yaşam durumu karşısında matematiksel bilgi ve becerileri muhakeme, analiz etme, formüle etme ve problem çözme olarak bahsetmiştir. Tüm bu tanımlardan herkesin ortak olarak matematik okuryazarlığının salt matematiksel bilgi olarak tanımlanamayacağı, matematik okuryazarlığının matematiksel bilginin işlevsel olarak kullanılma yeterliliği ile ilgili olduğu ortaya koyulmuştur (Hoogland, 2003). Bu anlamda matematik okuryazarlığı yeterli olan bireyler matematiği kullanarak karmaşık problem durumlarında doğru temellere dayalı yargılara ulaşır, kararlar verir ve kendi ihtiyaçlarını karşılamaktadır. Matematik okuryazarlığı bunların dışında bireylerin eleştirel düşünme, araştırma ve sorgulama, bilgiyi kullanma, öz düzenleme gibi 21. yüzyıl becerilerinin gelişimini de desteklemektedir (OECD, 2010).

Matematik okuryazarlığını açık olarak tanımlamaya yönelik ilk girişim PISA çerçevesine dayalı olarak OECD (1999) tarafından yapılmıştır (Niss ve Jablonka, 2014; Turner, 2012). Matematik okuryazarlığı, bireyin dünyada matematiğin oynadığı rolü

anlama ve belirleme, iyi temellendirilmiş yargılarda bulunma, yapıcı, ilgili ve düşünceli birer vatandaş olarak şimdiki ve gelecekteki hayatındaki ihtiyaçlarını karşılayacak şekilde matematikle meşgul olma kapasitesi olarak tanımlamıştır (OECD, 2003). Ancak PISA 2012’de matematik okuryazarlığı tekrar ele alınmış ve çeşitli bağlamlarda bireyin formüle etme, matematiği kullanma ve yorumlama kapasitesi olarak verilmiştir. Bu kapasitede matematiksel muhakeme, bir olguyu açıklama ve tahmin edebilme adına matematiksel kavramları, işlemleri ve araçları kullanmayı içermektedir (MEB, 2011). PISA 2015 kapsamında ise matematik okuryazarlığı çeşitli hayat bağlamlarında bireyin formüle etme, matematiği kullanma ve yorumlama kapasitesidir. Bu kapasite, matematiksel olarak muhakeme, bir olguyu açıklama ve tahmin etme için matematiksel kavramları, işlemleri ve araçları kullanmaktan oluşmaktadır (OECD, 2017).

2.1.2 PISA matematik okuryazarlığı çerçevesi

PISA matematik okuryazarlığı çerçevesinde matematiksel süreçler, matematiksel içerik ve bağlamlar ve matematiksel yeterlikler olmak üzere dört temel bileşen yer almaktadır. Matematiksel içerikler; gerçek yaşam probleminin dayandığı matematiksel kavramları, bağlamlar ise gerçek yaşam problem durumunun gerçek yaşamda ilişkili olduğu gerçek yaşam konusunu sınıflar. Matematiksel süreç bileşeni ise formüle etme, yürütme ve yorumlama ifadeleriyle verilen üç alt süreçten oluşur. Bu alt süreçler ile, öğrencilerin aktif problem çözücü olarak katılacakları süreçler işaret edilmiştir (OECD, 2017). Matematiksel yeterlikler ise bu süreçlerde işe koşulan zihinsel eylemlere işaret eder.

Matematiksel süreçler ve içerdikleri bir takım etkinlikler aşağıda verilmiştir (OECD, 2017; MEB, 2011);

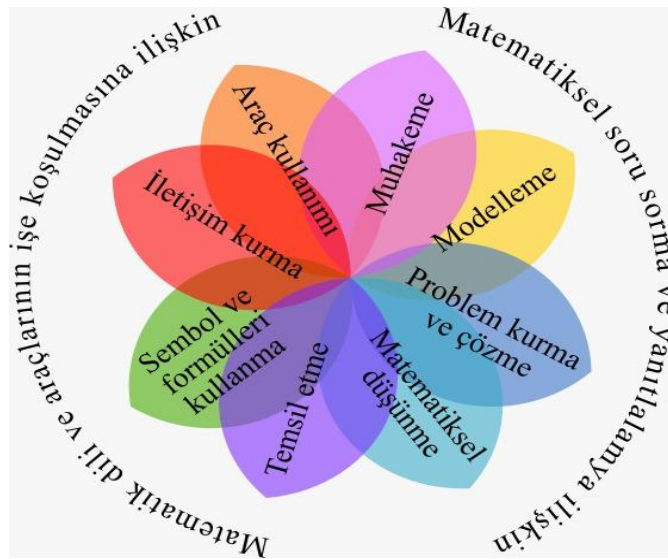
- Formüle etme sürecinde problem bağlamındaki değişkenler ve değişkenler arasındaki ilişkiler belirlenir. Problem durumu sadeleştirilir. Problem bağlamında temel sınırlılıklar ve varsayımlar belirlenir. Değişkenler ve değişkenler arasındaki ilişkiler matematiksel yapıya dönüştürülür. Bu dönüştürme matematiksel temsiller kullanılarak matematik dünyasına aktarılır. Gerçek yaşam modeli oluşturulur.
- Matematiği kullanma (yürütme) sürecinde, elde edilen modelden matematiksel sonuç elde etmek için stratejiler geliştirilir ve uygulanır. Çözüm bulmak için

matematiksel gerçekler, kurallar ve algoritmalar kullanılır ve muhakeme yapılır. Matematiksel yapı ve grafikler oluşturularak bunlardan matematiksel bilgi çıkarılır. Çözüm bulma sürecinde farklı temsilleri kullanır ve bu temsiller arası geçiş yapılır. Matematiksel prosedürlerin sonuçlarına bağlı olarak genellemeler yapılır.

- Yorumlama ve değerlendirme sürecinde, matematiksel sonuç problem bağlamında yorumlanır. Gerçek yaşam bağlamında matematiksel sonucun anlamlılığı ve akla yatkınlığı değerlendirir. Matematiksel sonucun problem bağlamında neden anlamlı olduğu açıklanır. Problem çözmede kullanılan modelin sınırlılıkları tanımlanır.

PISA matematik okuryazarlığı çerçevesinde ele alınan matematiksel yeterlikler ise Niss ve Jensen (2002) tarafından matematiksel yeterlikler üzerine gerçekleştirdiği KOM projesine dayanmaktadır. Niss ve Jensen (2002) tarafından matematiksel modelleme yeterliklerinin belirlenmesi ve tanımlanması ile ilgili Danimarka’da KOM projesi gerçekleştirmiştir. Bu proje matematik eğitimi desteklemek amacıyla, matematik öğrenme ve öğretim sürecinde karşılaşılan sorunlara yönelik öneriler ve fikirler sunmayı amaçlamaktadır. Bu bağlamda “*Matematiksel yeterlikler nedir, matematiksel yeterlikler nasıl ölçülmelidir?*” sorularına yanıt aranmıştır. Araştırmacılara göre sekiz matematiksel yeterlik tanımlanmaktadır. Bu yeterlikler ve yeterlikler arası ilişkiyi temsilen çiçek modeli ile Şekil 2.2 ile gösterilmiştir.

Şekil 2.2 Niss ve Højgaard (2011) sekiz matematiksel yeterlik



Matematiksel yeterlik çiçeği iki sınıfa ayrılmaktadır. Sol dört yaprağı matematik dili ve araçlarının işe koşulmasına ilişkin yeterliklerini içermektedir: a) araç kullanımı yeterliği, b) iletişim kurma yeterliği, c) sembol ve formülleri kullanma yeterliği, d) temsil etme yeterliği. Sağ dört yaprağı ise matematiksel soru sorma ve yanıtlamaya ilişkin yeterlikleri içermektedir: a) muhakeme yeterliği, b) matematiksel düşünme yeterliği, c) problem kurma ve çözme yeterliği, d) modelleme yeterliği. Bu sekiz yeterlik ile ilgili her bir yeterlik diğerinden ayrı olarak ele alınamaz. Yeterliklerin birbiriyle örtüşen yanları olsa da her birinin kendine ait karakteristik özelliği vardır (Niss ve Højgaard, 2011). Yeterlikler matematiğe özgüdür ve bireylerin neler yapabileceğine odaklanmaktadır.

PISA matematik okuryazarlığı çerçevesinde matematiksel yeterlikler zaman içinde değişim ve gelişim göstermektedir. Niss (2015) matematiksel yeterlikler ile PISA matematiksel yeterlik gelişiminin birbiriyle iç içe olduğunu vurgulamaktadır. Ayrıca PISA 2015 çerçevesinde formüle etme, yürütme ve yorumlama zihinsel süreçlerine temel teşkil eden ve gerçekleştirmelerini sağlayan, iletişim, temsil etme, strateji üretme, matematikleştirme, sembolik dili ve işlemleri kullanma, matematiksel araç kullanma ile muhakeme ve argüman yeterliği olmak üzere yedi matematiksel yeterlik ifade edilmektedir (OECD,2017; MEB, 2016).

Muhakeme ve argüman yeterliği, iyi temellendirilmiş sonuçlar elde etmek için matematiksel bilgilerden çıkarımlarda bulunma ve bir sonucu doğrulamak için çıkarımları bir araya getirme ile ilişkilidir (Turner vd., 2015). Her bir zihinsel süreçte farklı işe koşulur. Formüle etme sürecinde, gerçek yaşam bağlamında verilen problemden sonuç çıkarma, açıklama, savunma ya da gerekçe gösterme şeklindedir. Matematiği kullanma sürecinde, matematiksel sonuç elde etmek için yapılan eylemleri açıklama, savunma ve gerekçelendirme olarak ortaya çıkmaktadır. Elde edilen matematiksel sonucun yorumlanması ve değerlendirilmesi sürecinde, matematiksel sonucu desteklemek veya reddetmek için açıklamalar ve gerekçeler üretme şeklinde ortaya çıkmaktadır.

2.1.3 PISA 2021 Matematik Okuryazarlığı Çerçevesi ve Matematiksel Muhakeme

Dünyada dijitalleşmenin artması, iklim değişikliği, nüfus artışı, yaygın hastalıklar, küresel ekonomi gibi etmenler birçok şeyde olduğu gibi matematiksel yetkinlikleri de etkilemiştir. Buna ek olarak geçmiş ve gelecek arasındaki bağlamsal süreksizlik, eğitim reformunda duyulan ihtiyacı daha da tetiklemiştir. Bu nedenle PISA Matematik Strateji

Danışma Kurulu “*öğrencilerin neyi öğrenmesi gerekiyor ve hangi öğrencilerin neyi öğrenmesi gerekiyor*” soruları tekrar ele almıştır. Cevap olarak her öğrencinin matematiksel düşünmeyi öğrenmesi, temel kavramlar ile matematiksel ve istatistiksel muhakemeyi kullanması gerektiği belirtilmiştir (PISA, 2021a).

PISA matematik çerçevesi genel anlamda 15 yaşındaki öğrencilerin gerçek yaşam bağlamında sunulan problemlerle karşılaştıklarında ne ölçüde matematiksel muhakeme ettiklerini ve matematiği nasıl ele aldıklarını değerlendirmektedir.

2021 Matematik Uzman Grubu (MEG) tarafından Matematik Stratejik Danışma Grubu’nun tavsiyelerini alınmış ve önceki PISA 2012 modeli genişletilerek PISA 2021 Matematik: Genişletilmiş Bir Perspektif adlı yeni bir rapor sunulmuştur. Bu raporda şu değişikliklere yer verilmiştir:

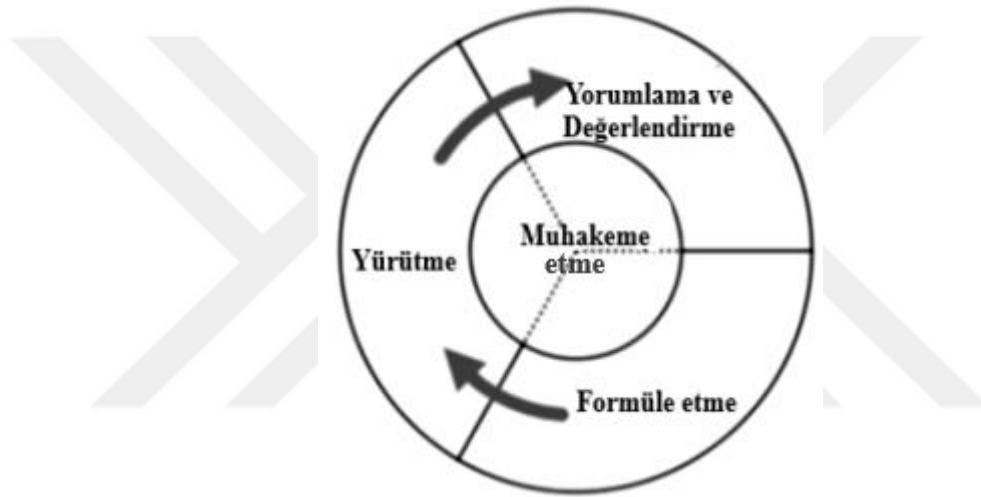
- Matematiksel muhakemenin önemi artırılmıştır.
- Matematiksel muhakeme için altı temel anlayış önerilmiştir.
- Matematik okuryazarlığına ait dört içeriğin her birinin altında birer tane olmak üzere dört vurgu alanı belirlenmiştir.
- Altı temel kavramla yakından ilişkili 21. yy becerileri seçilmiştir.

PISA 2012’de matematik okuryazarlığı çeşitli bağlamlarda bireyin formüle etme, matematiği kullanma ve yorumlama kapasitesi olarak tanımlanmaktadır. Burada matematiksel muhakeme; bir olguyu açıklamak ve tahmin edebilmek için matematiksel kavramları, işlemleri ve araçları kullanmayı içermektedir. Matematik okuryazarlığı bireyin; dünyada matematiğin oynadığı rolü fark etmesine ve anlamasına, sağlam temellere dayanan yargılara ulaşmasına, yapıcı, ilgili, duyarlı bir vatandaş olarak kendi ihtiyaçlarını karşılayabilecek şekilde matematiği kullanmasına yardımcı olmaktadır.

PISA 2021 çerçevesinde ise matematik okuryazarlığı “Bir bireyin matematiksel muhakeme ve çeşitli gerçek yaşam bağlamlarındaki sorunları çözmek için matematiği formüle etme, kullanma ve yorumlama kapasitesidir. Olguları tanımlamak, açıklamak ve tahmin etmek için kavramları, prosedürleri, gerçekleri ve araçları içerir. Bireylerin matematiğin dünyada oynadığı rolü bilmelerine ve yapıcı, ilgili ve düşünen 21. yüzyıl vatandaşlarının ihtiyaç duyduğu sağlam temellere dayanan muhakemeler ve kararlar almalarına yardımcı olur.” şeklinde tanımlanmıştır (PISA, 2021b). Bu tanımda önceki PISA 2003 ve PISA 2012 çerçevelerinin temel fikirleri korunurken öğrenciler birer aktif

problem çözücü olarak yer almış, matematiksel muhakeme matematik okuryazarlığının merkezi olarak belirtilmiştir. Çünkü toplumsal olarak karşılaşılan birçok sorunun nicel bir yanı vardır ve bunu ele almak matematik okuryazarlığını gerektirmektedir. Bu anlamda matematiksel muhakeme (tümdengelim, tümevarım) ve matematiksel kavramları kullanarak problem çözme amaçlanmıştır. Şekil 2.3 ile matematiksel muhakeme merkeze alınmış ve problem çözme döngüsündeki formüle etme, yürütme, yorumlama ve değerlendirme arasındaki ilişki verilmiştir.

Şekil 2.3 Matematiksel muhakeme ve problem çözme döngüsü arasındaki ilişki (PISA, 2021b)



Gerçek yaşama dayalı problemlerin çözümünüyle karşı karşıya kalan öğrenciler ilk önce karşılaşılan durumun matematiksel doğasını tanıyıp matematiksel terimlerle formüle etmektedir. Bu süreçte matematiksel muhakeme yapılır. Ardından matematiksel kavramlar, algoritmalar ve prosedürler yardımıyla çözülürken hangi stratejinin daha uygun olacağına dair karar vermede yine matematiksel muhakeme kullanılmaktadır. Çözümün gerçek dünya içinde yorumlanıp değerlendirme esnasında da matematiksel muhakeme kullanılmaktadır. Bu nedenle matematiksel muhakeme problem çözümünün her aşaması ile ilişkilendirilmiş ve problemin çözümünde kilit görevi görmüştür.

PISA 2021 PISA Matematik: Genişletilmiş Bir Perspektif'te (2021a) okulda resmi matematik gören öğrenciler ile testlerde gerçek yaşama dayalı problemler çözen öğrenciler ele alınıp matematik okuryazarlıkları değerlendirilmiştir. Aslında gerçek yaşama dayalı problemleri uygulayan öğrencilerin matematik okuryazarlık ilişkisi daha yüksek çıkması beklenirken okulda resmi matematik gören öğrencilerin ilişkisi daha

yüksek çıkmıştır. Ayrıca gerçek yaşama dayalı problemleri uygulayan öğrencilerin matematik okuryazarlık ilişkisinin doğrusal olmamakla beraber bir noktadan sonra negatife döndüğü görülmüştür. Bu ilişki PISA 2012'ye göre elde edildiğinden ve PISA 2012 matematikte ileri düzey konular yer almadığından dolayı elde edilen ilişki, ileri düzey matematik konularını öğrenmek olarak değil de matematiksel muhakemenin kritik bir bileşen olduğu şeklinde yorumlanmıştır. Kritik olan bir diğer şeyin de matematikte mantıksal düşünme ve muhakemenin geliştirilmesine imkan sağlaması gerektiği şeklinde belirtilmiştir.

Matematiksel muhakemenin iki yönü PISA maddelerinin tanımlanmasında önemli görülmüştür. Matematiksel bir sürecin karakteristik özelliği olan açık varsayımlardan tümdengelimsel muhakeme bir yönüdür. Diğer ise verileri anlamlandırmak, değişkenlik ve belirsizlik bağlamında karar alabilmek için tümevarımsal muhakemedir. PISA 2021'de matematiksel muhakeme için önerilen altı temel anlayış şunlardır:

- Niceliği, sayı sistemlerini ve bunların cebirsel özelliklerini anlama,
- Soyutlamanın ve sembolik temsilin gücünü takdir etme,
- Matematiksel yapıları ve düzenliliklerini görme,
- Miktarlar arasındaki işlevsel ilişkileri tanıma,
- Matematiksel modellemeyi gerçek dünyaya bir mercekle kullanma,
- Değişkenliği istatistiğin kalbi olarak anlama.

Bu altı temel anlayışa dair açıklamalar incelendiği zaman aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

✓ *Niceliği, sayı sistemlerini ve bunların cebirsel özelliklerini anlama*

Küçük kümelerle başlayan sayma, sınıflandırma, karşılaştırma ile nesnelerin niteliklerine dair ölçümler yapıp tahmin, yuvarlama, uygulama gibi karmaşık işlemlere ulaşılabilir. Böylece genişleyen sayı sistemlerine ve oradan da denklem çözümlerine gidilip öğrencilerin gerçek dünyada matematiğe ilişkin kanıtlara temel oluşturması sağlanabilir. Sayı ve sayı sistemlerinin güçlü bir araç şeklinde kullanmak, cebirsel ilke ve özelliklerin kavranması, model kurmak, çözmek, tablo formülleri oluşturmak nicelemeyi verimli bir şekilde kullanmayı içermektedir. Bunların öğrenciler tarafından gerçekleştirilmesi, gerçek dünyaya dair muhakemelerini desteklemektedir.

✓ *Soyutlamanın ve sembolik temsilin gücünü takdir etme*

Matematikte soyutlama, matematiksel kavramlar arasındaki benzerlikleri ele alıp bu benzerliklere dayalı ilişkiler kurmadır. Kendi kendine yeten ve diğer matematiksel kavramları da içeren bir sistemdir. Somut nesneler, sembolik temsiller, algoritmalar ve zihinsel modeller arasında ilişkiye dayanmaktadır. Bu ilişkide temsiller, matematiksel modellemenin temel öğelerindendir ve problemin basitleştirilip formülün soyutlanmasında rol oynamaktadır.

✓ *Matematiksel yapıları ve düzenliliklerini görme*

Temsille yakından ilişkili olan yapı ile soyut temsilin anlamı bulunup hatırlanır. Bu yapının görülmesi, bilgisayar tarafından gerçekleştirilen ayrıştırma kurallarının nesne özelliklerini taşıyan kavramsal görüntüleriyle değiştirmeye olanak sunmaktadır. Aynı zamanda matematiksel yapı, modellemeye rehberlik etmektedir. Öğrencilerin matematiksel yapıları görmesi karşılaştıkları bir durumu benzeri bu duruma aktarmaları ve gerçek yaşamdaki problemlere uygulamaları için muhakemelerinde yardım sağlamaktadır.

✓ *Miktarlar arasındaki işlevsel(fonksiyonel) ilişkileri tanıma*

Nicelikler arasındaki ilişkiler birçok yolla ifade edilebilmektedir. Grafik veya tablo ile gösterme, sözel olarak ifade etme bu durumlara örnektir. Burada amaç işlev kavramının fark edilmesidir. Böylece değişkenler arasındaki bağımlı ve bağımsızlık durumu, fonksiyonel ilişkiler ve sonucun nasıl etkilendiği göz önüne alınarak muhakeme desteklenebilecektir.

✓ *Matematiksel modellemeyi gerçek dünyaya bir mercekle olarak kullanma*

Model yardımıyla bir kavramın belirli özellikleri ele alınıp diğerleri yok sayılabilir. Bu da kasıtlı bir basitleştirmeyi gerektirir. Ancak bu durumun getireceği eksiklikler ise modelin sağlayacağı fayda, kullanışlılık, açıklayıcılık ve öngörü ile göz ardı edilebilecektir. Bir taraftan modelleme, gerçeğin soyutlamasıdır. Matematikteki modeller kavramsallaştırmada, verilerin analizinde, tahmin edilmesinde ve değerlendirilmesinde kullanılabilir. Bu matematiksel modellemelerin bilgisayar ortamında yapılması ile hipotezler test edilebilir, veri üretme ve rastgelelik sunma yapılabilir. Bu sayede öğrenciler karşılaşılan durumlarda önemli özelliklere yoğunlaşmayı ve sorunun özünü inip onun üzerinde çalışmayı öğrenebilir ve muhakeme edebilecektir.

✓ *Değişkenliği istatistiğin kalbi olarak anlama*

Doğruluğun net olarak verilemeyeceği durumlarda matematiğin istatistik ile en azından olabilecek hata payını vermesi, gerçeği olasılıksal bağlamda ortaya koyacaktır. Bu aşamada öğrencilere hangi değişkenin bu duruma neden olduğunu ve sonuçların sınırlılığını sezdirmede yardımcı olur. Böylece öğrenciler gerçek yaşamdaki durumlarda da aynı muhakemeyi yapabilecektir.

Bu eklenen altı kavrayış ile matematiksel muhakeme ciddi anlamda desteklenmektedir. Buradan matematiksel muhakeme, matematiksel olarak ele alınabilecek toplumsal durumlarda bilinçli yargılarda bulunmayı da içerdiğinden genel anlamda problem çözmenin ötesine geçmekte ve matematiksel okuryazarlığının merkezine yerleşmektedir. Böylece 21. yüzyıl becerilerine sahip olan bireye de katkı sağlamaktadır.

Matematik alanyazında geçen muhakeme ve argümanın iki farklı beceri olduğu verilmiştir. Muhakeme, matematiksel bilgi ve yapılarla varsayım oluşturulduğu, düşüncelerin ve sonuçların gerekçeli olarak verildiği ve savunulduğu mantıksal bir düşünme sürecidir. Thom (2011) matematiksel muhakemeyi; varsayımlar oluşturma, uygulama, değerlendirme, doğrulama ve genellemeyi içeren eylemler ve düşünceler olarak tanımlamaktadır. Erdem (2011) belirli bir amaç için sistematik adımlarla mantıksal düşünüp karar verme veya bir problemi neden ve nasıl soruları ile anlamlandırıp üst düzey düşünme becerisi olarak vermiştir. Argüman bir fikrin doğruluğu veya yanlışlığı için kendi ürettiğimiz sözel ifadeler, sayısal veriler, çizimlerdir. Toulmin (1958) argüman için bir modeli açıklama, sonucu ya da tahminleri çürütme, destekleme için öne sürülenlerin kullanılması şeklinde tanımlamıştır. OECD (2016) muhakeme ve argüman yeterliğini, bir problemin unsurlarının onlardan sonuç çıkarmak, verilen kanıtı kontrol etmek veya problemin çözümünden ya da ifadesinden bir kanıt önermek amacıyla ortaya konduğu ve bu unsurlar arasında bağlantıların kurulduğu, mantık temelli düşünme süreçleri olarak belirtmiştir. Turner ve arkadaşlarına (2015) göre muhakeme ve argüman; bir problem elemanlarından çıkarımlarda bulunmak ya da verilen bir doğrulamayı kontrol etmek ya da önermeler için bir doğrulama yapmak için bu problemin elemanlarını araştıran ve ilişkilendiren mantıksal düşünme sürecidir.

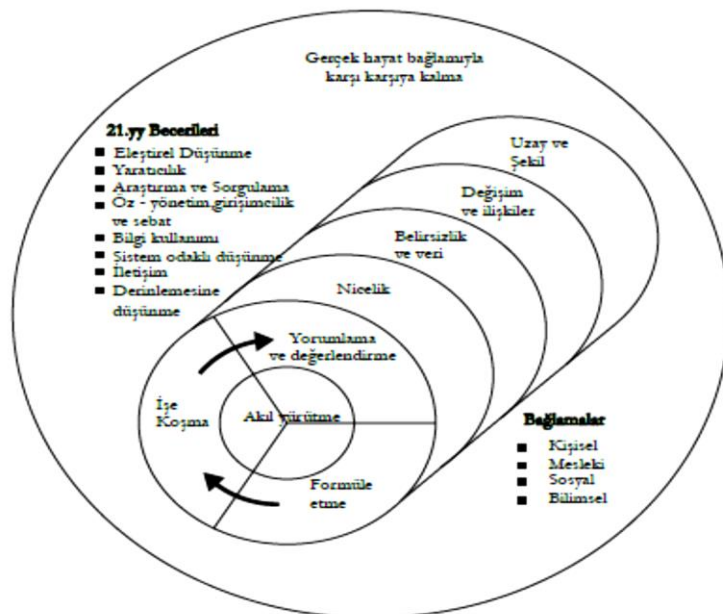
Genişletilmiş PISA Matematik Okuryazarlığı 2021 Çerçevesi bağlamında öğrencilerin hangi durumlarda matematiksel muhakemede bulundukları EK-1 (Bkz.

EKLER) ile verilmiştir. EK-1’de “ ** ” işareti olan maddeler PISA-D çerçevesinde hem yalnızca 15 yaş için değil okuldan ayrılmış 16 yaşındaki öğrencileri de değerlendirmeye alıp çerçevenin etki alanını genişletmek hem de ilk düzeyin bile altında en basit öğrenci eylemlerini daha detaylı belirleyip değerlendirmek için yeni eklenmiştir. Böylece geliştiriciler performans ölçeğinin en altındaki öğrencilere bile erişebileceklerdir. “ ** ” işareti olan eylemlere dayalı maddelerde, bağlam ve dil ile matematiğe müdahale edilmemelidir. Bağlam ilginç olmalıdır. Tek bir adım veya işlem istenemli ancak, bu durumun aritmetik bir adımla sınırlı olmadığına dikkat edilmelidir. Matematiksel muhakeme ve problem çözme süreçlerinin tamamı öğrencilerin günlük olarak karşılaştıkları durumlar şeklinde ve soyut değil somut olarak verilmelidir.

Bir problemi matematikle ilişkilendirmek ve çözmek için formüle etme, kullanma ile yorumlama ve değerlendirme süreçleri verilmiştir. Problemin baştan sona çözüm aşamalarının yer aldığı bu süreçlerde öğrencilerden beklenen eylemler süreçlere dayalı olarak ayrı ayrı EK-1 olarak *EKLER* kısmında verilmiştir.

PISA 2021 matematik çerçevesinde, matematik okuryazarlığı tanımının yanı sıra matematiksel muhakeme ve matematiksel süreçler, içerik bilgisinin düzenlenme şekli, matematik okuryazarlığının 21. yüzyıl becerileriyle arasındaki ilişki ve öğrencilerin matematiksel zorluklarla karşılaşacağı bağlamlar tekrar ele alınmıştır. Şekil 2.4 ile matematik okuryazarlığına ait yeni ilişki verilmiştir.

Şekil 2.4 Matematik okuryazarlığı 2021 boyutları (MEB, 2022a)



Matematiksel bağlamlar yeni çerçevede değişmemiştir. Bağlamlar kişisel, mesleki, toplumsal ve bilimsel olmak üzere dört tanedir. Yerel, ulusal ve küresel sorunlara toplumsal bağlamda, iş dünyasına mesleki bağlamla ulaşılabilir. Ayrıca matematiksel içerikler de değişmemiştir. Matematiksel içerikler: Nicelik, belirsizlik ve veri, değişim ve ilişkiler ile uzay ve şekildir.

2.1.4. Matematiksel Muhakeme Düzeyleri (Turner vd., 2015)

Turner ve arkadaşları (2015) PISA matematik okuryazarlığı çerçevesinde ele alınan her bir matematiksel yeterlik için düzey belirleme çalışması yürütmüşlerdir. Her bir üst düzey görev içeren durumlarda daha yüksek bilişsel süreçler kullanılması gerektiği ve matematik okuryazarlığı düzeyi arttıkça daha fazla matematiksel yeterlik göstereceği düşünülmüştür (Turner ve Adams, 2012).

Turner ve arkadaşları (2015) tarafından muhakeme yeterliğine ilişkin belirlenen düzeyler ve düzeylere ait açıklamalar ise aşağıda verilmiştir:

Düzyey 0: Verilen bilgilerden ve yönergelerden doğrudan çıkarımlar yapma

Düzyey 1: Basit matematiksel varlıkları içeren bir problemin bir boyutunda muhakeme adımlarını kullanarak çıkarımlar yapma

Düzyey 2: Problemin farklı boyutlarındaki bilgi parçalarını birleştirerek ya da problemdeki karmaşık varlıklarla ilişkili olarak çıkarımlar yapma; çok adımlı bir argümanı izlemek ya da oluşturmak için bir çıkarım zinciri meydana getirme

Düzyey 3: İlişkilendirilmiş çıkarım zincirleri kullanma ya da oluşturma; ya da karmaşık çıkarımları kontrol etme ya da doğrulama; ya da sürdürülebilir ve güdümlü bir yolla, karmaşık bilginin birden çok ögesini kullanarak ve birleştirerek kararları ve çıkarımları sentezleme ve değerlendirme.

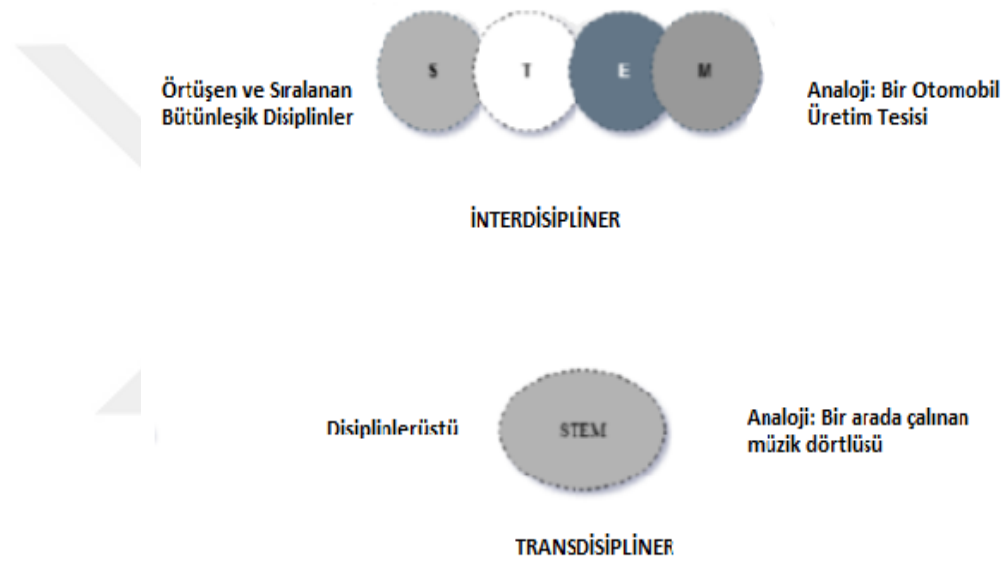
2.2 STEM'e Ait Kuramsal Çerçeve

Gerçek hayatta problemlerin çözümünde birden fazla disiplin bir arada kullanıldığından (Bozkurt Altan, 2017a) bütünleşik bir bakış açısıyla gerçek hayat problemleri üzerine kurulu bir ders planının öğrenciler için daha anlamlı olacağı; derse yönelik ilgi ve başarının artacağı (Honey vd., 2014) değerlendirilmektedir. Wang (2012)'a göre bütünleşik öğretim, kavramların daha iyi öğretilmesi için farklı alanların

bilgi ve becerilerinin bir uygulamada bütünleştirildiği öğretim stratejisi şeklinde tanımlanmıştır. Bütünleşik STEM eğitimi ise en geniş anlamda; günlük hayat problemleri odağında disiplinler arasındaki sınırların kalktığı bütünleşik bir öğretim stratejisi olarak tanımlanmaktadır (Asghar vd., 2012).

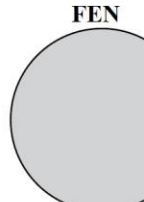
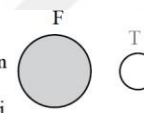
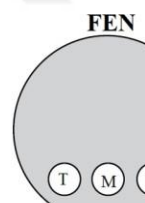
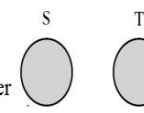
Bybee (2013) dokuz farklı STEM entegrasyon modeli bakış açısını derlediği araştırmasında, ilk olarak interdisipliner ve transdisipliner modelleri Şekil 2.5'te vermiştir:

Şekil 2.5 İnterdisipliner ve transdisipliner STEM entegrasyon modelleri (Bybee, 2013)



Bybee (2013) interdisipliner bakış açısını, dersler veya ünitelerin sıralanmasıyla veya eğitsel deneyimlerin merkezine STEM' in eklenmesiyle bütünleştirilen durumlar olarak ifade etmektedir. Transdisipliner bakış açısını ise STEM' disiplinlerinin ayrı ayrı değil etik, politika, ekonomi gibi disiplinleri de içerisine alabilecek bir bütün disiplin olarak görüldüğünü ve bu eğitimin küresel ısınma, sağlık problemleri, enerji kaynaklarının kullanımı gibi güncel sorunlar etrafında tasarlanan dersler ile sağlanabileceğini ifade etmektedir. Ayrıca Bybee (2013) STEM disiplinlerinin bütünleşmesine ilişkin kabul gören dokuz farklı modeli tek disiplin olarak STEM'den bütünleşik STEM'e doğru derecelendirmiştir. Bu modeller Tablo 1.1'de açıklanmıştır.

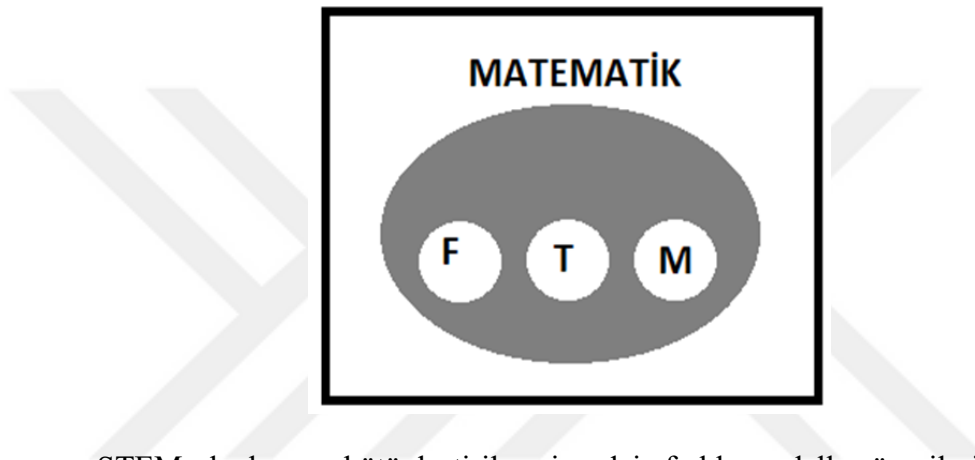
Tablo 1.1 Bütünleşik STEM Entegrasyonu (Bybee, 2013, Akt. Gencer vd., 2019)

STEM Modeli	Açıklama	Örnek
STEM fen (ya da matematik) eşdeğerdir	Bu bakış açısında STEM sadece fen anlamına gelir ve zaman zaman fizik ya da biyoloji gibi belirli bir disiplindir. STEM'in bu kullanımı, tek disipline yapılan referans ile çelişen çoklu disiplinli yönelimler nedeniyle kafa karıştırıcıdır. Bazı durumlarda referans fen ve matematik dışında bir disiplin de olabilir. (ör., mühendislik tasarımı)	Tek Disiplinli Örnek  STEM bir fen disiplinine (ya da matematik) denktir Analoji: Bir ağaç için orman ekosistemindeki karışıklık Örnek: STEM hakkındaki güncel tartışmalar
STEM hem fen hem matematik anlamına gelir	Bazı durumlarda, STEM hem fen hem de matematiği ifade eder. Bazı STEM tartışmalarında kişiler ayrı disiplinlere silolar olarak atıfta bulunurlar. Bu bakış açısına göre silolar ve direk çukurları vardır. Silolar açıkça görülebilirken direk çukurları kısmen görülebilir ancak bir çukurun özü, orada hiçbir şey olmamasıdır.	Fen ve Matematik İçin Bir Referans Olarak STEM  Fen ve matematiğin ayrı disiplinleri Analoji: Silolar ve direk çukurları Örnek: STEM hakkındaki politik tartışmalar
STEM fen anlamına gelir, teknoloji, mühendislik ya da matematiği kapsar	Bazen öğretmenler öğrencilerini mühendislik tasarımı problemleri (ör., kırılmayan yumurta aracı tasarlama) ile tanıştırır. Fakat bu tür uygulamalarda genellikle mühendislik tasarımı ile fen uygulamaları karıştırılmaktadır. Bu bakış açısı bütünleşmeye yönelik ilk adımı temsil eder ancak öğretmen baskın disiplin olarak fen (ya da matematiği) ele alır ve uygun bulursa ya da gerektiğinde diğer disiplinleri öğretir.	Diğer Disiplinleri Bir Araya Getiren Ayrı Fen Disiplinleri  Teknoloji, mühendislik ve matematiği uygun bir şekilde birleştiren ayrı fen disiplinleri Analoji: Odaları gerektiğinde kullanılan bir ev
STEM ayrı disiplinler dörtlüsüne eşdeğerdir	Bu bakış açısına göre STEM okul müfredatında yer alan fen, matematik, teknoloji ve mühendislik konularını içermektedir. Bazı okullarda teknoloji bilgi teknolojileri olarak, mühendislik teknoloji-tasarım olarak müfredata dâhil edilmiştir. Ancak silolar metaforunda olduğu gibi ayrı disiplinler olarak bulunur. Her ne kadar disiplinler eşit görünse de programdaki ağırlıkları aynı değildir.	Ayrı Disiplinler  Ayrı Disiplinler Analoji: Silolar Örnek: STEM disiplinlerine genel bir giriş sağlayan bir derstir veya her disiplin için bir tane olmak üzere dört ayrı ders

STEM fen ve matematik anlamına gelir, teknoloji veya mühendislik programı tarafından bağlanır	Fen ve matematik teknolojiyi ve/veya mühendisliği vurgulayan başka bir programla bağlantılı olan bağımsız disiplinlerdir. Bir kariyer ve teknik eğitim programı bu bakış açısına örnek olabilir. Biyomedikal, sağlık bilimleri, enerji kaynakları, bilgi teknolojileri ve tarım gibi alanlarda alanlarında iş temelli gerçekleştirilen mesleki ve teknik eğitim programlarında teknoloji ve mühendislik projeleri fen ve matematik alanlarındaki ana konularla bağlantı kurmak için kullanılır.	Fen ve matematik arasındaki bağlantı teknoloji ve mühendislik programı tarafından yapılır Analoji: Bir alışveriş merkezinde büyük mağazalar(anchor store) arasında diğer mağazalar bağlantısını sağlar Örnek: "Project Lead the Way" projesi fen ve matematik programını bağlar
STEM disiplinler arasında koordinasyon demektir	Fen bilgisi öğretmenleri genellikle matematik kavramlarının uygulaması olan fen konularının öğretiminde matematik öğretmenlerine ihtiyaç duyarlar. Fakat daha az sıklıkta matematik öğretmenleri, fen veya teknoloji öğretmenlerinden matematik kavramlarının uygulamalarını ister. Fakat bazı durumlarda, kavramlar ve süreçler farklı STEM disiplinlerinde öğretilir ve uygulanabilir.	Disiplinler Arası Koordinasyon Kavramlar, süreçler ve kaynaklar ayrı disiplinlerin sınırları boyunca koordine edilir. Analoji: Evler inşa edilirken alt yükleniciler arasında kaynakların koordinasyonu Örnek: Mühendislik dersinde gerekli olan grafik çiziminin matematik dersinde öğretilmesi
STEM iki veya üç disiplini birleştirmektedir	Bütünleştirmenin bir biçimi, fen ve teknoloji ya da mühendislik ve matematik gibi iki disiplini birleştirerek başlar. Daha karmaşık bir model ise dört disiplinin üçünü birleştirir. Örneğin, fen, teknoloji ve matematiğin bütünleştirilmesi olabilir.	İki ya da Üç Disiplinin Birleştirilmesi Bir ders oluşturmak için iki yada üç disiplinin birleştirilmesi Analoji: İki (ya da üç) eski ürünün birleştirilerek yeni bir ürün Örnek: Fen ve teknoloji üzerine her iki disipline de eşit vurgulandığı yeni bir ders oluşturma
STEM disiplinler arası tamamlayıcı örtüşmeler anlamına gelir	STEM üniteler veya derslerde sıralanan disiplinlerin örtüşmesiyle bütünleşir ve böylece STEM eğitim deneyimlerinde merkezi bir vurgu haline gelir. Bilimsel sorgulama ya da tasarım probleminin çözümü STEM disiplinlerinin bütünleşmesini gerektirir.	Bütünleşik Disiplinler Örtüşen ve arka arkaya sıralanarak birleşen disiplinler Analoji: Bir otomobil üretim tesisi Örnek: Öğrenciler problemleri incelemekte ya da disiplinler boyunca örtüşen ve ilerleyen sorgulamalar yürütmektedirler
STEM disiplinler üstü bir ders veya program anlamına gelir	Küresel iklim değişikliği, sağlık sorunları, enerji kaynakları gibi konularda disiplinler üstü yaklaşımlar içeren bir STEM bakış açısı bulunmaktadır. Sürdürülebilir Toplum adı verilen bir ders, STEM disiplinlerinin tümünü belki de diğer disiplinlerin (ör. etik, siyaset, ekonomi) büyük bir çağdaş zorluğun anlaşılması için kullanılabileceği bir örnek olabilir.	Disiplinler Üstü Bir Kurs veya Program Olarak STEM Disiplinler üstü Analoji: Müzisyen dörtlüsü bir arada çalıyor Örnek: Bir okul müfredatına Sürdürülebilir Toplum isimli temel bir ders koyabilir

Bu araştırmada 3. sırada yer alan “*STEM fen anlamına gelir, teknoloji ve matematiğ kapsar.*” şeklinde sunulan STEM bakış açısı ele alınacaktır. Aslında burada kast edilen baskın disiplini ele alıp diğer disiplinlere gerektiğinde başvuru yapmaktadır. Bu anlamda baskın disiplin olarak fen ya da matematik verildiğinden çalışmada odak noktası olarak matematiğin yer edinmesine fırsat tanınacaktır. Buradaki STEM bakış açısı matematik disiplininin baskınlığına göre Bybee (2013)’den uyarlanarak aşağıdaki şekil 2.6 ile gösterilebilir.

şekil 2.6 STEM matematik anlamına gelir



STEM alanlarının bütünleştirilmesine dair farklı modeller önerilmişse (Walker vd., 2018; Bender, 2018) de araştırmanın amaçları doğrultusundaki esas amaç matematik eğitimine yönelik olduğundan Bybee (2013)’nin Bütünleşik STEM Entegrayonu’nda yer alan “*STEM, fen (ya da matematik) anlamına gelir.*” STEM modeli tercih edilmiştir.

2.3 İlgili Çalışmalar

2.3.1 Matematiksel muhakeme ile ilgili çalışmalar

Alanyazın matematiksel muhakeme bağlamında incelendiğinde, muhakemenin matematik eğitiminde oynadığı önemli role paralel olarak alanyazında da yoğun çalışmanın olduğu, bunun yanı sıra hala matematiksel muhakemeye ilişkin alan yazında oldukça fazla boşluğun bulunduğu görülmektedir. Örneğin problemin her açıdan analiz edilip değerlendirilmesi ve ardından karar verilme aşamalarındaki (Storey, 2004) rolünün büyüklüğü nedeniyle problem çözümünün temel bileşenlerden biri olarak görülen muhakemeye (Gren ve Gilhooly, 2005; NRC, 2006) sahip öğrencilerin neyi, neden yaptığını üzerine düşünebildikleri ve sadece çözüm algoritmasını takip edenlere göre daha iyi muhakeme ettikleri (Steen, 1999) gözlemlenmiş ve bu nedenle muhakemeyi aktif kılacak eğitim anlayışına olan ihtiyaç ortaya koyulmuştur (Sumarsih vd., 2018).

Matematiksel muhakemeye ilişkin alanyazın incelendiğinde yapılan çalışmaların çerçeve geliştirme ve problem çözme üzerinde yoğunlaştığı (Tum, 2024) görülmektedir. Bunun dışında farklı öğretim uygulamalarının muhakemeye etkisi, muhakeme becerilerine dair ölçek geliştirme ve muhakemenin diğer değişkenlerle ilişkisi vardır.

Alanyazında matematiksel muhakemeyi bir çerçevenin geliştirilmesi şeklinde inceleyen çalışmalar ele alındığında birçok araştırmacının farklı çalışmalar yaptığı görülmüştür. Bunlardan bazıları iddia, veri, dayanak yapısına (Toulmin; 1958), bilişsel süreçlerdeki muhakemeye (Krutetskii, 1976; Webb, 2002), matematiksel düşünme sürecine (Mason vd., 1986), matematiksel bilgi ve muhakeme süreçlerine (Ball ve Bass, 2003), ispata ve ispat sürecinin değerlendirilmesine odaklanırken (Boesen vd, 2014; NCTM, 1989; Selden ve Selden, 2003; Stylianides ve Stylianides, 2009) bazıları da muhakeme türlerine (Lithner, 2008) ve gerçek yaşam durumlarındaki matematiksel muhakemeye (PISA, 2021) odaklanmıştır.

Bu çerçevelerin yanı sıra matematiksel muhakeme farklı çerçevelerde bir yeterlik olarak ele alınmıştır. Öncelikle her ne kadar matematik alanyazında yeterlik, yetkinlik ve beceriye yönelik tanımlamalarda bir karmaşa devam etse de (Alan ve Güven, 2022) matematiksel yetkinliğin çalışılmasındaki gerekliliğe dair vurgu Hiebert (1986) tarafından yapılmış ve NCTM'nin çalışmaları ile bu vurgunun arttığı belirtilmiştir (Abrantes, 2001). Yetkinlik kişisel, mesleki veya sosyal alanların temel yönlerine hakim

olma şeklinde ele alınırken matematiksel yetkinlik ise, matematiğin rol oynadığı veya oynayabileceği durumlarda matematiği anlama, yargılama, uygulama ve kullanma yetenekleri olarak verilmiştir (Niss, 2003). Kilpatrick ve arkadaşları (2001) ise matematiksel yetkinliği; matematiksel bilgi, matematiği kullanmadaki uzmanlık, yeterlilik ve matematiği kolaylaştırma olarak ele almıştır. Yeterlilik ise, yetkinliğin açıkça tanımlanabilir ana bileşenleri olup (Blomeke vd., 2015) en son olarak kişinin verilen durumlarla ilgili her türlü matematiksel zorluğa yanıt olarak uygun şekilde hareket etmeye yönelik hazır bulunuşluğu şeklinde güncellenmiştir (Niss ve Højgaard, 2019). Beceri de problem çözebilmek için yeterli bilgi ve niteliği belirli bağlamlarda kullanarak karmaşık görevlerin üstesinden gelme (Ananiadou ve Claro, 2009) şeklinde tanımlanmıştır.

Matematiksel muhakemenin yetkinlik, yeterlik veya beceri olarak yer aldığı çalışmalar incelendiği zaman karşımıza aşağıdaki sonuçlar çıkmıştır:

Matematiksel muhakemenin anlamına dair belirsizlik sürse de (Jeannotte ve Kieran, 2017; Kollosche, 2021) matematiksel muhakemenin, matematiksel anlamadaki kritik rolü, matematiği kullanmada ve önceki matematiksel bilgiyi yeniden yapılandırmada temel olması nedeniyle bir beceri olarak görülmüştür (Ball ve Bass, 2003; TIMSS, 2003).

NCTM (2000) matematiksel beceriler için, hesaplama kolaylığından daha fazlasını içermesi gerektiğini ifade ederek K-12 öğrencilerine yönelik amaçlarla uyumlu olmak üzere her sınıf seviyesi için “Problem çözme olarak matematik”, “İletişim olarak matematik”, “Muhakeme olarak matematik” ve “Matematiksel bağlantılar” şeklinde dört standart belirlemiştir. Bu standartlar eğitim öğretim sürecinde geliştirilmesi gereken beceri olarak ifade edilmiştir (NCTM, 2000). Muhakeme, NCTM tarafından matematiksel düşüncenin merkezine konulmuş ve matematiksel muhakeme de matematiksel iddiaları haklı çıkarmak için sözlü veya yazılı biçimde ortaya atılan argümanları analiz etmek veya üretmek şeklinde verilmiştir. Ayrıca ispata dair tüm süreçlerin de incelenmesi hedeflenmiştir.

Niss (2003) ise KOM (Kompetencer og matematiklæring / Competencies and the Learning of Mathematics) projesinde matematiksel yetkinliğin ana bileşenleri olarak sekiz alt yeterlilik belirlemiştir. Burada yeterlilikler matematiğe özgü, birbiriyle ilişkili ancak ayrı olarak açıklanmıştır (Niss ve Jensen, 2002). Matematiksel yeterliliklerin,

ilköğretimden üniversiteye dek bütün kademelerde matematik eğitimini geliştirmede araç olarak kullanılması ve öğrencilerin yetkinliklerle donatılması hedeflenmiştir (Højgaard ve Jankvist, 2015). KOM projesinde muhakeme yeterliliği, matematiksel iddiaları gerekçelendirmeyi amaçlayan belirli muhakemeleri analiz etme ve uygulama becerisiyle ifade edilmiştir. Bu kapsamda muhakeme, mantığın yanı sıra matematiğe de değinmiştir. Bu yeterlilikte iddianın sadece "teoremler" veya "formüller" ile sınırlı olmadığı, problem çözümleri, matematiksel yöntem ve çıkarımla elde edilen her bir sonucu kapsadığı vurgulanmıştır (Niss ve Højgaard, 2019).

KOM çerçevesine benzer bir şekilde ABD’de Ulusal Araştırma Konseyi (NRC)’nin görevlendirdiği Kilpatrick, Swafford ve Findell (2001) tarafından geliştirilen “Adding It Up” ise *uyarlanabilir muhakeme* bileşeni ile birlikte beş bileşene sahiptir. Bu çalışmada matematiğin öğrenilmesi için gerekenleri ve dolayısıyla öğrenmeyi başaran bir bireyin karakteristiğinin yakalanması amaçlanmıştır. Muhakeme ile ilişkili olarak uyarlanabilir muhakeme bileşeni; kavramlar ve bağlamlar arasındaki ilişkileri mantıksal olarak düşünebilme kapasitesi, karar verme ve açıklama becerisi olarak verilmiştir (Yulian ve Wahyudin, 2018).

Almanya’da ise NEPS (National Educational Panel Study) projesi ile yetkinliklerin yaşam boyunca nasıl geliştiği, öğrenme ortamlarıyla ilişkisi, eğitime etkisi şeklindeki soruların incelenmesi amaçlanmıştır (Weinert vd., 2011). Matematiksel yetkinlikler içerik alanı ve bilişsel bileşenler şeklinde ikiye ayrılmıştır. PISA çalışmalarına benzer şekilde içerik alanına nicelik, değişim ve ilişkiler, uzay ve şekil ile veri ve olasılık yer alırken bilişsel bileşenlerde problem çözmede gerekli olan matematiksel iletişim, argümantasyon, modelleme, temsil formlarını kullanma, matematiksel problem çözme ve teknik beceri ve yetenekler eklenmiştir (Neumann vd., 2013). Muhakeme ile ilişkili olarak argümantasyon şeklinde bilişsel bileşen verilmiştir.

İlk olarak 1995 yılında uygulanmaya başlansa da ülkemizde 1999 yılından itibaren uygulanan Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) matematik ve fen bilimleri öğretim programına dayalı bilgi ve becerileri değerlendirmiştir. Bilişsel alanlarda bilme, uygulama ve muhakeme becerilerini ölçmüştür (Mullis vd., 2016). TIMSS 2023 Matematik Çerçevesinde ise muhakemeye ilişkin bilişsel beceriler analiz etme, entegre etme, genelleştirme ve gerekçelendirme şeklinde verilmiştir.

Matematik çerçevesi geliştirilirken KOM projesinden etkilenen Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı (PISA) ise KOM'da yer alan sekiz matematiksel yeterliği yedi beceriye uyarlamıştır (OECD, 2013). Öğrencilerin okulda öğrendiklerini sadece gerçek yaşamda değil alışık olmadıkları durumlarda bile uygulayabilmeleri ile ilgilenmiştir (Kandeel, 2021). PISA'da 2012 yılına dek beceriye odaklanılsa da 2012 çerçevesinde yeterliliklere vurgu yapılarak muhakeme ve argümanın da içinde yer aldığı yedi yeterlilik verilmiştir. KOM matematikte muhakeme ve ispata odaklanırken, PISA'da ise gerçek yaşam bağlamında mantıklı düşünme ve model kurma süreçlerine odaklanmıştır. 2021 yılında güncellenen PISA matematik okuryazarlığı çerçevesinde ise matematiksel muhakeme problem çözme sürecinin merkezine yerleştirilerek matematik okuryazarlığı süreçlerine göre muhakeme eylemleri tek tek belirlenmiştir (PISA, 2021)

Araştırma kapsamında ele alınan matematiksel muhakeme yeterliklerine ait çerçevelere bakılınca özellikle PISA ve TIMSS, matematik yeterlikleri kapsamında matematiğe ilişkin ana becerileri kapsayıcı, bütünleştirici ve ölçüm temelli tanımlamalara yer vermiştir (Albacete vd., 2016; Gierl vd., 2010). Ancak TIMSS daha çok okul öğretim programına uygun, yapılandırılmış sorular içerse de PISA öğrencilerin gerçek hayat bağlamlarındaki matematiksel muhakemelerine vurgu yapmıştır (Schleicher, 2018). Matematiksel muhakeme, güncellenen PISA 2021 matematik okuryazarlığı çerçevesinde problem çözme sürecinin tam merkezine konularak önemi ortaya koyulmuştur. Ancak çerçevenin yeni yayınlanmış olması sebebiyle matematiksel muhakemeye yönelik az sayıda çalışma yapılmış (Özaydın ve Arslan, 2022; Ingram ve Stiff, 2022; Almarashdi ve Jarrah; 2022) ve gerçek yaşam problemlerinin çözüm sürecine ilişkin muhakemenin detaylı olarak ele alınmamış olması bu anlamda bir boşluğu işaret etmiştir.

Alanyazında matematiksel muhakemeyi bir problem çözme sürecine yönelik inceleyen çalışmalar ele alındığında matematiksel muhakeme, problem çözerken bağıntı ve ilişkilerin açığa çıkarılmasında etkin (Baykul, 2014) olarak görülmüştür. Yapılan çalışmalarda problem çözmenin matematiksel muhakemenin gelişimine etkisini vurgulamışlardır (Hermawan vd., 2019; Akın, 2016). Hermawan ve arkadaşları (2019) yaptıkları çalışmada öğrencilerin fonksiyon ve ilişkiler konusundaki matematiksel okuryazarlık problemleriyle, öğrencilerin muhakeme becerilerinin destekleneceğini ifade ederken; 8. sınıf öğrencilerinin problem çözme sürecindeki niceliksel muhakemelerini inceleyen Akın (2016) ise öğrencilerde muhakemelerinin geliştiğini ve bu yolla

desteklenmesi gerektiğini ifade etmiştir. Kara Çalışkan (2019) matematik dersinde başarılı olan öğrencilerin rutin olmayan problemleri çözerken matematiksel muhakeme becerilerinde artış olduğunu destekleyip öğrencilerin genelde yaratıcı muhakeme ara sıra da taklitsel muhakeme kullandıklarını belirtmiştir. Ancak öğrencilerin rutin problemlerde gösterdikleri başarıyı rutin olmayanlarda gösteremediklerini de eklemiştir. Benzer şekilde Özaydın ve arkadaşları (2024) da farklı matematiksel problem türlerinde karşılaştırmalı olarak matematiksel muhakeme başarılarını incelemiş ve rutin olmayan problemlerdeki başarıları orta değer altında kalarak diğer problemlerden daha düşük bulmuştur. Rutin olmayan problemlerle ve her sınıf seviyesinde farklı türden problemlerle çalışma sırası verilmesi gerekliliğini açığa çıkarmıştır. Bu durum muhakeme gelişimi adına problem çözme sürecinde öğrencilerin alışık olmadıkları durumların olması gerekliliğinin altını çizmiştir.

Farklı öğretim uygulamalarına dayalı çalışmalar ele alındığında iletişimin (Cai vd, 1996), öğretim süreçlerinin (Tzur vd., 2013), farklı öğretim yöntemlerinin (Tum ve Kutluca, 2021) ve e-modülün (Hidayat vd, 2022) muhakeme gelişimine etkisi görülmüştür. Bu çalışmalardan Cai ve arkadaşları (1996) matematiksel düşünme ve muhakeme içeren açık uçlu görevler aracılığıyla matematiksel iletişimin ele alındığı ortamda muhakeme becerilerini de destekleyeceğini iddia etmiştir. Tzur vd. (2013) öğrencilerin çarpımsal muhakemelerini destekleyen görevlerin muhakeme gelişimindeki etkililiğini ifade ederken; Tum ve Kutluca (2021) farklı öğretim yöntemleriyle zenginleştirilmiş ortamın matematiksel muhakeme becerilerini geliştirdiğini gözlemlemiştir. Ayele (2017) ise 102 lisansüstü eğitim almış matematik öğretmeniyle yaptığı araştırmada her ne kadar önemli görevler, matematiksel düşünme ve çeşitli yöntemler kullanılsa da önemli sayıda öğretmenin öğrencilerde matematiksel muhakeme becerilerini geliştirirken güçlük yaşadığını; Bozkuş ve Ayvaz (2018) ile Loong ve arkadaşları (2013) da benzer şekilde öğretmenlerin matematiksel muhakeme konusunda yeterli bilgi ve görüşe sahip olmamaları nedeniyle öğrencilerin muhakeme etmelerinin daha iyi desteklenmesi gerektiğini belirtmiştir. Bu nedenle öğretmenlere öğrencilerin muhakeme etme becerilerini nasıl geliştirebilecekleri konusunda eğitimler verilmesi önerisinde bulunmuşlardır. Demir ve Zengin (2023) ise teknoloji destekli işbirlikçi öğrenme ortamının matematiksel muhakeme gelişimindeki olumlu rolünü belirtmiştir. Hidayat ve arkadaşları (2022) de benzer şekilde aritmetik diziler ve seri kavramları konusunda matematiksel akıl yürütme becerilerini geliştirmeye yönelik probleme dayalı

öğrenme yaklaşımıyla ePub formatında geliştirilen e-modülün matematiksel muhakeme gelişiminde geçerli ve pratik olduğunu belirtmiştir. Geliştirilen matematiksel muhakemenin göstergeleri olarak varsayımları önermeyi ve çözümleri mantıksal olarak sonuçlandırmayı sunmuştur. Ayrıca e-modülün e-Pub formatında geliştirilme sebebini “öğrencilerin matematiksel muhakemelerini geliştirmeye yönelik alternatif çözümler sunma” şeklinde ifade ederek matematiksel muhakeme gelişimine dair yol arayışının halen devam ettiğini göstermiştir.

Alanyazında matematiksel muhakemenin değerlendirilmesi, ölçülmesi ve soruların matematiksel muhakeme açısından incelenip değerlendirilmesine yönelik çalışmalara bakıldığında Özaydın ve Arslan (2022) PISA 2021 Matematik Çerçevesi’nde yer alan matematiksel muhakeme etme sürecinde beklenen eylemlerin her bir kriter ele alınıp matematiksel muhakeme etme yeterliğini değerlendirmeye yönelik geçerli ve güvenilir düzeyde bir değerlendirme tablosu geliştirmiştir. Bal İncebacak ve Ersoy (2016) öğrencilerin matematiksel muhakeme becerilerini TIMSS (2003) matematiksel muhakeme aşamalarına göre analiz edebilmek için rutin olmayan problemler kullanmıştır. Bu çalışmada problem çözümünde istenilenin belirtilebildiği ancak bazı öğrencilerin ise soruları anlayamayıp cevaba ulaşamadığı elde edilmiştir. Bu durum rutin olmayan problemlerin matematiksel muhakeme açısından ele alınmasına dair gerekliliği bir kez daha göstermiştir. Esendemir ve arkadaşları (2015) matematik öğretmen adaylarının problem çözme ve matematiksel muhakeme etme yeterlikleri bakımından kendilerini yeterli gördüğüne ulaşsa da; Çiftçi (2015), matematik öğretmen adaylarının karşılaştıkları problemler karşısında matematiksel muhakeme etme becerilerini Lithner (2008)’in çerçevesinde analiz etmiş ve yüzeysel düşünme yapıları sergileyerek benzetmeye dayalı matematiksel muhakeme etme türlerini öncelikli olarak tercih ettikleri ortaya çıkarmıştır. Akın ve arkadaşları (2023) da benzer şekilde 1966-2022 yılları arasında Yükseköğretim Kurumları Sınavlarında (YKS) oran-orantı kavramı ile ilgili çıkmış problemleri Lithner’in (2008) matematiksel muhakeme çerçevesine göre betimsel analiz yaklaşımıyla çözümlemiştir. Problemlerin %84’ünün taklitçi muhakemeyle %16’sının yaratıcı muhakeme ile çözülebileceğini belirterek yaratıcı muhakemeye olan gereksinimi sunmuştur.

Matematiksel muhakemenin diğer değişkenlerle ilişkisi ele alındığında matematik başarısı (Maiti, 2017; Nunes, 2012) ve olasılıksal muhakemenin (Gürbüz ve Erdem,

2014) etkisine rastlanmıştır. Maiti (2017), 600 öğrenciyle muhakeme yeteneğinin matematik başarısı üzerindeki etkisini muhakeme testi yardımıyla incelemiş ve yaptığı t testi sonucunda kızlar ve erkekler arasında matematik başarısı ve muhakeme yeteneği bakımından bir fark görülemediği. Nunes ve arkadaşlarının (2012) beş yıl boyunca yürüttükleri matematiksel muhakeme ve aritmetik becerilerinin matematiksel başarıya katkılarını değerlendirmeyi amaçladıkları çalışmalarında ise matematiksel muhakeme ve aritmetik becerilerinin matematik başarısına bağımsız katkılarda bulunduğu görülmüştür. Matematiksel ve olasılıksal muhakemeler arasındaki ilişkiyi belirlemeyi hedefleyen Gürbüz ve Erdem (2014), Matematiksel Muhakeme ve Olasılıksal Muhakeme testlerini uygulayıp matematiksel muhakemeyle olasılıksal muhakeme arasında doğrudan bir ilişki olduğunu göstermişlerdir.

2.3.2 STEM eğitimi ile ilgili çalışmalar

STEM bağlamında matematik veya matematiksel muhakemeye ilişkin alanyazın incelendiğinde STEM'in çalışılma alanı, entegrasyon modelleri, matematikle ilişkisi, modelleme ve problem çözme üzerindeki etkisi üzerine çalışmalar yapıldığı görülmektedir.

MEB'in 2015 -2019 Stratejik Planı'nda STEM'i gündeme alması ve MEB (2016)'in değerlendirmesinde PISA ve TIMSS için istenen sonuçların alınamaması üst sonuçlara ulaşabilme adına STEM eğitime ağırlık verilmesi gerektiğini göstermiş ve bu sebeple de STEM'e yönelik çalışmalar artmıştır (Çavaş vd., 2020). STEM'e yönelik ilk çalışmayı yapan Çorlu, STEM eğitimi kapsamında lego ve robotik uygulamaları kullanabileceğini; ayrıca öğretim programı ve ders kitaplarının analizi gibi konularda da çalışmalar yapılabileceğini belirtmiştir (Çorlu, 2014). Tabar (2018) ise ülkemizde STEM alanında yapılmış çalışmaların içerik analizini yaptığı çalışmasında STEM eğitimi oluşturan disiplinlerin kullanımında en fazla fen ve mühendislik disiplinlerinin beraber olarak kullanıldığını; dört disiplini de içeren araştırmaların ise az sayıda olduğunu vurgulamıştır. Ülkemizdeki STEM çalışmalarında odakta olan disiplinin fen olduğu ve matematik disiplininde yapılan çalışmaların az olduğu tespit edilmiştir. Bu da STEM ortamında matematiğin ele alınmasının önemini bir kez daha vurgulamıştır.

Deneyisel araştırmalarda STEM eğilimi üzerine yaptığı çalışmasında en çok ortaokul öğrencileri ile fen bilimleri öğretmen veya öğretmen adayları ile uygulama yapıldığı (Kalemkuş, 2019); öğretmenlerin içerisinde de en fazla fen bilimleri

öğretmenleri ile çalışıldığı (Kaya ve Ayar, 2020) görülmüş ve STEM eğitime yönelik içerik üreten araştırmaların ise azınlıkta olduğu saptanmıştır. Bu da araştırmanın katılımcılarının lise öğrencilerinden seçilmesinin uygunluğunu işaret etmektedir.

Bunların yanı sıra STEM disiplinlerinin bütünleştirilmesi ile ilgili farklı entegrasyon modelleri mevcuttur. Roehrig ve arkadaşları (2012) içerik ve bağlamsal entegrasyon şeklinde iki modelden bahsetmektedir. İçerik entegrasyonu ile birden fazla disiplinin kapsandığı esnek STEM programları kastedilirken, bağlamsal entegrasyon modelinde ise bir disiplin merkezde konumlandırılır ve diğer disiplinlerin ana çarkın konusuyla ilişkili olduğu bağlamlarda ders işlenmektedir (Moore vd., 2014). Kelley ve Knowles (2016)'ın yük taşıyan bir kasnak sistemi analogisi şeklindeki entegrasyon modeli ise en son geliştirilen STEM entegrasyon modelidir. Modellerini geliştirirken özellikle STEM alanlarının eğitimi ve öğrenilmesinde önemli rolleri olabileceğini düşündükleri öğrenme teorilerini ve pedagojilerini işe koştuklarını ifade etmektedir. Modellerinde yük, durumlu STEM öğrenmesini; iki büyük kasnak, bilimsel sorgulama ve mühendislik tasarımını; büyük kasnaklar arasında bağlantıyı oluşturan iki küçük kasnak, matematiksel düşünme ve teknolojik okuryazarlığını; sistemin çalışmasını sağlayan ip ise uygulama topluluğunu temsil etmektedir. Bu modelde araştırmacılar yükü çeken kasnak olarak ifade ettikleri mühendislik tasarımını, STEM disiplinlerinin tamamının bütünleştirilmesi sürecinde katalizör görevi görmesi yönüyle en önemli unsur olarak ifade etmektedirler. Başka bir entegrasyon modelinde ise üç tür yaklaşımdan bahsedilmektedir. Bunlar multidisipliner, interdisipliner ve transdisipliner entegrasyon yaklaşımlardır (Morrison, 2006). İnterdisipliner ve transdisipliner entegrasyon modellerinde bir problem durumunu çözmek için birden fazla disiplinle ilişkili bilgi ve beceriler kullanılırken, multidisipliner yaklaşımda bir disiplinindeki ders anlatırken diğer bir disiplinlerden örnek verilmektedir (Bozkurt Altan, 2017a; Ellis ve Fouts, 2001). Bu yaklaşımlardan interdisipliner ve transdisipliner yaklaşımların bütünleşik STEM uygulamaları için daha uygun oldukları ifade edilmektedir. Ancak STEM eğitimini Morrison (2006) daha çok transdisipliner olması gerektiğini vurgulamaktadır.

STEM alanlarının bütünleştirilmesine dair farklı modeller önerilmişse de dört farklı disiplinin bir arada bütünleşik bir şekilde uygulanması kolay değildir. Bu bağlamda alanyazında STEM eğitiminin, günlük hayata dair bir problem durumu veya bir ünite odağında, iki veya daha fazla disiplinin bütünleştirildiği ve STEM alanlarında çalışan

profesyonellerin çalışmalarına benzer uygulamalar olarak ifade eden tanımları da mevcuttur (NRC, 2012; Sanders, 2009). Walker ve arkadaşları (2018) bütünleşik bir STEM ders planı değerlendirme rubriği geliştirmiş ve bunu sekiz başlık altında ifade etmişlerdir. Bunlar motive edici ve öğrenci katılımını sağlayan bir bağlam, STEM içeriklerinin entegrasyonu, öğretimsel stratejiler, ekip çalışması, iletişim, biçimlendirici ve sonuç değerlendirme, organizasyon ve eğitim teknolojilerinin entegrasyonudur. Walker ve arkadaşları (2018) bu başlıklar altında STEM eğitiminin doğasına uygun bir ders planı oluşturmak için kriterler geliştirmiştir. Bu başlıklar ve kriterler incelendiğinde bütünleşik STEM eğitimi, öğrenciyi merkeze alan, öğrencinin kendi elleriyle birtakım ürünler geliştirdiği, iki veya daha fazla disiplinin entegre edildiği, işbirlikli takım çalışmalarının gerçekleştiği, yazılı, sözlü iletişimin olduğu, alternatif değerlendirme tekniklerinin kullanıldığı, öğrencilerin ilgisini çeken ve kendi hayatlarıyla ilişki kurmalarını sağlayan bir yaklaşım olarak görülebilmektedir.

PISA'nın STEM öğreniminde kullanımını incelendiğinde PISA benzeri bir görevle öğrencilere görev verildiğinde çoklu strateji ve yöntem kullanılabilmesi, üst düzey düşünmeye sevk etmesi ve zorlu bir görev oluşu olumlu bulunmuştur (Silver ve Snider, 2014). PISA benzeri görevlerin, çözümleri tahmin etmede de etkin olduğu belirlenmiştir. OECD de STEM öğrenme ortamında öğrenmeyi desteklemek için uzamsal düşünmeden yararlanmayı ele almış, uzamsal düşünme ve STEM öğreniminin ilişkili olduğu ile uzamsal zekanın şekillendirilebilir olduğunu gösteren çalışmaları gözden geçirmiştir. Eğitimde kullanmak için iki stratejiyi değerlendirdiğinde doğrudan uzamsal beceri eğitimi ve uzamsal düşünmeye yardımcı olan harita, diyagram, grafik gibi araçları kullanarak öğretim programını uzamsallaştırmayı önermiştir (Newcombe, 2017). Avustralya'da STEM eğitimi stratejilerine yönelik yapılan analiz çalışmasında STEM eğitimi stratejilerinin odak noktasında probleme dayalı öğrenme yönteminin olduğunu belirlenmiştir (Murphy vd., 2019). Nicholes (2019) ise STEM öğrencilerinin günlük ve disiplinler nicel okuryazarlık değerlendirmelerinin kesişim noktaları ile öğrencilerin STEM ile ilgili gelecekteki kariyerlerini nasıl hayal ettiklerini araştırmıştır. Öğrencilerin kariyerlerinde sayıları kullanma ve yazmada pozitif bir korelasyon bulunmuştur. Tüm bunlar STEM'e dayalı öğrenme ortamında gerçek yaşam problemlerine yer verilmesinin ve görüşme öncesi PISA soruları içeren testlerin kullanılabilmesi için temel oluşturabilmiştir.

Tang ve Williams (2019) STEM eğitimindeki disiplinler arası okuryazarlıkların toplu olarak kavramsallaştırılıp kavramsallaştırılamayacağını belirlemek için karşılaştırma yapmış; disiplinler arası benzerlikleri ve farklılıkları sunmuşlardır. Matematik okuryazarlığında kavrama ve problem çözmeye, fen okuryazarlığında ise anlama ve kavrama vurgu yapılmıştır. Bütünleşik STEM eğitimi ile logaritma ve pH ilişkilendirildiği yarı deneysel araştırmada öğrencilerin geleneksel sınıf ortamı ve STEM ortamındaki kavramsal anlayış farklılığına bakılmış; iki disiplin arasında aktarım olduğu, logaritmaya ait çoklu gösterimler (sayısal, cebirsel ve grafiksel) arasında derin bağlantı kurdukları açıklanmıştır (Smith, 2018). Maass ve arkadaşları (2019) ise STEM eğitiminde matematiğin rolünü ve üç disiplinler arası yaklaşımla nasıl geliştirilebileceğini incelemiştir. Matematiksel modellemenin okul eğitimine anlamlı bir şekilde entegre edilmesi ve sorumlu vatandaşlık eğitiminde matematiğin destekleyeceği rolü tartışmıştır. Aydın ve Derin (2020) de matematik eğitimi için STEM ve matematiksel modelleme gerekliliğini sorgulamıştır. Öğrencilerin hayat probleminin matematiksel modelleme bağlamında olduğu gibi teorik olarak ele alması şeklinde değil de STEM bağlamında uygulamalı olarak çözülmesini belirtmiş ancak matematiksel modellemenin STEM eğitimine katkısını göz ardı etmeyip ortak yönlerinin birlikte kullanılmasını önermiştir. Armutçu (2021) da benzer şekilde STEM yaklaşımına dayalı matematiksel modelleme etkinliklerinin ortaokul öğrencilerinin STEM bağlamında matematiksel modelleme becerilerine ve matematik okuryazarlığına etkisi ile STEM bağlamında matematiksel modelleme problemlerine yönelik görüşlerini incelemiştir. STEM bağlamında matematiksel modelleme becerileri ile matematik okuryazarlık başarı düzeyleri arasında pozitif yönde yüksek ilişki tespit etmiştir. Ayrıca verilen problemlerin anlaşılmasının zor olduğu ancak birden fazla disiplin alanına hâkim olunması gerektiği, eğlenceli, faydalı, farklı bakış açıları kazandırdığını belirtmiştir. Bu çalışmalar STEM'e dayalı öğrenme ortamında modellemeye yer vermenin zeminini oluşturmuştur.

STEM ile ilgili alanyazın incelendiği zaman problem çözme ve muhakeme ile çalışmalar yer alsa da (Sokolowski, 2019; English, 2023) STEM'e dayalı öğrenme ortamının matematiksel muhakeme gelişimindeki rolü ve bu rolün problem çözme süreçlerine dayalı açıklığa kavuşturulma ihtiyacı devam etmektedir. STEM geçmişi olan ve olmayan üniversite 1. sınıf öğrencilerinde nicel okuryazarlığı ve muhakeme süreçlerinin incelendiği çalışmada STEM geçmişine sahip olan öğrencilerin önemli ölçüde yüksek nicel performansa sahip olduğu belirlenmiştir. Karmaşık sürece sahip olan

nicel okuryazarlığın sadece matematik ve istatistikte yetkin olmaktan daha fazlası olduğunu belirtilmiştir (Sibaen, 2021). Phetthai ve Poonpaiboonpipat (2021) alan hesaplama konusunda 9. sınıf öğrencisiyle altı haftalık STEM aktivitelerinin matematik okuryazarlığı üzerine etkilerini incelemiştir. Veri toplama aracı olarak STEM etkinlik kağıtları ve matematik okuryazarlık testlerini kullanılmıştır. Çoğu Tayland'lı öğrencinin formüle etme sürecinde başarıya ulaştığı görülmüş ve bunun nedeni olarak da STEM etkinliklerinin yapısı sunulmuştur. Ancak matematik okuryazarlığı testinde başarılı olan öğrencilerden üçünün yorumlama ve değerlendirmede başarı gösteremediği görülmüştür. Neden olarak sadece cevapla ilgilenen sorulara alışkın olmaları ve grup çalışmasında zihinsel olarak sürecin yavaş ilerlemesi olabilir denilmiştir. Öneri olarak disiplinler arası bilgiye sahip öğretmenlerce hazırlanacak ilgi çekici STEM etkinliklerinin matematik bilgisini tüm süreçlerde etkin hale getirebilecek öğretim yöntemi ve strateji ile çalışılması verilmiştir. Bu çalışmalar araştırmancının amaçlarına yönelik ihtiyaç olduğunu ortaya koymuştur. Lawson ve diğerlerine (2000) göre bu çalışmadaki araştırma konusu olan muhakeme becerilerinin gelişiminde konu öğretmeye yönelik eğitim ortamlarının katkısının olmadığı; öğrenciye bilimsel süreç esnasında bilgiyi kazandırmayı hedefleyen eğitim ortamlarının muhakeme becerilerinin gelişimi üzerine olumlu etkisinin olduğu belirtilmiştir. Bu da araştırmada STEM'e dayalı öğrenme ortamının kullanmanın uygunluğunu göstermektedir. Koçyiğit ve Yenilmez (2022) STEM odaklı öğretim sürecinde matematiksel muhakeme becerisini ele almıştır. 10. sınıflarla yaptığı araştırma sonucunda matematiksel muhakeme becerilerinde artış olduğunu gözlemlemiş ve yaygınlaştırılmasını önermişlerdir. Benzer şekilde birçok araştırmacı STEAM öğrenme metodolojisinin muhakeme yetenekleri üzerinde olumlu bir etkiye sahip olduğunu iddia etmişlerdir (Mayes ve Gallant, 2018; Tekerek, 2016; Thuneberg vd., 2018). Ayrıca Siregar ve arkadaşları (2023) da mobil entegre bir STEM uygulamasının matematiksel muhakeme becerisi üzerindeki etkisini nicel yöntemle araştırmış, öğrencilerin muhakeme yeteneğinin geliştiğini ve matematiksel problemlere çözüm üretmek için bir öğrenme modeli olarak önerilebileceği sonucuna varmışlardır. Ancak alanyazında STEM'e dayalı öğrenme ortamında PISA 2021 matematik okuryazarlığı çerçevesindeki matematiksel muhakemeye ilişkin herhangi bir çalışmaya rastlanmamıştır. Matematiksel muhakemenin PISA 2021 matematik okuryazarlığı çerçevesinde ele alınması hem STEM öğrenme ortamında matematiksel muhakemenin gelişiminin hem de matematik okuryazarlığı çerçevesindeki problem çözme sürecinin incelenmesine dair fırsat verecektir.

BÖLÜM 3

3 YÖNTEM

Bu bölümde araştırma modeli, katılımcı seçim süreci, araştırma sürecindeki veri toplama araçları, öğretim sürecinin detaylı anlatımı ve elde edilen verilerin toplama ve analiz sürecine ait bilgi verilmiştir.

3.1 Araştırma Modeli

Bu araştırmada 11. sınıf öğrencilerinin STEM'e dayalı olarak desenlenen öğrenme ortamında gerçek yaşam problemlerinin çözüm sürecindeki matematiksel muhakeme gelişimlerinin incelenmesine odaklanılacağından, katılımcıların bilişsel süreçlerini derinlemesine incelemeye, araştırmaya ve yorumlamaya imkan tanıyan (Corbin ve Strauss, 1998) nitel araştırma yöntemi kullanılacaktır.

3.1.1 Nitel araştırma yaklaşımı

Nitel araştırma yaklaşımı, algıların ve olayların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya koyulduğu süreçlerin izlendiği bir yöntemdir. Araştırmacı doğal ortama dahil olur ve veri toplama aracı görevi görür. Veri olarak çoklu veri kaynakları ele alınır. Böylece araştırmanın geçerliliği daha da artar ve sonuçlar da doğru bir şekilde yorumlanabilir (Creswell, 2007). Elde edilen verilerin analizi tümevarımsal elde edilir. Araştırmacı ilk önce verileri kategorileştirir, ardından temalar oluşturur ve sonra da sadeleştirir. En sonunda ise soyut birimler elde edilir. Eğer konuyla ilgili teorik çerçeveye ait temalar daha önceden belli ise temalar sürekli değişebilir (Creswell, 2007).

Araştırmacı çalışmada daima katılımcıların bakış açılarına odaklanmalıdır (Creswell, 2007). Bu araştırma yaklaşımı esnekliğe sahip olduğundan gerekli görülen hallerde desende değişiklik yapılabilir. Bu araştırmada araştırmanın amacına uygunluğu göz önüne alındığından nitel araştırma yaklaşımlarından öğretim deneyi deseni kullanılacaktır.

3.1.2 Öğretim deneyi

Araştırmada STEM'e dayalı öğrenme ortamında öğrencilerin matematiksel muhakemelerinin gelişiminin incelenmesi amaçlanmakta olup, öğrenme ortamı araştırma kapsamında desenlenecek ve araştırma sürecinde gerekecek revizyonlar sonucunda matematiksel muhakemeyi destekleyen STEM'e dayalı bir öğretim modeli olarak

sunulacağından ve bu süreçte katılımcıların zihinsel eylemleri derinlemesine inceleneceğinden dolayı nitel araştırma yöntemlerinden öğretim deneyi tercih edilmiştir.

İlk olarak Sovyetler Birliği'nde Pedagoji Fakültesi'nde kullanılmaya başlanan öğretim deneyi, ardından Amerika'da bir grup tarafından matematik eğitimi araştırmaları için tekrar ele alınmıştır. Yapılandırmacı yaklaşıma benzer olarak geliştirilmiştir. Piaget'nin klinik görüşme yönteminden esinlenilmiştir. Öğrencilerin matematik öğrenmelerini ve muhakeme süreçlerini deneyimleyerek, öğretim sürecinin iyileştirilmesine yönelik durumlarını kapsamaktadır. Bu anlamda klinik görüşme yönteminden daha kapsamlı ve derin inceleme yapılmasına olanak veren bir yöntemdir (Steffe ve Thompson, 2000).

Öğrencilerin matematiksel bilgiyi oluştururken zihinlerinde meydana gelen eylemleri anlamayı, elde edilen verileri yorumlayarak öğretim sürecinin yeniden düzenlenmesini ve düzenlenen öğretim sürecinin yeniden uygulanarak sürecin tekrardan incelenmesini içermektedir (Steffe, 1991). Bu anlamda öğretim deneyi matematik ve fen eğitimine dayalı araştırmaların karakteristiğini en iyi şekilde yansıtabilmektedir (Kelly ve Lesh, 2000).

Öğretim deneyi, öğretim bölümlerinden oluşur. Öğretim bölümleri ise öğretim temsilcisi, birkaç öğrenci, gözlemci ve veri kaydından meydana gelir (Steffe ve Thompson, 2000). Her bir öğretim bölümü ayrı ayrı kaydedilip ayrı analiz edilir. Öğrencilerin muhakemelerine ele alınır. Araştırmacı, öğretim gözlemcisi olarak yer alır; matematiği öğrenme sürecinde düşüncelerini değiştirmelerini sağlayabilecek etkileşim yolları ve durumlar yaratır (Engelhardt vd., 2003). Öğrencilerin düşüncelerinin değişmesi aslında istenen bir durumdur. Bu anlamda öğretim deneyi ve klinik görüşme farklıdır. Gözlemci ise öğrencileri anlamada ve sonraki bölümü belirlemede araştırmacıya yardım eder (Engelhardt vd., 2003). Bölümlerin ortasında veya sonunda klinik görüşmeler yapılabilir. Elde edilen tüm veriler video ile kayıt altına alınır. Kayıtlar geçmişe yönelik analizlerde ve sonraki bölümlerin hazırlanmasında kullanılır (Steffe ve Thompson, 2000). Nitel veri olarak klinik görüşmeler, gözlem, araştırmacı notları, öğrenci notları ve video kayıtları yer alabilmektedir (Knuth ve Elliot, 1997).

Öğretim deneyine ait dört aşamalı döngü şunlardır:

- i. Araştırmacının varsayımlarına dayalı öğretim sürecinin tasarlaması ve planlaması,

- ii. Öğretim bölümleri olarak adlandırılan sınıf içi uygulamalar,
- iii. Geçmişe yönelik analizler,
- iv. Bilişsel yapıların modellenmesi (Steffe ve Thompson, 2000).

Araştırma sürecince bu aşamalar takip edilip STEM'in matematiksel muhakeme gelişimindeki rolü açığa çıkarılmıştır.

3.1.3 Katılımcılar

PISA çerçevesinde ele alınan yeterliliklerden biri olan matematiksel muhakeme yeterliliğinin STEM'e dayalı öğrenme ortamındaki gelişiminin incelenmesine odaklanan bu çalışmada katılımcılar ölçüt örnekleme yöntemi ile belirlenmiştir. Ölçüt örnekleme, araştırmacının belirlenen ölçütleri sağlayan durumlar üzerinde derinlemesine çalışmasıdır (Patton, 2014).

Araştırmanın katılımcılarını matematiksel muhakeme yeterlilikleri açısından hazır bulunuşluklarına göre seçmek için ölçüt örnekleme yöntemindeki ölçüt, PISA matematik problemlerindeki matematiksel muhakeme performansı olarak belirlenmiştir. Öncelikle araştırmacının yaşadığı Kilis ili merkez ilçesinde yer alan bir devlet okulunun 11. sınıf kademesindeki bir sınıfta öğrenim gören 37 öğrenciye, gerekli izin formları (gönüllü katılım formu, veli izin formu) imzalatılıp izin alındıktan sonra araştırmacılar tarafından hazırlanan PISA-1 testi (Bkz. EKLER EK-5) uygulanmıştır. PISA-1 testi doktorasını devam ettirmekte olan on yıllık matematik öğretmeni ve matematik eğitiminde uzman bir akademisyen ile birlikte Turner ve arkadaşlarının (2015) belirlediği matematiksel muhakeme düzeylerine göre geliştirilmiştir. Bu test toplamda daha önceki yıllarda yayınlanan dört farklı PISA matematik sorusundan oluşmaktadır. Bu soruların kategorisi çalışmanın amacı doğrultusunda değişim ve ilişkiler kategorisinden seçilmiştir. Ayrıca her bir sorunun matematik muhakeme düzeyi ya daha önceki yayınlardan ya da araştırmacı ve alanında uzman akademisyen tarafından tek tek belirlenmiştir. Bu süreçlere ait tüm bilgiler *Veri Toplama Araçları* bölümünde detaylı olarak paylaşılmıştır (Bkz. s. 39). PISA-1 testin uygulanacağı 11. sınıf okul zümre başkanının görüşleri ile belirlenmiştir. O kademedeki en başarılı sınıf olarak ifade edilmiştir. Belirlenen sınıftaki 35 öğrenciye uygulanan PISA-1 testi uygulanmış ve sonucunda dört farklı grup elde edilmiştir (Tablo 3.1). Bu grupların her birini temsilen bir veya iki katılımcı olmak üzere rastgele yedi gönüllü öğrenci seçilmiş ve bu öğrenciler araştırmanın katılımcıları olarak

belirlenmiştir. Belirlenen katılımcıların her biri ile ayrı ayrı klinik görüşmeler yapılmıştır. Bu görüşmelerde PISA-1 testinde yer alan soruların her birine yönelik matematiksel muhakeme düzeylerini açığa çıkarabilecek sorular yönlendirilmiştir. Sorulardan nasıl çıkarımlar yaptıkları, neler anladıkları, çözüme ulaşmak için hangi bilgileri nereden elde ettikleri ve nasıl kullandıkları tek tek sorgulanmıştır. Görüşme soruları *EKLER* kısmında detaylı EK-6 olarak verilmiştir. Bu görüşmelerle olası yanlışlıkların önüne geçilmesi ve katılımcıların matematiksel muhakeme düzeylerinin tam olarak belirlenmesi hedeflenmiştir. Gerçekleşen görüşmelerde aynı matematiksel muhakeme düzeyinde dahi farklı eylemlerin gerçekleşebileceği görülmüş ve bu nedenle katılımcıların zihinsel performansları titizlikle ele alınmıştır.

PISA-1 testi 37 kişilik bir sınıfa aynı anda uygulanmıştır. Genel olarak bakıldığında 37 öğrencinin PISA-1 testindeki yönelik gösterdiği performanslarında muhakemelerinin dört gruba ayrıldığı görülmüştür. Elde edilen dört grubun üçünden ikişer öğrenci ve birinden bir öğrenci olmak üzere dört farklı grubu temsilen yedi öğrenci araştırmanın katılımcıları olarak belirlenmiştir.

İlk grupta yer alan öğrenciler problemde verilenleri açıklayabilen, isteneni ifade edebilen, bilgilere dayalı doğrudan çıkarımlar yapabilen ve problem bağlamındaki sözel işlem akışını sırasıyla yapabilen öğrencilerdir. İkinci gruptaki öğrenciler ilk gruptaki performansların yanı sıra isteneni bulmak için bilinçli olarak gerekli bilgileri seçip gerekli olmayan bilgileri görmezden gelebilen, bağlamda verilen matematiksel bilgilerden gerekli olanları ilişkilendirerek çıkarımlar yapabilen ve yaptığı çıkarımları belli bir sistematikte kullanabilen öğrencilerdir. Üçüncü gruptaki öğrenciler ikinci gruptaki performansların yanı sıra bağlamdaki farklı matematiksel öğelere dair verilen bilgileri bir araya getirerek çıkarımlar oluşturabilen ve problemde elde ettiği çıkarımlara dayalı verilen ifadelerin doğruluğuna ya da yanlışlığına karar verirken gerekçe oluşturabilen öğrencilerdir. Dördüncü gruptaki öğrenciler ise üçüncü gruptaki performansların yanı sıra problemin farklı öğelerinden elde ettiği öğeleri daha önceki çıkarımlar ile ilişkilendirerek yeni çıkarımlar oluşturabilen, etkin bir şekilde kullanabilen ve bu çıkarıma dair gerekçeleri açıklayabilen öğrencilerdir.

Katılımcıların grupları, takma isimleri ve matematiksel muhakeme düzeyleri şu şekildedir: birinci gruptan Hatice ve Necati 0. düzey, ikinci gruptan Aydan ve İlknur 1. düzey, üçüncü gruptan Elif ve Hamza 2. düzey, son olarak dördüncü gruptan Fatime ise

3. düzeydir. Bu katılımcılarına ait grup numaraları, kod isimleri, matematiksel muhakeme düzeyleri ve matematiksel muhakeme eylemleri Tablo 3.1 ile verilmiştir:

Tablo 3.1 Katılımcılara Ait Kodlar, Muhakeme Düzeyleri Ve Gösterdikleri Performanslar

Gruplar	Katılımcılara Ait Kod İsimler	Muhakeme Düzeyleri	Katılımcılara Ait Matematiksel Muhakeme Eylemleri
Grup 1 Muhakemesi yüksek	Fatime	3	Gerçek yaşamda verilenleri ve isteneni matematiksel olarak ifade edebilme Verilenleri ve istenileni açıklarken gerekçe sunma Bağlamdaki değişkenlerin değerini belirleyebilme Çözümde yaptığı işlemleri açıklarken gerekçe sunabilme Çözüm için gerekli değişkenleri ayırt etme İki değişkeni ilişkilendirip çıkarım yapabilme ve bu sürece ilişkin gerekçe sunabilme, Bulduğu farklı sonuçları birbiriyle ilişkilendirip genelleme yapma ve bu esnada çeşitli gerekçeler sunabilme Benzeri durumlar için kimi zaman aynı gerekçeyi sunarken kimi zaman da yeni bir gerekçe üretme
Grup 2 Muhakemesi orta	Elif Hamza	2	Verilen nicel verileri kendi varsayımlarına göre değiştirerek verilenleri veya isteneni anlama Bağlamda verilen değişkenlerin değerini belirleyebilme Çözümde yaptığı işlemleri gerekçeleriyle açıklayabilme Çözüm için gerekli değişkenleri ayırt etme İki değişkeni ilişkilendirip çıkarım yapabilme ve bu sürece ilişkin gerekçe sunabilme Benzeri durumlar için aynı gerekçeyi sunma
Grup 3 Muhakemesi düşük	Aydan İlknur	1	Formülde verilen değişkenlerin değerini belirleyebilme Çözümde yaptığı işlemleri gerekçeleriyle açıklayabilme Çözüm için gerekli değişkenleri ayırt etme Benzeri durumlar için aynı gerekçeyi sunma

Grup 4 Muhakemesi zayıf	Hatice Necati	0	Bağlamdan sonuç çıkarma Kıyaslama Birimleri aşına olduğu birim gibi düşünerek hesap yapma Bağlamda verilen değişkenlerin değerini belirleyebilme Çözümde yaptığı işlemleri gerekçeleriyle açıklayabilme Çözüm için gerekli değişkenleri ayırt etme Benzeri durumlar için aynı gerekçeyi sunma

Katılımcıların her birine ait ön görüşme bulguları detaylı olarak *Bulgular* kısmında verilmiştir (Bkz. Bölüm 4).

3.1.4 Veri Toplama Tekniği ve Araçları

11. sınıf öğrencilerinin STEM'e dayalı öğrenme ortamında muhakeme becerilerinin gelişiminin incelenmesini amaçlayan bu araştırmanın verileri; PISA matematik soruları kullanılarak oluşturulmuş olan testler (PISA-1, PISA-2, PISA-3), klinik görüşmeler, öğrenme ortamı video kayıtları, öğrenci çalışma kağıtları ve araştırmacı günlükleri ile elde edilmiştir. Bu bölümde veri toplama araçları araştırma sürecine uygun sırayla verilmiştir.

3.1.4.1 PISA-1, PISA-2 ve PISA-3 testleri

Bu araştırma PISA matematik okuryazarlığı çerçevesindeki matematiksel muhakeme yeterliliğine dayanmaktadır. PISA matematik problemleri ile hazırlanan bu testlerde kullanılan PISA problemlerinin seçiminde matematiksel içerik kategorisi olarak “değişim ve ilişkiler” kategorisi belirlenmiş ve soruların muhakeme düzeyleri dikkate alınarak, her bir muhakeme düzeyinden birer tane soru seçilmiştir. Dörder sorudan oluşan PISA-1, PISA-2 ve PISA-3 testleri, araştırmacı ve alanında uzman akademisyen ile birlikte hazırlanmıştır.

Araştırma sürecinin başında uygulanan PISA-1 testi, araştırmanın katılımcılarını belirlemek amacıyla uygulanan bir veri toplama aracıdır. 2003-2012 yıllarında PISA uygulamalarına ilişkin olarak MEB tarafından yayınlanmış matematik okuryazarlığı sorularından seçilerek oluşturulmuştur. Öncelikle araştırma bağlamı nedeniyle içerik kategorisinden değişim ve ilişkilere ait PISA matematik soruları ele alınmıştır. 2003-2012

yıllarında yapılan PISA matematik okuryazarlığı sınavlarında toplamda 89 tane matematik sorusu paylaşılmış olup bunlardan 21 tanesi değişim ve ilişkiler kategorisine aittir. Değişim ve ilişkilere ait bu sorulardan üç tanesinin matematiksel muhakeme düzeyleri Turner ve arkadaşları (2015) tarafından belirlenmiştir. Testler için seçilen sorulardan *Fuji Dağı*'nın matematiksel muhakeme düzeyi Turner ve arkadaşları (2015) tarafından; *En İyi Araba 1*, *En İyi Araba 2*, *Araba Gezintisi 2*, *Bisiklet Sürücüsü Hale 1*, *Bisiklet Sürücüsü Hale 2* ve *Bisiklet Sürücüsü Hale 3*'ün matematiksel muhakeme düzeyleri Kızıltoprak (2017) tarafından; *Damlama Oranı 3*'ün matematiksel muhakeme düzeyi ise Akın (2016) tarafından daha önceki çalışmalarda belirlenmiştir. Geriye kalan soruların seçiminde ise araştırmacı ve alanında uzman akademisyen 2003-2012 yıllarındaki PISA matematik okuryazarlığının değişim ve ilişkiler kategorisine ait soruların matematiksel muhakeme düzeylerini Turner ve arkadaşları (2015) matematiksel muhakeme düzeylerini dikkate alarak ayrı ayrı belirleyerek karşılaştırmışlar ve aynı düzeyde birden fazla soru olması durumunda temsilen birini seçmiştir. Soruların seçiminde her düzeyden birer tane olması ve her testin eşit sayıda soru içermesi göz önünde bulundurulmuştur. Böylece dörder sorudan oluşan PISA-1, PISA-2 ve PISA-3 testleri araştırmacı ve alanında uzman akademisyen tarafından hazırlanmıştır. PISA-1 testine seçilen sorulara ait ad, muhakeme düzeyi, içerik ve yıl bilgisi Tablo 3.2 ile verilmiştir.

Tablo 3.2 PISA-1 Testinde Yer Alan Sorulara Ait Bilgiler

Soru sırası	Soru Adı	Muhakeme Düzeyi	İçerik	Yıl
1	Gazete Satma 1	0	Değişim ve İlişkiler	2012
2	En İyi Araba 1	1	Değişim ve İlişkiler	2003
3	Bisiklet Sürücüsü Hale 1	2	Değişim ve İlişkiler	2012
4	Bisiklet Sürücüsü Hale 3	3	Değişim ve İlişkiler	2012

Bu sorulardan *En İyi Araba 1*, *Bisiklet Sürücüsü Hale 1* ve *Bisiklet Sürücüsü Hale 3* sorularının matematiksel muhakeme düzeyleri Kızıltoprak (2017) tarafından belirlenmiştir. Ancak birinci sırada yer alan “*Gazete Satma 1*” sorusuna ait matematiksel

muhakeme düzeyi ise araştırmacı ve alanında uzman akademisyen tarafından belirlenmiştir. *Gazete Satma 1* sorusu Görsel 3.1 ile verilmiştir.

Görsel 3.1 Gazete Satma 1 Sorusu

GAZETE SATMA	
<i>Zed ülkesindeki iki gazete işe gazete satıcısı almak istemektedir aşağıdaki ilanlar, bu gazetelerin, satıcılara nasıl ödeme yapacağını göstermektedir.</i>	
ZED YILDIZ GAZETESİ EKSTRA GELİRE Mİ İHTİYACINIZ VAR? GAZETEMİZİ SATIN <i>Kazanacağınız ücret:</i> <i>Bir hafta içinde satacağınız ilk 240 gazete için gazete başına 0,20 zed + fazladan sattığınız her gazete için 0,40 zed</i>	ZED GÜNLÜK GAZETESİ AZ ZAMANINIZI ALACAK DOLGUN ÜCRETLİ İŞ! <i>Zed Günlük gazetesini satın ve haftalık 60 zed + sattığınız her gazete için 0,05 zed kazanın.</i>
<i>Ferdi her hafta Zed Yıldız gazetesinden ortalama olarak 350 adet satmaktadır.</i> <i>Ferdi, ortalama olarak her hafta kaç zed kazanmaktadır?</i> <i>Zed cinsinden tutarı:</i>	

Gazete Satma 1 sorusunda iki farklı gazetenin (Zed Yıldız Gazetesi ve Zed Günlük Gazetesi) alacağı gazete satıcısı için haftalık ödenecek ücrete dair bilgiler ve Ferdi'nin Zed Yıldız Gazetesi'nden ortalama kaç adet sattığı bilgisi verilip Ferdi'nin haftalık kazancının ortalama kaç zed olacağı istenmiştir. Bu soruda ilk olarak hangi gazete ilanındaki ücretlendirmenin kullanılacağına dair “*Ferdi'nin Zed Yıldız Gazetesi'ni satmaktadır*” bilgisine dayanarak “*O zaman Ferdi'nin kazancını hesaplamak için Zed Yıldız Gazetesi'ne ait ilandaki ücretlendirme yönergesi kullanılmalıdır.*” şeklinde doğrudan bir çıkarımla basit bir muhakeme yapılmalı ve Ferdi'nin sattığı gazete olan Zed Yıldız Gazetesi ilanı belirlenmelidir. Ardından istenen kazancı hesaplamak amacıyla gazetede verilen ücret yönergesinden doğrudan çıkarımlar yaparak matematikleştirme yeterliliği kullanılmalı ve orantısal bir matematiksel model aracılığıyla istenen sonuç bulunmalıdır.

Doğrudan bir çıkarımla seçilen Zed Yıldız Gazetesi'ndeki ücretlendirme yönergesinde “*İlk 240 gazetenin her biri 0,20 zed, geriye kalanlar ise 0,40 zed*” bilgisi verildiğinden “*İlk 240 gazetenin her biri 0,20 zed, geriye kalan 110 gazetenin her biri*

0,40 zed üzerinden hesaplanmalıdır.” şeklindeki doğrudan çıkarımla orantısal matematiksel model düşünülmeli ve ilk 240 gazete satımından $240 \cdot 0,20 = 48$ zed, geriye kalan 110 gazeteden ise $110 \cdot 0,40 = 44$ zed kazanacağı elde edilip Ferdi’nin ortalama her hafta $48+44=92$ zed kazanacağı belirlenmelidir.

Gazete Satma 1 sorusunda ilk olarak Ferdi’nin sattığı gazete ilanını doğrudan bir çıkarım ile tespit edilip ardından ilandaki yönergedeki doğrudan çıkarımla orantısal bir model aracılığıyla haftalık ortalama toplam kazanç hesaplanabilmektedir. Çözüme yönelik yapılan orantısal model oluşturma ve gerekli cebirsel işlemleri yapma matematikleştirme yeterliliği ile ilgili olup matematiksel muhakeme yeterliliği için sadece yapılan çıkarımlar dikkate alınmalıdır. Problem bağlamındaki bilgilerle (Ferdî’nin Zed Yıldız Gazetesini satması ve gazete ilanındaki ücret yönergesi) doğrudan çıkarım yapılması Turner ve arkadaşlarının (2015) matematiksel muhakeme düzeylerinden 0. düzeye ait “Verilen bilgilerden ve yönergelerden doğrudan çıkarımlar yapma” tanımına karşılık gelmektedir. Bu nedenle *Gazete Satma 1* sorusunun matematiksel muhakeme düzeyi 0. düzey olarak belirlenmiştir.

PISA-2 testi araştırma sürecinin ortasında katılımcılara uygulanmıştır. PISA-2 testinde 2003-2012 yılları arasındaki PISA sınavlarında yer alan değişim ve ilişkilerle ilgili matematik soruları ele alınmıştır. 0 düzeyindeki *Damlama Oranı 3* sorusunun matematiksel muhakeme düzeyi daha önceki yıllarda Ayça (2016) tarafından, geriye kalan *Büyüme 2*, *Yarış Arabası 4* ve *İnternette Sohbet* sorularının matematiksel muhakeme düzeyi ise araştırmacı ve alanında uzman akademisyen tarafından belirlenmiştir. PISA-2 testine seçilen sorulara ait ad, muhakeme düzeyi, içerik ve yıl bilgisi Tablo 3.3 ile verilmiştir.

Tablo 3.3 PISA-2 Testinde Yer Alan Sorulara Ait Bilgiler

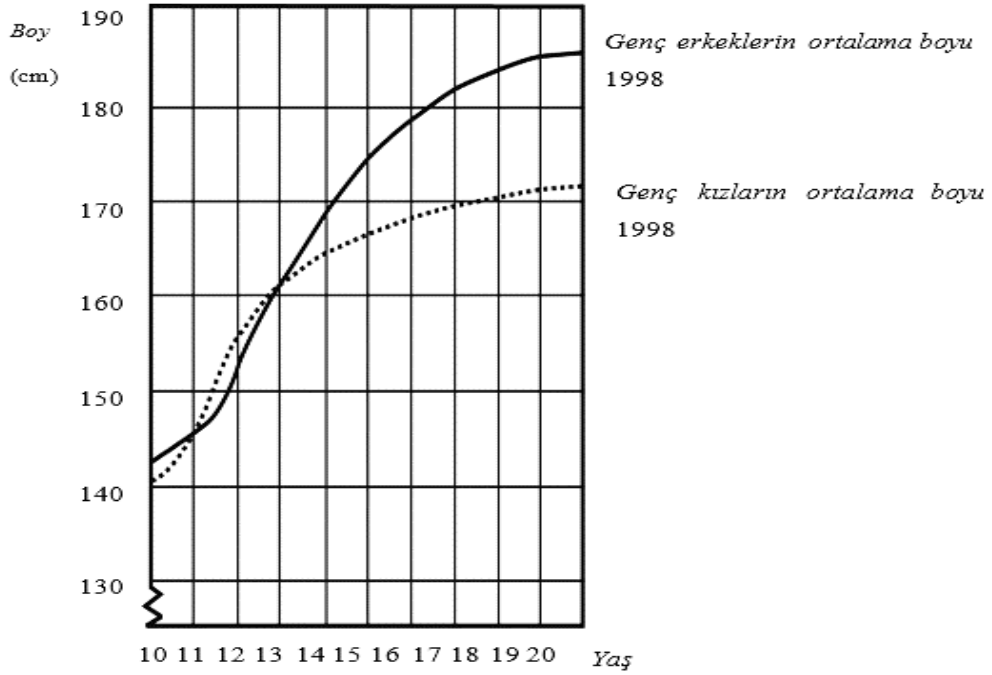
Soru Adı	Düzen i	İçerik	Yıl
Damlama Oranı 3	0	Değişim ve İlişkiler	2012
Büyüme 2	1	Değişim ve İlişkiler	2003
Yarış Arabasının Hızı 4	2	Değişim ve İlişkiler	2000
İnternette Sohbet	3	Değişim ve İlişkiler	2003

Büyüme 2, Yarış Arabasının Hızı 4 ve İnternette Sohbet sorularına ait matematiksel muhakeme düzeyleri sırasıyla verilmiştir:

BÜYÜME 2

YENİ KUŞAK GENÇLERİN BOYU DAHA UZUN OLUYOR

1998 yılında, Hollanda'daki hem genç erkeklerin hem de genç kızların ortalama boyları aşağıdaki grafikte gösterilmiştir.



12 yaşından sonra ortalama olarak kızların büyüme hızlarındaki yavaşlamayı grafiğin nasıl gösterdiğini açıklayınız.

Büyüme sorusunda genç erkeklerin ve genç kızların yaşlarına bağlı ortalama boy uzunluklarını gösteren grafikler verilip genç kızların 12 yaş sonrası büyüme hızlarındaki yavaşlamanın grafikten nasıl anlaşılacağı sorulmaktadır. İlk olarak soruda istenene bağlı olarak “O zaman genç kızlara ait grafik ele alınmalıdır.” şeklinde doğrudan çıkarım yaparak genç kızlara ait grafik seçilmeli ardından seçilen grafikte genç kızların 12 yaş öncesinde ve sonrasında büyüme hızlarındaki değişim için grafikteki matematiksel iki varlık (yaş ve boy uzunluğu) eğim ile ilişkilendirilerek “Boy uzunluğu ve yaşa dair değişim oranı büyüme hızını vereceğinden grafikteki eğimin değişimiyle büyümedeki azalma ifade edilebilir.” çıkarımı yapılmalıdır. Eğimin değişimi ise iki farklı yolla ifade edilebilir: Ya 12 yaş sonrası için grafikte eğrinin dikliğinin veya eğim derecesinin (12

yaşından önce ve sonra, x eksenini esas alarak eğrinin açılarını hesaplayarak) daha da azalması ile 12 yaş sonrası büyümede yavaşlama olduğu söylenir. Ya da gerçek büyümeyi kapalı bir şekilde karşılaştırarak 12 yaş öncesi ve sonrası büyüme hızları belirlenmeli ve nicel sonuçları kıyaslanmalıdır. Bu durumda

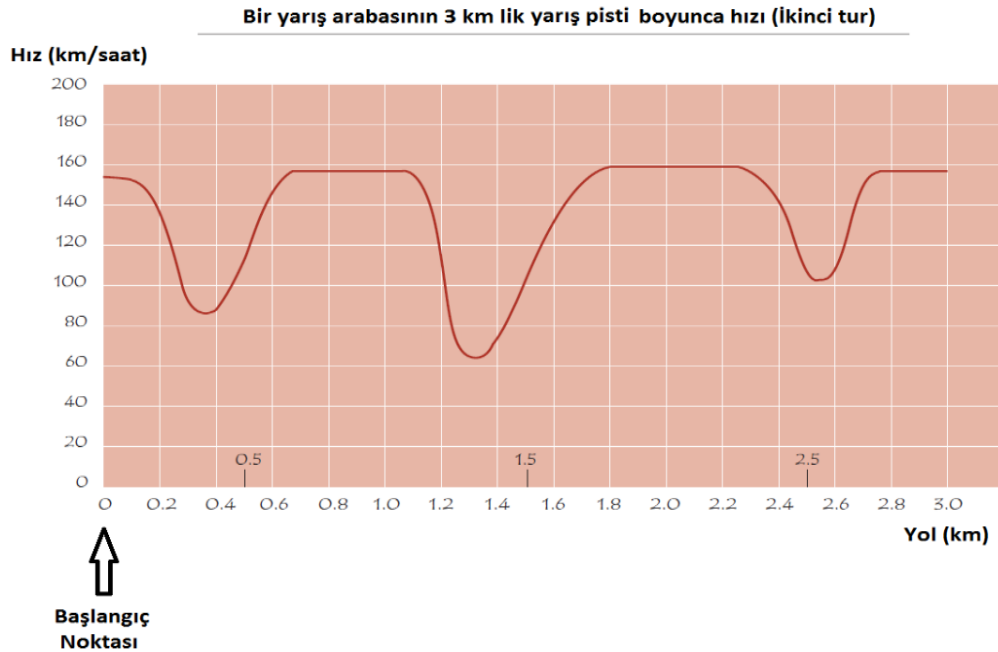
11-12 yaş arasında genç kızların büyüme hızı yaklaşık olarak $\frac{155-145}{12-11} = 10$ cm/yıl;

12-13 yaş arasında genç kızların büyüme hızı yaklaşık olarak $\frac{161-157}{13-12} = 4$ cm/yıl;

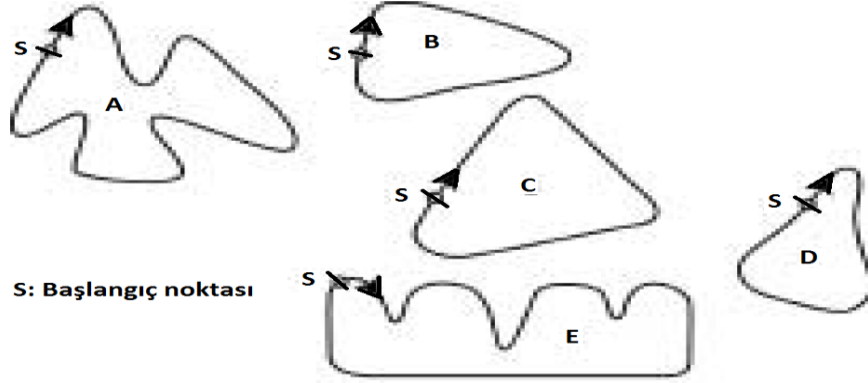
şeklinde bulunan nicel sonuçlar kıyaslanıp 4, 10'dan daha küçük olduğu için 12 yaş sonrası büyüme hızında yavaşlamayı gösterebilir. Soruda verilen grafiklerinde biri hakkında muhakeme yoluyla iki matematiksel varlık (yaş ve boy uzunluğu) kullanılarak büyüme hızının değişimine dair bir çıkarım yapılır. Bu, matematiksel muhakeme için düzey 1 tanımındaki “Basit matematiksel varlıkları içeren bir problemin bir boyutunda muhakeme adımlarını kullanarak çıkarımlar yapma” ile uyumlu olduğundan matematiksel muhakeme düzeyi 1 olarak belirlenmiştir.

Soru 3: YARIŞ ARABASININ HIZI

Bu grafik, düz 3 kilometrelik bir pistte ikinci turunu atan bir yarış arabasının hızının nasıl değiştiğini göstermektedir.



Aşağıda 5 yarış pisti görülmektedir. Yukarıda gösterilen hız grafiğini oluşturmak için yarış arabası bu pistlerden hangisinde sürülmüştür?



Soruda ilk olarak bazı yerlerde araba hızının azaldığı ve azalmaların nerelerde olduğunu tespit edilmelidir. Bu durumda 0.5, 1.5 ve 2.5 km için hızın azalıp tekrar arttığı görülecektir. Bunun nedeni olarak örtük bir şekilde de olsa gerçek yaşamdan pistin yokuş veya kavisli olma ihtimaline dair çıkarım yapılabilir. Ancak soruda pistin düz olduğu bilgisinin verilmesi nedeniyle “*Pist kavislidir.*” çıkarımı yapılır. Ardından hızın azaldığı noktaların kavis nedeniyle olma durumu ve bu hızın azalma sayısı ile kavis sayısının eşit sayıda olma durumuna dair aşağıdaki çıkarımlar elde edilir.

“Grafikte üç kez hız azaldığından pistte toplam üç kavis vardır.”

“Pistteki bu kavisler başlangıç noktasından(S'den) hızın azaldığı noktalar kadar uzaklıktadır. Yani başlangıç noktasından(S'den) 0.5, 1.5 ve 2.5 km uzaklıkta kavisler vardır.”

Ayrıca ikinci tur için verilen hız grafiğinde yol bitimi ile başlangıçtaki hız miktarları yakın olduğundan ve şıklardaki pist şekilleri de göz önüne alındığında yolun kapalı bir şekil temsil edeceği anlaşılmalıdır. Bu nedenle

“Üç kavise sahip olan kapalı şekilde bir pist vardır.” çıkarımı yapılır.

Verilen şıklardaki pistlere bakınca A ve E pistinde üçten fazla kavis olduğu için pistlerin uygun olmadığı çıkarımı yapılır. D pisti ise üç kavisin haricinde bir hafif kavis barındırmaktadır. Ayrıca ilk kavis 0.5 km uzakta düşünülse dahi son kavis 2.5 km de olduğundan o da S noktasına eşit uzunlukta olmalıdır. Oysa bu durum hem D hem de C için geçerli olmadığından geriye B seçeneği kalacaktır. B seçeneği incelendiğinde ise ilk ve son kavisin yerleri sağlanır. İkinci kavis 1.5 km uzaklıkta olacağından ve tüm pist 3 km olduğundan ortalara denk gelmelidir. Bu durumda B seçeneği tüm kavis yerlerini sağlayacağından cevap B pisti olarak belirlenmelidir.

Bu soruda hızların azalma sayısı, kavis sayısı, pist uzunluğu ve hız azalma noktaları birleştirilerek çıkarımlar yapılmalı ve ardından şıklar göz önüne alınarak yeni bir çıkarım oluşturulmalıdır. Matematiksel muhakeme için 2. seviye tanımındaki “Problemin farklı boyutlarındaki bilgi parçalarını birleştirilerek çıkarımlar yapıp yeni bir çıkarım yapma”ya karşılık geldiğinden matematiksel muhakeme düzeyi 2. düzey olarak belirlenmiştir.

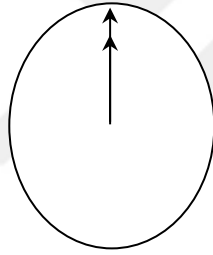
Soru 3:

İNTERNETTE SOHBET

Mark (Avustralya, Sidney’den) ve Hans (Almanya, Berlin’den) internet ortamında “çat” (chat) aracılığıyla haberleşiyorlar. ‘Sohbet’ edebilmeleri için internete aynı saatte bağlanmaları gerekmektedir.

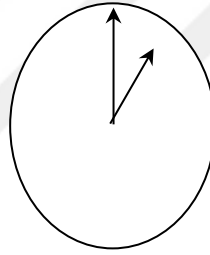
‘Sohbet edebilmek’ için uygun bir zaman bulabilmek amacıyla, Mark dünya saat çizelgesine bakarak aşağıdakileri öğrendi:

Mark ve Hans okula gitmek zorunda oldukları için yerel saatleriyle 9:00 ve 16:30



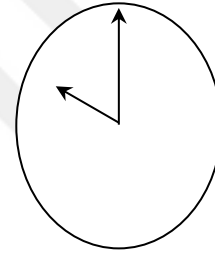
Greenwich 24:00

(Gece yarısı)



Berlin 1:00

(Sabaha karşı)



Sidney 10:00

(Sabah)

arasında sohbet edemiyorlar. Ayrıca, yerel saatleriyle 23:00’ten 07:00’ye kadar uyuyor olacakları için sohbet edemiyorlar.

Mark ve Hans’ın sohbet edebilmeleri için hangi saatler uygun olacaktır? Tabloya yerel saatleri yazınız.

Yer	Saatler
Sidney	
Berlin	

Soruda ilk olarak Berlin ve Sidney saatleri dikkate alınarak $10:00 - 1:00 = 9:00$ Sidney’in Berlin’den 9 saat ileride olduğu çıkarımı yapılmalıdır. Her ikisi de kendi yerel saatlerindeki 9:00-16:30 ile 23:00- 07:00 aralıklarında okula gidiş ve uyku zamanları olacağından sohbet saatlerinin bu saatler dışında olması gerektiğine dair çıkarım

yapılmalıdır. Yani “Her ikisi için de kendi yerel saatlerinde 07:00-9:00 ile 16:30-23:00 arası görüşmeye uygundur.” çıkarımı elde edilir.

Ancak Sidney, Berlin’den 9 saat ileride olacağından aynı anda kendi yerel saatlerindeki uygunlukları göz önüne alınmalıdır. Bu nedenle sadece biri için uygun saatler belirlenip daha sonra diğerinin saatleri 9 saatlik farka göre belirlenmeli ve sohbet için uygun olup olmadığı kontrol edilmelidir. Eğer Berlin’de yaşayan Hans’ın uygun konuşma saatleri referans olarak ele alınıp 9 saat eklenirse Sidney’deki yerel saatin elde edileceği çıkarımı yapılır. Böylece Berlin’de yerel saat 07:00-09:00 ile 16:30-23:00 arası iken Sidney’de saat 16:00-18:00 ve 1:30-8:00 olur. Ancak 16:00-18:00 arası için Mark okuldan geleceğinden 16:30-18:00 arası Mark için uygun olacaktır. 1:30-07:00 arası için Mark uykuda olacağından 7:00-08:00 uygun olacaktır. Bu durumda Sidney’e göre saat aralığı 22:00-23:00 olacaktır. Böylece

Yer	Saatler
Sidney	16:30-18:00
Berlin	7:30-09:00

veya

Yer	Saatler
Sidney	07:00-08:00
Berlin	22:00-23:00

şeklinde sohbet saatleri belirlenmelidir. Bu durumda soruda ilk olarak iki şehir arasındaki yerel saat farkına dair basit bir çıkarım ve “Okula gidiş aralığını ve uyku saatlerini dışında sohbet edilebilir.” çıkarımı yapılır. Ardından birine göre belirlenen sohbet saati ve diğerinde denk gelen saatler ile bağlantı kurularak kendi yerel saatlerinde uyku veya okul saati olup olmayacağı kontrol edilmelidir. Yani soruda birden fazla öge (saat farkı, uyku saatleri, okul saatleri) göz önüne alınarak birden fazla çıkarım yapıp ilişkilendirme yapılmalı ve belirlenen çıkarımlar kontrol edilip doğrulanmalı ve değerlendirilmelidir. Bu nedenle sorunun matematiksel muhakeme düzeyi 3. düzeyin tanımındaki “İlişkilendirilmiş çıkarım zincirleri kullanma ya da oluşturma; ya da karmaşık çıkarımları kontrol etme ya da doğrulama; ya da sürdürülebilir ve güdümlü bir yolla, karmaşık bilginin birden çok ögesini kullanarak ve birleştirerek kararları ve çıkarımları

sentezleme ve değerlendirme.” ifadeyle uyumlu olduğundan matematiksel muhakeme 3. düzey olarak belirlenmiştir.

Öğretim sonucunda uygulanan PISA-3 testi ise 2003, 2006 ve 2012 yıllarındaki PISA matematik testlerinin değişim ve ilişkiler içeriğine ait sorularından seçilmiştir. *Fuji Dağı* sorusu Turner ve arkadaşları (2015); *Arabayla Gezinti 2*, *Bisiklet Sürücüsü Hale 2* ile *En İyi Araba 2* sorularının matematiksel muhakeme düzeyleri ise Kızıltoprak (2017) tarafından daha önceki çalışmalarda belirlenmiştir. PISA-3 testindeki sorulara ait ad, muhakeme düzeyi, içerik ve yıl bilgisi Tablo 3.4 ile verilmiştir.

Tablo 3.4 PISA-3 Testinde Yer Alan Sorulara Ait Bilgiler

Soru Sırası	Soru Adı	Muhakeme Düzeyi	İçerik	Yıl
1	Fuji Dağına Tırmanış 1	0	Değişim ve İlişkiler	2012
2	Arabayla Gezinti 2	1	Değişim ve İlişkiler	2006
3	Bisiklet Sürücüsü Hale 2	2	Değişim ve İlişkiler	2012
4	En İyi Araba 2	3	Değişim ve İlişkiler	2003

Araştırmada kullanılan PISA-1, PISA-2 ve PISA-3 testler *EKLER* kısmında EK-5 olarak verilmiştir.

3.1.4.2. Öğretim etkinlikleri

Bu araştırmada 11. sınıf öğrencilerinin STEM’e dayalı öğrenme ortamlarında matematiksel muhakeme gelişimleri inceleneceğinden, STEM’e dayalı etkinliklerin yer aldığı öğretim ortamları tasarlanmıştır.

STEM etkinlikleri öğrenciye istenilen kazanımı verebilecek, grupla iş birliği içerisinde çalışmaya imkan tanıyan bir ortam sunmaktadır. Öğrenciler kendi fikirlerini ayrı ayrı paylaşmanın yanı sıra grup kararı da alabilmektedir. Etkinlikte yer alan problem durumu gerçek yaşama dayalı olarak ele alınmıştır. Bu anlamda öğrenciler aktif katılım sağlayarak çözüm aşamasında sosyal çevresini de dikkate almaktadır. Bilginin yapılanması sürecinde matematiksel muhakeme hem gerçek yaşamdan matematiğe hem

de matematikten gerçek yaşama doğru yol alacağından çift yönlü izleme şansı elde edilebilmektedir.

STEM etkinliklerinin tasarlanması sırasında Caner (2021)'de yer alan STEM'in derse entegre özellikleri dikkate alınmış ve STEM etkinliklerinde her bir özelliğin sağlanmasına özen gösterilmiştir.

Bağlam ilgi çekici ve motive edici özellikte olmalıdır.

Bağlamın ilgi çekici ve motive edici özelliği olması adına öğrencilerin yaşadığı yere, kültüre, günlük hayatta karşılaştıkları veya karşılaşılabilecekleri durumlara dayalı bağlamlar oluşturulmuştur. STEM etkinliklerindeki bağlamlar sırasıyla güneş panellerinin konumlandırılması, çevreye dost aracın su deposunun şekli, TEKNOFEST hazırlık aşamasında hangi yarışmacının video kaydını seslendirme, uzay teleskoplarının takip yörüngesi, arıların çiçek bulma ve kovanlarına dönmesine dayalı oyun tasarımı, depreme dayanıklı kolon tasarımı şeklinde verilmiştir.

Teknolojiyle iç içe mühendislik tasarım veya tersine mühendislik tasarımı içerebilir.

Tasarlanan STEM etkinliklerin çözüm süreçlerinde mühendislik tasarım süreçleri ve tersine mühendislik tasarım süreçleri vardır. *Arıların Çiçek Bulma Oyunu* ve *Depreme Dayanıklı Kolonlar* adlı STEM etkinliklerinin çözümü tersine mühendislik süreci içerirken geriye alan etkinliklerin çözümü mühendislik tasarım sürecini içermektedir. *Arıların Çiçek Bulma Oyunu* adlı etkinliğin çözümünde beklenen tersine mühendislik süreci etkinlik örneğinde verilmiştir (Bkz. s. 50).

Önemli bir özellik olarak yeniden tasarlamaya ve hatalardan öğrenmeye fırsat tanınmalıdır.

STEM etkinliklerin çözüm aşamasında elde edilen ürünlere yönelik yeniden tasarlama fırsatı tanınmış, olası yeni çözümlerin denenmesi ve her defasında geliştirilebilmesi araştırmacı tarafından desteklenmiştir.

Öğretimler öğrenci merkezli olmalıdır.

Tüm STEM etkinlikleri öğrencilerin seviyelerine uygun olarak hazırlanmıştır. Katılımcılar her bir etkinliğin çözümünde aktif olarak yer almış ve grupça çözüme ulaşmışlardır. Araştırmacı katılımcıların her türlü fikirlerini değiştirmelerine ya da geliştirmelerine olanak tanımıştır. Bu anlamda tüm etkinlikler öğrenci merkezlidir.

Öğrencilerin iletişim içinde olması ve takım çalışması yapması gereklidir.

Tasarlanan etkinlik sürecinde öğrenciler grup halinde iş birliğine dayalı olarak çözüm aramışlardır. Çözümü gerçekleştirmeden önce birbirlerine söz hakkı tanımış ve birbirlerinin fikirlerini değerlendirmişlerdir. Daha iyi bir çözüm bulunması durumunda işbirliği içinde istenilen çözümü uygulama kararı almış ve çözümü çözüm sürecinde uygulamışlardır.

Problem durumu disiplinler arası olmalıdır. Öğretim programına dayalı olarak fen ve matematik hedeflerine yer verilmelidir.

Her bir etkinlik tasarımı en az iki disiplinin bir araya getirilmesi yoluyla çözüme kavuşacağından disiplinler arası kazanım taşımaktadır. Ayrıca ele alınan kazanımlar öğretim programına uygun olarak belirlenmiş ve bu kazanımlar etkinliklerde tek tek EK-2 olarak belirtilmiştir (Bkz. EKLER).

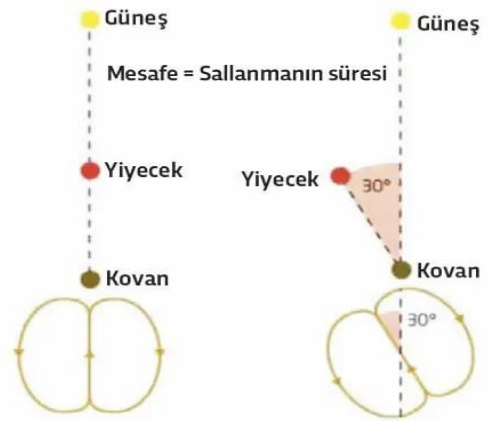
STEM etkinliklerine ait genel ilkelere dayalı olarak tasarlanan “Arıların Çiçek Bulma Oyunu” etkinliği ilkelere göre detaylı olarak verilmiştir.

Etkinlik örneği

ARILARIN ÇİÇEK BULMA OYUNU

Bilim insanlarından Profesör Karl von Frisch 1973 yılında arıların muhteşem özelliklerinden biri olan haberleşmeyi ele alıp “sallanma dansı” adı verilen bir yolla haberleştiklerini açığa çıkarmış ve bu sayede Nobel Fizyoloji Ödülü’nü kazanmıştır.

Sallanma dansı kovanlarına en kaliteli bal özünü bulan arıların kovana gelip yaptıkları bir danstır. Böylece zaman ve enerji kaybı engellenmiş olacaktır. Dansçı arı kendisini besin kaynağı yönünde Güneş’e dik olarak konumlandırır ve dikey şeklinde bal peteği üzerinde dans eder. Yiyeceğin konumunu Güneş’e göre gösterir. Güneş yönünde ise bal peteğinden yukarı çıkar, ters yönde ise aşağı iner. Diğer yönlerde ise Güneş ve kovanla yiyecek yönünde bir çizgi belirleyip ardından titreşimlerle sekiz şekli çizer. Kaynağın ne kadar uzakta olduğunu ise



çizgideki sallanma hareketi sayısı belirler. Her bir saniyelik sallanması 1 km uzakta olduğunu söyler.

Arıların sallanma dansına oldukça ilgi duyan Betül “Arıların Çiçek Bulma Oyunu”nu tasarlamaya karar vermiştir. Bunun için güneş, kovan, arı ve çiçek resimlerinin olduğu bir oyun tablası hazırlamıştır. Bu oyun iki kişilik olacak ve soruların hepsini en kısa sürede bilen oyunu kazanacaktır. Toplamda üç soru olacaktır. Bu sorular ve cevapları için aşağıda verilen içerikte bir yönerge hazırlanacaktır:

** Bir arının yaptığı dansa bakarak bilinmeyen bir çiçeğin yerini bulma*

** Kovandan uzaklığı ve Güneş’e göre yönü belli bir çiçeğin yerini dansla anlatma*

** Eski kovanda yapılan sallanma dansı ile yerleri bilinen iki çiçekten birine yeni kovan yapılması kararlaştırılsın. Bu durumda diğer çiçeğin yeri için yeni kovanda yapılacak sallanma dansında kaç sallanma yapılacağını bulma.*

Haydi hep beraber bunlara dayanarak Betül’e “Arıların Çiçek Bulma Oyunu” yapımında matematiksel dayanaklar hazırlayıp yardım edelim.

Bağlam olarak günlük hayattan bilinen arıların, yön bulma stratejisine yer verilmiştir. Bu anlamda etkinlik katılımcılar için arılar anlamında bilindik, yön bulma stratejileri anlamında ise ilgi çekicidir. Katılımcılardan bu stratejiye uygun bir oyunun yönergesiyle birlikte hazırlanması istenmektedir. Bu strateji ele alınırken biyoloji, matematik ve mühendislik tasarım süreçlerine dair kazanımlar ele alınacaktır. Biyolojide bir komünitenin yapısı ele alınıp türler arası rekabete dair kazanımlar elde edilebilecektir. Oyunun yapılabilmesi için ilk önce biyolojik olarak arıların yön bulma stratejisi matematiksel bir yolla ele alınmalı ve anlaşılmalı, ardından ise bunlara dayalı sürdürülebilir bir yön bulma stratejisi bulunmalıdır. Bu aşamada arıların çiçeklere giderken veya dönerken nasıl yön bulduğunu anlamak için etkinlik bağlamındaki bilgiler ele alınmalı ve gerçek yaşamda arıların uyguladığı bu strateji tersine mühendislik sürecine uygun şekilde düşünülmelidir. Tersine mühendislik sürecinde arıların yön bulması stratejisinin keşfi için her bir adım tek tek ele alınmalı ve titizlikle düşünülmelidir. Elde edilen yol bulma stratejisinden sonra istenen yönergeye dayalı bir oyun hazırlanıp doğruluğu kontrol edilmelidir. Eğer belirlenen strateji uygun değilse yeni bir matematiksel çözüm yolu kullanılmalıdır. Bu anlamda çözüm süreci mühendislik tasarımına ve yeniden tasarım sürecine uygun planlanmıştır. Tüm süreç boyunca

öğrenciler aktif olarak iş birliği içerisinde görev almıştır. Ayrıca etkinlik öğretim programına dayalı biyoloji, matematik ve tersine mühendislik süreci ile ilgili kazanımları içerdiğinden disiplinler arası bir ilişki vardır. Tüm bunlardan dolayı *Arıların Çiçek Bulma Oyunu* adlı etkinlik bir STEM etkinliği tasarımına uygun yapıdadır. Araştırma sürecinde hazırlanan her bir etkinlik STEM etkinliği tasarımına uygun yapıda olmakla beraber araştırmanın amacına da uygun olmalıdır. Bu nedenle her STEM etkinliğinin çözüm sürecine yönelik katılımcılardan beklenen eylemler etkinlik öncesi planlı bir şekilde ele alınmıştır. Her aşamada öğrencinin gösterebileceği olası eylemler göz önünde bulundurularak etkinlikte gerçekleşmesi beklenen matematiksel muhakeme eylemleri etkinlik öncesi tek tek belirlenmiştir. Her etkinliğin çözüm süreci farklı olacağından çözümde beklenen matematiksel muhakeme eylemleri de farklıdır. *Arıların Çiçek Bulma Oyunu* adlı STEM etkinliğinde gerçekleşmesi beklenen matematiksel muhakeme eylemleri PISA 2021 Matematik Okuryazarlığı çerçevesinde verilen matematiksel muhakeme eylemleri sırasındaki numaralara göre etkinliğe bağlı olarak Tablo 3.5 ile verilmiştir.

Tablo 3.5 Arıların Çiçek Bulma Oyunu etkinliğinde gerçekleşmesi beklenen matematiksel muhakeme eylemleri

Etkinlikte Gerçekleşmesi Beklenen Matematiksel Muhakeme Eylemleri
(4) Oyuna ait kavramları matematiksel kavramlara uygun olarak (açı, uzunluk vb.) düzenler, ifade eder ve uygun varsayımlarda bulunmak da dahil olmak üzere oyun problemini farklı bir şekilde temsil eder (oyunu, üçgenin açılarını veya kenar uzunluklarını bulma olarak sözel veya görsel şekilde temsil edebilir)
(5) Oyun tasarımındaki iki çiçek arasındaki mesafeyi hesaplarken uygun matematiksel kavramları, tanımları, kuralları ve algoritmaları (Kosinüs teoremi, yükseklik, Pisagor teoremi gibi) kullanır
(6) Gerçek yaşamda arılara ait yön bulma tekniğini matematiksel olarak tanımlar ve temsillerle gösterip gerekçelerine göre açıklar, savunur (İki kenarı ve aralarındaki açısı belli olan üçgende bilinmeyen kenarı bulma veya Kosinüs teoremi olarak ifade etme, savunma)

- (7) Çiçeklerin yönünü ve peteğe olan açısını belirlemede kullanılan süreçler için bir gerekçeyi açıklar veya savunur
- (8) Oyuna ait matematiksel modelin sınırlarını belirler (sınır kenarların negatif olamayacağı, çiçeğin konumuna göre açının geniş veya dar olarak temsil durumu)
- (9) Tasarladıkları oyuna ait matematiksel tanımları, kuralları anlamanın yanı sıra algoritmaları ve hesaplamalı muhakemeyi anlar
- (10) Oyuna ait sunduğu her temsil için bir gerekçe sağlar
- (11) Oyundaki iki çiçek arasındaki mesafede kullanılan matematiksel modeli belirlemek için kullanılan süreçler ve prosedürler için bir gerekçe sağlar (Kosinüs teoremini Pisagor teoremi yardımıyla gerekçe sağlar)
- (12) Oyundaki matematiksel gerekçeler üzerinde düşünmek, matematiksel sonucu açıklar ve gerekçelendirir (açının dar veya geniş olma durumu, kenar uzunluğu)
- (14) Oyunda elde ettiği modelin anlamını açıklamak için sonucu gerçek dünya bağlamına geri döndürür
- (15) Arıların yön bulmadaki bağlama özgü dili ile onu matematiksel olarak temsil etmek için gereken sembolik ve biçimsel dil arasındaki ilişkileri açıklar
- (16) Oyundaki modele ait algoritmanın nasıl çalıştığını ve algoritmalarındaki hataları tespit edip düzeltmek için matematiksel gerekçeler üzerinde düşünür, matematiksel sonucu açıklar ve doğrular

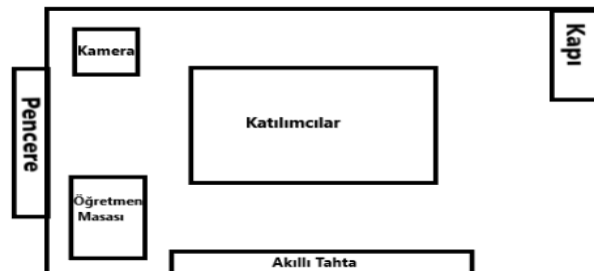
Ayrıca geriye kalan diğer tüm STEM etkinliklerin çözümünde beklenen matematiksel muhakeme eylemleri tek tek belirlenmiş ve STEM etkinliklerine dair kazanımlarla birlikte EK-2 olarak *EKLER* kısmında verilmiştir.

3.1.4.3. Sınıf ortamı

Bu araştırma grup çalışmasına uygun bir şekilde tasarlanmıştır. PISA-1 testi sonrasında yapılan görüşme sonucunda elde edilen grup temsilcilerinden oluşan katılımcılar tek bir grup olarak araştırmada yer edinmiştir. Burada tüm katılımcıların tek bir grup olarak ele alınmasının sebebi gerçek yaşama dayalı bir probleme işbirliği içinde ortak tek bir çözüm bulabilmeleri ve tüm yönleriyle çözümü ele alıp birbirine destek olabilmeleridir. Katılımcılar belirlenirken gönüllülüğün ve görüşme sonrası oluşan her

bir gruptan en az iki temsilci olmasının yanı sıra katılımcıların birbiriyle olan ilişkileri gözlemlenmiştir. Katılımcıların her birine ayrı ayrı belirlenen katılımcılarla olan iletişimlerinin nasıl olduğu, anlaşılıp anlaşamadıkları, birlikte ortak bir çalışma yapıp yapamayacakları da sorulmuştur. Aynı sınıftan olan katılımcıların işbirliği içinde araştırmada yer edinebileceklerini söylemeleri üzerine tüm katılımcıların tek bir grup olarak araştırmaya katılmaları kararlaştırılmıştır. Katılımcılara öğretim etkinliklerinin birer STEM etkinliği olduğu bildirilip gerçek yaşama dayalı problem karşısında ne olursa olsun birbirlerinin sözünü kesmeden, dinleyerek doğru iletişim yoluyla katılmaları ve her defasında mümkünse gerekçeli olarak açıklamalarda bulunmaları istenmiştir. Ayrıca öğretim deneylerinde her bir öğrenciye ait çözüm kâğıdı ve gruba ait ortak çözüm kâğıdı verilmiştir. Katılımcılardan *EKLER* kısmında EK-4 olarak verilen grup çözüm kâğıdında yer alan sorulardan başlayarak tüm çözüm aşamalarını hem kendilerine verilen kağıtlara hem de grup çözüm kâğıdına yazmaları istenmiştir. Bu nedenle her etkinlik öncesi grup çözüm kâğıdına cevabı yazmak için gönüllü biri belirlenmiştir. Her katılımcı soru çözümüne ait her bir aşamada kendi cevabını yazdıktan sonra hep birlikte belirlenen sınırlılıklar, varsayımlar, olası çözümler ve benzeri durumlar belirlenen gönüllü tarafından ortak çözüm kâğıdına yazılmıştır. Her katılımcının kendi düşüncesini özgürce ifade etmesine fırsat verilmiştir. Bu esnada araştırmacı günlüğüne notlar alınmış, etkinlikte gerekli olabilecek malzemelerin teminini sağlanmış ve öğretim öncesi katılımcılara vermiştir. Ayrıca öğretimlerde kullanılması durumunda akıllı tahtayı ve ilgili içerikleri hazır bulundurmıştır. Her öğretim sonunda öğretimlerin ön analizi yapılmış ve kimlerin fikirlerini söylemedikleri belirlenerek sıradaki etkinliğin her bir aşamasında etkin olması için yönlendirmelerde bulunulmuştur. Böylece her bir katılımcının matematiksel muhakemesinin incelenmesinin önü açılmıştır. Öğretim sonunda her bir katılımcıya ait kağıtlar ve grup çözüm kâğıdı toplanmıştır. Öğretim sırasında sınıf ortamı Şekil 3.1 ile verilmiştir.

Şekil 3.1 Öğretim esnasında sınıf ortamı



3.1.4.4. Klinik görüşmeler

Bu araştırmada yedi katılımcı ile ilki öğretimlerin öncesinde, ikincisi öğretimlerin ortasında ve sonuncusu öğretim bitiminde olmak üzere toplam üç klinik görüşme yapılmıştır. Klinik görüşmelerde her bir katılımcıya araştırma sürecinde yapılan PISA-1, PISA-2 ve PISA-3 testlerine yönelik değerlendirme soruları sorulmuştur. Tüm klinik görüşmelerde katılımcıların her biri ile birebir görüşme yapılmıştır. Bir katılımcı ile görüşmeler ortalama olarak 25-45 dk sürmüştür. Görüşmeler video kaydına alınmış ve katılımcıların matematiksel muhakeme düzeyleri tek tek incelenmiştir. Soru çözümlerini tekrar etme veya farklı şekilde ele alabilmeleri için gerekli kâğıt ve kalem görüşme öncesinde verilmiştir.

Ön görüşme, PISA-1 testinden sonra yapılmıştır. Bu görüşmede iki temel amaç vardır. İlki katılımcıların matematiksel muhakeme düzeylerinin tespitine yönelik verilen cevapları teyit etmek ikincisi ise bu cevapları neden ve nasıl yaptıklarını tekrar tekrar sorgulayarak katılımcıların matematiksel muhakeme düzeylerini tüm yönleriyle açığa çıkarmaktır. Bu anlamda her bir katılımcıya PISA-1 testine verdikleri cevaplara yönelik sorular sorulmuştur. Bazı işlemleri tekrar yapmaları istenmiş ve cevapları teyit edilmiştir. Cevaplar teyit edildikten sonra soruların cevaplarına yönelik neden ve nasıl sorularıyla katılımcıların matematiksel muhakeme düzeylerine yönelik daha detaylı bilgiler edinilmiştir. PISA-1 testinde yer alan tüm soruların yanıtları tekrar teyit edildikten sonra *Gazete Satma 1* sorusunda “Zed Yıldız Gazetesi değil de Zed Günlük Gazetesi sorulsaydı soruyu nasıl yapardınız?” diyerek benzeri bir muhakeme eylemini tekrar gerçekleştirip gerçekleştiremeyeceği ya da *Bisiklet Sürücüsü Hale 1* sorusu için “Neden gidiş ve dönüş hızlarının aynı olduğunu söylüyorsun?” sorusuyla oluşturacağı her bir gerekçe ayrı ayrı belirlenmiştir. Tüm katılımcılarla birebir görüşme yapıldıktan sonra üç farklı STEM etkinliği gerçekleştirilmiş ve ardından PISA-2 testi yapılmıştır. PISA-2 testi sonrası katılımcılarla tekrar birebir görüşme yapılmıştır.

İkinci görüşmede de ilk olarak PISA-2 testine verdikleri cevaplar teyit edilmiş ardından muhakeme düzeylerine yönelik daha detaylı bilgiler elde edilmeye çalışılmıştır. Örneğin tüm soru cevapları teyit edildikten sonra *Yarış Arabası Pisti* sorusuna yönelik sorulan “Araba pisti ile hız grafiği arasında nasıl bir ilişki kurdun?”, “B ve C şıkları arasında kaldığını söylemiştin. Neden B’yi seçtin?” gibi sorularla muhakeme düzeyleri derinlemesine incelenmiştir.

İkinci görüşme bitince üç STEM etkinliği daha gerçekleştirilmiş ardından PISA-3 testi yapılmıştır. PISA-3 testi sonunda her katılımcıyla birebir son görüşme yapılmıştır. Son görüşmede de teste yönelik cevaplar teyit edilip ardından muhakeme düzeylerine yönelik derinlemesine bilgiler elde edilmeye çalışılmıştır. Teyitler alındıktan sonra *Fuji Dağı'na Tırmanış* için sorulan “Ortalama kişi sayısını nasıl hesapladın?” ya da *En İyi Araba* sorusu için sorulan “Neden katsayı olarak bunu belirledin?” gibi sorularla tüm süreç sonundaki matematiksel muhakeme düzeyleri detaylandırılmaya çalışılmıştır. Klinik görüşme örneği *EKLER* kısmında EK-6 olarak verilmiştir.

3.1.4.5. Video kayıtları, öğrenci çalışma kağıtları ve grup çözüm kağıtları

11. sınıf matematik dersi öğretim programı dikkate alınarak STEM etkinlikleri şeklinde hazırlanan öğretim deneyleri uygulanırken öğrencilere ayrı ayrı kağıtların yanı sıra ortak bir çözüm belirleyebilmeleri için grup çözüm kağıdı verilmiştir. Her öğrencinin etkinlik çözümüne yönelik düşüncelerini sırasıyla hem sesli olarak ifade etmesi hem de kendilerine verilen beyaz kağıda yazması istenmiştir. Her katılımcı kendi kağıdına adını yazdıktan sonra tüm matematiksel muhakemelerine ait eylemlerin toplanabilmesi için etkinlik çözümünde olası yanlışlara karşın mümkün olduğunca silgi kullanmaması değiştirilmek istenen yazının üzerinin bir kez çizilmesi istenmiştir. Etkinlik sürecinde her katılımcı fikrini söyledikten sonra grubun aldığı ortak fikirler etkinlik öncesi belirlenen yazman tarafından grup çözüm kağıdına yazılmıştır. Grup çözüm kağıdı genel olarak problem çözüm aşamalarını içeren mühendislik tasarım sürecine göre hazırlanmıştır. *EKLER* kısmında EK-4 olarak verilen çözüm kağıdı problem durumu, problemin kısıtlayıcıları, problemin nedenleri, olası çözüm önerileri, en uygun çözüm önerisi ve tasarımı, çözümün test edilmesi, çözümün değiştirilip değiştirilmeme durumu ve çözümü değerlendirmeye dayalı sorulardan oluşmaktadır. Ayrıca tüm STEM etkinlikleri ve görüşmeler video kaydına alınmıştır. Her etkinlik sonunda dökümleri yapıp sonraki etkinlik için analiz edilmiştir. Etkinlik sonlarında öğrencilerin kullandığı cevap kağıtları ile grup çözüm kağıtları da toplanmış ve tüm veriler veri analizinde kullanılmıştır.

3.1.4.6. Araştırmacı günlüğü

Araştırmacı öğretimleri gerçekleştirdiği sırada ya da sonrasında hem öğrenci eylemlerine hem öğretime dair notlar tutmuştur. Araştırmacı, günlüğünde öğretimin işleyişinde öğrencilerin grup çalışmasında gördüğü önemli hususları not almış, sonraki öğretim için gerekli olan eksiklikleri ve iyileştirmeleri belirlemiştir. Ayrıca her bir

öğrencinin matematiksel muhakeme düzeyini açığa çıkarabilecek eylemleri etkinlik öncesinde belirleyen araştırmacı bu eylemlerin etkinliğin çözüm sürecinde gerçekleşip gerçekleşmediğini not alıp sonraki etkinlik için de öğrenci bazında olası matematiksel muhakeme eylemleri belirlemede bu notları kullanmıştır.

3.1.4.7. Araştırmacının rolü

Araştırmacı bu çalışmada öğretimler öncesinde tüm STEM etkinliklerinin yazılması, PISA-1, PISA-2 ve PISA-3 testlerinin hazırlanması ve soruların matematiksel muhakeme düzeyinin tespit edilmesinde aktif rol oynamıştır. Ayrıca öğretim öncesi, ortası ve sonrasında her bir katılımcı ile birebir gerçekleştirilen klinik görüşmelerde bizzat yer almış hem soru cevaplarını teyit etmiş hem de katılımcıların matematiksel muhakeme düzeylerini derinlemesine sorgulamıştır. Öte yandan araştırmacı yaklaşık altı yılı Bilim ve Sanat Merkezi'nde olmak üzere on bir yıllık matematik öğretmenliği deneyimine sahip STEM atölyelerinde görevli doktora öğrencisidir. Doktora eğitiminde matematik okuryazarlığı, matematiksel modelleme, matematiksel düşünme ve matematik dili gibi teze yardımcı dersler almıştır. Araştırmadaki tüm STEM etkinliklerinde katılımcıların video kaydını almıştır. Öğretim sürecinde öğrencileri çözüm sürecinde aktif kılmaya çalışmış, motive etmiş, konu dışına sapmalarını engelleyici grup çözüm kağıdında yer alan sorulara yönelik yönlendirmelerde bulunmuştur. Bu yönlendirmelerde *EKLER* kısmında EK-3 olarak yer alan yönlendirme sorularını esas alarak her bir etkinlik bağlamında yönlendirmeler yapmıştır. Ardından öğretim sürecinde ve sonrasında araştırmacı günlüğü tutmuş, önceden belirlediği matematiksel muhakeme eylemlerinin gerçekleşip gerçekleşmediğini ve sonrasındaki olası öğretimler için gerekli eksiklikleri her katılımcıya ait olası matematiksel muhakeme eylemlerini belirlemiştir. Ayrıca öğretim sırasında her katılımcının tüm matematiksel muhakeme eylemlerini en az bir kez ve başkasının etkisinde kalmadan gösterebilmesini sağlayabilme adına önceden belirlediği bazı katılımcılara söz önceliği vermiştir. Bunu tam anlamıyla gerçekleştirebilmek için her etkinlik öncesi katılımcı bazında matematiksel muhakeme eylemlerinden hangilerini tam olarak yapıp yapamadığını belirlemiş ve olası soruları öğretimlere ilişkin hazırlamıştır. Böylece tüm katılımcıların matematiksel muhakeme eylemlerini en az bir kez gözlemleyebilme imkanı elde etmiştir. Ancak katılımcıları öğretim sürecinde onların çözüme ulaşmasını beklemiş çözüm sürecine dahi olmamıştır. Sadece katılımcıların çözüm kağıdındaki akışa bağlı kalıp konu dışına yönelmelerini

engellemiş tüm çözümü birbirlerinin fikirlerini dikkate alarak oluşturmaları konusunda yardım sağlamıştır.

3.1.5 Verilerin Toplanması

Öğretim sürecinde araştırmacı, katılımcıların matematiksel fikirlerini açık bir şekilde ifade etmelerine ve değerlendirmelerine olanak sağlamıştır. Etkinlikte yönlendirici sorularla katılımcıların konu kapsamı dışına çıkışını engellenmiş ve etkinliğe katılmalarını sağlamıştır. Bir yandan da etkinlik süreci çözüm kağıdında yer alan problem çözme sürecine dayalı sorulara cevap aramaları sağlanmıştır. Bu cevapların verilme esnasında kimi zaman katılımcılar serbest bırakılırken kimi zaman da belirlenen sırayla katılımcıların cevap vermeleri istenmiştir. Böylece her bir katılımcının matematiksel muhakeme eylemlerini gösterirken birbirlerinden etkilenmeleri en aza indirgenmeye çalışılmıştır. Ayrıca katılımcıların matematiksel muhakeme düzeylerinin incelenmesi amacıyla öğretim sürecinin başında, ortasında ve sonunda katılımcılarla klinik görüşmeleri bizzat araştırmacı yapmıştır.

Öğretim uygulamaları öncesinde katılımcıların matematiksel muhakeme düzeyleri hakkında detaylı bilgi sahibi olmak amacıyla esas uygulama katılımcı seçim sürecinde kullanılan PISA-1 test kapsamındaki PISA sorularına verdikleri yanıtlar üzerinden ön klinik görüşmeler gerçekleştirmiştir. Katılımcılara problem durumlarından matematiksel duruma nasıl geçiş yaptıkları, problemi nasıl çözdükleri ve buldukları sonucu nasıl yorumladıkları, günlük hayatta nasıl ele aldıkları gibi konular hakkında sorular sormuştur. Böylece araştırmanın başında her bir katılımcıya ait matematiksel muhakeme düzeyi belirlenmiştir. Ardından video kaydı eşliğinde öğretimleri gerçekleştirmiş ve araştırmacı günlüğünü tutmuştur. Öğretim ortasında PISA-2 testine yönelik orta görüşmeyi yapmış ve matematiksel muhakeme düzeylerini bir kez daha belirlemiştir. Sonra üç farklı öğretim daha yapıp bitiminde PISA-3 testini ve son görüşmeleri her bir öğrenciyle bireysel olarak yapmıştır. Böylece her bir katılımcının öğretim öncesinde, ortasında ve sonunda matematiksel muhakeme düzeyi tek tek ele alınabilmektedir. Her öğretim sonunda katılımcılara ait çalışma kağıtları toplanmıştır.

Yukarıda bütüncül olarak betimlenen araştırma sürecinin başında, ortasında ve sonunda PISA matematik okuryazarlığı testinde yayınlanan farklı düzeylerdeki matematik sorularıyla matematiksel muhakeme düzeyleri incelenmiş ve tasarlanan öğretimlerle de katılımcıların matematiksel muhakeme eylemleri bire bir incelenmiştir.

Her bir öğretim sonunda mikro analizler yapılmıştır. Mikro analizlerde uygulama öncesinde öğretimler için matematiksel muhakeme eylemlerine dayalı olarak belirlenen hipotezlerin gerçekleşip gerçekleşmediği her bir katılımcı için tek tek ele alınmıştır. Mikro analiz sonrasında sıradaki öğretim için gerekli görülen revizyonlar yapılmış ve sıradaki öğretime yönelik hipotezler yeniden belirlenmiştir. Tüm araştırma süreci kontrol altında tutularak öğretim sonralarında mikro analizler yapılmıştır. Bir eğitim öğretim yarıyılı boyunca gerçekleştirilen öğretimler ve klinik görüşmeler video kamera ile kayıt altına alınmıştır. Ayrıca bu süreç boyunca öğrencilerin çalışma kağıtları ile araştırmacı tarafından tutulan günlük kayıt altına alınmış ve sonraki öğretimlerde kullanılmak üzere verilerden de yararlanılmıştır. Araştırma sonunda makro analiz yapılmış ve elde edilen tüm verilere dayalı raporlar yazılmıştır. Veri toplama ve analiz süreci Tablo 3.6 ile verilmiştir.

Tablo 3.6 Veri Toplama ve Analiz Süreci



3.1.6 Veri Analizi

Araştırmada katılım elde edilen verilerin analizinde nitel veri analizi yöntemleri kullanılmıştır. Araştırma öncesinde PISA-1 testine ilişkin veriler toplanıp betimsel yolla analiz edilmiş ve matematiksel muhakemeye dair gerçekleştirdikleri eylemlere göre dört farklı grup belirlenmiştir. Bu grupların her birinden en az iki katılımcı olmak üzere toplamda yedi katılımcı belirlenmiştir. Ardından belirlenen katılımcılara PISA-1 testi uygulanıp test sonrası katılımcılarla birebir ön görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Ön görüşmelerden elde edilen veriler betimsel analiz yöntemiyle analiz edilerek her bir katılımcının matematiksel muhakeme düzeyi tek tek belirlenmiştir. Betimsel analizde araştırmacı, verilerine ait yorum ve çıkarımları daha önceden belirlenen kategori ya da temalara göre yapmaktadır (Patton, 2014).

Öğretim deneyi sürecinde, öğretim bölümlerine ilişkin toplanan veriler ise nitel analiz yöntemi olan tematik analiz yöntemi ile analiz edilmiştir. Tematik analizde temel amaç, toplanan verilerdeki tema ve örüntü elde etmek için verileri kodlayıp benzer koda sahip verilerin özünü bulmaktır (Glesne, 2012). Doğru şekilde yapılan tematik analiz ile kavramsal olarak güçlü bulgular elde edilebilir (Braun ve Clarke, 2006). Eğer çalışmada yorumlardan yola çıkarak keşfedilmek isteniyorsa tematik analiz iyi bir tercih sayılmaktadır. Bu yöntemle bireylerin düşünce ve kavramlarını ilişkilendirilebilir, farklı koşullarda elde edilen veriler karşılaştırılabilir (Alholjailan, 2012).

Tematik analizin yapılışındaki altı aşama şu şekildedir (Braun ve Clarke, 2006):

Verileri tanınması: İlk olarak farklı veri türlerinin hepsi bir araya getirilir. Bunlar arasında metin verileri, alan notları, kaydedilen gözlemler, fotoğraflar vb. dokümanlar olabilir. Ardından hepsi en az bir kez okunur. Başlangıçtaki kodlamalar için genel bir fikir sahibi olunur.

Başlangıçtaki kodların oluşturulması: Okunan veriler özelliklerine göre etiketlenir ve ardından teker teker tutarlı bir şekilde kodlanır. Bu kodlama sonraki aşamada yapılacak olan temalar için zemin oluşturacaktır.

Temaların aranması: Elde edilen tüm kodlar bir araya getirilerek harmanlanır ve anlamlı bir bütün oluşturacak şekilde temalar oluşturulur. Bu temaların birbiriyle ilişkileri, aralarındaki bağ göz önünde bulundurulur.

Temaların gözden geçirilmesi: Temaların elde edilmesiyle birlikte temaların çalışmaya dair anlamı doğru yansıtip yansıtmadığı ve geçerli olup olmadığı belirlenir. Uygun görülen temalar belirlenir. Bazı temalar bölünüp yeniden düzenlenecektir veya silinecektir. Bu işlemle her bir temanın nasıl elde edildiği gözlenecek şekilde anlamlı bir düzenleme yapılmak istenir.

Temaların tanımlanması: Her bir temanın nihai olarak ne olup ne olmadığının belirlenmesi, ilişkili olduğu öze tam olarak yerleştirilmesi gerekir. Bunun için en az iki kez tüm verilerin okunması istenir. Bu okuma ile elde edilen temalar ile çalışma arasındaki ilişkinin ortaya çıkarılması beklenir.

Raporlaştırılması: Analiz sürecindeki tüm temalar tanımlandıktan sonra tüm veriler kısa, tekrarsız ve tutarlı olacak şekilde ele alınıp tüm süreç detayları içerecek şekilde yazılır. Bu yazım aşamasında çalışmanın özü olabilecek en uygun şekilde ortaya konulma amaçlanır.

Bu çalışmada tematik analiz yöntemi uygulanmış ve tematik analizin uygulama aşamalarına tamamen uyulmuştur. Tüm öğretilere ait dökümler, ön, orta ve son görüşmeler, PISA-1, PISA-2 ve PISA-3 testleri, bireysel ve grup çözüm kağıtları toplanmış ve analiz öncesinde tamamı bir kez okunmuştur. Ardından araştırmanın amaçları doğrultusunda başlangıç kodları atanmıştır. Bu kodların belirlenmesinden sonra uygun temalar aranmıştır. Bulunan temalar tekrar gözden geçirilmiş ve uygun olanları seçilmiştir. Uygun olmayanları silinmiş veya bölünmüştür. En sonunda tüm temalar tekrar okunmuş ve araştırma amacıyla uygunluğu kontrol edilmiştir. Son olarak da analiz süreci tüm yönleriyle kısa ve öz olarak rapor haline getirilmiştir. Ayrıca PISA-1, PISA-2 ve PISA-3 testlerine ait veriler betimsel analiz yöntemi ile de ele alınarak katılımcılara ait matematiksel muhakeme düzeyleri her defasında tek tek belirlenmiştir.

Elde edilen verilerin analizi araştırmacı ve alanında uzman akademisyen tarafından ayrı ayrı yapılmıştır. Kodlamaların uyum oranı için Miles ve Huberman'ın (1994)

$$\text{Güvenirlilik} = \frac{\text{Görüş Birliği}}{\text{Görüş Birliği} + \text{Görüş Ayrılığı}} \times 100$$

formülü kullanılmış ve uyum oranı 0,90 olarak bulunmuştur. Uyum oranı 0,75'ten büyük olduğu için kodlamaların tutarlı olduğu söylenmektedir (Şencan, 2005). Farklı olan

kodlar için ise ortak kararlar alınmış ve kodlar karara göre belirlenmiştir. Araştırmaya ait geçerlilik ve güvenilirliğin artırılması adına tüm öğretimler, klinik görüşmeler, katılımcıların eylemleri detaylı olarak açıklanmış ve tüm veriler itina ile betimlenmiştir. Öğrencilerin yaptığı çözümlerine ait görseller ve öğretim sürecindeki alıntılar da aynen eklenmiş her bir süreç detaylı olarak açıklanmıştır.

3.1.7 Etik Bildirim

Anadolu Üniversitesi Sosyal ve Beşeri Bilimler Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu'nun 08/05/2024 tarihli ve 720913 nolu kararı ile araştırmanın gerçekleştirilmesi olumlu olarak kabul edilmiştir.



BÖLÜM 4

4 BULGULAR

Bu bölümde, araştırmadan elde edilen bulgular araştırma sürecine uygun bir şekilde verilmiştir. Araştırma sürecinde sırasıyla ön görüşme, üç farklı öğretim etkinliği, orta görüşme, üç farklı öğretim etkinliği ve son görüşme gerçekleştirilmiştir. Tüm katılımcıların bu sürece ait bulguları araştırma soruları doğrultusunda analiz edilmiş ve matematiksel muhakemeye ilişkin sunulmuştur.

4.1 Ön Görüşmeye İlişkin Bulgular

Bu bölümde PISA-1 testi ile belirlenen katılımcıların matematiksel muhakeme düzeylerini incelemek amacıyla yapılan ön görüşmeye ait bulgular sunulmuştur.

4.1.1 Grup 1'in temsilcisi olarak seçilen Fatime'nin ön görüşme bulguları

Bu bölümde Grup 1'in temsilcisi olarak seçilen Fatime adlı katılımcının PISA-1 testine dayalı gerçekleştirdiği ön görüşmeye ait matematiksel muhakeme yeterliğine ilişkin bulgular verilmiştir.

Fatime'nin ön görüşmeye ait bulguları incelendiği zaman matematiksel muhakeme yeterliğine dair hiçbir güçlük yaşamadığı görülmüştür. İlk olarak gerçek yaşama dair verilenleri ve istenileni anlamlandırırken gerekçe sunabilmekte, ilgili değişkenleri ilişkilendirip sonuca ulaşırken gerekli olan gerekçeleri sunabilmektedir.

Örneğin *Gazete Satma 1* probleminde verilen *her hafta ortalama satılan gazete miktarı* ve *haftalık ortalama kazanılan ücreti* verilenleri gerçek yaşamda anlamlandırırken *yaklaşık* ifadesi ve matematikteki *aritmetik ortalama* ile ilişkilendirerek gerekçe sunmuş ve olası nicel değerler atayarak sunduğu gerekçesine destek vermiştir. Aşağıda gerçek yaşama dair anlamlandırmasına ilişkin görüşme kesiti verilmiştir:

Fatime: ...ortalama haftalık 350 gazete satması... Toplam satılan gazeteleri toplam hafta sayısına bölerek yapmışlar. Çünkü hafta sayısınca toplamda kaç tane satmışlarsa toplayalım, onu da bölelim... haftalık ortalama kazanç için... Yani haftada mesela bazen belki 353, 352,... bazen az oluyordur... Şimdi ortalama olarak dediği için her hafta değişebilir sonuç. Çünkü bir hafta mesela ortalamanın üstüne çıkar. Diğer hafta daha ortalamanın altına düşer. Ortalama olarak yani ilk dediğim gibi...

Ardından *istenende belirtildiği* gerekçesiyle amacı ifade edip “Her hafta ortalama kaç zed kazanmaktadır “ şeklinde amacı ifade etmiştir. Ardından amaçta yer alan ifadeye uygun olarak iki farklı ilandan Zed Gazetesi ilanını seçmiş ve gazetede ilana göre ortalama satılan gazete miktarını kesin bir değer olarak ele alıp işlemler yapıp matematiksel sonuca ulaşmıştır. Burada değişken olarak *gazete sayısını, satılan gazete miktarını* ele almıştır. Yapılan ön görüşmeye ait kesitte bağlama özgü gerekçeleriyle hangi gazeteyi neden seçtiğini ve hangi işlemleri yaparak sonuca ulaştığını belirtmiştir:

Fatime:...Burada(sorudaki istenen cümlesini işaret ediyor) diyor ki Zed yıldız gazetesinden ortalama olarak 350 adet satmış. Her hafta ortalama kaç zed kazanmaktadır diyor. Şimdi önce normal günlük var, bir de yıldız var. Bu yıldızdan satmış 350 adet(eliyle Zed Yıldız gazetesini gösteriyor). Şimdi zaten 240 gazete için sattığı 240 gazete için 0.20 zed kazanıyormuş. Fazladan sattıkları için de 0.40. Şimdi 240 zaten olması gereken, ekstra olarak 110 gazete satmış. ...

Öğretmen: Olması gereken derken?

Fatime: Yani burada(Zed Yıldız'a ait ilanı gösteriyor) diyor ki, bir hafta içinde satacağınız ilk 240 gazete, buradaki ilk 240 gazeteyi ben 0.20 zedden hesapladım ...burada 48 buldum. ... Sonra ekstra olan 110 gazetesini vardı. Toplam 350 tane satılan. 240'ü başta aldım zaten. Onu ondan çıkardım. Geriye 110 kaldı. 110 gazeteyi de tekrar ekstra fiyattan hesapladım. Hepsini 92 zed buldum...

Fatime hem formülde verilen değişkenlerin değerini ve işlemleri gerekçeleriyle açıklayabilmiş hem de problemde bulunduğu sonuçları birbiriyle ilişkilendirip çeşitli gerekçeler sunabilmiştir. Ayrıca Fatime benzeri durumlar için kimi zaman aynı gerekçeyi sunarken kimi zaman da yeniden gerekçe üretmeye çalışmıştır.

Örneğin *En İyi Araba 1* probleminde arabanın toplam puanını veren matematiksel modelle ilgili değişkenlerin birbirine göre ağırlıklarını “..Üç tane E artı Y artı D artı İ toplam puanıdır.. tamam ben toplam puanı bulurken E'yi üçle çarpacağım yani o diğerlerinden üç kat daha değerli....” şeklinde gerekçeleriyle açıklayabilmiştir. Ardından “Burada ilk, mesela E'yi 3 ile çarpmam gerektiğini söylüyordu. Ben de önce E'yi 3 aldım puan olarak. Sonra onu 3 ile çarptım tekrar. Sonra yan yana Y, D ve İ değerlerini aldım. 1, 2 ve 3 olarak vermişler (eliyle Ca arabasının olduğu satırı takip ediyor).” şeklinde satır ve sütündaki bilgileri nasıl ilişkilendirdiğini ifade edip değişkenlerin değerlerini bulmuş ve Ca arabasının toplam puanına dair doğru matematiksel sonuca ulaşmıştır.

Neden Ca arabasının satırını takip ettiği sorulduğunda “Çünkü bizden Ca arabasının özelliklerini istiyor. Bu yüzden bu sütundakilere, satırdakilere bakmam gerekiyor. Çünkü özelliklerini böyle(eliyle sağdan sola satırı gösteriyor) sıra sıra vermiş. Aşağı doğru bakmam. Çünkü onlar diğer arabaların özelliklerine giriyor..” şeklinde isteneni gerekçe gösterip ve yapılaş yolunun doğruluğunu savunuyor.

Gerçek yaşama dair ikiden fazla bilgidен çıkarım yapılması gereken *Bisiklet Sürücüsü Hale*’nin 1. ve 3. problemlerinde ise farklı türlere dair verilen bilgileri fizikte öğrendiği hız formülüyle ilişkilendirerek 1. problemde gidiş gelişe ait ortalama hızları, 3. problemde ise tüm yola ait ortalama hızı şeklinde hesaplayabilmiştir (Görsel 4.1). Bu esnada elde ettiği matematiksel sonuçları gerçek yaşama uygun bir şekilde yorumlamıştır. Görüşme kesitleri sırasıyla verilmiştir:

Fatime: Hale 3’te ben yine fiziğe dayalı gittim yine ben burada da. Ortalama hızı, yani toplam yol bölü, toplam zamana böldüğüm zaman ortalama hızı buluyorum ben. Gidiş yolu 4 km. Artı dönüş yolu 3 km. Toplam 7 km. Zaman olarak gidişte 9 dakika, dönerken 6 dakika..Tamam zaten biz yolu 7 bulmuştuk toplam 7 bölü 1 bölü 4 diyeceğim dakika çeyrek saat....sonra bunu ters çevirip çarpalım ...28 oluyor o zaman burası 28 oluyor.

Fatime:... Bize burada başta verdiği şey 10 dakikada 4 kilometre. İlk 10 dakikada ve sonraki 5 dakikada da 2 kilometre bisiklet sürdüğünü vermişti. Şimdi önce 10 dakikadaki ortalama hızını bulalım. Ya ben burada daha matematikten ziyade fizikten gitmiştim çözerken. Çünkü zaten çok ilişkililer. Burada hani fizikte vardı $X = V.T$ formülleri. Buna göre gitmiştim ben. Ortalama hızını istediği için önce V ’yi yol bölü zamana eşitledim...

Görsel 4.1 Fatime’nin Bisiklet Sürücüsü Hale-3 sorusuna ilişkin çözümü

Ayrıca Fatime *Bisiklet Sürücüsü Hale 1* sorusuna yönelik görüşmede şıklara bakıp ortalama hızları kıyaslayarak doğru olanı bulması gerektiğini fark etmiş ve “10 dakikada 4 kilometre gitmişse yolu zamana bölerek buluyorum. Burada da yolu zamana bölmüşüm. 2 bölü 5...Zaten 5 dakikadaki ortalama hızı da mesela 5 dakika gidiyorsa yine 2 kilometreye gidiyormuş. O da 2 bölü 5 olarak çıkıyor. Sonuç olarak eşit.” şeklinde ifade edip ilk yaptığı ortalama hızın değerini sadeleştirmiş ve sonuçları ilişkilendirerek iki ortalama hızın da eşit olduğu sonucuna varmıştır (Görsel 4.2).

Görsel 4.2 Fatime’nin Bisiklet Sürücüsü Hale-1 sorusuna ilişkin çözümü

Soru: Hale, bir yolculuğunda ilk 10 dakikada 4 km ve sonraki 5 dakikada 2 km bisiklet sürmüştür. Buna göre, aşağıdaki önermelerden hangisi doğrudur?

A. Hale’nin ilk 10 dakikadaki ortalama hızı, sonraki 5 dakikadaki ortalama hızından daha fazladır.

B. Hale’nin ilk 10 dakikadaki ve sonraki 5 dakikadaki ortalama hızı aynıdır.

C. Hale’nin ilk 10 dakikadaki ortalama hızı, sonraki 5 dakikadaki ortalama hızından daha azdır.

D. Verilen bilgilerle, Hale’nin ortalama hızı ile ilgili bir şey söylemek mümkün değildir.

Her bir şıkkın doğru veya yanlış olduğuna nasıl karar verdiğinizi detaylıca yazınız.

$v = \frac{x}{t}$ formülüne dayanarak ilk yol 4 ve 10 dk gidiyor sonraki 2 ve 5 dk gidiyor bunları sadeleştirip aynı değere denk geliyor.

Fatime bu esnada probleme ait her bir şıkka yönelik gerekçeler sunup soruyu doğru çözmüştür. A ve C şıkkında “A ve C..Hale’nin ilk 10 dakikadaki ortalama hızı, sonraki 5 dakikadaki ortalama hızından daha azdır. Şimdi zaten ben birinci soruda yine işlemlere dayanarak eşit bulmuştum. Bu yüzden fazla ya da az olduğunu düşünmüyorum yine ben. Eşit olduğu için buna da yanlış dedim.” şeklinde ifade ederek formülle bulduğu ortalama hız değerlerini sadeleştirmiş, kıyaslayarak her ikisinin de değerlerinin eşit oldukları sonucuna varmıştır. Ardından birbirine göre daha az veya daha fazla denilemeyeceğine dair benzer gerekçe sunarak ikisini de elemiştir. D şıkkında ise benzeri bir gerekçe sunabilme imkanına rağmen “Verilen bilgilerle Hale’nin ortalama hızıyla ilgili bir şey söylemek mümkün değildir. D Yanlış. Çünkü zaten yol belli. Gittiği süre belli. Buradan ben zaten ortalama hızını çıkarabilirim. Bunu yapabiliyoruz (o esnada ortalama hızı bulmaya çalışıyor). Evet, yapabiliyoruz.” deyip verilen bilgilerden ortalama hızın bulunabileceğine dair bir çıkarımda bulunmuş ve yolu zamana bölerek bulmayı

denemiştir. Bu anlamda Fatime her bir şık için aynı gerekçeyi verip soruyu çözebilecekken bazıları için farklı gerekçeler sunmayı tercih etmiştir.

Son olarak Fatime *Bisiklet Sürücüsü Hale 3'te* gidiş, dönüş ve toplam yola ait ortalama hızları karşılaştırarak sonucun doğruluğunu mantıken kontrol ederken matematiksel daynaklara başvurmuştur. Görüşme esnasında “*Zaten bunun (toplam ortalama hızı ve 4 bölü 9'u gösteriyor) daha kısa sürede gittiği belli oluyor. Hani 1 bölü 2 ile 4 bölü 9'un değerlerinden... Arada olmalı.....1 bölü 2 daha büyük olacak. ...Dönüş...Tamam..*” ifadelerini kullanıp toplam yola ait ortalama hızın gidiş ve dönüşe ait ortalama hızların arasında olması gerektiği muhakemesini yapıp sonucu doğrulamıştır.

4.1.2 Grup 2'nin temsilcileri olan Elif ve Hamza'nın ön görüşme bulguları

Bu bölümde Grup 2'nin temsilcileri olarak seçilen Elif ve Hamza adlı katılımcıların PISA-1 testine dayalı gerçekleştirdiği ön görüşmeye ait matematiksel muhakeme yeterliğine ilişkin bulgular verilmiştir.

Elif ve Hamza ön görüşmede soruda verilen ve isteneni gerçek yaşamda anlamlandırabilmede kimi zaman zorlanan, belirlediği iki değişkenden çıkarım yapma ve değişken değerlerini formülde yerine koyup gerekçeli işlem yapmayı gerektiren durumlarda matematiksel muhakemede zorlanmazken ikiden fazla bilgiyi ilişkilendirip genelleme yapmada ise oldukça zorlanan katılımcılardır.

Gerçek yaşama dair verilen bazı problemlerde her iki katılımcı da verilenlerin gerçek yaşamdaki anlamlandırırken aritmetik ortalama ile ilişkilendirmiştir. Örneğin *Gazete Satma 1* sorusunda Elif, *ortalama kazancı* ifade ederken matematikteki *ortalama kavramıyla ilişkilendirip nicel değerler vererek açıklamış* ve “*.. mesela, ben şöyle örnek vereyim. Mesela 4 haftadan bahsedelim. 350 bu hafta ortalama sattık. Normalde ortalama bunların toplamı 4'e bölümü. Daha sonra bu farklı bir şekilde de olabilir. Mesela 345. Artı 355, artı 350, artı 350. Bunları tekrar toplarsam ve dörtte bölersem yine ortalama aynı olacak.*” demiştir. Hamza da ortalama kazancı “*350'den fazla ya da az satabilir. ...Yani neye göre söylüyorum? O da günün değişkenliği ya da haftanın değişkenliği olabilir. Bir gün daha fazla satabilir veya bir gün o kadar müşteri bulamayabilir. Bazı mahallede insanlar olmayıp, o kadar gazete alan da genel güne değişiyor. Ama pek bir yorumumu katmadım. Ortalama işte bildiğimiz..*” şeklinde

matematikteki ortalama ile ilişkilendirip gerekçe olarak da gerçek yaşamdan sebepler sunmuştur.

Her ikisi de isteneni nasıl bulduklarını gerekçeli olarak açıklayabilmişlerdir. Elif, Zed Yıldız Gazetesi'ni göstererek "... ben buna(Zed Yıldız'ı gösteriyor) karar vermiştim. Zed gazetesi dediği için... Normalde 350 adet sanırım. Ve 240 gazete için başına 0.20 zed. Ve bunun daha fazlasında ne yapıyor? Her gazetede için 0.40 zed.", Hamza ise "...Ortalama olarak her hafta kaç zed kazandığını soruyor. Hangi gazeteye girdiğini, hangi ilanla işe başladığını söyledi. ..Zed Yıldız Gazetesi'nde başlamış. Burada başladığını söyledi. Bu yıldız olanı(eliyle işaret ediyor), bu da günlük olanı... Yıldız olanı aşağıda sorduğu için pek bir dikkate almadık burayı(Zed günlük gazetesi ilanını gösteriyor)..." sözleriyle her ikisi de gerekçe olarak isteneni gösterip Zed Yıldız Gazetesi'ni seçmiş ve verilenleri ifade etmiştir. Ayrıca Hamza sözleriyle bilinçli bir şekilde gerekli bilgileri ele alıp diğerlerini dikkate almadığını gerekçesiyle belirtmiştir. Ardından her ikisi de Zed Yıldız Gazetesi'nde verilen ilana göre toplam ücrete dair matematiksel sonuca ulaşmışlardır(Görsel 4.3 ve Görsel 4.4).

Görsel 4.3 Elif'in Gazete Satma 1 Sorusuna İlişkin Çözümü

The image shows a handwritten solution for a problem involving two newspaper advertisements. The first advertisement is for 'ZED YILDIZ GAZETESİ' and the second is for 'ZED GÜNLÜK GAZETESİ'. The solution includes a calculation for the total revenue from selling 350 copies of the Zed Yıldız Gazetesi, considering a base price of 0.20 and an additional 0.40 for each copy beyond the first 240.

ZED YILDIZ GAZETESİ
EKSTRA GELİRE Mİ İHTİYACINIZ VAR?
GAZETEMİZİ SATIN
Kazanacağınız ücret:
Bir hafta içinde satacağınız ilk 240 gazete için gazete başına 0,20 zed + fazladan sattığınız her gazete için 0,40 zed

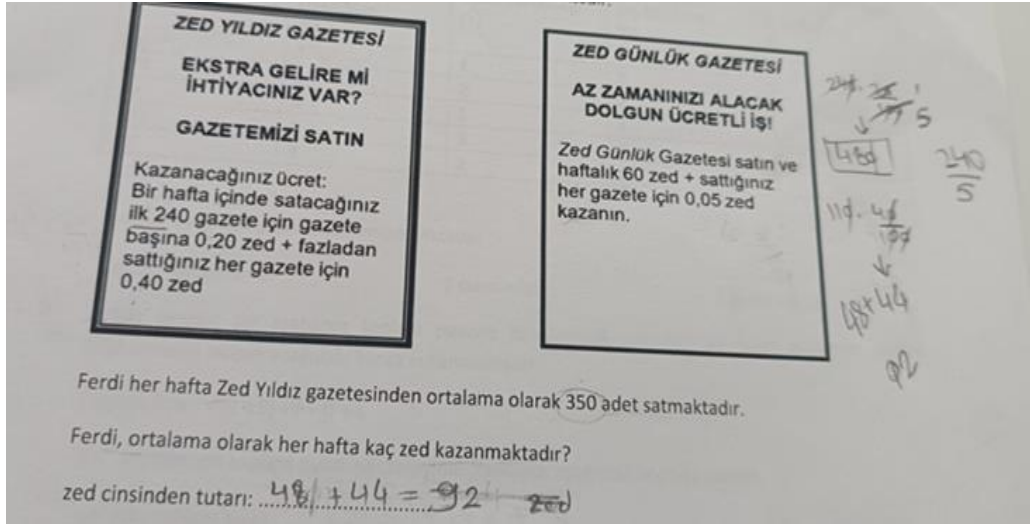
ZED GÜNLÜK GAZETESİ
AZ ZAMANINIZI-ALACAK DOLGUN ÜCRETİLİ İŞ!
Zed Günlük Gazetesi satın ve haftalık 60 zed + sattığınız her gazete için 0,05 zed kazanın.

Ferdi her hafta Zed Yıldız gazetesinden ortalama olarak 350 adet satmaktadır.
Ferdi, ortalama olarak her hafta kaç zed kazanmaktadır? $\frac{102}{100} \rightarrow \text{CVP}$
zed cinsinden tutarı: $240 \cdot 0,20 + 0,40 \cdot 110 = 110$
Bu sonuca nasıl ulaştığınızı nedenleriyle yazınız. $\frac{110}{100} = 1,10$

Handwritten calculations:
 $240 \cdot 0,20 = 48$
 $110 \cdot 0,40 = 44$
 $48 + 44 = 92$
 $92 \cdot 1,10 = 101,2$
 $101,2 \approx 102$

Handwritten notes:
sonuç 110 borta 240
dan sonra 110
almış olarak hesapladım
yani tamamında 240 çıkartarak buldum.

Görsel 4.4 Hamza'nın Gazete Satma 1 Sorusuna İlişkin Çözümü



Bu esnada Elif “..ve bunun daha fazlasında ne yapıyor? Her gazetede için 0.40 zed..” şeklinde, Hamza ise “..burada ne soruyor..Hangi gazeteye girdi...” şeklinde kendi kendilerine sorular sormuşlardır. Ayrıca Elif soruda verilen gazetenin *Zed Günlük Gazetesi* olması durumunda da “..Zed Günlük satsan haftalık, sattığı her gazete için 0.5. Burada 350 adet satmıştı ilk başta. Ben mesela... Mesela diyelim ki 200 satmış ve bundan 60 TL kazanmış diyelim. Ama ben mesela 200 sattı ya, ben mesela 201 sattığımda bir için her bir için 0.05 kazanacağım daha fazla. Yani ilk başta 60 kazanıyor. Doğru değil mi? Ve artı her adet için 0.5... Ben bunları oranlarsam kaç çıkıyor? Sıfırlar giderse 17.5 mu? Tamam. Toplam 87,5. Demek ki buradan daha az kazanıyormuş.” sözleriyle benzeri şekilde diğer ilana göre soruyu çözebilmiş, yine kendi kendine sorular sorarak kendini ikna etmeye çalışmış ve çözüm esnasında verilen nicel verileri kendi varsayımlara göre değiştirerek soruyu anlamaya çalışmıştır.

Ancak Elif ve Hamza gerçek yaşama dayalı ikiden fazla veriyi ilişkilendirip yeni bir çıkarım yapmaları gereken problem durumlarında problemi anlamlandırmada dahi matematiksel muhakemede oldukça zorlanmışlardır. Örneğin *Bisiklet Sürücüsü Hale-3* sorusunda hem Elif hem de Hamza oldukça zorlanmış ve doğru cevabı verememiş, gerekçe de sunamamışlardır.

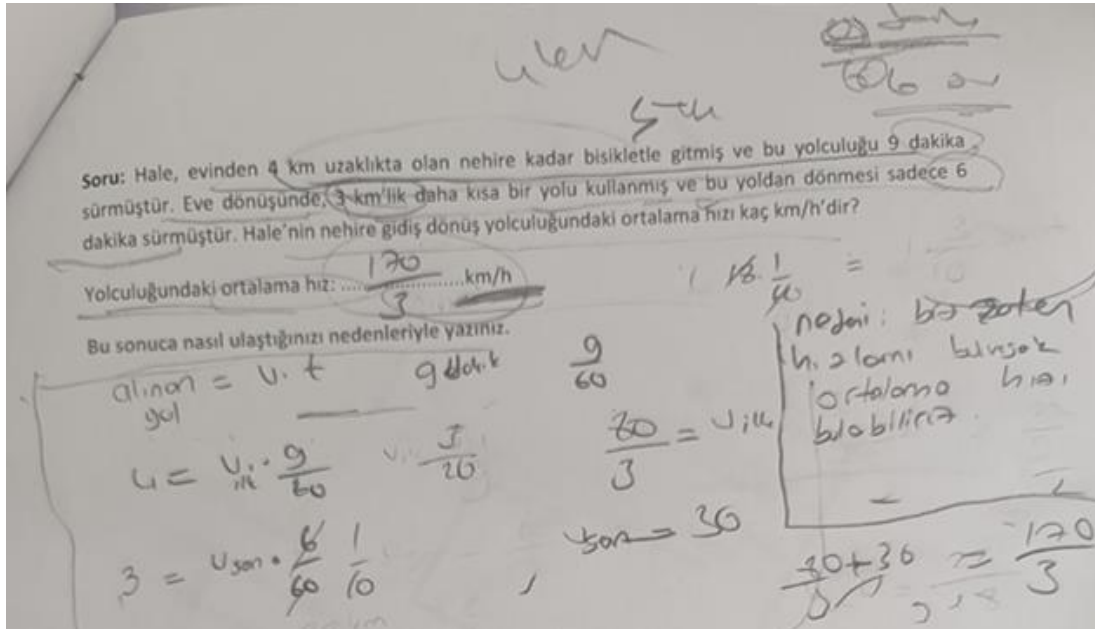
Ayrıca Elif soruda istenilen gidiş dönüşü ait ortalama hız ile toplam ortalama hızın aynı olduğunu bile anlamakta zorluk çekmiş ve karar vermek için ikisini de hesaplaması gerektiğini belirtmiştir.

Öğretmen: Peki, gidiş-dönüş yolculuğundaki ortalama hızı ile yolculuğundaki ortalama hızı kaç kilometre deniyor. İkisi de aynı soru mu, farklı soru mu? Elif: Farklı bence. Bir dakika... Her gidiş ve dönüş yolculuğundaki ortalama hızı kaç kilometre? Şimdi hesaplamamız gerek ikisini de net bir yorum yapmamız için.

Burada gerçek yaşamda ifade edilen bir kavramı matematiksel olarak ele alırken zorluk yaşamasının nedeni matematikte aritmetik ortalama alırken *en az iki değişkenin olması gerektiğini düşünüp aritmetik ortalama alma* düşüncesi olabilir.

Soruyu çözerken de verilenlerden muhakeme yaparak gidiş ve dönüşteki ortalama hızı bulmak için verilen iki farklı yol ve geçen zaman bilgilerini ilişkilendirip ayrı ayrı ortalama hızlarını bulabilmesine rağmen “Ortalama hızını istiyor. Yani mesela eğer ben şu hızı bulursam, ilk baştaki hızını bulursam ve sondakini hızı bulursam ve ben bunları toplayıp ikiye bölüp, hani aritmetik ortalama dediğimiz ... Bunları mesela birbirleriyle toplarsak ve adedine bölersek yine ortalama hızını bulacağız... Sonra ortalama hız için ikisini topladım ikiye böldüm. Çünkü ortalamasını almak için.” şeklindeki ifadesiyle iki ortalama hızın ortalamasını bularak toplam yola ilişkin ortalama hızın bulunabileceğine dair yanlış bir muhakeme yapmış ve soruyu yanlış çözmüştür (Görsel 4. 5).

Görsel 4.5 Elif’in Bisiklet Sürücüsü Hale-3 Sorusuna İlişkin Çözümü



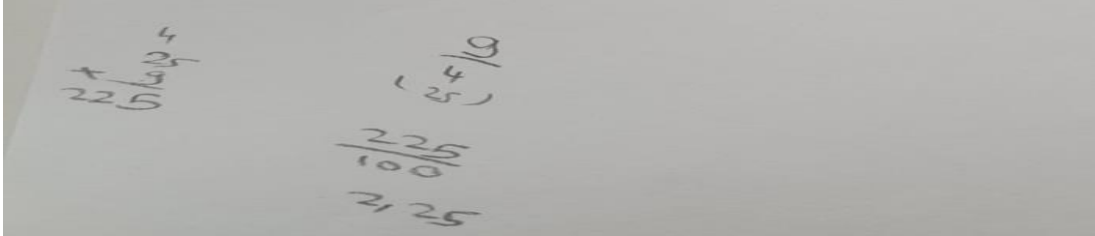
Hamza ise *Bisiklet Sürücüsü Hale-3* sorusunu hiç anlamadığını ve boş bıraktığını görüşme kesitinde ifade etmiştir.

Hamza: Aslında hiç anlamadım (gülüyor). Öylesine boş bıraktım işte...

Öğretmen: Peki şimdi yapabilir misin?

Hamza: Bir deneyeyim. (O esnada sayıları bölüyor...Birkaç işlem daha yapıyor...) Yok ya ben anlamadım hiç. Yapamadım galiba.. Gidiş dönüş hepsi...

Görsel 4.6 Hamza'nın Bisiklet Sürücüsü Hale-3 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



Görüşme kesitinden ve görüşme esnasında soruyu tekrar okuması ve yeniden denemesi istendiğinde yaptığı soru çözümünden (Görsel 4.6) anlaşılacağı üzere Hamza ilk olarak verilenlerden sadece gidişteki 9 dakikayı 4 km yol bilgisine oranlayıp yanlış bir çıkarım yapıp sonra yüzde olarak yazmaya çalışmıştır. Ayrıca burada yaptığı işlemi anlamadan yaptığını ve emin olmadığını da “...anlamadım ya.. Emin değilim..” şeklinde belirtmiştir. Bu durumun sebebi Elif’e benzer şekilde gerçek yaşamda verilen ifadeleri matematiksel olarak anlamlandıramama olabilir.

Ancak Elif ve Hamza gerçek yaşama dair verilen iki farklı değişkeni ilişkilendirip çıkarım yaparken gerekçe sunmada zorlanmamaktadır. Örneğin *Bisiklet Sürücüsü Hale 1* sorusunda Hale’nin gidiş gelişteki ortalama hızlarına yönelik yol ve süre bilgileri verilmiş ve şıklardan doğru olanı işaretlemeleri istenmiştir. Elif ve Hamza problemde verilen değişkenleri ayırt edip gidiş gelişteki ortalama hızlara dair çıkarım yapmış ve “*ortalama hızın yol bölü zaman*” olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Ardından elde ettiği çıkarıma göre değişkenlerin değerini belirleyip iki ortalama hızı ayrı ayrı hesaplayarak kıyaslama yapmış ve nicel değerlerin eşitliğine dayanarak *iki ortalama hızın da aynı olduğu* sonucunu elde etmişlerdir. Bu durum aynı zamanda matematiksel sonucu gerçek yaşamda uygun olarak ifade edebildiklerini de göstermiştir.

Ayrıca Elif ortalama hızları bulurken hız formülünden yararlandığını ifade etmiş ve *hızların eşit olduğu* bu çıkarıma dayalı gerekçe oluşturarak A, C, D şıklarının her birini tek tek ele almıştır. B şıkkı hariç hepsinin yanlış olduğunu belirterek B şıkkını doğru bulmuştur. Elif’in görüşme kesiti ve çözümüne ait Görsel 4.7 verilmiştir.

Elif: Ortalama hız ...Toplam alınan yol, bölü zamandır. 4 kilometre, metre, eğer metre bölü dakika cinsinden bulacak olursam burada 4000 bölü 10’dan 400 olur ortalama hızı.

Burada da 5 dakikada 2 kilometre. Ben bunu metre cinsinden çevirirsem ve metre bir dakika cinsinden yaparsam ortalaması kaç çıkacak? 400. Demek ki buradaki ortalama hızı ve sonraki 2 kilometre ortalama hızları aynı. B şıkkı doğru... A... İlk 10 dakikadaki ortalama sonraki 5 dakikadaki ortalama hızdan fazladır. Yanlış çünkü biz ne bulduk? 400'e 400 bulduk. B kesinlikle doğru çünkü az önce hesapladık. C... Hale ilk 10 dakikada ortalama hızı sonraki 5 dakika ortalama hızından daha azdır. Zaten biz bulduk hani direkt gidiyor bu. Verilen bilgilerle Halen'in ortalama hızıyla ilgili bir şey söylemek mümkün değildir. Hayır, söyleyebiliyoruz. Zaten hani 400'e 400... O zaman B.

Görsel 4.7 Elif'in Bisiklet Sürücüsü Hale-1 Sorusuna İlişkin Çözümü

Hale, yeni bir bisiklet almıştır. Bisikletin gidonunda bir hız ölçer bulunmaktadır. Hız ölçer, Hale'nin gittiği mesafeyi ve yolculuğundaki ortalama hızını gösterebilmektedir.

Soru: Hale, bir yolculuğunda ilk 10 dakikada 4 km ve sonraki 5 dakikada 2 km bisiklet sürmüştür. Buna göre, aşağıdaki önermelerden hangisi doğrudur?

A. Hale'nin ilk 10 dakikadaki ortalama hızı, sonraki 5 dakikadaki ortalama hızından daha fazladır.

B. Hale'nin ilk 10 dakikadaki ve sonraki 5 dakikadaki ortalama hızı aynıdır.

C. Hale'nin ilk 10 dakikadaki ortalama hızı, sonraki 5 dakikadaki ortalama hızından daha azdır.

D. Verilen bilgilerle, Hale'nin ortalama hızı ile ilgili bir şey söylemek mümkün değildir.

Her bir şıkkın doğru veya yanlış olduğuna nasıl karar verdiğinizi detaylıca yazınız.

$\text{ortalama hız} = \frac{\text{yol}}{t}$ $\text{v}_{\text{ort}} = \frac{yol}{t}$ $\text{v}_{\text{ort}} = B$

$\frac{4}{10} = \frac{4}{10}$ $\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$ $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

Her bir dakikadaki hızının aynı olup olmadığını nedenleriyle yazınız.

aynı

alınan yol aynı
ortalama zamanı bölüp
olarak bulduk

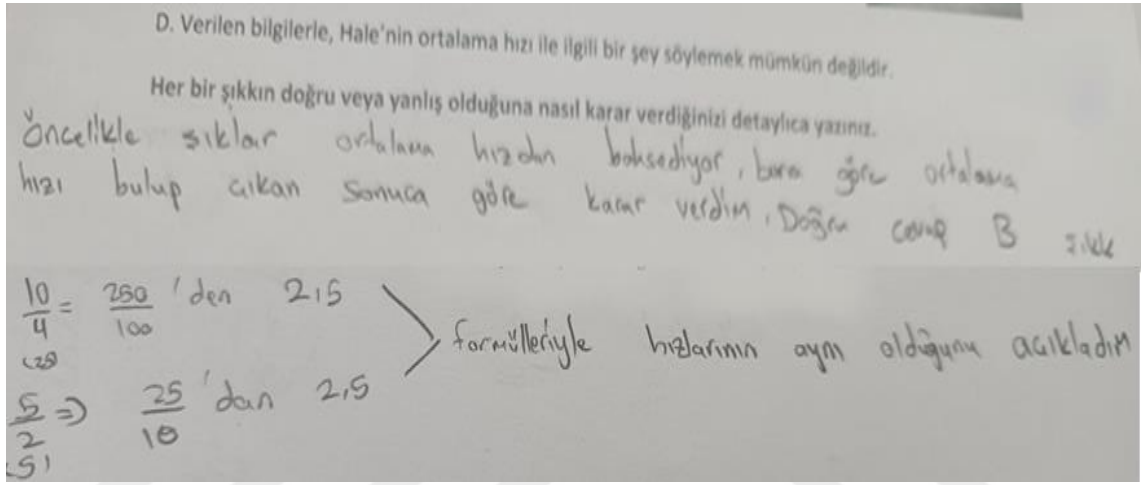
çünkü ortalama hızı gereken
sadece bir tane yapılırsa
bulunur...

Hamza da soruda verilen yol ve zaman bilgilerini ele alıp fizikteki ortalama hız formülüne göre yerine koymuş, gidiş ve dönüşü ait ortalama hızlarını ayrı ayrı hesaplamıştır. Ardından elde ettiği ortalama hızları birbiriyle kıyaslayıp ortalama hızlarının aynı olduğu çıkarımında bulunmuştur. Daha sonra bu çıkarıma dayalı gerekçe oluşturup tüm şıkları aynı gerekçe ile eleayıp B şıkkının doğru olduğunu ifade etmiştir. Hamza'ya ait görüşme kesiti ve çözümüne ilişkin bulgular Görsel 4.8 ile verilmiştir.

Hamza: Fizik formüllerinden yararlandım. Fizikte olduğu gibi burada zamanı mesafeye böldüm. Ortalama hızı buldum. Mesela 10'u 4'e böldüm. 2,5. Aynı şekilde sonraki 5 dakika ile 2 kilometre. Aynı şekilde bölmemizde 2,5. Ortalama hızlarını buldum. Her iki durum için de aynı... Her iki durum içinde aynı şey geçerli oldu. A'dan başlarsak Hale'nin ilk 10 dakikadaki ortalama hızı, sonraki 5 dakika ortalama hızından daha

fazladır. Ben zaten burada hızı aynıdır diye işaretlemişim. Öyle bulmuşum formüllerle. Daha fazladır veya C'deki olduğu gibi daha azdır ifadelerini zaten kabul etmemem gerekiyor. Formüller gereği. Verilen bilgilerle Hale'nin ortalama hızıyla ilgili bir şey söylemek mümkün değildir. Önermesi de aynı şekilde. Ben alıp yararlı bir şekilde kullanabilmişsem ve belli biliyorum çıkarmışsam şu ortalama hızıdır, şu mesafesidir, şu dakikasıdır gibisinden ifadeler kullanabiliyorsam demek ki bir şeyler söylemek, birkaç şey söylemek mümkün.

Görsel 4.8 Hamza'nın Bisiklet Sürücüsü Hale-1 Sorusuna İlişkin Çözümü

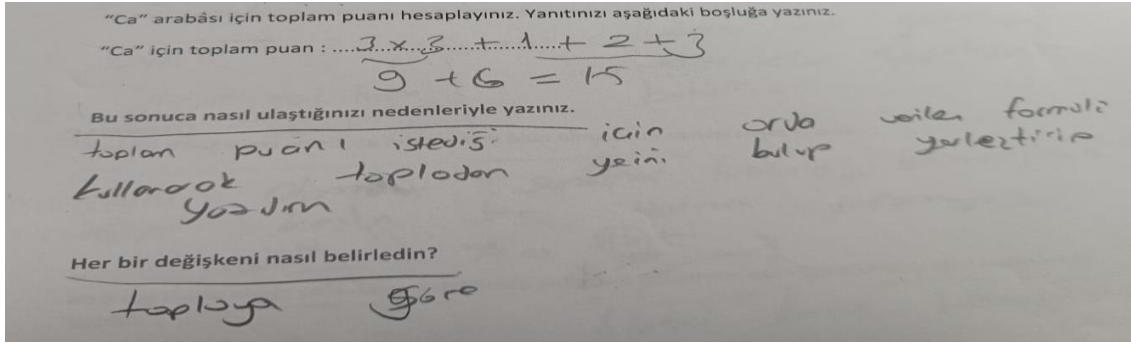


Elif ve Hamza problemde verilen değişkenlerin değerini belirleyebilmekte ve gerekçeli olarak işlem yapıp matematiksel sonucu bulabilmektedir. Örneğin her ikisi de *En İyi Araba 1* probleminde verilen puanlama formülüne göre doğrudan çıkarımlar yapıp gerekli olan değişkenleri belirlemiş ve puanlamada kullanılacak olan değişkenlerin değerlerini tablodan satır ve sütunu kesiştirerek ayrı ayrı elde etmişlerdir. Ardından verilen puanlama formülünde yerine gerekçeli olarak tek tek yazarak Ca arabasına ait toplam puanı 15 olarak hesaplamışlardır. Elif ve Hamza'nın görüşme kesitleri ve çözümlerine ait bulgular Görsel 4.9 ve Görsel 4.10 ile verilmiştir.

Elif: Burada üstte bir tablo verilmişti ve altta da bir formül vermiş. Ben üstteki değerlere bakarak işlem yaptım .. mesela Ca nerede? Şurası(eliyle Ca satırını gösteriyor) şuradaki değeri ben nasıl hesaplıyordum soruda vermiş. Toplam puanını bulmuşum. ..Ben burada...

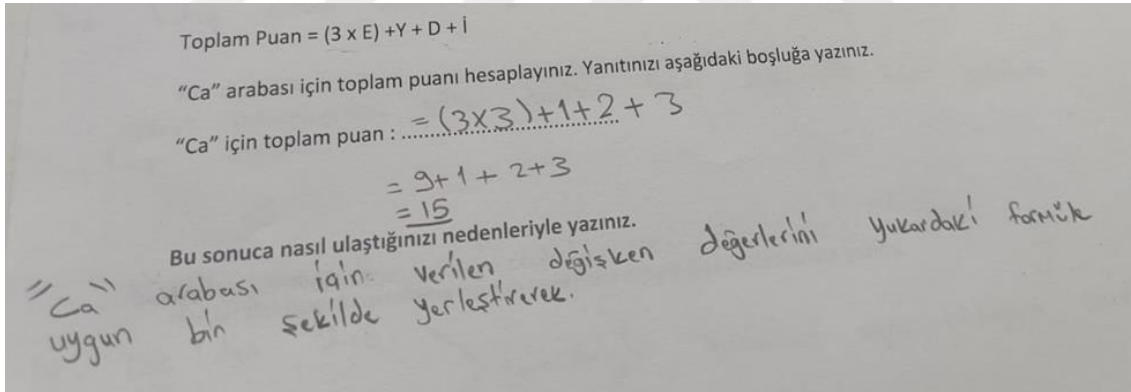
Tabloya bakarak. Mesela şurada diyor ya, Ca arabası için toplam puanını hesaplayınız diyor. Burada Ca için toplam bu(sonucunu gösteriyor). Buradaki bu formül vermişti ya...Burada işlemleri yaparsam cevap 15 çıkacak.

Görsel 4.9 Elif'in En İyi Araba 1 Sorusuna İlişkin Çözümü



Hamza: Soruda benden CA arabasını istedi ve verilen formüle göre hesaplamamı istedi. Kendisi 3 vermiş, 3 çarpı E, E'ye baktığımızda emniyet özelliği 9 çıkıyor. Burada da Y vermiş, Y yakıt CA arabası için 1. D vermiş, D'de dış görünüş, D'de 2'ye denk geliyor, CA arabası için. En sonunda da İ vermiş, İ'de iç bağlantılar, CA arabasında iç bağlantılar 3 olduğunda 3 çarpı 3, 9 9 artı 1 artı 2 artı 3'ten 15.

Görsel 4.10 Hamza'nın En İyi Araba 1 Sorusuna İlişkin Çözümü



4.1.3 Grup 3'ün temsilcileri olan İlknur ve Aydan'ın ön görüşme bulguları

Bu bölümde Grup 3'ün temsilcileri olarak seçilen İlknur ve Aydan adlı katılımcıların PISA-1 testine dayalı gerçekleştirdiği ön görüşmeye ait matematiksel muhakeme yeterliğine ilişkin bulgular verilmiştir.

İlknur ve Aydan ön görüşmede problemde formülde verilen değişkenlerin değerlerini bulup işlemi gerekçeli sunmada zorlanmayan ancak gerçek yaşama dair verilen problemde verilenleri ve istenenleri anlamlandırmada ve verilenlerden çıkarım yapmada oldukça zorlanan katılımcılardır.

İlknur ve Aydan verilen problemde ilgili değişkenlerin değerlerini bulup verilen formülde yerine koyarken gerekçe sunabilmektedirler. Örneğin *En İyi Araba* probleminde Aydan soruda verilen formüldeki değişkenleri belirleyip tablodan değerlerini bulmak için satır ve sütunları ilişkilendirdiğini ifade etmiş, ardından değerlerini formülde yerine yazıp toplam puanı hesaplamıştır. Çözüme ait Görsel 4.11 ve görüşme kesiti verilmiştir:

Aydan: Burada araba puanı istemiş Ca için. Burada Ca'nın tek tek tablodan değerlerini aldım.

Öğretmen: Niye tek tek onlara baktın?

Aydan: Formülde öyle istiyor. 3 çarpı E, artı Y, artı D, artı I yani. O yüzden tek tek değerine bakman gerekiyor. Emniyet özelliği, yakıt verimliliği, dış görünüşü de, iç bağlantılar da iyi. Sonra bunların hepsini tek tek formülde yeni yazıp işlemle. Mesela emniyet özellikleri E üç. ...Nasıl karar verdim? Tam olarak. Ama bize Ca arabası için dediği için Ca arabasına bakıyorum. O satıra bakıyorum yani. E için üç yazdım. Y için bir yazdım. D için iki. İç bağlantılar için de üç yazdım. Oradan işlem önceliği, ilk parantez, 9, 10, 15 yaptım. Ca'nın toplam puanı 15.

Görsel 4.11 Aydan'ın En İyi Araba 1 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

Araba	Emniyet Özellikleri (E)	Yakıt Verimliliği (Y)	Dış Görünüş (D)	İç Bağlantılar (I)
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	2
N1	1	3	3	3
KK	3	2	3	2

Puanlar aşağıdaki şekilde yorumlanmaktadır:

3 puan = Mükemmel 2 puan = İyi 1 puan = Orta

Araba dergisi, bir arabanın toplam puanını hesaplamak için, her bir puan grubunun ağırlıklı toplamından oluşan aşağıdaki kuralı kullanmaktadır:

Toplam Puan = $(3 \times E) + Y + D + I$

"Ca" arabası için toplam puanı hesaplayınız. Yanıtınızı aşağıdaki boşluğa yazınız.

"Ca" için toplam puan $(3 \times 3) + 1 + 2 + 3$

$3 + 6 = 9$

Bu sonuca nasıl ulaştığınızı nedenleriyle yazınız.

ne sonucu ulaştığını önceki tablodaki değerlerle
tek tek edarok yerine koydum

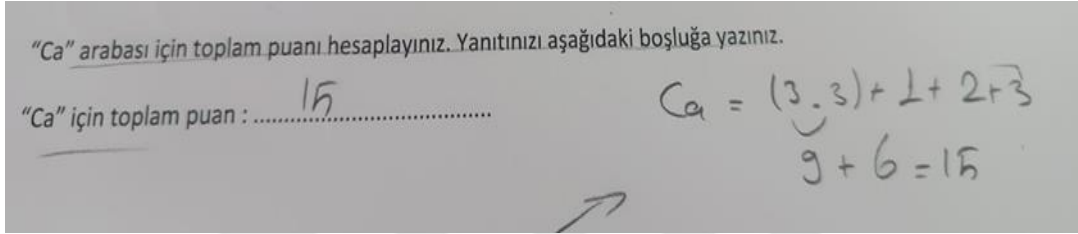
İlknur ise soruda verilen formüle dayanarak bilinçli olarak sadece gerekli değişkenleri belirlediğini geriye kalanları görmezden geldiğini belirterek problemde ilgili değişkenleri fark ettiğini göstermiştir. Belirlediği değişkenlerin değerleri için önce Ca arabasına ait satırı sabitleyip sistematik bir şekilde Ca'ya ait özelliklerin değerlerini bulmuştur. Ardından değerleri yerine yazıp toplam puanı hesaplamıştır. İlknur'un çözümüne ait bulgular ise görüşme kesiti ve Görsel 4.12 ile verilmiştir.

Öğretmen: İkinci soruya geçelim. En iyi araba 1 sorusu. Nasıl yaptın?
İlknur: Burada zaten kendisi toplam puan bulma formülünü vermiş. Zaten tabloda da E, Y, D, İ var. Ca arabasını sormuş. Ben de sadece diğer şeylerle ilgilenmemek için bir yere baktım. 3 ile E, Y yani envarter özelliklerini çarpıyormuş. 3, 1 çarpıyor, 3 oluyor parantez içerisinde. Sonra geriye kalanlarını da toplanıyor. 1, 2, 3 hepsini toplayıp 15 buluşuyor.

Öğretmen: Sayılara nasıl karar veriyorsun?

İlknur: Sayıları sadece tablodan. Ca ile ilgilendim. Alttakileri hiç bakmadım bile. Yukarıda da zaten E, Y, D, İ diye yazıyor. Sadece Ca'ya baktım. ..yatay baktım sadece.

Görsel 4.12 İlknur'un En İyi Araba 1 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



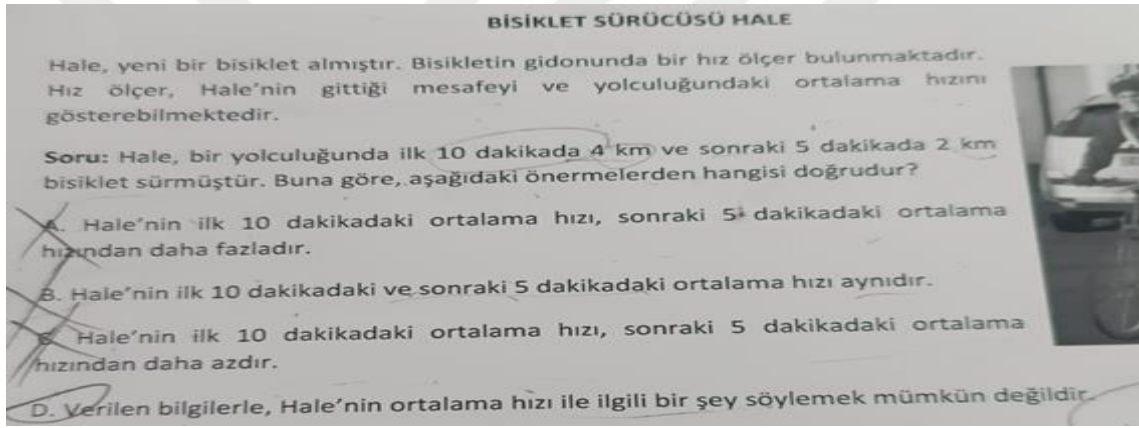
Gerçek yaşama dair verileni ve isteneni açık bir şekilde belli olan problemlerde verileni ve isteneni gerekçeli olarak açıklayabilmişlerdir. Örneğin Gazete Satma 1 sorusuna dair görüşmede İlknur “...Ferdî'nin Zed Yıldız Gazetesi'nden ortalama olarak 350 tane sattığını söylüyormuş. Zed Yıldız Gazetesi burada (gösteriyor), bizim hesap edeceğimiz kısımda burada(Zed Yıldız gazetesi ilanını gösteriyor). 350 tane satmış, burada diyor ki 240 tanesi için 0.20 zed.. Geriye kalan 110 tanesi de fazladan sattığı için 0.40 zedden satmış oluyor.” şeklinde ve Aydan ise “240 gazete için gazete başında 0,20 Zed diyor. Fazlası içinde 0,40 Zed diyor.” şeklinde verilenleri detaylıca bir şekilde gerekçeli olarak belirtmiş, verilen bilgilere dayalı doğrudan çıkarım yapıp Zed Yıldız Gazetesi'ni seçmiş ardından isteneni gerekçeli ifade edebilmişlerdir.

Ancak hem İlknur hem de Aydan gerçek yaşama dair verilenlerden yeni bir çıkarım yaparak matematiksel model oluşturmak için muhakeme yapmada oldukça zorlanmış, uygun bir gerekçe de sunamamışlardır.

Örneğin Bisiklet Sürücüsü Hale 1 ve 3 sorularında gidiş gelişteki ortalama hızlarına yönelik yol ve süre bilgilerinden çıkarım yapmaları ve ortalama hızı bulup her bir şık için gerekçe oluşturmaları beklenmektedir. İlknur ve Aydan bu problemin çözümünde oldukça zorlanmış ve gerekli muhakemeyi yapamamışlardır.

Aydan soruda verilen dakika ve km bilgilerinin verildiğini ifade etmiş, ancak hızları ile ilgili bilgi verilmediği için ortalama hızın bulunamayacağına dair yanlış bir çıkarımda bulunup cevabı D şeklinde yanlış işaretlemiştir. Hızın bulunamayacağı çıkarımından yararlanarak uygun bir gerekçe oluşturup D şıkkı hariç hepsinin yanlış olduğunu ifade etmiştir. Bu duruma ilişkin “Benden ortalama hızını istemiş ama hız ile ilgili bir şey vermemiş. Verilen bilgi 10 dk da 4 km, 5 dk da 2 km vermiş ama hızlarla ilgili bir şey vermediği için bir şey söylemek mümkün değil...Çünkü bize hızla ilgili bir şey verilmediği için D dedim. A, B, C’nin hepsinde hızla ilgili şeyler vardı. Bize hız verilmediği için A, B, C direk elendi.” ifadelerini kullanıp D şıkkını işaretlemiştir(Görsel 4.13)

Görsel 4.13 Aydan’ın Bisiklet Sürücüsü Hale-1 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



İlknur da soruda yol ve süre bilgilerinin verildiğini belirtmiş ancak ortalama hız için kesin bir şey söylenemeyeceğini ifade etmiştir. İlknur da Aydan’a benzer şekilde soruda çeşitli yerlerde verilen yol ve süre bilgilerine dayalı çıkarımı yapamamış, soruyu yanlış çözmüştür. Ancak İlknur ortalama hızı bulamama nedenini, Aydan’dan farklı olarak hızın verilmemesi değil de *hızın dakikaya göre artma azalma durumlarının verilmeyişi* olarak ifade etmiştir. Bu duruma ilişkin görüşme kesiti ve çözüme ilişkin bulgular Görsel 4.14 ile verilmiştir.

İlknur: Hale yolculuğunun ilk 10 dakikada 4 km ve sonraki 5 dakikada 2 km bisiklet sürmüştü. Buna göre 10 dakikada 4 kilometre gitmiş ama önce hızlı mı başlamış sonradan yavaşlamış yoksa yavaş başlayıp sonunda hızlı mı bitirmiş de 4 kilometreye ulaşmış bunu bilemeyiz hocam. O yüzden verilen bilgilerle halen ortalama hız ile ilgili bir şey söylemek mümkün değil bana göre. A şıkkı..10 dakikada ortalama hızı bilemeyiz yani. Belki beş dakikanın hepsinden hızlı gitti de iki kilometre yavaşladı. Belki on dakikada

hızlı gitti sonra yavaşladı. Yani hiçbir yorum yapamayız diye düşünüyorum. B’de ortalama hızları aynıdır demiş. Olabilir olmayabilir. Hocam kesin bir şey söyleyemeyiz, Hocam. C daha azdır demiş. İşte yine bilemeyiz yani.

Görsel 4.14 İlknur’un Bisiklet Sürücüsü Hale-1 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

BİSİKLET SÜRÜCÜSÜ HALE

Hale, yeni bir bisiklet almıştır. Bisikletin gidonunda bir hız ölçer bulunmaktadır. Hız ölçer, Hale’nin gittiği mesafeyi ve yolculuğundaki ortalama hızını gösterebilmektedir.

Soru: Hale, bir yolculuğunda ilk 10 dakikada 4 km ve sonraki 5 dakikada 2 km bisiklet sürmüştür. Buna göre, aşağıdaki önermelerden hangisi doğrudur?

☒ A. Hale’nin ilk 10 dakikadaki ortalama hızı, sonraki 5 dakikadaki ortalama hızından daha fazladır. *yanlış*

☒ B. Hale’nin ilk 10 dakikadaki ve sonraki 5 dakikadaki ortalama hızı aynıdır. ✓

☒ C. Hale’nin ilk 10 dakikadaki ortalama hızı, sonraki 5 dakikadaki ortalama hızından daha azdır.

☒ D. Verilen bilgilerle, Hale’nin ortalama hızı ile ilgili bir şey söylemek mümkün değildir.

Her bir şıkkın doğru veya yanlış olduğuna nasıl karar verdiğinizi detaylıca yazınız.

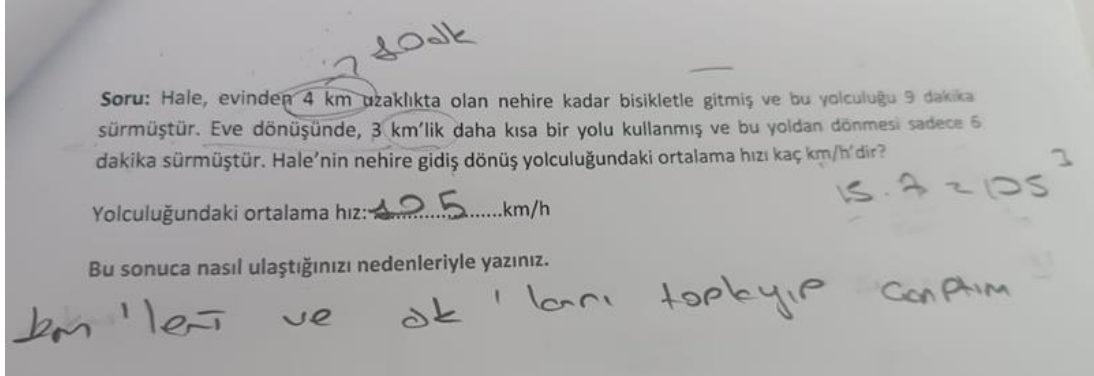


Bu durumda hem Aydan hem de İlknur, soruda verilen süre ve yol bilgisine dayalı çıkarım yapamamış, ortalama hızı bulamamışlardır. Bu nedenle her şıkkı bu yanlış çıkarıma dayalı elde ettikleri “ortalama hızı bilemeyiz” gerekçesine göre değerlendirmişlerdir. Bunun sebebi olarak gerçek yaşamda ortalama hızın anlamını tam olarak bilememeleri olabilir. Bu anlamda kimi sorularda gerçek yaşamdan verilenleri veya istenenleri matematiksel olarak anlamlandıramadıkları için muhakeme yapamamış olabilirler.

Benzer şekilde her iki katılımcı da ikiden fazla veriyi ilişkilendirip muhakeme yapmayı gerektiren *Bisiklet Sürücüsü Hale-3* sorusunda muhakeme yapamamış ve çözümü yanlış bulmuşlardır.

Aydan verilen bilgilerden yol ve süreye ait bilgileri sırasıyla toplayıp $9+6=15$, $4+3=7$ demiş, ardından çıkan sonuçları çarparak ortalama hızı $15.7=105$ bulmuştur. Ancak burada yaptığı çözümden emin olmadığını “*Kilometreleri ve süreleri topladım. 4km..3km..7km, 15 dk yaptım onları çarptım ortalama hız 105 oldu. Emin değilim. Öylesine yaptım...*” sözleriyle ifade etmiştir (Görsel 4. 15).

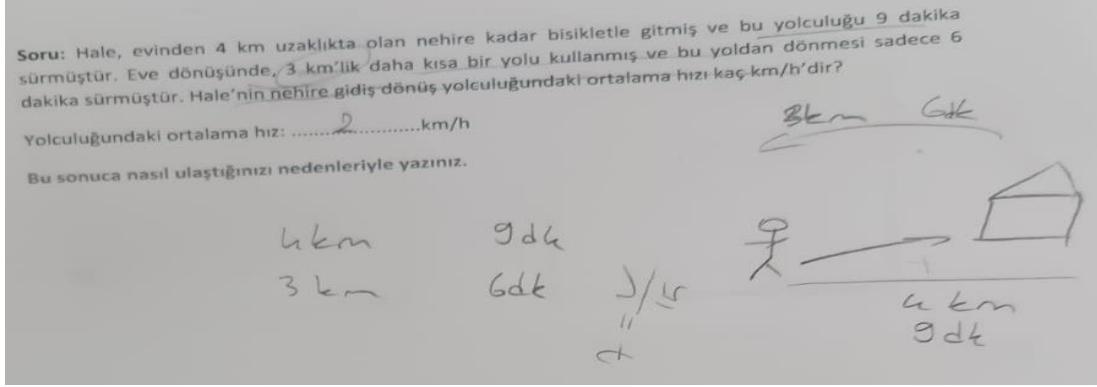
Görsel 4.15 Aydan'ın Bisiklet Sürücüsü Hale-3 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



İlknur ise soruda verilen bilgilerden sadece gidişe ait kısmı alıp yol ve zamanı oranlamış toplam ortalama hızı 2 olarak ifade etmiştir. Oysa bu çıkarım yanlıştır. Çünkü bu ortalama hız sadece dönüşe aittir ve soruyu yapamayınca gidişe ait yol zaman bilgileri olmasına rağmen görmezden gelmiştir. Soruyu görüşmede tekrar yapma izni verilip cevaptan emin olup olmadığı sorulunca emin olmadığını söyleyip yeniden çözmek istemiştir. Bu defa da hız formülünde verilen yol ve dakika bilgileri toplayıp çarpma yoluna gitmiştir. Ancak ortalama hız kavramına yol ve hıza dayalı ilişkilendiremediği için çözümü devam ettirmemiştir. İlknur her iki çözümde de soruyu doğru çözememiştir. İlknur'un çözüme ilişkin bulguları görüşme kesitinde ve Görsel 4.16 ile verilmiştir. İlknur: 4 kilometre uzaklığa 9 dakikada gitmiş, 3 kilometrelik şeyde 6 dakika gitmiş. Aralarındaki oran 2...3 kilometre ile 6 dakikalık derken. Dönerken de 4 kilometre ile 9 dakikalık. Hocam bunu ben tam çözememişim soruyu. Tamamen 6 dakikada 3 kilometre gitti diye oranladım 2 kilometre bulmuşum. Bunu çözerken? Sadece kilometre ile dakikaya ilişkilendirdim. İşte şu anda bu (cevabı $6/3=2$ işaret ediyor)... ve 3 kilometre 6 dakikada gittiği için hızını 2 kilometre bölü saat.... Öğretmen: Peki Peki doğruluğundan emin misin? Mesela emin olmak istesen nasıl bir kontrol yapmak istersin?

İlknur: Değilim. Emin olsam... Yola X desek. X ve T'den...hızla. Ama hız... Toplam kaç zaman... Ya şey deseydik. Toplam kilometre 7. Hızını sonra öğreniyoruz toplamımızdan. T'si de 15. Yani buradan belki bulabilirdim. Ama ortalama hız...Artık ama soruyu çözemiyorum...

Görsel 4.16 İlknur'un Bisiklet Sürücüsü Hale-3 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



Aydan ve İlknur fizikte öğrendikleri ortalama hız formülünü hatırlasalar da gerçek hayatta ortalama hızın anlamını tam olarak anlayamadıkları için matematiksel dünyaya da aktarımı yapamamış formülde değişkenlerin yerini yanlış yerleştirerek sonucu yanlış hesaplamıştır.

Ancak buldukları matematiksel sonucu gerçek yaşama aktarırken bağlama özgü ifadeler kullanabilmişlerdir. Örneğin Gazete Satma 1 sorusunda Aydan ve Elif buldukları 92 şeklindeki matematiksel sonucu sırasıyla “ortalama haftalık 92 zed kazanır..” şeklinde ifade edebilmişlerdir. Ayrıca iki değişkeni ilişkilendirip ortalama hızı bulamadıkları durum da dahi yanlış sonucun ortalama hız olarak ifade edileceğini sırasıyla “Yani buradan belki bulabilirdim. Ama ortalama hız...Artık ama soruyu çözemiyorum...” ve “yaptı onları çarptım ortalama hız 105 oldu. Emin değilim..” şeklinde belirtmişlerdir.

4.1.4 Grup 4'ün temsilcileri olan Necati ve Hatice'nin ön görüşme bulguları

Bu bölümde Grup 4'ün temsilcileri olarak seçilen Necati ve Hatice adlı katılımcıların PISA-1 testine dayalı gerçekleştirdiği ön görüşmeye ait matematiksel muhakeme yeterliğine ilişkin bulgular verilmiştir.

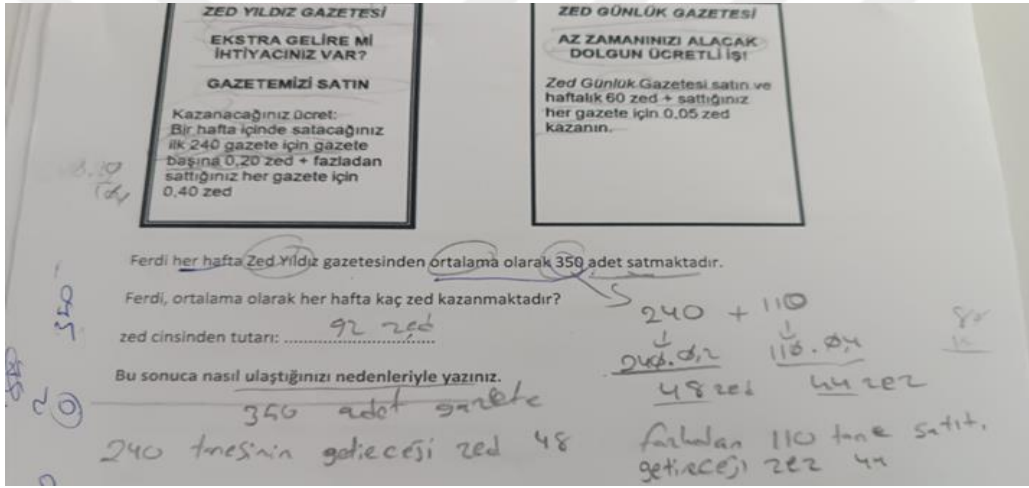
Necati ve Hatice ön görüşmede sadece basit muhakeme gerektiren problemlerde doğrudan çıkarım ve kıyaslama yapıp işlem gerekçelerini belirtebilirken daha üst muhakeme gerektiren problemlerde muhakeme yaparken oldukça zorlanmaktadırlar.

Örneğin Gazete Satma 1 sorusunda hem Necati hem de Hatice problemde verilenleri ve istenenleri anlamlandırırken doğrudan çıkarımlar yapmış ve gerekçe sunmuşlardır. Necati gerçek yaşama dayalı problemde en alttaki istenen cümlesini gerekçe göstererek doğrudan çıkarım yapmış ve ilanlardan Zed Yıldız Gazetesi'ni

seçmiştir. Ardından Zed Yıldız Gazetesi'ndeki ilanda verilenleri tek tek açıklayıp haftalık kazanacağı ücreti hesaplamıştır. Görüme kesiti ve çözüme ait Görsel 4.17 verilmiştir:

Necati: İşte şey... Ferdi...Zed Yıldız Gazetesi'nde haftalık ortalama kaç kazanmış diye soruyor. İşte Ferdi kaç satmış? 350 satmış. İşte ondan sonra ben hesapladım buldum. ... işte burda yazıyo (soru cümlesini göstererek) Zed Yıldızdan 240 sattı diyo yani 240 yani ilk 240 gazete başından 0.20 zed ya da 1TL diyeceğim şimdi. Şey işte 20 kuruş. Onu çarptım. Ondan sonra işte buradan 240 çıkarttım ki hani fazla olan 40 kuruşla çarpayım. Ondan sonra sonucu buldum. Yani topladığım zaman bu durum sonucu. Basit problem gibi.

Görsel 4.17 Necati'nin Gazete Satma 1 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



Bu arada Necati “ortalama 350 gazete adet satmış” ifadesini gerçekte yaşamda kesin 350 olarak ele almıştır. Ayrıca verilen problemi basit bulmasına rağmen para birimini kendi kullandığı para birimiymiş gibi ele alıp verilen Zed yerine TL ve kuruş olarak alıp hesaplamayı tercih etmiştir. Ardından sonucu 92 zed olarak doğru söylemiş ve cevaptan emin olduğunu belirtmiştir.

Hatice de benzer şekilde Gazete Satma 1 sorusunda “Orda yazıyor...(soruda istenen cümlesini gösteriyor)” şeklinde gerekçe ile soru istenen cümlesine göre doğru çıkarımlar yaparak Zed Yıldız Gazetesi'ni seçmiş, “ortalama 350 gazete adet satmış” ifadesini gerçekte yaşamda kesin 350 olarak ele almıştır. Zed Yıldız Gazetesi'ndeki ilanda verilenleri “İlk önce 350 tane Zed Yıldız gazetesinden 240 gazete satacaktım. Onu 0,20'e çarptım. 48 etti. Sonra da geriye kalan 110 kalıyor, 110 gazete. Onu da 0,4'e çarptım. Sonra 92 zed kazanır.” şeklinde belirtip Görsel 4.18'de soruyu cevaplamıştır.

Görsel 4.18 Hatice'nin Gazete Satma 1 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

Ferdi her hafta Zed Yıldız gazetesinden ortalama olarak 350 adet satmaktadır.

Ferdi, ortalama olarak her hafta kaç zed kazanmaktadır? $0,2 \cdot 240 = 48 \text{ zed}$ $0,1 \cdot 110 = 11 \text{ zed}$

zed cinsinden tutarı: $0,10 \cdot 10,20 = 0,8$ $0,1 \cdot 110 = 11 \text{ zed}$

Bu sonuca nasıl ulaştığınızı nedenleriyle yazınız.

240 zede her hafta 50 zede her bir zede 0,10 zede kazanıyor

110 zede

Hatice ve Necati probleminden ilgili değişkenlerin değerlerini bulup verilen formülde yerine koyarken matematiksel muhakemede zorlanmışlardır.

Örneğin Necati *En İyi Araba 1* sorusunda verilen toplam puana ait formülü bir fonksiyon olarak ele alıp değişkenlerin değerlerini tablodan elde etmesi gerektiğini belirtmiştir. O esnada tek bir satır gösterilip yazarların ne anlama geldiği sorulduğunda değerleri ve anlamlarını “işte SP’de 3-1-3-2 ama emniyet özelliği 3, yakıt 1, dış görünüş 3, iç bağlantı 2 dir. 3” şeklinde doğru ifade edebilmesine rağmen soru çözümünde Ca arabasına ait değişkenleri tek tek belirlerken sıkıntı yaşamıştır. Bir değişkenin değerini doğru bulup diğerlerini yanlış ifade etmiştir. En yüksek değerde olanı ‘iyi’ diye adlandırıp hep iyi olanları almaya çalışmıştır. “Yani bu nasıl sıralanmış? Bu da yukarıda... 3 mü iyi, bu mu iyi? Burada da şey varmış, 3 mükemmel, 2 puan iyi, 1 de orta. Tamam. En iyisi..” demesi üzerine “Hep en iyisini mi alıyorsun?” diye sorulmuş, “Evet öyle..baktım tablodan en iyisini buldum...işte.. Verdiği bir fonksiyon var. Verdiği fonksiyonu uyguladım. Çıkan sonucu buldum. 81 ama yanlış bulmuş da olabilir miyim?(kendi kendine soruyor)..Hayır...” diyerek çözümü 81 bulmuştur (Görsel 4. 19).

Görsel 4.19 Necati'nin En İyi Araba 1 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

Araba	Emniyet Özellikleri (E)	Yakıt Verimliliği (Y)	Dış Görünüş (D)	İç Bağlantılar (İ)
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	2
N1	1	3	3	3
KK	3	2	3	2

Puanlar aşağıdaki şekilde yorumlanmaktadır:

3 puan = Mükemmel 2 puan = İyi 1 puan = Orta

Araba dergisi, bir arabanın toplam puanını hesaplamak için, her bir puan grubunun ağırlıklı toplamından oluşan aşağıdaki kuralı kullanmaktadır:

Toplam Puan = $3 \times E + Y + D + I$

“Ca” arabası için toplam puanı hesaplayınız. Yanıtınızı aşağıdaki boşluğa yazınız.

“Ca” için toplam puan : $(3 \cdot 3) + (1 + 3 + 3) = 9 + 9 = 18$

Burada değişken değerlerini bulurken en yüksek değerlere odaklanma nedeni olarak daima en yüksek değeri verme düşünmesi olmuştur. Ayrıca değişkenlerin değerlerini fonksiyona uyguladığını söyleyip görüşme esnasında düzeltme imkanı verilmesine rağmen işlemi de yanlış yapmıştır. Soru çözümünden emin olup olmadığı sorulduğunda “*Eminim..Eh işte..*” demesine rağmen sürekli kendi kendine “*Yani bu nasıl sıralanmış?*”, “*..yanlış bulmuş da olabilir miyim?*” diye sorular sormuş ve doğruluğunu kontrol etmek için de uygun bir yol bulamamıştır.

Hatice ise aynı soruda en önemli şeyin formül olduğunu ve verilen $(3 \times E) + Y + D + İ$ formülündeki *E’nin katsayısının belli olduğu, diğerlerinin katsayısının belli olmadığı* şeklinde yanlış bir çıkarım yapıp tablodan katsayıların değerlerini bulmaya çalışmıştır. “*Önce baktım katsayıları buldum sonra değerleri yazıp buldum. Burada 3 belli .. ama öbürlerini tablodan buldum. Ca’dan baktım(Ca’nın olduğu satırı gösterir).. Baktım tablodan... işte en büyük 3 onu aldım hep.*” diyerek E, Y, D ve İ’ye ait değerleri tablodaki en yüksek değerler olarak belirlemiş ve bu değerleri hem katsayı hem de değişkenlere atayarak hem yanlış bir çıkarım hem de yanlış bir işlem yapıp sonucu 36 şeklinde yanlış bulmuştur (Görsel 4.20).

Görsel 4.20 Hatice’nin En İyi Araba 1 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

Toplam Puan = $(3 \times E) + Y + D + İ$

“Ca” arabası için toplam puanı hesaplayınız. Yanıtınızı aşağıdaki boşluğa yazınız.

“Ca” için toplam puan : $(3 \times 9) + 9 + 27 + 31 \Rightarrow 9 + 9 + 9 + 9 = 36$

Görüşme kesitlerinden ve Görsel 4.20’den anlaşılaçağı üzere Hatice, Necati’ye benzer şekilde *değişkenlere en yüksek değerleri atama* hem de *formüldeki katsayıların tablodan elde edebilme* şeklinde yanlış çıkarımda bulunmuştur.

Necati ve Hatice problemde en az iki değişkeni ilişkilendirmesini gerektiren *Bisiklet Sürücüsü Hale 1* ve 3 sorularında matematiksel muhakeme yapmada oldukça zorluk yaşamışlardır.

Necati soruda verilen yol ve süre verildiğinde ortalama hızı bulmak için yanlış çıkarımlarda bulunmuştur. Ortalama hızı bulmak için *ilk hız ile son hızlarını toplayıp ikiye bölmüş ardından süre ile çarpmıştır*. Bunu yaparken de ilk hızı bilmiyorsa sıfır olarak almıştır. Örneğin 10 dakika 4 km gidince $10+0=10$ ardından 10’u 2’ye bölüp 4 km’deki 4 ile çarpmış ve ilk hızı 20 bulmuştur. Burada ayrıca zihnindeki süre ve yol

değişkenlerinin de karıştırmıştır. Ardından 4 km ve 2 km'deki değerleri toplayıp $4+2=6$ ikiye bölmüş sonucu 5 dk ile çarpış ve sonraki hızı 15 bulmuştur. Oysa verilen bilgilerle gidiş ve dönüşü ait ortalama hızları bulup karşılaştırması gerekirken verilenleri hem işlemsel olarak hem de muhakeme açısından yanlış değerlendirmiştir. Görüşme esnasında “..zihnindeki ortalama hız formülünü” şeklinde ifade edip ilk hız ve son hızın sonuçlarına göre tüm şıkları karşılaştırdığını ifade etmiştir. Ancak ortalama hızlara dair yanlış çıkarımlarda bulunduğu için yanlış bir gerekçe ile diğer şıkları eleyip cevabı A şeklinde yanlış işaretlemiştir (Görsel 4.21).

Görsel 4.21 Necati'nin Bisiklet Sürücüsü Hale-1 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

BİSİKLET SÜRÜCÜSÜ HALE

Hale, yeni bir bisiklet almıştır. Bisikletin gidonunda bir hız ölçer bulunmaktadır. Hız ölçer, Hale'nin gittiği mesafeyi ve yolculuğundaki ortalama hızını gösterebilmektedir. $\frac{10}{2} = 5$

Soru: Hale, bir yolculuğunda ilk 10 dakikada 4 km ve sonraki 5 dakikada 2 km bisiklet sürmüştür. Buna göre, aşağıdaki önermelerden hangisi doğrudur?

☒ A. Hale'nin ilk 10 dakikadaki ortalama hızı, sonraki 5 dakikadaki ortalama hızından daha fazladır.

☐ B. Hale'nin ilk 10 dakikadaki ve sonraki 5 dakikadaki ortalama hızı aynıdır.

☐ C. Hale'nin ilk 10 dakikadaki ortalama hızı, sonraki 5 dakikadaki ortalama hızından daha azdır.

☐ D. Verilen bilgilerle, Hale'nin ortalama hızı ile ilgili bir şey söylemek mümkün değildir.

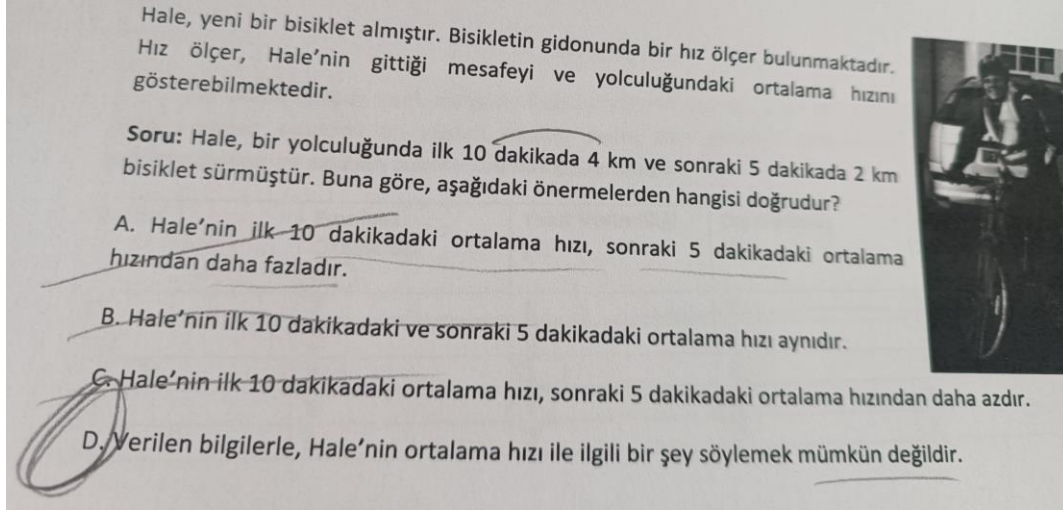
Her bir şıkkın doğru veya yanlış olduğuna nasıl karar verdiğinizi detaylıca yazınız.

ilk hız, ilk son hızı toplayıp ikiye böldüm
2 zamanlarda yaptım



Hatice ise ortalama hıza dair kavramsal bilgi eksikliği “Hale'nin ortalama hızıyla ilgili bir şey söylemek mümkün değildir. Yani mümkün değildir çünkü hesaplayamıyoruz” şeklinde ifade ederek verilenlerin yetersiz olduğu, ortalama hızın bulunamayacağı çıkarımında bulunup yanlış bir muhakeme yapmıştır. Ortalama hızın bulunabilmesi için ise nelerin gerekli olduğu sorulduğunda ise “Ama...başka şeyler de lazım yani...ama yok...(sessizlik)” diyerek yeterli bir açıklama ifade edememiştir. Ayrıca verilenlerin yetersiz olduğu, ortalama hızın bulunamayacağı şeklindeki yanlış gerekçeye bağlı olarak geriye kalan tüm şıkları elemiş ve doğru cevabın D şıkkı olarak işaretlemiştir (Görsel 4.22).

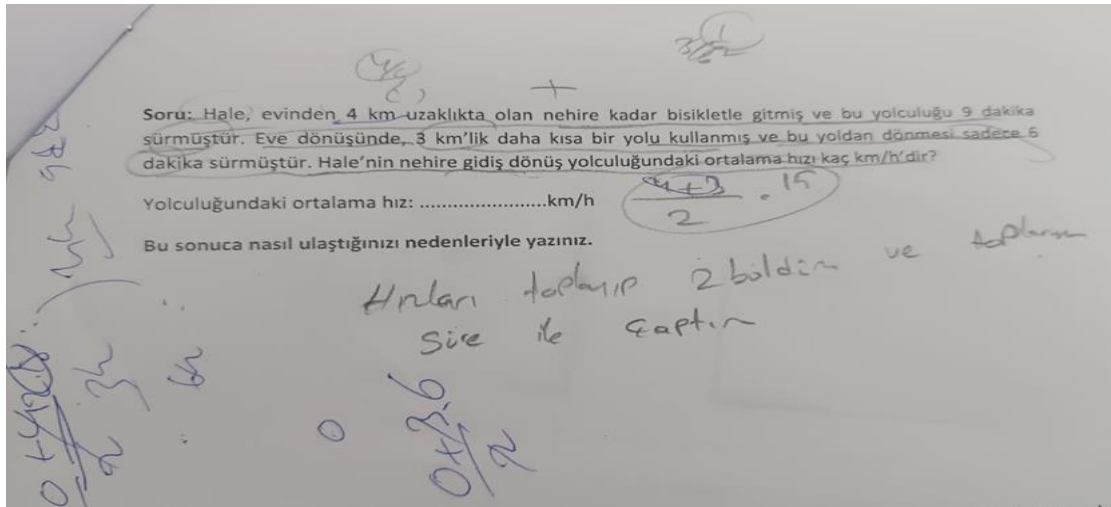
Görsel 4.22 Hatice'nin Bisiklet Sürücüsü Hale-1 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



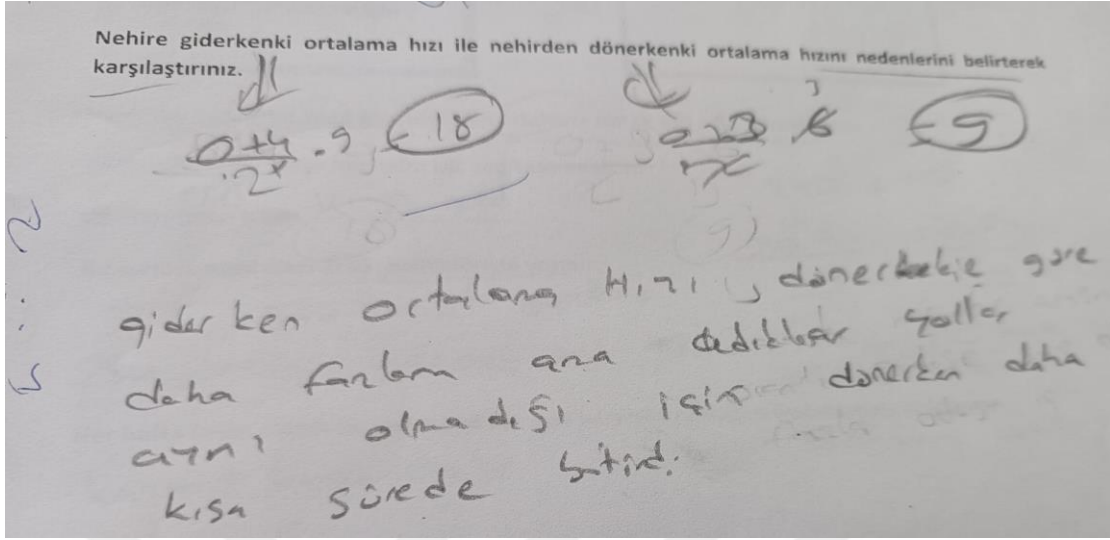
Bisiklet Sürücüsü Hale-3 sorusunda da Necati ve Hatice benzer şekilde oldukça düşük matematiksel muhakeme yapmışlardır.

Necati Bisiklet Sürücüsü Hale-1'de olduğu gibi “Yolculuğun ortama hızını sormuş. Ben de aldığı hızların toplamını 2'ye böldüm. Çarpı geçen zaman...” diyerek yanlış çıkarım yapmış ve ilk hızlarını sıfır alarak aritmetik ortalama şeklinde hesaplama yapıp verilen dakika miktarı ile çarpmıştır. Dakika ile çarpma nedeni sorulduğunda “Çünkü her zaman sabit değil. 1. dakikada geliyor, 2. dakikada geliyor, 3. dakikada geliyor. O yüzden...15 ile çarpınca 15. dakikanın ortalama hızını bulmuştum.” Böylece verilen dakikadaki ortalama hızı bulabileceğine dair yanlış çıkarımını devam ettirmiştir. Yanlış yaptığı çıkarım nedeniyle çözümü de yanlış bulmuştur(Görsel 4.23-24).

Görsel 4.23 Necati'nin Bisiklet Sürücüsü Hale-3 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

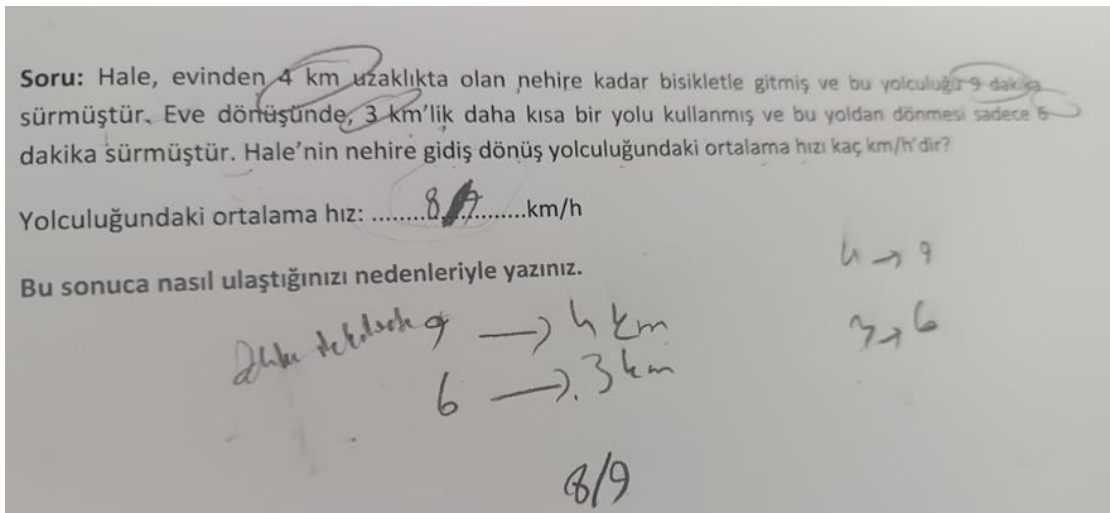


Görsel 4.24 Necati'nin Bisiklet Sürücüsü Hale-3 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Diğer Çözümü



Hatice ilk olarak gidiş dönüş olduğu için “İki kez gider gelir dört dört sekiz dokuz dakika var. sekiz bölü dokuz..” deyip ardından Görsel 4.25’te verilen çözümünden emin olmadığını ortalama hızı bulması için yine eksiklik olduğunu belirtmiştir. Bu eksikliği “aralarındaki oran....” şeklinde ifade etmiştir. Gerekli gördüğü oran için yeterli bilgiye sahip olmasına ve tekrar yapmasına izin verilmesine rağmen oranı da elde edememiştir. Ayrıca bulduğu cevabı söylemesinde de emin değildir. Buradaki muhakeme eksikliğinin nedeni oran, hız ve ortalama hız kavramına ait kavramsal bilgi eksikliği olabilir. Hatice’nin çözümüne ilişkin Görsel 4.25 ve görüşme kesiti verilmiştir.

Görsel 4.25 Hatice’nin Bisiklet Sürücüsü Hale-3 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



Ayrıca matematiksel olarak elde ettikleri sonuçları bağlama dayalı açıklarken Necati ve Hatice sorun yaşamamış ve sırasıyla “ O yüzden...15 ile çarpınca 15. dakikanın

ortalama hızını bulmuştum.” ve “oran aynı olsaydı ortalama hız..” şeklinde ortalama hıza dair sonuçları bağlama uygun ifade edebilmişlerdir.

4.2. Öğretilere İlişkin Bulgular

Bu bölümde ön görüşme sonrası STEM’e dayalı öğrenme ortamında matematiksel muhakeme gelişiminin desteklenmesi amacıyla yapılan üç öğretime ilişkin bulgular sunulmuştur.

4.2.1 Birinci öğretim bölümü

Yüksek enerji üretimini destekleyen güneş paneli kurulum biçiminin matematiksel modellemesine dayalı olan *Güneş Panelleri* adlı birinci öğretimde problemin amacının ortaya koyulmasında, çalışmanın başında muhakeme yeterliliği gelişmiş olduğu görülen Fatime’nin sürece önderlik ettiği görülmüştür. Muhakemesi orta düzey grup temsilcilerinden Elif matematiği kullanma, orta düzeyin diğer temsilcisi Hamza ve en zayıf grup temsilcilerinden Necati ise gerçek yaşama ilişkin gerekçeleriyle dikkat çekmiştir.

Problem durumunun katılımcılar tarafından okunmasının ardından, orta düzey muhakeme gruplarının temsilcileri olan katılımcılar öncelikle problemde istenileni *“panelleri geliştirmek için kurulum biçimi ve şekli için matematiksel dayanak”* şeklinde eksik belirlerken, düşük ve zayıf düzey muhakeme gruplarının temsilcileri olan katılımcıların ise *“paneli en verimli şekilde kullanabilmek ve küresel ısınmayı durdurmak”* şeklinde yanlış belirledikleri görülmüştür.

Orta düzey Grup 2 ‘in temsilci katılımcılarından Hamza ve Elif amacı sırasıyla *“Güneş panellerini geliştirmek için kurulum biçimini belirleyeceğiz.”* ve *“Güneş panellerinin şeklinin matematiksel dayanağını oluşturacağız.”* şeklinde eksik belirlemişlerdir.

Düşük düzey Grup 1’in temsilci katılımcılarından İlknur, *“Güneş panellerini en verimli nasıl kullanabilirizi bulmak.”* şeklinde, zayıf düzey Grup 0 temsilci katılımcılarından Necati ise *“Amacımız küresel ısınmayı durdurmak.”* şeklinde yanlış belirlemiştir.

Ancak yüksek düzey Grup 4’ün tek temsilcisi Fatime *“Bunun için en yüksek verimi sağlayan bir panel kurulumu tasarlayıp matematiksel olarak yazmalıyız. En alttaki şu küçük paragrafta yazıyor (tekrar alt paragrafı okuyor)”* şeklinde amacı ortaya koymuş

ve metindeki en alt paragrafı gerekçe gösterip ifadelerini desteklemek için de tekrar okumuştur.

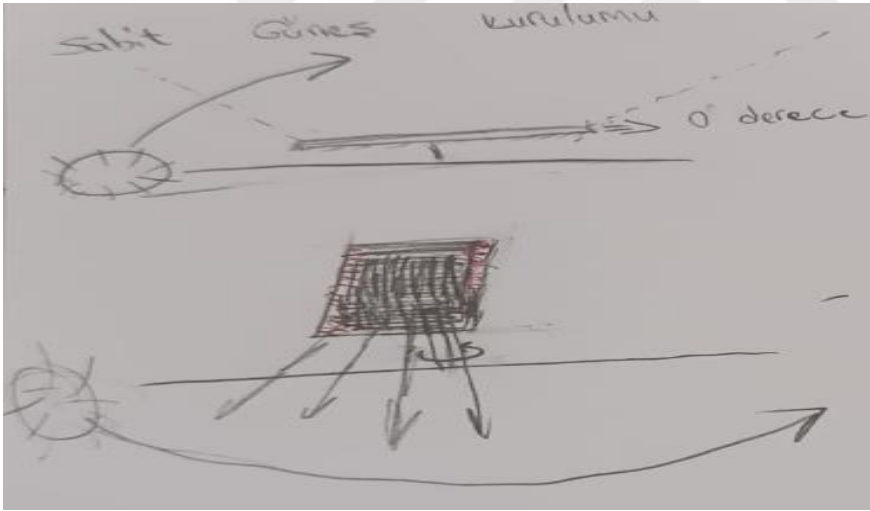
Muhakemesi zayıf düzeyden diğer katılımcı Necati, düşük düzeyden Aydan ve orta düzeyden Elif amacın gerçekleşmesini etkileyen faktörleri sırasıyla gerçek yaşama dayalı olarak “*panelin olduğu bina yüksekliği, havanın durumu*”, “*panelin bulunduğu coğrafi bölge*” ve “*panelin koyu renk oluşu, panelin büyüklüğü*” şeklinde kısaca belirtmişlerdir.

Necati: yükseklik... Güneş panelinin nereye koyulduğunun yüksekliği

Elif: Koyu renk olması ya da panelleri çok büyütebiliriz

Necati bu esnada amaçtaki kritik noktayı *en iyi verim* olarak doğru ayırt edip çözüm olarak “*düz panelli ve sensörlü güneş takip sistemini*” önermiş ve ardından çözümün gerçek yaşam temsiliğini kağıdına çizmiştir (Görsel 4.26).

Görsel 4.26 Necati’nin Güneş Paneli Öğretimindeki Çözüm Önerisi



Necati: Güneşin hareketlerine göre olabilir yani

Hamza: O da takip etsin

Öğretmen: Güneş'in hareketlerine göre nasıl yapalım?

Necati: Benim dediğim gibi bir sensör koyalım o sensör güneşi takip etsin ve ona göre bu sensör güneşin hareketine göre paneli hareket ettirsin. Güneş nereye gidiyorsa panelde oraya gitsin doğru zaten

Ancak bu esnada öğretmen Elif’in kritik nokta olarak ifade ettiği “*panel büyüklüğünün birim verimliliğe etkisini*” sorgulayınca, muhakemesi orta düzey olan

Hamza, panel büyüklüğünün birim orandaki verimliliği arttıracığına dair yanlış gerekçe sunmuştur.

Öğretmen: Peki... Güneş panellerini büyütüp küçültmek birim verimde nasıl etkilidir?

Hamza: Yani etkilidir. O kadar daha geliyor yani..

Burada Hamza toplam verimlilikle birim orandaki verimliliği karıştırmıştır. Ancak Hamza hemen ardından gerçek yaşam koşullarına dair farklı etmenlere odaklanınca Elif, Aydan ve Necati çözüme etki eden *bölge, şekil ve üzerine gelebilecek olası canlılar* şeklinde farklı faktörler daha eklemişlerdir.

Elif: Bulunduğu bölge...

Aydan: Şekli.

Necati: Onun üzerine bir canlı gelecek mi gelmeyecek mi? Canlı gelecekse çok verimsiz olur. Işınlr kesilir

Katılımcıların amaçtaki kritik noktaya yönelik bu düşüncelerinin hemen ardından Fatime'nin problemde istenileni gerekçesi ile ortaya koyması ile amacın farkına vardıkları ve Fatime ile birlikte amaca uygun çözüm arayışına girdikleri görülmüştür. Amaca uygun çözüm arayışına herkesin katılması üzerine katılımcılara çözüme ilişkin kritik noktalar sorulmuş ve hepsi *panel ve güneş ışınları* şeklinde çözüme ilişkin değişkenleri ifade edebilmişlerdir.

Elif: Güneş panellerimiz...(Aydan ve Hatice başıyla onaylar)

Fatime: Güneş ışınları

Necati: Güneş..

Hamza: evet..

İlknur: Bence de...

Öğretmen tarafından değişkenlerin çözüme yönelik bağlam özelinde birbirleriyle ilişkisi sorgulandığında da tüm katılımcılar kolay bir şekilde *panel yönünün Güneş'in yönüyle aynı olması* şeklinde çıkarım yaparak gerçek yaşamda değişkenlerin ilişkisini belirtebilmiştir. Ayrıca orta düzeyden Hamza çizim yaparak gerekçe sunmuştur.

Fatime: Yani hocam panel düz şekilde ışın dik geliyor. Alabileceği en yüksek verimi aldı mesela böyle gelseydi(daha eğik açıyla ışını canlandırıyor) bir yerde kırılıp gidecekti

Elif: Yönü güneşe bakar.

Hamza: Ben şöyle(çiziminde paneli Güneşe dönük yönünü göstererek) düşünüyorum hocam. Ne kadar ışın o kadar enerji anlamına geliyor. Güneş var olduğu sürece o günde her saniyesini değerlendirmemiz gerekiyor yani hep ona baksın.

İlknur: Evet..Şöyle batıyor (eliyle güneşin doğuş batışını canlandırıyor)

Hamza: Güneş hareketine göre tasarlarım. Çünkü O enerjiyi güneşten aldığımız için olabildiğince güneşe bakması gerekiyor Ne kadar güneşe bakarsa o kadar yüksek verim elde edeceğiz.

Öğretmen: Doğru mu söylüyor? Katılıyor musunuz?

Herkes: Evet

“Düz panelli ve sensörlü güneş takip sistemi” şeklinde ifade edilen bağlama özgü çözümün matematiksel olarak neye karşılık geldiğini ele alınırken muhakemesi zayıf olan Necati güneş ışınlarını ışına, dikliği 90 dereceye karşılık getirmiştir. Zemine belli eğiklikteki güneş panelini ise çizimde aynı yön ve aynı açı miktarıyla çizilen doğru parçasına karşılık getirip değişkenlerin matematikteki karşılıklarını belirleyebilmiştir.

Necati: Alacağı ışınların açısına göre çözelim... Şimdi ne kadar eğik gelirse o kadar düşük enerji ne kadar dik gelirse o zaman büyük enerji...

Öğretmen: Dikten kastın?

Necati: 90 derece.

Bu esnada muhakemesi yüksek olan Fatime de aynı şekilde ifade edip kağıt ve kalemle çözümün canlandırmasını yapmış ve diğer katılımcılar da onaylamıştır (Görsel 4.27).

Görsel 4.27 Fatime'nin Güneş Panelleri Öğretiminde Çözümü Canlandırması



Necati bu esnada “*bulut gelince sensör çalışmaz*” şeklinde gerçek yaşama dayalı bir gerekçe sunarak çözümün her zaman uygun olmayacağını belirtmiş, muhakemesi yüksek olan Fatime ise Necati’nin ve Hamza’nın gerekçe sunarken ortaya attığı iddiayı göz önüne alarak “*zaman ayarlı güneş paneli sistemi*” şeklinde yeni bir çözüm önerisi sunmuştur. Fatime yeni çözüm önerisinde bulut gelip güneş ışınlarını kesse bile paneller zamana göre hareketiyle daha sonra ortaya çıkan güneş ışınlarından verim alabileceğini dikkate alarak amaçtaki kritik noktayı es geçmeden yeni öneride bulunduğu görülmüştür. Herkes gerekçeyi karşın sunulan yeni öneriye onay vermişlerdir.

Necati: Şöyle... Bir bulut geliyor ama şimdi sensör, gidecek bulutu algılayacak. Bütün gün güneş paneli buluta doğru bakacak, o zaman hiç ışın almayacak. O zaman çok gereksiz olacak.

Hamza: Hocam aslında böyle değil. Hani sensör bir noktada iyi ama mesela o bulutu gördü bulut algılama diye bir şey yok buluttan gelen herhangi bir enerji yok onu algılaması için orada öylece kalır niye çünkü bulut güneşin önüne geldi hareket etmez durur bu sensörler şey çalışıyor nereden enerji ben orada mantığı ama eksik tabii yani

Fatime: Panelin hareketini sensör olmadan zamana bağlı da yapabiliriz. Aslında zamana göre yaparsak güneşin doğuş ve batış saatleri var, sensör yerine zamana bağlı yaparsak en azından bulut falan gelse bile panel devam edeceği için sonra güneşi hemen yakalar...

Öğretmen: ...herkes bu konuda hem fikir mi?

Herkes: Kesinlikle evet...

Hatice: Bu şekilde izlemesi gerekiyor (eliyle paneli _silgiyi hareket ettiriyor)

Ancak orta düzey gruptan temsilciler Elif ile en zayıf düzeyden Necati yeni çözüm önerisine dair kritik noktayı belirleyebilirken, orta düzeyden Hamza ise onaylayıp gerekçe sunabilmiştir.

Elif: Her zaman dik alacak

Necati: Yani Güneş ışınlarının 90 derecede gelecek şekilde ayarlanması lazım.

Hamza: Kesinlikle. Çünkü en yüksek verim lazım en yüksek verimde 90'da olduğu için hepsini alır.

Öğretimde sessiz kalan muhakemesi zayıf Hatice’den yeni çözümün gerçek yaşamda nasıl olabileceğine dair canlandırma yapması istenince silgiyi Güneş, kağıdı da

panel yaparak Güneş'in doğuş ve batışını dikkate alan küçük bir canlandırma yapmıştır(Görsel 4.28). Bu Hatice'nin yeni çözüm önerisinde söylenmemesine rağmen gündüz vakti olması gerekliliğini dikkate aldığını göstermiştir.

Hatice: Ama şöyle alanı büyük olduğunda daha verimli olur.

Ancak Hatice çözümün gerçek yaşama dayalı canlandırmada daha önce söylenmemesine rağmen gündüz vakti olmasını dikkate almış olsa da "...panel büyüklüğüyle birim verimliliğin arttırabiliriz" ifadesi gerçek yaşama dayalı kritik noktaları anlamlandırmada zorlandığını göstermektedir.

Görsel 4.28 Fatime'nin Güneş Panelleri Öğretiminde Çözümü Canlandırması



Canlandırılma esnasında Hamza saat için uygun nicel veriler sunarak çözüm sürecine katkı sağlamıştır.

Hamza: Mesela 5 ile 7... Güneş panelinde öyle bir şeyler kodlayacağız ki oraya programlayacağız... Mesela sabah 05.00'te şu taraf yönelip dönecek ta ki saat 7.00'ye kadar.

Muhakemesi orta düzey İlknur canlandırmayla çözümdeki bir değişkeni değiştirmenin amaca daha uygun olup olmayacağına dair sorgulamalarda bulunmuş ve esnek güneş panelinin kullanımına dikkat çekmiştir. Muhakemesi zayıf düzeyden Necati ve orta düzeydeki temsilcilerden Elif ve Hamza çözümü esnek güneş panellerini eğerek ve düz kullanarak canlandırmaya başlamış ardından çözümüne ilişkin uygun gerekçelerle iddianın yanlışlığını gerçek hayata ilişkin ifade etmişlerdir (Görsel 4.29).

İlknur: ..esnek güneş panel daha uygun olmaz mı?

Necati:.. Şimdi Güneş tepede olduğunda yani 12.00 olduğunda bütün güneş ışınları düz panelin bütününe gelecek. Ama İlknur'un dediğinde sadece bir kısmına, tepede düz çizgi şeklinde gelecek olur ama düz panelde ise hep düz olur.

Elif: En verimli noktası zaten tepe noktası... Yani en yukardaki kısım... Ama ondan sonraki noktalarda geriye kalan kısımlarda daha az verimli geliyor. Yani 90 dereceden sonra düşer... Bir noktaya burada(panelin en üst kısmını işaret ediyor) dik gelecek.Hamza: Gelse de hepsinde dik gelemez. Mesela şuraya(eliyle esnek panelin en üst kısmını doğru boyunca gösteriyor) vuruyor, şu kısma vuruyor ama şuraya (eliyle esnek panelin sağ ve soldaki eğilmiş kısmını gösteriyor) vurmuyor. Mesela dikte olduğum zaman çok vuruyor.

Görsel 4.29 Elif Ve Hamza'nın Güneş Panelleri Öğretiminde Çözümü Canlandırması



Ardından herkes ikna olmuş bir şekilde düz panel kullanımını tercih etmişlerdir.

Hamza: Düz

Necati: Bizimki, düz..

Diğer katılımcılar: Tamam.

Zayıf muhakemeye sahip Necati zaman ayarlı düz güneş paneli çözümünü matematiksel olarak eksik ifade ederken muhakemesi düşük olan İlknur ilk çözümdeki ilişkilendirmeyi ele alıp sadece matematiksel karşılıklarını ifade etmiştir.

Necati: Aynen Mesela şu saatte panel şu açıda olması gerekiyor. Eğer şu saatte panel şu açıda olursa 90 olur. Bir sonraki dakika, saniye, saat, her neyse yine o şekilde öyle bir tasarladığımız.

İlknur: ilki gibi..İki tane açı, zaman... x zamanı mesela diyelim

Necati: X doğuş ve batış saatlerini gösterirsin.

Elif: İşte bende onu söylüyorum.

Necati: Tamam tamam.

Çözümün canlandırılması aşamasında öğle vakti bulunmaya çalışılırken vaktin neye göre değiştiği ve hesaplanması problemi ortaya çıkmıştır. Muhakemesi düşük olan Aydan öğle vaktinin hesaplanmasında matematikteki aritmetik ortalama kavramıyla ilişkilendirerek anlamlandırmaya çalışırken, Elif ise hem işlem yaparak Aydan'ı doğrulamış hem de öğle vaktini ortancayla ilişkilendirmiştir. Hamza ve Necati ise gerçek yaşamdan gerekçe sunarak hesaplama yolunu reddetmişlerdir.

Aydan: Öğle için doğuş ve batışı...Toplarsınız ikiye bölersiniz.

Elif: 5'den 7'ye(öğleden sonrayı kastederek) kadar şey ..5 artı 19 . Hocam aslında öyle. 5 artı 19, 24 eder. 12'de tam öğle.saydım ...7...7...

Necati: ... Öğlen vakti. Bu, ülkeden ülkeye doğru değişir. Şimdi ben soruyorum yani bizim yörüngemiz daire şeklinde mi? Değil, biraz eğik şeklinde O zaman bizim çizeceğimiz grafik yarım daire şeklinde olmayacak. Böyle olmayacak. Biraz daha eğik bir şekilde olacak. O zaman parabola benzeyecek.

Hamza: ...Öğle saatleri her yerde aynı olmaz. Çünkü bölgeden bölgeye değişiyor. Evet..

Necati: Şimdi hocam, Aydan'ın fikrinin doğru olması için dümdüz bir yer olması lazım dağlar ve ovalar

Burada ön görüşmede ortalama kavramına ilişkin kavramsal bilgisi olmadığını “Benden ortalama hızını istemiş ama hız ile ilgili bir şey vermemiş.” ifadeleriyle veren düşük düzeyden Aydan adlı katılımcının öğle vaktinin bulunmasını aritmetik ortalama ile ilişkilendirme şeklinde ortaya atmasıyla ortalama kavramını kazanmaya başladığı görülmüştür.

Necati öğlen vaktinin hesaplanmasına yönelik süreçte gerçek yaşamla ilişkili olarak zihnindeki çözümden yola çıkmış, fark etmeden çözüme ilişkin kritik bir noktayı ifade etmiştir. Orta düzeyden Elif'in onaylamasıyla çözüme ilişkin kritik noktayı yani Güneş'in izlediği yol temsilini tekrar gerçek yaşamla gerekçelendirmiştir.

Necati: O noktayı gösterelim... parabol çiz....

Elif: Aslında mantıklı, doğru

Necati: evet yaaa....Parabol yarım daire şeklinde olduğu için ...şimdi ben soruyorum yani bizim yörüngemiz daire şeklinde mi? Değil, biraz eğik şeklinde O zaman bizim çizeceğimiz grafik yarım daire şeklinde olmayacak. Biraz daha eğik bir şekilde olacak. O zaman parabola benzeyecek. ...

Görsel temsil üzerinden ilerleyen çözüm sürecindeki kullanılan değişkenlerin matematiksel olarak karşılıkları belirlenirken orta düzeyden Elif gün uzunluğuna dair yanlış ifadeler verirken Elif'le aynı gruptan Hamza ve zayıf gruptan Necati ise gerçek yaşamdan karşılıklarını doğru ifade etmiştir.

Elif: Gün uzunluğunu tepe noktasıdır.

Necati: Hocam gün uzunluğu iki nokta arasındaki uzaklıktır.

Hamza: evet..Ama gündüz kısmını.

Necati: ...x ekseninin altında kaldığı zaman zaten o.. akşamı gösterir işte.

Herkesten çözüme yönelik görsel temsil çizimi istenince Elif hemen bir parabol temsili çizmiş ve matematikteki görsel temsillerin çözümdeki anlamına yönelik ifadelerinde de y eksenini denilen değişken hariç geriye kalanları doğru olarak gerçek yaşama aktarmıştır.

Elif: Parabol, Güneşin gelme açısını verecektir. Ama o andaki açısı zaman bağlı.. x eksenini zamanı y eksenini güneşin gelme açısını gösterir.

Öğretmen: Tamam, o zaman herkes çözümüne göre çizsin. ...Şimdi herkesin bir çizimlerini kontrol ediyorum. Herkes parabolün kollarını aşağıya doğru çizmiş. Neden?

Fatime: Güneşin doğup battığına göre şey yaptık.

Öğretmen:Siz de mi öyle düşündünüz? Tamam.(O esnada çizimlerin hepsinin benzer şekilde aşağıda olduğunu görür) Herkes güneşin doğuş batışını izlediği için parabol, kolları aşağıya bir parabol çizdiğinizizi belirttiniz. Peki...

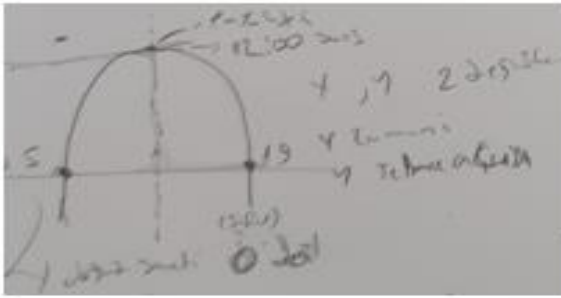
O esnada her katılımcıya ait çizimler(Görsel 4.30) incelenince herkesin parabolün kollarını aşağıya doğru çizdiği ve Fatime'nin gerekçe olarak gerçek yaşamdan Güneşin hareket yörüngesine benzer şekilde ele aldığı görülmüştür. Ayrıca çizimlerde Necati hariç herkes daha önce ifade edilen 5:00 ile 19:00 arasındaki saatleri ele alırken zayıf gruptan Necati saat değişkenine ait nicel değerleri ilk önce -7 ve 7 şeklinde ardından -7 ve 5 şeklinde gerçek yaşamdan uzak yanlış olarak belirlemiştir.

Necati: Hocam, eksi 19 yazacağım ya. Şimdi 19 ne bizim bildiğimiz saat? 7. Değil mi? Şimdi hemen buraya 7 yazamam hocam. Hani bu sayı doğrusunda doğru ters. -7 diğeri 7 olacak...

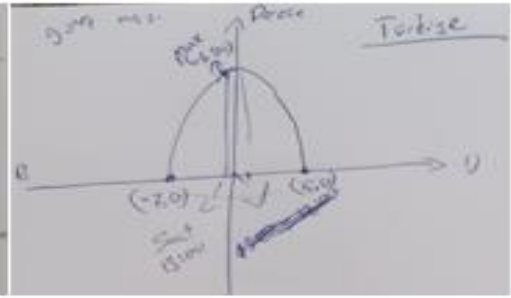
Nedeni sorulunca da matematikteki sinüs fonksiyonu ile ilişki kurarak yanlış gerekçe sunmuştur. Bu esnada yalnızca yanlış gerekçe sunmakla kalmamış aynı zamanda görsel temsili gerçek yaşama aktarırken gerçeğe uygun olmayan durumlar sunduğu görülmüştür.

Necati: Öğle saatinden sonra açı azalacağı için sinüs değerine göre yaptım. Şimdi sin değeri burada şey oluyor. Sıfır. Buraya kadar da 1 e çıkmıyor mu? Tamam.. sonra birden işte Güneş batıyor ya, o zaman açı azalacak. . Yani sıfır yazdığımda hocam burada öğlen saati işte...

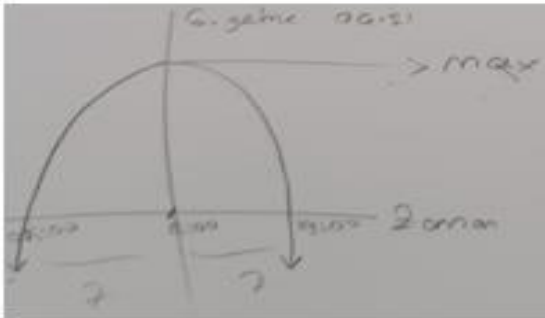
Görsel 4.30 Güneş Panelleri Öğretimine İlişkin Çözüme Ait Çizimler



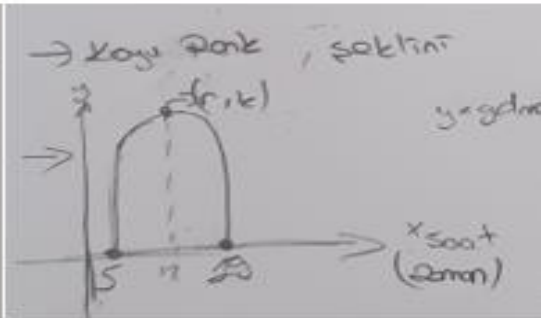
Hatice'nin çizimi



Necati'nin çizimi



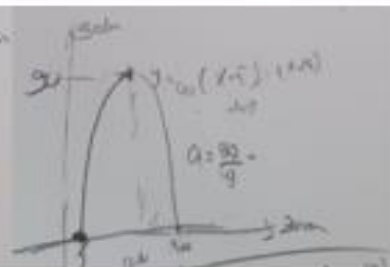
İlknur'un çizimi



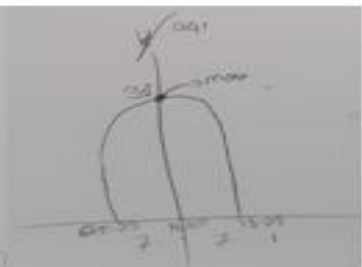
Aydan'ın çizimi



Hamza'nın çizimi



Elif'in çizimi



Fatıma'nın çizimi

Ancak geriye kalan katılımcılardan aynı zaman aralığını ele aldığı için aynı sonucu Fatime önderliğinde “*öğlen saat 12*” şeklinde doğru olarak paylaşmışlardır.

Fatime: Evet öğlen saat 12, buraları toplayıp ikiye böldüm.

Bu esnada muhakemesi zayıf gruptan Necati kendi zaman aralığını -7 ve 5 olarak değiştirip yeniden denemiş ama arkadaşları aritmetik ortalama kavramı ile matematiksel işlem yapmalarına rağmen kendisi aritmetik ortalamayı kullanmamış, gerçek yaşamı dayanarak alarak ortancayı belirlemeyi deneyip yanlış yapmıştır.

Necati: Hayır, sıfır değil hocam aslında. Aslında biraz şey, x eksiğinin pozitif tarafına doğru biraz daha yakın...Çünkü hocam biz 12 ile bir arası aldık ya, o kime daha çok yakın olacak? 5'e. Biz farklarını aldığımızda 5'e daha yakın olduğunu, sabah 5'e daha yakın olduğunu görürüz. O zaman benim problemim işte burada maksimum değil de bunların ortasının x değeri, işte ondan sonra yükselttim.

Muhakemesi yüksek olan Fatime, orta olan Elif ve düşük gruptan İlknur da aritmetik ortalamaya dair matematiksel işlemi yapıp sonucu -1 şeklinde doğru bulmuşlarsa da Necati hala kabul etmemiştir. Necati *mutlak değerden* faydalandığını belirtip yanlış açıklayınca da Elif ve İlknur *uzaklık* ile ilişkilendirmelerde bulunmuştur.

Elif: Orta noktasını bulmuyor musun sen?

Necati:Orta noktası pozitif tarafta olacak.

Necati:Hocam, baştan şöyle bir şey diyeyim mi? Üretilen enerji miktarı.

Elif: Uzaklığını buluruz.

Necati: Mutlak değerini buluruz. Hocam, mutlak değerini ikiye böleriz.

İlknur: Aradaki uzaklık

Matematiksel muhakemesi zayıf olan Necati'nin aritmetik ortalamayı anlamlandırırken mutlak değer ile ilişkilendirmesi çözüme ait görseli neden y eksenine göre simetrik şekilde çizmesinin ve güneşin doğuş ve batış saatlerinin neden -7,7 şeklinde aldığıının sebebi olabilir.

Parabole ait denklemi matematiksel olarak nasıl elde edebilecekleri sorulunca orta düzeyden Elif denklemi yazmak için gereken nokta sayısını belirtip gerekli noktaları da bulabilmiştir. Ancak parabol üzerinde ele aldığı noktaların gerçek hayatta neye karşılık

geldiklerini de ifade ederken bazılarını doğru bazılarını yanlış ifade etmiştir. Ayrıca muhakemesi düşük düzeydeki grup temsilcilerinden Aydan da bu konuda oldukça zorlanmış, yanlış ifadelerde bulunmuştur. Bunun nedeni çözüm aşamasında fark etmeden Elif'in "Parabol, Güneşin gelme açısını verecektir. Ama o andaki açısı zaman bağlı.. x eksenini zamanı y eksenini güneşin gelme açısını gösterir." şeklinde y eksenine dair gerçek yaşamla ilgili yaptığı hatayı sürdürmeleridir.

Elif: x eksenini kesen iki nokta var ama yeterli değil... bize tepeyi veren nokta lazım ya da herhangi bir nokta da olur. Yani üç nokta.. İşte 0 ile 5, 5 ile 0 var (kağıdına (0, 5), (5, 0) yazar). 5 ile 0'da (burada (5,0) noktasını gösteriyor) saat 5'te 0 derecede panele denk gelmiş ışın..

Aydan: y eksenini güneşin gelme açısı...

Ayrıca muhakemesi zayıf olan Necati'nin parabole ait tepe noktasının bağlama özgü anlamını yanlış ifade ederken, muhakemesi orta olan Elif de bu ifadenin uygun olabileceğini onaylamıştır. Ancak muhakemesi yüksek olan Fatime ilk başta çözümü nasıl yaptıklarını hatırlatarak iddiaları reddetmiştir. Bu esnada Necati parabolün, üretilen enerji miktarını temsil ettiği şeklindeki yanlış ifadesini gerçek yaşamada dayalı savunmuştur.

Necati: tepe noktası... üretilen enerji miktarı

Elif: Olabilir, evet.

Hamza: Nasıl yani?

Fatime: Hocam hani verimi ona göre ayarlamıştık, Panel hep hareket ediyordu olmaz ki.

Necati: Ya tamam da hocam yani. Biz ne kadar şey yapsak da illa bir enerji kaybı olacak yine.

Sonra tüm katılımcılar çözümü düşünürken muhakemesi orta düzeyden Hamza canlandırma ile gerçek yaşamdaki çözümlerine geri dönüp öğle saatinde panelin olması gereken eğiklikle matematiksel temsildeki anlamının da aynı olması gerektiği çıkarımını yapmıştır. Canlandırmanın çizimle örtüşen sonuçlar vermediğini fark edince de görsel çizimin doğruluğundan emin olamamıştır. Bunun üzerine Necati canlandırmayla gerçek yaşamda olmasını beklediği sonucu ve çizimi ele alıp y ekseninin güneş panelinin zeminle olan açısına ait olduğunun doğruluğunu sorgulamaya başlamışlardır. Bu süreci izleyen

Necati ve Elif de benzer bir karmaşıklığa düşüp çözümde gerçek yaşamda ne olması gerektiğini ele almışlardır.

Hamza:Hocam şimdi biz beşe sıfır dediğimizde hani. Sıfır derecede böyle olacağına göre hani nasıl dik gelecek? Gelmez ki saat beşte.

Necati:Peki bir saniye. Biz burda neyin derecesini yazıyoruz Panelin derecesini demi yaa..

Elif: Saat 12'de 90 derece olmalı

Necati: Bana göre de saat 12'de 90 derece... burada(x eksenini kast ederek) saat alıyorsun. ...

Ardından Elif matematikteki görselden cebirsel temsile geçiş için görsel üzerindeki noktaları söyleyerek parabole ait matematiksel denklemi bulmaya yönelmiş ve bu esnada nasıl bulabileceğine dair gerekçeler sunup denklemi elde etmiştir. Aynı şekilde Necati hariç diğer katılımcılarda onun çözümünü örnek alıp yazmışlardır. Necati ise kendi çözümüne göre yapıp farklı bir denklem bulmuştur. Ancak öğle saatine ve eğikliğe dair temsil değerlerini kendi denkleminde düzenleyip matematiksel işlem yapınca sonucun aynı olup olmayacağını sorgulamış ve denklemleri karşılaştırıp aynı matematiksel sonuçları bulmuştur.

Elif: Bu şeydi, grafiğin denklemini yazabiliriz. Ya işte... X ekseninde 5'in sıfırladığı değerleri bulacağız...Çünkü mesela 5 ve 19'da sıfırlıyor. O zaman biz şu şekilde yapabiliriz. Mesela X eksi 5 çarpı X eksi 19. Ama bunun da katsayısının kaç olup olmadığına bilmiyoruz. Ben buna A diyeceğim. Burada zaten tepe noktasını vermiştik. 12'ye 90 yerine yazarız. A'yı buluyoruz.90 bölü 49 çarpı x eksi 12 nin karesi..

Necati: Sen şimdi doksan dediğinde benimle aynı çıkartacaksın.

Bu esnada Necati sınırlamaların olması gerekliliğini ifade ederken Elif reddetmiş, ancak Necati gerçek hayatta panelin çalışmayacağı bir zaman örneği vererek Elif'i ikna etmiştir.

Necati: ...hocam hani aşağı doğru gitmiyor. Biz burada sınırlamayı koymadık.

Elif: Sınırlar burda bak. Gerek yok..

Necati: ...örneğin 20 yazsın. .

Elif : Negatif çıkıyor

Necati: Şimdi saat 12'de. Panelin olması lazım 0 derece değil mi? O zaman 12 olduğunda en aşağıda olacak. Tamam işte negatif çıkmaması lazım

Elif ikna olduktan sonra cebirsel olarak sınırlamaları da eklemiştir.

Elif: Tanım kümesi 5 ile 19 arasında (kapalı parantezde yazar)

Necati o esnada denklemin gerçek yaşamda hangi sorulara cevap verebileceği sorulunca çözüm adına yapılan yanlışlığı fark edip ters bir örnekle çözümün yanlış olduğunu doğrulamıştır. Ardından iddiasını desteklemek için gerçek yaşamda ile matematik denklemdaki değerleri karşılaştırıp yanlışlığı gerekçelendirince tüm katılımcılar ona katılmışlardır.

Necati: 10 saattir boşuna uğraşıyoruz hocam. O zaman paneli... Hocam tam tersi olması lazım... Şimdi saat 12'de. Panelin olması lazım 0 derece değil mi? O zaman 12 olduğunda en aşağıda olacak.

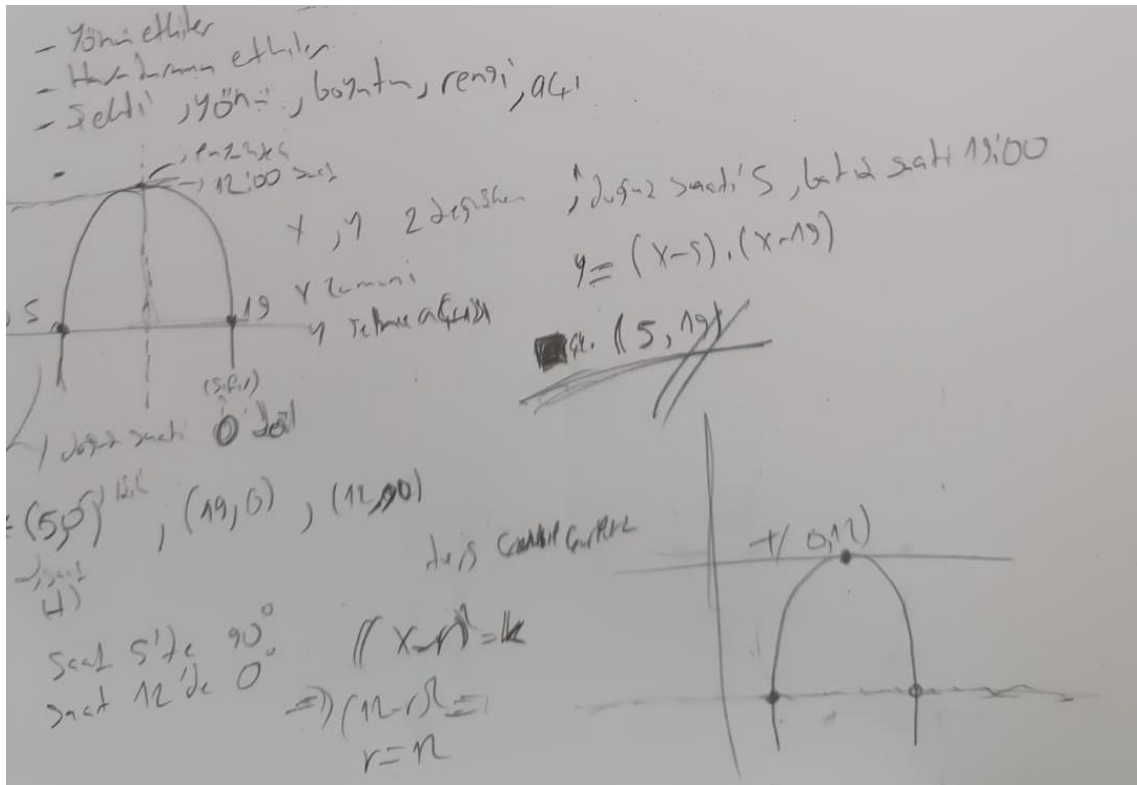
Tüm katılımcılar yeniden matematiksel çözümü belirlemeye başladığında muhakemesi zayıf olan Hatice denklem, geriye kalanlar katılımcılar ise grafik temsili kullanmayı tercih etti. Elif grafikte çözümü belirlerken sonra gerçek yaşamdaki çözüme göre olması beklenen nicel değerleri kullanarak hem matematiksel görseli düzenlemiş hem de görsel temsilin doğruluğu kontrol etmiştir.

Elif: Söyleyelim mesela, biz dedik ya saat 5'te 90. Saat 5'te zaten bu 0 olacak. Kontrolde 90 sağladı. Mesela 19 diyelim. 19 dediğimizde yine 90 için bu durumun direkt sağladığını görüyoruz.

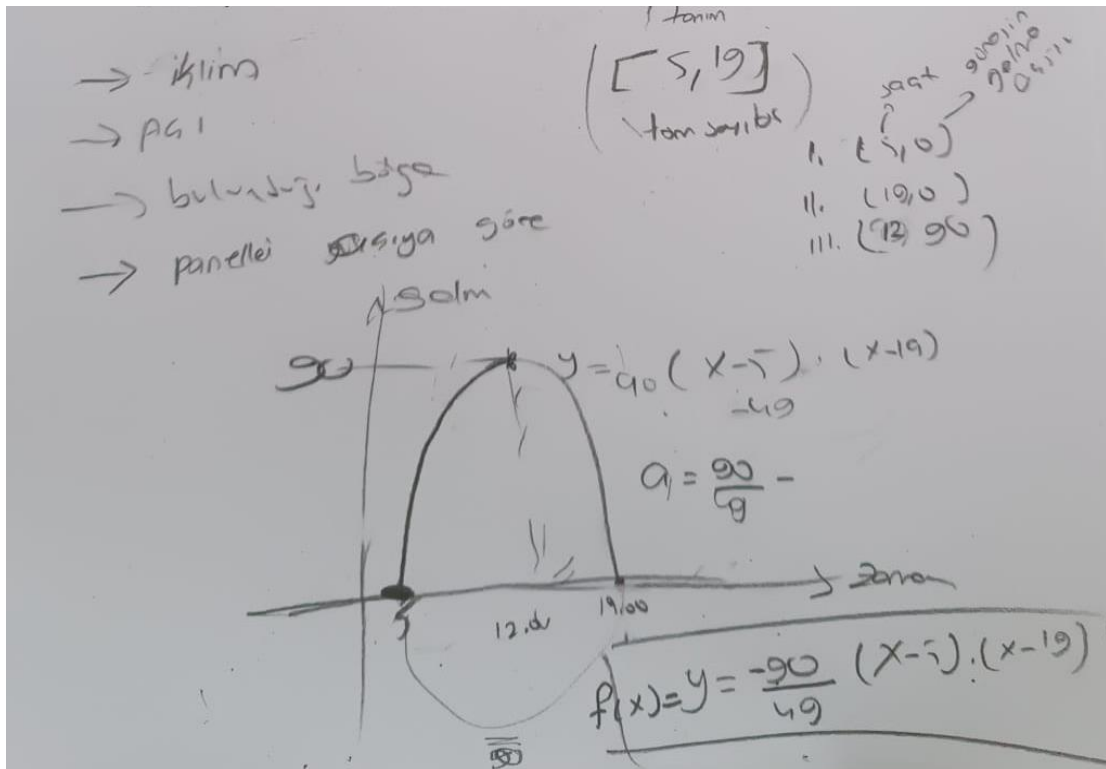
Bu esnada tüm katılımcılar Elif'in yaptıklarının doğruluğunu kabul edip kendi kağıtlarında da matematiksel çözüme ulaşabilmişlerdir. Ardından Elif geometrik temsiller arası ilişkiyi cebirselde olarak da yazabilmiştir. Elif yeni çözüme ait görsel temsili ile eskisi arasında ilişkilendirmeyi kurup görsel temsilden cebirsel temsile geçiş yapabilmiştir. Hamza'nın görsel temsili gerçek yaşama ilişkin gerekçeli sınırlamalarıyla da tüm katılımcılar çözümün doğruluğuna katılmışlardır.

Elif: Yani şöyle olacak, birine $f(x)$ diğere $g(x)$ dersek $f(x)$ şöyle olacak eksi $g(x)$ artı 90 olacak. Bu grafik aşağıdaki ve eksi 90 oldu. Ama bizim istediğimiz bu değil ki. Ben üstteki grafiği istiyorum değil mi? Ben bu yüzden 90 birim öteleyerek bunu koydum.

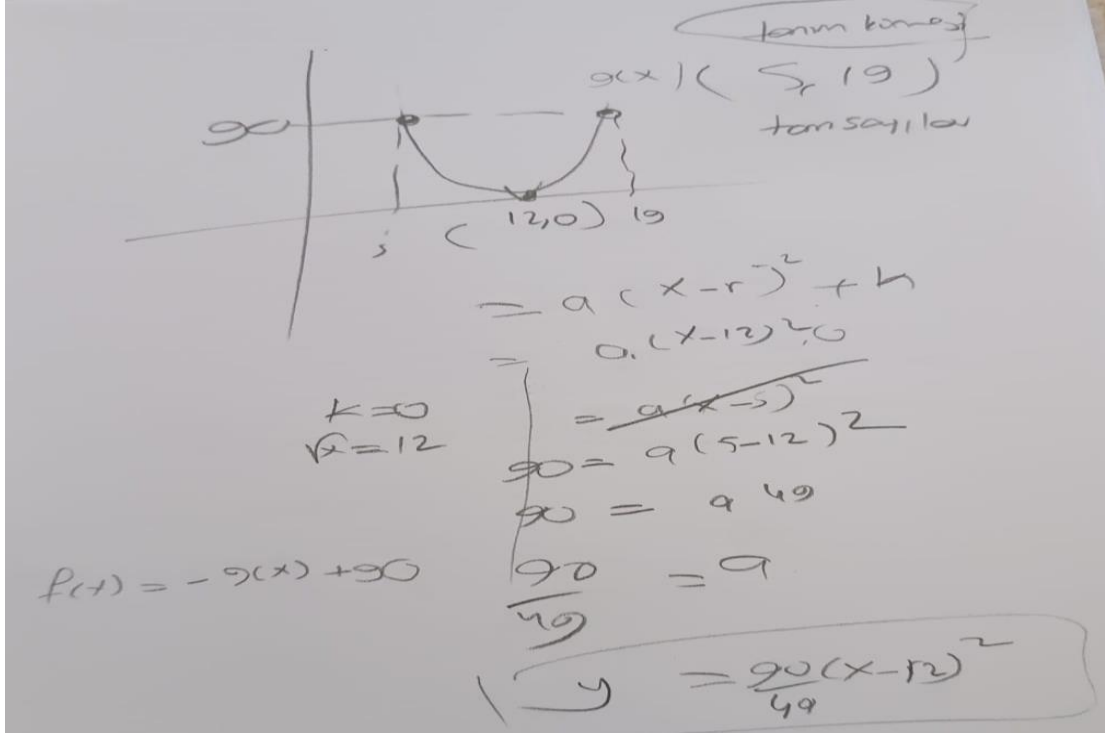
Görsel 4.33 Hamza'nın Güneş Panellerine İlişkin Çözümü



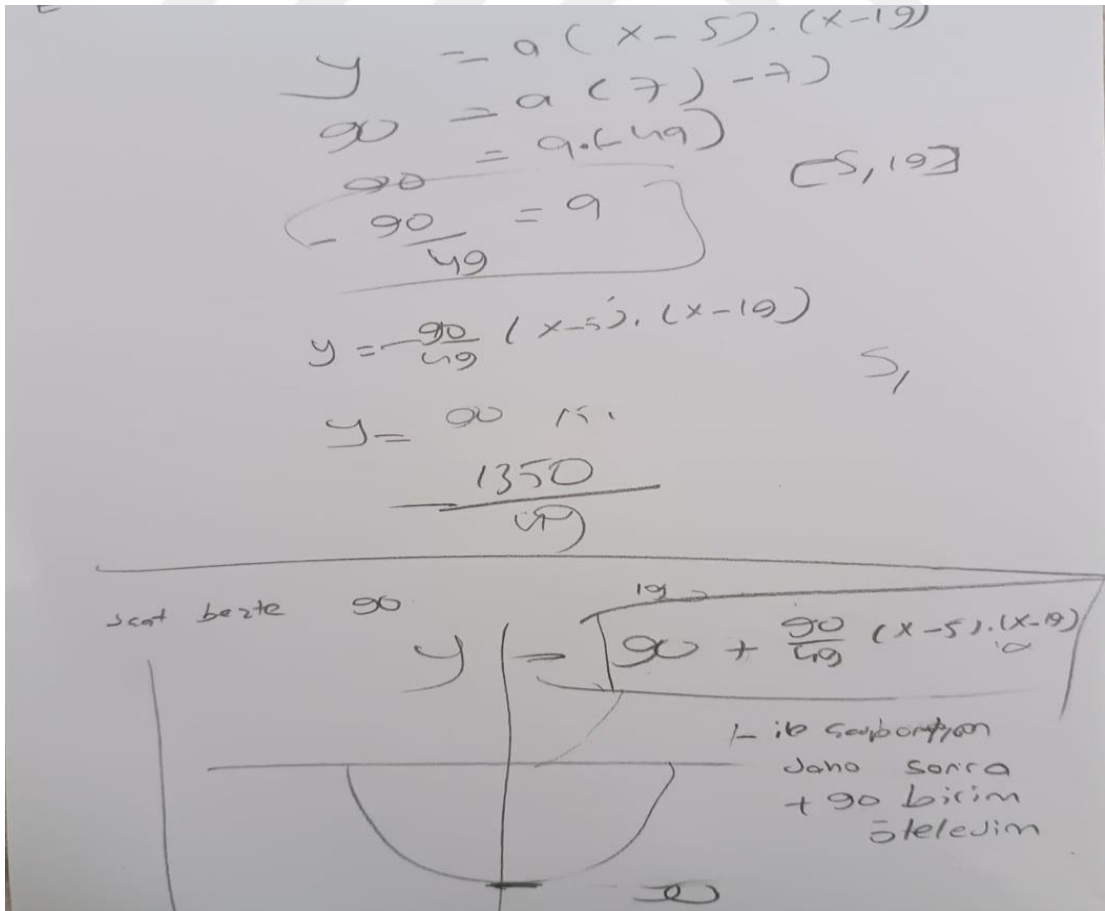
Görsel 4.34 Elif'in Güneş Panellerine İlişkin Çözümü -1



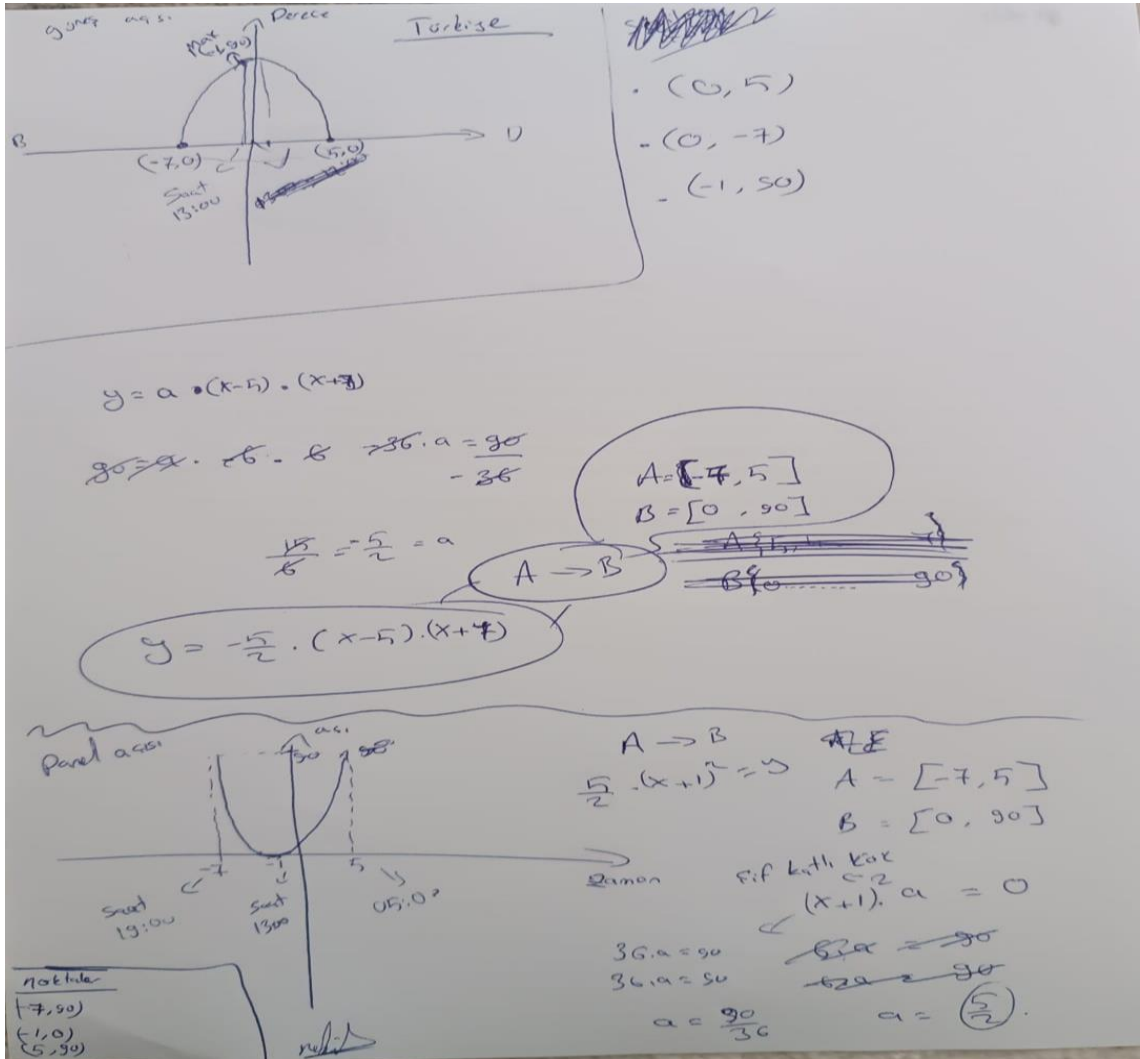
Görsel 4.35 Elif'in Güneş Panellerine İlişkin Çözümü -2



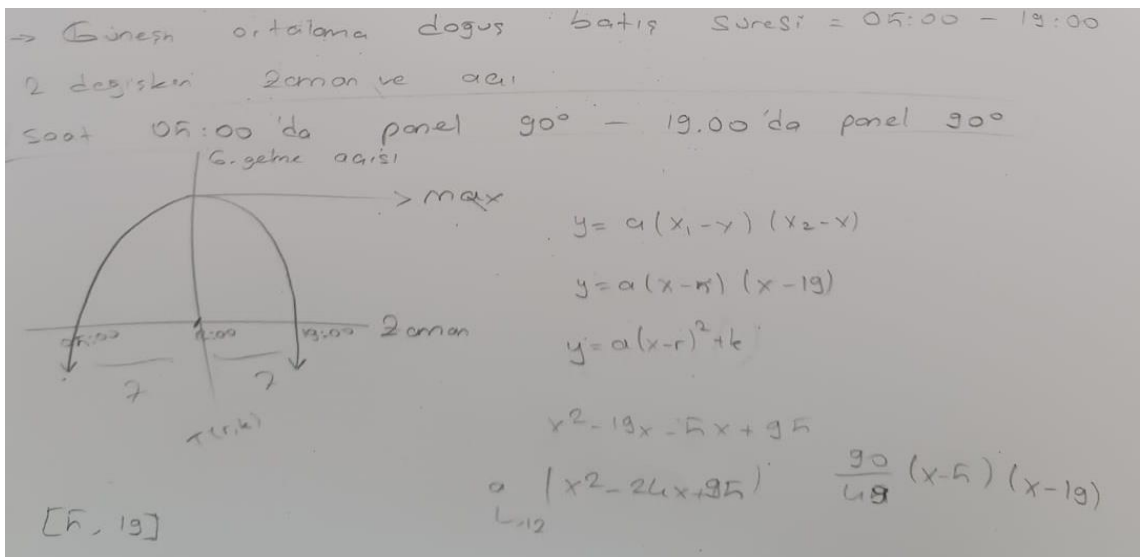
Görsel 4.36 Elif'in Güneş Panellerine İlişkin Çözümü -3



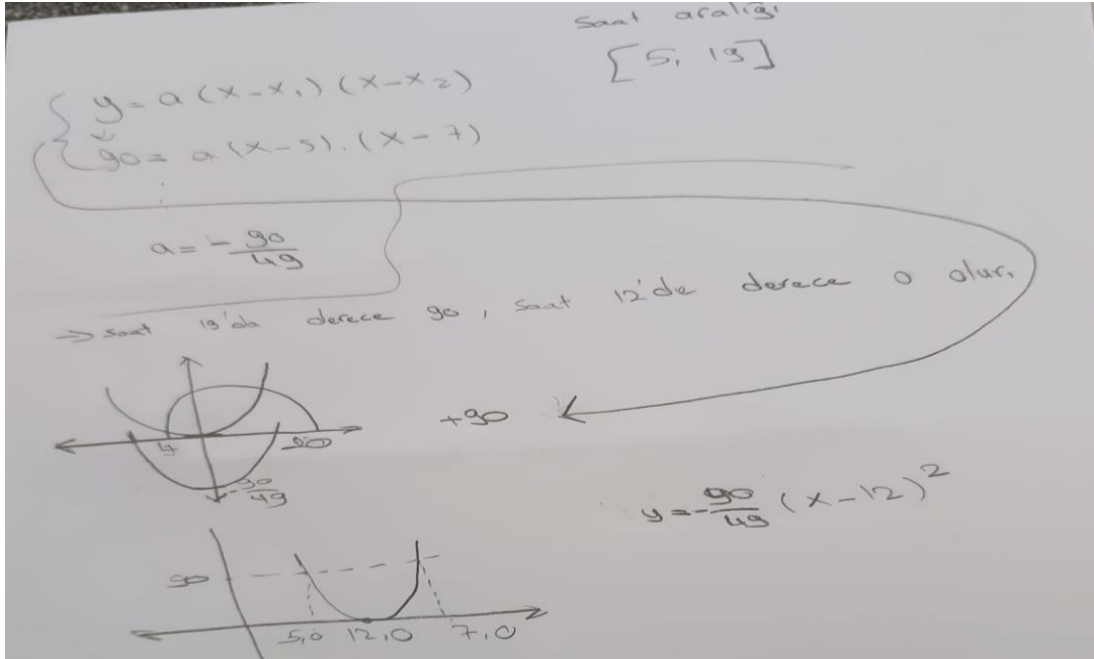
Görsel 4.37 Necati'nin Güneş Panellerine İlişkin Çözümü



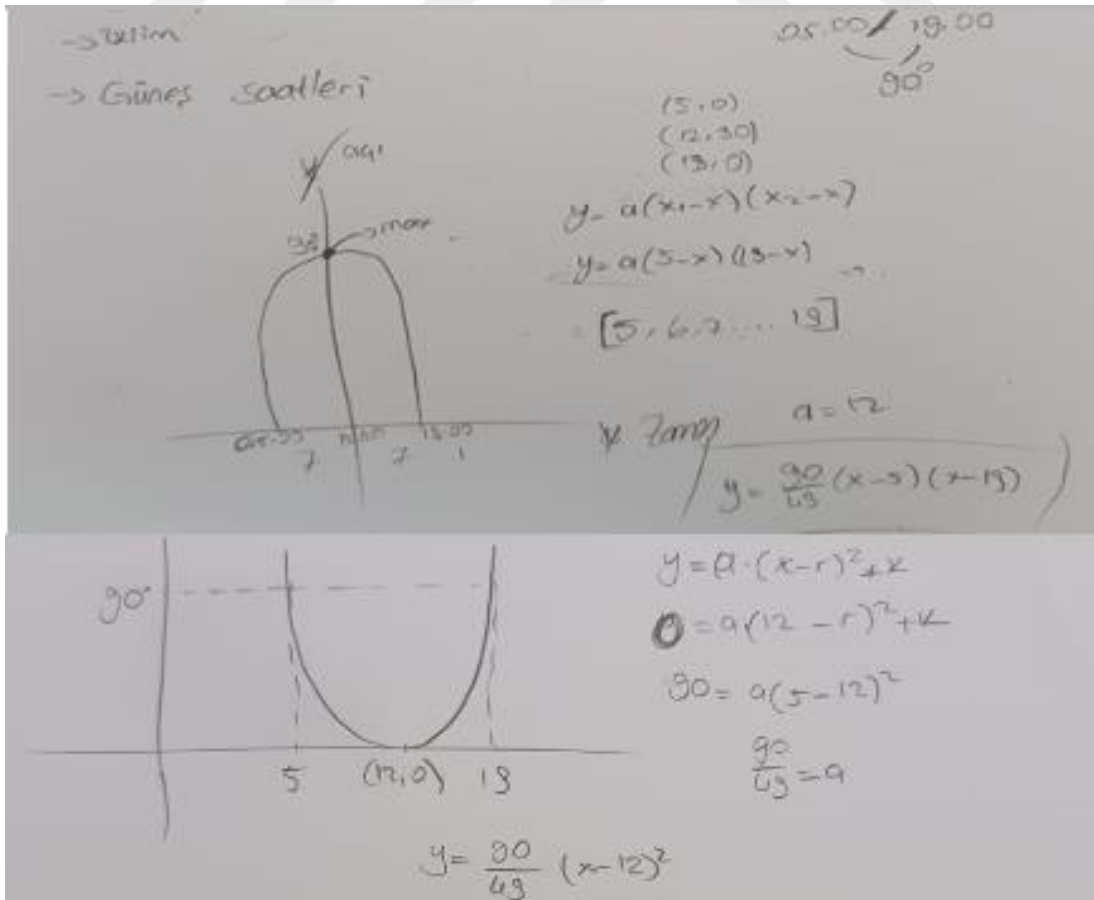
Görsel 4.38 İlknur'un Güneş Panellerine İlişkin Çözümü



Görsel 4.39 Hamza'nın Güneş Panellerine İlişkin Çözümü



Görsel 4.40 Fatime'nin Güneş Panellerine İlişkin Çözümü



4.2.2 İkinci öğretim bölümü

Belli süredeki bir videoyu çekmede sesin matematiksel modellemesine dayalı karar verme durumu olan *TEKNOFEST'e Hazırlık* adlı ikinci öğretimde problemin amacının ortaya koyulmasında, birinci öğretimde olduğu gibi yüksek düzey muhakemeye sahip Fatime'nin sürece önderlik ettiği görülmüştür. Muhakemesi orta düzey grup temsilcilerinden Elif ve en zayıf grup temsilcilerinden Necati ise matematiği etkin kullanma anlamında dikkat çekmiştir.

Problem durumunun katılımcılar tarafından okunmasının ardından, *Güneş Panelleri'nde* amacı yanlış belirleyen orta düzey muhakemeye sahip Hamza istenileni “*en anlaşılabilir videoyu kaydetmek*” şeklinde eksik belirlerken, benzer şekilde öncekinde amacı yanlış belirleyen zayıf düzey muhakemeye sahip Necati ise “*video süresi 1,5-2 dakika arası olmalı*” şeklinde bağlamda yer alan bilgileri aktarıp istenileni anlamakta zorlanmıştır. Ayrıca Necati problemi tam anlamadan çözüm önerilerinde bulunmaya başlamıştır. İlk çözüm önerisinde “*Ali yavaş konuşacak ama sıkıştırdığımızda... Ali, nasıl diyeyim ben şu an, diyelim ben X ile konuşuyorum. Ali benim hızımın yarısı kadar konuşsun. Video 4 dakika sürüyor ya. Geri sıkıştırdığımızda 2 dakika oluyor ya. .. olsun anlaşılsın.*” şeklinde bir ifade kullanmıştır. Burada her ne kadar “*anlaşılabilir*” ve “*2 dakikalık*” bir video ile istenilenleri dikkate ele alsa da Ali'nin yarı hızında konuşunca 4 dakikalık video süresinin 8 dakikaya çıkacağını ve sıkıştırınca anlaşılır olsa da 2 dakika kalamayacağına dair bir sonuç çıkaramayıp mantığa uygun olmayan bir çözüm önermiştir. Yüksek düzeydeki Fatime ise çözümün mantıksız olduğunu orantıya dayalı olarak nicel örneklerle gerçek yaşamdan gerekçelendirmiştir. Ancak Necati isteneni dikkate almadan tekrar bir öneri daha sunmuştur.

Necati: Ali yavaş konuşacak ama sıkıştırdığımızda... Ali, nasıl diyeyim ben şu an, diyelim ben X ile konuşuyorum. Ali benim hızımın yarısı kadar konuşsun. Video 4 dakika sürüyor ya. Geri sıkıştırdığımızda 2 dakika oluyor ya. .. olsun anlaşılsın.

Fatime: Ama hayır Yavaş konuştuğunda da o sefer uzar. Mesela 4 dakika konuşmuş, yavaş konuştuğunda 6 dakika olur mesela. Tekrar sıkıştırdığında $2x$ ' e aldığı Yine 2 dakika olmaz.

Necati: Gereksiz kelimeleri atsin o zaman.

Öğretim metninin sesli olarak tekrar okunmasıyla öğretmen amaç için kritik noktalar tekrar ele almak için öğretmen “çözüm için 1,5-2 dakikalık video kaydı yapma” gibi alternatif bir çözüm olup olmadığını sorgulamıştır. Bu esnada katılımcıların hepsi olamayacağını ifade ederek kayıt süresinin değiştirilemeyeceğini anladıklarını göstermişlerdir.

Fatime: ...hocam ilk ortalama 4 dakika diyor.

İlknur: Ortalama 4 diyor

Hamza: Böyle bir durum yok. Konuya bağlı olarak mecburen 4 dakika...

Aydan: Hayır hocam burda vermiş zaten 4 dakika süremiz

Elif: 4 dakika.

Hatice: Evet..4 dakika

Necati : Ya normal konuştuğunda 4 dakika...

Katılımcılar tekrar amacı bulmaya yönelince muhakemesi zayıf düzeyden Necati amacı eksik, yüksek düzeyden Fatime ise tam ifade etmiştir. Diğer katılımcılar da onaylamışlardır.

Necati: Sesi anlaşılabilir şekilde sıkıştırmanız lazım.

Necati: Herkes için yaklaşık 4 dakika...

Fatime : O videoyu 4 dakikadan 2 dakikaya düşüreceğiz.Ama sıkıştırarak...anlaşılacak

Amacın kritik noktaları sorulunca katılımcılar “süre ve anlaşılabilirlik” olarak ifade edebilmişlerdir. Orta düzeyden İlknur o esnada problemde verilen kritik noktalardan “herkesin yaklaşık 4 dakikalık video kaydını” dikkate almadan bir çözüm önermiştir. Ancak Fatime önerilen çözümün bağlama uygun olmadığını metinde verilenler aracılığıyla gerekçelendirince katılımcılar da İlknur’un çözümünü reddetmişlerdir.

İlknur: Ya aslında 6 dakika falan konuşsa ama daha fazla sıkıtırırsak

Fatime:Burada çünkü 4 dakika sürüyor, içeriklere uygun bir durum olmaz.

Hamza: Çözümü devam ettirmeyelim. Fatime'nin dediği doğru (diğer katılımcılar da onaylıyor)

Bunun üzerine öğretmen “Herhangi biri tarafından çekilen 4 dakikalık bir videonun sıkıştırılınca anlaşılır bir şekilde 1,5-2 dakikalık bir videoya dönüştürülmesindeki esas sorunun ne olabileceğini” sormuştur. Muhakemesi yüksek olan Fatime ve orta düzeyden Elif esas sorunun sesin sıkıştırılınca anlaşılması olduğunu fark etmiştir.

Fatime: Hocam bence kaymalar olur, öyle yaparsak yani. Ses anlaşılabilir. Sesle ilgili ..sesin sıkıştırılınca anlaşılması sorun...anlaşılabilir olmalıydı yaaa...

Elif: Anlaşılır iki dakikalık bir video olması gerekiyor ama bizim bunu sıkıştırarak elde etmemiz gerekiyor.

Esas sorunun ifade edilmesiyle öğretmen “ses ve matematik arasında nasıl bir ilişki olduğunu” sormuştur. Bunun üzerine Fatime, Elif, Hamza ve Necati ilk önce Fizik dersinde öğrendikleri terimleri ifade etmiş, ardından sesin trigonometrik fonksiyonlarla ilişkisine değinmişlerdir.

Necati: Fizikteki frekans ve dalga boyu, kalınlık.

Fatime: Titreşim, gürülük

Elif: incelik var.

Fatime: Ses dalgalar halinde yayılır. Trigonometrik fonksiyonlar zaten.

Necati: Çizersek öyle fonksiyonlar ...

Elif: Evet..Sinüs, kosinüs,

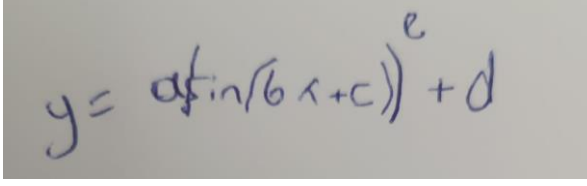
Hamza: Kos...Sinüs ...

Sesi trigonometrik fonksiyonlarla ifade ettikten hemen sonra ilk öğretimde matematiği kullanmasıyla dikkat çekenlerden muhakemesi orta düzey Elif cebirsel olarak yazmıştır. Muhakemesi zayıf olan Necati ise cebirsel denklemde birkaç değişiklikle ifade etmiştir. (Görsel 4. 41 ve Görsel 4. 42)

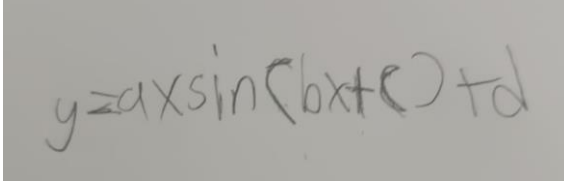
Elif: y eşittir a, sin bx artı c, artı d (kağıdına $y = a \cdot \sin(bx+c) + d$ yazar)

Necati: A çarpı sin bir de onun derecesi, bx+c bir de o dereceyi kapattık bir de onun bir değişkeni olması lazım sabit terimi d (kağıdına yazar)

Görsel 4.41 Necati'nin Sese Ait Trigonometrik Denklemi


$$y = a \sin(bx+c)^e + d$$

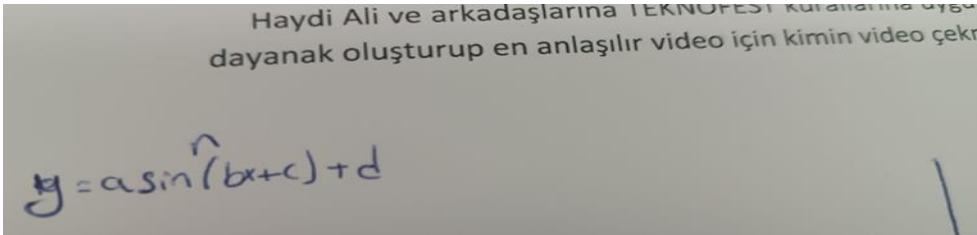
Görsel 4.42 Elif'in Sese Ait Trigonometrik Denklemi


$$y = a x \sin(bx+c) + d$$

Bu esnada diğer katılımcılarda aynı denklemleri yazmaya başlamıştır (Görsel 4.43). Denklemlere göz atan öğretmen elde ettikleri denklemde yer alan değişkenler arasındaki ilişkiyi daha kolay bir şekilde belirleyebilmeleri için Geogebra'da sürgü ile yapmalarını istemiştir.

Öğretmen: O zaman herkesin sinüsle ilgili genel bir denklemi var. Y eşittir a çarpı sinüs b x artı c üssü n artı d olarak almışsınız. Bir de İlknur şey kullanmış. Evet gördüm n yazmış. Bir de sinüs üzerine n yazmış. Şimdi bir sesin trigonometri fonksiyonlarıyla böyle ifade edildiğini söylediniz. Şimdi Geogebra'da biz genel denklem için hangi değişkenleriniz var elinizde? Hatice Çizsin. Gel Hatice. Geogebra şimdi sinüs fonksiyonuna ait denklemin değişkenlerini sürgülüyle birlikte yapalım ve inceleyelim olur mu?

Görsel 4.43 Sese Ait Trigonometrik Denklem



Haydi Ali ve arkadaşlarına TEKNOFEST kuralımına uygun olarak bir video çekerek dayanak oluşturup en anlaşılır video için kimin video çekti

$$y = a \sin(bx+c) + d$$

Öğretmen daha önceki öğretimde oldukça sessiz kalan muhakemesi zayıf grup temsilcisi Hatice'den çizmesini isteyince, Hatice tahtaya çıkıp Geogebra adlı geometri yazılımında sesin trigonometrik denklem hali olarak ifade ettikleri sinus fonksiyonuna ait cebirsel denklemin değişkenlerine grup yardımıyla sürgü eklemiş (Görsel 4.44) ve Geogebra bu denklemin grafiğini otomatik olarak çizmiştir (Görsel 4.45).

Öğretmen : Şimdi Hatice genel denklemi sürgüleriyle birlikte Geocebra da bir yazmayı deniyor. a'yı,, b'yi yazdı, sürgü yaptı. Başka hangi değişkenlerimiz vardı?

Elif: c, d vardı.

Fatime: e.

Görsel 4.44 Hatice'nin Geogebra'da Sinüs Fonksiyonuna Ait Denklemi Yazarkenki Görseli



Görsel 4.45 Hatice'nin Geogebra Yazılımında Sinüs Fonksiyonuna Ait Denkleminin Ait Grafiğin Görseli



Geogebra'da yazılan denklemi yazarken muhakemesi orta olan Elif denklemin yazılışında bir karmaşaya düşüp sorgulamıştır. Bunun üzerine öğretmen aslında aynı cebirsel denklemi ifade eden ama karıştırılan iki farklı cebirsel gösterimi tahtaya yazıp

eşit olup olmadıklarına karar vermelerini istemiştir. Muhakemesi zayıf olan Necati denkleme $\sin 90^\circ = 1$ 'den yola çıkarak nicel değerlere göre düzenleyip eşit olduklarını ifade etmiştir. Oysa burada üslü sayılarsa bir sayısının kuvvetlerinin daima bir olacağını dikkate almamış, bu anlamda eksik bir kontrol sağlamıştır. Muhakemesi orta olan Elif ile muhakemesi zayıf grup temsilcileri İlknur ve Aydan ise gerekçesiz bir şekilde eşit olmadıklarını ifade ederek yanlış bir iddiada bulunmuşlardır.

Elif: Sinüste e nin üzerinde olması gerekmiyor mu?

Necati: Hayır hepsi bir olduğu için hepsi yukarıda. Hayır, aynı şey zaten

Öğretmen: Bunu hemen tahtayı açıp bir daha soralım. $\sin(bx + c)$ üzeri e dedi. Diğeri de sin üzeri e $(bx+c)$. Şimdi bunların ikisinin aynı olup olmadığına karar verelim. Aynı mı, farklı mı?

Necati: Yani sin doksan üzeri iki, bir de sin üzeri iki doksan. Yine aynı şey ki.

Elif: Bence farklı.

Aydan: Bence Farklı.

İlknur: Farklı.

Bunun üzerine öğretmen *bu iki gösterimin eşit olup olmadığını gösterebilmek için ne yapılabileceği* sorunca Elif niceliksel değerler vererek karşılaştırmayı gerekçeli bir şekilde önermiştir. Hamza, Elif ve İlknur hepsine niceliksel değer vermeyi, zayıf grup temsilcileri Necati ve Hatice ise açığa değer vermeyi teklif etmiştir.

Elif: Mesela bir değer verelim.

Necati: , x'e verelim açığa..

Hamza: Hepsine değer verelim.

İlknur: E harici hepsine. ...Yok hepsine verelim

Necati: Çünkü zaten eşitse, eşit olduğunda üstleri götürebiliriz. Eğer alttaki de eşitse, o zaman doğru.

Elif: Dördüne de aynı değer veririz ki e nin farkı ortaya çıksın eğer aynı ise ikisi de aynı olacak. Ama eğer bunlara farklı değer verirsek, e'yi karşılaştıramayız.

Hatice: Hocam bence de x'e değer verelim.

Elif'in gerekçeli bir şekilde biri hariç tüm değişkenlere aynı değeri verip nasıl karşılaştırma yapacağını ifade etmesi onun birçok değişken olan durumda belirlediği değişkenin etkisini ortaya çıkarabileceğini gösterirken tüm değişkenlere aynı değerleri vermesi onun sadece belli bir durumu göz önüne alabildiğini her bir değişkene farklı değerler vererek de diğer değişkenleri sabit tutabileceğini ele almadığından eksik bir çıkarım yaptığını göstermektedir. Muhakemesi zayıf olan Necati “Çünkü zaten eşitse, eşit olduğunda üstleri götürebiliriz. Eğer alttaki de eşitse, o zaman doğru. Diğerleri gider, yok zaten..” şeklinde nicel değerleri yerleştirdikten sonra karşılaştırma yaparken matematiği nasıl kullanabileceğini bildiğini gösterse de sadece tek bir değişkene değer vererek karşılaştırma yapabileceğine dair yanlış çıkarımını da ortaya çıkarmıştır.

Ancak değişkenlere değer verme sırasında her ne kadar eşit deseler de Necati'nin yönlendirmesiyle açığa 90 derece, b'ye 1 ve c'ye 0 vererek d değişkenini görmezden gelip $\sin 90^\circ$ nin değerini bildikleri gerekçesiyle denklemini $\sin 90^\circ = 1$ ifadesine benzetmek için e hariç tüm değişkenlere değerler vermişlerdir (Görsel 4.46). Ancak Necati matematiksel işlemleri kullanarak hemen eşit olduklarını gösterince orta düzeyden Elif e değerini 1'den farklı olarak 2 değeri için de değerini sorgulamıştır. Ancak katılımcılar $(\sin 90^\circ)^2$ ifadesinde yapacaklarını bilmelerine rağmen $\sin^2 90^\circ$ de ne yapacaklarını bilememiştir. Bu esnada muhakemesi yüksek düzey temsilcisi Fatime ve Necati açıklama yapmış ve diğer katılımcılar da onaylamıştır. Ancak Necati her ne kadar kendi yapsa da yaptığından emin olamayıp öğretmenden onay istemiştir.

Necati: Sin90 biliyoruz ordan işte. Açığa 90, b..1, c.. 0...olsun

Elif: aynen..

Necati: sin 90.. 1 ...1 üzeri e...1 eder.. 1 üzeri e.. o da 1...

Elif: Sinüsün karesi olsa farklı olmaz mı? Mesela E=2 olsa.

Öğretmen: E=2 olsun tamam..Sin 90'ın karesi. Sin kare 90 eşit mi?

Fatime: Sin 90=1 zaten hocam. Sin 90 çarpı sin 90.

Elif: Sin çarpı sin doksan. Ama aynı.

Fatime: Hayır, sin doksan. Sin doksan çarpı.

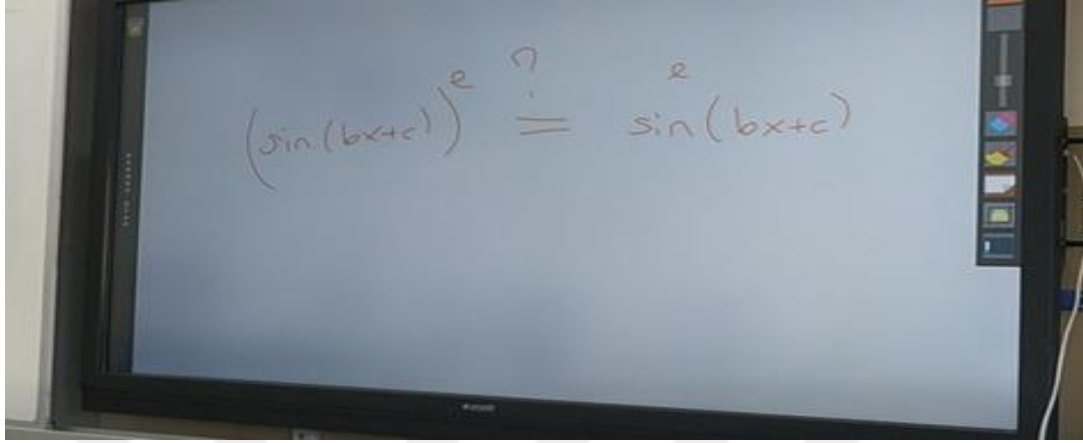
Necati: Sin doksan çarpı, sin doksan çarpı. Sadeleştir

Elif: Aynı işte.

Herkes: Aynı.

Necati: Peki hocam, aynı mı değil mi?

Görsel 4.46 Ses Frekansı Etkinliğinde Denklemlerin Farklı Gösterimlerinin Eşitliği



Bu ifadeler muhakemesi yüksek olan Fatime'nin aynı denklemin farklı gösterimlerini bildiğini gösterirken diğer tüm katılımcıların bu konuda zorlandığını açığa çıkarmıştır. Ayrıca Necati kendi yaptığından emin olmayıp öğretmenden onay almak istemiştir.

Her katılımcının Fatime'yı onaylamasıyla öğretmen GeoGebra'daki ses çalma butonuna basarak istenilen trigonometrik fonksiyona ait sesin dinlenmesini hatırlatıp bir geometrik yazılım aracılığıyla hangi matematiksel değişkenin soru bağlamındaki sese ilişkin neye karşılık geldiğini belirlemelerini istemiştir. O esnada zayıf ve düşük muhakeme düzeyindeki Necati ve Aydan hemen GeoGebra'da f fonksiyonunu çalma butonuna uygun olarak yerleştirip butonu etkinleştirebilmişlerdir. Bu esnada amaca yönelik düşünüp sesin kalın olması gerektiğini tüm katılımcılar ifade edebilmişlerdir.

Elif: Büyük harf SESÇAL köşeli parantez f fonksiyonu..

Aydan: Çünkü o fonksiyon var.

Necati Sinüs fonksiyonu olduğu için 0 ile 180 arasındadır. Bir de grafik burada dakika burada, bu dakikaya göre sinüs grafiği.

Öğretmen: Tamam. Şimdi sesi bir çalalım ve hangisini yani hangi değişkenin sesin inceliğine, kalınlığına ya da gürlüğüne etki ettiğini bulalım. Mesela sıkıştırma programında ses sıkıştırılınca ne olur ki?

Hamza : Hızlandığı için anlaşılır olmaz. yani hocam. İncelir. O zaman ses o kadar kalın olacak ki sıkıştığında ince olsun.

Necati:.. inceliği, kalınlığı...evet.. Ses sıkıştırma ile çok incelir. Çok kalın olmalı.

Fatime : İnce zaten kaybolur.

Aydan: Erkek olmalı kalın sesliler..

Diğer katılımcılar: Evet..

Ayrıca İlknur, Aydan ve Hamza amaca yönelik kimin video kaydında yer alacağına ilişkin kızların genelde ince sesli olduğu Ali’yi de erkek bile olsa ilk video kaydında yer aldığı gerekçesiyle uygun olmadığına dair doğru çıkarım yapıp elemiş ve kalan kişileri doğru belirleyebilmişlerdir.

Elif: Ali, Burak, Cenk Didem ve Efe var.

İlknur: Didem Elendi. Kız olduğu için sesi ince

Aydan: Ali elendi o çekmiş

Hamza: Ali zaten kendisi başaramamış.

Ardından hangi matematiksel değişkenin soru bağlamındaki sese ilişkin neye karşılık geldiğini belirlerken orta düzeyden Elif yükseklikle yanlış şekilde ilişkilendirse de muhakemesi yüksek olan Fatime öncülüğünde gerekçeli bir şekilde frekansla doğru şekilde ilişkilendirerek frekans değeri büyükse ince sese, değilse kalın sese karşılık getirmişlerdir. Ayrıca Necati bu esnada gerekçeler sunarken orta düzeyden Hamza “frekansın sayısal değerini büyük alarak” inceltildiğinde daha büyük bir frekansa sahip olacağını düşünemeyip yanlış çıkarımda bulunmuştur.

Elif: sesin kalınlığı ve inceliği grafikteki yüksekliği ile ilişkili

Fatime:Frekansla...

Necati:Gürlüğünün değişmesi sebebi, biz onu daha artırırsak yani, genişletirsek daha artırırız. Tepe noktası ile o x-y arasındaki uzaklık aynı kalıyor. Ama sıkıştırdığımızda inceltiyoruz yani. Şey hocam, tepe noktalarında birbirini daha çok yakın oluyor. İnce olması lazım.

Fatime: O zaman dalgalar birbirinden uzaklaştıkça kalınlaşmalı.. İki tepe arasındaki uzaklık artar. Birim zamandaki dalga boyu sayısı frekanstır zaten. Birim zamandaki dalga sayısına bakılacak

Hamza: Sayısal olarak çok olsun o zaman... O zaman çok olması gerekiyor

Necati: Ses frekansının sayısal değeri az olsun. Sıkıştırdığımızda sayısal olarak çok olsun

Söylenilen iddianın doğruluğunu Geogebra’da test edebilmek için öğretmen frekansları farklı mavi renkli $\sin 3x$ ve yeşil renkli $\sin x$ şeklinde iki denklem yazıp öğrencilerden karşılaştırarak incelemelerini istemiştir. Muhakemesi orta düzey olan Elif periyodu fizikten bilinen birim sayısındaki dalga sayısına göre periyodu ele alırken, muhakemesi yüksek düzey temsilci Fatime’nin ise üst paragraftaki “O zaman dalgalar birbirinden uzaklaştıkça kalınlaşmalı.. İki tepe arasındaki uzaklık” ve “iki tepe arası sık” ifadelerinden periyot kavramını anlamlandırırken görsele dair çıkarımlarını birleştirdiği anlaşılmıştır. Bu esnada Necati ve Aydan periyodu, gerçek yaşamda ses kalınlığı ile ilişkilendirmişlerdir.

Elif: Mavinin $\sin 3x$ ’in frekansı daha yüksek. Dalga sayısı birim zamandaki dalga sayısı fazla.. O andaki mesela tekrar eden bir periyotta dalga sayısı fazla

Fatime: iki tepe arası sık mavinin $\sin 3x$ ’in frekansı yüksek

Necati: Yeşilin $\sin x$ ’in sesi daha kalın

Aydan: Yeşilin $\sin x$ ’in kalın.

Öğretmen ilk ele alınan sinus fonksiyonuna ait $y = a \sin(bx + c) + d$ şeklindeki fonksiyonun her bir değişkeninin sesin inceliği ve kalınlığı ile ilişkisini belirlemeleri için öğrencilerin istediği değişkenlerin nicel değerlerini GeoGebra’da değiştirmiştir. Hatice, Elif, Necati ve Fatime bu süreçte öne çıksa da her bir değişkenin etkisi sırasıyla tek ele alınmıştır.

Necati: Hocam burada a ile oynarak nasıl bir şey olacağını görebiliriz.

Fatime: Bir değiştirin hocam. (öğretmen istenilenin a ’nın niceliksel değerini arttırıp azaltıyor)

Fatime: Frekansı değişmiyor.

Herkes: Frekansa etki etmiyor sesin kalınlığını etkilemez (sonra öğretmen b'nin değerini değiştiriyor)

Hatice: Evet b frekansı etkiliyor hocam. Arttırınca frekans artıyor, azalınca azalıyor. Ses de incelir. Sesi azaltırsam kalınlaşıyor.

Fatime: Aynen öyle. etkiler

Elif: C etkilemez . (Öğretmen c'yi değiştiriyor).

Herkes: Etkilemez hocam.

Hatice:Etkilemiyor.

Necati: Etkilemiyor.

Elif: D de etkilemez (Öğretmen d'yi değiştiriyor).

Fatime: hayır. (Herkes onaylar) (Öğretmen e'yi değiştiriyor).

Her bir değişken için sesin kalınlığını nasıl etkilediği a, c, d değişkenleri etkilemez, b artarsa ses incelir azalırsa kalınlaşır şeklinde çıkarımlar elde etmişlerdir. Ancak e değişkeninin periyoda etkisinde için karmaşıklığa düşünce matematiği kullanmada iyi olan Necati f fonksiyonunun çizimdeki yönünün hep yukarda olmasını gerekçe göstererek mutlak değerle ilişkilendirme yapıp gruba öncülük etmiştir. Ancak muhakemesi zayıf olan Necati “frekansı artırıyor çift fonksiyon olduğunda” ve “Eğer e çift ise değiştirir. ama e tek ise değiştirmiyor.” şeklinde muhakemesi düşük olan İlknur ise “e 1 olsa bu tek fonksiyon. e yi 2 yapalım. Dalga oldu çoğaldı. Sıfırla iki arasında iki tane dalda. e 1 olunca az dalga” şeklinde eksik çıkarımlar yapmıştır. Orta düzeyden Elif ise e değişkenine dair çıkarım yaparken oldukça zorlanmış “Periyotla frekans aynı etkiler” şeklinde yanlış çıkarımlar yapmıştır. En sonunda muhakemesi yüksek olan Fatime'nin matematikteki *frekansı period kavramıyla ters orantılı* olacak şekilde ilişkilendirip Elif'in ilgili formülü ifade etmesiyle frekansla periyodun ters ilişkili olduğunu herkes fark etmiş ve e değişkenine ait doğru çıkarımları yapabilmıştır.

Necati: Yine dalga sayılarına birim zamanda bakalım... tek çift olduğunda hep yukarı. Hocam bir şey diyeyim mi? Mutlak değerli fonksiyon. Çift fonksiyonsa hep artı da değer alır. Tekse hem artı hem eksi alır. Hocam çifte çevirdik ya dalga şey oluyor sadece bu o zaman dalga sayısı azalıyor yani frekans azalıyor

Elif: Tek çift fonksiyonlar hocam. Frekans zaten çift fonksiyonlarla ilişkili. Etki ediyor o zaman

Necati: Etkiliyor, frekansı artırıyor çift fonksiyon olduğunda

İlknur: 1 olsa bu tek fonksiyon. (o esnada öğretmen e değişkeninin değerini 1 yapıyor) 2 yapalım. Dalga oldu çoğaldı. Sıfırla iki arasında iki tane dalda. e 1 olunca az dalga

Elif: Aslında hocam etki etmiyor. sin fonksiyonu zaten bir tek fonksiyon. Bir tek fonksiyonu yani değişmez ki. Değiştiriyor ama...

Necati: Ama sen ona derece yüklüyorsun. Eğer e çift ise değiştirir. ama e tek ise değiştirmiyor.

Elif: Ha sen dereceden bahsediyorsun tamam o zaman derecesi etkiler. Periyot ya.

Fatime: Periyot ve frekans tam ters olarak değişiyor.

İlknur: Hocam periyod arttıyor çiftte frekans azalıyor

Elif: Mesela pi bölü mutlak a. Ama orada altta iki pi bölü mutlak a. Yani mesela ikiyi ortak çarpmıyor. İkiyi şöyle bir ayırdığı zaman. Evet daha fazla oluyor. Frekansını arttırdığım zaman periyot azalıyor.

Herkes: Ters bir ilişki var.

Periyod ve frekans arasındaki ilişki GeoGebra’da deneme yanılma ile bulunduktan sonra amaca dönülmüş ve bağlama özgü çözümden ses kalınlığı ile ilişkisi aranmıştır. Tüm farklı gruplardan temsilciler çözüme ilişkin sesin anlaşılabilir olması için periyodun büyük veya frekansın küçük olma durumuna dair çıkarım yapabilmışlerdir.

Necati: Periyotu büyük olsun.

Elif: Frekans küçük.

Fatime: Periyot büyük olunca da frekans küçük olsun.

Hamza: İşte o zaman periyot çok olmalı.

Necati: Tamam. Birim sayısında oluşan dalga sayısı frekans değil mi? Frekansın az olması lazım.

Elif: O zaman seste kalınlaşma olur.

Hatice: Frekansı az olmalı

Çözümün matematiksel olarak nasıl sözel biçimde “*sesin anlaşılabilir olması için periyodun büyük veya frekansın küçük olmalı*” şeklinde ifade edilmesinden sonra cebirsel temsile ilişkin değişkenlere göre de çözümün ele alınması istenmiştir. Bu esnada muhakemeleri sırasıyla düşük ve zayıf olan Aydan ve Hatice sessizliklerini korusa da en sonunda onaylamışlardır.

Elif: a etki etmiyordu.

Necati: b'nin küçük olması lazım.

Fatime: b'yi azaltmamız gerekiyor.

İlknur: evet b'yi azaltmamız gerekiyor.

Fatime: a'nın ve c'nin önemi yok.

Elif: b az olmalı

Hamza: d etkilemiyor.

Elif: Periyot bi dakika periyot fazla olması lazım

Necati: O zaman e tek olması lazım

Herkes: e tek olmalı

Çözüme ilişkin öneriyi ortak çözüm kağıdına yazıp GeoGebra’da nasıl bu önerinin nasıl kontrol edilebileceği sorulduğunda grafik üzerinden kontrol edebileceklerini ama kişilere ait uygun grafik ya da denklemler olması gerektiği için matematiksel bir model şeklinde verip değişkenlere göre öneride bulunabileceği kararlaştırılmıştır.

Fatime: Grafikte periyodu büyük olanı seçsin

Necati: Yerine koyup GeoGebra’da deneyebilirsiniz. Tepe noktası arasındaki en uzaklık... İki tane grafik verelim en fazla olanı seçsinler. x'in katsayısını değiştirip 3 tane bulalım.

Aydan: O da olur.

Hamza: Aslında Necati'nin dediği de olur hocam

İlknur: Evet, hatta bunu denedik.

Hatice: Evet, olur.

Çözümde önerilere eklenmek üzere periyotları farklı dört sinüs denklemi için uygun örnekler verilmiş ve öneride en iyi olanı belirlenmiştir. Böylece hem matematiksel dayanaklarını sunmuşlar hem de örneklendirmişlerdir. Periyotları farklı olacak şekilde uygun örnek seçiminde bulunurken daha önce incelenen $\sin x$ hemen yazılmıştır. Ardından Necati, Hamza ve Elif'in sunduğu örnekler ele alınmıştır. Neye dikkat ederek örnek seçtikleri sorulduğunda *b değişkeninin nicel değerinin mutlak değeri en az olan* demesi gerekirken muhakemesi orta olan Elif “*b si en az olan*” şeklinde eksik bir çıkarım yapmıştır.

Necati: $\sin x$ bölü 3.

Hamza: $\sin$ eksi dört x , $\sin$ iki x .

Elif: $\sin$ dört x

Elif: b si en az olan

Muhakemesi zayıf olan Necati örneklere bakınca matematiği doğru şekilde kullanıp $\sin 4x$ ve $\sin(-4x)$ in frekanslarını eşit bulmuştur. Hamza ve İlknur da onaylayıp matematiksel olarak gerekçelendirmişlerdir. Bunun üzerine “*b si en az olan*” şeklinde yanlış öneride bulunan orta muhakemeye sahip Elif hemen kendi cevabını düzelterip yanlış çıkarımını düzenleyip önerisini yenilemiştir (Görsel 4. 47 ve Görsel 4. 48).

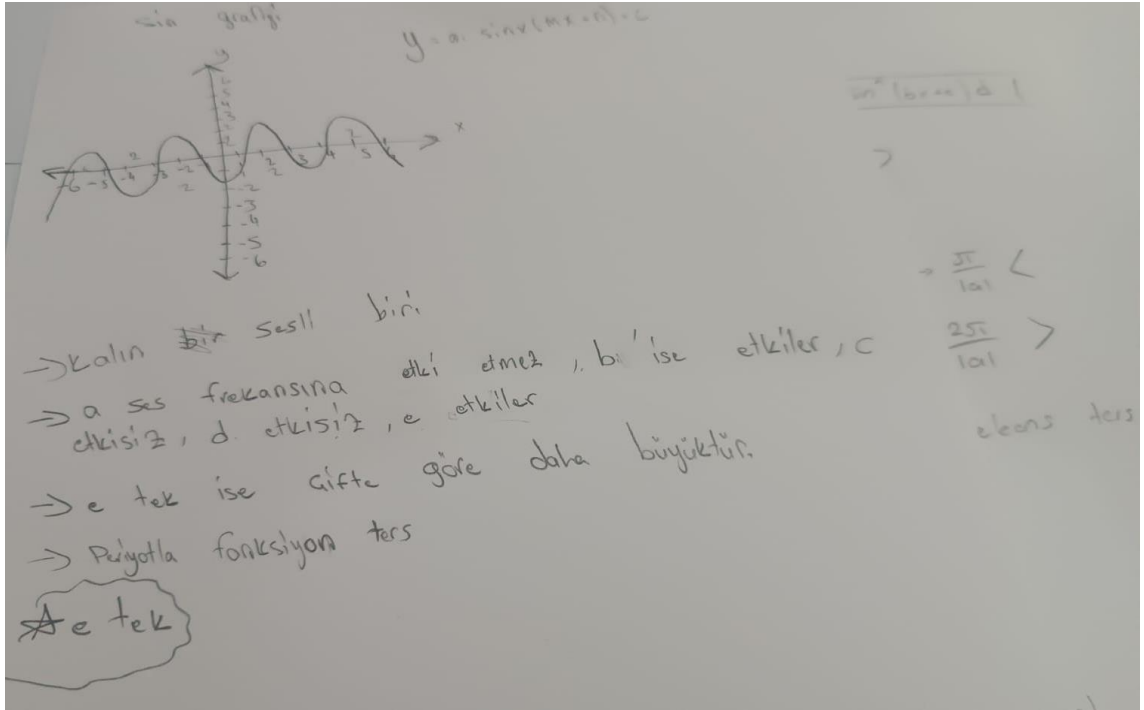
Necati: Aynı şey hocam. Çünkü... Biri eksi $4x$ ti, biri $-4x$ ti.

Hamza: Öndeki şart önemli değil.

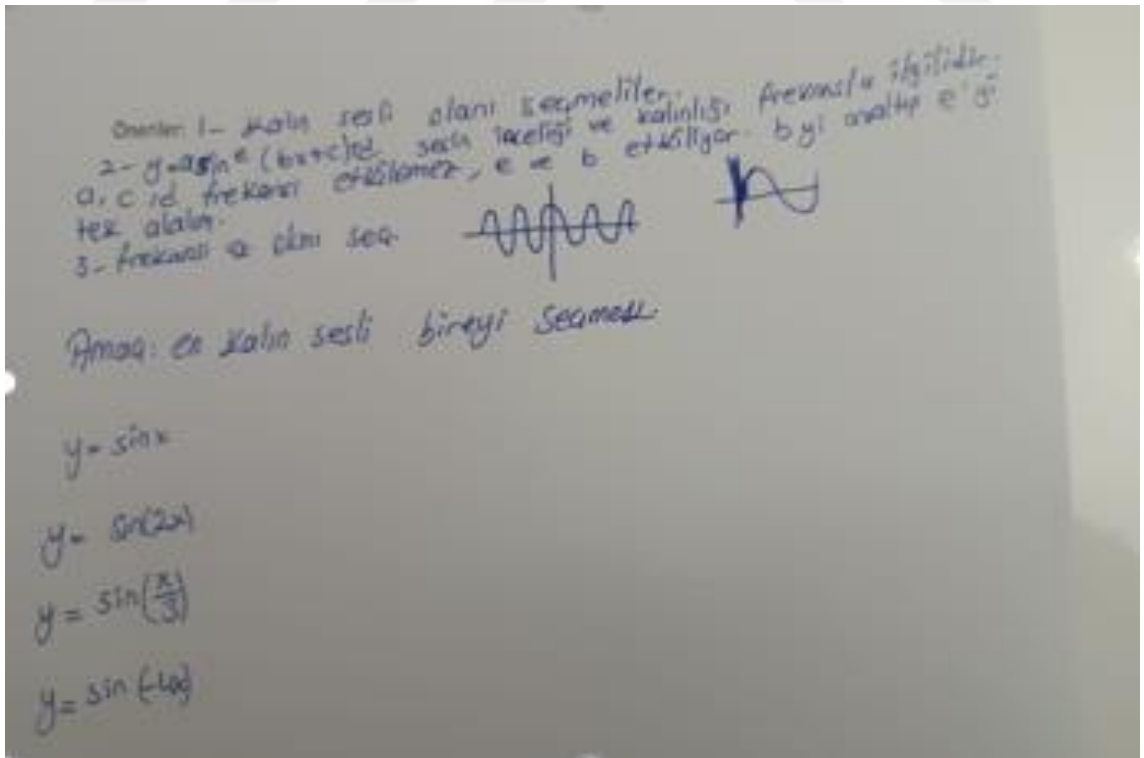
İlknur: Uzaklıkları aynı (güliyor). Sıfıra olan uzaklıkları aynı diye

Elif: Hayır, hayır... mutlak b değeri az olan diye değiştirelim o zaman öneriyi. Mutlak değerini alalım.

Görsel 4.47 Elif'in Çözüm Önerisi



Görsel 4.48 Teknofest Öğretiminde Grup Olarak Sunulan Çözüm Önerisi



4.2.3 Üçüncü öğretim bölümü

Arabanın daha hızlı gidebilmesini destekleyen yeni su deposu şeklinin matematiksel modellemesine dayalı olan *Çevreye Dost Araç* adlı üçüncü öğretimde problemin amacının ortaya koyulması aşamasında, birinci öğretimde de olduğu gibi yüksek düzey muhakemeye sahip Fatime'nin sürece önderlik ettiği görülmüştür. Muhakemesi orta düzey grup temsilcilerinden Elif ve en zayıf grup temsilcilerinden Necati ise matematiği etkin kullanma anlamında dikkat çekmiştir.

Problem durumunun katılımcılar tarafından okunmasının ardından, düşük düzey muhakemeye sahip Aydan ve zayıf düzeyden Hatice sırasıyla *“su ile çalışabilen beş litrelik şişe ile ama fazlasına falan karar verememişler.”* ve *“taşımaların kolaylaştırılması falan...”* şeklinde sadece metinde verilenlerin bir kısmını yansıtarak problemin amacını yanlış belirlerken, orta düzeyden Hamza ve düşük düzeyden İlknur sırasıyla *“Öyle bir şekilde bürünecek ki en verimli hareketi alsın.”* ve *“depo öyle olacak ki durmadan gitsin”* şeklinde amacı eksik belirlemiştir. Ancak muhakeme düzeyi yüksek olan Fatime'nin *“Aracın daha hızlı gitmesini sağlayacak deponun şekli..”* olarak tam ifade ettiği problem amacının ardından, Necati de *“çok daha güçlü bir şekilde su akan su deposu tasarlayacağız”* şeklinde amacı tam belirleyebilmiştir.

Düşük düzey muhakeme gruplarının temsilcilerinden Aydan ve zayıf gruptan Hatice sırasıyla *“Fındık ağaçları yokuşlarda oldukları için araçlar oraya çıkamıyormuş. Kendileri taşımak zorunda kalıyorlarmış. Bu yüzden bir tane araç üretmişler. Su ile çalışabilen beş litrelik şişe ile ama fazlasına falan karar verememişler.”* ve *“Hocam aynı şeyleri söyleyeceğim. Taşımaların kolaylaştırılması falan...”* şeklinde ifade etmişlerdir.

Orta düzey muhakeme gruplarının temsilcileri Hamza ve düşük düzeyden İlknur sırasıyla *“Hocam bazı özellikleri vermiş deponun. Şu şekil, şu harcı taşır diye 5 litre su alabilirmiş. Şimdi bu fındık toplamadan yardımcı oluyor ya bu işi kolaylaştırma anlamında en verimlisi.”* ve *“Bu aracın öyle bir şekli olması lazım ki aşağıya kadar gidebilsin duraksamadan.”* şeklinde ifade etmişlerdir.

Muhakeme düzeyi yüksek olan Fatime, zayıf düzeyden Necati ise *“Şeklini belirlememiz gerekiyor önce. ...Bunu aşağı kadar götürüp getirmek yerine bir şey tasarlamak istiyorlar. Aracın daha hızlı gitmesini sağlayacak deponun şekli problemimiz bence.”* ve *“..hani o su deposunu öyle bir şekilde tasarlayacağız ki o araç çalışabilsin*

verimli bir şekilde. Yani çok daha güçlü bir şekilde su aksın o tekerlekler ile yolu gidebilsin.” şeklinde demiştir.

Metinde verilen dost aracın maketi öğretmen tarafından öğrencilere verilmiş ve inceleyip nasıl çalıştığını ifade etmeleri istenmiştir (Görsel 4. 49). Araç incelenirken İlknur, Fatime ve Hamza aracın çalışma prensibini yüzeysel ve eksik olarak ifade ederken, muhakemesi zayıf olan Necati ise detaylı bir şekilde ifade etmiştir.

İlknur, Fatime ve Hamza’nın yüzeysel ve eksik ifadeleri şu şekildedir:

İlknur: Su damladıkça kapaklara öyle ilerliyor

Fatime: Değirmen gibi

Hamza: Su arka tekerleklerde...

Muhakemesi zayıf olan Necati’nin detaylı ifadesi ise “...açılan delikten kapaklara. Oradan arka tekerlekleri hareket ettirecek. Ön tekerlek de zaten serbest olduğu için arka tekerleklerin hareket ettiği yöne doğru hareket edecek.” şeklindedir.

Görsel 4.49 Maket Dost Aracın Katılımcılar Tarafından İncelenmesi



Dost aracın incelenmesinden sonra öğretmen tarafından problemin çözümüne uygun çözüm önerileri ele alınmıştır. Bu esnada Hamza “*Bu araba minyatürü...5 litre aldığı varsayalım.*” şeklindeki ifadesiyle *en fazla 5 litre su alabilecek* şeklinde metinde verilen litre miktarını dikkate aldığını gösterse de kritik nokta olmasına ilişkin gerekli açıklamaları yapamamıştır.“*en fazla 5 litre*” ifadesi, miktarından bağımsız olarak çözüm önerilerinde her bir su deposunun aynı hacimde olması adına ifade edilmiş olup hacimle ilgili kritik bir noktadır. Çünkü en fazla 5 litre denilince çözüme ilişkin arabanın hızını

arttırmak için en fazla yükseklik gerektiği ardından metinden yüksekliğin sabit verilmesiyle en iyi çözümün su hacminin en fazla olacak şekilde ele alınmasına dair çıkarım oluşmalıdır. Bu anlamda ifadelerinden orta düzey muhakemeye sahip Hamza bu kritik noktayı fark etse de henüz anladığına dair bir detay verememiştir. Muhakemesi yüksek düzey olan Fatime “*Daha hızlı gitmesi için suyun bence daha hızlı dökülmesi gerekiyor.*” şeklindeki ifadesiyle *hızlı gitmesi için suyun hızlı dökülmesi gerektiği* şeklinde doğru çıkarım yaparak kritik noktalardan “*hızlı dökülmeyi*” ele almıştır. Ayrıca Elif “*yükseklik sabit*” şeklindeki ifadesi ile de kritik noktalardan “*sabit yüksekliği*” açığa çıkarmıştır. Bu anlamda “*aynı hacme sahip olmaları*” dışındaki kritik noktalar katılımcılar tarafından tam olarak fark edilmiştir.

Kritik noktaların fark edilmesinden sonra muhakemesi orta düzey grup temsilcilerinden Elif günlük yaşamdan su basıncıya ilgili gerekçe sunarak *ters koni* şeklinde uygun çözüm önerisinde bulununca daha önceden hazır edilen geometrik cisimlerden koni verilip canlandırarak göstermesi istenmiştir (Görsel 2.50). O esnada aynı grup temsilcisi Hamza ve yüksek düzey grup temsilcisi Fatime, Elif’in çözümüne yönelik gerekçe sunmuşlardır. Muhakemesi zayıf düzey temsilcisi Necati de benzer şekilde gerçek yaşamdan su basıncıyla ilgili gerekçeyi sunmasına rağmen yüksekliğe dikkat çekerek yükseklikle ilgili kritik noktayı da dikkate aldığını vurgulamıştır.

Muhakemesi orta düzey grup temsilcilerinden Elif *ters koni* şeklindeki uygun çözüm önerisini “*Bunu inceltebiliriz. Ya da koni şeklinde bir şey yapalım. Hocam koni koysak daha mantıklı. Mesela şöyle, günlük hayatta biz hortumu kullandığımızda, hani normal şey yaptığımızda açtığımızda su yavaş gidiyor ama biz elimizi koyduğumuzda böyle daha hızlı çıkarıyor. ...Ama yükseklik sabit. O zaman bunun (koniyi ters çevirip ters koniyi gösterir) gibi yaparız böyle. Hacmin çoğu yukarıda birikince daha aşağı doğru. Akarken daha baskı yapacağı için daha hızlı akar. Delik aynı ama yine burası basınç daha fazla olacağı için dökülecek. Suyun basıncı var.*” şeklinde ifade etmiştir.

Aynı grup temsilcisi Hamza ve yüksek düzey grup temsilcisi Fatime’nin, Elif’in çözümüne yönelik gerekçeleri şu şekildedir:

Hamza: ...hızlı akarsa güçlü akar. Yavaş akarsa güçlü olmaz.

Fatime: Bence de... su daha çok gelirse... kapaklar daha hızlı döner ...

Muhakemesi zayıf düzey temsilcisi Necati'nin benzer şekilde gerçek yaşamdan su basıncıyla ilgili gerekçe sunarken yüksekliğe ait kritik noktayı da dikkate aldığı ifadesi ise *“Hocam aslında hortum mantığı arkasında su olduğu için aslında o hızlı gidiyor. Şu koniyi bi alabilir miyim? Hocam dedik ya en yukarda olsun ki basınç en fazla olsun daha kuvvetli vursun... daha hızlı aksın diyoruz. Tamam o zaman ne kadar uzun yapabilirsek yapalım.”* şeklindedir.

Görsel 4.50 Necati'nin Dost Araç Öğretimindeki Çözüm Önerisi



Gerçek yaşamdan su basıncıyla ilgili gerekçe sonrası su basıncını etkileyen değişkenler sorgulanınca Necati ve Hamza *“yükseklik”*, Elif *“yer çekimi”*, İlknur ve Necati ise *“arabanın kütlesi”* demiştir. Ancak orta düzey muhakemeye grup temsilcilerinden Elif, İlknur ve Necati'nin söylediği *“araç kütlesi”* değişkenini *“Ama aracı değiştiremiyoruz.”* şeklinde gerekçe göstererek geçersiz kılmıştır. Ardından Hamza ve Necati sırasıyla *“Kütlenin bir anlamı yok.”*, *“Aynen, çünkü burada en fazla 5 litre diyor. Şimdi 1 litre 1 kilogram gibi bir şey. Yani hep sabit olacak. O zaman kütlenin bir anlamı yok. Sadece yükseklik şu an.”* diyerek gerekçeyi desteklemişlerdir. Öncelikle bu ifadelerden su basıncına etki eden değişkeni *yükseklik*, etki etmeyen değişkeni *kütle* şeklinde gerekçeli olarak doğru belirleyebilmelerine rağmen muhakemesi zayıf olan Necati'nin *“1 litre 1 kilogram gibi bir şey. Yani hep sabit olacak. O zaman kütlenin bir anlamı yok.”* ifadesinden litreyi hacim olarak değil kilogram gibi sabit bir ağırlık ölçüsü olarak gördüğü, bu nedenle de kütle olarak hesaplamaya dahil edip litre kavramına yönelik kavram yanılgısı olabileceği anlaşılmaktadır.

Orta düzey muhakeme temsilcilerinden Elif çözüme ilişkin *“Yüksekliği değiştiriyorsunuz daha çok. Enine artırsak?”* şeklinde sorgulama yapınca zayıf muhakeme düzeyinden Necati *“Koni, Ters Koni, kare, üçgen. Üçgen prizma, silindir.”*

şeklinde farklı depo biçimine yönelik öneriler sunmuştur. Ardından koni ve ters koniyi amaca göre karşılaştırarak *aynı delik nedeniyle aynı basıncın* oluşacağına dair yanlış çıkarım yaparak bir iddiada bulunmuştur. Elif ise hemen basınca dayalı gerekçeyle bu iddiasını çürütmüştür. Muhakemesi zayıf olan Necati, kabul etmeyerek *yüksekliklerinin aynı* olmasından kaynaklı basıncın aynı olacağına dair doğru bir çıkarım yapmıştır. Bu esnada muhakemesi yüksek olan Fatime eline koniyi alarak gerçek yaşamda su basıncıyla ilişkili gerekçelendirme ile iddiasını yanlış bir şekilde reddetmiştir.

Zayıf muhakeme düzeyinden Necati'nin *aynı delik nedeniyle aynı basıncın* oluşacağına dair yanlış çıkarımı ve orta düzeyden Elif'in basınca dayalı gerekçeyle bu iddiasını çürütmesi sırasıyla “*Aslında fazla fark etmeyecek çünkü delik aynı.*”, “*Değişecek... Basınçtan dolayı. Ya bak şimdi, su şimdi senin sen açıklığından böyle daha hızlı dökülüyorsa, alttayken böyle akar (eliyle daha yavaş şeklinde gösteriyor)....*” şeklindedir.

Muhakemesi zayıf olan Necati'nin yüksekliklerinin aynı olmasından kaynaklı doğru çıkarımı “*.. yükseklik aynı... zaten sen hepsini doldurmuşsun. Aynı dönerler...*” şeklinde iken muhakemesi yüksek olan Fatime'nin su basıncıyla ilişkili gerekçelendirme ile iddiasını reddetmesi ise “*Ben sana bir şey diyeceğim. Taban alanı hacimde önemli değil miydi basınçta. Necati bak (koniye ters tutuyor), daraldığı zaman, alt daha dar... Tavan genişlediği zaman basınç daha çok baskı yapmıyor mu alta su basıncı bak?*” şeklinde olmuştur. Ancak su basıncının kabın şeklinden ve su miktarından bağımsız olması nedeniyle Fatime katı ve sıvı basıncı karıştırmış olabilir.

Ardından çözüme ilişkin depo biçimine yönelik farklı öneriler ifade edilmiştir. Bu ifadeler ilk önce bir araya getirilip ardından tek tek incelenip amaca uygun en iyi çözüm bulunmaya çalışılmıştır. Orta düzey muhakemeye sahip Hamza “*koni, üçgen tabanlı dik prizma, yarım küre*”, yüksek düzey muhakemeye sahip Fatime “*küre, aynı yükseklikteki kare tabanlı, üçgen tabanlı dik piramitler, silindir*”denilmiştir. Muhakemesi zayıf olan Necati aynı yükseklik ve aynı delik nedeniyle aynı basıncın oluşacağı çıkarımını sürdürmüş ve önerilerin ayrı ayrı ifade edilmesiyle “*Hocam yüksekliği aynı, delik aynı. Ne fark edecek ki? Etmez aynı..*” şeklinde belirtmiştir. Muhakeme düzeyi yüksek olan Fatime ise “*Ama basınç etki eder. Hepsi aynı değil...*” şeklinde basınca dayalı yanlış ve yüzeysel gerekçesini sürdürmüştür. Ancak Necati'nin “*Sıvı basıncı değişmez. Yükseklik*

aynı..” demesiyle Fatime “*Aa evet.. tamam..*” şeklinde kabul etmiş, geriye kalan herkes aynı yükseklikteki depo şekillerinde aynı sıvı basıncının olacağını onaylamışlardır.

Çözüme yönelik farklı önerilerin sunulması sonrası öneriler kendi aralarında amaca uygun olarak kıyaslanmaya başlanmıştır. Kıyaslama esnasında amaca en uygun olma durumu göz önüne alınacağı için kendi aralarında sıvı basıncına etki eden değişkenleri ve kritik noktaları düşünmüşlerdir. Zayıf düzey muhakeme temsilcilerinden Necati sıvı basıncına etki eden değişkenlerden yüksekliği ele alsa da “*Yükseklik yani. Ama yükseklikleri de aynı.*” şeklinde ifadesiyle yüksekliğin amaca yönelik bir değişken olarak olmadığını göstermiştir. Ancak bu esnada yüksek düzey muhakeme temsilcisi Fatime deposu boş dost araç maketini hareket ettirip yüksekliği kast ederek “*Ama hep aynı mı ki? Akıp gidiyor?*” şeklindeki gerçek yaşama ilişkin çıkarımıyla katılımcılara yüksekliğin her zaman sabit olmayacağına dair yönlendirmeye soru çözümünde zamana yönelik kritik noktanın fark edilmesinde öncü bir rol oynamıştır.

Aynı yüksekliğe sahip içi dolu ters koni ve kürenin kıyaslanmasında (Görsel 4.51) zayıf düzeyden Hamza ve orta düzeyden Hamza suyun azalmasını da ele alarak yükseklik üzerinden kıyaslama yapmıştır. Küre için her ikisi de “*yüksekliğin yarısı kalır*” deyince herkes onaylamıştır. Koni için ise orta muhakeme düzeyi temsilcileri Hamza ve Elif “*Şey, parmağınızın biraz altına..*”, “*Evet. Tam böyle, biraz daha altına...*” şeklinde ifade ederek su azalınca yüksekliği yüzeysel ifade ederken Necati “*Hayır, orta noktasının biraz üstüne. Hepsi 10 olsun. Koni yerden 6 cm yüksekte kalır. Küre de tam 5’te kalırdı.*” diyerek tam belirleyebilmiştir. Ayrıca Necati burada nicel olarak değer verip kalan yüksekliği zeminden kalan en üst noktaya dek nicel olarak ifade etmiştir.

Hangisinin amaca daha uygun olduğu sorulduğunda ise Fatime ve Elif doğru gerekçeler sunup koniyi seçerken İlknur gerekçesiz bir şekilde “*küre*” diyerek yanlış olanı seçmiştir. Bu esnada Fatime ve Elif’in ifadeleri sırasıyla “*..Koni. Çünkü aşağı doğru daha hızlı akıyor.*” ve “*Evet, mesela basınç daha fazla oluyor. Şu tam noktada(en üst noktayı gösteriyor) hepsi aslında eşit olacak. Ama sonunda buradan şu noktaya doğru azalarak gidiyor.*” şeklindedir.

Görsel 4.51 Dost Araç Öğretiminin Çözümüne İlişkin Küre Ve Koninin Karşılaştırılması



Amaca en uygun çözümün bulunması için depo şeklinin düz ve ters koniye şeklinde olması durumu (Görsel 4.52) zamana göre ele alındığında muhakeme düzeyi orta düzey temsilcilerinden Elif, düşük grup temsilcileri İlknur ve Aydan ile zayıf düzeyden Necati ve Hatice ters koninin şeklinden dolayı *suyun yüksekliğinin yavaş azalacağını* kast ederek aynı gerekçeyle doğru olan koni ters depo biçimini belirleyebilmişlerdir.

Muhakeme düzeyi orta düzey temsilcilerinden Elif'in ifadeleri “*Basınç, kütle ve yükseklikle ilgiliydi. Hocam üstte su daha fazla.. yüksek olduğu için ve o deliğe hızlı gelir daha hızlı akar ters koni*” şeklindedir.

Düşük grup temsilcileri İlknur ve Aydan ise sırasıyla “*Evet. Çünkü... Ters koni hızlı akacak.. Tabanı daha küçük. Su daha çok üstte.*” ve “*Ben İlknur’a katılıyorum. Bunun çıkış kısmı aşağısı küçük su çok...hızlı akar.*” şeklinde ifade etmişlerdir.

Zayıf düzeyden Necati ve Hatice ise sırasıyla “*Hocam şimdi şöyle, çünkü bu aşağı daha dar. Darsa suyun yüksekliği yavaş azalır. Bu (ters koniyi işaret eder) hızlı akar.*” ve “*Su basıncı şunda (ters koniyi işaret eder) daha çok olduğu için daha çok su var hızlı akar.*” ifadelerini kullanmışlardır.

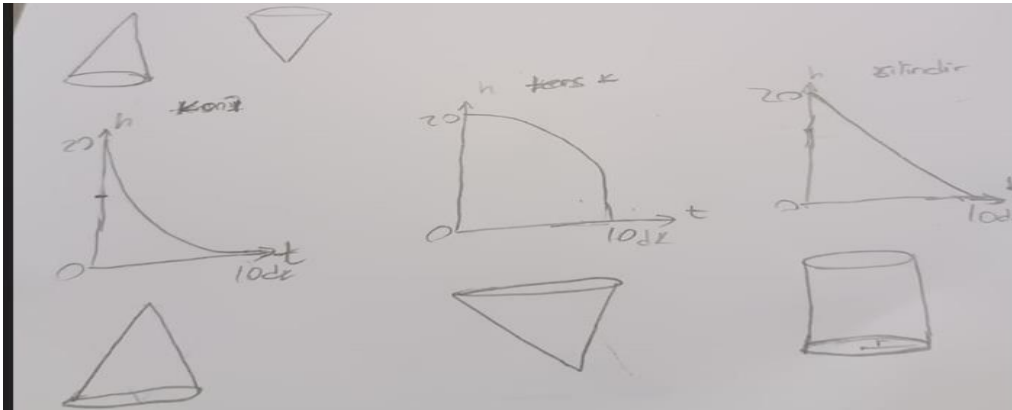
Görsel 4.52 Dost Araç Öğretiminin Çözümüne İlişkin Düz Ve Ters Koni Karşılaştırılması



İstenen çözümün matematiksel bir dayanak içermesi gerekliliği nedeniyle gerçek yaşamda ele alınan depo biçimlerinden *silindir*, *ters dik koni* ve *düz dik koni* önerilerine ait yükseklik-zaman grafikleri çizmeleri istenmiştir. Katılımcılar ilk olarak su deponun silindir biçiminde olduğu öneriye ait yükseklik-zaman grafiğini çizmeyi denemiş ve grafiğin doğrusal veya sabit fonksiyon olması konusunda kararsızlığa düşmüşlerdir. Zayıf grup temsilcisi Hatice, düşük grup temsilcisi Aydan ve orta grup temsilcilerinden Hamza gerçek yaşamda doğrusal fonksiyona ait yorumlarda bulunsalar da grafik olarak sabit fonksiyona ait grafik çizmişlerdir. Geriye kalan katılımcılar grafik için hem gerçek yaşama dayalı doğru yorumlar yapabilmış hem de grafiği doğru çizebilmişlerdir (Görsel 4. 53).

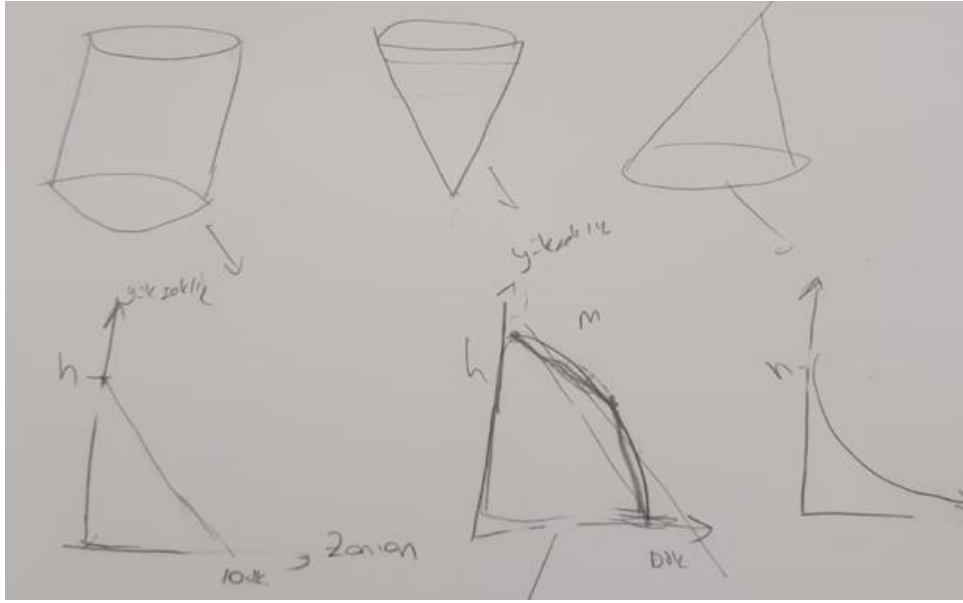
Muhakemesi yüksek düzey grup temsilcisi Fatime grafiği doğrusal olarak doğru çizmiş ve gerekçe olarak “*Hep aynı miktarda azalır.*” şeklinde gerçek yaşamdan ifadeler sunmuştur.

Görsel 4.53 Fatime’nin Dost Araç Çözümüne İlişkin Çizimleri

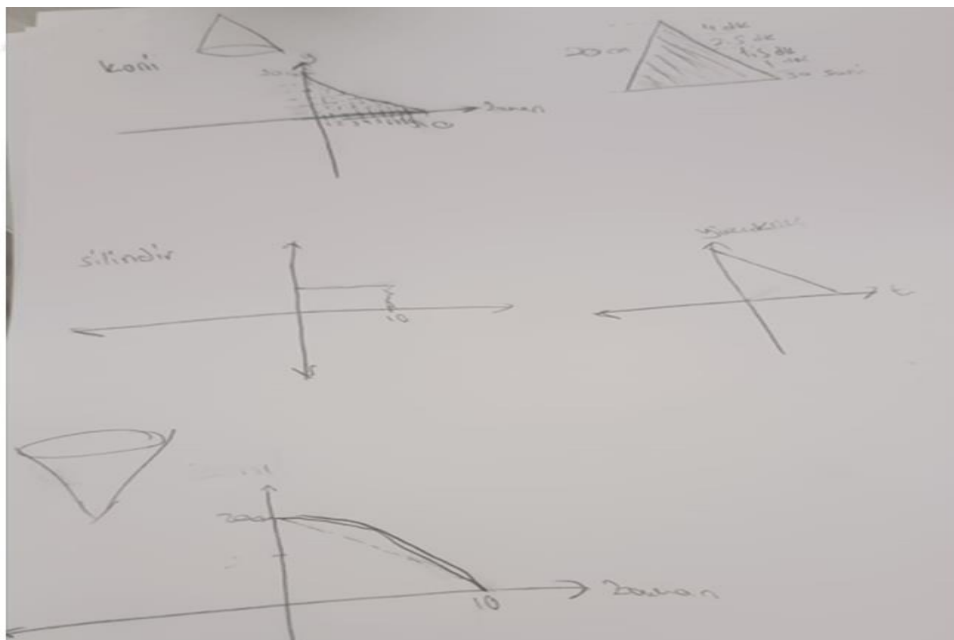


Muhakemesi orta düzey grup temsilcilerinden Elif grafiği doğrusal fonksiyon şeklinde doğru çizmiş ve gerekçesini “*Yani doğrusal bir şekilde. Her saniye eşit olarak azalacağından..*” şeklinde gerçek yaşama dayalı ifade etmiştir. Aynı gruptan Hamza ise grafiği sabit fonksiyon şeklinde yanlış çizmiş, gerekçe olarak da “*Silindir eşit bir şekilde... doğrusal olmalı*” şeklinde anlamsız açıklamalarda bulunmuştur (Görsel 4.54 ve Görsel 4. 55).

Görsel 4.54 Elif’in Dost Araç Deposunun Çözümüne İlişkin Çizimleri

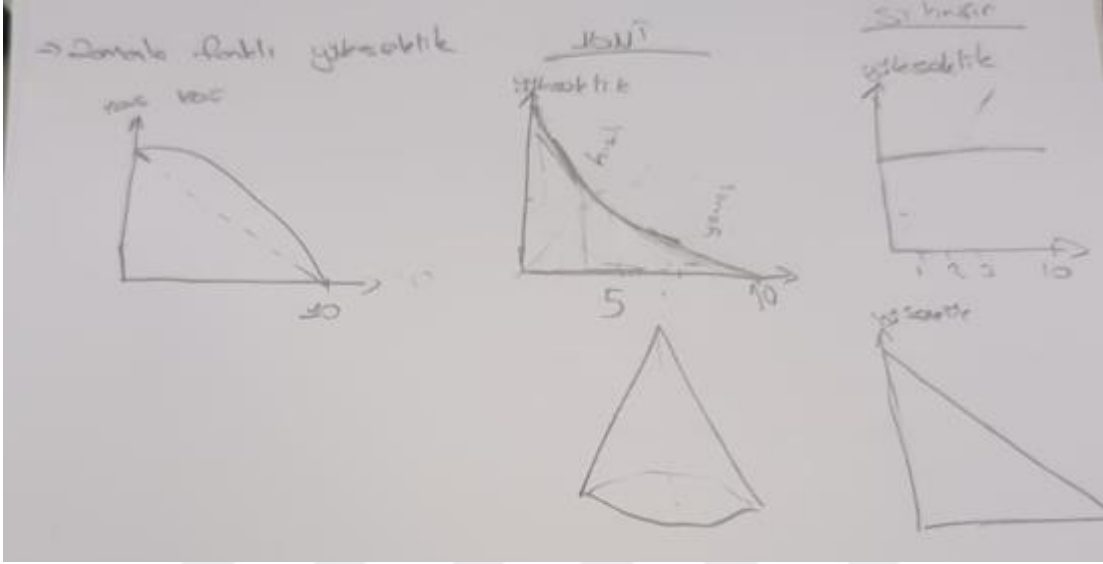


Görsel 4.55 Hamza’nın Dost Araç Deposunun Çözümüne İlişkin Çizimleri

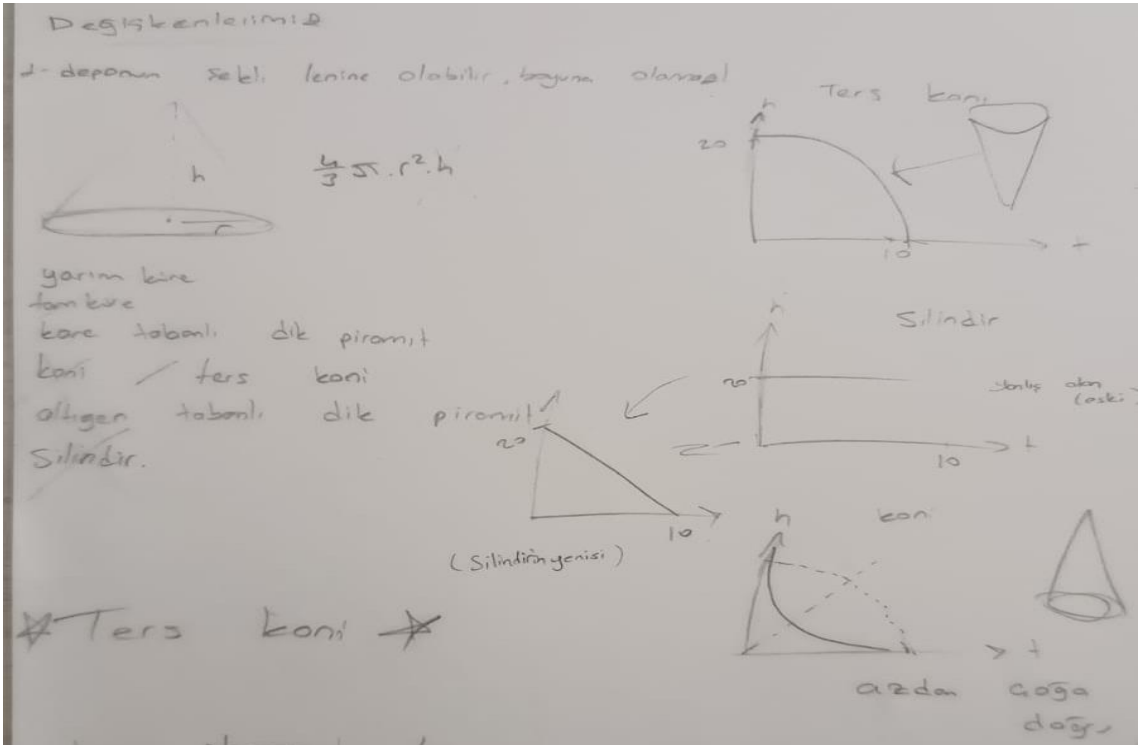


Muhakemesi düşük düzey grup temsilcilerinden Aydan ve İlkur grafiği sabit fonksiyon olarak yanlış çizmiştir. İlkur gerekçe istenince sessiz kalırken, Aydan ise “Elif haklı yani eşit azalır” şeklinde onaylamış ve Elif’in sözlerini tekrar eden ifadeler söylemiştir.

Görsel 4.56 Aydan’ın Dost Araç Deposunun Çözümüne İlişkin Çizimleri

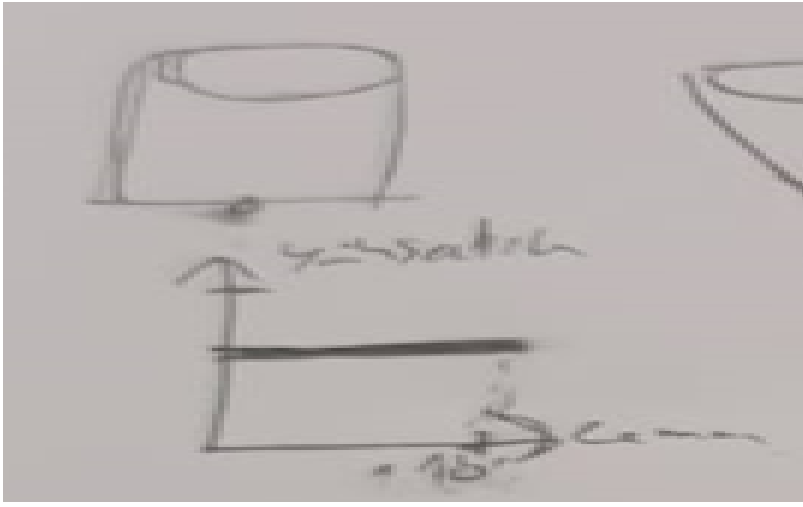


Görsel 4.57 İlkur’un Dost Araç Deposunun Çözümüne İlişkin Çizimleri

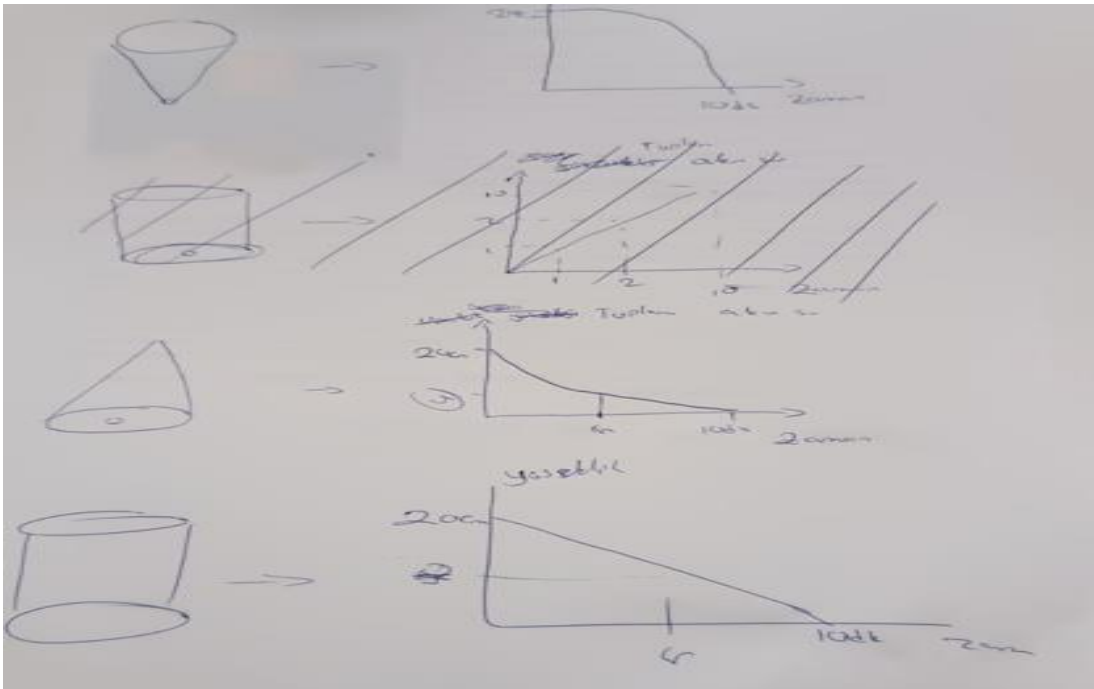


Muhakemesi zayıf düzey grup temsilcilerinden Necati grafiği ilk önce yanlış çizse de sonra doğrusal fonksiyon şeklinde doğru çizmiş ve gerekçesini “Doğrusal bir şekilde artıyor bu olmaz doğrusal şekilde azalmalı. Bu azalır... Herhangi iki dakika arasındaki değişim eşittir. Çünkü hani her dakika aynı miktarda su kaybediyor. Ya da su azalıyor silindir olduğu için ” şeklinde hem matematiksel hem de gerçek yaşama dayalı gerekçeler sunabilmiştir. Aynı gruptan Hatice ise grafiği sabit fonksiyon olarak yanlış çizmiş ve gerekçe olarak da “her saniye giden su miktarı aynı bence de.” şeklinde gerçek yaşama dayalı ifadeler sunmuştur.

Görsel 4.58 Hatice’nin Dost Araç Çözümüne İlişkin Çizimleri



Görsel 4.59 Necati’nin Dost Araç Çözümüne İlişkin Çizimleri



Bu durum Hatice, Aydan, İlknur ve Hamza'nın hem grafiği yanlış çizmiş olması hem de benzer şekilde “*eşit miktarda azalma*”ya odaklanması sabit ve doğrusal fonksiyonu anlamlandırma ve ayırt etmeye dair zorluk yaşadıklarını göstermiştir.

Katılımcılar su deponun dik koni biçiminde olduğu öneriye ait yükseklik-zaman grafiğini çizmeyi denemiş ve gerekçelerini belirtmişlerdir. Grafiği çizerken ilk etapta nasıl çizeceklerine karar vermede zorlansalar da muhakemesi zayıf olan Necati silindir için çizilen doğrusal fonksiyon grafiğini referans almış, deponun düz ve ters dik koni olma durumunu kıyaslayıp kolayca çizebileceğini belirtmiştir (Görsel 4.60). Muhakemesi yüksek olan Fatime ise gerçek yaşamdan gerekçelerle deponun şekline bağlı olarak grafikleri ayrı ayrı çizebilmiştir (Görsel 4. 61).

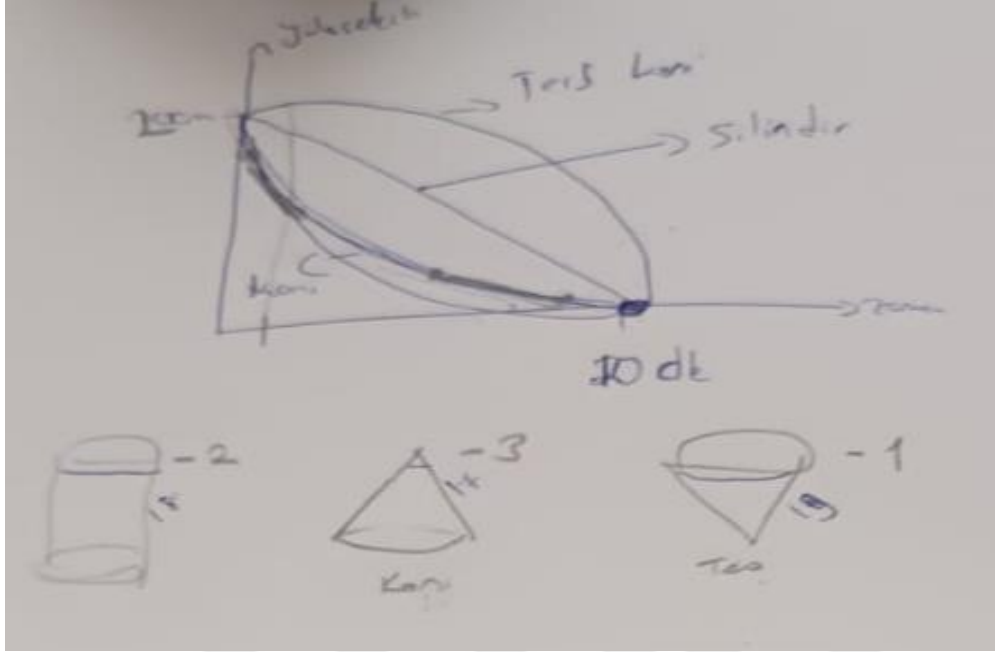
Muhakemesi zayıf grup temsilcilerinden Necati grafikleri nasıl çizeceğini “...hocam, biz doğrusal şey yapacağız. Nasıl diyeyim? Örnek alacağız, ondan sonra... Örneğin ben bunları aynı yere çizerim...” şeklinde açıklamıştır. Grafik çiziminin doğruluğundan nasıl emin olabileceği sorulunca “*Hocam ilk başta eğime bakarız. Ondan sonra ilk önce hızlı hızlı mı azalacak sonra mı çok yavaşlayacak bakacağız.*” diye ifade etmiştir. Ancak kendi kontrolünden emin olamayınca dakikaya bağlı olarak yüksekliği nicelleştirerek gerçek yaşamdan doğrulamaya çalışmıştır. “*Şimdi şöyle hocam. Bu başta bunun gibi az alacak ama belli bir süre sonra diyelim hani beşinci dakikada diyelim 4 cm kaldı ama buradaki (ters koni için 2. dakika) dakikada diyelim 5 cm kaldı. Örnek veriyorum. Çünkü yükseklik az, o zaman basınç az.*” diyerek birbirinin tersi iki su deposu biçimini kıyaslayıp gerçek yaşama dayalı nicelleştirdikten sonra grafikleri doğru çizdiği görülmüştür.

Muhakemesi yüksek grup temsilcisi Fatime ise grafikleri nasıl çizeceğini “*İlk 5 dakika daha hızlı gider. Alt ve üst hacimden yapabiliriz. Mesela üstün hacmi daha küçük olduğu için ilk önce üst boşalacağından su daha hızlı dökülecek ama sonra yavaş gidecek. Mesela 4’e kadar indi... diyelim ki tam tersi olsaydı mesela alt kısmın hacmi daha küçük olsaydı önce yavaş sonra daha hızlı gidecekti.*” şeklinde ifade ederek gerçek yaşama dayalı gerekçelere bağlı olarak grafikleri çizmiştir.

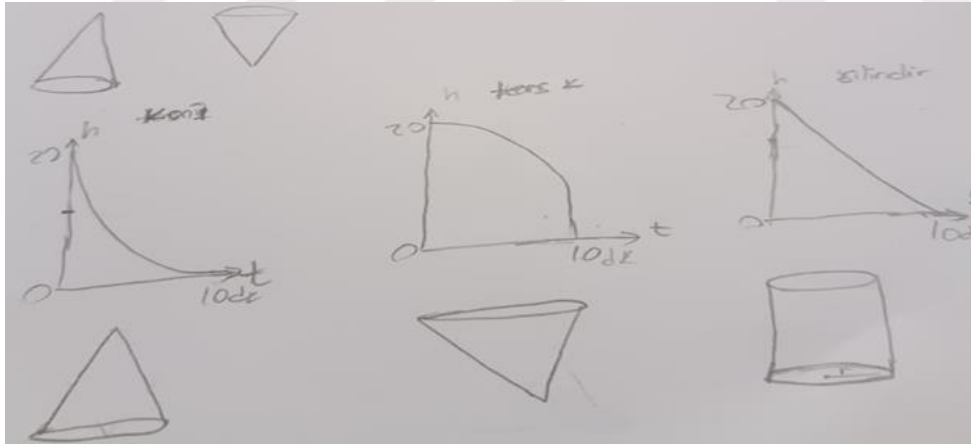
Necati tek bir grafikte iki biçimi gerçek yaşama dayalı kıyaslayarak çizebilse de tek bir grafik çizimi yaparken zorlanmış, değişkenler arası ilişkileri ele almadan ziyade kıyaslama ile sonuca ulaşmıştır. Oysa Fatime gerçek yaşamdan gerekçelere dayanarak deponun şekline bağlı olarak grafikleri ayrı ayrı çizebilmiştir. Ancak ilkinin çizdikten

sonra ters koni biçimine ilişkin “*zaten ters...*” diye de belirterek çizimi için grafiğin elde edilebileceğini belirtmiştir.

Görsel 4.60 Necati’nin Su Deposunun Üç Farklı Biçimine İlişkin Grafik Çizimleri



Görsel 4.61 Fatime’nin Depo Şekillerine Bağlı Yükseklik Zaman Grafikleri

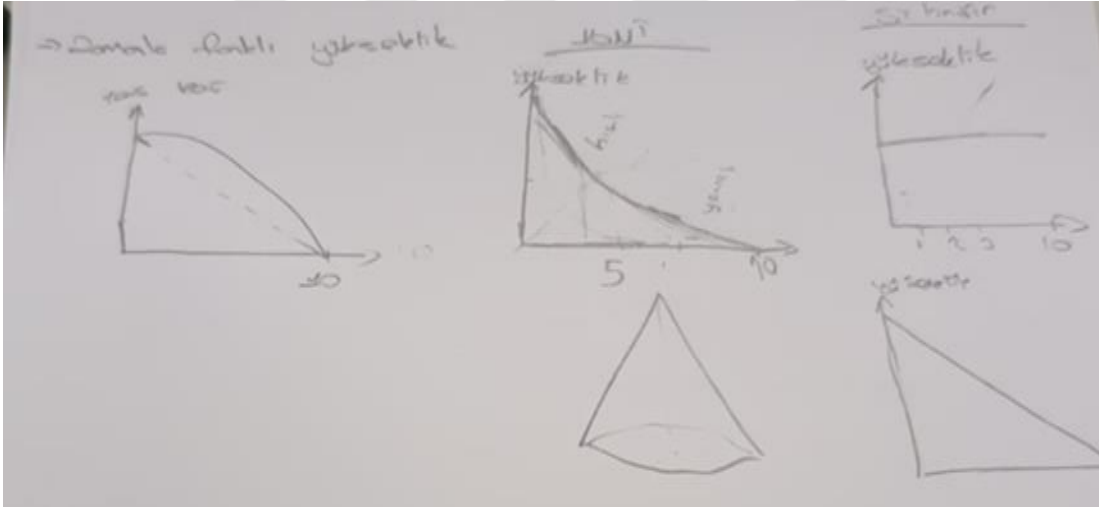


Ancak diğer katılımcıların grafik çizimlerinde zorlanmaları ve Necati’nin nicelleştirerek her iki grafik çizimini ifade etmesi üzerine öğretmen “*Beş veya on dakika içinde suyun tamamı bitecek olsaydı ilk yüksekliği 4 cm olan düz ve ters dik konilere ait yükseklik değişimleri dakika dakika nasıl olurdu sizce?*” şeklinde gerçek yaşama dayalı bir soruyla yükseklik zaman arasındaki ilişkiyi nicelleştirerek yapabilmeleri yönünde yönlendirmiştir. Bunun üzerine muhakeme düzeyleri orta olan Hamza ve Elif ikisi birlikte beş dakikada bitecek olan dik koni şeklindeki su deposu için “*Dört, iki buçuk, bir, yarım, biter.*” şeklinde ifade ederek grafiğe ait doğru çizimlerini yapabilmişlerdir. Ardından

“diğeri tam tersi” şeklinde ele alıp ilk çizdikleri silindire ait doğrusal grafiğe göre yine ikisi birlikte ters koniye ait doğru grafiği çizebilmişlerdir.

Muhakemesi düşük düzey grup temsilcilerinden Aydan koniye ait grafiği orta nokta üzerinden depo şekline bağlı olarak “Orta noktası, kırılma noktası, oradan sonra da yavaş gidilecek. Burda (orta noktadan sonrasını gösteriyor) yavaş” ifadelerini kullanıp grafiği doğru çizmiştir. “Öbürü İlknur’un dediği gibi tersi..” deyip ters koniye ait yükseklik zaman grafiğini silindire ait doğrusal grafiğe göre simetriğini alıp doğru çizebilmiştir. Aynı gruptan İlknur ise yüksekliğin değişimini kastederek “Azdan çoğa doğru azalıyor. Yani öyle düşündüm.” diyerek ters koni şekline ait grafiği çizdikten sonra “Hocam ben koniyi ters çeviriyorum. Bana böyle bir grafik canlandı gözümün önünde. O yüzden bunu (ters koniyi gösterir) ters çevirebilirim ama burada (koninin grafiğini gösterir) tam tersi olacağı için böyle yaptım.” şeklinde ifade edip koniye ait grafiği (Görsel 4.62) de doğru çizebilmiştir.

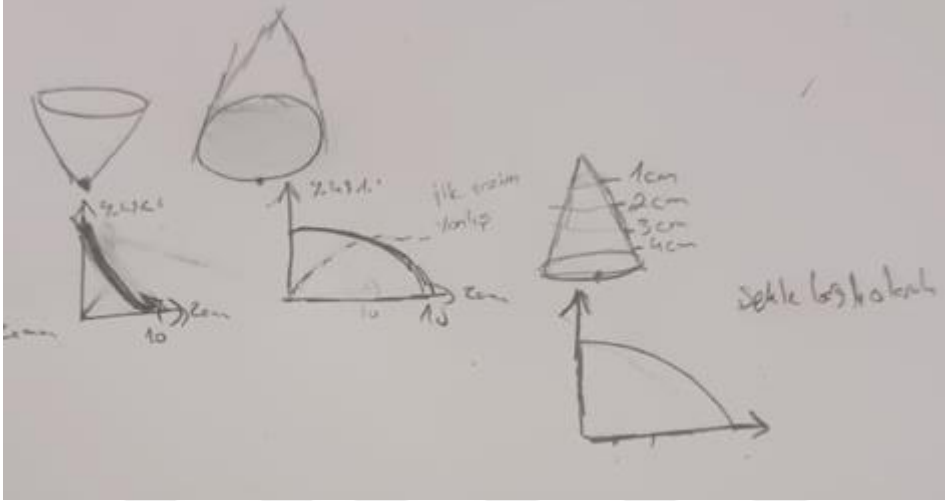
Görsel 4.62 Aydan’ın Depo Şekillerine Bağlı Yükseklik Zaman Grafikleri



Muhakemesi zayıf gruptan Hatice ise depo biçimine bağlı gerçek yaşamdan yola çıkıp nicelleştirerek “Şöyle ilk yavaşladı sonra daha hızlı yaptım. İlk olarak bir santim. Sonra iki, üç, dört artarak gidiyor Yükseklik şöyle (ters koniye ait grafiği gösteriyor)” şeklinde ifade etmiş ve ters koni biçimine ait grafiği doğru çizebilmiştir. Ancak diğeri için tersi ifadelerini diğer katılımcılardan duysa bile dik koni için grafiği y eksenine göre simetrik ve artan fonksiyon haline getirip yanlış çizim yapmıştır (Görsel 4. 63). Bu durum Hatice’nin nicelleştirerek grafiği çizebilse de bağımlı bağımsız değişken arasındaki ilişkiyi anlamlı olarak ele alamadığını göstermiştir. Ayrıca bu durumun sebebi tersi olarak ifade edenlerin silindire ait doğrusal grafiği ele alıp ona göre simetriğini çizme olurken

Hatice'nin referans olarak doğrusal grafiği ele almayıp tersi ifadesinden y eksine göre tersini alması da olabilir.

Görsel 4.63 Hatice'nin Depo Şekillerine Bağlı Yükseklik Zaman Grafikleri



Grafiklerin doğruluğundan nasıl emin oldukları sorulduğunda ise muhakemesi orta düzey temsilcilerin Elif hem matematiksel dayanak olarak *eğimi*, hem de gerçek yaşamdan ise şekle bağlı kalarak kontrol edebileceğini “Yani hocam ben ters koniyi ele aldım. Önce yüksekliği çok az bir şekilde azalıyor. Daha sonra buraya indikçe burada yüksekliği çok hızlı bir şekilde azalacak. Değişimi şurdaki eğimden bulabiliriz değişim hızını... Yani eğimin fazlalığına göre falan ... (Silindir için çizilen doğrusal grafiği gösterir) hepsinde eğimi eşit...” şeklinde ifade etmiştir.

Necati ise aslında ilk grafik çizimine başlarken *eğime* dayalı bakarken zorlanınca bu defa “..şimdi bu silindir. Ters konik silindire daha hızlı, daha güçlü akıyor. Silindire göre daha yavaş, daha düşük şekilde.” şeklinde gerçek yaşama dayalı kontrol ettiğini ifade etmiştir.

Diğer katılımcılar ise çizim yaparak gerçek yaşama dayalı olarak *nicelleştirerek* yaptıkları yolu doğrulama için de tekrar edeceklerini “yaptığımız gibi tekrar bakarız”, “şimdi yaptık onu”, “önce azalır sonra artar dakikaya bakalım” şeklindeki açıklamaları genel olarak belirtip birbirini onaylamışlardır.

Bunun üzerine amaca uygun olarak belirlenen çözüme geri dönüp kritik noktalardan biri olan yoldaki eğimin, su deposu şekline bağlı hızı nasıl etkileyeceği ele alınmıştır. Öğretmen tarafından “aracın gideceği yüzey nasıl bir yerdir? Bu yüzeyin şekli ve aracın depo biçimi birlikte hızına nasıl etki eder?” diye sorunca Hamza “Eğik yüzey,

aşağı gider. Yokuş aşağı hızlanırdı...” diye yüzeyi tanımlayıp hızı gerçek hayata dayalı ifade etmiştir. Orta düzey muhakeme grup temsilcilerinden İlknur konilere dair yaptığı çıkarımlardan yola çıkarak eğimli yüzeyden inerken hızlanmayı karıştırmış ve *“Boş bile olsa giderdi. Kendi kendine giderdi. Çünkü eğim var. Çok hızlıdan az hızlıya gider.”* şeklinde yanlış bir çıkarım yapmıştır. Orta düzeyden Hamza ise sadece yolu dikkate alarak tam tersini *“Giderek hızlanırdı.”* şeklinde doğru ifade etmiştir. Muhakemesi yüksek düzeyden Fatime de benzer şekilde sadece yolu dikkate alarak *“boşken düzgün hızlanır.”* şeklinde hıza dair doğru çıkarımlarda bulunmuştur. Ardından hangi su deposu modelini seçecekleri sorulunca Necati *“Ters koni. En hızlısı”* deyip daha önce elde ettiği çıkarımlardan yola çıkıp yolun etkisini dikkate almadan çözümü belirlemiştir. Ardından diğer katılımcılar da *“Ters koni.”* deyince Elif *“Yükseklik. Grafikten dolayı”* şeklinde sadece önceden elde ettiği gerekçeyi tekrar ederken Fatime yolu da dahil ederek *“su deposunda artarak azalırdı yükseklik. Yokuşta inerken hızı artar.. sonra hızı daha da artar bence.”* şeklinde gerçek yaşama dayalı genel bir gerekçe ifade etmiştir. Bunun üzerine diğer tüm katılımcılar Fatime’yi onaylayıp *“Evet, bu (ters koniyi işaret eder)”* şeklinde çözüm için ters koni biçimini belirlemiştir.

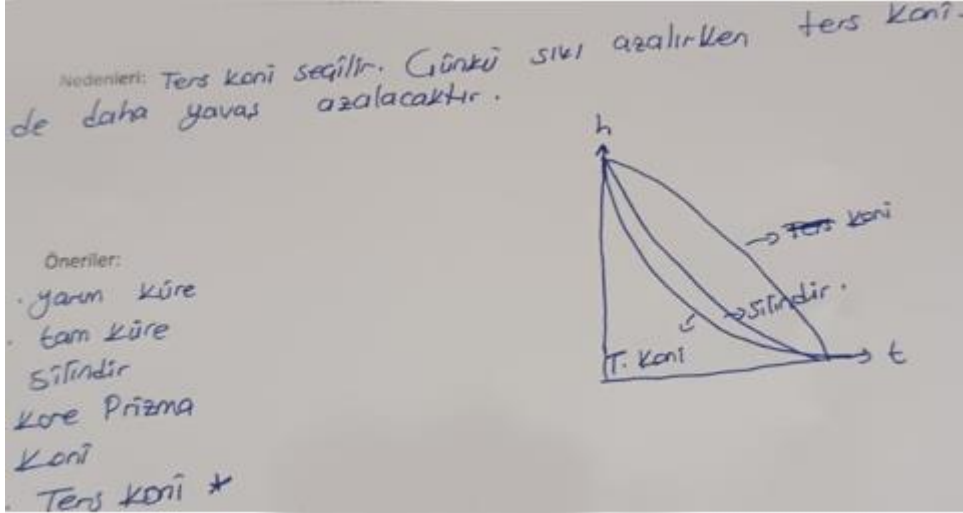
Bu ifadelerden Fatime hariç geriye kalan tüm katılımcıların hem yolun yokuş olmasından kaynaklı durumu hem de su deposunun biçiminden kaynaklı durumu bir araya getirmede zorlandıkları anlaşılmıştır.

Ardından belirlenen çözümün üzerine öğretmen başka çözüm yollarında yol değişkenini dikkate alıp almadıklarını görmek için *“küre mi ters koni mi”* şeklinde sormuştur. Bu defa da zayıf düzeyden Necati tekrar yolun etkisini açıklamadan *“Hocam, ters koni.”* demiştir. O esnada orta düzeyden Elif *“Hocam, grafik üstünde bakalım.”* diye ifade edince katılımcılar matematiksel olarak ele almaya başlamışlardır.

Fatime ve Necati herhangi bir an için yüksekliğe ait nicel değer verip gerçeğe dayalı küre depo ortasına dek boşaldığında diğerinde olacakları ele alıp sırasıyla *“Mesela bu beşteyken bu altıda olur. Aynı yine yükseklik nedeniyle ters koniyi seçeriz. Küre tam orta noktada duruyorken ters konide yükseklik daha üstte olur. O zaman daha da hızlanır. Çünkü bundan(yokuş yolu işaret eder) da bir hızı var.”*, *“Küreyi eyleyim. Çünkü hocam kürenin yarısı orta noktasına geliyor, ters koninin yarısı orta noktasının biraz üstüne geliyor. Yine çok fazla şey olmayacak. Çünkü hacimce aynı şeyler ya.”* ifadelerini kullanmışlardır. Bu açıklamalara herkes katılmış *“Ters koni olsun”* diyerek tekrar ters

koni şeklinde su deposu yapılmasını kararlaştırmışlardır. Çözümde ise koni, ters koni ve silindire ait yükseklik zaman grafikleri ile neden ters koniyi seçtiklerini eklemişlerdir (Görsel 4.64).

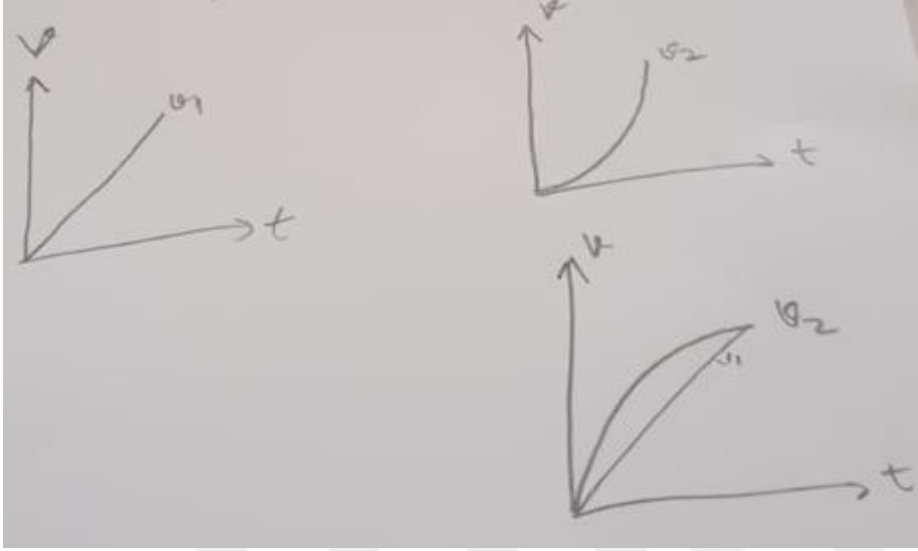
Görsel 4.64 Dost Araç Öğretimine İlişkin Genel Çözüm



Bu kararın üzerine öğretmen belirlenen çözüm sonrası tüm katılımcıların yükseklik artarsa hızı da artar çıkarımlarını hızla ait grafik üzerinde de görmek için “şimdi ters koni biçimindeki su deposunun aracın hızına hangi zamanlarda nasıl etki ettiğini grafikte nasıl gösterebilirsiniz?” denilmiştir. Anlaşılabilir olması adına yokuştan aşağı serbest bırakılınca hızına V_1 ters koni biçiminde, içi dolu su deposu ile bırakılırsa hızı V_2 olması şeklinde karar alınmıştır. O esnada Elif tekrar iki durumu da aynı grafikte çizmeyi teklif etmiştir. Ardından çözüme ilişkin Fatime hariç diğer katılımcıları yoldan kaynaklı hız artışını ele alamadıkları görülmüştür. Zayıf düzey temsilcilerinden Necati “Hocam eğik. Aşağı doğru gidiyor ya Hocam. Bu aşağı doğru gidiyor ya. Bir hız var. ...ilk anlarda ya da yok son anlarda da hızı artar bilemedim” şeklinde karar veremediğini açıklamıştır. Düşük düzeyden İlknur “sadece bırakılsaydı deposuz doğrusal hızlanacaktı Ama şimdi ters koni var...” şeklinde ifade ederek serbest bırakılmayı ve ters koni biçimini ele almıştır. Orta düzeyden Hamza ve Elif sırasıyla “Bence ilkte çok artırır. Çünkü daha güçlü geliyorsa, daha hızlı olursun. Ne kadar sona yaklaştıkça o kadar zayıflar gitme gücü...”, “İlk anlarda hızı daha arttırmıştır” şeklinde ters koniyi ele alıp açıklamışlardır. Yüksek düzey grup temsilcisi Fatime ise “...su yüksekliği ilk anlarda daha çok olacaktır. İşte o zaman böyle (ters koniye ait grafiği gösterir) olacaktır. İlk başta benim dediğim gibi su deposunda yükseklik artarak azalırdı. Yokuştan inerken ise hızı artar.. sonra hızı

daha da artar bence.” şeklinde ifade etmiştir. Ancak geriye kalanlar ise sadece “*Tamam, evet*” şeklinde onaylamışlardır. Çözüm olarak da koni, ters koni ve silindire ait yükseklik zaman grafiklerinin yanına serbest bırakılma ve ters su deposuna ait hız zaman grafiğini eklemişlerdir (Görsel 4.65)

Görsel 4.65 Deposuz Serbest Bırakılma Ve Ters Su Deposuyla Olan Hızları



Burada Fatime hariç diğer katılımcıları yoldan kaynaklı hız artışını, su deposundan kaynaklı hızla birleştirirken anlamada zorlandıklarını yolu dikkate almadıklarını göstermiştir. Ayrıca Elif’in tekrar iki durumu da aynı grafikte çizmeyi teklif etmesi Necati de olduğu gibi kıyaslama yaparak da çözüme ulaştığının göstergesidir.

4.3. Orta Görüşmeye İlişkin Bulgular

Bu bölümde katılımcıların PISA-2 testi sonrası matematiksel muhakeme yeterliliğini incelemek amacıyla yapılan orta görüşmeye ait bulguları ön görüşme ve önceki öğretilere ait bulgularla karşılaştırmalı olarak sunulmuştur.

4.3.1 Grup 1’nin temsilcisi olan Fatime’nin orta görüşme bulguları

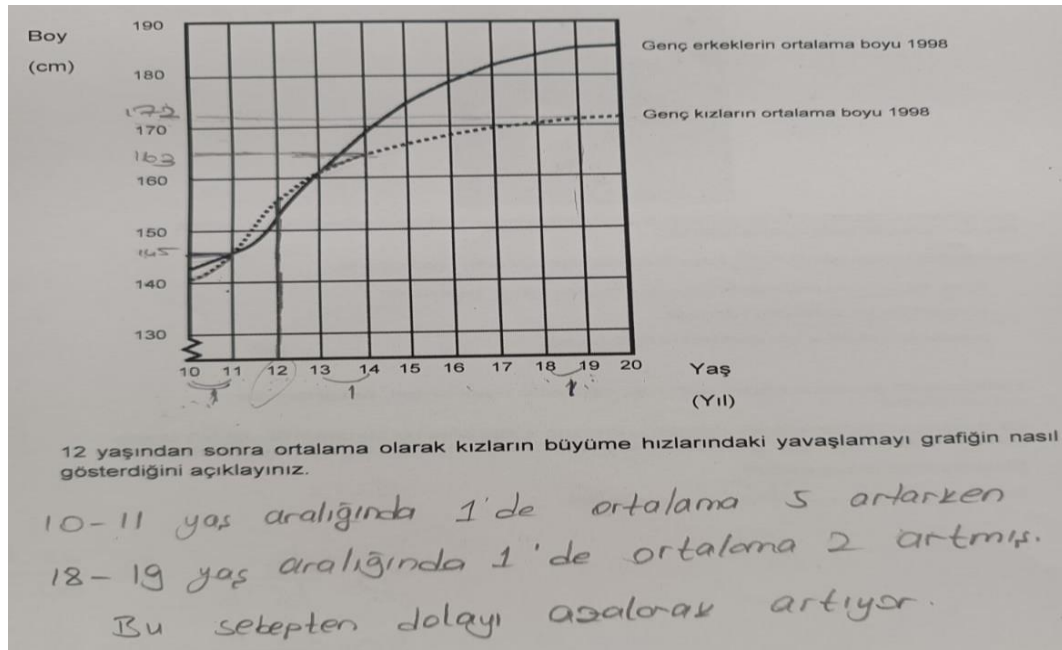
Bu bölümde Grup 1’in temsilcisi olarak seçilen Fatime adlı katılımcının PISA-2 testine dayalı gerçekleştirdiği orta görüşmeye ait matematiksel muhakeme yeterliliğine ilişkin bulguları araştırma sürecinde gerçekleştirilen ön görüşme ve öğretilere ait bulgularla karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

Fatime’nin orta görüşmeye ait bulguları incelendiği zaman tıpkı ön görüşme ve ara öğretilerde görüldüğü üzere matematiksel muhakeme yeterliliğine dair hiçbir güçlük yaşamadığı görülmüştür. İlk olarak verilenleri ve istenileni anlamlandırırken gerçek

yaşama dair ifadeler sunabilmekte, değişkenlerin değerini bulup matematiksel sonuca ulaşırken uygun gerekçe sunabilmektedir.

Örneğin *Büyüme* probleminde verilen *ortalama* kavramını, ön görüşmedeki *ortalama satılan gazete sayısı* sorulunca “*Toplam satılan gazeteleri toplam hafta sayısına bölme...*” şeklinde ifade edip *aritmetik ortalama* ile ilişkilendirmesine rağmen *Büyüme* sorusunda farklı bir şekilde “*yaklaşık*” olarak ifade etmiştir. Bu duruma ilişkin görüşme kesitinde “*Yani yaklaşık olarak yani bakıp artmış mı azalmış mı onu genel olarak onu söyleyeceğim.*” diyerek ortalama kavramını bağlama özgü anlamlandırırken gerçek yaşamdan “*yaklaşık, genel olarak*” şeklinde ifadelere yer vermiştir. Bu iki ifade arasındaki farklılıktan soruda verilenleri bağlama dayalı olarak ele aldığı anlaşılmaktadır. Sorunun çözümünde de grafikten belli yaş aralıklarına uygun yaklaşık uzunluk değerleri belirleyip ortalamayı “*kadar, cm’e falan denk gelmek*” şeklinde gerçek yaşamda anlamlandırırken “*...1 yaş atladığımızda burada ortalama mesela 140 ile 150 arasında 145’e denk gelirken, 18-19 yaş arasında 1 yaş burada 2 cm’e falan denk geliyordu. 1 yılda 5 cm uzuyor. Ama 18-19 arasında 1 yılda 2 cm kadar uzuyor... O zaman hızlardaki artışlar yavaşlamışlar.*” şeklinde ifade etmiştir. Ayrıca problemin sonucuna ulaşırken çözüm kağıdında *ortalamanın* bağlama özgü *yaklaşık* anlamını kullanarak “*ortalama 5 artarken*” şeklinde yazmıştır (Görsel 4.66).

Görsel 4.66 Fatime’nin Büyüme Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



Ayrıca benzer şekilde *Damlama Oranı* sorusunda sembol olarak verilen d , D , h ve s ifadelerinin ve soruda serumun hacmi ile istenenin bağlama dayalı olarak ne anlama geldiğini doğru bir şekilde ifade edebilmiştir. Aşağıda bağlama ilişkin ifadelerine dair görüşme kesiti verilmiştir:

Öğretmen: Damlama oranı sorusundayız. Burada verilenleri ve istenenleri nasıl ifade edersin?

Fatime: Örneğin burada(soruyu gösteriyor) bize hemşirelerin serum için büyük D ile gösterilen damlama oranı. Bir dakikada düşen damla sayısıymış bu D . Küçük d olan 1 mililitredeki damla sayısını ölçen damla faktörüymüş. h ise serumun mililitre cinsinden hacmi, zaten sorduğu istediği de buydu. S olan serumun akması için gereken süre yani saat olarak verilmiş. Sorduğu da diyor ki 1 dakikada 50 damlalık bir damlama oranına sahip olan serumun damlama oranı zaten büyük D idi. Hastaya 3 saatte verilmesi gerekiyormuş. O zaman S olan da 3 saat olacak. Bu serum için damla faktörü mililitre başına 25 damla olur. Damla faktörü de buradaki d idi.. Mililitre başına 25. Sadece bu formülde işte onları yazdım. 360 buldum.

Bu ifadelerden Fatime'nin soruda sembollerle verilen değişkenlerin nicel değerlerini bağlamdan tek tek bulabildiği de anlaşılmıştır. Gerçekten de Fatime değişkenlerin değerlerine dair çıkarımlarda bulunmuştur. Her bir değişkene ait değerleri belirledikten sonra soruda verilen değişkenleri formülde uygun yerlerine yazarak cebirsel manipülasyon yapmış ve doğru matematiksel sonuca ulaşmıştır (Görsel 4.67)

Görsel 4. 67 Fatime'nin Damlama Oranı Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

Hemşirelerin serumun hacmi olan h 'yi, damlama oranı D 'den, hesaplamaları gerekmektedir.

Bir dakikada 50 damlalık bir damlama oranına sahip olan bir serumun hastaya 3 saatte verilmesi gerekmektedir. Bu serum için damla faktörü mililitre başına 25 damladır.

Serumun hacmi kaç ml'dir?

Serumun hacmi: 360 ml

$50 =$

$$D = \frac{d \cdot h}{60 \cdot s} \quad D = \frac{25 \cdot h}{60 \cdot 3}$$
$$50 = \frac{25 \cdot h}{60 \cdot 3} = h = 360$$

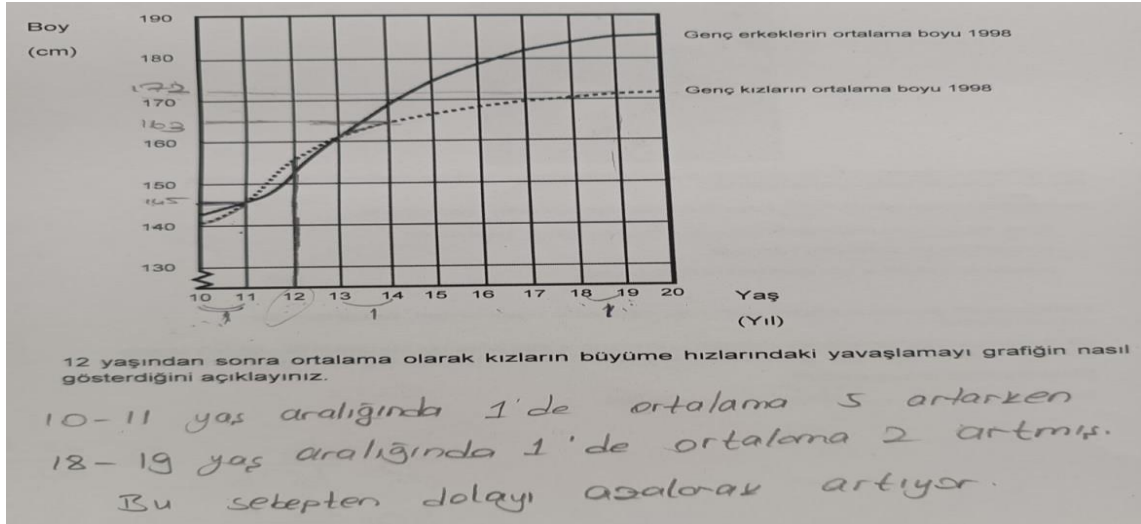
180

Fatime verilen problemde amaca dair kritik noktaları da hemen ayırt edebilmektedir. Örneğin *Büyüme* sorusunda ilk olarak soruda istenene dayalı doğrudan bir çıkarım yaparak genç kızlara ait grafik seçilmeli ardından grafikte kızların 12 yaş sonrasında alınan herhangi yaş aralığında eğimin nasıl azaldığı ifade edilebilmelidir. Fatime soruda istenen cümlesinden yola çıkarak “...Ama burada bana kızları sorduğu için kesik çizgiye dikkat ettim...” şeklinde doğrudan çıkarım yaparak amaca dair kritik noktalardan ilki olan kızların grafiğini ele almıştır. Ardından soruda isteneni gerekçe olarak verip “Bu soru da önemli olan boy falan değil. Kesik çizgiler (kızlara ait grafiği gösteriyor). Çünkü erkekleri sormuyor bana. Burada bana kızları sorduğu için kesik çizgiye dikkat ettim sadece.” ifadelerini kullanmıştır.

Ayrıca Fatime değişkenleri birbiriyle gerekçeli olarak ilişkilendirebilmekte ve bu ilişkilendirmeyi gerçek yaşamdan ifadelerle anlamlandırabilmektedir. Örneğin *Büyüme* sorusunda 12 yaşından sonra ortalama olarak kızların büyüme hızlarındaki yavaşlamayı grafiğin nasıl gösterdiği sorulmuştur. 12 yaş öncesi ve sonrası birim yaştaki artışı bulmak için verilen aralıklara uygun nicel değerler atayarak ortalama artışları nicel olarak bulmuş ardından iki artışı karşılaştırarak 12 yaş sonrası birim artış daha az olduğu için büyümede yavaşlama olduğunu matematiksel olarak belirtmiştir. Ayrıca “Artıyor ama azalarak. Artıyor ama azalarak.” şeklinde gerçek yaşamda da anlamlandırabilmiştir. Aşağıda Fatime’nin çözümüne ait görüşme kesiti ve Görsel 4.68 verilmiştir.

Fatime: 12 yaşından sonra azalarak gittiğini görüyorum grafiğin. Artıyor ama azalarak. Artıyor ama azalarak. 12 yaşından önceki kısımda daha böyle dik bir artış var grafikte. Bu yüzden daha çok artıyor. Ama 12 yaşından sonraki kısımda baktığımız zaman böyle daha zamanı...hani yaşa daha yakın... boy uzunluğunuza daha uzak gidiyor grafik. Burada 1 yaş atlamak için, 1 yaş atladığımızda burada ortalama mesela 140 ile 150 arasında 145'e denk gelirken, 10-11 yaş arasında, mesela 18-19 yaş arasında 1 yaş burada 2 cm'e falan denk geliyordu. Ben de bu yüzden orada bu kadar azaldım. 1 yılda 5 cm kadar uzuyor. Ama 18-19 arasında 1 yılda 2 cm kadar uzuyor...O zaman hızlardaki artışlar yavaşlamışlar.

Görsel 4.68 Fatime'nin Büyüme Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



Fatime *Yarış Arabası* sorusunda da verilen grafiğe bakarak iki değişken arasındaki ilişkiyi ele alıp gerçek yaşama dair anlamlandırırken gerekçe oluşturabilmiştir. Soruda 3 km lik düz yola dair yarış arabasının yol uzunluğuna dayalı hız grafiği verilmiş ve şıklardan grafiğe uygun pistin seçilmesi istenmiştir. Fatime grafiğe bakarak hızların azaldığı yerler için gerçek yaşamdan “Yol düz ise o zaman kavis vardır. O nedenle hız azalır.” çıkarımı yapmıştır. Ardından üç kez hızın azaldığını ifade edip kavis sayısını üç olarak doğru bulmuştur. Hız ile yolu ilişkilendirerek 0.5, 1.5 ve 2.5 km’lerde araba hızının azaldığı gerekçesiyle kavislerin başlangıç noktasından ne kadar uzakta olduğu sonucuna ulaşmıştır. Fatime’nin bu ilişkilendirmeleri ve gerekçeleri görüşme kesitinde “Burada bize düz 3 km’lik bir pistte yarışlar var. ..bir grafik verilmiş. ... Bu grafikte hız 3 noktada azalıp tekrar artıyor. Düz bir pistte hızının tekrar azalıp tekrar artması için viraj olması gerekiyor. Çünkü yokuş olamaz pist düz. Viraj olmalı. 3 tane viraj olması gerekiyor” şeklinde ifade etmiştir.

Ardından Fatime ilişkilendirme ile elde ettiği çıkarımları birleştirerek verilen şıkları kıyaslayıp *S başlangıç noktasına 0.5, 1.5 ve 2.5 km aralıklarla kavis olan pisti* uygun gerekçelerle bulmaya çalışmıştır.

Fatime ilk olarak grafikten *üç viraj olması gerektiğine* dair çıkarımda bulunmuş ve grafikte viraj ilişkisine dayanarak şıkları tek tek karşılaştırmıştır. A ve E şıkkını viraj sayısı uymadığı gerekçesine dayalı olarak elemiştir. D şıkkı için kavis ve hıza dair yeni çıkarım yapıp *hafif eğimi göstererek bir daha hız azalması gerektiğini* belirtip sorudaki grafikte olmadığı için elemiştir. B ve C için başlangıç noktasını dikkate alıp hızda hemen

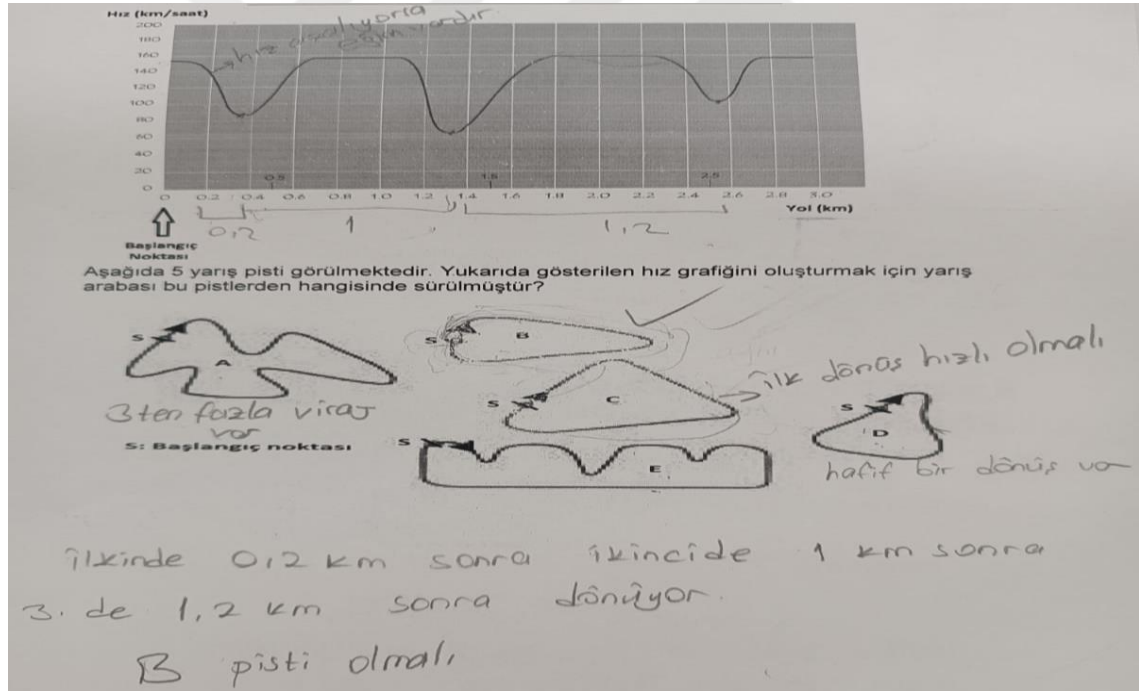
azalma olmadığı gerekçesi ile C şıkkını da eleyip doğru cevap olarak B'yi bulmuştur. Fatime'nin çözümüne dair görüşme kesiti ve Görsel 4.69 verilmiştir.

Fatime: E şıkında 3'den fazla viraj var. A şıkkı da böyle. Bunları bu yüzden eledim. D şıkında da yine eğim var ama burada hızda hiç azalma yok. Bu yüzden ben D'yi de eledim. B ve C kaldı. Başlar başlamaz bir dönüş döndüğünü gördüm burada çünkü azaldığı için. Hemen 0-2 km'de azalıyor. Ama C'de baya bir ilerledikten sonra dönüyor. B'de ama hemen dönüyor mesela. Bu yüzden ben B oldum. Başlangıç noktalarına göre.

Öğretmen: O zaman sen aslında B'yi ne ile ilişkilendiriyorsun burada Fatime?

Fatime: Ben burada soruyu çözerken ne kadar gittiği ile ne zaman döndüğü, viraj var orada. Virajı mesela burada 0-2 km gitmiş ve hemen dönmüş. Ama burada mesela 1 km gittikten sonra dönmüş. .

Görsel 4.69 Fatime'nin Yarış Arabası Hızı Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



Bu ifadelerden ve Görsel 4.69'dan Fatime'nin iki değişkene ait matematiksel verileri ilişkilendirerek gerçek yaşama dayalı anlamlandırıp uygun gerekçe sunarak gerçek yaşamdan sonuca ulaştığı anlaşılmıştır.

Fatime benzer şekilde gerçek hayata dair verilenleri matematikleştirip bulduğu matematiksel sonucu gerekçe sunarak tekrar gerçek yaşama dair anlamlandırabilmiştir.

Örneğin gerçek yaşama dair sunulan *İnternette Sohbet* sorusunda Fatime aradaki zaman farkını ve kimin daha ileri saatte olacağına dair doğru çıkarım yaparak *Sydney'in Berlin'den daha ileride olduğu* belirtmiştir. Ardından uyuma ve okula gitme saatlerini ele alıp Mark'ın konuşabileceği saatleri belirlemiş, ardından belirlediği saatleri Hans'ın kendi yerel saatine dayalı uyuma ve okula gitme saatleri ile ilişkilendirerek ikisinin de konuşmak için uygun olup olmadığını karar verebilmiştir. Bu esnada yerel saat, uyma ve okula gitme şeklinde üç farklı durumun birbirini nasıl etkilediğini gerekçeleriyle doğru ifade edebilmiştir. Fatime'nin soru çözümüne ilişkin görüşme kesiti ve Görsel 4.70 verilmiştir.

Fatime: ...Sydney ile Berlin arası 9 saat zaman farkı var. Sydney Berlin'den 9 saat ileride. Buna göre bunların ne zaman konuşup ne zaman konuşamayacağını bulmam gerekiyor. 9 ve 16.30 arasında ikisinin de yerel saatine göre okuldalar, konuşamazlar. İkisinin yerel saatine göre yine 23'den 07'ye kadar ikisi de uyuyorlar. Burada 7,5 saatlik bir okul zamanı var ikisinin de. Burada da 8 saatlik bir uykuları var. Zaten bunları çıkardım. 9 saat olduğu için ben burada ekleyerek baktım mesela. Önce Mark'a baktım. Mark zaten 09'da 16.30 arası, 09'da 16.30 arası okulda olacak. Hans'la bu sırada 9 saat zaman farkından dolayı 07, mesela Mark 09.00 iken Hans'ın da 07.00'si de denilmiştir. Evet, burada 18 oluyor. 1 de uyuyor. Yani bu okuldayken, bu da uyuyor oluyor. Bu yüzden konuşamıyorlar. Markın 16:30'dan 18 arası bir buçuk saat boşluğu var burada. Hansın da 7.30'dan 09.00 arası. 16.30 derken bunun saati yerel saati 7.30 oluyor. 7.30'da zaten 09.00 arası evdeler. 9.00'da okulu başlıyor. 7.30'da Hans'ın 7.30'da 09.00 arası konuşabilirliği var. Mark'ın da buna dengelen 16.30'da 18.00 arası konuşabilirliği var. Yani burada bir buçuk saatlik bir konuşma aralıkları var. Bu aralıkta konuşabilirler. Böyle buldum. Bir de Hans yine gece 22.00 iken Mark'ın saati sabah 07.00'a denk geliyor. 07.00 ile 08.00 arası boş Mark'ın. Hans'ın da 22.00 ile 23.00 arası boş. 23.00'dan sonra uyuyor. Bu bir saat arasında da konuşabilirler.

Doğru saat aralıklarını belirledikten sonra doğruluğundan emin olmak için tekrar aynı şekilde işlem yaparak kontrolü sağlamaya çalıştığı “*Şöyle hocam mesela 9 saat ilerideydi Mark. 7.30'dan 16.30 arasında zaten 9 saat zaman farkı var ve Mark ileride. Bu zamanlarda da Mark okulda değil. Hans da okulda değil. Yani konuşabilir kontrolünü aynı şekilde böyle yapıyor.*” şeklinde ifade etmiştir.

Görsel 4.70 Fatime'nin İnternette Sohbet Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

Yer	Saatler
Sidney	(Mark)
Berlin	(Hans)

$$\begin{array}{r} 9.00 \quad 16.30 \\ \hline 7.30 \text{ saat} \\ 23.00 \quad 07.00 \\ \hline 8 \text{ saat uykü} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16.30 - 23.00 \\ 07.00 - 09.00 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Referans} \rightarrow 00.00 \\ \text{Sidney} \rightarrow 09.00 \rightarrow 18.00 \rightarrow 23.00 \rightarrow 07.00 \\ \text{Berlin} \rightarrow 00.00 \rightarrow 08.00 \rightarrow 14.00 \rightarrow 22.00 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} +5 \\ +8 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Mark} = 07.00 - 09.00 \\ \text{Hans} = 22.00 - 23.00 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Mark} \rightarrow 09.00 \rightarrow 16.30 - 18.00 \\ \text{Hans} \rightarrow 07.00 - 09.00 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Hans} = 7.30 - 09.00 > \text{konuşuyorlar} \\ \text{Mark} = 16.30 - 18.00 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Mark} = 07.00 - 08.00 > \text{konuşuyor} \\ \text{Hans} = 22.00 - 23.00 \end{array}$$

Fatime gerçek yaşama dayalı sorunun çözümünde iki yerel saat, uyku ve okul saatlerini de dikkate alarak birden fazla çıkarım yapmış ve Mark'ın konuşma saatlerini 09:00-16:30 ile 16:30-18:00 olmak üzere iki farklı zaman aralığı olarak doğru bulmuştur. Ardından Hans'a göre saatleri ilerletip çıkarımlarını tek tek kontrol etmiştir. Gerekçe olarak öğretimlerde de yaptığı gibi gerçek yaşamla ilişkili durumlar sunmuştur.

4.3.2 Grup 2'nin temsilcileri olan Elif ve Hamza'nın orta görüşme bulguları

Bu bölümde Grup 2'nin temsilcileri olarak seçilen Elif ve Hamza adlı katılımcıların PISA-2 testine dayalı gerçekleştirdiği orta görüşmeye ait matematiksel muhakeme yeterliğine ilişkin bulguları, araştırma sürecinde gerçekleştirilen ön görüşme ve öğretimlere ait bulgularla karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

Elif araştırma sürecinin başından orta görüşmeye dek elde edilen bulgulara göre matematiği kullanmada oldukça iyi, problem durumunda verilenleri ve isteneni gerçek yaşamda anlamlandırabilen ve ikiden fazla değişkeni ilişkilendirebilen bir katılımcıdır. Ancak ikiden fazla değişkenin olduğu durumlarda eksik çıkarımlarda bulunabilmektedir. Ayrıca gerekçe sunmada gerçek yaşamdan ve matematikten dayananaklar bulabilirken çözümün doğruluğunu ise nicel değerler atayarak kontrol etmektedir.

Örneğin ön görüşmedeki *Bisiklet Sürücüsü Hale 1*’de yer alan *ortalama* kavramını “*Ortalama hız, toplam alınan yol bölü zamandır.*” şeklinde aritmetik ortalama ile ilişkilendirmesine rağmen *Büyüme* probleminde ise “*biraz daha, bir tık daha az, kadar*” şeklinde ifade etmiştir. Bu iki ifade arasındaki farklılıktan soruda verilen ortalama kavramını bağlama özgü olarak anlamlandırırken gerçek yaşama dayalı olarak ele aldığı anlaşılmaktadır. Bu duruma ilişkin görüşme kesiti aşağıda verilmiştir:

Öğretmen: 12 yaşından sonra ortalama büyümedeki yavaşlamayı anladın?

Elif: Çünkü şu grafiğe baktığımızda mesela 11 ile 12 arasında çok büyük bir daha yükselme var. Ama mesela 12 ile 13 arasında biraz daha artmış ama öncekine göre bir tık daha az. Ya yarısı kadar azalmış derim yani.

Ancak Hamza araştırma sürecinin başından orta görüşmeye dek elde edilen bulgulara göre problem durumunda verilenleri ve isteneni gerçek yaşamda anlamlandırabilen ve ikiden fazla değişkeni ilişkilendirebilen bir katılımcıdır. Ayrıca gerekçe sunmada gerçek yaşamdan ve matematikten dayananaklar bulabilirken çözümün doğruluğunu ise sayı doğrusu veya nicel değerler atayarak kontrol etmektedir.

Hamza da Elif’e benzer şekilde ön görüşmede yer alan *Bisiklet Sürücüsü Hale 1*’deki *ortalama* kavramını “*Ortalama hız, toplam alınan yol bölü zamandır. Ortalama hızı buldum. Mesela 10’u 4’e böldüm. 2,5.*” şeklinde aritmetik ortalama ile ilişkilendirirken *Büyüme* probleminin çözümünde ise “*yakın değer, biraz daha*” şeklinde kullanarak “*13-14 yaşında 170 ortalama olması gerekiyordu. Bakıyorum mesela, 13 şurası olsun, 14 şurası olsun. 13-14 yaş arası 160’ya yakın bir değer var. ...Hatta 170’den biraz daha yüksekti değerler...*” açıklamalarını yapmıştır. Bu durum Hamza’nın ortalama kavramını bağlama özgü olarak anlamlandırırken gerçek yaşama dayalı ele aldığını açığa çıkarmaktadır.

Ayrıca Elif ve Hamza benzer şekilde *Damlama Oranı* sorusunda verilen *d*, *D*, *h* ve *s* sembollerinin ifadelerini ve soruda serumun hacmi ile istenen değişkenin bağlama dayalı olarak ne anlama geldiğini doğru bir şekilde ifade edebilmiştir. Elif “*İlk başta diyor ki bir dakikada 50 damlalık bir damlama oranı sahip bir sorum vermiş. Demek ki oranın D’si 50’miş. Daha sonra 3 saatte ama burada 60 çarpı 3 şeklinde. 60 çarpı 3 tabi bu payda da olacak. Daha sonra... 1 milimetre damlama sayısıyla ölçülen damla faktörü yani d’si 25 şeklinde verilmiş. Daha sonra zaten hacmi vermediği için h’yi yani hacmi*

soruyor. Buradan gerekli sadece yerleştirmeleri yaparsak 360 çıkıyor.” şeklinde ifade ederken, Hamza “Küçük d , 1 mililitrede damla sayısıyla ölçülen damla faktörüdür. H , serumun 1 litre cinsinden hacimdir. S , serumun atması için gereken süredir. Yani saat vermiş. 3 ... ve damla faktörü mililitre başına 25 damladır. Yani damla faktörünü vermiş. Damla faktörüm küçük d idi. Yerine koyuyorum 25'ti. Küçük s de 3 yani saat. Onu da yerine koyuyorum. Ve benim oranın sonucu 50. Sadece değiştirmelerimi yapıyorum. 2 eşittir. H bölü 180 oluyor. Oradan da h 360 elde ediyorum.” şeklinde ifade etmiştir.

Bu ifadelerden Elif ve Hamza'nın Damlama Oranı sorusunda verilen d , D , h ve s sembollerinin ifadelerini ve soruda serumun hacmi ile istenen değişkenin bağlama dayalı olarak ne anlama geldiğini doğru bir şekilde ifade ettikleri anlaşılmıştır. Ayrıca her iki katılımcı da değişkenlerin nicel değerlerini bağlamdan tek tek bulabilmiştir. Ardından her bir değişkene ait değerleri soruda verilen formülde uygun yerlere yazarak cebirsel manipülasyon yapmış ve doğru matematiksel sonuca ulaşabilmişlerdir (Görsel 4.71 ve Görsel 4. 72)

Görsel 4.71 Elif'in Damlama Oranı Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

Serumun hacmi kaç m'dir?
Serumun hacmi: ml

$$2 = \frac{25 \cdot h}{3 \cdot 60}$$

$$50 = \frac{25 \cdot h}{60 \cdot 3}$$

$$360 = h$$

360 mL

Görsel 4. 72 Hamza'nın Damlama Oranı Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

Hemşirelerin serumun hacmi olan h 'yi, damlama oranı D 'den, hesaplamaları gerekmektedir.
Bir dakikada 50 damlalık bir damlama oranına sahip olan bir serumun hastaya 3 saatte verilmesi gerekmektedir. Bu serum için damla faktörü mililitre başına 25 damladır.
Serumun hacmi kaç m'dir?
Serumun hacmi: ml

$$D = \frac{25 \cdot h}{60 \cdot 3}$$

$$50 = \frac{25 \cdot h}{60 \cdot 3}$$

$$2 = \frac{h}{180}$$

$$h = 360$$

Elif'in ön görüşme, öğretilere ait bulgularında olduğu gibi orta görüşmede de problem amacına yönelik kritik noktaları belirlemede herhangi bir zorluk yaşamamayıp tüm soruların çözümünde kritik noktaları göz önüne alarak doğru cevaplamıştır.

Örneğin *Yarış Arabası* sorusunda grafiğe bakarak hız azalmasının yoldaki kavisten kaynaklanacağını, kavis sayısını ve başlangıç noktasına olan uzaklık şeklindeki kritik noktaları “hız azalacağı zaman işte dönme ya da eğim yüksek olabilir hani. Ama soru da düz diyor. Bu yüzden işte dönmeyi ele alacağız. Grafiğe bakarsak 1, 2, 3 azalma yani 3 kavis olduğunu göreceğiz. Daha sonra başlangıç noktası S olarak bakarsak hemen başladığından sonra hemen azalmış.” şeklinde tespit edebilmiştir. Bu esnada “hız azalacağı zaman işte dönme ya da eğim yüksek olabilir hani. Ama soru da düz diyor. Bu yüzden işte dönmeyi ele alacağız.” şeklinde kavis olarak ele almaya dair “soruda yol için düz” şeklinde gerekçe sunabilmiştir.

Ancak Hamza genel olarak kritik noktaları belirleyebilse de bazen kritik noktaları anlamlandırmak da zorlanmaktadır. Üçüncü öğretim olan *Çevreye Dost Araç* öğretiminde “Bu araba minyatürü...5 litre aldığını varsayalım.” şeklindeki ifadesiyle en fazla 5 litre su alabilecek şeklinde metinde verilen litre miktarını dikkate aldığını gösterse de kritik nokta olmasına ilişkin gerekli açıklamaları yapamamıştır. Orta görüşmede ise sorularda yer alan kritik noktaları belirleyebilmiştir. Örneğin *Yarış Arabası* sorusunda grafikteki hız azalmalarını yoldaki kavise veya yolun yokuş olmasına bağlamıştır. Ancak yolun düz olduğu gerekçesiyle hızda azalmanın kavisten olduğunu, ardından grafikte hızın azaldığı yerlerin sayısı ile kavis sayısını ilişkilendirip toplamda üç kavis olacağını gerçek yaşamdan yola dair gerekçeli bir şekilde belirlemiştir. Görüşme kesitine aşağıda verilmiştir:

Hamza: Ben grafiğe baktım, şimdi burada üç kere benim hızım azalmış. Neden azalmış hızım? Diyor ki düz bir yol. Şimdi dümdüz bir yol olsaydı eğer düzse yani hani bir aşağı ya da yukarı çıkıntı ya da bir yukarı yokuş yoktur. Çünkü araba yukarı çıkarken de ivmesi hızı biraz azalıyor. O yüzden dönüşlerde, virajlarda yavaşlaması gerekti. Ama burada benim yavaşlamama göre saydım 3 tane dönüşüm var. mat ve ger

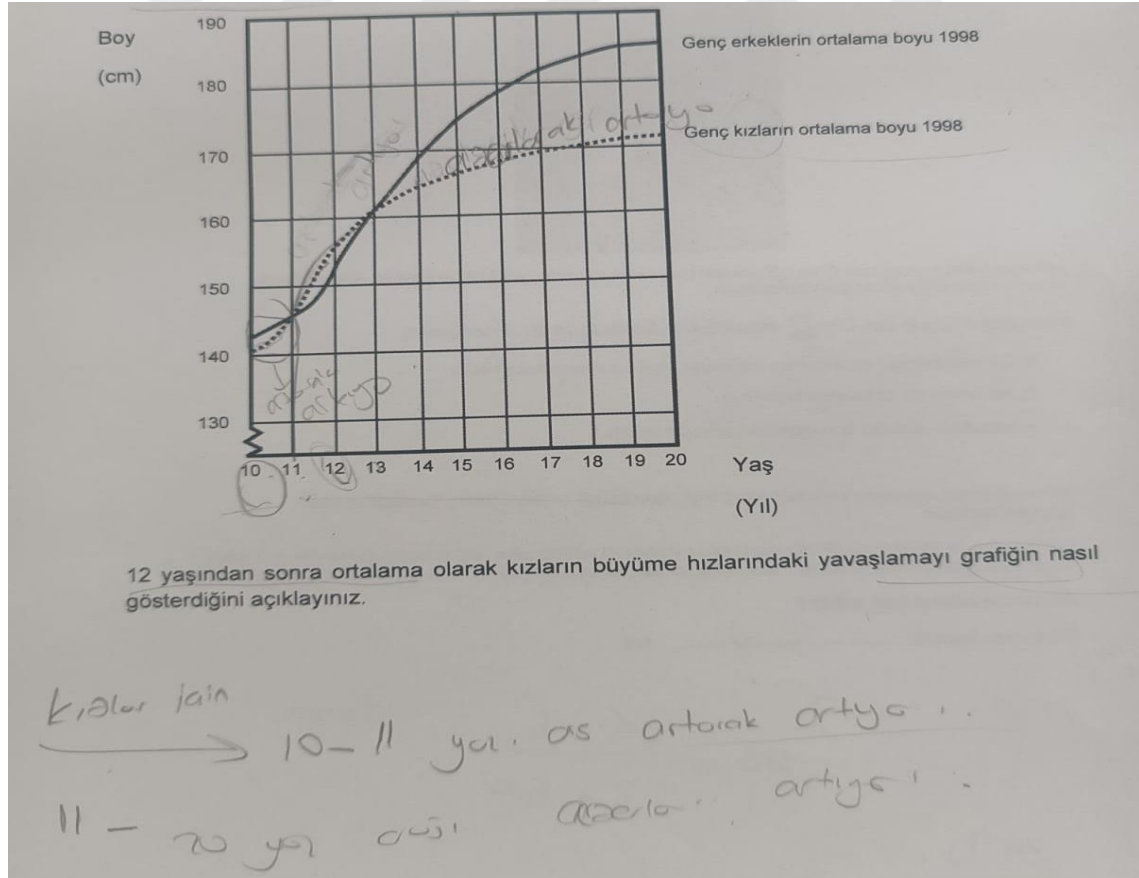
Ayrıca Elif değişkenleri birbiriyle gerekçeli olarak ilişkilendirebilmekte ve bu ilişkilendirmeyi gerçek yaşamda anlamlandırdığına dair ifadeler sunabilmektedir. Örneğin *Büyüme* sorusunda Elif soruya dayalı olarak genç kızlara ait grafiği seçmiş

ardından değişkenler arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak eğime dayalı ifade edip grafikte kızların 10-11 yaş arası boy uzunluğunun *artarak arttığını*, 12-20 yaş aralığında *azalarak arttığını* belirtmiştir. Gerekçe olarak ele aldığı zaman aralıklarındaki artış miktarlarını kıyaslayıp az olanın daha az büyümeyi gösterdiğini belirtmiştir. Ardından iki artış miktarına dayanarak 12 yaş sonrası için büyümede yavaşlama olduğunu belirtmiştir. Elif'in çözümüne ait Görsel 4.73 ve görüşme kesiti verilmiştir.

Elif: Şimdi 10 ile 11 arasında eğime bakarsak gittikçe arttığını göreceğiz. Ama 12 ile daha sonra devamına bakarsak gittikçe azalarak artan bir grafik olacağını göreceğiz. Artıyor. Yani artma miktarı azalmış anlamında. ..Çünkü şu grafiğe baktığımızda mesela 11 ile 12 arasında çok büyük bir daha yükselme var. Ama mesela 12 ile 13 arasında biraz daha artmış ama öncekine göre bir tık daha az. Ya yarısı kadar azalmış derim yani.

Bu durum Elif'in iki değişkeni birbiriyle ilişkilendirirken matematiksel olarak eğimi kullanabildiğini de göstermektedir.

Görsel 4.73 Elif'in Büyüme Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



Hamza da benzer şekilde değişkenleri birbiriyle gerekçeli olarak ilişkilendirebilmekte ve bu ilişkilendirmeyi gerçek yaşamda anlamlandırdığına dair ifadelerle sunabilmektedir. Örneğin *Büyüme* sorusunda genç kızlara ait grafikten kızların 10-11 yaş arası artışa göre grafiği devam ettirerek muhtemel boy miktarına ait grafiği çizmiştir. Böylece sorudaki grafikleri son durumda karşılaştırdınca büyümede yavaşlama olduğunu belirtmiştir. Ayrıca gerekçe için matematiksel olarak tıpkı Elif'e benzer şekilde *eğimi* de kullananbilmiştir. Hamza'nın çözümüne ait Görsel 4.74 ve görüşme kesiti aşağıda verilmiştir.

Hamza: Büyüme sorusunda şöyle diyor, 12 yaşından sonra... Kızların büyüme hızlarındaki yavaşlamayı, yani grafiğe zaten baktığımızda genç kızların ortalama boyunda gerçekten 12 yaşından sonra büyüme yavaşlama oldu. Hız azaldı. Aslında bu artmaya devam ediyor ama yavaş.

Öğretmen: Bir de den şu şekilde bir grafik çizdin. Neydi o?

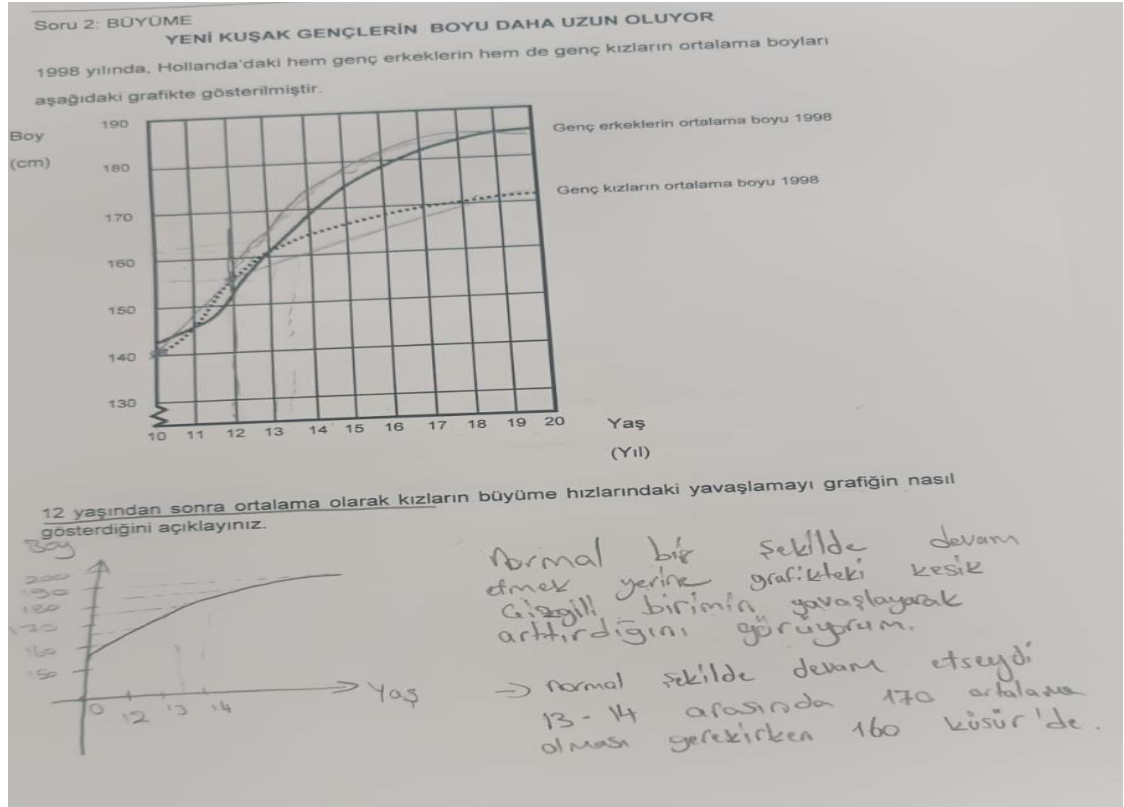
Hamza: Aslında bunun aynısı. Yani buraya yaptığım yorumu açıklamak için, aslında daha kolaylık sağlaması için, kolay bir şekilde olması için çizdim. Normal bir şekilde devam etmek yerine grafikteki kesik çizgiyle yavaşlayarak arttığını görüyorum. Şu şekilde, eğer mesela düz bir şekilde devam edecek olsaydı, öncesinde çizmiştim, şu şekilde devam ederdi.

Normal şekilde devam etseydi, 13-14 yaşında, örnek vermişim yani burada, 13-14 yaşında 170 ortalama olması gerekiyordu. Bakıyorum mesela 13-14 yaş arası.

Bakıyorsunuz 160'ya yakın bir değer var. Ama burada 170. Hatta 170'den biraz daha yüksekti değerler. Bu şekilde grafik belirtiyor. Yani eğim bir şekilde devam ettiriyor.

Büyüme hızları artmış ama 12 yaşından önceye göre yavaş bir şekilde artmış. Çünkü 10 ile 12 yaşında vermiş bize grafikte. Bakıyorsunuz da muazzam bir şekilde artış var. Ama 12'den sonra yavaş bir şekilde ...çok yavaş bir şekilde.

Görsel 4.74 Hamza'nın Büyüme Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

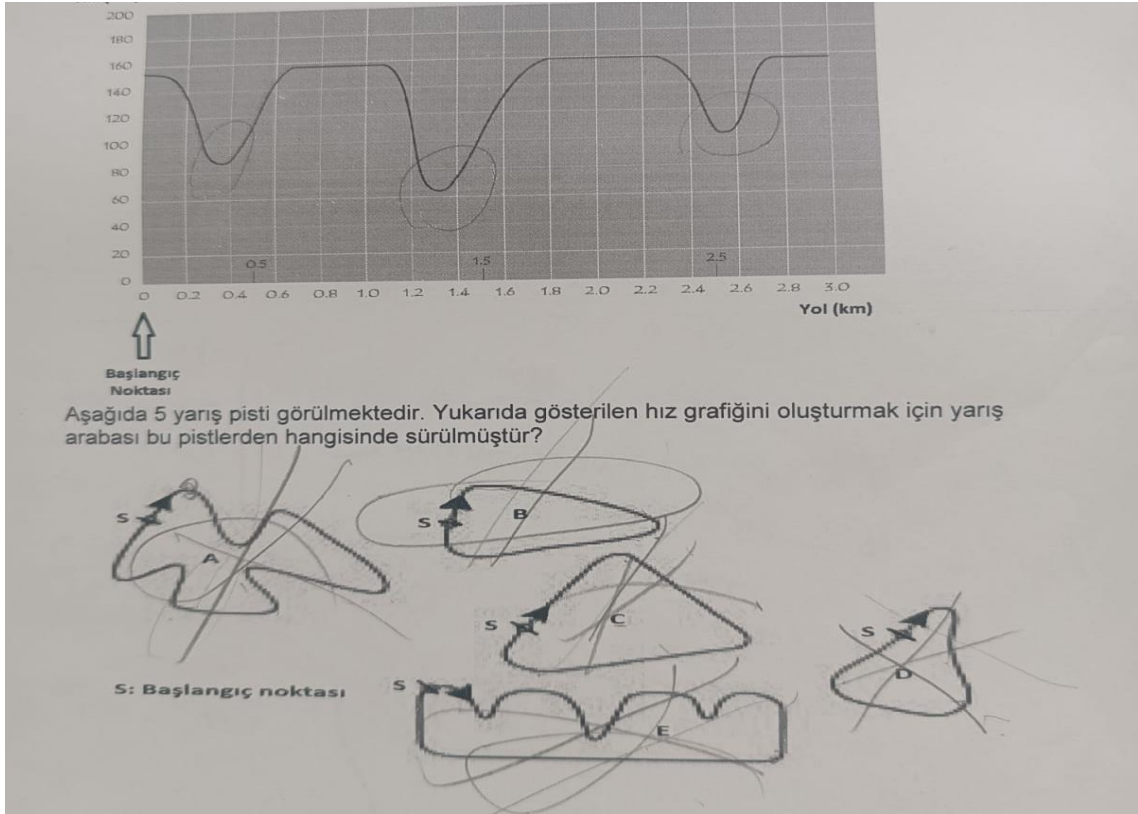


Elif Yarış Arabası sorusunda da verilen iki değişken arasındaki ilişkiyi ele alıp gerçek yaşama dair anlamlandırırken gerekçe sunabilmiştir. İlk olarak grafikteki hız azalmasıyla kavisleri ilişkilendirip toplamda üç kavis olacağı çıkarımını “Bir hız ve yol grafiğini vermiş ve bize o araç nasıl bir yoldan gittiğini soruyor. A'ya bakınca hız azalacağı zaman işte döNecatiir ya da eğim yüksek olabilir hani çıktığı yer ama hiç... soru da düz diyor. Bu yüzden işte dönmeyi ele alacağız.” şeklinde ifade etmiştir.

Ardından her bir şıkka dair gerçek yaşamdan gerekçeler sunarak doğru cevabı B bulmuştur. A, D ve E şıklarının kavis sayısı ile uyuşmadığı için “A'da bir başlangıç noktası da S olarak bakarsak 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 tane dönme ama burada grafiğe bakarsak 1, 2, 3 azalma olduğunu göreceğiz. Bu yüzden A'yı eleyeceğiz. D'de burada işte başladığı nokta tamamı sağlıyor ama daha sonra burada tekrar bir dönme düzenini göreceğiz. Burada da öyle.. Bu yüzden D'de gidiyor. 4 tane. Burada E de çok fazla var. 1, 2, 3, 4, 5, 6 tane var. Bu yüzden E'de elemiyor.” şeklinde ifade ederek elemiş, C de ise başlangıç noktasının yerine göre hız grafiğini sağlamadığını “C'ye bakacak olursak C'de hemen yavaşlamamış. Bu yüzden bu şıkkı hemen eleyeceğiz. Çünkü ilk başta arttı, normal, hızlı devam ediyor. Daha sonra döndüğü için bunu alamayız. Dönme noktası biraz daha yakın olsaydı

olabilirdi aslında. C de gitti.” diye belirterek elemiş ve “Daha sonra B'ye bakarsak hemen başladığından sonra hemen azalmış. Daha sonra yolunu devam etmiş. Sonra tekrar azalmış. Sonra tekrar azalmış. Başlandığı noktaya geri gelmiş. B olabilir.” ifadeleriyle B şıkkını seçmiştir (Görsel 4.75).

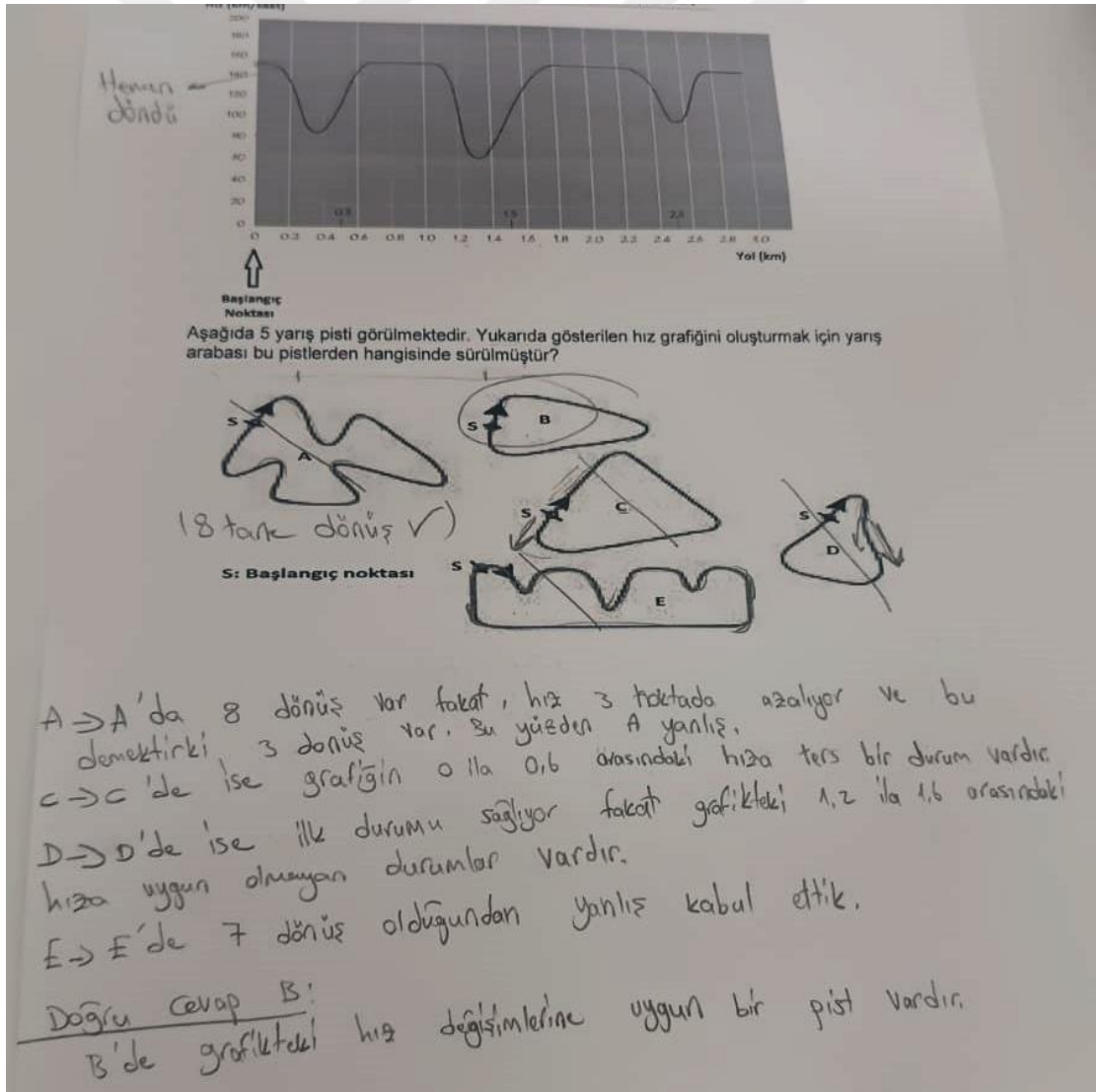
Görsel 4.75 Elif'in Yarış Arabası Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



Hamza da *Yarış Arabası* sorusunda verilen iki değişken arasındaki ilişkiyi ele alıp gerçek yaşama dair anlamlandırırken gerekçe oluşturabilmiştir. Grafikteki hız azalmasıyla kavisleri ilişkilendirip toplamda üç kavis olacağı çıkarımını “burada üç kere benim hızım azalmış. Neden azalmış hızım? Çünkü şurada 160 küsur başladı. 80'e düşmüş birinci düşüşte. İkinci de 60'a yakın. Üçüncü de ise şöyle bir çiziyorum 100'e yakın bir de düşmüş yani. 160'dan sonra...Sonra pistlere bakıyorum. Sonra diyor ki düz bir yol. Bir dönüşlerde yavaşlamanın olmasını söylüyor benim mantığım. O yüzden dönüşlerde, virajlarda yavaşlaması gerekti.üç kez düşmüş o zaman üç dönüş var.” şeklinde yapıp ardından her bir şıkka dair gerçek yaşamdan gerekçeler oluşturarak doğru cevabı bulmuştur. A ve E şıkkında kavis sayısı ile hızda azalan yer sayısının aynı olmadığını “A'ya baktığımız zaman 8 tane dönüş var. Ama burada benim yavaşlamama göre 3 tane dönüşüm var. Bu gitti. E'de aynı şekilde 7 tane dönüşüm var. Ama grafikte 3. Bu da gitti.”

şeklinde belirtip yanlış olduğunu ifade etmiştir. C ve D şıkında grafikte belirlediği kilometreler arasındaki hızın başlangıç noktasından geçerkenki hızı ile uyumsuz olduğunu “Aslında C ile B kalıyor. D de değil. Çünkü D’de başlamış hız azaldı. Tamam burada bir dönüş var hemen devam etti. Ama burada sert bir dönüş olmalı ki hızı 160’dan 60’a düşmüş. Ama D’ye baktığım zaman dönüşten hemen sonra hiçbir şey yok. Çünkü burada büyük bir viraj olması gerekiyor ki böyle bir hız azalması olsun. C’de ise. Çok uzun bir mesafe var buna bakarsanız. Ama o yalnız grafiğimde başlar başlamaz. Demek ki başlamış ve dönmüş. Ama buraya bakıyorsunuz başlamış, gitmiş, gitmiş, gitmiş dönmüyor hala. Uzun bir süre sonra döndü. Demek ki benim başlangıç noktam bir viraja yakın olmalı. Çünkü ilk başladığımdan yavaşlayıp dönmem lazım.” şeklinde ifade edip B seçeneğini seçmiştir (Görsel 4. 76).

Görsel 4.76 Hamza’nın Araba Yarışı Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



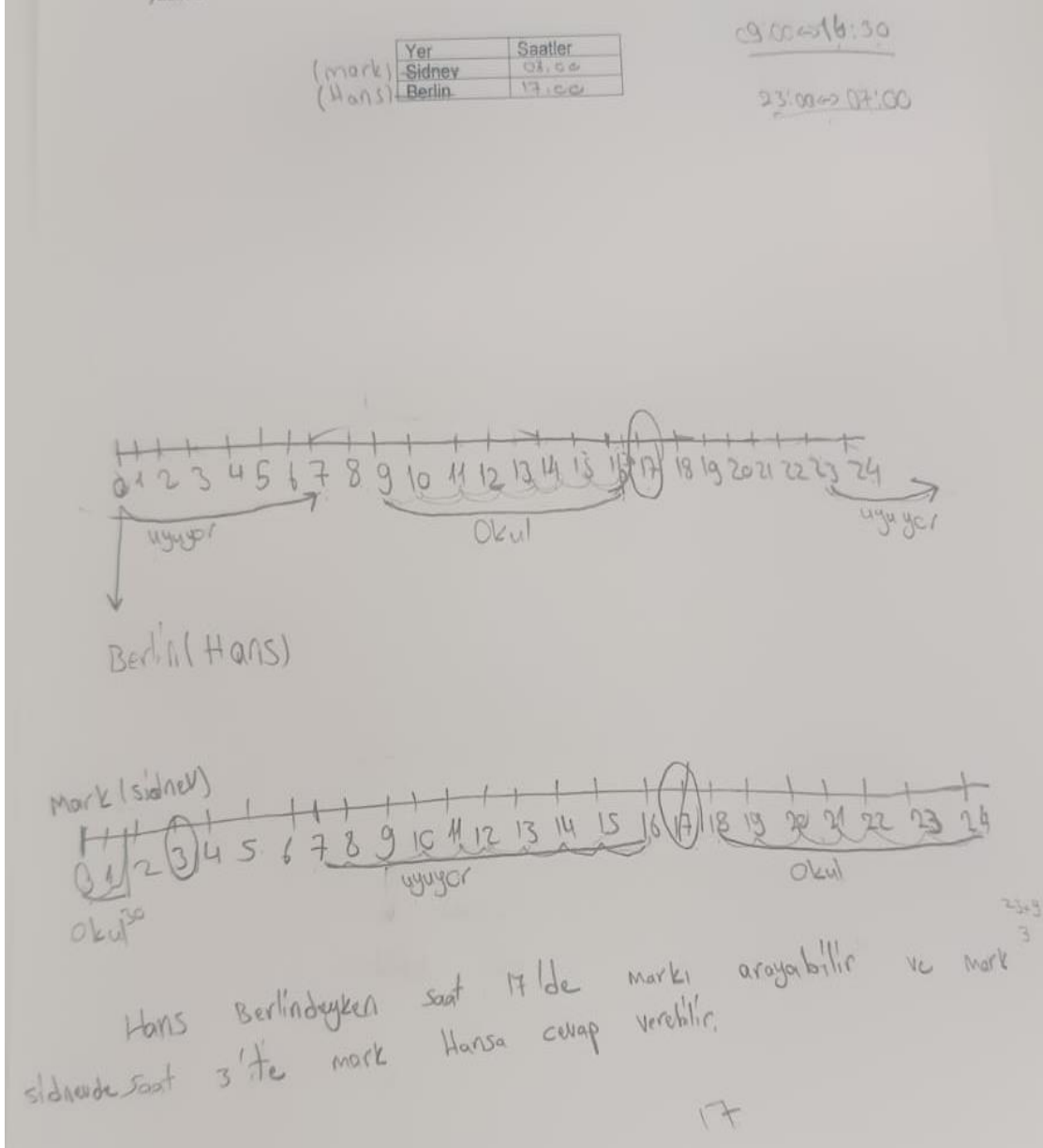
Ayrıca Elif benzer şekilde gerçek hayata dair verilenleri matematikleştirip bulduğu matematiksel sonucu gerekçe sunarak tekrar gerçek yaşama dair anlamlandırabilmiştir. Örneğin *İnternette Sohbet* sorusunda iki şehir arasındaki dokuz saatlik farkı “*Şimdi biri dokuz saat ilerideymiş, Sydney. Berlin ise dokuz saat geride oluyor.*” şeklinde elde edip ardından Sydney’i referans almış, okul ve uyku saatlerine göre konuşma saatlerini ayarlayıp bu saatlerin Berlin’deki arkadaşına uygun olup olmadığını denetlemiştir. Bu şekilde iki arkadaşın için iki farklı zaman aralığında konuşabileceğini “*Biri dokuzda, ikisi de kendi saatlerine göre dokuzla on altı buçuk arasında okulda var. Ve yirmi üçle yedi arasında uyuyorlar. Şimdi uyuma miktarlarına göre 23 ile 7 arasında uyuyorlar. Mesela Sydney’e göre bakarsak 23 ve 7. Ama Berlin’in saatine göre bakarsak 9 saat çıkartırsak 14 buradan 9 saat çıkartırsak 22. 22. Buradan da 9 saat çıkartırsak 0. Burada 7 buçuk. 7 buçuk. Şimdi Mark 23 ile 7 de konuşamaz. Çünkü uyuyor. Ama 7 ve 9 da konuşabilir. Ama Sidney’de. Ama bu saati Berlin’e göre uyuyor mu, uyumuyor mu diye bakacağız. Şimdi eğer Berlin’e göre bakarsak 7 çıkartırsak 22, buradan 9 çıkartırsak yine 0 olacak. Yani 22 ile 0 arasında. Ama 23’te ve 23’e uymaya başladığı için 23’ü alamayacağız. 23 ile 24’ü alamayacağız. Bu yüzden 22 ile 23 alacağız. Daha sonra işte okulda olduğu zamana bakarsak 16 buçuk ile 23’te Sydney. 16.30 ile 23 saate kadar orada konuşabilecek miyiz? Evet konuşabilecek. Ama bunu şeyde bakarsak Berlin’e göre bakarsak 9 saat çıkartırsak 7.30 bundan 9 saat çıkartırsak 22 ama 22’de zaten saat 9’dan 22’ye kadar 16.30’ya kadar okulda olduğu için konuşamayacaklar ve 7.30’dan o zaman 9’u* *alabiliriz.* Öğretmen: *O zaman sen kaç farklı zaman buldun konuşabilecekleri? Sydney’e göre 22 ile 23 arası ve 7,5 ile 9 arası.*” şeklinde ifade ederek göstermiştir.

Böylece Elif sorunun çözümünde iki yerel saat arasındaki farkını, uyku ve okul saatlerini de ilişkilendirerek soruda istenen konuşma aralıklarını elde etmiştir. Elif’in çözümüne ilişkin çözümü Görsel 4. 77 ile verilmiştir.

burada iki sayı doğrusunda kendi yerel saatleri değil de ben normal saatleri çizdim. Hani bir gün 24 saattir, ben de bir gün içerisindeki saatleri yazdım. Sonrasında kendi yerel saatleriyle normal saatler gelmiştir. İkisinin en sonunda ben burada bu grafiğe bakacağım ve ortak bir saat varsa, mesela 17'de görüldüğü gibi 10 işaretleyeceğim ya da 3. tekrara dönüyorum. Bilgi vermiş... Ben oraya ilk önce yazdım. Ve sayı doğrusunda ben Berlin'i referans aldım. Yani sıfırdan Hans'ı şey yaptım. Saat 23'te Hans uyuyor. Şuradan sürdürdüğüm ne zamana kadar? 7'ye kadar. Hiç hesaba bile gerek yok. Sayı doğrusunda dümdüz bir şekilde işaretleme yaptım. Burada uyuyor. Eğer bu 7 saat sonra hatta 9 saat sonra olacaksa ben tekrar Mark'a geliyorum. 7 saat sonra mesela 23 burası. 7 saat sonra neresi oluyor 23'te? Mesela 23, 24, 25, 26 falan. O zaman Mark da beş... uyuyor. Ben burada yedi bulmuşum. Yirmi üçe dokuz saat eklemişim. Saat yediye gelmişim. O zaman buradan başlıyor uyumaya. Hansa göre şey yaptım. Burada rezervasyon. Öğretmen: Ondan sonra sürekli buradaki saatleri ayarlamaya mı çalışıyorsun sen? Hamza: Aynen. Hani ben Mark'ın bir saatinin olmadığını ve Mark'ı Hans'a göre şey yaptım. Hans Berlin'de işte ne zaman uyuyormuş. 23'te uyuyormuş. Çıktım mesela kaç saat uyuyorlar? Diyelim 9 saat. 7'den 16'ya kadar uyumuş Mark. 23'den de 7'ye kadar Hans uyumuş. Sonra bunların okulları vardı. Okullar uyandıklarından 2 saat sonra başlıyor. Kime göre? Hans'a göre. Hans'tan Uyandı. Yedi, sekiz, dokuz. Dokuzda okul başladı. Okuldan dört buçuğa kadar geldim. Normal girdiğimiz buradaki, bize verdiği saatte. On altı buçuğa baktım. Bu hangi okuldan çıktı? Dokuzda falan başladı. O zaman diyorum, ben ne zaman uyandı? On altıda uyanmış. İki saat sonra neresi oluyor? On sekiz. O zaman bu okul saatleri Marka da aynı şekilde yansıyacak, 18'den başlıyor. Demek ki Hans 9'dan buna giriyor, 16.30'da çıkıyor. Mark 18'de giriyor. ikide iki buçukta çıkıyor. Ya da burası bir buçuk. Bir buçukta çıkıyor. Ben bakıyorum şimdi ikisinin boş olduğu saatlerde mesela 18 buraya bakalım dolu, dolu, dolu falan böyle alt alta yok ederek gittim. Bende şu iki saat boş. 17. İkisinin ortak bir şekilde iki saat boş. Ama bu grafik Hans'a göre O yüzden bu ikisi, iki sayı doğrusundaki noktayı aldım. 17, saat 17 geldi bana. Bu iki grafikteki boş saat. Diyorum o zaman ben Hans'la konuşmak için Mark bekliyor. Hans 17'de arıyor Mark'ı. Mark beklediği süresince 17'ye 9 ekliyorum o saatten. Sonra da bu saat bana Mart'ta 3 gösteriyor. Demek ki Berlin'de Hans saat 17'de Mark'ı arıyor. Mart'ta Sydney evde saat 3 civarı Hans'a cevap veriyor. Sydney'de 17, Berlin'de 3." şeklinde açıklamalarda bulunmuştur (Görsel 4.78). Ancak çıkarımları birbiriyle tam

olarak ilişkilendirememiş uygun saat aralıklarını oluşturamamış, çözümü eksik elde etmiştir.

Görsel 4.78 Hamza'nın İnternette Sohbet Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



Ayrıca Hamza doğruluğunu kontrol etmek için de sayı doğrusu ile yaptığı işlemi tekrar edip *emin* olduğunu belirtmiştir.

Bu durumda aynı grupta olmalarına rağmen Elif ikiden fazla değişkeni ilişkilendirebilmesine rağmen Hamza'nın henüz ikiden fazla değişkeni ilişkilendirmede zorlandığı açığa çıkmıştır.

4.3.3 Grup 3'ün temsilcileri olan İlknur ve Aydan'ın orta görüşme bulguları

Bu bölümde Grup 3'ün temsilcileri olarak seçilen İlknur ve Aydan adlı katılımcıların PISA-2 testine dayalı gerçekleştirdiği orta görüşmeye ait matematiksel muhakeme yeterliğine ilişkin bulguları araştırma sürecinde gerçekleştirilen ön görüşme ve öğretimlerle karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

İlknur ve Aydan araştırma sürecinin başından orta görüşmeye dek elde edilen bulgulara göre problem durumunda verilenleri ve isteneni gerçek yaşamda anlamlandırırken ara ara zorlanan ve iki değişkeni ilişkilendirebilen bir katılımcılardır. Ayrıca gerekçe sunmada gerçek yaşamdan ve matematikten dayananaklar bulabilirken çözümün doğruluğunu ise nicel değerler atayarak kontrol etmektedirler. Ancak İlknur ikiden fazla değişkeni ilişkilendirebilirken gerekçe sunmada zorlansa da Aydan ilişkilendirememektedir.

Örneğin İlknur *Büyüme* probleminde verilen ortalama kavramını, ön görüşmedeki ortalama satılan gazete sayısı için “*ortalama olarak 350 tane sattığını söylüyor yani burada. İşte 350 tane satmış ona göre yapacağız...*” şeklinde ifade edip aslında ortalamayla sadece nicel değere odaklanarak kesin olarak verilen sabit bir sayı olarak ele almıştır. Benzer şekilde ön görüşmedeki Bisiklet Sürücüsü Hale 1 sorusunda ortalama hız sorulunca da ortalama kısmını dikkate almamış “*dakikada 4 km ve sonraki 5 dakikada 2 km bisiklet sürmüştü. Buna göre 10 dakikada 4 kilometre gitmiş ama önce hızlı mı başlamış sonradan yavaşlamış yoksa yavaş başlayıp sonunda hızlı mı bitirmiş de 4 kilometreye ulaşmış bunu bilemeyiz hocam. O yüzden verilen bilgilerle ortalama hız ile ilgili bir şey söylemek mümkün değil*” şeklindeki ifadesinde de ortalama hızı anlamlandıramıştır. *Güneş Panelleri* etkinliğinde öğle vaktinin bulunmasında da İlknur sessiz kalmış ancak uzaklık ile daha sonra uzaklık ile ilişkilendirerek matematiksel işlemi doğru yapıp açıklamalar için arkadaşlarını onaylamıştır. Ancak orta görüşmede yer alan *Büyüme* sorusunda ise “*Hocam burada ortalama olarak hız ve bunun hızlarının nasıl yavaşlamalarını gösterememizi istemiş. Hocam yavaşlamasaydı dümdüz gelir doğru bir şekilde çıkardı yukarıya doğru. Ama bu yukarıya çıkmamış, aşağı inmiş ilerlemiş.*” şeklinde açıklayarak ortalama kavramını ele almadan sadece hıza odaklanmıştır. Bu ifadelerden İlknur'un soruda verilenleri bağlama dayalı olarak anlamlandırmada zorlanınca görmezden geldiği anlaşılmaktadır.

Benzer şekilde Aydan da ön görüşmede *aritmetik ortalama* kavramına ilişkin kavramsal bilgisi olmadığını “ *Benden ortalama hızını istemiş ama hız ile ilgili bir şey vermemiş.*” şeklinde ifade etmesine rağmen *Güneş Paneli* öğretiminde öğle vaktinin bulunmasını aritmetik ortalama ile ilişkilendirerek *ortalama* kavramını kazanmaya başladığı görülmüştür. Orta görüşmedeki Büyüme sorusunda ise “..*yaklaşık olarak şöyle dedim eğimden...12 yaş sonrası daha küçük olduğundan ortalama büyüme yavaşlamıştır.*” şeklinde ifade ederek ortalama büyüme yi *yaklaşık* olarak ele alarak bağlama özgü doğru bir şekilde anlamlandırmıştır.

Buradan İlknur’un ortalama kavramını matematiksel olarak uzaklıkla ilişkilendirerek işlem yapabilmesine rağmen gerçek hayatta anlamlandıramadığı anlaşılmaktadır. Aydan ise ortalama kavramını hem *Güneş Panelinde* hem de *Büyüme* sorusunda doğru anlamlandırmasıyla gerçek yaşamda ortalama kavramını anlamlandırmaya çalıştığı anlaşılmıştır. Ayrıca her ikisi de benzer şekilde Damlama Oranı sorusunda sembol olarak verilen d , D , h ve s ifadelerinin ve soruda serumun hacmi ile istenenin bağlama dayalı olarak ne anlama geldiğini doğru bir şekilde ifade edebilmiş, formüldeki değişkenlerin değerini bulup cebirsel manipülasyonlarla soruyu doğru çözebilmiştir. İlknur çözümüne ilişkin “*Tek tek belliydi... değerlendirdim mesela. Gösteren damlama oranını işte ne kadar akması gereken süreydi.. Minimalist damla sayısını ölçülen damla.Sonra formülde yerine koydum. ... zaten vermiş bir dakikada elini damlalık işte oradan sahip olan bir soru zaten oranın kendisi vermişler iyi. Küçük d de ne kadar? Saatte verilmesi gereken de yazıyor. 3 saat d idi, küçükleri d yazıyor. Milimetre başını 25 damla, sonra bunları formülde yerine yazıyordum. h ’yi şey buldum. 360.*” şeklinde açıklama yapmıştır (Görsel 4. 79).

Görsel 4.79 İlknur'un Damlama Oranı Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

Serumun hacmi kaç ml'dir?
Serumun hacmi: 360 ml

$D = 50$
 $S = 3 \text{ saat}$
 $d = 25$

$50 = \frac{25 \cdot h}{60 \cdot 3}$

$50 = \frac{25h}{180}$

$25h = 9000$

$9000 \div 25 = 360$

$h = 360$

Aydan da değişkenlerin gerçek yaşamdaki anlamlarını ifade ederek formüldeki değişkenlerin değerini doğru bulup cebirsel manipülasyonlarla soruyu doğru çözebilmiştir. Aydan çözümünde “Serum hacmi h küçük h 180, damlama oranı 50 saat de 3 saat. Hepsini verdiği formülde yerine yazıp sadeleştirdim. h 180 çıktı “ şeklinde ifade edip soruyu doğru çözmüştür (Görsel 4.80)

Görsel 4.80 Aydan'ın Damlama Oranı Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

Hemşirelerin serumun hacmi olan h 'yi, damlama oranı D 'den, hesaplamaları gerekmektedir.

Bir dakikada 50 damlalık bir damlama oranına sahip olan bir serumun hastaya 3 saatte verilmesi gerekmektedir. Bu serum için damla faktörü mililitre başına 25 damladır.

Serumun hacmi kaç ml'dir?
Serumun hacmi: 360 ml

$50 = \frac{25 \cdot h}{60 \cdot 3}$

$25h = 50 \cdot 180$

$h = 360$

Buradan İlknur ve Aydan'ın soruda sembollerle verilen değişkenlerin nicel değerlerini bağlamdan tek tek bulabildiği de anlaşılmıştır. Ardından soruda verilen değişkenleri formülde uygun yerine yazarak cebirsel manipülasyon yapmış ve doğru matematiksel sonuca ulaşmış oldukları anlaşılmıştır.

Ayrıca İlknur ve Aydan genel olarak kritik noktaları belirleyebilmektedirler. Örneğin ikinci öğretim olan TEKNOFEST'e Hazırlık öğretiminde hem Aydan hem de İlknur “ses ve anlaşılabilirlik” şeklindeki ifadesiyle kritik noktaları belirleyebilirken, orta

görüşmede yer alan *Yarış Arabası* sorusunda da grafikten hızın azalmasını yoldaki viraja bağlayıp grafikteki hız azalmasıyla virajları ilişkilendirip toplamda üç dönüş noktası olacağına dair kritik nokta olacağını ikisi de fark etmiştir. İlknur kritik noktaları bulurken “*Yol grafiği var ya virajda ya da işte dönüş yaptığın zaman hızını azaltması gerekiyor. Burda 3 kere hız yavaşlamış yani dolayısıyla...3 kilometre düz yol. Mesela 160 iken 100 ile 80 arasına düşmüş. Bu yüzden hani başlar başlamaz hızı düşüğü için hemen ya dönmüş olması lazım işte. Ya viraj almış olması lazım o yüzden...Burada bak bu 1,2,3 kere hızı azalmış.. demek ki 3 kere dönmüş.*” şeklinde gerçek yaşama dayalı gerekçeler ifade etmiştir. Aydan da benzer şekilde “*önce bakınca üç tane dönüş olacağını düşündüm. Virajdan dönerse hızı azalır çünkü. Grafikte sayınca üç yerde azalmış o zaman üç viraj var.*” ifadelere yer vermiştir.

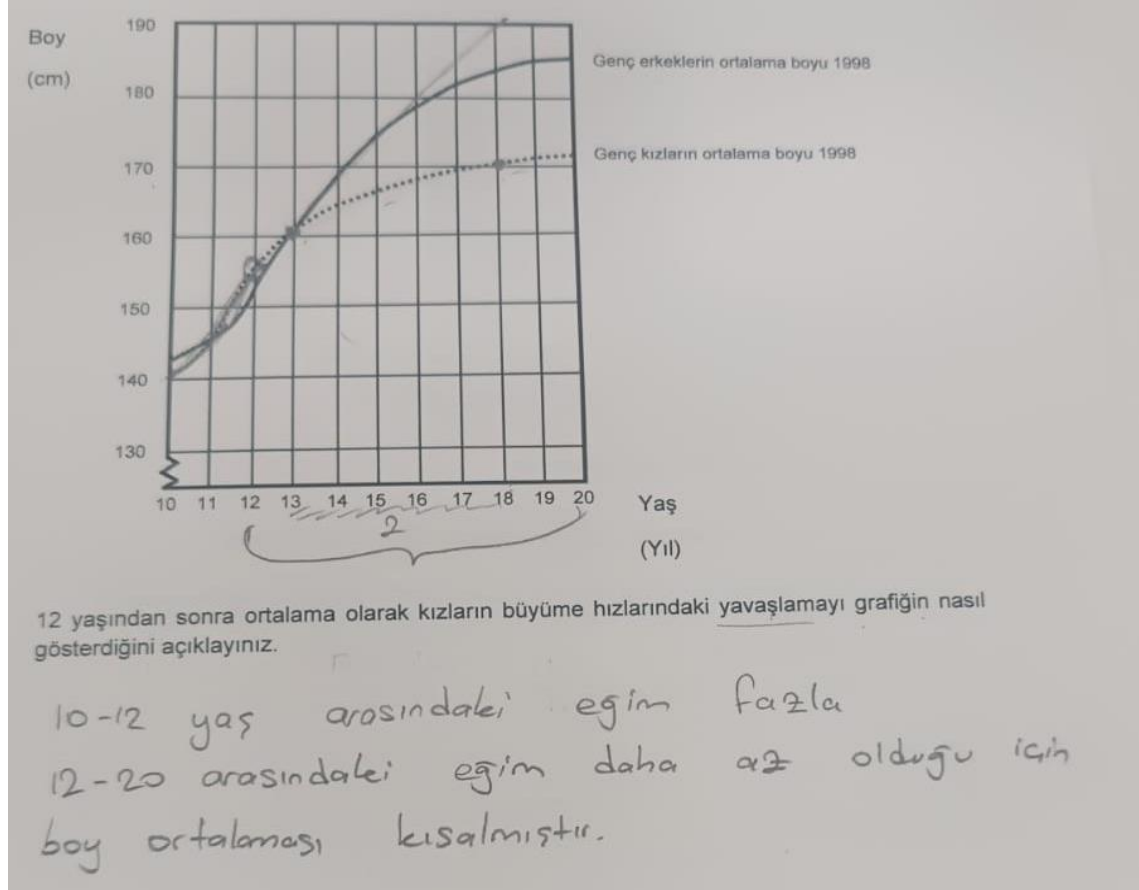
İlknur ve Aydan ön görüşmede ve öğretimde iki değişkeni birbiriyle gerekçeli olarak ilişkilendirebilmede ve bu ilişkilendirmeyi gerçek yaşamdan ifade etmede zorlanmıştır. Örneğin üçüncü *öğretim Çevreye Dost Araç*’ta Aydan ve İlknur silindir depodan su akışına ait yükseklik zaman grafiğini azalan fonksiyon şeklinde çizmeleri gerekirken gerçek yaşamda “*eşit miktarda yüksekliğin azalmasına*” dayalı sabit fonksiyon olarak yanlış çizmiştir. İlknur gerekçe istenince sessiz kalırken, Aydan ise “*Elif haklı yani eşit azalır*” şeklinde onaylamış ve o esnada katılımcılardan Elif’in sözlerini tekrar eden ifadeler söylemiştir.

Ancak orta görüşmedeki *Büyüme* sorusunda her ikisi de *eğimden* yararlanarak 12 yaşından sonra kızların ortalama büyüme hızlarındaki yavaşlamayı göstermiştir. İlknur ilk önce kızlara ait grafiği seçmiştir. Ardından hem grafiğin 10-12 yaş ve 12-20 yaş arasındaki artışı hızını eğime dayalı olarak karşılaştırmış hem de grafiğin 10-12 yaş arasındaki artış hızını aynı şekilde devam ettirerek büyümedeki artış hızının azaldığını belirtmiştir. Bu duruma ilişkin görüşme kesiti ve çözüme ait Görsel 4.81 aşağıda verilmiştir:

İlknur: Hocam burada ortalama olarak hız ve bunun hızlarının nasıl yavaşlamalarını gösterememizi istemiş. Burda yavaşlamış, düzgün yavaşlamış hatta. Hocam yavaşlamasaydı dümdüz gelir doğru bir şekilde çıkardı yukarıya doğru. Ama bu yukarıya çıkmamış, daha da aşağı inmiş ilerlemiş. Mesela böyle dümdüz geldiğini var sayarsak 18 yaşında mesela 190 cm olurlardı ama burda mesela 18 yaşında 170 cm olmuş yani azalmış. Artmamış azalmış oluyor. Hıhı bu kadar. Mesela 10 ile 12 arasındayken

eğimi gayet yüksek. Hocam. Hıhı ikisinin arasındaki kalan çizilen yer. Mesela çok yüksek çünkü artmış ama burada artmak yerine böyle yavaş artmış, yeni artmış ama daha yavaş. Ordan..

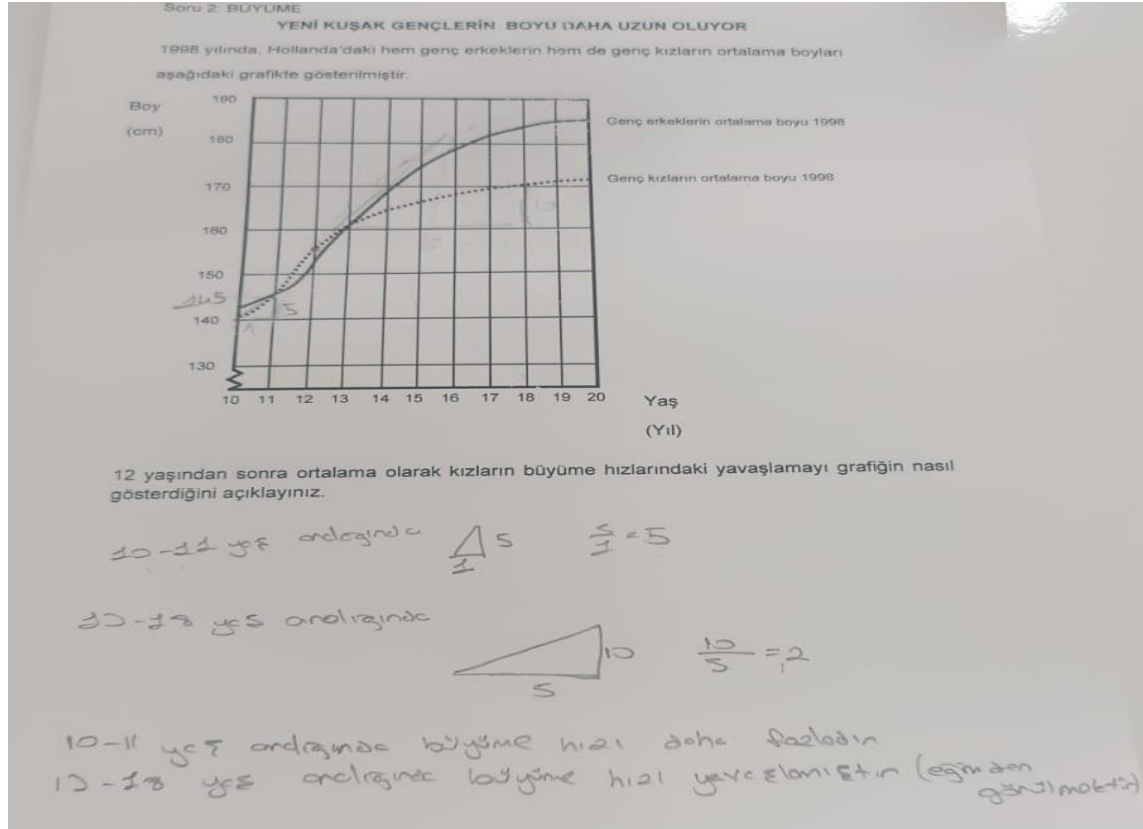
Görsel 4.81 İlknur'un Büyüme Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



Aydan da *Büyüme* sorusunda kızlara ait doğru grafiği seçip ardından grafiğin 10-11 yaş ile 13-18 yaş arasındaki artışı hızını *eğime* dayalı olarak karşılaştırmış ve büyümedeki artış hızının azaldığını belirtmiştir. Aydan'ın çözümüne ait bulgular görüşme kesiti ve Görsel 4.82 ile verilmiştir.

Aydan:.. önce 10-11 yaş aralığına baktım Mesela şurada 11 yaşta yaklaşık 145 alsam.. eğimi 145 eksi 140..5 bölü 1 yapar..12 yaş sonrası dediği için de 10-18 yaş arasında on bölü beşten iki buldum. 13-18 yaş arası büyüme hızı daha az..azalmıştır.

Görsel 4.82 Aydan'ın Büyüme Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



İlknur Yarış Arabası sorusunda verilen grafiğe bakarak iki değişken arasındaki ilişkiyi ele alıp gerçek yaşama dair anlamlandırırken uygun gerekçe oluşturabilmişlerdir (Görsel 4.83). Soruda 3 km lik düz yola dair yarış arabasının yol uzunluğuna dayalı hız grafiği verilmiş ve şıklardan grafiğe uygun pistin seçilmesi istenmiştir.

İlknur: Yol grafiği var ya...virajda yada işte dönüş yaptığın zaman hızını azaltması gerekiyor. Burda 3 kere hız yavaşlamış yani dolayısıyla...3 kilometre düz yol...
Öğretmen: Düz, 3 kilometrelik bir pist.. Tamam. Eee A, B, C, D'den hangisi olduğuna nasıl karar verdin, hangisini seçtin sen?

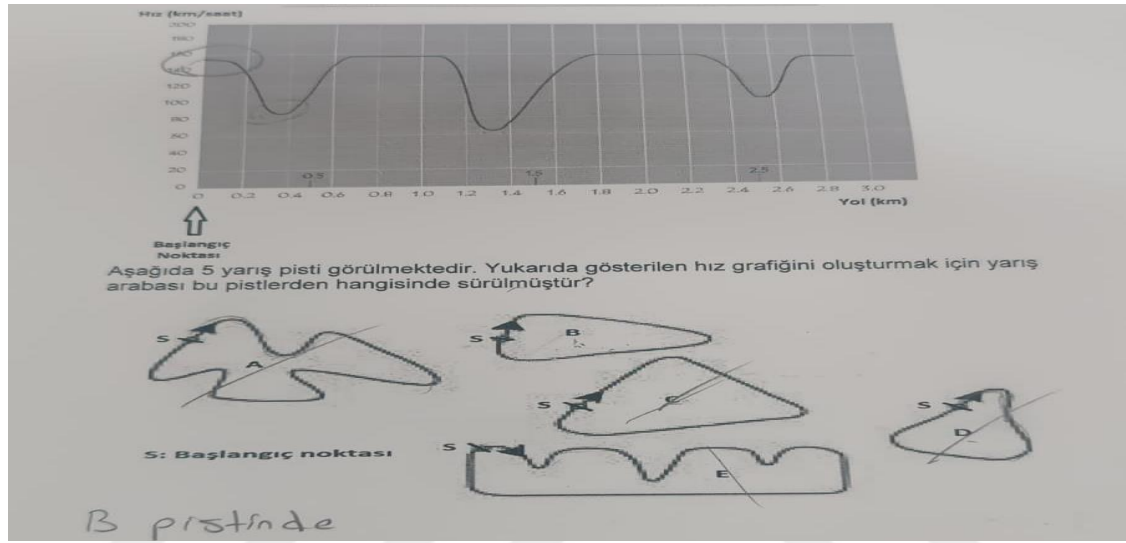
İlknur: Şöyle hızı yol baştan başlamaz hemen azalıyor yani demek ki ya. ..Direk azalmış aşağı doğru...Mesela 160 iken 100 ile 80 arasına düşmüş.Bu yüzden hani başlar başlamaz hızı düştüğü için hemen ya dönmüş olması lazım işte. Ya viraj almış olması lazım o yüzden...Burada bak bu 1,2,3 kere hızı azalmış.. demek ki 3 kere dönmüş. B elemedim b yi sesini en son C ve D olamaz. Çünkü başlar başlamaz dönmüş dönmüş olması lazım. Dümdüz yolda gidiyor. Yani hızının azalmaması gerekiyor. C de o yüzden denedim D de de. Yine o rahatsızlık bir dönüş var en azından. Başlar başlamak

dönmüş ama. Grafikte uyumlu değil.

Öğretmen: Nereden çıkardın uyumlu olmadığını, onu anlamaya çalışıyorum.

İlknur: Mesela başlangıç noktasında s olarak vermiş başlattım. Tamam. Döndüm buraya. D olamaz. E de de 3 kere dönmüş olması lazım. Bunun yine üçten fazla dönüş oluyorlar. O yüzden B'yi seçtim.

Görsel 4. 83 İlknur'un Yarış Arabası Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



Aydan Yarış Arabası sorusunda grafiğe bakarak hızın azalmasını yoldaki viraja bağlamıştır. Ardından grafikteki hız azalmasıyla virajları ilişkilendirip toplamda üç dönüş noktası olacağı çıkarımında bulunmuştur. Ardından her bir şıkkı buna göre değerlendirip doğru cevabı B bulmuştur.

Aydan da İlknur gibi problemin farklı boyutlarındaki bilgi parçalarını (kavis sayısı, hız azalma noktaları, başlangıç noktası) birleştirerek ilişkilendirebilmiş, ardından bunları karşılaştırarak çözebilmişlerdir. Aydan'ın çözümüne dair görüşme kesiti ve Görsel 4.84 verilmiştir.

Aydan: önce bakınca üç tane dönüş olacağını düşündüm. Virajdan dönerse hızı azalır. Grafikte sayınca üç yerde azalmış o zaman üç viraj var.. hepsindeki virajları tek tek saydım. A da 9, E de 11, D de 4 tane var eledim. B ve C olabilirdi. Ama hıza bakınca B'nin başlangıç noktasına daha uygun geldi. B dedim.

Hız (km/saat)

Yol (km)

Başlangıç Noktası

Aşağıda 5 yarış pisti görülmektedir. Yukarıda gösterilen hız grafiğini oluşturmak için yarış arabası bu pistlerden hangisinde sürülmüştür?

S: Başlangıç noktası

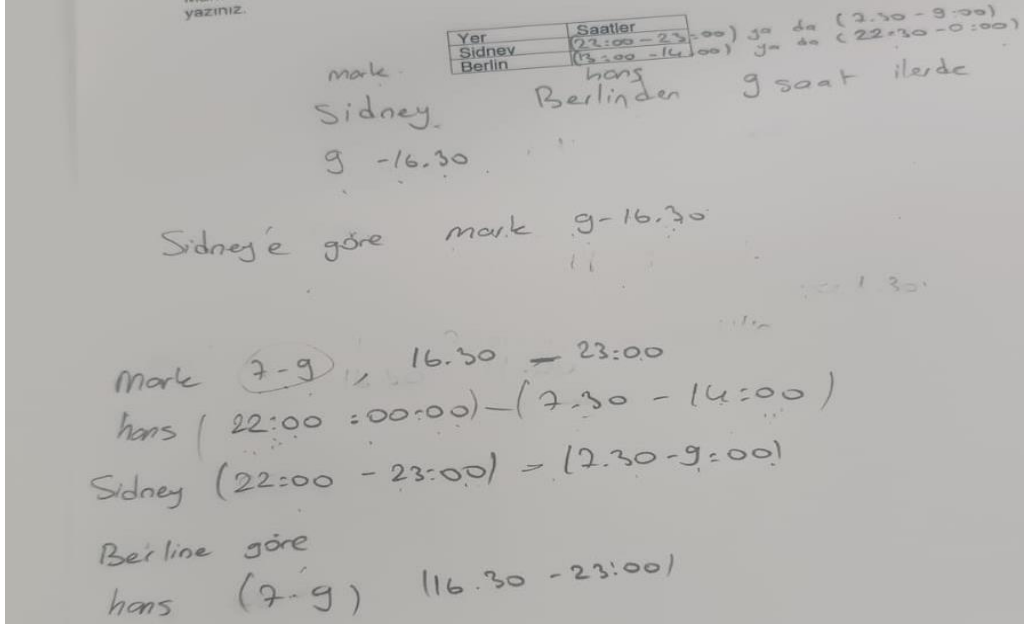
Grafikten üç tane viraj olduğu görülmektedir. Şikare'nin D gibi C ile karşı karşıya olduğu gibi bir başlangıç noktasına başladığından grafiğin D'ye daha uygun olduğunu gözlemledim.

İlknur *İnternette Sohbet* sorusunda ilk olarak iki şehir arasındaki dokuz saatlik farkı ele alıp Sydney'den Mark'a göre saat hesaplayıp Hans'a uygun olup olmadığına bakmıştır. Bu şekilde iki arkadaşın için iki farklı zaman aralığında konuşabileceğini göstermiştir. Ancak İlknur sorunun çözümünde iki yerel saat arasındaki farkını, uyku ve okul saatlerini de dikkate alarak birden fazla çıkarımı ilişkilendirip yapmıştır. Elif soru çözümüne ilişkin görüşme kesiti ve Görsel 4.85 verilmiştir.

ilknur: Ama ha Sydney'e göre 9 saat ilerde olduğu için. 22 ile çift sıfır arasında. 9 saat şimdi Mark 7 dokuza gidiyorsa 22 de gidersin. 9 saat ilerde. Onu çıkardım. Yine de gidiyorsa 22 de gidiyor yani. Ama işte yine marka okulda olduğu saatleri çıkardık. O

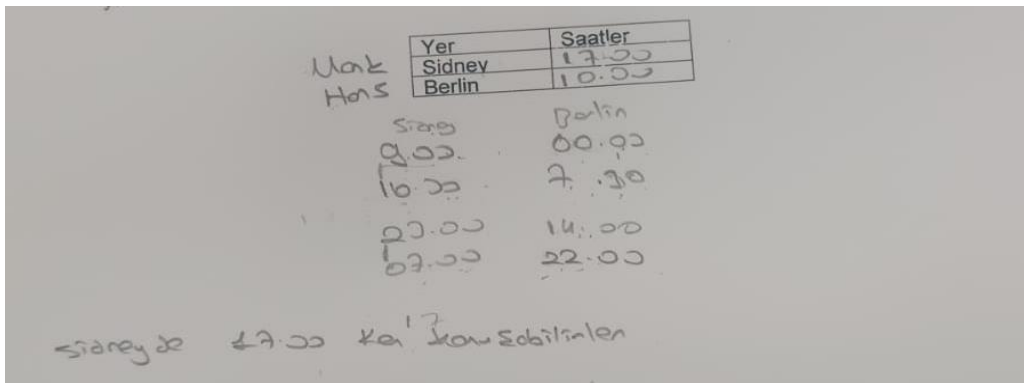
yüzden 22 ile 23 arasında çünkü 23 de uyuyorlar. 7 buçukla da 9 arasında çünkü dokuzda okula gidiyor ikisi de tamam. Berlin Sydney'den 9 saat ilerde olduğu için yine çıkardık hıhı. Yani ... ikisi de konuşabiliyorlar.

Görsel 4.85 İlknur'un İnternette Sohbet Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



Aydan ilk olarak iki şehir arasındaki dokuz saatlik farkı elde edip ardından okul ve uyku saatlerine göre konuşma saatlerini ayarlamak için saatleri tek tek yazmıştır. Her bir öğrenci için ayrı ayrı konuşabilecekleri saatleri işaretleyip ardından karşılaştırıp yerel saatlerde uygun olup olmadığını denetlemiştir. Bu şekilde iki arkadaşın için tek bir zaman aralığında konuşabileceğini göstermiştir. Aydan sorunun çözümünde iki yerel saat arasındaki farkı, uyku ve okul saatlerini de dikkate alarak birden fazla çıkarım yapmıştır. Ancak çıkarımları sentezleyememiş uygun saat aralıklarını da oluşturamamıştır (Görsel 4.86).

Görsel 4.86 Aydan'ın İnternette Sohbet Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



4.3.4 Grup 4'ün temsilcileri olan Hatice ve Necati'nin orta görüşme bulguları

Bu bölümde Grup 4'ün temsilcileri olarak seçilen Hatice ve Necati adlı katılımcıların PISA-2 testine dayalı gerçekleştirdiği orta görüşmeye ait matematiksel muhakeme yeterliğine ilişkin bulguları araştırma sürecinde gerçekleştirilen ön görüşme ve öğretimlerle karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

Hatice ve Necati araştırma sürecinin başından orta görüşmeye dek elde edilen bulgulara göre basit düzey sorularda matematiği kullanabilseler de problem durumunda verilenleri ve isteneni gerçek yaşamda anlamlandırmada ve değişkenleri ilişkilendirmede zorlanan katılımcılardır. Gerekçe sunmada gerçek yaşamdan ve matematikten dayananaklar bulabilirken çözümün doğruluğunu ise nicel değerler atayarak kontrol etmektedirler. Ayrıca Necati iki değişkeni ilişkilendirebilirmeye başlarken Hatice ise hala zorlanmaktadır.

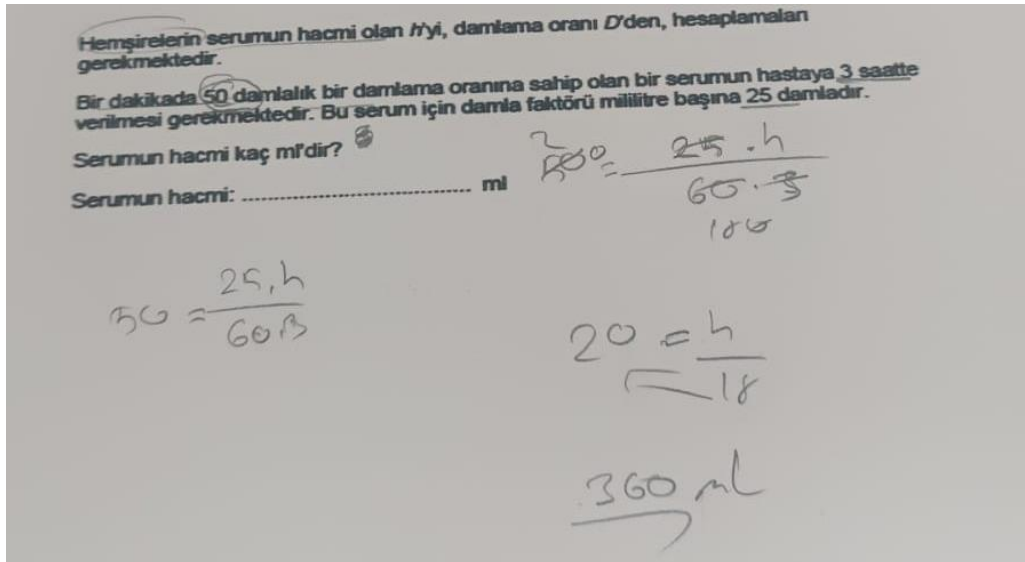
Örneğin Necati *Büyüme* probleminde verilen ortalama kavramını, ön görüşmedeki ortalama hız için *“ilk hız ile son hızı topladım, ikiye böldün, zamanla da çarptım”* şeklinde yanlış anlamlandırıp gerekçe olarak da *“Çünkü her zaman sabit değil. 1. dakikada geliyor, 2. dakikada geliyor, 3. dakikada geliyor. ..”* şeklinde ifade edip o dakikadaki ortalama hızı bulduğunu açıklamıştır. *Güneş Panelleri'nde* öğle vakti hesaplanmasında *“Öğlen vakti. Bu, ülkeden ülkeye doğru değişir”* şeklinde ifade edip ardından kendisi *“..biraz şey, x eksiğinin pozitif tarafına doğru biraz daha yakın... Çünkü hocam biz 12 ile bir arası aldık ya, o kime daha çok yakın olacak? 5'e. Biz farklarını aldığımızda, sabah 5'e daha yakın olduğunu görürüz.”* şeklinde mutlak değere ilişkin açıklama yapmıştır. Ayrıca Aydan'ın aritmetik ortalamayla yaptığı hesaplama için de *“Şimdi hocam, Aydan'ın fikrinin doğru olması için dümdüz bir yer olması lazım dağlar ve ovalar”* şeklinde gerçek yaşamdan uygun olmayan gerekçeler sunup reddetmiştir. TEKNOFEST'e Hazırlık için verilen *“..ortalama 4 dakikalık video..”* ifadesini 4 dakika olarak ele alıp ortalamayı görmezden gelmiştir. Benzer şekilde orta görüşmedeki *Büyüme* probleminde verilen ortalama kavramında da *“Boy 140 ile 155 aldım ben. Yaklaşık olarak aldım. 10 ile 15 arasındaki kızların yaşları 15 bölü 2 yani 7,5 çıkıyor. 12 yaşından sonra 16 bölü 8, 2 çıkıyor. Demek ki o zaman eğim azaldığı için büyüme hızı azalıyor”* şeklinde ifade edip ortalama büyüme hızını büyüme hızı olarak ele almıştır.

Hatice ise ön görüşmede ortalama hıza dair kavramsal bilgi eksikliği nedeniyle *“Hale'nin ortalama hızıyla ilgili bir şey söylemek mümkün değildir. Yani mümkün değildir”*

“çünkü hesaplayamıyoruz” şeklinde ifade ederek verilenlerin yetersiz olduğu, ortalama hızın bulunamayacağı ifade etmiş, ortalama hızın bulunabilmesi için ise nelerin gerekli olduğu sorulduğunda ise “Ama...başka şeyler de lazım yani...ama yok...(sessizlik)” diyerek yeterli bir açıklama ifade edememiştir. Öğretimlerde ise daha çok sessiz kalmış veya arkadaşlarını gerekçesiz bir şekilde onaylamıştır. Orta görüşmedeki *Büyüme* sorusunda ise genç kızların ortalama büyüme hızının yavaşlamasını açıklarken 10-12 yaş arasındaki büyüme hızını 0.8, 12-14 arasındaki büyüme hızını ise 0.4 bularak “yarısı olarak bir bölü katı azalmıştır” diyerek ortalama görmekten gelmiştir.

Ayrıca hem Necati hem de Hatice *Damlama Oranı* sorusunda sembol olarak verilen d, D, h ve s ifadelerinin ve soruda serumun hacmi ile istenenin bağlama dayalı olarak ne anlama geldiğini doğru bir şekilde ifade edip soruyu doğru çözebilmişlerdir. Necati “D yani büyük D. Küçük D çarpı h bölü 60 çarpı saat. Büyük D şey... Damlama oranı. Küçük D damlama faktörü. h hacim. s de zamanı, saat türünden. Burada bana D'yi vermiş. D'yi vermiş. Saati vermiş, bir de damlama oranı vermiş. Benden h hacmi istiyor. Denkliğimin yerini yazdım. 50 damlama oranı. 25 damlama faktörü. h işte benim bilmek istediğim h. Bölü Bekleyin 60 çarpı s de 3 zaman Sonuç 360.” şeklinde ifade etmiştir(Görsel 4.87).

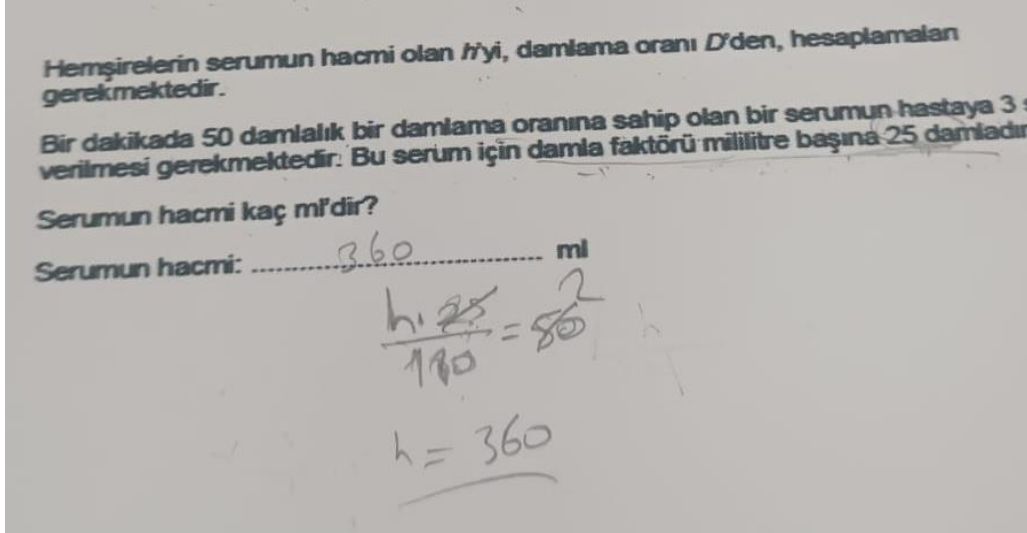
Görsel 4.87 Necati'nin Damlama Oranı Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



Hatice ise “İlk önce küçük h yi vermişler. Bir milimetreden iki damla sayısıyla açılan damla faktörüdür. Gittim, ilk önce 25 vermiş damla faktörü.. D çarpı h , serumun

milimetre cinsinden hacmi. S ise süre. Formülde yerine koydum 360 oldu.” şeklinde ifade etmiştir (Görsel 4.88).

Görsel 4.88 Hatice’nin Damlama Oranı Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



Bu ifadelerden Hatice ve Necati’nin soruda sembollerle verilen değişkenlerin nicel değerlerini bağlamdan tek tek bulabildiği de anlaşılmıştır. Gerçekten de Fatime değişkenlerin değerlerine dair çıkarımlarda bulunmuştur. Her bir değişkene ait değerleri belirledikten sonra soruda verilen değişkenleri formülde uygun yerine yazarak cebirsel manipülasyon yapmış ve doğru matematiksel sonuca ulaşmıştır.

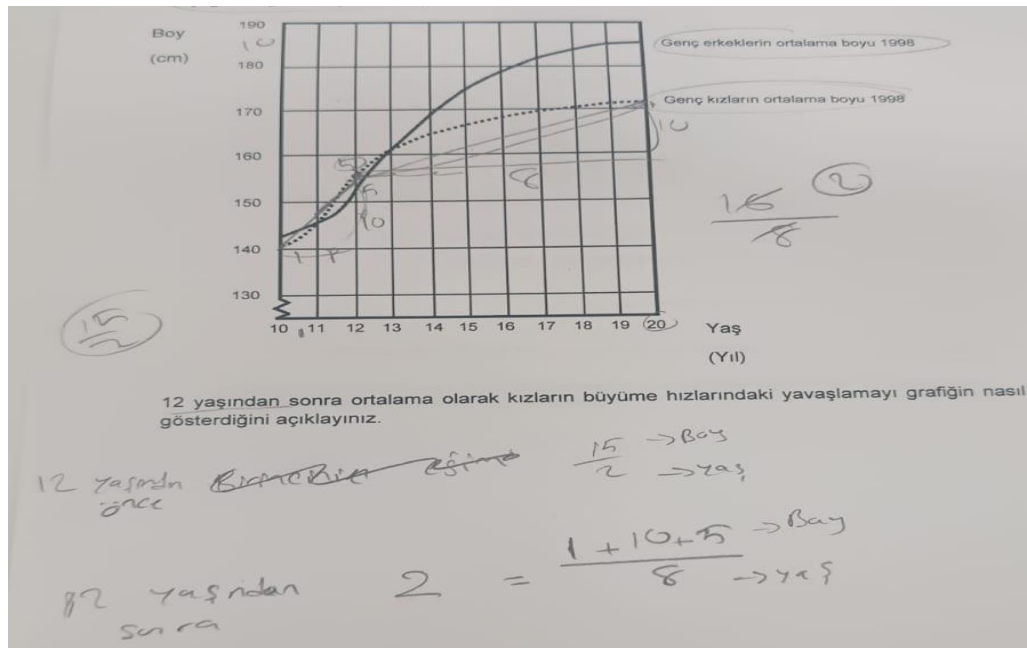
Necati ilk öğretim olan *Güneş Panelleri’nde* yeni çözüm önerisine dair kritik noktayı “Yani Güneş ışınlarının 90 derecede gelecek şekilde ayarlanması lazım.” ifadeleriyle belirleyebilirken, üçüncü öğretim *Çevreye Dost Araç’ta* gerçek yaşamdan su basıncıyla ilgili gerekçe sunarak yüksekliğe ait kritik noktayı alırken kararsızlığa düşüp ilk önce “Hocam aslında hortum mantığı arkasında su olduğu için aslında o hızlı gidiyor. Şu koniyi bi alabilir miyim? Hocam dedik ya en yukarda olsun ki basınç en fazla olsun daha kuvvetli vursun... daha hızlı aksın diyoruz. Tamam o zaman ne kadar uzun yapabilirsek yapalım.” şeklinde kritik nokta olarak ele alırken “Yükseklik yani. Ama yükseklikleri de aynı.” şeklinde ifadesiyle yüksekliği amaca yönelik bir kritik nokta olarak almadığını göstermiştir. Ayrıca orta görüşmedeki *Yarış Arabasının Hızı* sorusunda “Şimdi burada diyor ki düz bir şey pistte. Şimdi burada yine yavaşlamlara bak. Demek ki o yavaşlamalarda bir viraj olacak. Hızda 3 tane iniş var. 3 tane viraj olur.. Halbuki burada başlangıç noktasında Birkaç kilometre sonra viraj geliyor” şeklindeki ifadesiyle

soruya ilişkin kritik noktalardan “*kavis sayısı ve S başlangıç noktasından uzaklığı*” şeklindeki kritik noktaları belirleyebilmiştir.

Öğretimlerde daha çok sessiz kalan Hatice ise Güneş Panelleri öğretiminde çözümün gerçek yaşama dayalı canlandırmasında “...panel büyüklüğüyle birim verimliliğin arttırabiliriz” ifadesi gerçek yaşama dayalı kritik noktaları anlamlandırmada zorlandığını göstermiştir. Benzer şekilde *Yarış Arabasının Hızı* sorusunda hız grafiği ile pisti yanlış ilişkilendirerek “*grafikte gittiği yerden, yer olarak aşağıdan sırayla baktım yolu aldım.*” şeklinde ifade edip E şıkkını seçmiş ve sorudaki kritik noktaları belirleyememiştir.

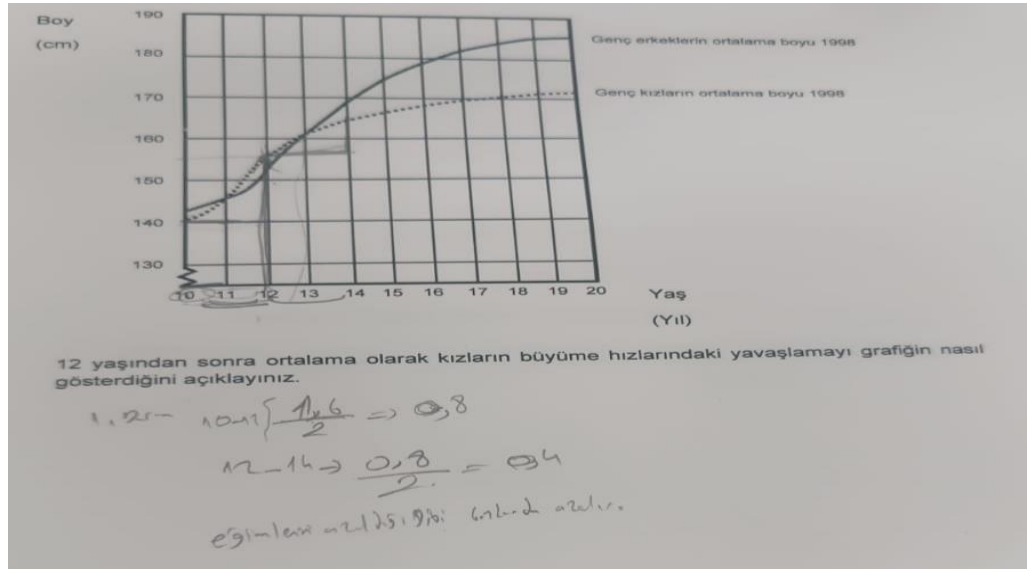
Necati basit düzeyde verilen problemlerde değişkenleri birbiriyle ilişkilendirebilse de Necati bu ilişkilendirmeyi gerçek yaşamdan ifadelerle anlamlandırırken yanlışlık yapmıştır. Örneğin *Büyüme* sorusunda Necati değişkenleri eğim ile ilişkilendirip ortalama büyüme hızını bulurken grafikteki aralıklara uygun nicel değerler vererek “*Başlangıçta 10 ile 12 arasını aldım. Boy 140 ile 155 aldım ben. Yaklaşık olarak. 10 ile 15 arasındaki kızların yaşları için 15 bölü 2 yani 7,5 çıkıyor. 12 yaşından sonra 16 bölü 8, 2 çıkıyor. Demek ki o zaman eğim azaldığı için. İlkinde eğim 7,5 sonra 2 olmuş, azalıyor.*” şeklinde ifade etmiştir. Ancak bu esnada ilişkilendirmeyi doğru yapsa da görsel çözümde açıklarken *boy uzunluğu bölü yaş* şeklinde eksik ifade etmiştir (Görsel 4.89). Çünkü yaş değil *yaşlar farkı* olmalıdır.

Görsel 4.89 Necati’nin Büyüme Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



Hatice ise ilk olarak grafikteki genç kızların ortalama boyuna ait grafikten 12 yaş sonrasındaki ortalama büyüme hızını bulmak için 10-12 yaş aralığındaki büyüme hızı ile 12-14 yaş aralığındaki büyüme hızını eğimden yararlanarak yapmıştır. 10-12 yaş için 140-150 cm arasını 1 birim 150-160 cm arasını 0.6 birim alarak genel boy artışını cm olarak değil de grafikte verilen birim cinsinden hesaplayıp 1.6 birim olarak ele almıştır. Ardından 10-12 yaş arasındaki büyüme hızını 0.8; 12-14 arasındaki büyüme hızını ise 0.4 bularak *eğimin azaldığını* böylece büyüme hızının da yavaşladığını açıklamıştır (Görsel 4.90)

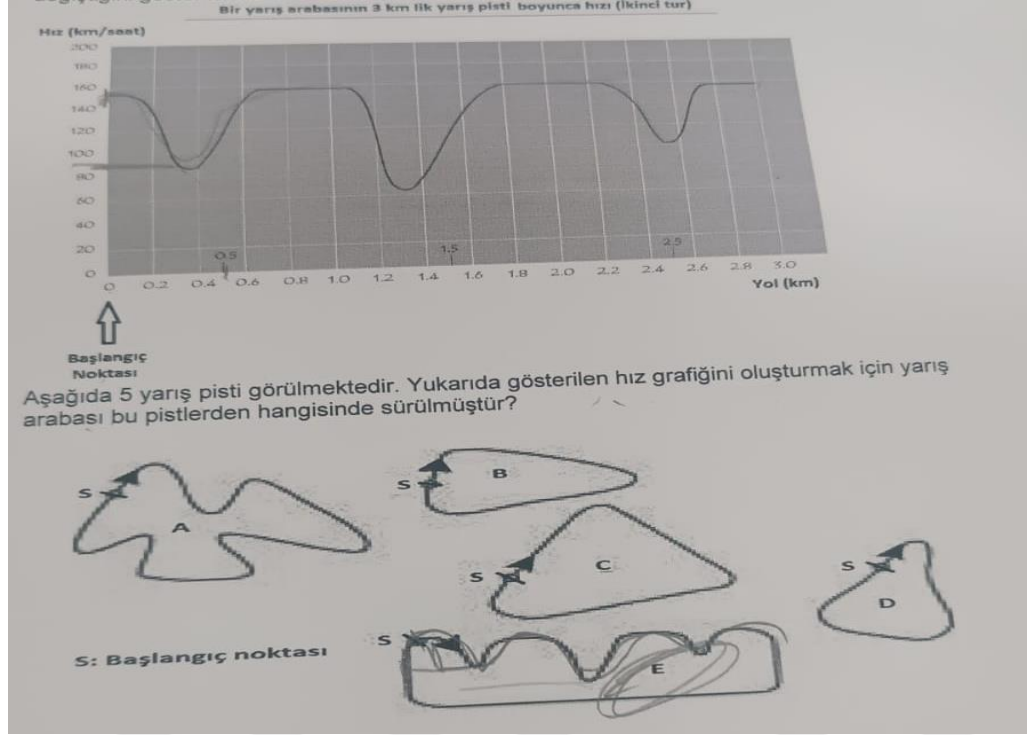
Görsel 4.90 Hatice'nin Büyüme Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



Necati iki değişken arasındaki ilişkiyi ele alıp gerçek yaşama dair anlamlandırırken önceki öğretimleri destekler nitelikte kimi zaman yanlış kimi zaman doğru gerekçe sunabilmektedir. Örneğin *Güneş Panellerinde* zamana dayalı panelin zemine olan açısı için çizilen parabol temsilinde “*parabolün tepe noktası, üretilen enerji miktarı olur. Çünkü öğlen en yükseğe çıkmış*” şeklinde gerçek yaşamda yanlış anlamlandırılırken, üçüncü öğretim *Çevreye Dost Araçta* koni ve ters koniye konulan suyun zamanla azalmasını gerçek yaşamda karşılaştırırken *aynı delik nedeniyle aynı basıncın oluşacağına dair yanlış iddiasını “yükseklik aynı... zaten sen hepsini doldurmuşsun. Aynı dönerler...”* şeklinde ifade ederken, aynı öğretimde “*Çünkü bu aşağı daha dar. Darsa suyun yüksekliği yavaş azalır. Bu (ters koniyi işaret eder) hızlı akar.*” ve “*Su basıncı şunda (ters koniyi işaret eder) daha çok olduğu için daha çok su var hızlı akar.*” şeklinde doğru argümanlar da oluşturabilmektedir. Orta görüşmedeki *Yarış Arabasının Hızı* sorusunda ise grafikteki hız azalmalarını “*Grafikte 3 tane iniş olduğu için 3 tane viraj... Halbuki burada başlangıç noktasında birkaç kilometre sonra viraj*

zamanda pistteki dönüşlerle de aynı olduğunu göstermiştir. Hatice pistin temsili ile hız grafiğini eşleştirerek yanlış cevabı E şıkkını seçmiştir (Görsel 4.92).

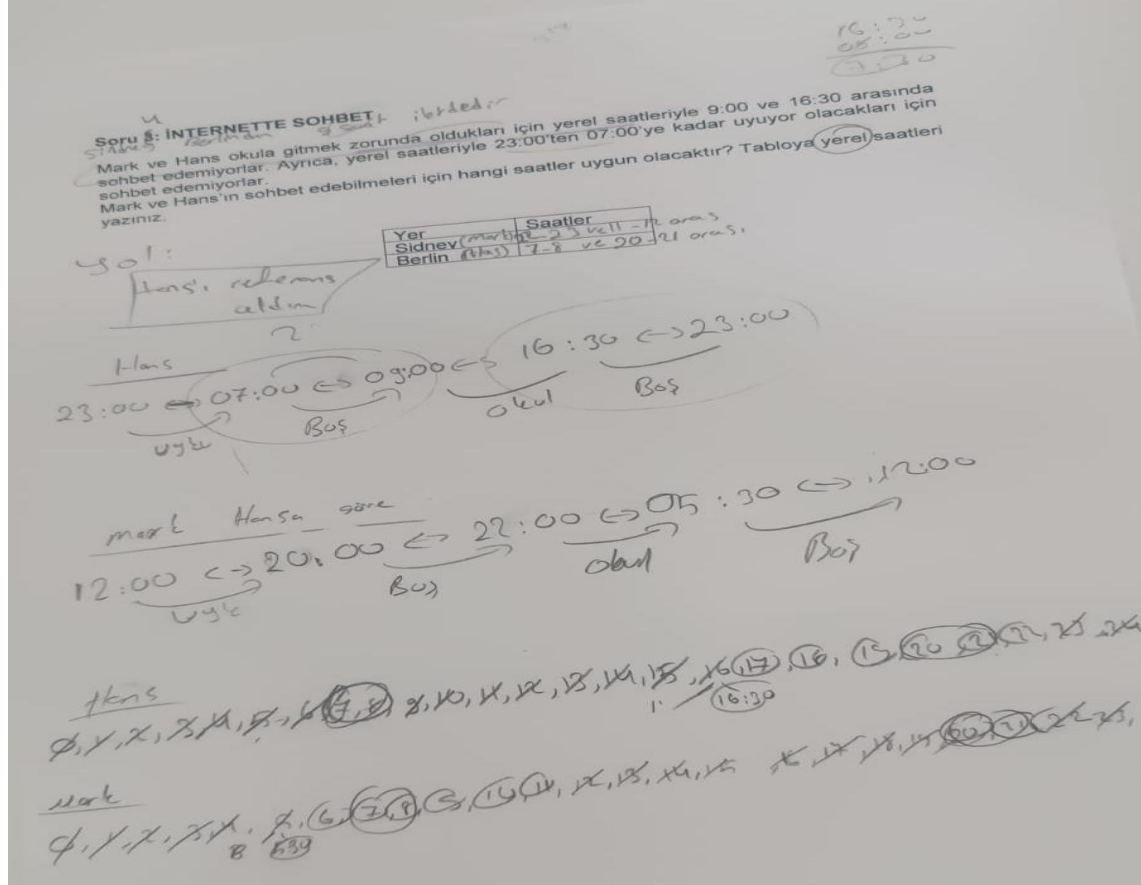
Görsel 4.92 Hatice'nin Yarış Arabası Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



Hatice ve Necati benzer şekilde gerçek hayata dair verilenleri matematikleştirip bulduğu matematiksel sonucu gerekçe sunarak tekrar gerçek yaşama dair anlamlandırmada zorlanmışlardır. Necati *İnternette Sohbet* sorusunda “*Hans'ı referans aldım. Ondan sonra ben Mark'a göre zamanları yazarım. Hans'ın saat 11 ile 7 arası uykusu var. Saat 7 ile 9 arası boş zaman var. Uyandıktan sonra okula gitmeden önce burası boş. Saat 9 ile 4.30 arası okul var. 4.30 ile 11 arası yine boş. Ben Mark'ın zamanlarını yazdım ama Hans'a göre. Mark Hans'a göre saat 12'den 20'ye kadar uyuyor. Çünkü 9 saat ileride. Demek ki bunun 9 saatini geri yapmam lazım. Şöyle yanlış yazdım. Mark saat 12 ile 8 arası uyuyor. 8'den 10'a kadar boş zaman var. 10'dan 5 buçuğa kadar okulu var. 5 buçuktan yine 12'ne kadar boş zaman var. Ondan sonra altta zamanları yazdım. Hans'a göre saat 20 ile 21 arası, yani saat 8 ile 9 arası. Bunlar akşam 12'den sonra ve sabah saat 7 ile 8 arası boş. Hans'da da öyle. Mark, Hans'a göre yine de öyle. Ve sonra da yerel saatleri istiyor. Hans 7 ile 9 arası ve 20 ile 21 arası. Şey o zaman, ben bunları 9 saat geriletsem çünkü 9 saat ileride. O zaman tek tek saatleri yazıp buradan kontrol etmek amacıyla konuşabilecekleri saatleri daire içerisine alıp konuşabilecekleri saatleri de çizdim.*” şeklinde ifade edip gerçek yaşamdaki durumları matematikleştirip

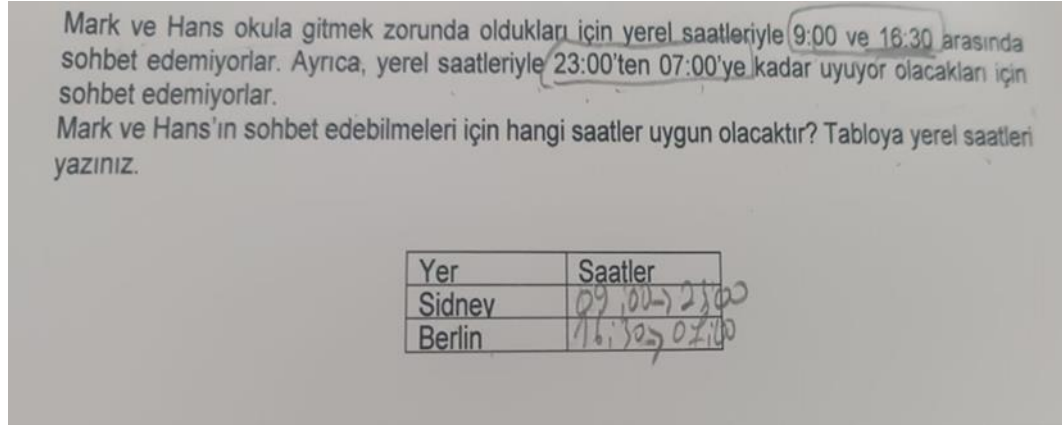
tekra gerçek yaşama uygun olarak açıklama yapabilse de uyku, okul ve yerel saati dikkate alarak ilişkilendirme yapmada oldukça zorlanmıştır (Görsel 4. 93).

Görsel 4.93 Necati'nin İnternette Sohbet Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



Hatice de benzer şekilde de uyku, okul ve yerel saati dikkate alarak ilişkilendirme yapmada oldukça zorlanmıştır. *İnternette Sohbet* sorusunda Mark ve Hans için basit bir muhakemede bulunup okul ve uyku saatleri dışındaki saatlerde konuşabileceklerini belirtmiştir. Bu nedenle Sidney için 9:00-23:00 Berlin için 16:30-07:00 olarak “Okul zamanında okulda oldukları için zohbet edemiyorlar. Hem de uyku zamanında da oldukları için de zohbet edemiyorlar. Bu zamandan, bu saatler dışında zohbet edip konuşabiliyorlar. Ben de o zamanları aldım yani. Kaç buldum? İşte dokuzdan... Dokuzdan dört buçuk diyeyim. 4.30'dan sonra, uyuyacakları zamana kadar. Aynı zamanda da bu saattir. Yani 9-10'da. 11'den 7'ye kadar.” şeklinde belirlemiştir. Bu esnada aslında uyku ve okul saatlerine ait zaman aralıklarının başını ve sonunu ele almış dolayısıyla günün kalan saatlerini bile tam olarak belirleyememiş sorunun doğru çözümüne de ulaşamamıştır (Görsel 4.94).

Görsel 4.94 Hatice'nin İnternette Sohbet Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



Ayrıca her ikisi de yaptıkları çözümün kontrolünü değişkenlere nicel değerler atayarak yapmaktadırlar. Güneş Paneli öğretiminde sunulan çözümün uygunluğunda *Necati ve Hatice* açığa değer vermeyi sırasıyla “*O zaman açığa değer verelim.*” Ve “*Hocam bencede x e değer verelim.*” şeklinde teklif etmişlerdir.

4.4 Öğretimler

Bu bölümde katılımcıların matematiksel muhakeme yeterliliğini incelemek amacıyla yapılan öğretimlere ait bulgular araştırma sürecindeki görüşmeler ve önceki öğretimlere ait bulgularla karşılaştırmalı olarak sunulmuştur.

4.4.1 Dördüncü öğretim bölümü

Göktaşının olabildiğince yakından takibini destekleyen uzay teleskopuna ait yörüngenin matematiksel modellemesine dayalı *Uzay Teleskopları* adlı dördüncü öğretimde problemin kritik noktalarının ve amacının ortaya koyulmasında yüksek düzey muhakemeye sahip *Fatime*’nin yanı sıra muhakemesi orta düzeyden *Hamza* ön plana çıkarken, matematiği kullanma da diğer öğretimlerde de olduğu gibi orta düzey muhakeme grubundan *Elif* ve düşük düzeyden gruptan *İlknur*’un sürece önderlik ettiği görülmüştür. Muhakemesi zayıf grup temsilcilerinden *Necati* ise çözüme yönelik matematikleştirme önerileriyle ve matematiği etkin kullanma anlamında dikkat çekmiştir.

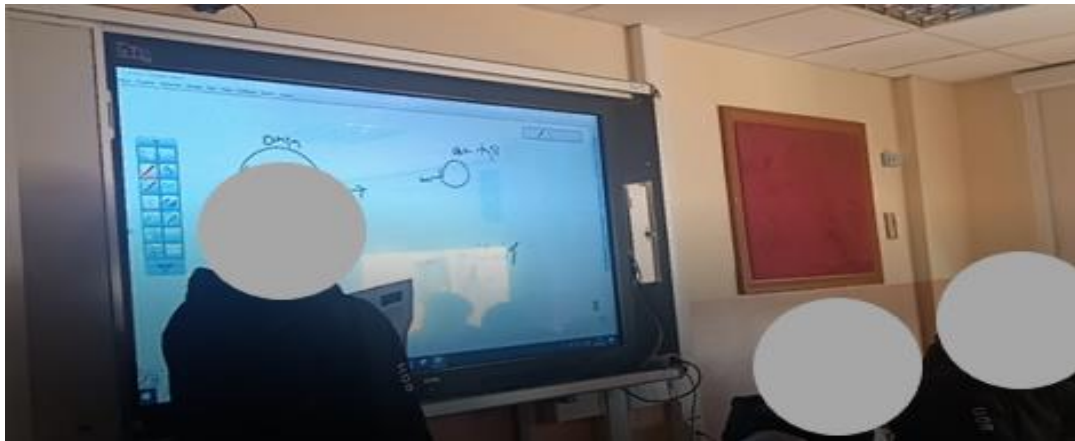
Problem durumunun katılımcılar tarafından okunmasının ardından, soruda nelerin verildiği ve istendiği sorulunca muhakeme düzeyi orta grup temsilcilerinden *Hamza* daha önceki öğretimlerden farklı olarak sadece gerekli verileri dikkate alarak isteneni “*Teleskop özellikleri verilmiş. Ama göktaşını teleskopla izlerken kütle çekiminden dolayı teleskop Dünya’nın çekim kuvvetinden çıkıp göktaşının çekim kuvvetine kuvvetine*

girebileceği için matematiksel dayanaklarla yörüngeden çıkmasını istiyorlar. Yörünge bulmaya çalışacağız.” şeklinde gerçek yaşama dayalı gerekçe sunarak ifade edebilmiştir.

Muhakemesi düşük düzey muhakeme gruplarının temsilcilerinden Aydan verilenlerden göktaşının Dünya’ya uzaklığına dair kritik noktayı *“Bu göktaşı en yakın milyon kilometre yaklaşıyor demiş dünyaya.”* şeklinde ifade etmiştir. İlknur *“Kütleleri de var. Dünyayla kütlesi yaklaşık olarak aynıymış. Onu da biliyoruz. Aralarındaki mesafeyi de biliyoruz, en yakın.”*

Muhakemesi orta düzey temsilcilerinde Elif metinde *“Ancak her türlü duruma karşılık göktaşının teleskopu etkileyen kütle çekim kuvvetinin Dünya’nın teleskopu etkileyen kütle çekim kuvvetinden daha çok olması istenmemektedir.”* şeklinde geçen verileni gerçek yaşamda anlamlandıramayarak *“Teleskopu etkileyen kütle çekimi dünyanın teleskopu etkileyen göktaşından daha fazlaymış.”* diye yanlış bir ifade edince aynı gruptan Hamza *“Bizden istediği durum aslında aralarındaki mesafeyi azaltmak değil mi? Eğer formülden gidersek. Kütle çekim kuvveti var. Dünya’nın kütlesi çarpı Göktaş’ın kütlesi bölü uzaklık.... Bir de g sabitiyle çarpıyorduk. Dünya teleskopla olan mesafe azaltırsak kütle çekim kuvveti artarsa teleskop göktaşına çekilir. Bizim teleskopumuz dünyaya daha çok çekildiği için göktaşına çekilmeyecek ve yörüngeden çıkmayacak.”* şeklinde amaca yönelik gerçek hayattan gerekçe sunarak iddiasını reddetmiştir. O esnada çekim kuvvetinde ele alınan dünya ve teleskop için İlknur *“İki çekim kuvveti de aynı.”* diyerek ikisinin de birbirine etki eden çekim kuvvetlerinin aynı değer olduğunu belirtmiştir. Bunun üzerine Elif’ten verileni ve isteneni görsel temsille açıklaması istenmiştir (Görsel 4.95).

Görsel 4.95 Uzak Teleskopları’nda Elif’in Görsel Temsile Ait Çizimi



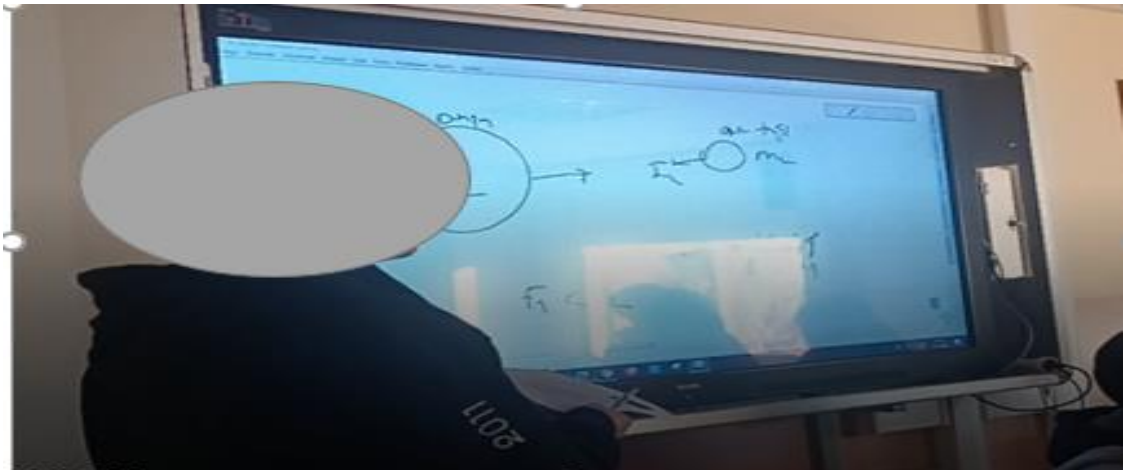
Muhakemesi düşük düzey Aydan “*Dünyaya yakın olsun. Göktaşının yörüngesine girmesin ki çekim alanından çıkmasın.*” şeklinde gerçek yaşama uygun gerekçe sunmuştur. Hatice ve Fatime onaylarken muhakemesi zayıf olan Necati “*Şöyle, teleskobun kütlelerini arttıramaz mısınız? Çünkü hocam hani hem şu an düşündüğümüzde G çarpı M_1 çarpı M_2 ya M_2 artıyor ve D 'nin de karesi kadar azalıyor.*” şeklinde gerçek yaşamdan ve matematikten gerekçe sunarak metindeki “*Teleskopun kütlesi yaklaşık dünya kadardır.*” şeklindeki verileri dikkate almadan öneride bulunmuştur.

Görsel üzerinde verileri temsille göstermeleri istenince Necati temsilleri “*Teleskopa M_1 , göktaşına M_2 dediniz, Dünya'nınki de M_2 olsun*” demiştir. Hamza sadece onaylarken Düşük muhakeme düzeyinden İlknur verilenleri gerekçe göstererek “*yaklaşık olarak aynı olacak denilmiş*” şeklinde önerisinin uygun olmayacağını belirtmiştir. Ayrıca göktaşı ve Dünya arasındaki çekim kuvvetini F_1 , teleskop ve göktaşı arasındaki çekim kuvvetine de F_2 demişlerdir.

Matematiksel muhakeme düzeyi zayıf gruptan Hatice'a neden aynı temsil alınması gerektiği sorulunca daha önce ifade edilmesine rağmen “*Aynı kütle olmasında sıkıntı yok*” deyip metinde yer verilmiş olmasını dikkate almamış ve uygun bir gerekçe sunamamıştır.

Orta düzeyden Elif gerçek yaşamda verilenleri matematiksel temsil yardımıyla tahtada anlamlandırırken zorluk yaşamış ve “*Göktaşı ve teleskop arasındaki kütle çekiminin F_1 'den daha fazla olması gerekiyor. Yani teleskopla dünya arasındaki çekimden daha fazla olması gerekiyor. Hani istenmemekte ya, zıttını alırız.*” şeklinde yanlış ifade etmiştir (Görsel 4.96).

Görsel 4.96 Elif'in F_1 ve F_2 Kuvvetlerine Dair Matematikleştirmesi

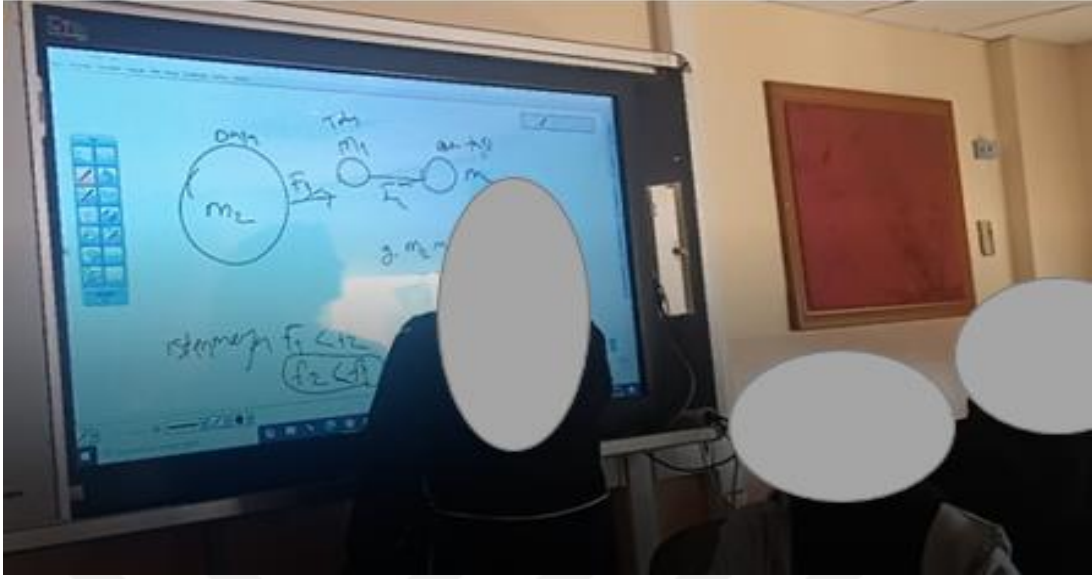


O esnada muhakemesi zayıf olan Necati iddiayı kabul etmeyerek “ F_1 büyük F_2 olması lazım. Ya da eşit.” şeklinde doğrusunu ifade edince diğer katılımcılar F_1 ve F_2 arasındaki eşitsizlik işaretine dair kararsızlığa düşmüştür.

Ardından kriterler tekrar ele alınmaya başlanmıştır. muhakemesi düşük gruptan Aynur “*Dünya teleskop arasındaki çekim kevveti daha büyük olmalı.*”, Fatime “*Göktaşı olabildiğince yakın.*” şeklinde kriterleri tekrar ele alırken orta düzeyden Hamza ise “*Göktaşını en yakından izleyecek, teleskop göktaşının kütle çekimine daha fazla girmeyecek en fazla eşit olsunlar dünya göktaşı arasındaki mesafe $2d$ ise d ve d olsun.*” şeklinde uzaklıklara ait uygun bir öneride bulunmuştur.

Kriterlere uygun olası çözümler düşünülürken muhakeme düzeyi zayıf Necati “*Eşitse istenen sağlanır ama diğer durumlar var*” diye gerçek duruma ilişkin iki durumdan mesafe uzunluklarını dair karar verememiş ve diğer olası durumları da dikkate almak istemiştir. Muhakemesi orta düzey gruptan Hamza “ $d_1=d_2$ olsun” diyerek karar vermiş ve temsiller aracılığıyla gerçek yaşamdan gerekçeler sunup “*Çok yakın ama çekime girmesin d_2 büyük eşit d_1 . Zaten karelerini de alıyoruz ya azalır karşıda da aynı kütle var. d_1 büyürse dünya kütlelerinden çıkar teleskop. Şimdi formül üzerinden. Kütleler aynı. M_2 ile m_2 'ler aynı. M_1 'ler de aynı kalacak. Çok yakından izlemesini ama çekime girmemesini istiyorum. Çünkü d_2 küçülürse aradaki mesafe küçülür. Matematiksel olarak d kareyi ne kadar azaltırsanız işte böyleceğiniz sayı artıyor ya oradan hocam benim kütle çekimi artıyor dünyanın o durumu sağlıyor ama işte karşı tarafta da aynı kütle var yani bu sefer aynı uzaklığı alırsanız yine hocam daha büyük bir kütle çekimi alırsınız.*” şeklinde matematikleştirdiklerini gerçek yaşamda ifade etmiştir (Görsel 4.97). Hamza burada hem çekim kuvvetleriyle ilgili kritik noktaya hem de yakın çekimle ilgili kritik noktaya dair gerçek yaşama dair gerekçe oluşturan tek katılımcıdır.

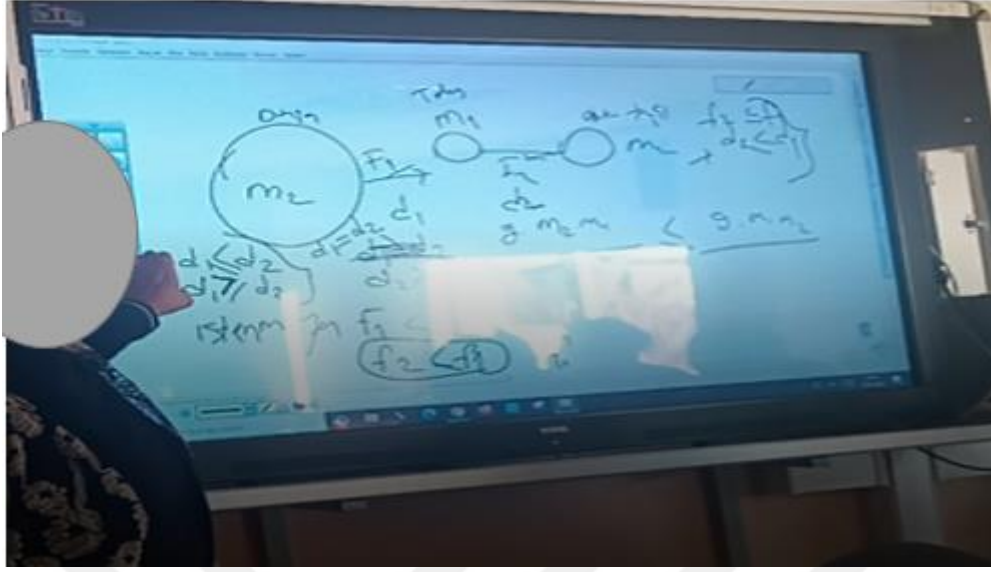
Görsel 4.97 Uzay Teleskoplarında Gerçek Durumun Matematikleştirilmesi



Muhakeme düzeyi yüksek gruptan Fatime gerçek yaşam durumlarını anlamlandırırken gerçek yaşam durumunu matematikleştirerek çözüme ulaştırmak istemiştir. “ d_2 küçük d_1 , F_2 küçük eşit F_1 ” şeklinde tahtaya yazdırırken, düşük düzeyden İlknur ise kriterdeki eşitlik durumuna dikkat çekip “ d_2 küçük eşittir d_1 ” diye değiştirmiştir. Fatime “ d_1 ya daha küçük olması lazım d_2 'den ya da en fazla eşit olabilir. Ama orada da göktaşıyla teleskopun arasındaki mesafe daha az oluyor. Teleskop göktaşını en yakından görmek istiyor. O zaman d_2 küçüktür, d_1 'den olur.. Diğerinde de o zaman d_1 büyüktür, d_2 'den. Şimdi eşitlik olabilir.” deyip eşitsizlik sistemlerinden yararlanarak matematiği kullanıp mesafelerin eşit olma zorunluluğunu $d_1=d_2$ şeklinde elde etmiştir (Görsel 4.98). Necati ve İlknur eşitlik durumunu hemen kabul ederken orta düzeyden Hamza amaçla uygunluğunu sorgulayıp “Evet... Yeter ki göktaşının yörüngesine girmesin. Girmiyor.” diyerek önce kontrol etmiş sonra kabul etmiştir.

Burada metinde “Ancak her türlü duruma karşılık göktaşının teleskopu etkileyen kütle çekim kuvvetinin Dünya'nın teleskopu etkileyen kütle çekim kuvvetinden daha çok olması istenmemektedir.” şeklinde verilen gerçek yaşam durumu matematikleştirme anı Hamza hariç her bir katılımcıyı oldukça zorlamıştır. Çünkü gerçek yaşamda uzaklık kütle çekiminde ters etkilemekte olup verilen gerçek yaşam durumu da olumsuz cümle niteliğinde taşıyınca katılımcılar iki olumsuz durumu gerçek yaşamda anlamlandırmakta oldukça zorlanmışlardır. Bu nedenle muhakemesi yüksek olan Fatime bile matematikleştirmeye başvurup temsilleştirmek istemiştir. Matematikleştirme sonrası her katılımcı durumu kabul etmiştir.

Görsel 4.98 Uzay Teleskopları'nda Uzaklıklara Dair Eşitlik Durumunun Bulunması



Etkinlikte GeoGebra’da dayanak oluşturabilmek için gerçek yaşam durumlarına dair elde ettiklerini matematikleştirmeleri istenmiştir. Orta düzeyden Hamza “*Göktaşı doğrusal gidiyor*” şeklinde ifade edince aynı gruptan Elif “*Evet göktaşı $ax+b$ doğrusal denklem, doğru olur.*” diyerek matematikleştirmiştir. Bu esnada GeoGebrada ortak kararla “*Dünya A noktası olsun. Koordinatı $(0,0)$ noktası olsun*”. “*Göktaşı $y=mx$. $y=-6$ olsun. Aradaki uzaklık 1 milyon ama 6 birim olur.*”, “*O zaman teleskop $C(0,-3)$ noktasında olsun.*” diyerek genel olarak dünya, teleskop ve göktaşına ait yerler koordinat ekseninde matematikleştirilmiştir. Teleskopun yerine uygun ilk nokta hep beraber C olarak bulunmuştur. Zayıf düzeyden Necati teleskop yörüngesini ilk anda “*Parabol olabilir mi?*” diye sorgulasa da emin değildir. Önerisine yönelik GeoGebra’da teleskop yörüngesi parabol şeklinde çizilince dünyanın teleskopa uzaklığı ile teleskopun göktaşına olan uzaklığının eşitliğine dair “*Yok ya bilemedim..yok..*” şeklinde ifadeler kullanarak doğruluğuna karar verememiştir.

Bu nedenle amaca uygun olarak GeoGebrada hem A(0,0) noktasına (Dünyaya) hem de BC($y=-6$) doğrusuna (göktaşına) eşit noktalar aranmaya devam edilmiştir. İkinci uygun nokta için Necati’in E(6,0) noktası önerisine orta düzeyden Hamza “*Dünya sabit göktaşı gidiyor. Birinin uzaklığı 6 diğeri $6\sqrt{2}$ eşit değil.*” diyerek matematikten gerekçe sunarak noktanın uygun olmadığına dair yanlış gerekçe göstermiştir. Çünkü Hamza (6,0) noktasının (0,0) noktasını uzaklığını 6 birim bulurken $y=-6$ noktasına dair uzaklığı hesaplarken doğruyu değil doğrunun (0,0) ile en yakın noktası olan (0,-6) noktasını ele

almıştır. Bu da nedenle uzaklığı $6\sqrt{2}$ birim bulmuştur. Orta düzeyden Elif de aynı şekilde yanlış noktayı referans alıp mutlak değerle ilişkilendirerek “*mutlak değerden baksana eşit değiller. Biri doğru biri nokta arasındaki uzaklık...bi de iki nokta arası uzaklık..*” deyince tüm katılımcılar onaylar ama zayıf düzeyden Necati “*O zaman her zaman eşit olamaz. İlk nokta neydi? D (0, -3) tamam.. (3,-3) olmaz mı?*” diye uygun nokta ararken yanlış bir öneri sunmuştur. O esnada orta düzeyden Hamza ve Elif ile düşük düzeyden Aydan yörüngenin doğrusal olunca uyacağına dair yanlış çıkarım yapmışlardır (Görsel 4.99). Düşük düzeyden Necati de ilk parabol önerisinden vazgeçip “*Parabolik olursa uzaklaşır olmaz.*” diye de iddia etmiştir. Orta düzeyden Elif ise bu durumda sadece D(0,-3) noktasının uyacağını belirtip çözümün doğrusal olamayacağını “*O zaman sadece D olur.. ama olmaz ki...*” şeklinde işaret etmiştir. Düşük düzeyden Aydan GeoGebra’da noktaları yerine koyup denerken doğrusal ele alınan yörüngenin uygun olmadığı GeoGebra’daki uzaklık sekmesinden anlaşılmıştır (Görsel 4.100). Bunun üzerine $y=-3$ doğrusundan vazgeçilip Necati’nin sunduğu (6,0) noktasının uygunluğunu sorgularken uygun olduğunu fark eden orta düzeyden Elif ve düşük düzeyden İlknur (6,0) noktasının y eksenine göre simetriğini alıp (-6, 0) noktasının da uygun olacağını hemen fark etmişlerdir.

Görsel 4.99 Uzay Teleskopları’nda Yörüngeye Ait Noktaların Bulunması



Deneme yanılmayla bulunan (0,-3), (6,0) ve (-6,0) noktalarından sonra zayıf düzeyden Necati simetriden dolayı parabol olup olmadığını “*Parabol..iki yerde kesmesi lazımdı. Bu bir şart. Yoksa hani şey... Ha, şöyle Ama üçüncü yerden de geçebilir. x’i iki yerde kesiyor -6, ve 6. Tepe de -3*” şeklinde ifade ederken diğer katılımcılar da tekrar

sorgulamışlardır. Muhakemesi yüksek Fatime ile orta düzeyden Hamza ve Elif noktalar arasındaki uzaklıkları *Pisagor Bağıntısı*’ndan doğruya uzaklığı ise diklikten bulmaya çalışmışlardır. Üç nokta için sağlansa da tüm noktalar için sağlanması gerekliliği sorgulanınca diğer noktalarda da doğruluğunu görmek için Necati’nin önerdiği parabol denklemini bulmaya çalışmışlardır. Muhakemesi yüksek Fatime ve orta düzeyden Hamza matematiksel değişken olarak “*Yörüngedeki noktalar değişir. Noktalar değişken olmalı (x,y)*” deyince ardından düşük düzeyden Aydan “*Dünya sabit (0,0) da ama (a,b) olsun.*”, Elif “*Göktaşının doğruyal sabit fonksiyon...y=-6 yani 1 milyon uzaklık*” matematikteki verileri bağlama göre ifade edince muhakemesi zayıf olan Hatice sadece onaylamıştır. Bunun üzerine Fatime ve Hamza bu verileri kritik noktalara dayalı detaylandırıp “*evet ama en yakın 1 milyon .. y=1 milyon..*” demişlerdir.

Matematiği kullanıp (a,b) noktasından *m* uzaklığa yani (-3,0) noktasına teleskopu koyup *m* kadar uzaklığa yani *y=-6* doğrusuna bakıp eşit uzaklıkların olduğunu görmüşlerdir.

Belirlenen parabolün çözüm için uygun olup olmadığını belirlemek için kritik noktalarda belirlenen noktaların parabole ve sabit noktaya eşit uzaklıkta olup olmadığı incelenmiştir.

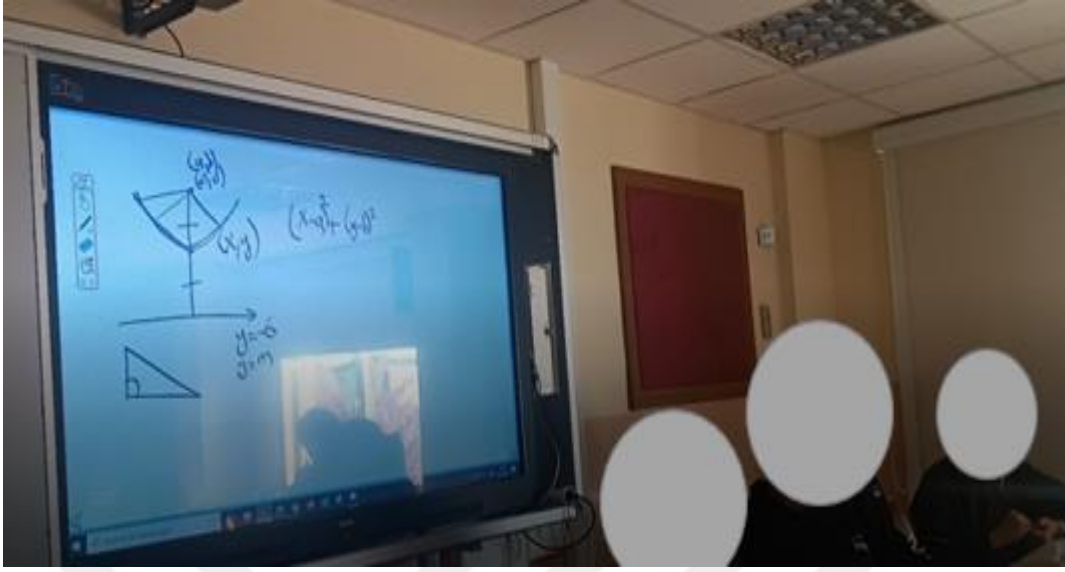
Zayıf düzeyden Necati (a,b) ve (x,y) olan iki nokta arasındaki uzaklığı *Pisagor Teoremi*’nden bulurken hangi noktaların birbirinden çıkarılacağı sorgulanınca orta düzeyden Elif ve düşük düzeyden Necati “*Karesini alıyoruz.. hangisinden diğerini çıkardığımız fark etmez.*” diyerek mutlak değer kavramına ilişkin farkındalığı ortaya koymuşlardır.

Orta düzeyden Hamza, Elif ile düşük düzeyden Necati matematiği kullanarak “*uzaklığın karesi... yani uzaklık d ise*

$$(x-a)^2+(y-b)^2= d^2$$

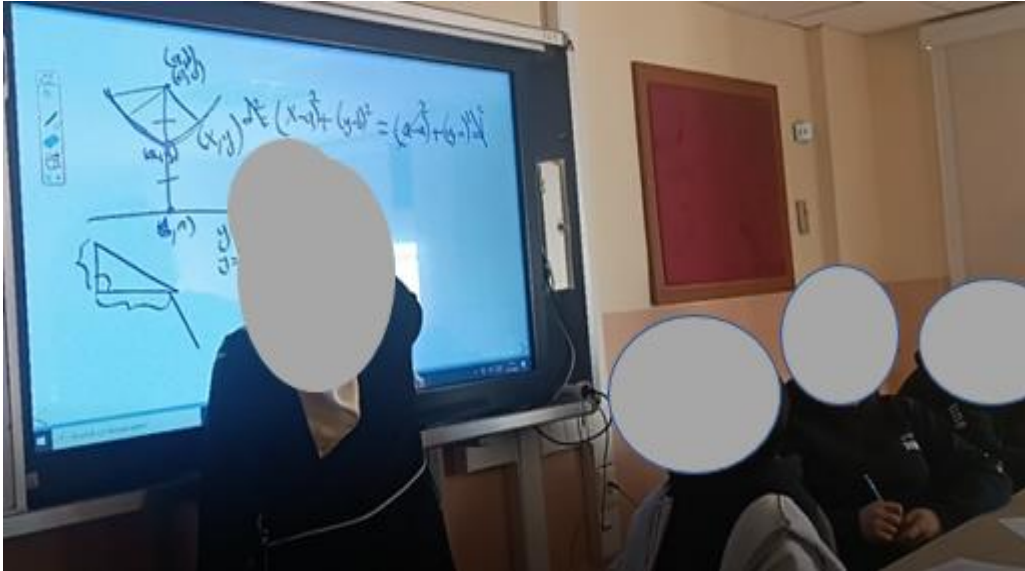
şeklinde denklem elde etmişlerdir (Görsel 4.100).

Görsel 4.100 Uzay Teleskopları’nda Pisagor Teoremi Yardımıyla Uzaklığın Bulunması



O esnada Necati ve Hamza (x,y) noktası (a,b) ile aynı doğrultuda olacağından (x,y) noktasını (a,y) , $y=m$ doğrusundaki noktayı da (a,m) şeklinde düzenleyip denklemde yerine koyup “ $(a-a)^2+(y-m)^2= d^2$ bu da uzaklığın karesine eşit olacağından birbirine eşitlenir.” şeklinde çıkarım yapmışlardır. Bu durum iki değişkeni birbirine göre ilişkilendirebildiklerini göstermiştir (Görsel 4.101).

Görsel 4.101 Uzay Teleskopları’nda Doğrusallıkla Noktaların Yeniden Bulunması



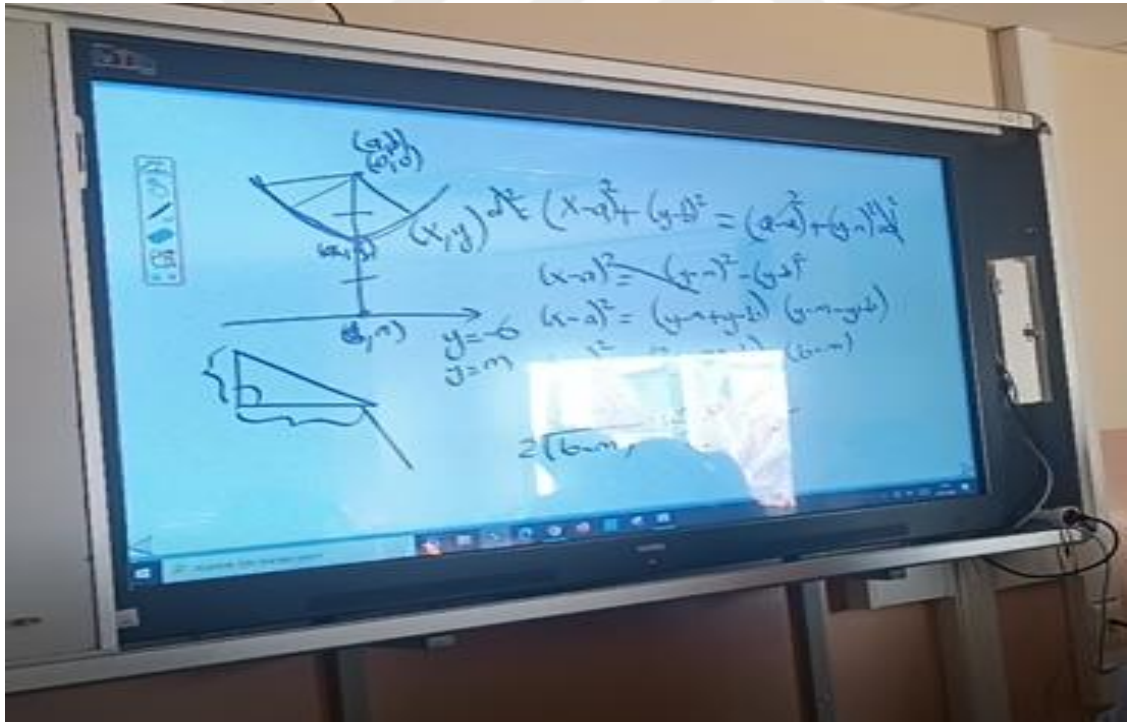
Muhakemesi orta düzey Elif diğer öğretimlerde olduğu gibi matematiği kullanmada ön plana çıkıp işlemleri takip ederek her bir aşamada açıklamaya çalışırken muhakemesi düşük düzey olan İlknur da ona eşlik etmiştir. Ayrıca “*Hocam burada iki*

kare farkından yararlanılır.” şeklinde matematiksel gerekçe sunarak işlemleri takip edip açıklayabilmiştir.

Elde edilen denklemde hangilerinin değişken hangilerinin sabit sayı olduğunun belirlenmesi için soru sorulunca muhakemesi orta düzey olan Hamza “*x, y değişken geriye kalanlar sabittir.*” şeklinde doğru ifade etmiştir.

Ardından matematiksel manipölasyonlar sonrası elde edilen denklemin parabol olup olmadığını kontrol etmek için muhakemesi orta düzey gruptan Elif, Hamza ve zayıf gruptan Necati “*x’in derecesine bakarız. 2 olmalıdır.*” şeklinde açıklama yaparken Elif “*y de tek başına olmalı... diğerleri parabol için şart değil.*” diyerek genel olarak parabol denklemini ele alıp geride olabilecek *x*’li ifadelerin gerekli olmadığına dair farkındalığını ortaya koysa da *y*’i yalnız bırakmak zorunda olduğunu ifade etmesi genel denklem kalıbını kısmen ezberlediğinin göstergesidir (Görsel 4.102).

Görsel 4.102 Uzay Teleskopları’nda Uzaklıkların Eşitlenip İşlem Yapılması



Elde edilen parabol denkleminin geometrik temsili GeoGebra’da gösterilirken parabol çizmek için kullanılan nokta ve doğrultman seçilip elde edilen parabol şeklindeki bu görsel temsilin matematiksel olarak nasıl ifade edilebileceği sorulmuştur. Muhakemesi düşük düzey gruptan İlknur “*Noktayla doğru arasındaki mesafeleri eşit oluyordur, Bir nokta bir doğru arasındakileri eşit bölen çizgi*” şeklinde, muhakemesi orta düzey gruptan

Hamza “*Noktanın doğruya simetri eksenine, noktayla doğruya eşit birleşmesi*” ve muhakemesi yüksek düzey gruptan Fatime “*Noktaya ve doğruya eşit noktaların birleşimi*” şeklinde açıklamıştır.

Bu matematiksel ifadenin daha önceki parabol denklemiyle nasıl eş olabileceği sorulunca muhakemesi orta düzey gruptan Elif “ $y=ax^2+bx+c$, 2. dereceden denklem bu da onun aynısı... ama geometrik olarak başka oldu.” şeklindeki ifadesi ile parabolün cebirsel ve geometrik yorumunun farklı olduğuna dair farkındalığını açıkça ortaya koymuştur. Her katılımcı bu yoruma katılmıştır.

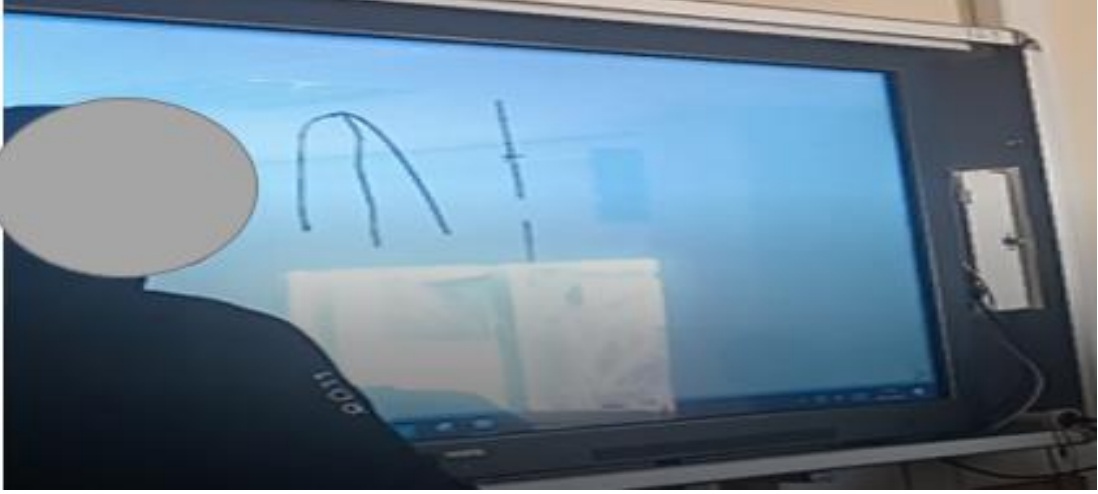
Ardından dünya tekrar nokta ve göktaşının gittiği doğrusal yol da y eksenine paralel olsaydı teleskopun yörüngesine yönelik matematiksel modellemeye ait temsilin nasıl olabileceği sorgulanınca muhakemesi zayıf düzeyden Hatice yörüngeyi parabol temsili olarak görsel şekilde de bulmalarına rağmen yörüngeyi göktaşına ait doğruya dik şekilde yanlış çizmiş ve “*bunun ortalarında olmalı*” şeklinde yörüngeyi ortadaki nokta şeklinde yanlış bir biçimde belirtmiştir (Görsel 4.103). Bu durum Hatice’nin çözümü yapılan durumlarda dahi bazı kritik noktaları ele alıp sadece onun üzerinden düşündüğünü göstermektedir.

Görsel 4.103 Uzay Teleskopları’nda Hatice’nin Yeni Yörüngeye Dair Çözümü



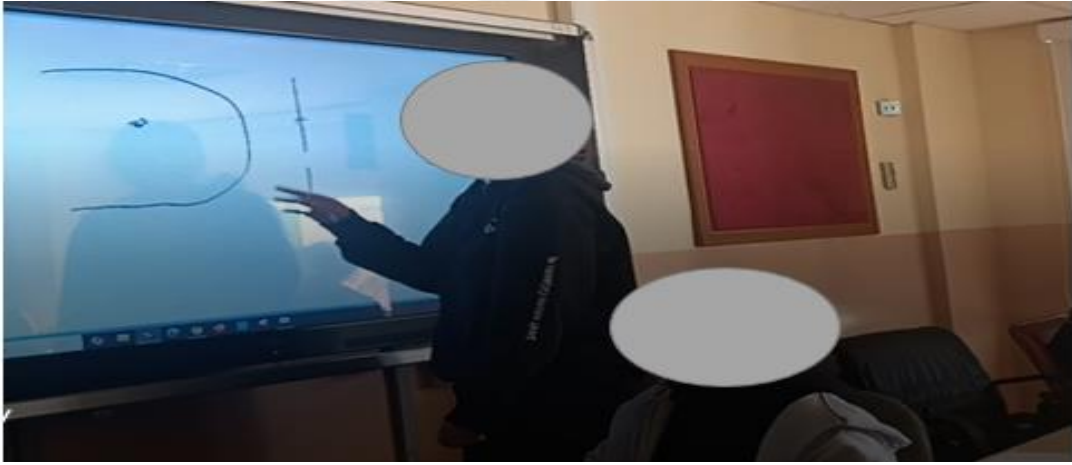
Aydan ise “*Şöyle doğrusal olmaz, Ama aşağı doğru olmalı.*” diyerek yörüngeyi parabol temsili olması gerektiğini anlasa da her bir noktasının ve doğruya eşit uzaklıkta olması gerektiğini anlamlandıramadığı açığa çıkmıştır (Görsel 4.104).

Görsel 4.104 Uzay Teleskopları’nda Aydan’ın Yeni Yörüngeye Dair Çözümü



Muhakemesi düşük düzeyden İlknur ise “ *Yani şöyle olmalı, eşit* ” diyerek doğru şekli çizerek parabolün geometrik anlamını da anlamlandırdığını ortaya çıkarmıştır (Görsel 4.105).

Görsel 4.105 Uzay Teleskopları’nda İlknur’un Yeni Yörüngeye Dair Çözümü



Her katılımcı İlknur’un çizimini kabul edince çizimin parabol olup olmadığı tekrar sorgulanmıştır. Bunun üzerine gerçekleşen görüşme kesiti aşağıdaki verilmiştir.

Muhakemesi düşük düzeyden Necati “ *Bence de öyle, ama adı parabol değil.* ” şeklinde ifade etmiştir.

Muhakemesi orta düzeyden Hamza “ *Parabol bir fonksiyonun bir bağıntısı değil mi? Eğer bir şey fonksiyon olamıyorsa parabol olabilir mi? Bu iki değeri var fonksiyon değil, parabol olmayacak* ” şeklinde matematikten bir gerekçe sunarak ilk başta kabul etmemiştir.

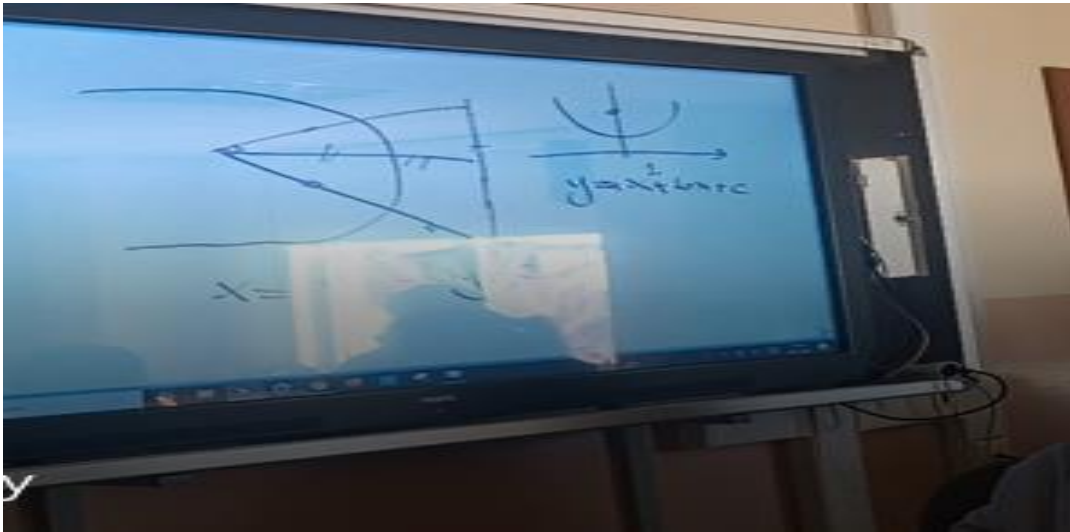
Fatime ve İlkur açıklayarak “*Bak böyle de gidebilir, parabol yani.. eşit..*” şeklinde açıklayarak Hamza’ya noktaların eşitliği üzerinden gerekçe sunmuşlardır.

Ancak Hamza “*Biz önceki gösterimi niye doğru kabul ettik? Niye biz referans aldık? Çünkü iki noktada birbirine eşit. Ama sen burada bilmiyorsun ki işte... Parabolde yani bilmiyorsun..*” diyerek o da eşitlik üzerinden gerekçeyle itiraz edince aynı düzeyden Elif’in “*Bu yörüngede sadece eksen dönmüş gibi. Bak her şey aynı*” şeklindeki görsel temsile ait ifadeleri sonrası kabul etmiştir.

Bu parabol temsilinin matematiksel olarak nasıl ifade edilebileceği sorgulanınca muhakemesi düşük düzeyden İlkur “*Denklem olarak...*” şeklinde muhakemesi zayıf düzeyden Necati ise “*parçalı fonksiyon..*” şeklinde ifade etmiştir. Ancak nasıl matematiksel bir denklem olabileceğine dair fikir sunulamayınca “*İlk parabol denkleminizde her bir değişkenin kaç değeri vardır?*” diye sorgulanmış ve Necati “*y’nin tek değeri için x’in iki değeri var*” şeklinde ifade ederek parabol denkleminde değişkenlerin değer sayısını anlamlandırdığını ortaya koysa da muhakemesi yüksek olan Fatime “*ama bazen tek, tepede..*” şeklinde açıklamasına tepe örneğini sunarak Necati’nin eksik bıraktığı yeri de açıklamıştır.

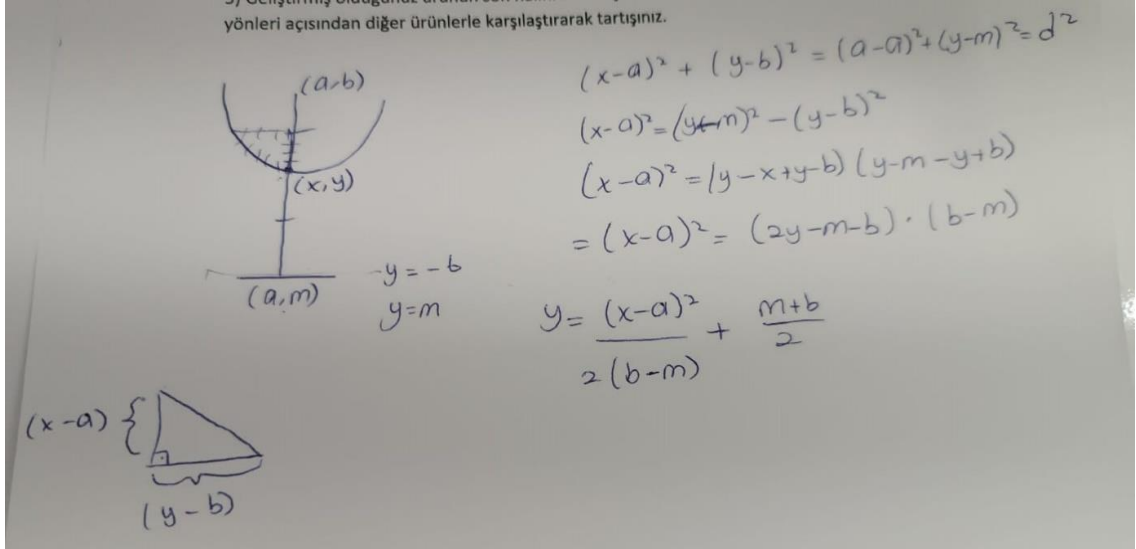
Bunun üzerine orta düzeyden Hamza ve Elif y değişkenine bağlı olarak yeni parabol denklemini “ $x=ay^2+by+c$ ” şeklinde yazdırabilmişlerdir (Görsel 4.106). Bu durum Hamza ve Elif’in iki değişkenin ilişkilendirebildiğini de açığa çıkarmıştır.

Görsel 4.106 Uzay Teleskopları’nda Hamza Ve Elif’in Yeni Yörüngeye Dair Çözümü Matematikleştirmesi



Yeni yörüngede x değişkenine bağlı elde edilen $x=ay^2+by+c$ şeklindeki parabol denkleminin gerçek yaşamda neyi ifade ettiği sorulunca muhakeme düzeyi zayıf olan Hatice “Bu teleskopun yörüngesi olacak.. teleskop yörünge üzerinde hepp..” şeklinde doğru açıklayabilmiştir. Diğer katılımcılar da onaylamıştır. Katılımcıların tüm sürece yönelik ortak çözümü aşağıda verilmiştir (Görsel 4.107).

Görsel 4.107 Uzay Teleskopları’nda Katılımcıların Genel Çözümü



4.4.2 Beşinci öğretim bölümü

Arıların yiyecek bulunca yaptıkları dansı destekleyen bir oyunun matematiksel modellemesine dayalı olan *Arıların Çiçek Bulma Oyunu* adlı beşinci öğretimde problemin kritik noktalarının ve amacının ortaya koyulmasında yüksek düzey muhakemeye sahip Fatime’nin yanı sıra muhakemesi düşük düzeyden Aydan ön plana çıkarken, matematiği kullanmada diğer öğretimlerde olduğu gibi orta düzeyden Elif ve zayıf düzeyden Necati’nin sürece önderlik ettiği görülmüştür. Ayrıca muhakemesi zayıf grup temsilcilerinden Necati kritik noktaları dikkate almaması ve çözüme yönelik uygunsuz gerekçeleriyle de dikkat çekmiştir.

Problem durumunun katılımcılar tarafından okunmasının ardından, soruda nelerin verildiği ve istendiği sorulunca muhakeme düzeyi yüksek grup temsilcilerinden Fatime, düşük gruptan İlknur ve Aydan sadece gerekli verileri dikkate alarak kritik noktaları hemen ifade edebilmişlerdir. Bu esnada orta düzeyden Hamza da benzer şekilde kritik noktaları ifade ederken güneşin yönüne ait kritik noktayı yanlış anlamlandırıp ifade etmiştir. Muhakemesi zayıf olan Hatice ise çoğu öğretimde olduğu sessiz kalmıştır.

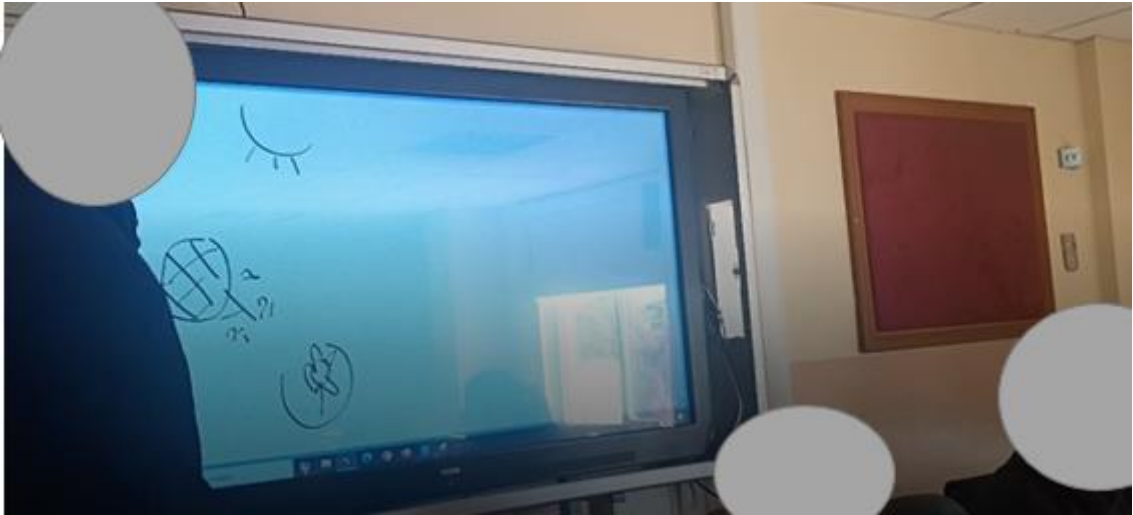
Muhakemesi yüksek düzey olan Fatime “Arının gelme açısı var hocam...mesela diyor her bir saniyelik sallanması bir kilometre uzakta olduğunu söylüyor. Sekiz çiziyor orda..” şeklinde ifade etmiştir.

Muhakemesi düşük düzeyden İlknur ve Aydan sırasıyla “Mesafe ve sallanma süresi var. Güneşe dik.” ve “ Sallanıyor. Her sallanma bir kilometre.” şeklinde açıklamıştır.

Muhakemesi orta düzeyden Hamza ise kritik noktalardan “Güneş yönünde ise bal peteğinden yukarı çıkar, ters yönde ise aşağı iner” şeklindeki kritik noktayı tam tersi yönde “İndiği açıyı söylüyor bize. Şöyle demiş bize. Kovanın üstünde dik bir çizgi olduğunu varsayıyor ve ona göre eğer güneşle doğru yönündeyse yukarıdan geliyor. Ters yöndeyse aşağıdan geliyor ve bir alfa açısı yapıyor. Geldiği kovana doğru. İşte güneşe doğru yöndeyse yukarıdan, tersi yöndeyse aşağıdan bulabiliyoruz. Geldiği açı, diklikle onun geldiği açı arasında kalan.” şeklinde yanlış açıklamıştır.

Muhakemesi zayıf düzeyden Necati ifade edilenleri açıklarken tahtada görsel temsilini kullanmış (Görsel 4.108) ve “Güneşin yönüne doğru hareket edecek..bir de onun geliş açısı var ve bir de dansa sallanması var” şeklinde açıklamıştır.

Görsel 4.108 Necati’nin Arıların Çiçek Bulma Oyunu’nda Verilenleri Görsel Temsil Etmesi

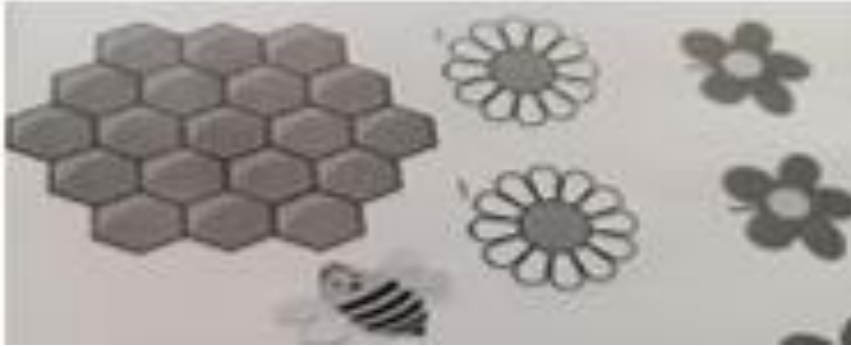


Kritik noktaların hemen ardından muhakemesi yüksek düzeyden Fatime ve düşük düzeyden İlknur sırasıyla amacı “Üç soru cevap. Bir arının yaptığı dansa bakarak bilinmeyen bir çiçeğin yerini bulmak.” ve “Bu bilgilerle üç soruya cevap vereceğiz. Bir arının yaptığı dansa bakarak bilinmeyen bir çiçeğin yerini bulmak. diye gidiyor..”

şeklinde açıklamaya başlamışlardır. Aydan ve Necati de benzer şekilde kısaca “Oyun.” olarak ifade etmiştir.

Oyuna ait ilk soruya başlamaları için temsili Güneş, arı, çiçekler ve kovan resimleri verilmiştir (Görsel 4.109). İlk soruya başlamadan önce soruda verilmesi gerekenler konusunda muhakeme düzeyi zayıf olan Necati ve düşük olan Aydan sırasıyla “Yani ilk önce hani arı dans edecek. Şimdi önce bir kere güneşimiz burada diye. Kovan da burada. Hocam benim anladığım kadarıyla şimdi arı ya yukarı ya da aşağı bir şekilde hareket edecek. Çiçeğin nerede olduğunu bir de onun geliş açısı var. 20 derece diyelim. Bir de işte 2 kilometre uzaklıkta. Evet 2 defa sallanacak” ve “Çiçek aşağıda olduğu için iki defa sallanacak.” şeklinde ifade ederek yön ve açının dikkate alınması gerektiği örneklerle verince diğer katılımcılar onaylamıştır. Hamza ise “Hocam, ilk önce danstan faydalanmış ya. Bir sallanma sayısı verecek. İşte kaç kere sallanmış?” diye tekrar etmiştir.

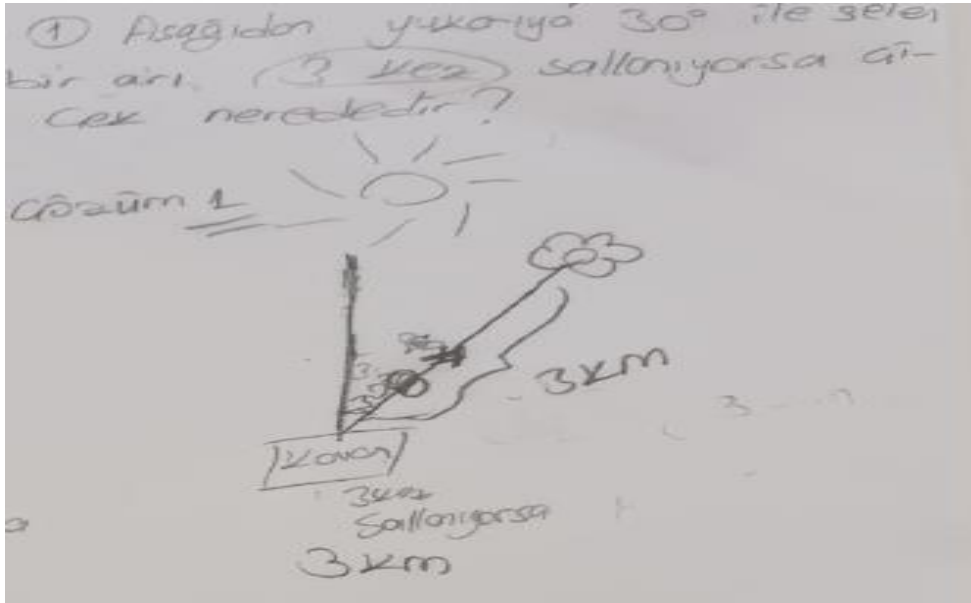
Görsel 4.109 Oyuna Ait Verilen Görsel Temsiller



Muhakeme düzeyi orta düzeyden Elif, düşük düzeyden Ilknur ve zayıf düzeyden Necati ilk soruda vermeleri gereken bilgileri düşünürken kritik noktaları da ele alıp gerçek hayatta anlamlandırmaya çalışmışlardır. Muhakeme düzeyi orta düzeyden Elif “Bir arının yaptığı dansa bakarak çiçeğin yerini bulmak. Mesela aşağı doğru yapıyorsa çiçek aşağıda demektir.” şeklinde açıklarken muhakeme düzeyi orta Elif “Kaç kere dans etti? Kaç kere sallandı” ve muhakeme düzeyi zayıf olan Necati “Geliş açısı. Evet. Sallanma sayısı. Geliş açısı dediniz. Geliş açısı. Tamam. Başka istediğiniz bir şey? Yok. Şimdi o zaman bana bir tane örnekli soru yazın o zaman. Bu verdiklerinize göre bir tane örnek bir soru belirleyelim Mesela aşağıya doğru. Aşağıdan doğru gelen bir arı.” şeklinde ifade etmiştir.

Birinci soruyu oluşturma aşamasında isteneni sözel olarak yazıp görsel temsille çözmeye karar verilmiştir. Soruyu doğru oluşturmak için gerekli olan verilerin sayısal değerleri belirlenirken muhakemesi düşük ve orta düzeyden İlknur ile Hamza nicel değerleri sırasıyla “Aşağıda üç kere sallanan arının...” ve “Aşağıdan yukarıya. 30 dereceyle gelen bir arı 3 kez sallanır sallandıktan sonra ...” şeklinde ifade etmişlerdir. Sorunun “Aşağıdan yukarıya doğru sağdan 30 derece ile gelen arı 3 kez sallanıyorsa iek nerededir?” şeklinde oluşturulmasından sonra genel çözüm görsel temsille çizmiştir (Görsel 4.110). İlknur ve Hamza soru hazırlarken uygun nicel değerler verebilmiştir.

Görsel 4.110 Grubun Birinci Sorunun zme Ait Görsel Temsili

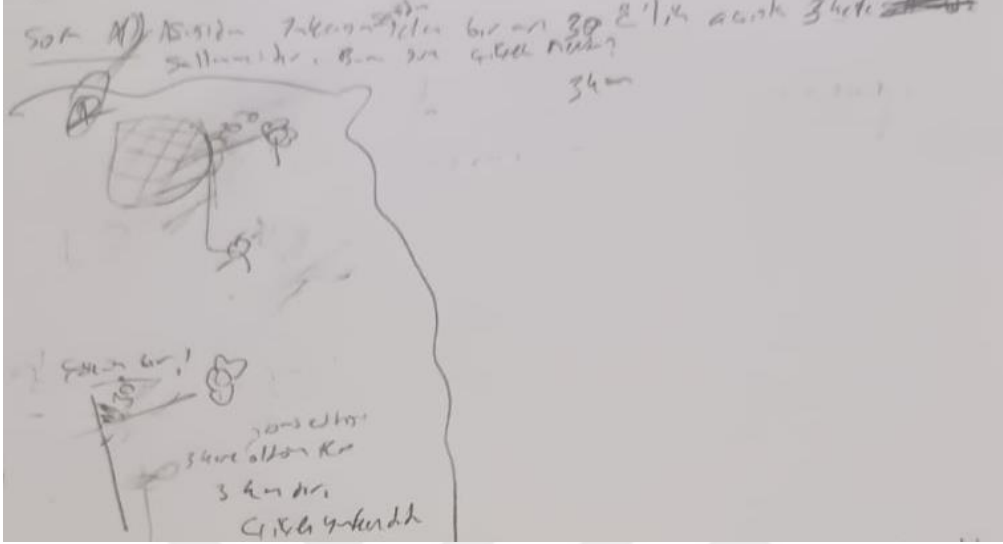


Birinci soruya ilişkin görsel çözümler ifade edilirken muhakemesi düşük düzey olan Aydan ve İlknur ile yüksek düzeyden Fatime kritik noktalardan olan yöne dair yapılan yanlış ifadeleri hemen fark etmiş ve gerçek yaşamdan ifadelerle açıklamıştır. Ancak muhakemesi orta düzeyden Elif, Hamza ve zayıf düzeyden Hatice gerçek hayatta anlamlandırmakta zorlanmış (Görsel 4.111) ama sonra kabul etmişlerdir.

Muhakemesi zayıf olan Hatice “iek burada. iek. Arı ieği bulmuş. Sonra da üç kilometre uzaklıkta olduğu için kovandan otuz derecelik açıdan hem de üç kez dans ettiği için ona göre iek aşağıdadır yani.” şeklinde muhakemesi orta düzeyden Elif ve Hamza ise sırasıyla “hocam çünkü aşağıya doğru 3 kilometre gidecek ya bunu böyle alamayız ki.” ve “Aşağıya olur.” şeklinde yönü yanlış açıklayınca düşük düzeyden Aydan “iek yukarıda ise yukarıya gider.” şeklinde aynı düzeyden İlknur ise “Yukarıya

gidecekse, yukarıda olması lazım. Dans yönü aşağıdan yukarı.” şeklinde gerekçeyle birlikte açıklamasına rağmen orta düzeyden Hamza itiraza devam etmiştir.

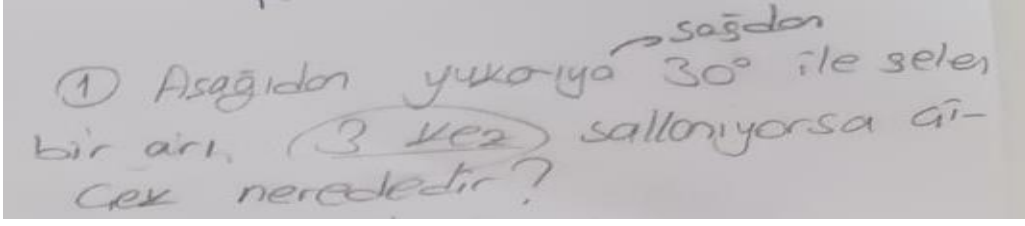
Görsel 4.111 Hatice’nin Birinci Sorunun Çözümüne Ait Görsel Temsili



O esnada muhakeme düzeyi yüksek Fatime’nin yöne yönelik başka bir ifade eklenmesi gerektiğini yoksa çözümde iki görsel temsil olabileceğini “*yukarıda ama ...şu tarafta da olabilir. Aynısını diğer tarafa çizerim. Böyle de otuz olur. Çünkü peteğin neresinde anlatıyo bilmiyoruz. Sağ mı sol mu?*” şeklinde ifade etmiştir. Bunun üzerine görsel temsil verilirse arıların dansına dair Güneş yönü ve sallanma sayısı belirlenebildiği ancak sözel ifadeye verilirse iki farklı görsel temsil oluşma durumu ile karşılaşmışlardır. Bunun üzerine sağ veya sol ifadesi eklenmesi kararlaştırılmıştır. Yüksek muhakemeye sahip Fatime “*Hocam görselde toplu bir şey var ve yer değiştirmiyoruz görselde. Yani mesela çiçeği bir yere koyduysak orada kalıyor. Ama sözele döktüğümüzde mesela herhangi bir yere koyabileceğimiz için iki ihtimali de düşünüyoruz.*” şeklinde açıklamıştır. Soru aynı görsel temsili sağlayacak şekilde “*Aşağıdan yukarıya doğru sağdan 30 derece ile gelen arı 3 kez sallanıyorsa çiçek nerededir?*” olarak tekrar oluşturulmuştur (Görsel 4.112). O esnadaki görüşme kesiti aşağıdaki şekildedir:

Muhakemesi zayıf olan Necati “*Çiçek birinci bölgede olacak.*”, muhakemesi orta düzey olan İlknur “*Değiştirelim... Ya Soru yanlış değil ama eksik. Yani mesela sağ taraftan geliyor dersek olur.*” şeklinde ve yüksek düzeyden Fatime ise “*Aşağıdan yukarıya doğru sağdan 30 dereceyle gelen bir arı 3 kez sallanıyorsa çiçek nerededir?*” şeklinde ifade etmişlerdir.

Görsel 4.112 Grubun İlk Soruya Ait Sözel İfadesi



O esnada orta düzeyden Elif de mesafeye dair verilenleri gerçek hayatta anlamlandırmaya çalışmıştır. Elif “Doğrusal bir şekilde alamayız, dik bir şekilde olması gerekmiyor mu?” o esnada diğer katılımcılar hep bir ağızdan “Çiçek ile kovan arasındaki mesafe.” şeklinde ifade edince anladığını belirtmiştir.

İkinci soruyu oluştururken kovandan uzaklığı ve Güneş’e göre yönü belli bir çiçeğin yerini dansla anlatma şeklinde soru ve çözüm olmalıdır. Soruda isteneni düşük düzeyden Aydan “Çiçeğin kovandan uzaklığı ve güneşe göre yönünü istiyor” diyerek soruda verilmesi gerekenleri istenen şeklinde yanlış açıklamıştır.

Orta düzeyden Hamza tıpkı daha önce olduğu hemen nicel değer vererek örnek bir duruma dönüştürmek için “Kovana uzaklığı işte 5 km olsun. Güneşe göre yönde işte ya sağa ya da sola başka seçeneği yok. Yeni dans anlatma, o da çiçeği 8’in hangi yöne doğru olduğunu bulacağız.” şeklinde çözümde ne yapılacağını da doğru ifade etmiştir. Ancak muhakemesi zayıf olan Necati itiraz ederek “Hayır, biz vermeyeceğiz, biz bulacağız.” şeklinde açıklamıştır. Bunun üzerine Fatime isteneni “Kovandan uzaklığı 5 kilometre ve güneşe göre sağdan 40 derecelik açı ile yiyecek bulup gelen bir arının çiçeği dansla anlatması” şeklinde doğru ifade etmiştir. Bu esnada Necati verilerin eksik olduğunu ifade ederek “Yetmez. Yukarı aşağı mı . Önemli. Sağ yukarı olabilir, sağ aşağı olabilir.” şeklinde daha önce ifade edilmesine rağmen cevaba yönelik yönü ifade eden yanlış iddiada bulunmuştur. Yüksek muhakemeye sahip Fatime ise “Dansla bulacak ya onu. Dansla anlatacak.” şeklinde açıklama yapmıştır.

Necati farklı yollarla yapmayı denemeyi ifade etmiştir. Oysa soruda zaten Güneş’e göre açısı ve yeri belli olan arının dansı sorulmaktadır. Ama Necati “Kovana göre dersek olur mu?” diye kritik noktaları dikkate almadığını göstererek iddiada bulunmuştur. Yüksek düzeyden Fatime “Necati olmaz.” diye redderken orta düzeyden Hamza “Kovana göre. Kovana göre dersin. Referansı şey olur. Kovan olur Bizim referans. Güneş ona göre sen yukarı yada aşağı alacan.” şeklinde kritik noktayı işaret

eden gerekçe sunmuştur. O esnada zayıf düzeyden Necati “*Güneş yukarıda olmuyor mu zaten? Hayır, bizim referansımız kovan olması lazım. Biz burada referansı ne aldık. Kovanı mı, Güneş'i mi?*” şeklinde kritik noktayı anlamadığını belirten gerçek yaşamdan anlamsız gerekçeleri sunarak itirazı sürdürmüştür.

Fatime gerekçe olarak “*Çiçeğin yönünü de Güneşe göre göstereceğiz Çiçeğin konumu güneşe göre sabit.*” İlknur “*Kovanla güneşin olduğu yeri göre o zaman.*” diye kritik noktaya yönelik gerekçe sunmuşlardır.

Öğretmen o esnada arıların aynı çiçeği günün farklı saatlerinde buldukları zaman danslarının değişip değişmeyeceğini sorgulamak için “*Sabah 9-10 civarı 7 km uzaklıkta güneş yönünde bir çiçek olsun. Sabah ve akşam yapılan dans değişir mi? Değişirse nasıl değişir?*” şeklinde soru sorunca hemen her katılımcı değişeceğini ifade etse de yön ve uzaklığa odaklanmışlardır. Aradaki açının değişip değişmeyeceğini sorgularken Necati tümlerini alıp 20 derece olarak yanlış hesaplamış, doğru cevabı yüksek düzeyden Fatime bütünler açığı hesaplayarak bulmuştur. Aşağıda görüşme kesiti sunulmuştur:

Hamza: “*Değişir.*”

Necati: “*Önce aşağıdan yukarıya 7 kere sallanır sonra yukarıdan aşağıdan başlayacak 7 kere.. ama açık ilkinde 70 ikincisinde 20 olur*”

Aydan: “*Bilmiyorum ama işte tam aç oluyor. Değişiyor.*”

Fatime: “*Değişir. Aç 110 olur, yön değişir aynı sallanır. O zaman saatte vereceğiz.*”

Yüksek düzey muhakemeye sahip Fatime’nin saatinde kritik bir nokta olduğunu açığa vurmasıyla düşük düzeyden İlknur gerçek yaşama dayalı gerekçe sunarak akşam saatlerini dahil etmemesi kritik noktalardaki farkındalığını ön plana çıkarmıştır. Orta düzeyden Elif ise kritik duruma uygun örnek durumu oluşturmuştur. Ardından Fatime ikinci sorunun nicel değer atanmış son halini ifade etmiştir.

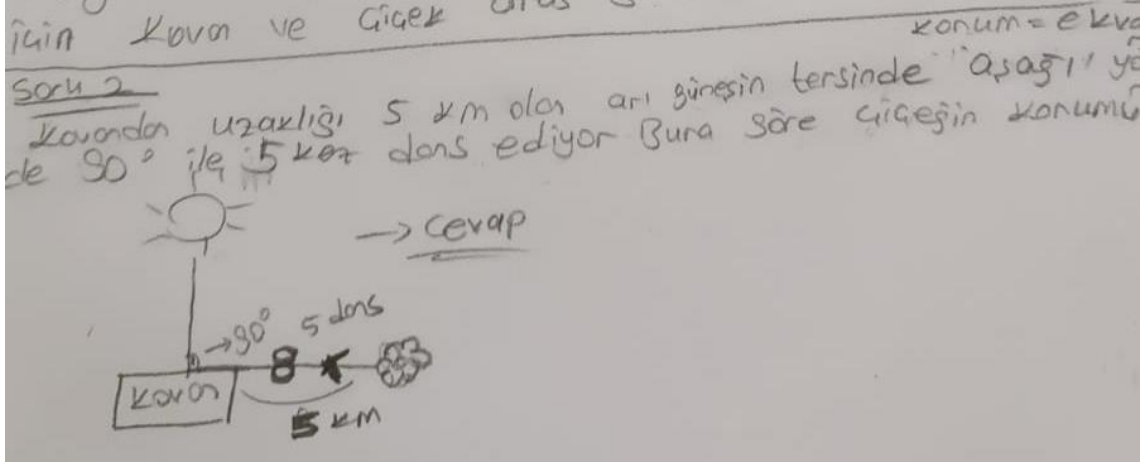
Elif: *Ekvator'da saat 12 de öğlen.*

İlknur: *Güneş yok akşamları dans yapmıyorlardır.*

Fatime: *Kovandan uzaklığı 5 kilometre olan arı güneşin tersinde aşağı yönde 90 derece ile 5 kez dans ediyor. Buna göre çiçeğin konumu nasıldır? Çiçeğin yerini dansla anlatın.*

İkinci soruya ait grubun çözümü Görsel 4.113 ile sunulmuştur.

Görsel 4.113 Grubun İkinci Soruya Ait Sözel İfadesi



Fatime üçüncü soruda amacı “Eski kovanda yapılan sallanma dansı ile yerleri bilinen iki çiçekten birine yeni kovan yapılması kararlaştırılsın. Bu durumda diğer çiçeğin yeri için yeni kovanda yapılacak sallanma dansına kaç sallanma yapılacağını bulma...” şeklinde okumuştur. Öğretmen “Yerleri bilinen çiçekler varsa hangi değişkenler biliniyordur?” şeklinde sorgulamıştır. Açı, yön ve kaç kez sallandıklarına dair tüm kritik noktalar ifade edilmiştir. İlknur “Açıları”, Fatime “Kaç kez sallandıkları yani kilometresi” ve Aydan “Yönü de biliniyor” şeklinde açıklamıştır.

Ardından orta düzeyden Elif açığı 30 derece şeklinde nicel değer vermiştir. Öğretim boyunca suskun kalan Hatice’ye nerenin 30 derece olduğu sorulunca doğru yeri gösterebilmiştir. Fatime ise gerçek yaşamdaki anlamını ifade ederek “Evet, çiçeklerin arasındaki o açı olmalı.” diye onaylamıştır. İlknur diğer açığı “90 derece olsun” deyince Fatime kovani tam alttakine taşımayı teklif etmiştir.

Sorunun nicelleştirilmesinden sonra çözüm aşamasına geçince muhakeme düzeyi zayıf olan Necati, *Kosinüs Teoremi* yardımıyla iki çiçek arası uzaklığın bulunabileceğini ifade etmiştir. Benzer şekilde orta düzeyden Elif de *Kosinüs teoremi*yle bulunabileceğini ek olarak ona bile gerek kamadan diklik çizme ile de yapılabileceğini ifade etmiştir.

Muhakemesi zayıf düzeyden Necati “Bir de geliş açısı lazım bize. *Kosinüs teoremi* ile A ’nın uzunluğunu bulabiliriz.” şeklinde orta düzeyden Elif ise “*Kosinüs teoreminden... hatta hocam kosinus teoremine de gerek yok. Şeyden diklik indirebiliriz. Şuraya diklik indiririz. Çünkü buranın uzaklığını bulabilirim. Hani 60 tan şurası üçtü ya. Evet. Şimdi 90’ın karşısında 3 ise 30’un karşısında yarısıydı ya 3 bölü 2. aslında burası 3 km değil de 6 km olsun en baştan beri. 6 orası ise burası o zaman 3 Şimdi buraya 2*

kalır. Şurası eğer 90'ın karşısında 6 ise, şurası 3 bura da 3 kök 3 Daha sonra buradan pisagor. Yani 27 artı 4 ve 31 eder. Bunu da kök içine alırsak. Kök 31. Çiçekler arasındaki mesafe bu.” şeklinde tüm işlemleri anlatarak matematiksel sonucu gerçek yaşama uygun da ifade etmiştir.

Aynı esnada yüksek üdzeyden Fatime de benzer işlemleri yapıp “Çok mantıklı. Şurası 5 zaten 60 dan A ya bir dik alırsız .. kök 31 kilometre olur.” şeklinde çözüme ulaşmıştır.

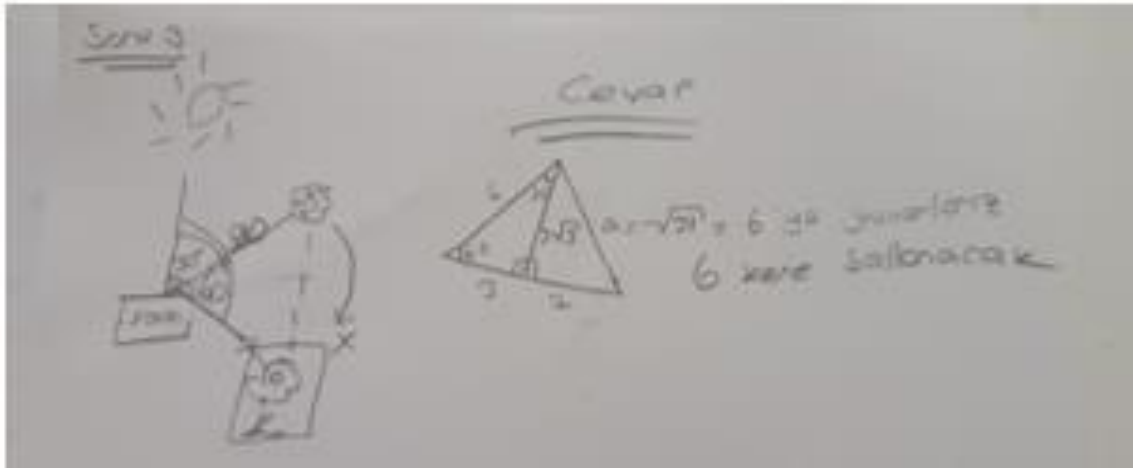
Tüm katılımcılar çözüme ulaştıktan sonra bulunan matematiksel sonucun gerçek yaşamda ne anlama geldiği sorgulanmıştır. Katılımcıların hepsi *iki çiçek arası uzaklık* şeklinde açıklayınca *arının kaç kez sallanacağı* sorgulanmıştır. Bunu elde edebilmek için elde edilen köklü sayının yaklaşık değerini bulmaları gerekmektedir. Muhakemesi yüksek olan Fatime ve orta düzeyden Elif birlikte matematiksel dayanaklar sunarak “Kilometre. 5.5 falan diyebiliriz. Kök 25 ile kök 36'nın arasında olduğu için. Kök 25 ile kök 36'nın arasında olduğu için 5.5 gibi bir sayı olur.”, şeklinde matematiksel sonucu açıklamıştır. Orta düzeyden Hamza “5.5'ten daha büyük 5.7.” diye daha net ifade etmeye çalışmıştır. Ardından arının kaç kez dans edeceğine yönelik bulunan sayıyı yuvarlayarak 6 kez dans etmeleri gerektiğinde uzlaşmışlardır (Görsel 4.114). Bu esnada Fatime gerçek yaşamdan Elif ise matematikten gerekçe sunmuştur. Görüşme kesiti aşağıda verilmiştir:

Fatime: 5 in bir tık üstü. 6 yapsın yolda giderken görür onu alır .

Elif: 5 in bir tık üstü yapsın 6 ya daha yakın olduğu için 6

İlknur : 6 kere yapsın.

Görsel 4.114 Grubun Üçüncü Soruya Ait Çözümü



Çiçek oyununa dair tüm sorular oluşturulduktan sonra bu duruma ilişkin açı ve kenarlara ait nicel değerler belli olmadığında nasıl yapılacağı, genel bir çözümün nasıl yapılacağı sorulunca soruda kullandıkları yöntemle benzer şekilde hep birlikte *Pisagor Teoremi* ve *eğim* demişlerdir. Bu esnada geçen görüşme kesiti aşağıdadır:

Fatime: *Pisagordan.*

Necati: *Eğimden, pisagordan*

Aydan : *Az önce Özel üçgenden yaptık*

Elif: *Trigonometri . Eğimden bulabiliriz*

Hamza: *Sinüs ve Kosinüs.. Hocam çember üzerindeydi. Ondan sonra işte yatay iz düşümü kosinüs oluyor, sinüs oluyor..*

Bu ifadelerin üzerine orta düzeyden Elif “*A çarpı cos alfa. sin alfa çarpı A....*” şeklinde işlemleri yapmaya başlayınca doğruluğunu nasıl kontrol edebileceği sorgulanmıştır. Aynı gruptan Hamza ve zayıf gruptan Necati hemen *Pisagor Bağintısı*yla kontrol etmişlerdir. Görüşme kesiti sonunda Elif tahtada *Kosinüs Teoremine* ilişkin formüle ulaşıncaya zayıf düzeyden Necati durumu hemen fark etmiş orta düzeyden Elif ise bu yolu hiç bilmediğini ifade etmiştir.

Hamza: “*Hipotenüsten pisagordan yapabiliriz. Biz de onu diyoruz*”

Elif: “*Ya da hocam, pisagor. A kare çarpı, kos kare alfa, artı. A kare çarpı, sin kare alfa.*”

Necati: “*Sadeleşecek 1 kalıyor* “

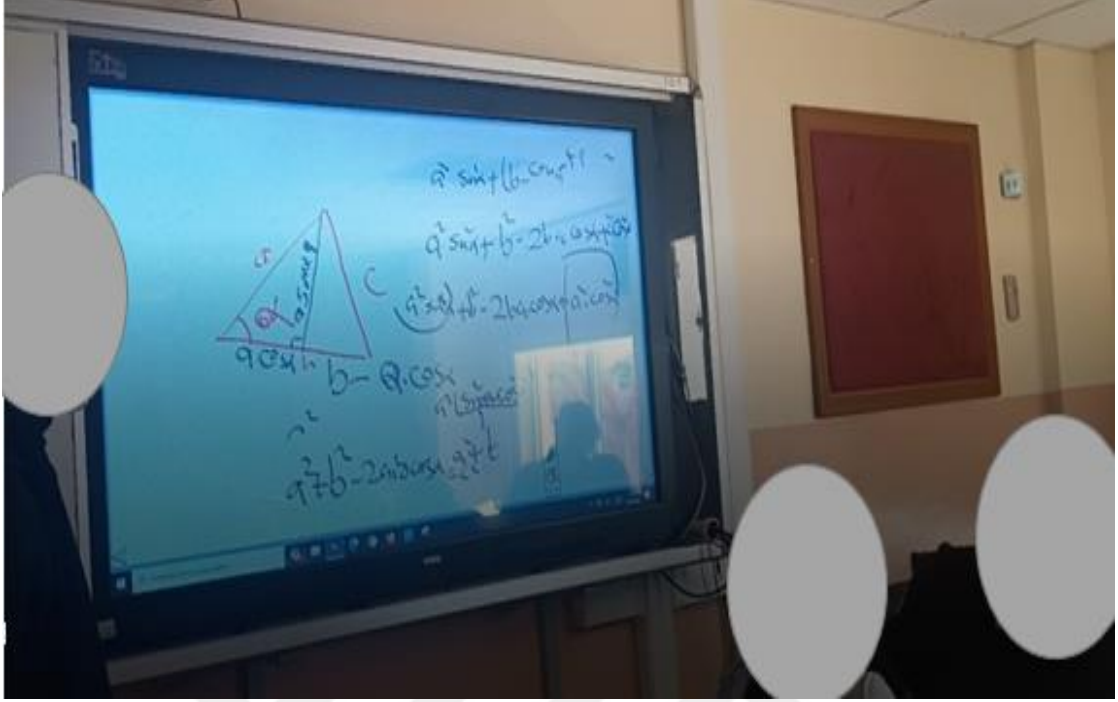
Elif: “*Sadeleşecek a kare eşit a kare. O zaman şurası B eksi A çarpı. Aradaki açıdan Hocam iki kare farkı çıkacaktı b kare eksi iki b cos alfa İki b çarpı a çarpı cos alfa A kare. Artı b kare. Eksi iki. Şey oldu bu eşittir C kare.*”

Necati: *Abi bildiğim bir ispat için hoca bizi yordu*

Elif: *Ben bilmiyordum.*

Öğretimde katılımcılar oyuna ait soru ve çözümleri oluşturduktan sonra Kosinüs Teoremine ilişkin formüle de benzer yolla ulaşmışlardır (Görsel 4.115).

Görsel 4.115 Elif'in Kosinüs Teoremine Ait İşlemler



4.4.3 Altıncı öğretim bölümü

Mimar Sinan'ın tasarımıyla daha az basıncı destekleyen temel çalışmasının matematiksel modellemesine dayalı *Depreme Dayanıklı Kolonlar* adlı altıncı öğretimde problemin kritik noktalarının ve amacının ortaya koyulmasında yüksek düzey muhakemeye sahip Fatime ön plana çıkarken, matematiği kullanma da diğer öğretimlerde de olduğu gibi orta düzey muhakeme grubundan Elif ve Necati sürece önderlik ettiği görülmüştür. Ayrıca muhakemesi zayıf grup temsilcilerinden Necati ise diğer öğretimlerde de olduğu gibi çözüme yönelik uygunsuz gerekçeleriyle de dikkat çekerken düşük İlknur ve Aydan kritik nokta ve amaca yönelik açıklamalarıyla ve matematiği kullanmayla ön plana çıkmıştır.

Problem durumunun katılımcılar tarafından okunmasının ardından, soruda verilenlerin ve istenenlerin belirlenmesinde muhakeme düzeyi yüksek olan Fatime, düşük düzeyden İlknur ve zayıf düzeyden Necati sırasıyla “*Basamaklar halinde yukarıya doğru. Bir de en az kaç basamak olabileceğini soruyor.*”, “*Hatta eski temelin basıncının yarısından bile az olmalıdır deniyor.*” ve “*Yere yapılan basıncı azaltmamızı istiyor tabanı genişleterek.*” şeklinde daha çok amaca yönelik ifadeler kullanmışlardır.

Metinde verilen basıncı açıklamaları istenince orta düzeyden Elif ve düşük düzeyden İlknur basınca ait formülü “*Toplam ağırlığı.. ağırlık bölü toplam yüzey alanı.*”

olarak ifade ederken zayıf düzeyden Necati ise birim oran olarak yorumlayıp formülü de gerçek yaşamda anlamlandırarak “*Daha doğrusu yüzey alanine düşen ağırlık .. Formül cismin kütlesi çarpı yerçekimi ivmesi bölü alan*” şeklinde ifade etmiştir.

Hamza ve Necati verilenleri ifade ederken muhakeme düzeyi yüksek Fatime ve düşük düzeyden İlknur amaca yönelik ifadeleri gerekçeli olarak belirtmişlerdir.

Muhakemesi orta düzeyden Hamza “*Bloklar da 10 santimdir. Karesel bölgedir.*”, zayıf düzeyden Necati ise “*Bloklar 1 ton ağırlığında*” şeklinde bloklara yönelik bilgi vermişlerdir.

Muhakeme düzeyi yüksek Fatime ve düşük düzeyden İlknur amaca yönelik kritik noktalar için *aynı yükseklik, simetriklik ve piramidal yapı* olması gerektiğini “*Yani basıncın en az olduğu yer öyle olacak. Çünkü yüzey alanı en fazla piramitte yukarı doğru küçülüyor ve ağırlıkları da üst üste topladığımız zaman yüzey alanı onu karşılayacaktır yani. Hocam, yapının ağırlığı 100 tonmuş. Yükseklik de aynıymış.*”, “*Eski temel piramit şeklindeymiş. Biz de piramit şeklinde kullanabiliriz. Çünkü kesit alanı daha büyük oluyor diğerlerine göre. Yeni temel her basamanda kullanılan blok sayısının önceki basamaktan bir fazla olur. Simetrik görünüm sağlayacaktır Yükseklikte aynı sıra mevcut. Sadece kesit alanını mecbur yükseltmemiz gerekiyor.*” şeklinde belirterek gerçek yaşamdan yüzey alanının büyümesiyle basıncın azalacağına dair gerekçe sunmuşlardır.

Verilenlerin ve amacın anlaşılabilmesi için katılımcılar isteneni bloklar aracılığıyla ifade göstermeleri ifade edilince kritik noktalardan *yapının ağırlığı, simetrik, her basamakta bir fazla blok ve piramidal bir yapı* ifade edilmiştir. İfade edilen şekil katılımcılar tarafından denenmiştir (Görsel 4.116). Aşağıda ilgili görüşme kesiti verilmiştir.

Muhakemesi düşük düzey İlknur kritik nokta ve amaca yönelik açıklamalarıyla dikkat çekerek “*Bunlar 10 santimdir. Birbirine eşmiş. Mesela buraya bir tane koyduysak oraya bir fazla. Buraya iki tane koyacakmışız. Yeni temelim her basamağında kullanılan blok sayısı bir öndeki basamaktan bir fazla olacak diyor. Yani buraya bir tane kullandıysan yanına iki tane kullanmak zorundasın.*” şeklinde açıklamıştır.

Muhakemesi orta düzeyden Hamza ise “*Yani bir piramit oluşturacaksın ya . Yani hocam en az bir blok koyacağız. Yani birinde bir blok koymuşsak İkincisine iki blok. Artı*

bir oluyor.” şeklinde ifade etmiştir. Diğer katılımcılar da hep birlikte “Yapı 100 tonluk.” demiştir.

Görsel 4.116 Katılımcılar Tarafından Piramidal Yapının Oluşturulması



Ardından metinde eski yapıya dair verilenlerin anlamlandırılması aşamasında muhakeme düzeyi düşük ve orta düzeyden İlknur ve Hamza sırasıyla “*Şu yazıyor. Eski temeller yapılır en alt kısmını tam kaplayacak şekilde zemine üst üste bloklar yapılır.*” ve “*Bloklar kaplayacak şekilde.*” şeklinde genel olarak ifade etmişlerdir.

Çözüme ilişkin yeni yapının nasıl olacağı ele alınca muhakeme düzeyi orta olan Elif yanlış çıkarım yapmış, muhakeme düzeyi yüksek olan Fatime ve zayıf düzeyden Necati ise gerekçe sunarak reddetmişlerdir.

Muhakeme düzeyi orta gruptan Elif “*O zaman 100 tane blok var. 100 ton tona böldük ya 100 tane blokumuz oldu.*” şeklinde ifade ederken yüksek düzeyden Fatime ve zayıf düzeyden Necati sırasıyla “*Şimdi temelleri siz nasıl yapacaksınız? Altına temel yapın. Şu sizin toprağın üstündeki yapınız. Altına temel yapacaksınız değil mi? Şimdi toprağın altına geliyorsunuz. Toprağın altında siz yapıları şöyle üstünden son yapıya koyacaksınız. Bu 100 tonsa sizin altındaki bloklarınızın da toplam ağırlığı 100 ton olmak zorunda mı?*” ve “*Onlar eskiden böyle yaptılar. Eski temel böyleydi. Yeni temel şey olacak, bu diyelim piramit şeklinde olacak. Üstüne de yapıyı inşa ettiler. Burada şey diyor, eski yapının üstte kalan kısmı 100 ton, alttakini söylememiş.*” şeklinde ifade etmişlerdir.

O esnada düşük düzeyden İlknur amacı eksik ele alırken ve orta düzeyden Hamza amaçtaki kritik noktayı tam olarak ifade etmiştir. Düşük düzeyden İlknur “*Biri diğerinin basıncından az olacak diyor. Biri diğerinin basıncının yarısı olacak diyor.*” şeklinde ifade etmişken orta düzeyden Hamza “*Yarisından daha az*” diye ifade etmiştir.

Bloklarla istenen yapının oluşturulmasında kritik noktalar Hamza tarafından ifade edilmeye devam edilirken muhakeme düzeyi zayıf olan Necati kriterleri dikkate almadan amaca yönelik yapılar yapmaya çalışmış, Fatime ise kriterleri ifade ederek Necati'yi bu konuda yönlendirmiştir. Görüşme kesiti ve Görsel 4.117 aşağıda verilmiştir:

Hamza: *Merdiven gibi olmuyor mu hocam? Bunlar birbirine eşit. Yani bunlar hani bunların kenarları ile bunlar özdeş.*

İlknur: *Temeli sen yanına mı yapıyordun?*

Necati: *Hocam hangisi daha dayanıklı? Bu mu? Yoksa bu mu? Ben mimarım. Bağımsız hareket etmek istiyorum. Temel yüksekleri aynı.*

Fatime: *Yerin altında. Yerin altında. Kare tabanlı, dikdörtgensel bir prizma şekli.*

Görsel 4.117 Piramidal Yapının Denenmesi



Çözüme yönelik elde edilen yapının elde edilmesinden sonra basınca ilişkin matematikleştirme yapılmıştır. Bu esnada zayıf düzeyden Necati blokların ağırlığını dikkate alarak hesaplamayı düzenletmiştir. Yüksek düzeyden Fatime ve orta düzeyden Elif sadece üstteki yapı ve zemine değen yüzey alanını dikkate alarak “*Şunda daha çok var. Şurada daha az var. Hocam buranın taban alanına S diyelim. Burası 3S olur. Basınç 3 kat.*”, Elif ise “*6 bölü S. Burası 6 bölü 3S.*” şeklinde açıklama yapınca zayıf düzeyden Necati “*Bir saniye bir saniye. Sen bunu 6 bölü S dedin. Yeni eklediğin bloklarıda hesapla burada . Yeni eklenen bloklara hesapla.*” şeklinde blokları da dikkate almaları gerektiğini ifade etmiştir. Elif hemen işlemi düzenleyerek yeni basınca dair “*9 bölü 3S. 3 geldi. Ama yarısından az olması gerekiyor.*” demiştir.

Ayrıca kriterlerde yüksekliğe dair verilenleri gerçek hayatta anlamlandırmada orta düzeyden Elif ve zayıf düzeyden Necati “*kare tabanlı ama yükseklik farklı*” deseler de İlknur “*taban 1 metrekare yükseklik 10 cm denilince tabanın bir kenarını da 10cm. 10cm = 100 santimetrekare = 1 metrekrare*” şeklinde yanlış çıkarım yapmış ve alan hesabında birimleri çevirmede katılımcılarla birlikte yaparken zorlanmıştır. Bu esnada herkes yapmaya çalışırken Necati ve Fatime yanlışlığı fark etmiştir. Görüşme kesitinde verilmiştir:

Necati: *Çünkü şöyle düşün. Bu 5'e 5 ama uzunluğu 10. Şimdi bu karesel.*

Elif: *Bu toplar 10 santim yüksekliğine sahip bir metrekare karesel bölge. 10 santim yüksekliğine sahip*

İlknur: *1 metre 100 cm 10 ile neyi carparsan 100 yapar işte bir kenarı 10 cm*

Elif: *10 çarpı 10 A kare. A kareden mi yapıyorsunuz normalde alanı?*

İlknur: *Alanı 100 cm kare*

Necati: *Bir metre kare nerede?*

Hamza: *Bir kenarı 10 cm daha kolay*

Fatime: *0.1 metre ya da 10 santim*

Necati: *Hocam 1 metre kaç santim? 100 santim değil mi?*

Hamza: *Ne ile neyi çarparsa yüz verir.*

Necati: *1 saniye. Demek ki bunun şey yani. Şimdi bunun altı kare ya. Demek ki yani bu 100 santim. karekökünü alalım. Bir kenarı 0.1 metre*

Elif: *0,1 çarpı 0,1. Bu sefer şey oldu. 0,01 oluyor.*

Fatime: *Bir kenarı 1 metre hocam*

Elif: *1 metre. Hiç sayı vermesek metre cinsinden çarpsak Benim hem metrekareyi sağlamam lazım. Hem de iki saya çarpman lazım ki yine karesi bir olsun. E bu hangi sayı oluyor? Bir çarpı bir, yani bir metre çarpı bir metre, bir metre karesi.*

Eski ve yeni basıncın hesaplanmasında orta düzeyden Elif ve düşük düzeyden Aydan hemen matematiksel işlem yapmışlardır. Elif “*Eski basınç 100 ton artı 3 ton.*”, Aydan ise “*3 ton var. Her birinin temelini bulabiliyoruz. 103 ton oldu bölü yüzey bir metrekare*” şeklinde açıklamışlardır.

Yeni basıncın hesaplanmasında ise Aydan “3 Yüzey alanı. 3 tane kare kullandık.” ve Elif “Ama tam bölünmüyor. 106 bölü 3 yaklaşık” şeklinde hesaplama yapmışlardır.

Ancak muhakemesi yüksek düzey temsilcilerinde Fatime kaç basamak olduğu bilinmediği için basamak sayısına n değişkenini atayarak işlemi yapmak istemiştir. O esnada muhakemesi orta düzeyden Elif *ardışık sayıların toplam formülünü* hatırlatıp sonucun gerçek yaşamdaki blok sayısını vereceğini gerçek yaşama uygun açıklamıştır.

Hamza ve Necati sırasıyla blok sayısını bilebileceklerini “Basamak sayısını bilebiliriz” ve “3 basamaklı” şeklinde ifade ederken Fatime “Normalde bilemeyiz, eklemeye göre n , $n+1$ diyelim” ve Elif “O zaman toplam şey n çarpı $n+1$ bölü 2. Toplam şey kullanacağım blok sayısı” diye açıklamıştır.

Bilinmeyen basamak sayısına göre ele alınınca eski basınç düşük düzeyden Aydan ve zayıf düzeyden Necati tarafından işlem matematiksel olarak *100 artı n ton bölü 1* şeklinde bulunmuştur.

Ayrıca Necati basamak sayısının bilindiğini iddia edince orta düzeyden Elif bu bilginin ağırlık için de gerekli olduğuna dikkat çekmiştir. Necati “Biz biliyoruz kaç basamaklı olduğunu şey diyor ya burda karesel ya metre kare bulduk” ve Elif “Ama toplam ağırlık için de gerekli n çarpı, n artı ve bölü 2” demiştir. Hamza da “Hocam şunu ekleyebilir miyim? Arkadaşlar demin formüle eklediler. 100 artı n . Bu yeni olmuş. Şimdi bölü çekiyoruz ve şunu diyoruz. 1 çarpı n . Yani bunun alanı bir, bir de ben kaç blok eklediğimle çarpayım ki ben bunun yüzey alanını bileyim.” şeklinde formülü gerçek yaşamda anlamlandırarak desteklemiştir.

Orta düzeyden Elif en alttaki yüzey alanıyla basamak arasındaki ilişkiyi fark etmiş ve aynı gruptan Hamza’ya açıklamıştır. Hamza “Başka bir şey ekleyecektim de hocam. Necatinin dediğine göre o da olabilir. Şimdi bir piramit normalde bir blok şöyle ondan sonra iki blok ondan sonra üç blok oluyor ya. Şimdi bunların toplamı altı blok. Ben aynen bir blok eklersem bunlar yedi blok olur. O zaman ben o yedi bloğa göre bir piramit oluştururum ve n eksili bir şeyler yapmam lazım. Ama benim dediğim bence mantıklı 100 artı n ise bölüyorum bir ya benim alanımla kaç tane blok eklediğimi çarpayım o zaman alanımı bulurum.” şeklinde ifade ederken Elif “Ama ağırlığı öyle olmayacak. Yani yüz artı n olmayacak. Şimdi burada beş tane var ya beş basamak. Biz burada sayısını bulmamız gerekiyor ki toplam ağırlığını bulabiliriz. Çünkü her biri bir tane ya. Yani bir

ton. Mesela burada bizde 5 varsa hani bir tane toplam formülü vardı. 5 çarpı 6 bölü 2.” şeklinde açıklar.

Bu esnada orta düzeyden Elif ve zayıf düzeyden Necati *ardışık toplam formülünü* başka yollardan elde etmişlerdir. Elif “Mesela burada eğer ben n artı bir dersem, şurası n artı bir. Burada iki ise burası n eksi bir. Sonra biz bunları topladığımız zaman yine n artı bir gelecek.”, Necati “Tamam işte toplam formülü kanıtı” şeklinde açıklarken düşük düzeyden Aydan da “Sonundan bir başına alıyoruz.” şeklinde desteklemiştir. Necati ise “Diyelim Elif’in yaptığı gibi. 1’den n ’e kadar. O zaman ben n tersten yazarım. 1 artı işte 2 artı 3 artı 4 nokta nokta nokta $n-1$. Artı n . Tamam. Ben onu tersten yazarım. Yine bir şey fark eder mi? Fark etmez. Toplamlarda değiştirdim bir şey fark etmez. Sonuçta hepsi doğal sayı. N artı $n-1$. Hocam ilk önce artı atıyor, ondan sonra... Altı topladı, sonra iki. Ondan sonra altı topladı. Ne oldu? En artı bir. İki artı, en eksi bir. Kaç oldu? Artı, en artı bir. Nokta, nokta. Kaç oldu bu? Diyorum ben buna, R dedim. Altında ne oldu? Yine R . İki R . Burada kaç tane oldu? N artı bir. Bi saniye eşittir. N artı bir. Ve kaç tane oldu? N . Çarpı N . Bölü iki.. Şimdi bu iki R ya. Ben burada toplamını bulmak istedim. R eşittir. N artı bir. Çarpı N bölü iki..” şeklinde ikinci yoldan ispatını yapmıştır (Görsel 4.118 ve Görsel 4.119)

Görsel 4.118 Elif’in Ardışık Sayı Toplamına Dair İspatı

Handwritten mathematical proof for the sum of the first n natural numbers. The proof shows the formula $P = 1 + 2 + 3 + \dots + n$. Then, it calculates the sum for $n=100$: $100 + 100 = 200$, then $200 / 2 = 100$. Below this, it shows the sum $1 + 2 + 3 + \dots + 56$ with a bracket indicating the sum of the first 56 numbers.

Görsel 4.119 Necati'nin Ardışık Sayı Toplamına Dair İspatı

Handwritten mathematical proof for the sum of an arithmetic series. The text shows:
 $R = 1 + 2 + \dots + n$
 $R = 1 + n + \dots + 1$
 $(n+1) + n$
 $2R = (n+1) \cdot n$
 $R = \frac{(n+1) \cdot n}{2}$

Orta düzeyden Elif toplam ağırlık ile formülü ilişkilendirmiştir. Elif “*n çarpı n artı bir bölü iki bu toplam ağırlık. Tabii çarpı bir ya.*” şeklinde açıklamıştır.

Zayıf düzeyden Necati kare ifadesinden dolayı zemine değen yüzeyi yanlış çıkarım yaparken orta düzeyden Elif ve Hamza düzeltmiştir. Necati “*Bölü. En kare. n kare*” şeklinde ifade ederken Elif ve Hamza ise sırasıyla “*Hayır n.*” ve “*Bir metre kare ya zaten.*” şeklinde açıklama yapmışlardır.

Muhakemesi zayıf olan Necati istenileni anlamlandırırken İlkur “*Eski yapı diğerinin 2 katı olacağı için...*” şeklinde ifade ederken Necati de benzer şekilde “*Yeninin basıncı, eskinin basıncının yarısından az olmak zorunda.*” demiştir. Ancak orta düzeyden Hamza matematikleştirmede zorluk yaşamıştır. Hamza “*Yeni temelini oluşturacağı basınç, eski temelin basıncının yarısından bile az olmalıdır. Yani ben yeni yarıya böleceğim, yarıya böldüm, sonra da eskiden küçük yapmam lazım. Yani şu eski P yeni diye bir yerine yaz. o zaman bu mu yarı olacak?*” şeklinde sorgularken kendinden emin değildir.

O esnada orta düzeyden Elif ve yüksek düzeyden Fatime matematiğe aktararak yol göstermiştir. Görüşme kesiti, Elif’in çözümüne ait görsel (Görsel 4.120) ve genel çözüm (Görsel 4.121) aşağıda verilmiştir:

Elif: *Hocam eşitsizlik geliyor ama*

Fatime: *Az olaksa eski basınç yeniden büyük olacak.*

Hamza: *O zaman işareti değiştiriyorsun.*

Fatime: *Hayır değiştirmiyorsun. Öyle.*

Hamza: Hocam ben bunu okuyum ben bundan bişi anlamadım. Aynen. Yeni temelini oluşturalım, ben bunlara X dedim. X . Eski basıncın yarısından bile az olmalı. Eski basınca Y dedim. Tamam. X , yani Y bölü 2'den... Az olacak.

Fatime: Az olacak. Küçük olacak. X küçük olacak. Böyle Y küçük olur . y bölü iki büyüktür, x olur.

Elif: Bölü 2 oldu Çünkü 1 ile çarptık 2 oldu. Eskinin de yüz artı. n çarpı n artı bir bölü iki bölü n . Sonra şurası iki yüz artı n çarpı n artı bir bölü iki n . İkileri sadeleştirebiliriz. Her zaman sadeleşmez ama eğer negatif değilse bunu döndürmemiz gerekiyor şey için. Çünkü n pozitif bir basamak olduğu için atabiliriz Ama eğer n ise bunu sadeleştiremez. Çarpı n bölü Tamam. Şunu şu tarafa atalım. 100 eksi. M bölü. Kaçtı? Şöyle kalacak. 1 oldu Bunu da n ile genişletmemiz gerekiyor. Şimdi n için ayrı bir işlem yapıyoruz. Şurası da iki. Zaten $n...$ çarpı n artı bir bölümü iki n idi . $2n$ aşağıda. Sonra götüreceğiz zaten. $100 n$ artı n kare. Büyük eşit. 200 artı n kare artı n . Şimdi n kareye götürebiliriz. n kareler gitti Şunu şu tarafa attık . 99. değil mi? Evet. Şuda 200 kalsın. Bunu bölebirim. N bölü 200 bölü 99 yaklaşık 2 virgünlü bir şey gelir. 299 böyle bir şey gelir.

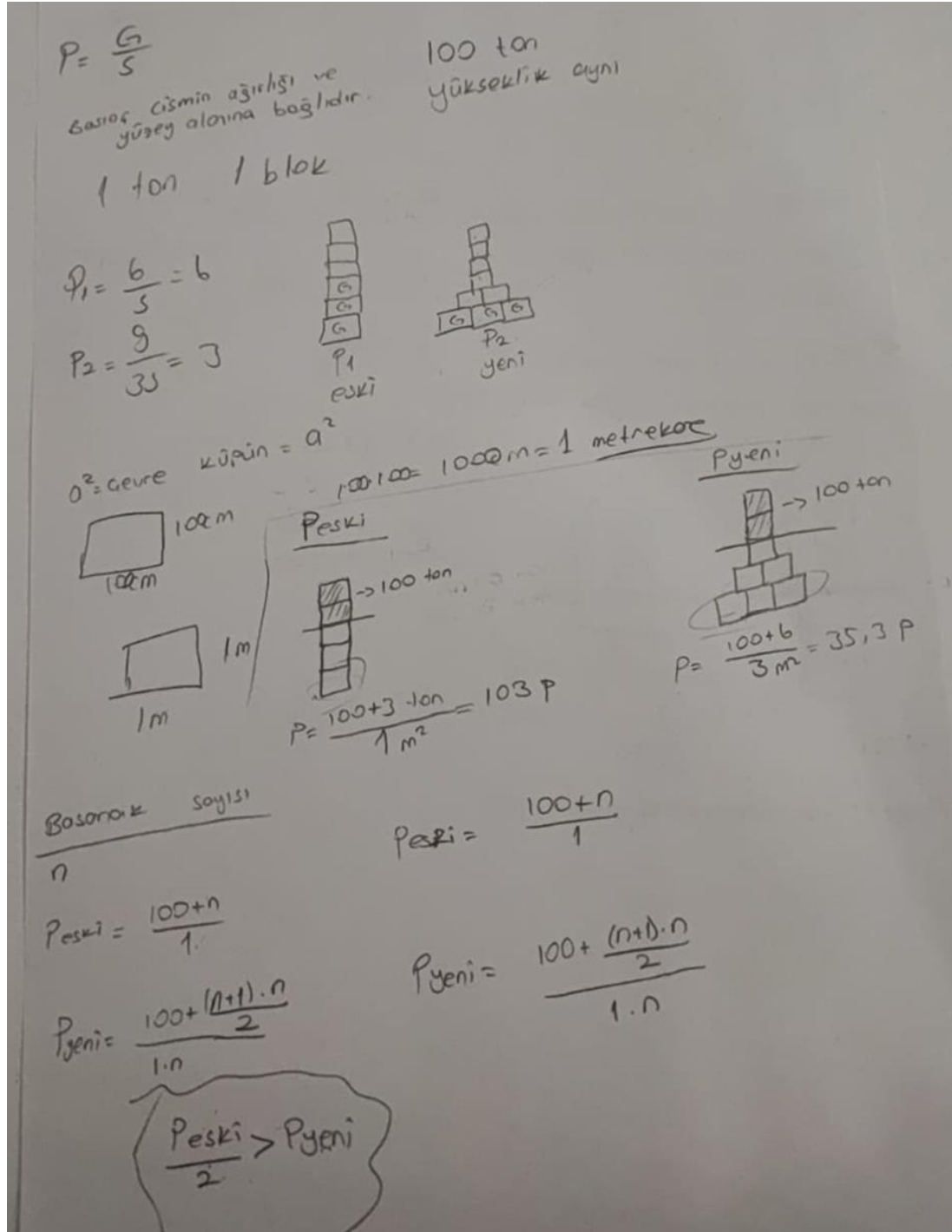
Görsel 4.120 Elif'in Eşitsizliği Tahtada Çözümü

The image shows a digital whiteboard with a blue background. Handwritten in white and yellow, the following mathematical steps are visible:

$$\frac{P_c}{2} > P_y \quad n > 0$$
$$\frac{100+n}{2} > \frac{100 + \frac{n(n+1)}{2}}{n}$$
$$\frac{100+n}{2} > \frac{200 + n(n+1)}{2n}$$
$$100+n > 200 + n(n+1)$$
$$99n > 200 + n^2 + n$$
$$99n > 200 + n^2 + n$$
$$98n > 200 + n^2$$
$$n > \frac{200}{98}$$

There is a small diagram of a parabola $y = x^2 + x + 100$ with its vertex at $(-0.5, 99.25)$. The final result is circled in yellow: $n > 3/4$.

Görsel 4.121 Katılımcıların Eşitsizliğe Dair Ortak Çözümü



Çözümün ardından basamak sayısının gerçek hayattaki anlamına dair orta düzeyden Hamza, Fatime ve İlknur doğru ifadeler de bulunmuşlardır.

Muhakemesi orta düzeyden Hamza “Basamak sayısı negatif olmaz tam sayı olması lazım. Pozitif tam sayı. Ya yaş gibi düşünün hocam.”, Fatime “Pozitif tam sayı olmak zorunda.” ve Elif “Pozitif olmak zorunda. Evet.” şeklinde açıklamışlardır.

Basamak sayısının değeri belirlenirken zayıf düzeyden Necati zorlanmış ve ikna etmek için Elif matematiksel gerekçe sunmasına rağmen o kendi kendine sayı doğrusu çizerek ikna olmuştur. Görüşme kesiti aşağıda verilmiştir.

Elif: *Büyüktür. O zaman n en az 3 olabilir.*

Necati: *2 olabilir. Hayır, en az 2 virgüli bir şey olabilir. En az 2 virgül.*

Elif: *Evet. Bak şimdi. Tam sayı n. n 3 olur. 4,5 sonsuza kadar. Zaten en az basamağı istemiyor muydu ?*

Necati: *Şimdi diyelim bir saniye. Ben size bir d doğrusu çizdim. Burası işte 2 virgül. Bir saniye. İki virgül şeyden büyük olacak. Pardon 2 olmayacak Tamam.*

Fatime: *Yapının eski ve yeni temeline göre en az kaçınıcı basamakta şartları taşıyacağı belli 3..*

Matematiksel olarak elde edilen aralık şeklindeki sonucun gerçek hayattaki anlamına dair *basamak sayısının 4, 5 gibi 3'ten büyük sayılar olduğunda basıncın nasıl olacağı* sorgulanınca yüksek düzeyden Fatime açıklarken zayıf düzeyden Hatice gerçek yaşamdan açıklamıştır. Orta düzeyden Elif ise değerler aracılığıyla ifade etmiştir.

Fatime: *Hocam ben oradan bir şeyler yapıyordum da, öyle. Basınç yarısından az olur.*

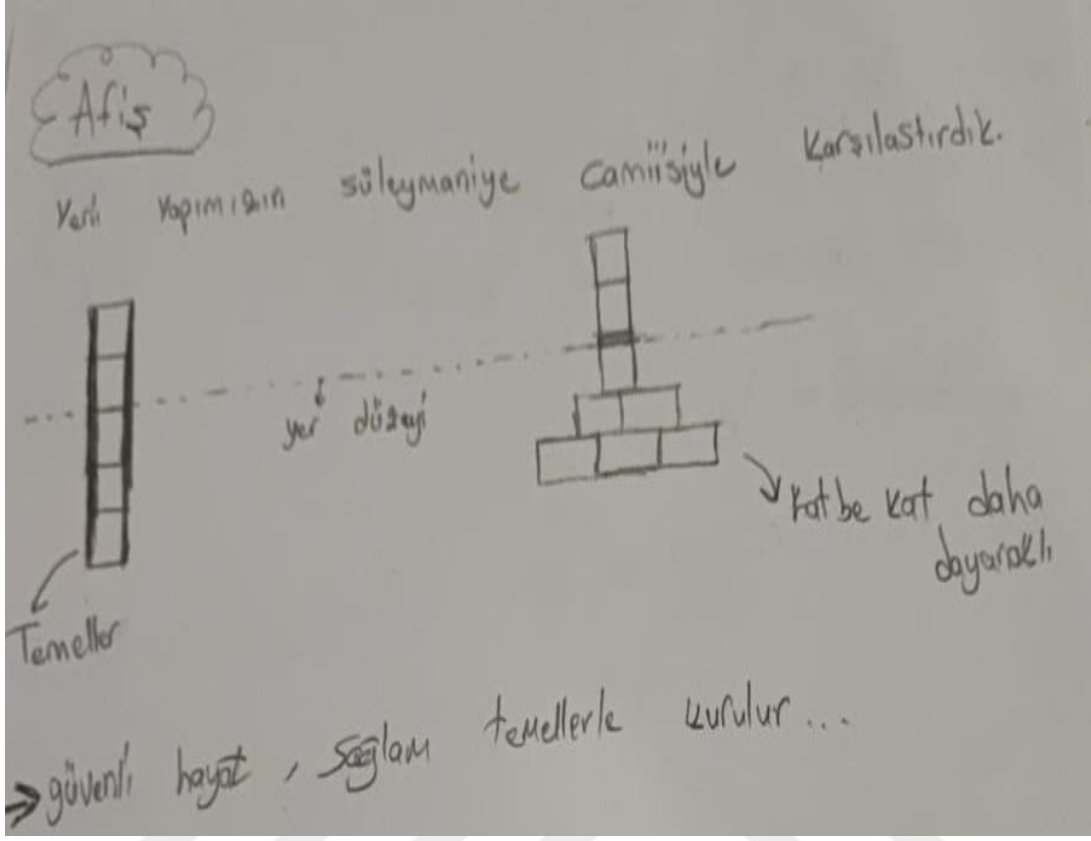
Hatice: *Evet. Azalırdı. Niye? Çünkü yüzey alanı artar.*

Elif: *n 1 için eşit olurdu. Diğerlerinde azalırdı. Çünkü yüzey alanını arttırmış oluyoruz .*

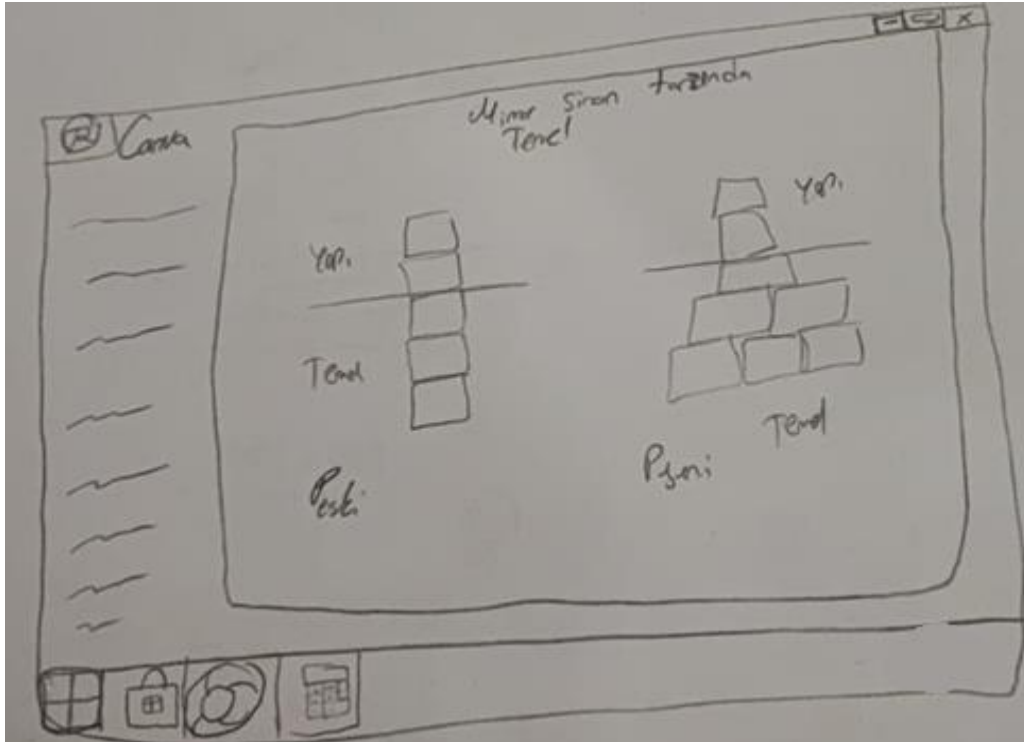
Hamza: *Aynen. İkisine de ikiyi yazdığımız için ikisi de aynı oranda arttıklarında azalacağı için değişim olmuyor.*

Elde edilenlere göre her bir katılımcının yaptığı afiş aşağıda görsellerle verilmiştir (Görsel 4.122 – Görsel 4.127).

Görsel 4.122 Hamza'nın Afişi



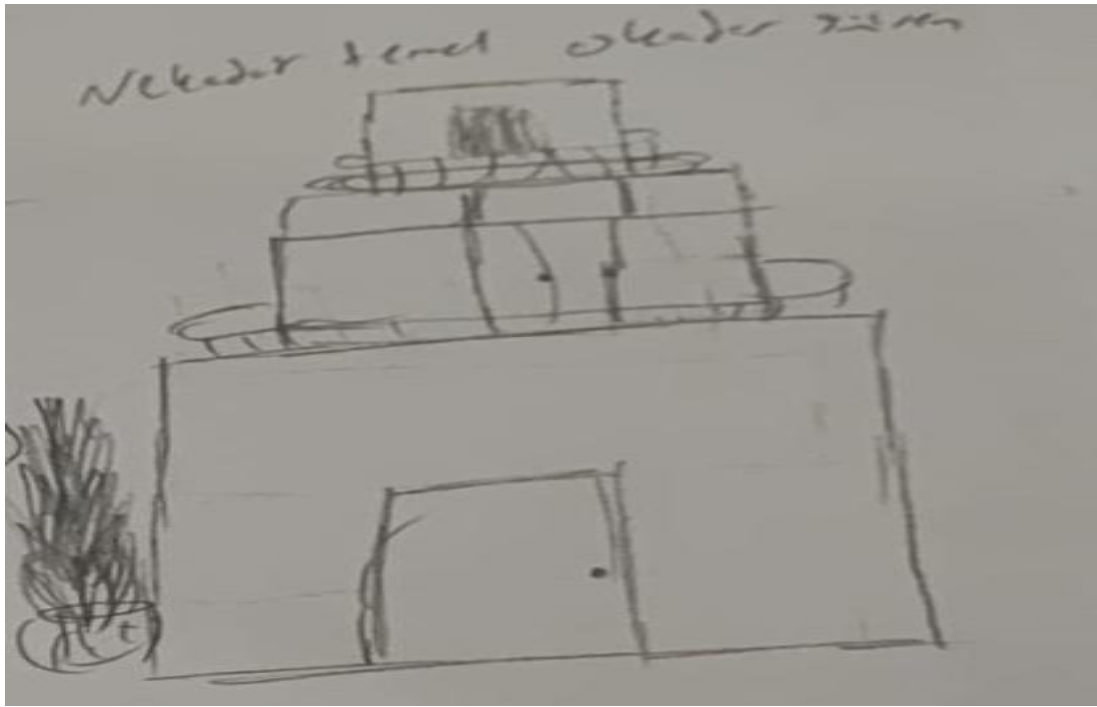
Görsel 4.123 Necati'nin Afişi



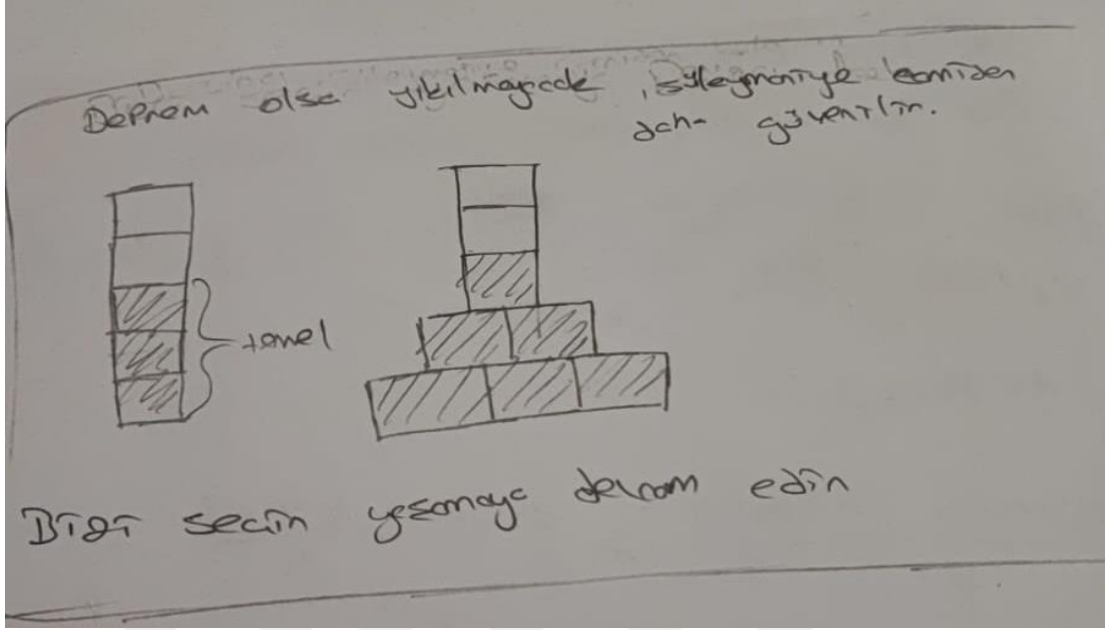
Görsel 4.124 Elif'in Afişi



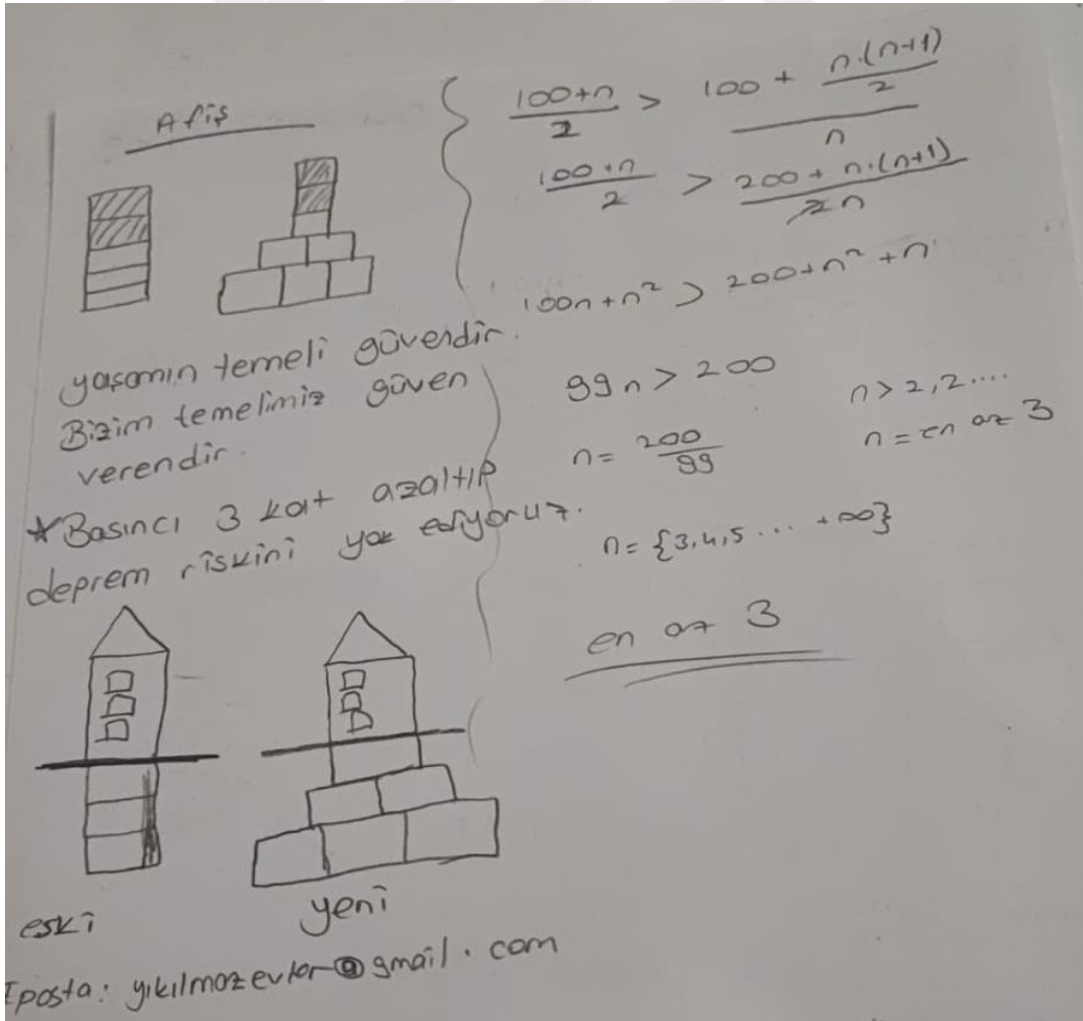
Görsel 4.125 Hatice'nin Afişi



Görsel 4.126 Aynur'un Afişi



Görsel 4.127 Fatime'nin Afişi



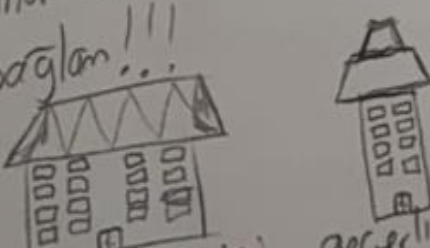
Görsel 4.128 İlknur'un Afişi

$$\frac{100+n}{2} > \frac{100+n(n+1)}{2}$$
$$\frac{100+n}{2} > \frac{100+n(n+1)}{2n}$$
$$\frac{100+n}{2} > \frac{200+n(n+1)}{2n}$$
$$100n + n^2 > 200 + n^2 + n$$
$$99n > 200$$
$$n > \frac{200}{99}$$
$$n > 2,2$$

n en az 3 olabilir

$n \in [3, \infty)$

Mimar Sinan'ın Temelinden Bile Sağlam!!!



Her türlü bina için geçerli, 8,9 Depremlere bile dayanıklı.

İletişim =
E-posta = yilmaz@gmail.com

4.5 Son Görüşmeye İlişkin Bulgular

Bu bölümde katılımcıların PISA-3 testi sonrası matematiksel muhakeme yeterliliğini incelemek amacıyla yapılan son görüşmeye ait bulguları önceki görüşme ve öğretilere ait bulgularla karşılaştırmalı olarak sunulmuştur.

4.5.1 Grup 1'nin temsilcisi olan Fatime'nin son görüşme bulguları

Bu bölümde Grup 1'in temsilcisi olarak seçilen Fatime adlı katılımcının PISA-3 testine dayalı gerçekleştirdiği orta görüşmeye ait matematiksel muhakeme yeterliğine ilişkin bulguları araştırma sürecinde gerçekleştirilen görüşme ve öğretilere ait bulgularla karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

Fatime'nin son görüşmeye ait bulguları incelendiği zaman tıpkı önceki görüşme ve ara öğretilerde görüldüğü üzere matematiksel muhakeme yeterliğine dair hiçbir güçlük yaşamadığı görülmüştür.

Sorularda verilenleri ve istenileni gerçek yaşamda anlamlandırırken bağlama dair ifadeler sunabilmektedir. Örneğin *Bisiklet Sürücüsü Hale 2* sorusunda verilen *ortalama* kavramını diğer görüşmelerde olduğu gibi gerçek yaşama dayalı olarak anlamlandırabilmiştir. Ön görüşmedeki *Gazete Satma 1* sorusunda *ortalama* kavramını *ortalama satılan gazete sayısı* sorulunca “*Toplam satılan gazeteleri toplam hafta sayısına bölme...*” şeklinde ifade edip *aritmetik ortalama* ile ilişkilendirmesine rağmen orta görüşmedeki *Büyüme* sorusunda farklı bir şekilde “*yaklaşık*” olarak ele alabilmiştir. Son görüşmede ise “*Ortalama hızı mesela ben buradan oraya kadar gidiyorum. Yolda mesela durmuş olabilirim ya da hızımı azaltıp yükseltmiş olabilirim. Toplam aldığım mesafeyi toplam zamana bölersem ortalama hızı bulurum ben. Bunun içinde durma zamanının da dahilmesi gerekir*” şeklinde açıklayarak hem gerçek yaşama uygun olarak durma, hızlanma ve yavaşlamayı dikkate aldığını hem de matematikteki *aritmetik ortalama* formülü ile ilişkilendirerek ifade edebildiğini açığa çıkarmıştır. Ayrıca ilk soruda “*Burada Fuji Dağı'na tırmanmak her yıl sadece 1 Temmuz'dan 27 Ağustos'a kadar halka çıkmış. Bu zamanda da yaklaşık 200 bin kişi tırmanıyormuş. Bize o günde ortalama kaç kişinin tırmandığını soruyor.*” şeklinde istenen olarak verilen *ortalama* kavramını “*yaklaşık kaç kişi onu istiyor*” şeklinde yine bağlama dayalı açıklayabilmiştir. Bu durum soruda verilen *ortalama* kavramını soru bağlamına dayalı olarak hem gerçek yaşamla hem de matematikle ilişkilendirebildiğini göstermiştir.

Fatime değişkenlerin değerini bulup matematiksel sonuca ulaşırken uygun gerekçe sunabilmektedir. Örneğin son *En İyi Araba 2* sorusunda her bir arabaya ait değişken değerlerini bularak katsayılarını kendi belirlediği formülde yerine yazıp tüm arabalara ait toplam puanları bulabilmiştir (Görsel 4.129).

Görsel 4.129 Fatime'nin En İyi Araba 2 Sorusuna Ait Çözümünde Değişkenleri Belirleyebilmesi

EN İYİ ARABA

Bir araba dergisi, yeni arabaları değerlendirmek için bir puanlama sistemi kullanmakta ve "Yılın Arabası" ödülünü en yüksek toplam puanı olan arabaya vermektedir. Beş yeni araba değerlendirilmiş ve aldıkları puanlar tabloda gösterilmiştir.

Araba	Emniyet Özellikleri (E)	Yakıt Verimliliği (Y)	Dış Görünüş (D)	İç Bağlantılar (İ)
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	2
N1	1	3	3	3
KK	3	2	3	2

Puanlar aşağıdaki şekilde yorumlanmaktadır:

3 puan = Mükemmel 2 puan = İyi 1 puan = Orta

Soru: "Ca" arabasının üreticisi, toplam puan hesabı için kullanılan kuralın adil olmadığını düşünüyor. Toplam puanı hesaplamak için öyle bir kural yazınız ki ödülü kazanan araba "Ca" olsun. Sizin kuralınız dört değişkenin hepsini kapsamalı ve aşağıdaki eşitlikte bırakılan dört boşluğa pozitif sayılar yerleştirerek kuralınızı yazmalısınız.

Toplam puan = $\frac{1}{4}E + \frac{1}{4}Y + \frac{1}{4}D + \frac{1}{4}I$

$x_1E + x_2Y + x_3D + x_4I$

$Kural = 2.E + 1.Y + 1.D + 4.I$

Ca = $3.2 + 1.1 + 1.2 + 4.3 = 21$

M2 = $2.2 + 2.1 + 2.1 + 2.2 = 16$

Sp = $3.2 + 1.1 + 3.1 + 2.2 = 18$

N1 = $2.1 + 3.1 + 3.1 + 3.4 = 20$

KK = $2.1 + 2.1 + 3.1 + 4.2 = 15$

Ca

Görsel 4.129'dan Fatime'nin soruda sembollerle verilen değişkenlerin nicel değerlerini bağlamdan tek tek bulabildiği ve her bir değişkene ait değerleri belirledikten sonra formülde uygun yerine yazarak cebirsel manipülasyon yapabildiği de anlaşılmaktadır.

Fatime verilen problemde amaca dair kritik noktaları da ayırt edebilmektedir. Örneğin *Fuji Dağı'na Tırmanış* sorusunda “1 Temmuz'dan 27 Ağustos'a kadar” ifadesini ele alıp çözümde “ortalama gezen kişi sayısı” istenince Temmuz ayını ve Ağustos'ta geçen süreyi ayrı ayrı hesap edip toplam süreyi ele alabilmiştir. Fatime bu durumu “Bize o günde ortalama kaç kişinin tırmandığını soruyor. Şimdi 1 Temmuz'dan 27 Ağustos diyor. Önce Temmuz ayını bitirmiş burada. Ben ortalama dediği için hani her ay 30 gün mantığıyla 30 gün olan kaldı. Arada 29 gün vardı. Sonra bir astostan da 27 astosa kadar olan kısmı aldım. Sonra bu günleri topladım 55 buldum.” şeklinde gerekçeli olarak ifade etmiştir.

Ayrıca Fatime değişkenleri birbiriyle gerekçeli olarak ilişkilendirebilmekte ve bu ilişkilendirmeyi gerçek yaşamdan ifadelerle anlamlandırabilmektedir. Örneğin *Fuji Dağı'na Tırmanış* sorusunda kişi sayısı ve süreyi ilişkilendirerek günlük ortalama kişi sayısı ortalama kavramına dayalı olarak matematik sonuca ulaştırmıştır (Görsel 4.130). Görüşme kesitinde “..günleri topladım 55 buldum. 200 bini 55'e böldüm. Önce hani küçük çıkması için 200'de 5'i sadeleştirdim 5'den. 40'a 11 çıktı, onları böldüm yaklaşık olarak 3.3 gibi bir sayı çıktı. 3600 civarı bir sayı buldum. Ortalama dediği için zaten en yakın 3400 vardı buna. Bu yüzden ben 3400'e işaret ettim.” şeklinde matematiksel işlemleri tek tek açıklamıştır.

Görsel 4.130 Fatime'nin Fuji Dağı Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

Fuji dağına tırmanmak her yıl sadece 1 temmuzdan 27 ağustosa kadar halka açıktır. Bu zamanda yaklaşık 200 000 kişi tırmanır. Fuji dağına günde ortalama kaç kişi tırmanmaktadır?

A 340 B 710 C 3400 D 7100 E 7400

200000
55

1 Temmuz 29 gün
1 ağ 27 ağ
26 gün

29 + 26 = 55

200 000 = 3636,22...

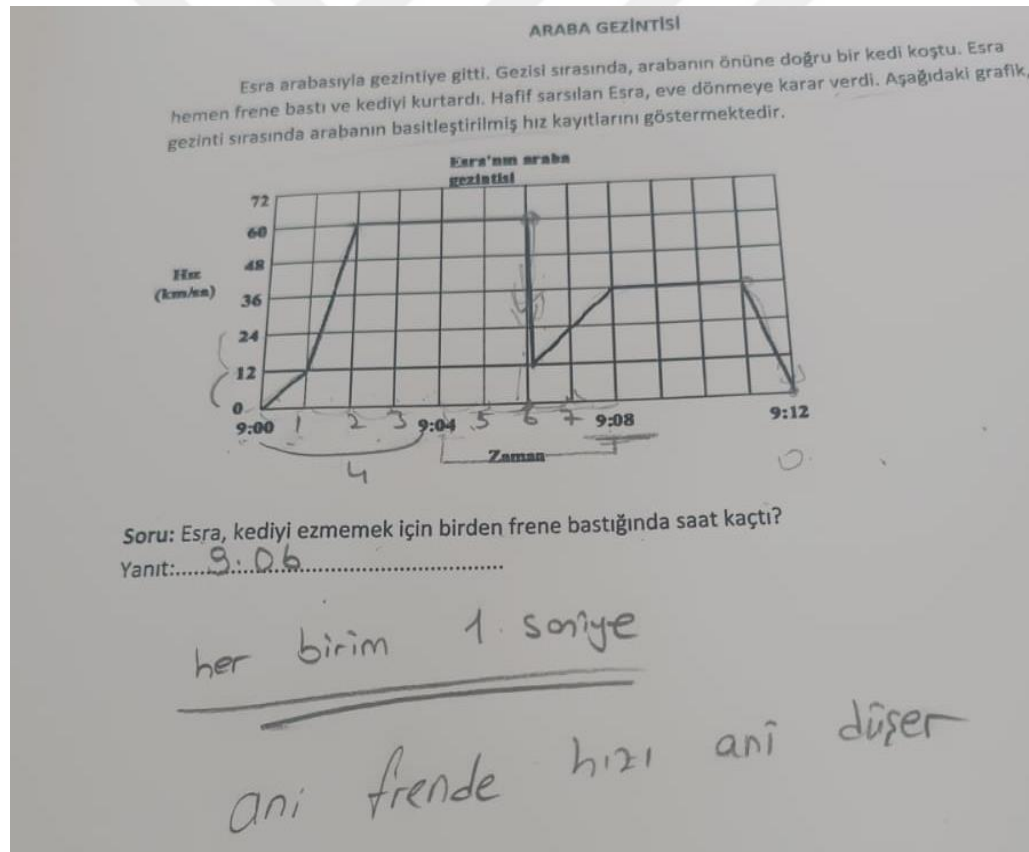
40 000 / 11 = 3636,22...

200

40 / 11 = 3636,22...

Benzer şekilde Fatime *Araba Gezintisi* sorusunda da verilen grafiğe bakarak iki değişken arasındaki ilişkiyi ele alıp gerçek yaşama dair anlamlandırırken gerekçe oluşturabilmiştir. Fatime görüşmedeki “*Burada önce ilerlemeye başlıyor. Şurada hızı ani bir şekilde düşüyor. Çok sert olarak burada bir düşüş var hocam. Şurada tekrardan bir düşüş var ama burada Eve dönmeye karar verdiğini söylüyordu. Muhtemelen evine geldi ve o yüzden yavaşladı. Hatta sonra da duruyor zaten. Ama burada bir durması yok. Yani birdenbire hızlandırılıyor sonra tekrar devam ediyor. Burada kedi ezmek için durduğunu ben de öyle düşündüm. Aynen. Burada da zaten 9.04'den 9.08'e kadar arada 4 dakikalık bir zaman farkı var. Arada da 4 tane kutucuk var tam ortasında durduğu için. 9.04'e 2 ekledim. 9.06'da durduğunu söylüyorum.*” ifadeleriyle grafiği gerçek anlamda ifade edip ne zaman kediye çarptığını bulabilmiştir (Görsel 4.131).

Görsel 4.131 Fatime’nin *Araba Gezintisi* Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



Fatime’nin benzer şekilde iki değişkene ait matematiksel verileri ilişkilendirerek gerçek yaşama dayalı anlamlandırıp gerekçe sunarak gerçek yaşamdan sonuca ulaşabilmektedir. Son görüşmedeki *Bisiklet Sürücüsü Hale 2* sorusunda verilen yol ve ortalama hıza ait iki değişkeni ilişkilendirerek süreyi elde edip ardından her bir şık için

gerekçe sunup doğru cevabı işaretlemiştir. Fatime “Toplam aldığım mesafeyi zamana bölersem ortalama hızı bulurum ben. Burada diyor ki 18 bulmuş oldum, 6 kilometre gitmiş. Yol eşittir, işte hız çarpı zamandı. Burada bize hız verdiği için ben hız eşittir, yol bölü zaman yaptım. 18 kilometre bölü saati 6 kilometre bölü ortalama zamanla böldüm. Ortalama zamanı buradan 1 bölü 3 buldum. 1 bölü 3 saat de buldum. Ama burada dakikadan bahsettiği için 1 saat 60 dakika ise 1 bölü 3 saat kaç dakikadır dedim. 20 dakika buldum.” şeklinde hem matematikteki aritmetik ortalama kavramına hem de saat ve dakika ilişkisine dayalı yaptığını ifade etmiştir. Ardından şıkları ele alarak tüm şıkları elde ettiği süreye dair sonuçla eşleştirerek “Burada A ‘da Hale’nin teyzesinin evine gitmesi 20 dakika sürmüştür. Ben de böyle bulmuştum zaten bunu doğru kabul ettim. Hale’nin teyzesinin evine gitmesi 30 dakika sürmüştür. Bu yanlış. Hale’nin teyzesinin evine gitmesi 3 saat sürmüştür. Bu da yanlış. Hale’nin teyzesinin evine gitmesinin ne kadar sürdüğünü söylemek mümkün değildir. Yolu mümkün bulduk zaten burada yanlış.” şeklinde açıklamıştır (Görsel 4.132).

Görsel 4.132 Fatime’nin Bisiklet Sürücüsü Hale Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

BİSİKLET SÜRÜCÜSÜ HALE

Hale, yeni bir bisiklet almıştır. Bisikletin gidonunda bir hız ölçer bulunmaktadır. Hızölçer, Hale’nin gittiği mesafeyi ve yolculuğundaki ortalama hızını gösterebilmektedir.

Soru: Hale, teyzesinin evine gitmek için 6 km bisiklet sürmüştür. Hızölçer, yolculuğunun tamamı için Hale’nin ortalama hızının 18 km/h olduğunu göstermiştir. Buna göre, aşağıdaki önermelerden hangisi doğrudur?

A. Hale’nin, teyzesinin evine gitmesi 20 dakika sürmüştür. ✓

B. Hale’nin, teyzesinin evine gitmesi 30 dakika sürmüştür. ✗

C. Hale’nin, teyzesinin evine gitmesi 3 saat sürmüştür. ✗

D. Hale’nin, teyzesinin evine gitmesinin ne kadar sürdüğünü söylemek mümkün değildir. ✗

Hale 6 km $V_{ort} = 18 \text{ km/h}$

$V = \frac{x}{t}$ $V_{ort} = \frac{x_{top}}{t_{top}}$ $18 = \frac{6 \text{ km}}{t}$

$t = \frac{1}{3} \text{ h}$

1 saat 60
 $\frac{1}{3}$ saat x
 $x = \frac{1}{3} \cdot 60 = 20 \text{ dakika}$

A) Doğru
 B) Yanlış
 C) Yanlış
 D) mümkün 30 dk

Bu durum aynı zamanda gerçek hayata dair verilenleri matematikleştirip bulduğu matematiksel sonucu gerekçe sunarak tekrar gerçek yaşama dair anlamlandırabildiği göstermektedir.

Fatime ayrıca ikiden fazla değişkeni de ilişkilendirebilmektedir. Örneğin son görüşmedeki *En İyi Araba 2* sorusunda beş farklı arabanın dört farklı özelliği verilmiş ve toplam puana dair formülüne Ca arabasının kazanmasını destekleyecek şekilde katsayılar eklenmesi istenmiştir. Fatime “Burada Hepsinin en yüksek olduğu dış görünüş vardı. Hepsinde en yüksek SP dahil. Ama ca ninki burada düşük onlara göre. Bu yüzden ben burayı komple sıfırladım. Yani buranın kat sayısını sıfır yaptım. Çıkardım bunu direkt. Sonrasında burada en yüksek olana mesela canın için en yüksek olan emniyet var. Bir de en yüksek olan iç bağlantıları vardı. En düşüğü de yakıt verimliliği idi. Bu yüzden yakıt veremediğine en düşük kat sayıyı verdim. Biri verdim. En yüksekte emniyete verecektim ya iç puantılara. Burada baktım emniyetten yine yüksekler çoğunlukla. Daha doğrusu iç puantılardan daha şey.. Yani iç puantılardan eğer ben katsayının büyüğünü iç puanlara verseydim yine cevap birinci olamayacaktı.” şeklindeki açıklamasıyla dört farklı değişkeni beş farklı durum için ele alıp Ca arabasına en uygun olanı Ca’nın en yüksek puanı olan değişkenlere yüksek, düşüklerine düşük katsayı verme şeklinde ilişkilendirip doğru cevabı verebilmiştir (Görsel 4.133).

Görsel 4.133 Fatime’nin En İyi Araba 2 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

EN İYİ ARABA

Bir araba dergisi, yeni arabaları değerlendirmek için bir puanlama sistemi kullanmakta ve "Yılın Arabası" ödülünü en yüksek toplam puanı olan arabaya vermektedir. Beş yeni araba değerlendirilmiş ve aldıkları puanlar tabloda gösterilmiştir.

Araba	Emniyet Özellikleri (E)	Yakıt Verimliliği (Y)	Dış Görünüş (D)	İç Bağlantılar (İ)
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	2
N1	1	3	3	3
KK	3	2	3	2

Puanlar aşağıdaki şekilde yorumlanmaktadır:

3 puan = Mükemmel 2 puan = İyi 1 puan = Orta

Soru: "Ca" arabasının üreticisi, toplam puan hesabı için kullanılan kuralın adil olmadığını düşünüyor. Toplam puanı hesaplamak için öyle bir kural yazınız ki ödülü kazanan araba "Ca" olsun. Sizin kuralınız dört değişkenin hepsini kapsamalı ve aşağıdaki eşitlikte bırakılan dört boşluğa pozitif sayılar yerleştirerek kuralınızı yazmalısınız.

Toplam puan = $\frac{1}{2}E + \dots + \frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}I$

$x E + x Y + x D + x I$

Kural = $2 \cdot E + 1 \cdot Y + 1 \cdot D + 4 \cdot I$

Ca = $3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 21$

M2 = $2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 16$

Sp = $3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 18$

N1 = $1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 20$

KK = $3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 15$

6 + 12 = 18
7 + 8 = 15

Ca

$2 \cdot E + 1 \cdot Y + 1 \cdot D + 4 \cdot I$

4.5.2 Grup 2'nin temsilcisi olan Elif ve Hamza'nın son görüşme bulguları

Elif ve Hamza adlı katılımcılar araştırma sürecinde matematiği kullanmada iyi iken araştırma sonlarına doğru iki ve daha fazla değişkeni de ilişkilendirebilmiştir. Ayrıca bu esnada uygun gerekçeler sunabilir hale gelmişlerdir.

Elif araştırma sürecindeki bulgulara göre matematiği kullanmada oldukça iyi, problem durumunda verilenleri ve isteneni gerçek yaşamda anlamlandırabilen ve ikiden fazla değişkeni ilişkilendirebilen bir katılımcıdır. Ayrıca gerekçe sunmada gerçek yaşamdan ve matematikten dayanaklar bulabilirken çözümün doğruluğunu ise nicel değerler atayarak kontrol etmektedir. Ancak ikiden fazla değişkeni ilişkilendirmede zorluk yaşamaktadır.

Ancak Hamza araştırma sürecinin başından orta görüşmeye dek elde edilen bulgulara göre problem durumunda verilenleri ve isteneni gerçek yaşamda anlamlandırabilen ve ikiden fazla değişkeni ilişkilendirebilen bir katılımcıdır. Ayrıca gerekçe sunmada gerçek yaşamdan ve matematikten dayanaklar bulabilirken çözümün doğruluğunu ise sayı doğrusu veya nicel değerler atayarak kontrol etmektedir.

Her iki temsilci de problem durumunda verilenleri ve isteneni gerçek yaşamda anlamlandırırken bağlama dair açıklamalar yapabilmektedir. Ayrıca verilenleri anlamlandırırken nicel değerler verebilmektedirler. Örneğin Hamza son öğretimdeki piramidal yapıyı gerçek yaşamda anlamlandırırken “*Yani bir piramit oluşturacaksın ya . Yani hocam en az bir blok koyacağız. Yani birinde bir blok koymuşsak İkincisine iki blok. Artı bir 2 oluyor. sonra 3, 4 blok..*” şeklinde nicel değer vererek ifade etmiştir. Bisiklet Sürücüsü Hale 2 sorusunda ve Fuji Dağı'na Tırmanış sorusunda verilen ortalama kavramını diğer görüşmelerde olduğu gibi gerçek yaşama dayalı olarak anlamlandırabilmiştir. Hamza sırasıyla “*Ortalama hız..ortalama yer değiştirme bölü zaman değişimi*”ve “*Bize ortalama kaç kişi tırmanıyormuş? Ben, çok klasik, gün sayısını aldım, sonra geçen işte tırmanan bir insan sayısını böldüm.*” şeklinde aritmetik ortalama ile ilişkilendirerek ifade etmiştir.

Elif ise benzer şekilde her iki soruda verilen ortalama kavramını matematikteki aritmetik ortalama ile ilişkilendirerek “*Sonra biz bu ben bunu iki yüz bini elli sekize böldüm. “ ve “ Mesela benim gittiğim yolda yaptığım hıza durabilirim, yavaşlayabilirim. Ama mantık olarak o aldığım yol. Yola zamanı bölünür.*” şeklinde ifade ederken Bisiklet Sürücüsü Hale de ise “*Ortalama hızı 18 km/h demek...Bir saatte 18 kilometre gitti. Ama*

her bir saatte 18 kilometre gittiği değil. Çünkü eğer doğrusal bir şekilde yolun devam ediyorsa, evet, diyebiliriz. Ama mesela ben bir anda hızımı arttırabilirim, bir anda hızımı yavaşlatabilirim. Mesela hani ortalama hızı normalde de son.” şeklinde gerçek yaşama dayalı ifade edebilmiştir.

Elif ve Hamza önceki bulgularda olduğu gibi değişkenlerin değerini bulup matematiksel sonuca ulaşırken uygun gerekçe sunabilmektedir. Örneğin son görüşmedeki *En İyi Araba 2* sorusunda her ikisi de Ca arabasına yönelik en iyi puanı veren formülün katsayılarını bulmak için farklı değerler verip değişken değerlerine dayalı hesaplama yapabilmışlardır (Görsel 4.134 ve Görsel 4.135).

Görsel 4.134 Hamza'nın *En İyi Araba 2* Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

değerlendirilmiş ve aldıkları puanlar tabloda gösterilmiştir.

Araba	Emniyet Özellikleri (E)	Yakıt Verimliliği (Y)	Dış Görünüş (D)	İç Bağlantılar (İ)
Ca	9.3	1	2	3.8
M2	9.2	2	2	2.16
Sp	3.22	1.1	3.1	2.716
N1	9.1	3	3	3.1
KK	3.72	2	3	2.47

Puanlar aşağıdaki şekilde yorumlanmaktadır:

3 puan = Mükemmel 2 puan = İyi 1 puan = Orta

Soru : "Ca" arabasının üreticisi, toplam puan hesabı için kullanılan kuralın adil olmadığını düşünüyor. Toplam puanı hesaplamak için öyle bir kural yazınız ki ödülü kazanan araba "Ca" olsun. Sizin kuralınız dört değişkenin hepsini kapsamlı ve aşağıdaki eşitlikte bırakılan dört boşluğa pozitif sayılar yerleştirerek kuralınızı yazmalısınız.

Toplam puan = $9E + 1Y + 1D + \dots I$

Görsel 4.135 Elif'in En İyi Araba 2 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

değerlendirilmiş ve aldıkları puanlar tabloda gösterilmiştir.

Araba	Emniyet Özellikleri (E)	Yakıt Verimliliği (Y)	Dış Görünüş (D)	İç Bağlantılar (İ)
Ca	9.3	1	2	3.8
M2	9.2	2	2	2.16
Sp	3.22	1.1	3.1	2.7
N1	9.1	3	3	3.7
KK	3.72	2	3	2.6

Puanlar aşağıdaki şekilde yorumlanmaktadır:

3 puan = Mükemmel 2 puan = İyi 1 puan = Orta

Soru : "Ca" arabasının üreticisi, toplam puan hesabı için kullanılan kuralın adil olmadığını düşünüyor. Toplam puanı hesaplamak için öyle bir kural yazınız ki ödülü kazanan araba "Ca" olsun. Sizin kuralınız dört değişkenin hepsini kapsamlı ve aşağıdaki eşitlikte bırakılan dört boşluğa pozitif sayılar yerleştirerek kuralınızı yazmalısınız.

Toplam puan = $9E + 1.. Y + 1.. D + ... I..$

Bu arada görsellerden istenen değişkenlerin nicel değerlerini verilen bağlamdan bulabildiği ve belirledikleri değerleri formülde uygun yerlerine yazarak cebirsel manipülasyon yapabildiği de görülmektedir.

Hamza ve Elif öğretimlerde verilen problemlerde amaca dair kritik noktaları kimi zaman ayırt edebilirken kimi zaman da zorlanmaktadırlar. Örneğin *Arıların Çiçek Bulma* öğretiminde Hamza Güneş'in yönüne ait kritik noktayı yanlış anlamlandırırken yönü ters olarak ifade etmiştir. Son görüşmede ise *Fuji Dağı'na Tırmanış* sorusunda "1 Temmuz'dan 27 Ağustos'a kadar" ifadesini anlamlandırırken Temmuz ayını 31 gün ve Ağustos'ta geçen süreyi ise 27 gün alarak toplam süreyi 58 gün olarak "1 Temmuz'da 27 Ağustos'a kadar halka açık bir gezi verilmiş. Toplamda 58 gün." şeklinde açıklamıştır. Elif de benzer şekilde "Şimdi biz Temmuz ayını 31, ağustos'u da zaten biliyoruz. Bir de yirmi bir Ağustos, yirmi yedi Ağustos'a kadar. O zaman yirmi yedi eklersek elli sekiz." şeklinde ifade etmiştir (Görsel 4.136).

Görsel 4.136 Hamza'nın Fuji Dağı Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

Fuji dağına tırmanmak her yıl sadece 1 temmuzdan 27 ağustosa kadar halka açıktır. Bu zamanda yaklaşık 200 000 kişi tırmanır.

Fuji dağına günde ortalama kaç kişi tırmanmaktadır?

A-340 B 710 C 3400 D 7100 E 7400

31 gün

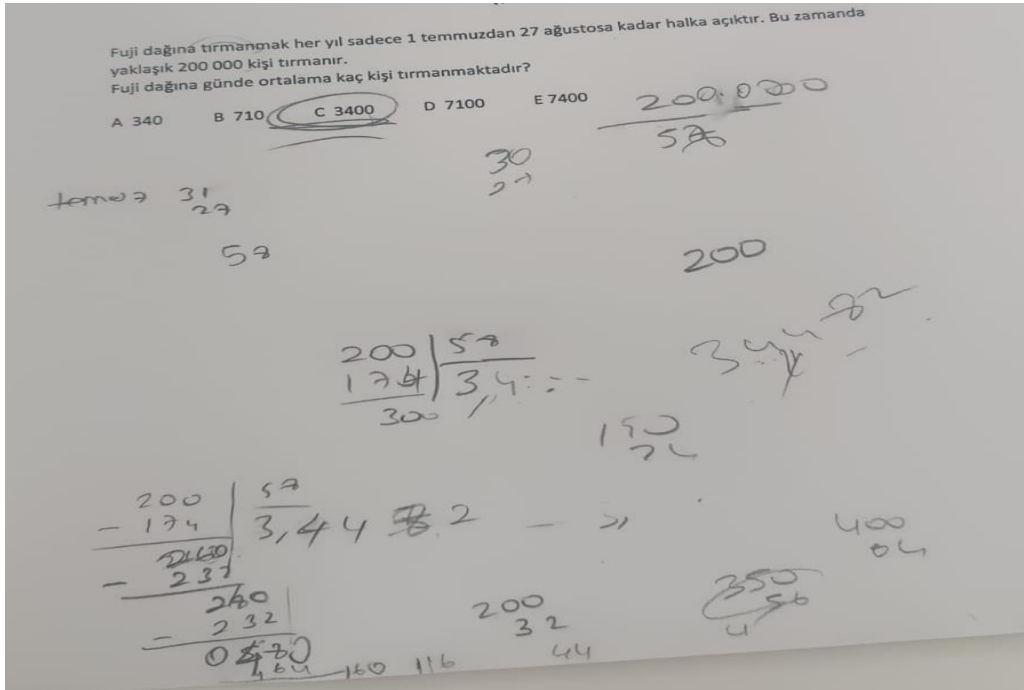
31 + 26 = 58

$\frac{200\ 000}{58} = \frac{100\ 000}{29}$

3,6 gibi

Elif ve Hamza değişkenleri arasındaki ilişkiyi gerekçeli olarak sunabilmekte ve bu ilişkilendirmeyi gerçek yaşama dayalı anlamlandırabilmektedir. Örneğin son görüşmedeki *Fuji Dağı'na Tırmanış* sorusunda Elif ve Hamza süre ve kişi sayısına dair değişkenleri ilişkilendirerek ortalama günlük gezen kişi sayısını matematikteki aritmetik ortalama kavramına ilişkin olarak elde edebilmiştir. Elif ve Hamza sırasıyla “Sonra biz bu ben bunu ıı iki yüz bini elli sekize böldüm. Hani ortalama istiyor ya. Onu ortalama ortalaması kişi sayısı böyle buldum.” ve “Bize ortalama kaç kişi tırmanıyormuş? Ben, çok klasik, gün sayısını aldım, sonra geçen işte tırmanan bir insan sayısını böldüm. O da şöyle oluyor. 200 bin bölü 58.” şeklinde ifade etmişlerdir (Görsel 4.137).

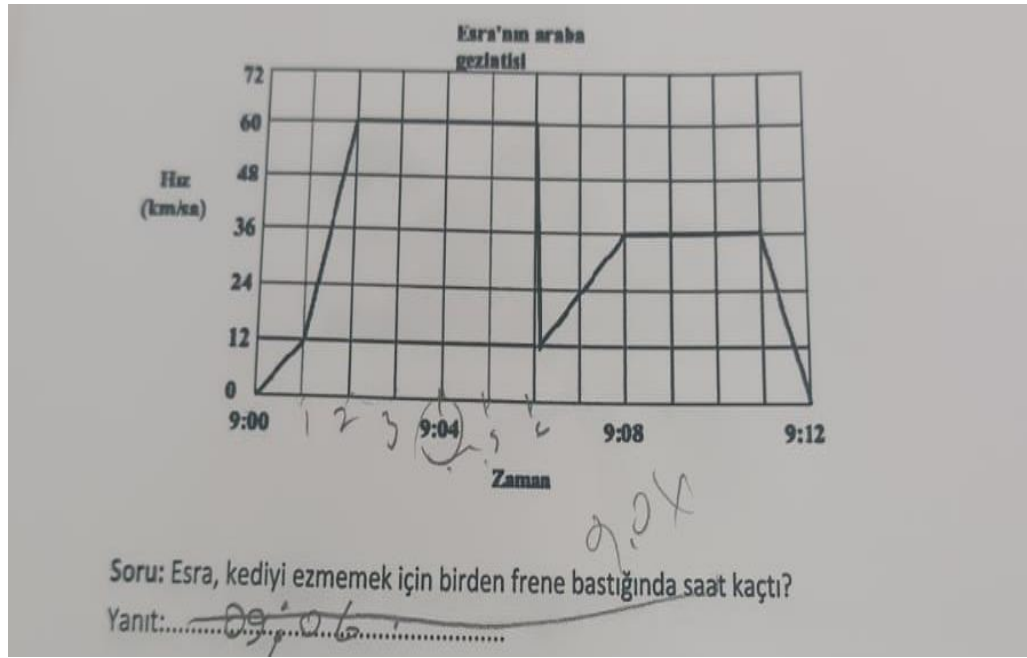
Görsel 4.137 Elif'in Fuji Dağı Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



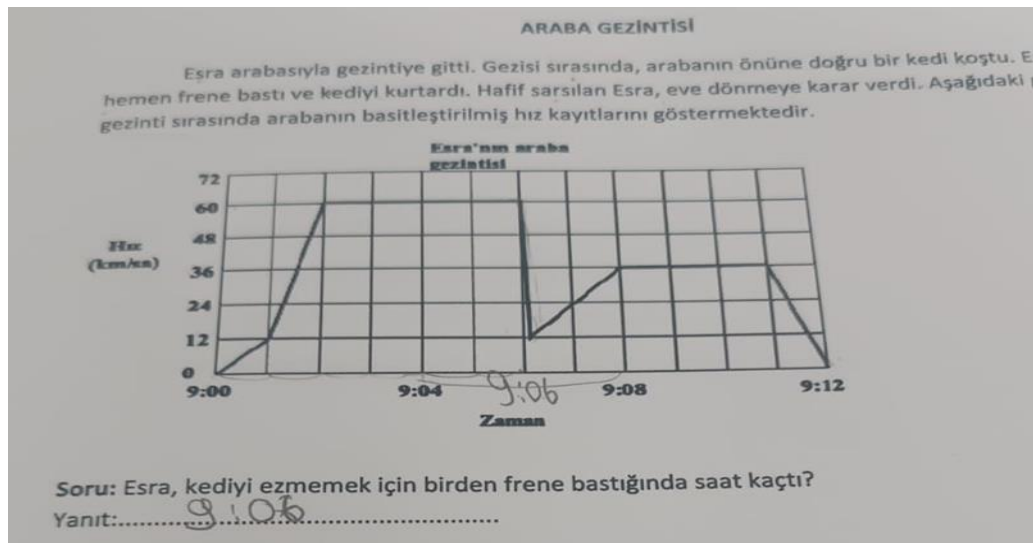
Ayrıca Araba Gezintisi sorusunda hem Hamza hem de Elif sorusunda yer alan grafikten hız ve zaman şeklindeki iki değişken arasındaki ilişkiyi gerçek yaşama dayalı anlamlandırıp gerekçe sunabilmiştir. Hamza “İşte bizde hangi zamana çarpmış olabilir diyor. Ben hemen grafiğe bakıyorum. Hız-zaman grafiğine. Şimdi ani bir düşüş olduğuna göre hızında da aynı şekilde ani bir düşüş. Çünkü ne kadar hızlı yavaşlarsa bu kadar hızı azalmıştır. Bakıyorum en dibe düşüş. 9.6'da yani hız altmışken 12 olmuş. Hani sağlama açısından diğer hızlara bakıyorum. Burada çok düzgün bir şekilde inmiş. 9.6'da kadar değil. Çünkü altmıştan hemen 12 inmiş. Ama diğer hız düşüşlerinde 2 tane var sadece. Biri ani olmuş, biri de eve giderken yavaşlanmış sadece. Öyle düşündüm. Sadece bu oluyor.” şeklinde açıklama yapıp doğru değerlendirirken Elif de “Bir Esra diye bir kız

varmış. O işte araba gizlisi yapıyormuş. Bir anda onun önüne bir kedi çıkıyor. Onu da işte arabayı bir an frene basıp durduruyor. Durduğu anda hızı hemen bir şekilde azalacağı için Ben dedim ki, nerede o alan? 9.04 ile 9.08 arasında. O da zaten sayarsan, burada 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9.6 daha olacak. Burada mesela evine gittiği için hızı azalmış. Burada da zaten evinden çıktığı için hızı artarak gitmiş” şeklinde doğru açıklayarak ikisi de gerçek yaşama dayalı anlamlandırmışlardır (Görsel 4.138 ve Görsel 4.139).

Görsel 4.138 Elif’in Araba Gezintisi Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



Görsel 4.139 Hamza'nın Araba Gezintisi Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



Elif ve Hamza *Bisiklet Sürücüsü Hale 2* sorusunda yol ve ortalama hıza ilişkin verilen iki değişkene ait matematiksel verileri ilişkilendirerek gerçek yaşama dayalı

anlamlandırırken gerekçe sunabilmiş ve gerçek yaşamdan sonuç elde edebilmişlerdir. Elif “Şimdi 6 kilometre. O da şey diyor, hızın ortalaması 18 kilometreymiş. O zaman biz burada işlemleri yaparsak 18, 6 kilometre. bölü x saat. Saatini bilmiyoruz. Ama burası on sekizde. O zaman burası bir bölü üç saat. O zaman bu da bir saat altmış dakikaysa bir bölü üç saat. O da şey olacak. Yirmi dakika. Bu yüzden doğru cevap aldık.” şeklinde ifade ederken Hamza ise “Şimdi hocam bana diyor ki halinin gittiği mesafe hızı ortalama hızı gösterilmektedir. 6 kilometre bisiklet sürmüştür. Yani bana saat cinsinden vermiş. Oran orantıya gidiyorum ilk önce. Şimdi hocam şöyle düşündüm. 1 saat 60 dakikaya sonradan gireceğim. Şöyle yazıyorum. 18. Yer değiştirmem 6. Zaman değişimini bilmiyorum ki benden onu istiyor. Kaç sürede gitmiş. Delta T yazıyorum. İçler dışlar. 1 bölü 3'ünde gitmiş. Dakikaya çevirmem lazım. Oradan da 1 bölü 3 çarpı 60 eşittir. İkisinin de 20 dakika oluyor.” şeklinde açıklamıştır.

Bu soruda ayrıca gerçek hayattan verilenleri matematikleştirip bulduğu matematiksel sonuca göre şıkları gerekçe sunarak ele almış ve tekrar gerçek yaşama dair anlamlandırabilmiştir. Hamza ve Elif sırasıyla “Zaten D şıkkı direkt gitti. Çünkü ben sağlayabildiğime göre sağlayan bir değer varmış. Böyle söylemek mümkün değil. zaten değeri de 20 dakika buldum. A” ve “20 dakikada gidiyor A şıkkı... diğerleri yanlış verilmiş” şeklinde açıklayıp soruyu doğru çözmüşlerdir (Görsel 4.140 ve Görsel 4.141). Bu aşamada hız ve yol bilgisini ilişkilendirerek saate ilişkin sonucu bulduktan dakikaya çevirmişlerdir.

Görsel 4.140 Elif'in Bisiklet Sürücüsü Hale Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

BİSİKLET SÜRÜCÜSÜ HALE

Hale, yeni bir bisiklet almıştır. Bisikletin gödesinde bir hızölçer bulunmaktadır. Hızölçer, Hale'nin gittiği mesafeyi ve yolculuğundaki ortalama hızını gösterebilmektedir.

Soru: Hale, teyzesinin evine gitmek için 6 km bisiklet sürmüştür. Hızölçer, yolculuğunun tamamı için Hale'nin ortalama hızının 18 km/h olduğunu göstermiştir. Buna göre, aşağıdaki önermelerden hangisi doğrudur?

A. Hale'nin, teyzesinin evine gitmesi 20 dakika sürmüştür. ✓

B. Hale'nin, teyzesinin evine gitmesi 30 dakika sürmüştür. X

C. Hale'nin, teyzesinin evine gitmesi 3 saat sürmüştür. X

D. Hale'nin, teyzesinin evine gitmesinin ne kadar sürdüğünü söylemek mümkün değildir. X

6 km

$\frac{1}{3}$

$18 \text{ km/h} = \frac{18 \text{ km}}{x \text{ h}}$

$x = \frac{1}{3} \text{ saat}$

$1 \text{ saat} = 60$

$\frac{1}{3}$

20 ✓

$\frac{1}{3} \text{ saat}$

20

$\frac{1}{3} \text{ saat}$

20

Görsel 4.141 Hamza'nın Bisiklet Sürücüsü Hale Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

Hale, yeni bir bisiklet almıştır. Bisikletin gidonunda bir hız ölçer bulunmaktadır.
Hızölçer, Hale'nin gittiği mesafeyi ve yolculuğundaki ortalama hızını gösterebilmektedir.

Soru: Hale, teyzesinin evine gitmek için 6 km bisiklet sürmüştür. Hızölçer, yolculuğunun tamamı için Hale'nin ortalama hızının 18 km/h olduğunu göstermiştir. Buna göre, aşağıdaki önermelerden hangisi doğrudur?

A. Hale'nin, teyzesinin evine gitmesi 20 dakika sürmüştür.
B. Hale'nin, teyzesinin evine gitmesi 30 dakika sürmüştür.
C. Hale'nin, teyzesinin evine gitmesi 3 saat sürmüştür.
D. Hale'nin, teyzesinin evine gitmesinin ne kadar sürdüğünü söylemek mümkün değildir.

$$18 = \frac{6 \text{ km}}{\Delta t}$$
$$18 \text{ km/h}$$
$$V_{\text{ort}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$
$$V_{\text{ortalama}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$
$$18 = \frac{6}{\Delta t}$$
$$6 = 18 \cdot \Delta t$$
$$\Delta t = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$
$$18 = \frac{6}{x}$$
$$6 = 18x$$
$$x = \frac{1}{3}$$
$$1 \text{ saat} = 60 \text{ dakika}$$
$$\frac{1}{3} \cdot 60 = x$$
$$x = 20$$

Ancak Hamza ve Elif ikiden fazla değişkeni de ilişkilendirmedi tüm süreç boyunca zorluk yaşamışlardır. Ancak son görüşmedeki *En İyi Araba 2* sorusunda beş farklı arabaya ait dört farklı özellik verilmiştir. Bu arabaların toplam puana dair formülde Ca arabasının kazanmasını destekleyecek şekilde katsayıların belirlenmesi istenince hem Elif hem de Hamza bu soruda ikiden fazla değişkenle ilişki kurabilmişlerdir. Ancak her ikisi de deneme yaparak sonuca ulaşmışlardır. Hamza kendi çözümünden emin değilken Elif emindir. Hamza “*Şimdi hocam, denklem kurdum ilk başta. Ama baktım olmuyor. Şimdi bunların kat sayılarıyla orantılı işte 3e artı örnek veriyorum. 3e artı 1y artı 2d Artı üçte şuna eşit oluyormuş.*” şeklinde önce Ca’da en az puana sahip olan özellikleri en aza indirgeme adına katsayı olarak sıfır verip ardından her katsayıyı bir arttırarak denemiş ama emin olamamıştır. Elif ise “*hani burada üç Ca’da çok fazlaymış. Ben bu arabanın kazanılmasının için ben bunları fazla, ama bunları fazla sayıvereyim ki hani o aralar kaynamasın. Sonra diğerlerini de zaten bir bir kat sayısı olarak aldım.*” şeklinde Ca’nın yüksek puan alabildiği özelliklere yüksek diğerlerine en az katsayıyı belirlediğini ifade etmiştir. Bu durum her ikisinin de benzer yolla katsayı belirlediğini ve Hamza’nın pek de emin olmadan deneyerek doğru bulduğunu göstermektedir (Görsel 4.142 ve Görsel 4.143).

Görsel 4.142 Elif'in En İyi Araba 2 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

EN İYİ ARABA

Bir araba dergisi, yeni arabaları değerlendirmek için bir puanlama sistemi kullanmakta ve "Yılın Arabası" ödülünü en yüksek toplam puanı olan arabaya vermektedir. Beş yeni araba değerlendirilmiş ve aldıkları puanlar tabloda gösterilmiştir.

Araba	Emniyet Özellikleri (E)	Yakıt Verimliliği (Y)	Dış Görünüş (D)	İç Bağlantılar (İ)
Ca	3 3 / 6	1 0 / 1	2 0 / 2	3 6 / 9
M2	2 2 / 4	2 0 / 2	2 0 / 2	2 4 / 6
Sp	3 3 / 6	1 0 / 1	3 0 / 3	2 4 / 6
N1	1 1 / 2	3 0 / 3	3 0 / 3	3 6 / 9
KK	3 3 / 6	2 0 / 2	3 0 / 3	2 4 / 6

Puanlar aşağıdaki şekilde yorumlanmaktadır:

3 puan = Mükemmel 2 puan = İyi 1 puan = Orta

Soru : "Ca" arabasının üreticisi, toplam puan hesabı için kullanılan kuralın adil olmadığını düşünüyor. Toplam puanı hesaplamak için öyle bir kural yazınız ki ödülü kazanan araba "Ca" olsun. Sizin kuralınız dört değişkenin hepsini kapsamalı ve aşağıdaki eşitlikte bırakılan dört boşluğa pozitif sayılar yerleştirerek kuralınızı yazmalısınız.

Toplam puan = ... E + ... Y + ... D + ... İ.

Eski: $1.E + 0.Y + 0.D + 2.İ$

Yeni: $2.E + 1.Y + 1.D + 3.İ$

Görsel 4.143 Hamza'nın En İyi Araba 2 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

değerlendirilmiş ve aldıkları puanlar tabloda gösterilmiştir.

Araba	Emniyet Özellikleri (E)	Yakıt Verimliliği (Y)	Dış Görünüş (D)	İç Bağlantılar (İ)
Ca	3 3	1	2	3 8
M2	2 12	2	2	2 16
Sp	3 22	1 1	3 1	2 16
N1	1	3	3	3 16
KK	3 22	2	3	2 16

Puanlar aşağıdaki şekilde yorumlanmaktadır:

3 puan = Mükemmel 2 puan = İyi 1 puan = Orta

Soru : "Ca" arabasının üreticisi, toplam puan hesabı için kullanılan kuralın adil olmadığını düşünüyor. Toplam puanı hesaplamak için öyle bir kural yazınız ki ödülü kazanan araba "Ca" olsun. Sizin kuralınız dört değişkenin hepsini kapsamalı ve aşağıdaki eşitlikte bırakılan dört boşluğa pozitif sayılar yerleştirerek kuralınızı yazmalısınız.

Toplam puan = $9.E + 1.. Y + 1.. D + ... İ.8$

4.5.3 Grup 3'ün temsilcisi olan İlknur ve Aydan'ın son görüşme bulguları

İlknur ve Aydan araştırma sürecinin başında isteneni ve verileni tam olarak açıklayamayan, iki değişkeni ilişkilendiremeyen katılımcılar iken araştırma sürecinin sonuna doğru problemin kritik noktalarını ve amacını belirlemede daha etkin, matematiği kullanabilen ve iki değişkeni ilişkilendirebilen katılımcılar haline gelmişlerdir. Ancak yine de ikisi de ikiden fazla değişkeni ilişkilendirmekte zorluk yaşamaktadırlar.

İlk olarak soruda verilenleri ve istenileni gerçek yaşamda anlamlandırırken bağlama dair ifadeler sunarken önceki öğretimlerde zorlansalar dahi son görüşmede sunabilmişlerdir. Örneğin *Bisiklet Sürücüsü Hale 2* sorusundaki ortalama kavramını daha önceki görüşmelerde matematikteki aritmetik ortalama ile ilişkilendirirken Elif “*Alınan yol böyle geçen zaman. Yani toplam gittiği yol, böyle toplam geçen zaman.*”, Aydan ise “*Ortalama hız yani durduğumuz noktalar da oluyor, yavaşladığımız noktalar da oluyor. Bütün dakikalarda hızlarımızın toplamı Bölüm çarpımı olur. Bölüm? Bölüm işte ne kadar hızınız varsa bu bölümdür. Aritmetik ortalama gibi düşünüyoruz*” şeklinde ifade etmiştir.

Aydan ve Elif metinde verilen değişkenlerin değerini formülde yerine koyup matematiksel sonuca ulaşabilmekte, uygun gerekçe de sunabilmektedir. Son görüşmedeki *En İyi Araba 2* sorusunda arabalara ait farklı değişkenlerin değerlerini bulup katsayılarına göre formülde yerine yazmış ve metindeki tüm arabalara ait toplam puanları ayrı ayrı hesaplayabilmişlerdir (Görsel 4.144 ve Görsel 4.145).

Görsel 4.144 İlknur'un En İyi Araba 2 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

3 puan = Mükemmel 2 puan = İyi 1 puan = Orta

Soru: "Ca" arabasının üreticisi, toplam puan hesabı için kullanılan kuralın adil olmadığını düşünüyor. Toplam puanı hesaplamak için öyle bir kural yazınız ki ödülü kazanan araba "Ca" olsun. Sizin kuralınız dört değişkenin hepsini kapsamlı ve aşağıdaki eşitlikte bırakılan dört boşluğa pozitif sayılar yerleştirilerek kuralınızı yazmalısınız.

Toplam puan = 1.E + 1.Y + 1.D + 2.L

~~$$Ca = 5 \cdot 7 = 35$$
$$m_2 = 4 \cdot 6 = 24$$
$$Sp = 5 \cdot 6$$~~

$$(D + i) - (2E + Y) =$$

$$Ca = 3 + 1 + 4 + 3 = 11$$

$$Sp = 3 + 1 + 6 + 2 = 12$$

$$\left(\frac{1}{D}\right) \cdot (2E + Y) = TP$$

$$Ca = \frac{3}{2} \cdot (6 + 1) = 10.5$$

$$m_2 = 1 \cdot 4 + 2 = 6$$

$$Sp = \frac{2}{3} \cdot 7 = \frac{14}{3} \approx 4.6$$

$$N1 = \frac{3}{5} \cdot 5 = 3$$

$$Lk = \frac{2}{3} \cdot 6 + 2 = \frac{16}{3} \approx 5.3$$

Görsel 4.145 Aydan'ın En İyi Araba 2 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

EN İYİ ARABA

Bir araba dergisi, yeni arabaları değerlendirmek için bir puanlama sistemi kullanır. "Yılın Arabası" ödülünü en yüksek toplam puanı olan arabaya vermektedir. Beş yer değerlendirilmiş ve aldıkları puanlar tabloda gösterilmiştir.

Araba	Emniyet Özellikleri (E)	Yakıt Verimliliği (Y)	Dış Görünüş (D)	İç Bağlantılar (İ)
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	2
N1	1	3	3	3
KK	3	2	3	2

Puanlar aşağıdaki şekilde yorumlanmaktadır:

3 puan = Mükemmel 2 puan = İyi 1 puan = Orta

Soru : "Ca" arabasının üreticisi, toplam puan hesabı için kullanılan kuralın adil olmadığını düşünmektedir. Toplam puanı hesaplamak için öyle bir kural yazınız ki ödülü kazanan araba "Ca" olsun. Sizi dört değişkenin hepsini kapsamalı ve aşağıdaki eşitlikte bırakılan dört boşluğa pozitif birer sayı yazarak kuralınızı yazmalısınız.

Toplam puan = $\dots E + \dots Y + \dots D + \dots İ$.

Handwritten calculations:

$$12 + 1 + 2 + 12 = 27$$

$$8 + 2 + 2 + 8 = 20$$

$$12 + 1 + 3 + 8 = 24$$

$$4 + 3 + 3 + 12 = 22$$

$$12 + 2 + 3 + 8 = 25$$

Ayrıca Aydan ve İlknur problemde amaca dair kritik noktaları daha önce ayırt etmekte zorlansa da araştırma sürecinin sonunda kısmen daha az zorlandıkları görülmüştür. Örneğin son görüşmedeki *Fuji Dağı'na Tırmanış* sorusunda "1 Temmuz'dan 27 Ağustos'a kadar" ifadesini ele alıp çözümde "ortalama gezen kişi sayısı" istenince Temmuz ayını ve Ağustos'ta geçen süreyi ayrı ayrı hesap edip toplam süreyi ele alabilmiştir. Aydan "1 Temmuz'dan 27 Ağustos'a kadar geçen süre 58." derken İlknur ise "Her yıl sadece bir Temmuz'dan yaklaşık iki ay kadar halka açıkmiş Ama gün sayısını da ortalama olarak aldım zaten. 55 gün" şeklinde gün sayılarını aylara göre ortalama olarak düşünüp hesaplamışlardır.

İlknur ve Aydan iki değişkeni gerekçeli olarak ilişkilendirebilmektedirler. Ayrıca gerçek yaşamdan ifadelerle anlamlandırabilmektedir. Örneğin *Fuji Dağı'na Tırmanış* sorusunda kişi sayısı ve süreye ait değişkenlerin ilişkilendirilerek ortalama günde kaç kişinin tırmandığı sorulmuştur. Burada her ikisi de kişi sayısını matematikteki aritmetik

ortalama göre ilişkilendirip doğru cevaba yaklaşık olarak ulaşmışlardır. İlknur “Ama gün sayısını da ortalama olarak aldım zaten. O da 3 bin 480 küsür bir şey çıktı. Şıklarda da zaten yaklaşık 3400.” şeklinde matematiksel işlemle sonucu yuvarlamıştır. Aydan ise “Ben ona bir şey yuvarlasam. Kaç basamakla çıkacağını bilmek için. 4 basamakla bir rakam geliyor bölünce. Niye yuvarlamak istiyorsun? Kaç basamaklı önümü görmek için. Sonra 58'e böldüm. İlk rakam 34 çıktı. Işıklarda 340 ve de 3400 var. 340 olmaz çünkü dört basamaklı olarak bildik biz. 60'a göre. O yüzden 3400.” şeklinde açıklama yaparak ilk önce bölümün kaç basamaklı olacağını hesap edip ilk iki basamağı ve şıkları karşılaştırarak soruyu çözmüştür (Görsel 4.146 ve Görsel 4.147).

Görsel 4.146 İlknur'un Fuji Dağı Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

Fuji dağına tırmanmak her yıl sadece 1 temmuzdan 27 ağustosa kadar halka açıktır. Bu zamanda yaklaşık 200 000 kişi tırmanır.
Fuji dağına günde ortalama kaç kişi tırmanmaktadır?

A 340 B 710 **C 3400** D 7100 E 7400

$$\frac{200\,000}{55} \approx 3680 \dots$$

Görsel 4.147 Aydan'ın Fuji Dağı Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

Fuji dağına tırmanmak her yıl sadece 1 temmuzdan 27 ağustosa kadar halka açıktır. Bu zamanda yaklaşık 200 000 kişi tırmanır.
Fuji dağına günde ortalama kaç kişi tırmanmaktadır?

A 340 B 710 **C 3400** D 7100 E 7400

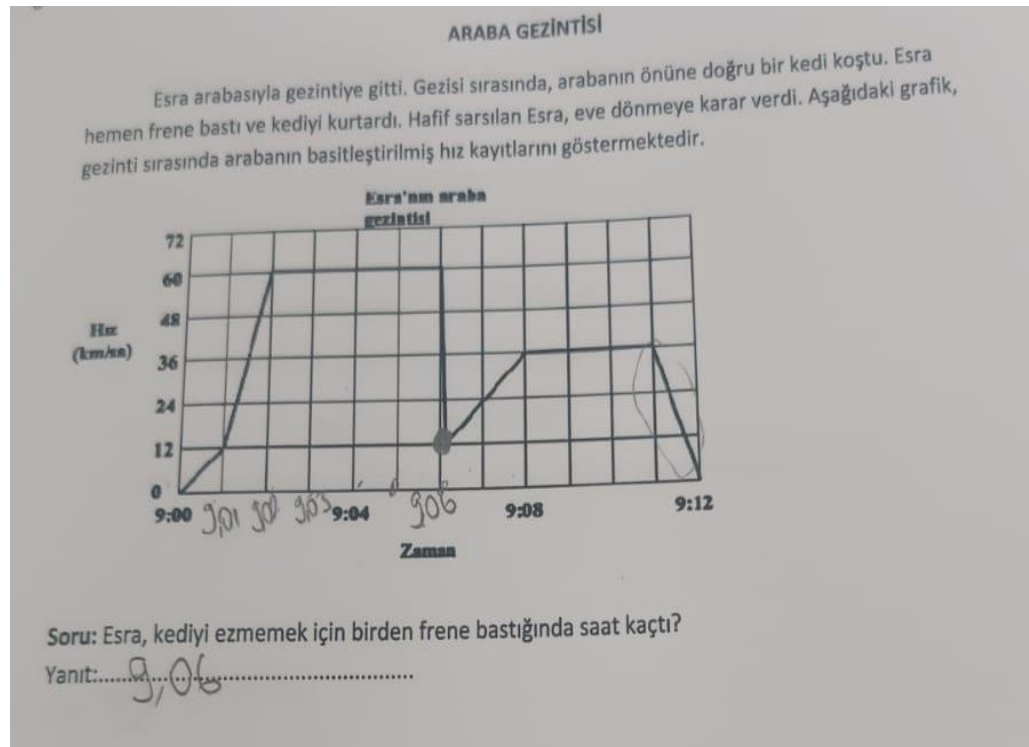
$$\frac{200\,000}{55} \approx 3680 \dots$$

$$\frac{200\,000}{55} \approx 3680 \dots$$

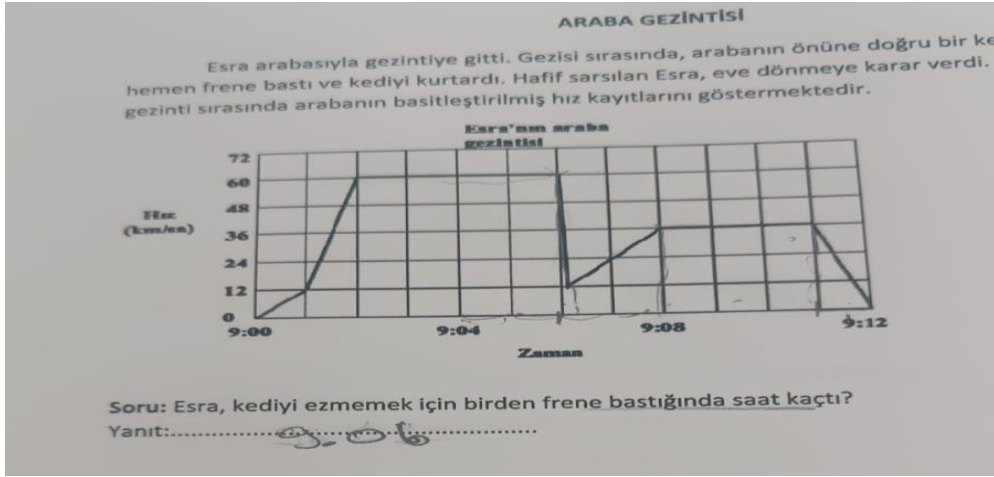
$$\frac{200\,000}{55} \approx 3680 \dots$$

Ayrıca *Araba Gezintisi* sorusunda verilen grafiği ele alıp orada iki değişkene ait ilişkiyi gerçek yaşamdan ifadelerle anlamlandırabilmekte ve aynı zamanda gerekçe sunabilmektedirler. İlkur “*Ne zaman fren yaptığını sormuş. Fren yapmak demek işte hızına sıfıra yaklaşması demek. Burada çok hızı atmışken bir anda 12'ye düşmüş. Demek ki aynı bir fren yapmış. Başka fren yapmış olabileceği bir nokta var mı? Yapmış olabilir. Mesela burada(9:12 saatini gösteriyor) da frene basmıştır. Ama bize ani fren yaptığı anı soruyor. Yani hızının bir anda düştüğü anı soruyor. 0.4 ile 0.8 arasında bir değer. Her iki tarafı da iki bölmeye bölmüş. O yüzden her bir 1 dakika geçiyor. O yüzden 9.6 olur.*” şeklinde grafikten ani fren yerlerini belirledikten sonra iki dakika arası bölme sayısından bir bölmeye düşen dakikayı bulup istenilen saati hesaplamıştır. Aydan ise “*Araba gezintisinde de Esra geceyi çarpmamak için duruyor. Sonra da evine hareket ediyor. Burada 9:4'de 9:8 arası dikkatimi çektim. Birden azalma var. Başka azalmamız bir yer var mı? Var. 9:8-9:12 arasında var. Ama orada tam o söz konusu da orada tam geliyor. Bizim ikisi geri evine dönmek için hareket ettiği için ben 9:4'de 9:8 arasını aldım. Sonra bunu şey yaparsak 9:4'de 9:8 arasında 4 dakika var. Arasında 4 kare var. Demek ki her büyük kare 1 dakikaymış. 2 kare gittiğimizde göre 9.6 dakika*” şeklinde İlkur’a benzer yolla gerçek yaşama uygun gerekçelerle yaptığını ifade etmiştir (Görsel 4.148 ve Görsel 4.149).

Görsel 4.148 İlkur’un *Araba Gezintisi* Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



Görsel 4.149 Aydan'ın Araba Gezintisi Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



İlknur ve Aydan iki değişkene ait ilişkilendirmelerini gerçek yaşamdan anlamlandırıp gerekçe sunarak gerçek yaşamdan sonuca ulaşabilmektedir. Son görüşme sorulan *Bisiklet Sürücüsü Hale 2*'de yol ve hıza ilişkin iki değişkeni ilişkilendirerek süreyi elde etmişlerdir. Daha sonra her bir şık için gerekçe sunmuş ve cevabı bulmuşlardır (Görsel 4.150 ve 4.151)

Görsel 4.150 İlknur'un Bisiklet Sürücüsü Hale Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

BİSİKLET SÜRÜCÜSÜ HALE

Hale, yeni bir bisiklet almıştır. Bisikletin gidonunda bir hız ölçer bulunmaktadır.
Hızölçer, Hale'nin gittiği mesafeyi ve yolculuğundaki ortalama hızını gösterebilmektedir.

Soru: Hale, teyzesinin evine gitmek için 6 km bisiklet sürmüştür. Hızölçer, yolculuğunun tamamı için Hale'nin ortalama hızının 18 km/h olduğunu göstermiştir. Buna göre, aşağıdaki önermelerden hangisi doğrudur?

A. Hale'nin, teyzesinin evine gitmesi 20 dakika sürmüştür.
B. Hale'nin, teyzesinin evine gitmesi 30 dakika sürmüştür.
C. Hale'nin, teyzesinin evine gitmesi 3 saat sürmüştür.
D. Hale'nin, teyzesinin evine gitmesinin ne kadar sürdüğünü söylemek mümkün değildir.

Ortalama hız = $\frac{\text{Alınan yol}}{\text{Geçen zaman}}$

$\frac{6 \text{ km}}{t} = 18 \text{ km/h}$

$t = \frac{1}{3} \text{ saat} \rightarrow \frac{60}{3} = 20 \text{ dakika}$

$18t = 60 \rightarrow t = \frac{1}{3}$

Görsel 4.151 Aydan'un Bisiklet Sürücüsü Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

BİSİKLET SÜRÜCÜSÜ HALE

Hale, yeni bir bisiklet almıştır. Bisikletin gidonunda bir hız ölçer bulunmaktadır.

Hızölçer, Hale'nin gittiği mesafeyi ve yolculuğundaki ortalama hızını gösterebilmektedir.

Soru: Hale, teyzesinin evine gitmek için 6 km bisiklet sürmüştür. Hızölçer, yolculuğunun tamamı için Hale'nin ortalama hızının 18 km/h olduğunu göstermiştir. Buna göre, aşağıdaki önermelerden hangisi doğrudur?

A. Hale'nin, teyzesinin evine gitmesi 20 dakika sürmüştür.

B. Hale'nin, teyzesinin evine gitmesi 30 dakika sürmüştür.

C. Hale'nin, teyzesinin evine gitmesi 3 saat sürmüştür.

D. Hale'nin, teyzesinin evine gitmesinin ne kadar sürdüğünü söylemek mümkün değildir.

$\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$
 $6 = 18 \times \frac{1}{3}$
 $6 = 6$
 $60 \times \frac{1}{3} = 20$
 $20 = x$

Yapılan soru çözümü ile Aydan ve İlknur'un gerçek hayattan verilenleri matematiğe aktarabildikleri ve matematiksel sonuca dair gerekçe sunabildikleri de anlaşılmıştır. Ayrıca bulunan sonucu tekrar gerçek yaşama aktarıp anlamlandırmışlardır.

Ancak Aydan ve İlknur ikiden fazla değişkeni ilişkilendirememektedirler. Son görüşmedeki En İyi Araba 2 sorusunu ikisi de yapamamıştır. Aydan birkaç deneme sonrası çözümü bırakırken İlknur ise oran kurmaya çalışsa da çözüme ulaşamamıştır (Görsel 4.152 ve Görsel 4.153).

Görsel 4.152 İlknur'un En İyi Araba 2 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

EN İYİ ARABA

Bir araba dergisi, yeni arabaları değerlendirmek için bir puanlama sistemi kullanmakta ve "Yılın Arabası" ödülünü en yüksek toplam puanı olan arabaya vermektedir. Beş yeni araba değerlendirilmiş ve aldıkları puanlar tabloda gösterilmiştir.

Araba	Emniyet Özellikleri (E)	Yakıt Verimliliği (Y)	Dış Görünüş (D)	İç Bağlantılar (İ)
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	3
N1	1	3	3	3
KK	3	2	3	2

Puanlar aşağıdaki şekilde yorumlanmaktadır:

3 puan = Mükemmel 2 puan = İyi 1 puan = Orta

Soru : "Ca" arabasının üreticisi, toplam puan hesabı için kullanılan kuralın adil olmadığını düşünüyor. Toplam puanı hesaplamak için öyle bir kural yazınız ki ödülü kazanan araba "Ca" olsun. Sizin kuralınız dört değişkenin hepsini kapsamlı ve aşağıdaki eşitlikte bırakılan dört boşluğa pozitif sayılar yerleştirerek kuralınızı yazmalısınız.

Toplam puan = $...E + ...Y + ...D + ...İ$

~~$(D + İ) - (2E + Y) =$~~

~~$Ca = 5 \cdot 7 = 35$~~

~~$M2 = 4 \cdot 6 = 24$~~

~~$Sp = 5 \cdot 6$~~

$Ca = 3 + 1 + 4 + 3 = 11$

$Sp = 3 + 1 + 6 + 2 = 12$

$Ca = 4 + 2 + 6 = 12$

$Sp = 4 + 3 + 4 = 11$

$(\frac{İ}{D}) \cdot (2E + Y) = TP$

$Ca = \frac{3}{2} \cdot 6 + 1 = 10,5$

$M2 = 1 \cdot 4 + 2 = 6$

$Sp = \frac{2}{3} \cdot 7 = \frac{14}{3} \approx 4,6$

$N1 = \frac{3}{2} \cdot 5 = 7,5$

$KK = \frac{2}{3} \cdot 6 + 2 = \frac{16}{3} \approx 5,3$

Görsel 4.153 Aydan'ın En İyi Araba 2 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

EN İYİ ARABA

Bir araba dergisi, yeni arabaları değerlendirmek için bir puanlama sistemi kullanmakta ve "Yılın Arabası" ödülünü en yüksek toplam puanı olan arabaya vermektedir. Beş yeni araba değerlendirilmiş ve aldıkları puanlar tabloda gösterilmiştir.

Araba	Emniyet Özellikleri (E)	Yakıt Verimliliği (Y)	Dış Görünüş (D)	İç Bağlantılar (İ)
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	3
N1	1	3	3	3
KK	3	2	3	2

Puanlar aşağıdaki şekilde yorumlanmaktadır:

3 puan = Mükemmel 2 puan = İyi 1 puan = Orta

Soru : "Ca" arabasının üreticisi, toplam puan hesabı için kullanılan kuralın adil olmadığını düşünüyor. Toplam puanı hesaplamak için öyle bir kural yazınız ki ödülü kazanan araba "Ca" olsun. Sizin kuralınız dört değişkenin hepsini kapsamlı ve aşağıdaki eşitlikte bırakılan dört boşluğa pozitif sayılar yerleştirerek kuralınızı yazmalısınız.

Toplam puan = $...E + ...Y + ...D + ...İ$

$12 + 1 + 2 + 12 = 27$

$3 + 2 + 2 + 8 = 15$

$12 + 1 + 3 + 8 = 24$

$4 + 3 + 3 + 12 = 22$

$12 + 2 + 3 + 8 = 25$

4.5.4 Grup 4'ün temsilcisi olan Necati ve Hatice'nin son görüşme bulguları

Necati ve Hatice araştırmanın başında ilgili değişkenlerin değerini bulup işlem yapamazken sonunda iki değişkenliler için ilişkilendirme yapabilmektedirler. Necati gerçek hayata dayalı gerekçeler ile kritik noktaları görmezden gelip yeni çözümler üretmeye çalışarak yanlış muhakemelere yol açsa da Hatice genel olarak sessiz kendinden emin olmayan işlemler yapmaktadır.

Necati araştırma süresince verilenleri ve istenileni gerçek yaşamda anlamlandırırken bağlama dair ifadeleri zorlanarak sunabilmektedir. Örneğin *Uzay Teleskopları*'nda verileni dikkate almadan istenene yönelik öneride bulunmuştur. Son görüşmede ise sorulan *Bisiklet Sürücüsü Hale 2* için verilen ortalama kavramını önceki görüşmelere benzer şekilde “*Şimdi diyor ki hani o yeni bisiklet almış ve hız ölçer almıştır o bisikletten. İşte bisiklette ortalama hızı ve gittiği mesafeyi gösteriyor. Hale evinden teyzesine gitti. Alınan yol. Hız, alınan yol bölü geçen zaman olduğunu biliyorum.*” şeklinde *Fuji Dağına Tırmanış* sorusunda ise “*Fuji Dağı vermiş. 1 Temmuz'dan 20 Nisan'a kadar insan da Fuji Dağı'na çıkabiliyor. Ama onun dışındaki zamanlar çıkamıyor. Ve bu zamanlar aralarında 200 bin insan çıkabiliyor. Yani çıkıyor daha doğrusu. Yıllık olarak. Bizden gün içinde ortalama kaç günün kişi tırmandığını söylüyor*” şeklinde verileni ve isteneni ifade etmiştir.

Hatice de benzer şekilde açıklamalarda bulunarak isteneni ifade etmiştir. Ancak Hatice öğretimlerde daha çok suskundur ve diğer katılımcıların söylediğini tekrar etmektedir. İlk olarak kendisine sorulduğunda ise metinde verilenleri yüzeysel açıklamaktadır. Son görüşmede sorulan *Bisiklet Sürücüsü Hale 2* için verilen ortalama kavramını önceki görüşmelere benzer şekilde “*Alınan yol, bölü, zaman hıhı. Ortalama şeyi korumayı*” şeklinde ifade etmiştir. *Fuji Dağı'na Tırmanışta* ise “*Bizim ilk gün önce ortalama kaç kişi yürüyüş yaptığını soruyor. Ben buradaki ayları aldığımız Temmuz ayı bir Temmuzdan aldım. Buradan da Ağustos da 27. Bu da yaklaşık elli sekiz oldu. Ortalama istediği için onu ortalama aldım. Sonra 20000 kişiyi elli sekize böldüm. Yaklaşık 3400 çıktı.*” şeklinde isteneni ifade edip matematiksel sonucu gerçek hayattan yaklaşık olarak aldığını ifade etmiştir.

Ayrıca iki temsilcinin de araştırma sürecinde problemde amaca dair kritik noktaları da ayırt etmede zorlanması uygun olmayan çözümler sunmalarının neden olmuştur. Örneğin Necati *Depreme Dayanıklı Kolonlar*'da kritik noktaları dikkate

almadan amaca yönelik yapılar yapmaya çalışmıştır. Hatice ise *Dost Araç* öğretiminde kritik noktaları göz ardı edip sadece metinde verilenlerin bir kısmını yansıtarak problemin amacını yanlış belirlemiştir.

Necati ve Hatice soruda verilen değişkenlerin değerini bularak matematiksel manipülasyonla sonuca ulaşabilmekte ve gerekçe sunabilmektedir. *En İyi Araba 2* sorusundaki arabaların değerlerini bulup formülde yerine yazarak puanları bulabilmişlerdir (Görsel 4.154 ve Görsel 4.155).

Görsel 4.154 Necati'nin *En İyi Araba 2* Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

EN İYİ ARABA

Bir araba dergisi, yeni arabaları değerlendirmek için bir puanlama sistemi kullanmakta ve "Yılın Arabası" ödülünü en yüksek toplam puanı olan arabaya vermektedir. Beş yeni araba değerlendirilmiş ve aldıkları puanlar tabloda gösterilmiştir.

Araba	Emniyet Özellikleri (E)	Yakıt Verimliliği (Y)	Dış Görünüş (D)	İç Bağlantılar (İ)
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	2
N1	1	3	3	3
KK	3	2	3	2

Puanlar aşağıdaki şekilde yorumlanmaktadır:

3 puan = Mükemmel 2 puan = İyi 1 puan = Orta

Soru : "Ca" arabasının üreticisi, toplam puan hesabı için kullanılan kuralın adil olmadığını düşünüyor. Toplam puanı hesaplamak için öyle bir kural yazınız ki ödülü kazanan araba "Ca" olsun. Sizin kuralınız dört değişkenin hepsini kapsamalı ve aşağıdaki eşitlikte bırakılan dört boşluğa pozitif sayılar yerleştirilerek kuralınızı yazmalısınız.

Toplam puan = $3E + 1Y + 2D + 3I$

Görsel 4.155 Hatice'nin En İyi Araba 2 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

Araba	Emniyet Özellikleri (E)	Yakıt Verimliliği (Y)	Dış Görünüş (D)	İç Bağlantılar (İ)
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	2
N1	1	3	3	3
KK	3	2	3	2

Puanlar aşağıdaki şekilde yorumlanmaktadır:

3 puan = Mükemmel 2 puan = İyi 1 puan = Orta

Soru : "Ca" arabasının üreticisi, toplam puan hesabı için kullanılan kuralın adil olmadığını düşünüyor. Toplam puanı hesaplamak için öyle bir kural yazınız ki ödülü kazanan araba "Ca" olsun. Sizin kuralınız dört değişkenin hepsini kapsamalı ve aşağıdaki eşitlikte bırakılan dört boşluğa pozitif sayılar yerleştirerek kuralınızı yazmalısınız.

Toplam puan = $E + Y + D + I$

Handwritten calculations:

9 Ca
 8 M2
 9 Sp
 10 N1
 10 KK

Handwritten calculations for the rule:

$3E + 2Y + 1D + 3I$

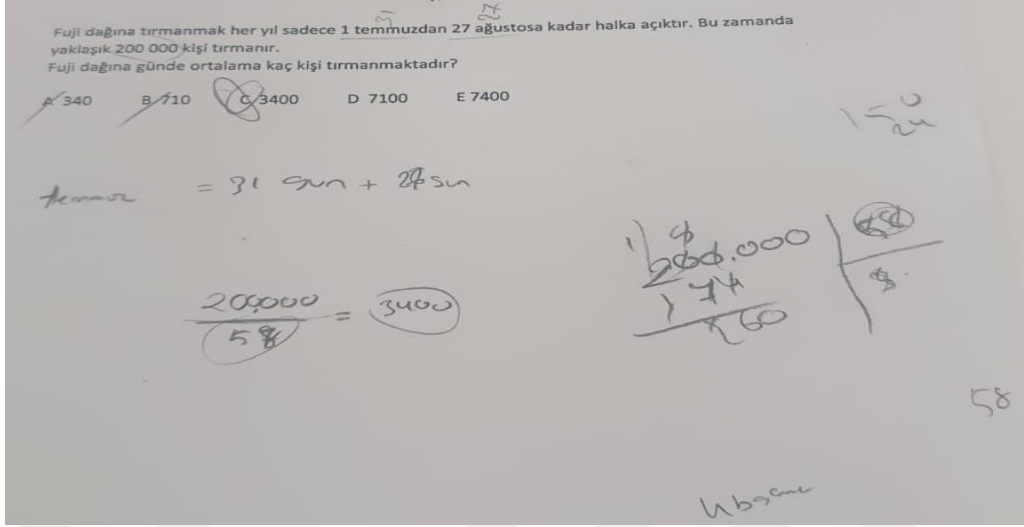
Handwritten calculations for the rule:

Ca: $9 + 1 + 2 + 9 = 21$
 M2: $6 + 2 + 2 + 6 = 16$
 Sp: $9 + 1 + 3 + 6 = 19$
 N1: $3 + 3 + 3 + 9 = 18$
 KK: $7 + 2 + 3 + 6 = 18$

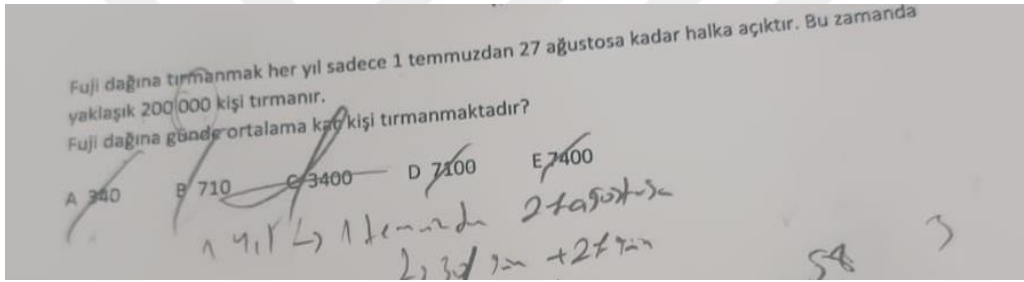
Bu soruda değişkenlerin değerlerinin formülde doğru yerine konulabilmesi ikisinin de belli değişkenleri ait değerleri bulup matematiksel sonuca ulaşabildiğini göstermektedir.

Necati iki değişkeni birbiriyle ilişkilendirebilirken Hatice ise hala bu konuda zorlanmaktadır(Görsel 4.157). Örneğin Necati *Fuji Dağına Tırmanış* sorusunda kişi ve gün sayısını ilişkilendirerek günde ortalama kaç kişinin tırmandığını "Bizim ilk gün önce ortalama kaç kişi yürüyüş yaptığını soruyor. Ben buradaki ayları aldığımız Temmuz ayı bir Temmuzdan aldım. Buradan Ağustos 27. Bu da 31.. 58 gün oldu. Ortalama istediği için onların ortalamalarını aldım. Sonra 200 kişiyi elli sekize böldüm. Yaklaşık 3,4 çıktı. Sonra işte sıfırlar var 3400 en yakın" şeklinde ifade ederek matematiksel olarak hesaplayabilmiştir (Görsel 4. 156).

Görsel 4.156 Necati'nin Fuji Dağı Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



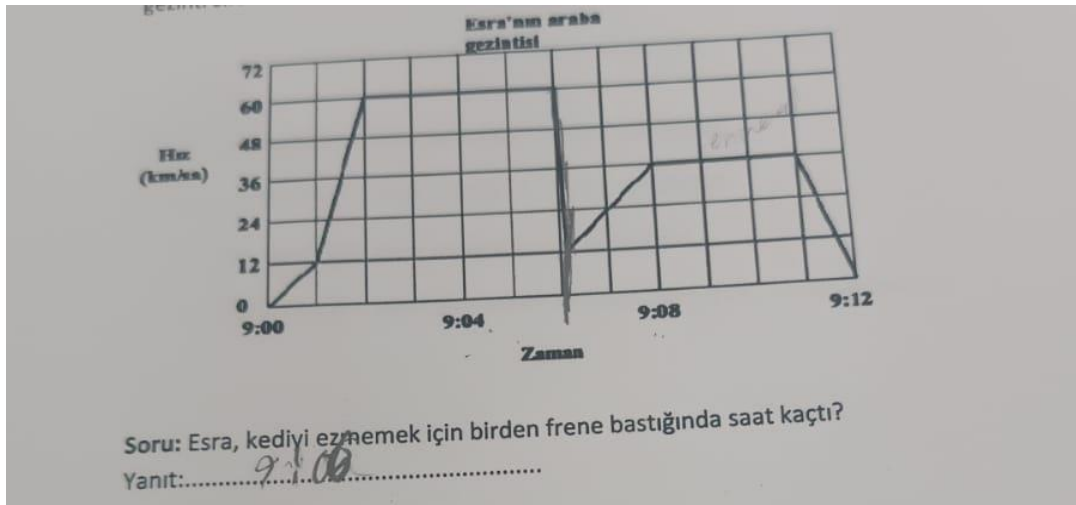
Görsel 4.157 Hatice'nin Fuji Dağı Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



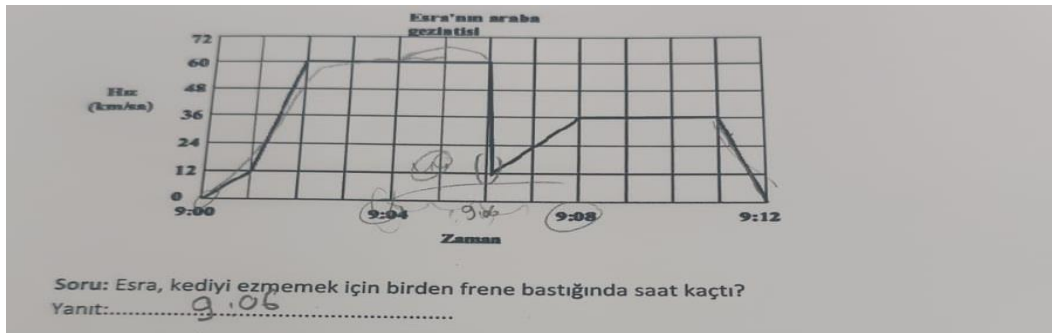
Hatice ise öğretim sürecinde kimi zaman iki değişkeni ilişkilendirebilirken kimi zaman da zorlanmıştır. Örneğin *Dost Araç* öğretiminde dik koni için grafiği y eksenine göre simetrik ve artan fonksiyon haline getirip yanlış çizim yapmıştır. Bu durum Hatice'nin nicelleştirerek grafiği çizebilse de bağımlı bağımsız değişken arasındaki ilişkiyi anlamlı olarak ele alamadığını göstermiştir. Son görüşmedeki *Fuji Dağına Tırmanış* sorusunda ise gün sayısını ayları dikkate alarak doğru bulmuş ve “Buradan Ağustos 27. Bu da 31.. 58 gün oldu. Ortalama istediği için onların ortalamalarını aldım. Sonra 200 kişiyi elli sekize böldüm. Yaklaşık 3,4 çıktı. Sonra işte sıfırlar var 3400 en yakın.” şeklinde ilişkilendirmeyi ifade ederek soruyu doğru çözmüştür. Ayrıca *Araba Gezintisinde* iki değişken arasındaki ilişkiyi de gerçek yaşamla ilişkili olarak “Hani hocam burada ezer kaza geçince gitmiştir. Koştu gitti. Hemen daha sonra bakınca durmaktayız. Burada da 9:4 ve ile 9:8 arasında dönmüştür. Ben arasındaki zamanı aldım. Bu ortalamasını aldım. 4 ve 8 ortalamasını 6 olarak aldım. 9:06 da durmuştur.” şeklinde aritmetik ortalamayı kullanarak soruyu çözmüştür. Necati de benzer şekilde ilişkilendirmeyi gerçek yaşamdan gerekçeler sunarak “...saat 9 ile 9.04 arasında hız

artıyor. Ama 9.04 den birkaç dakika sonra hız direkt azalıyor. Demek ki freni burada basmış. Hani hızın azaldığı yerde frene basmış. Başka hızın azaldığı yer yok mu? Başka hızın azaldığı yer var. 9.12'den önce a bu doğrusal bir şekilde azalmış 9.6'da dik bir şekilde azalmış. Demek ki burada frene basmış burada yavaşlamış. 9.8 arası 4 tane kutu var. Ben ortaya 9.6 dedim. Zaten hocam 9.4'dan 9.6 arasında 4 tane dakika var. Ve 4 tane kutu var. Demek ki her bir kutu 1 dakika. Yani 1 dakikaya eşit olacak. Demek ki o zaman 9.6'dur.” şeklinde yapabilmıştır (Görsel 4.158 ve Görsel 4.159).

Görsel 4.158 Hatice'nin Araba Gezintisi Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



Görsel 4.159 Necati'nin Araba Gezintisi Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü



Benzer şekilde *Bisiklet Sürücüsü Hale* sorusunda da hem Necati hem de Hatice iki değişkeni formülde yerine koyarak ilişkilendirebilmiştir. Necati “Hızın ortalaması, alınan yol bölü geçen zaman olduğunu biliyorum.. 6 kilometre yol gitmiş. Demek ki ben alınan yola 6 kilometre yazacağım. T yazdım. Eşittir. Çıkan sonuç. 18. Ortalamanızda. 18 kilometre bölü saniye. Şimdi 6 ile 18'i sadeleştirdim. 3 çıktı. Demek ki T'ne çıktı. 1 bölü 3. Şimdi burada şimdi biz yaptığımızda alınan hızı zaman, saat türünden yazıyoruz.

Eğer 1 saat 60 dakikaysa... Demek ki 1 bölü 3. Saat... 20 dakika olacak” şeklinde Hatice ise “Alınan yol, bölü, zaman hızı. Ortalama hızı alıyorum yol 6, hızda 1 / 3 olarak yazdım. 18 Kilometre. Ortalama hız ... ben de bir saat de 60 dakika ortalama olduğuna göre ben de buna bir de üçte çarptım. Zamanla yaptım. Bu da daha 20 dakika olacak.” şeklinde ifade etmiştir. Necati’nin ve Hatice’nin çözümü sırasıyla Görsel 4.160 ve Görsel 4.161 ile verilmiştir.

Görsel 4.160 Necati’nin Bisiklet Sürücüsü Hale Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

BİSİKLET SÜRÜCÜSÜ HALE

Hale, yeni bir bisiklet almıştır. Bisikletin gidonunda bir hız ölçer bulunmaktadır.

Hızölçer, Hale’nin gittiği mesafeyi ve yolculuğundaki ortalama hızını gösterebilmektedir.

Soru: Hale, teyzesinin evine gitmek için 6 km bisiklet sürmüştür. Hızölçer, yolculuğunun tamamı için Hale’nin ortalama hızının 18 km/h olduğunu göstermiştir. Buna göre, aşağıdaki önermelerden hangisi doğrudur?

A. Hale’nin, teyzesinin evine gitmesi 20 dakika sürmüştür.
 B. Hale’nin, teyzesinin evine gitmesi 30 dakika sürmüştür.
 C. Hale’nin, teyzesinin evine gitmesi 3 saat sürmüştür.
 D. Hale’nin, teyzesinin evine gitmesinin ne kadar sürdüğünü söylemek mümkün değildir.

$$\frac{6}{t} = 18$$

$$t = \frac{1}{3}$$

$$1 \rightarrow \text{Saat}$$

$$\frac{1}{3} \rightarrow 20 \text{ dk}$$

Görsel 4.161 Hatice’nin Bisiklet Sürücüsü Hale Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

BİSİKLET SÜRÜCÜSÜ HALE

Hale, yeni bir bisiklet almıştır. Bisikletin gidonunda bir hız ölçer bulunmaktadır.

Hızölçer, Hale’nin gittiği mesafeyi ve yolculuğundaki ortalama hızını gösterebilmektedir.

Soru: Hale, teyzesinin evine gitmek için 6 km bisiklet sürmüştür. Hızölçer, yolculuğunun tamamı için Hale’nin ortalama hızının 18 km/h olduğunu göstermiştir. Buna göre, aşağıdaki önermelerden hangisi doğrudur?

A. Hale’nin, teyzesinin evine gitmesi 20 dakika sürmüştür.
 B. Hale’nin, teyzesinin evine gitmesi 30 dakika sürmüştür.
 C. Hale’nin, teyzesinin evine gitmesi 3 saat sürmüştür.
 D. Hale’nin, teyzesinin evine gitmesinin ne kadar sürdüğünü söylemek mümkün değildir.

$$\frac{6}{t} = 18$$

$$t = \frac{1}{3}$$

$$1 \rightarrow \text{Saat}$$

$$\frac{1}{3} \rightarrow 20 \text{ dk}$$

İlişkilendirme esnasında hem Necati hem de Hatice kısmen de olsa gerekçe sunabilmektedirler. Ancak Necati ikiden fazla değişkeni ilişkilendirebilirken Hatice ise ilişkilendirememektedir. Necati “Burada belli bir formül varmış. Biz bunu işte arabanın aldıkları puanı hesaplamak için. Ama işte Ca arabası işte o formülü beğenmemiş ve kendine bir formül yapmış ve o formül sayesinde o birinci olmuş. Yani işte en yüksek puan almış. Demek ki burada şöyle yapalım. İşte onun aldığı en iyi yani işte puanı yüksek

olduğu yerlerde kat sayısı daha büyük yapalım puanı düşük olduğu yerlerde kat sayısı küçük yapsak diğerleri yüksek puanı yüksek olsun diyelim puanı çok yüksek olan yerde yüksek yaptığımızda ve puanı düşük olan yerde düşük yaptığımızda sonuç çıkar ben e'nin kat sayısına 3 e dedim y'ye 1 d'ye 2 2 kat sayısı verdim. Ca arabasının puanı 26 M2 de 20 çıkıyor puanı, SP şey 24 çıkıyor, M1 de öyle çıkıyor KK'da 25 çıkıyor. Demek ki burada birinci olan Ca. Y, E'den büyük olmaması lazım. Çünkü M1, 3 almış. Ama şey, Y'de M1, 3 almış. Ama Ca, Y'de 1 almış. Hani Y'nin katsayısını büyük yaparsak... ..demek ki M1, Ca'dan daha büyük çıkabilir. Zaten burada 24 çıktı. Aradaki fark 2, B3 çıkabilir.” şeklinde katsayıları ikiden fazla değişkeni göz önüne alarak ilişkilendirmeyi uygun gerekçeler sunarak başarmıştır. Hatice ise “Toplam puan hesabını için kullanan kuralı katsayı olmadan düşünüyor. Bende yeni bir kural buldum. A iyi, tamam, sonra bunu bir bir sonra 3 yaptım üstte vardı çarptım. Tamam. Puanı 21 buldum en çok. Almıştır sonra da. Kk böyle böylece gidiyor, yani Ca arabası kazanmış olur.” şeklinde katsayı yerine üstte tabloda yer alan değerleri atayarak işlem yaptığını ifade etmiştir. Tesadüfi olarak cevap doğru gelse de aslında ikiden fazla değişken arasında istenilen çıkarımı yaparak katsayıları belirleyememiştir (Görsel 4. 162 ve Görsel 4.163).

Görsel 4.162 Necati'nin En İyi Araba 2 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

EN İYİ ARABA

Bir araba dergisi, yeni arabaları değerlendirmek için bir puanlama sistemi kullanmakta ve "Yılın Arabası" ödülünü en yüksek toplam puanı olan arabaya vermektedir. Beş yeni araba değerlendirilmiş ve aldıkları puanlar tabloda gösterilmiştir.

Araba	Emniyet Özellikleri (E)	Yakıt Verimliliği (Y)	Dış Görünüş (D)	İç Bağlantılar (İ)
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	3
N1	1	3	3	2
KK	3	2	3	2

Puanlar aşağıdaki şekilde yorumlanmaktadır:

3 puan = Mükemmel 2 puan = İyi 1 puan = Orta

Soru : "Ca" arabasının üreticisi, toplam puan hesabı için kullanılan kuralın adil olmadığını düşünüyor. Toplam puanı hesaplamak için öyle bir kural yazınız ki ödülü kazanan araba "Ca" olsun. Sizin kuralı dört değişkenin hepsini kapsmalı ve aşağıdaki eşitlikte bırakılan dört boşluğa pozitif sayı yerleştirerek kuralınızı yazmalısınız.

Toplam puan = $3E + 1Y + 2D + 3I$

Görsel 4.163 Hatice'nin En İyi Araba 2 Sorusuna İlişkin Görüşmedeki Çözümü

Araba	Emniyet Özellikleri (E)	Yakıt Verimliliği (Y)	Dış Görünüş (D)	İç Bağlantılar (İ)
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	2
N1	1	3	3	3
KK	3	2	3	2

Puanlar aşağıdaki şekilde yorumlanmaktadır:

3 puan = Mükemmel 2 puan = İyi 1 puan = Orta

Soru : "Ca" arabasının üreticisi, toplam puan hesabı için kullanılan kuralın adil olmadığını düşünüyor. Toplam puanı hesaplamak için öyle bir kural yazınız ki ödülü kazanan araba "Ca" olsun. Sizin kuralınız dört değişkenin hepsini kapsamalı ve aşağıdaki eşitlikte bırakılan dört boşluğa pozitif sayılar yerleştirerek kuralınızı yazmalısınız.

Toplam puan = $E + Y + D + I$

Handwritten calculations:

$$\begin{aligned}
 & \Rightarrow 9 \text{ Ca} \\
 & \Rightarrow 8 \text{ M2} \\
 & \Rightarrow 9 \text{ Sp} \\
 & \Rightarrow 10 \text{ N1} \\
 & \Rightarrow 10 \text{ KK}
 \end{aligned}$$

Handwritten calculations for each car model:

$$\begin{aligned}
 \text{Ca} & 9 + 1 + 2 + 3 = 21 \\
 \text{M2} & 6 + 2 + 2 + 6 = 16 \\
 \text{Sp} & 9 + 1 + 3 + 6 = 19 \\
 \text{N1} & 3 + 3 + 3 + 9 = 18 \\
 \text{KK} & 9 + 2 + 3 + 6 = 20
 \end{aligned}$$

Matematikleştirdikleri sonuçları gerçek yaşama ilişkin ifade ederken her ikisi de yapabilmiştir. Hatice *TEKNOFEST'e Hazırlık* öğretiminde "b artarsa frekans artar" şeklinde matematiksel sonucu gerçek yaşama ilişkin ifade edebildiğini göstermiştir. Son görüşmedeki *Araba Gezintisi* sorusunda ya da *Bisiklet Sürücüsü Hale'de* matematiksel sonucu zaman olarak ifade edebilmiştir. Benzer şekilde Necati de *TEKNOFEST'e Hazırlık* öğretiminde "B artarsa frekans artar azalırsa azalır doğru c etkilemez" şeklinde matematiksel sonucu gerçek yaşama ilişkin ifade edebildiğini son görüşmede ise Hatice'ye benzer şekilde *Araba Gezintisi* sorusunda ya da *Bisiklet Sürücüsü Hale'de* matematiksel sonucu zaman olarak ifade edebilmiştir.

Ayrıca her ikisi de sonucun kontrolünü GeoGebra'da deneyerek veya nicel değer atayarak yapmaktadırlar. Örneğin her ikisi de *TEKNOFEST'e Hazırlık* öğretiminde sonucun doğru olup olmadığını kontrol için Geogebra'da denenmesini istemişlerdir. Ayrıca son görüşmede Necati *En İyi Araba 2* sorusunda kontrolü deneme yaparak sağlamak istemiştir.

5 SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu bölümde araştırma bulgularından elde edilen sonuç, tartışma ve öneriler verilmiştir.

5.1 SONUÇ

SBu bölümde ön, orta ve son görüşmelerinden elde edilen bulguların betimsel analizine dayalı olarak, Turner ve arkadaşlarının (2015) geliştirdiği çerçeveye göre katılımcıların matematiksel muhakeme düzeylerine ait sonuçlara ve öğretim sürecine ait bulguların tematik analizine dayalı olarak, PISA 2021 matematik okuryazarlığı çerçevesine göre katılımcıların matematiksel muhakeme gelişimlerine ilişkin elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

Bu araştırmaya yönelik belirlenen araştırma sorularının ilkinde katılımcıların öğretim öncesi matematiksel muhakeme düzeylerinin nasıl olduğunun incelenmesi amaçlanmıştır. Araştırma sürecinin başında PISA-1 testine dayalı yapılan görüşme sonucunda belirlenen katılımcılar Turner ve arkadaşlarının (2015) geliştirdiği matematiksel muhakeme düzeylerine göre incelendiği zaman sırasıyla Grup 1’de yer alan Fatime’nin en yüksek olan üçüncü düzeyde, Grup 2 temsilcilerinin ikinci düzeyde, Grup 3 temsilcilerinin birinci düzeyde ve Grup 4 temsilcilerinin ise en alt düzey olan sıfırıncı düzeyde olduğu anlaşılmıştır.

Araştırma öncesinde uygulanan PISA-1 testi sonrası gerçekleştirilen ön görüşmeye göre katılımcılardan düzeyi 3 olan Fatime’nin matematik okuryazarlığına ait tüm süreçlerde soruları çözmek için gerekli olan matematiksel muhakeme yeterliliğini gösterdiği görülmüştür. Gerçek yaşamda verilen problemin matematikleştirilme aşaması olan formüle etme sürecinde soruda verilenleri ve isteneni anlamlandırırken gerekçeleriyle ifade edebilmiştir. Örneğin *Gazete Satma 1* sorusunda verilen ortalama kavramını doğru ve eksiksiz bir şekilde bağlama özgü anlamlandırabilmekte, istenilenin ne olduğunu ve amacı kritik noktalara göre gerekçeleriyle belirleyebilmektedir. Matematiksel hale getirilen problemten matematiksel sonuç elde etme aşaması olan yürütme sürecinde matematiği oldukça etkin kullanabilmektedir. Ön görüşmedeki tüm sorularda verilen işlemleri neden ve nasıl yaptığını açıklayarak eksiksiz ve doğru olarak yapabilmıştır. Elde edilen matematiksel sonucun tekrar gerçek yaşama ilikin ifade edildiği aşama olan yorumlama ve değerlendirme sürecinde ise elde ettiği matematiksel sonuçları gerçek yaşama aktarabilmiştir. Örneğin *Bisiklet Sürücüsü Hale 1* adlı soruda

elde ettiği matematiksel sonuca dayalı her bir şık için gerçek yaşamdan gerekçe sunarak doğru cevabı bulmuştur. Grup 1 temsilcisi Fatime problemde verilenleri ve isteneni ifade ederken sadece gerekli verileri kullanarak ifade edebilmektedir. Amacı belirleme aşamasında kritik noktaları ele alarak belirlediği, amaca dayalı çözüm oluşturken de kritik noktaları gözettiği anlaşılmıştır. Gerçek yaşama uygun çözümü kolaylıkla matematikleştirip matematiksel sonuca ulaşabilmektedir. Bu esnada iki veya daha fazla değişkeni birbiriyle ilişkilendirerek matematiksel modeller oluşturabilmektedir. Örneğin *Bisiklet Sürücüsü Hale 3* sorusunda verilenleri *toplam yol ve toplam zaman* olarak ifade edip istenileni *gidiş gelişe ait ortalama hız ya da ortalama hız* olarak ifade edebilmiştir. Ayrıca dört bilgiyi ilişkilendirip ortalama hızı elde etmesi gerektiğini belirtip ilişkilendirme ile matematiksel sonuca ulaşabilmiştir. Elde edilen matematiksel sonucu ise gerçek yaşama aktarırken zorluk yaşamadığı, hem matematiksel hem de gerçek yaşamdan olmak üzere farklı gerekçeler sunabildiği görülmüştür. Örneğin *Bisiklet Sürücüsü Hale 3* sorusunda gidiş ve dönüşe ayrı ayrı ortalama hızları bulup gerçek yaşamdan “*birim zamanda gittikleri yol miktarı*” şeklinde ifade edebilmiştir. Bu anlamda hem muhakeme hem de gerekçe sunmada oldukça iyidir.

Grup 2 temsilcileri Hamza ve Elif, Turner’a (2015) göre 2. düzey matematiksel muhakeme düzeyine sahiptir. Her ikisi de formüle etme sürecinde problemde verilenleri ve isteneni gerekli verilerle ifade ederken kimi zaman kritik noktaları anlamlandırmakta zorluk yaşamaktadır. Amacı belirleme aşamasında kritik noktaları ele alabilmişlerse hemen amacı belirleyebildikleri kritik noktalar da zorlanmışlarsa çözümde eksiklik yaşadıkları görülmüştür. Örneğin *Gazete Satma 1* sorusunda verilenleri ve isteneni bağlama özgü anlamlandırmalarına rağmen *Bisiklet Sürücüsü Hale 3* sorusunda istenilen gidiş gelişe ait ortalama hız ifadesini gerçek yaşamda anlamlandıramamış hızların aritmetik ortalaması şeklinde ilişkilendirerek yanlış sonuçlar elde etmişlerdir. Yürütme sürecinde gerçek yaşama veya matematiğe dayalı belirledikleri çözümü matematikleştirebilmekte ve matematiksel sonuca ulaşabilmektedirler. Örneğin *En İyi Araba 1* veya *Gazete Satma 1* sorularında değişkenleri belirleyip yerine koyarak matematiksel sonuca kolayca ulaşabilmişlerdir. Bu esnada sadece iki değişkenli verileri ilişkilendirebildikleri daha fazla değişkeni ise ilişkilendirirken zorluk yaşadıkları anlaşılmıştır. Örneğin *Bisiklet Sürücüsü Hale 1* sorusunda yol ve zamana ait iki değişkeni ilişkilendirebilirken *Bisiklet Sürücüsü Hale 3* sorusunda toplam yol ve toplam zamana dair dört bilgiyi ilişkilendirememişlerdir. Yorumlama ve değerlendirme sürecinde ise işlemsel

manipölasyon sonucu elde ettikleri matematiksel sonucu gerçek yaşama aktarırken kimi zaman zorluk yaşamışlardır. Örneğin *Gazete Satma 1* sorusunda sonucu “92 zed haftalık ortalama kazancıdır” şeklinde ifade ederken *Bisiklet Sürücüsü Hale 3* sorusunda elde ettikleri sonucu *toplam yola dair ortalama hız* şeklinde yanlış ifade etmişlerdir.

Grup 3’ün temsilcileri İlknur ve Aydan, Turner’a göre 1. düzey matematiksel muhakeme düzeyine sahiptirler. Hem İlknur hem de Aydan formüle etme sürecinde problemde verilenleri ve isteneni sadece gerekli veriler aracılığıyla ifade etmede zorluk yaşamakta kritik noktaları ele almadan çözüme odaklanmaktadır. Bu da çözümün kritik noktaları gözetmemesi nedeniyle eksikliklere sebep olmaktadır. Ayrıca her ikisinin de yürütme sürecinde iki değişkeni dahi ilişkilendirmede zorluk yaşadığı ek olarak ön görüşmede *Bisiklet Sürücüsü Hale-1* de verilen *ortalama* kavramını anlamlandırma da dahi zorlandıkları açığa çıkmıştır. Gerçek yaşama veya matematiğe dayalı belirledikleri çözümü kısmen matematikleştirebilmekte ve bazen matematiksel sonuca ulaşabilmektedirler. Örneğin *Bisiklet Sürücüsü Hale-3*’te matematiksel işlemleri yapamazken *En İyi Araba 1* sorusunda değişkenleri belirleyip yerine koyarak yapabilmişlerdir. Yorumlama ve değerlendirme sürecinde ise matematiksel sonuçları gerçek yaşama aktarırken de kimi zaman zorluk yaşamışlardır. Örneğin *En İyi Araba 1* sorusunda sonucu “Ca arabasının ağırlıklı ortalama puanı 15 puandır” şeklinde ifade ederken *Bisiklet Sürücüsü Hale 3* sorusunda elde ettikleri sonucu *toplam yola dair ortalama hız* şeklinde yanlış ifade etmişlerdir.

Grup 4’ün temsilcileri Necati ve Hatice, Turner’a (2015) göre en alt olan 0. düzey matematiksel muhakeme düzeyine sahiptirler. Necati ve Hatice formüle etme sürecinde problemde verilenleri ve isteneni çoğu zaman metinde verilenleri yüzeysel ve ya aynen sunma olarak ele almışlardır. İstenen kritik noktaları tam olarak belirleyemedikleri, çözüm aşamasında görmezden geldikleri görülmüştür. Bu da çözümde kritik noktalara dikkat edilmediği için eksikliklere veya yanlışlıklara sebep olmaktadır. Örneğin *En İyi Araba 1* sorusunda her ikisi de değişkenlerin değerini bulmada sıkıntı yaşayıp en iyi olanı bulmak için en yüksek puanları verip yanlış sonuca ulaşmışlardır. Ayrıca hem Necati’nin hem de Hatice’nin iki değişkeni ilişkilendirirken zorluk yaşadığı görülmüştür. Örneğin ön görüşmedeki *Bisiklet Sürücüsü Hale 1* ve 3 sorularında geçen ortalama kavramını hem gerçek yaşamda hem de matematikte yapamadıkları ortaya çıkmıştır. Yürütme sürecinde gerçek yaşama veya matematiğe dayalı belirledikleri çözümü kritik nokta gözetmedikleri

için eksik veya yanlış matematikleştirebilmekte ve matematiksel sonuca ulaşmada zorluk yaşamaktadırlar. Bunun için *En İyi Araba 1* örneği tekrar verilebilecektir. Yorumlama ve değerlendirme sürecinde ise matematiksel sonuçları gerçek yaşama aktarmada ise kısmen zorluk yaşamışlardır. Örneğin *Gazete Satma 1* sorusunda sonucu “92 zed haftalık ortalama kazancıdır” şeklinde ifade ederken *Bisiklet Sürücüsü Hale 3* sorusunda elde ettikleri sonucu *toplam yola dair ortalama hız* şeklinde yanlış ifade etmişlerdir.

PISA-1 testi sonrası gerçekleştirilen ön görüşmeye ait bulguların Turner ve arkadaşlarının (2015) matematiksel muhakeme düzeylerine göre betimsel analiz edilmesiyle elde edilen katılımcılara ait matematiksel muhakeme düzeyleriyle ilgili sonuçlar Tablo 5.1 ile verilmiştir.

Tablo 5.1 Ön Görüşmeye Dayalı Katılımcıların Matematiksel Muhakeme Düzeyleri

Gruplar	Katılımcılara ait kod isimler	Ön Görüşme Sonrası Matematiksel Muhakeme Düzeyi
Grup 1	Fatime	3
Grup 2	Hamza Elif	2
Grup 3	İlknur Aydan	1
Grup 4	Necati Hatice	0

Araştırmanın ikinci sorusunda katılımcıların öğretim uygulaması sürecinde matematiksel muhakemelerinin nasıl değiştiğinin incelenmesi amaçlanmıştır. Ancak öğretim sürecinde matematiksel muhakeme gelişiminin incelenebilmesi için öğretimlerin yanı sıra tüm görüşmelerin matematik okuryazarlığı süreçlerine göre bir bütün olarak ele alınması gerektiğinden tüm veriler tekrar analiz edilip yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Ön görüşme sonrası tüm katılımcılarla STEM’e dayalı öğrenme ortamında üç farklı öğretim gerçekleştirilmiştir. Bu etkinliklerde her bir katılımcının aktif katılımının sağlanması çalışılmıştır. Öğretimler sonunda PISA-2 testi uygulanmış ve orta görüşme gerçekleştirilmiştir. Orta görüşme sonunda 3. düzey matematiksel muhakeme yeterliğine

sahip olan Fatime'nin benzeri bir şekilde öğretimlerde ve orta görüşmede matematiksel muhakeme yapmada zorlanmadığı görülmüştür. Matematik okuryazarlığının tüm süreçlerinde etkin olmuştur. Örneğin *Güneş Panelleri'nde* amacı tam olarak gerçeli olarak belirleyebilmiş, kritik noktalara ilişkin “*zaman ayarlı güneş paneli sistemi*” şeklinde çözüm önerisi sunabilmiştir. *TEKNOFEST'e Hazırlık* öğretiminde matematikteki *frekans period kavramıyla ters orantılı* olacak şekilde ilişkilendirip formüldeki *e* değişkeni için doğru çıkarım yapabilmiştir. *Dost Araçta* gerçek yaşamdan gerekçelere dayanarak deponun şekline bağlı olarak grafikleri ayrı ayrı çizebilmiştir. Ancak ilkinin çizdikten sonra ters koni biçimine ilişkin “*zaten ters...*” diye de belirterek çizimi için grafiğin elde edilebileceğini belirtmiştir. *TEKNOFEST'e Hazırlık* öğretiminde matematiksel değişkenin soru bağlamındaki sese ilişkin neye karşılık geldiğini belirlerken gerekçeli bir şekilde frekansla doğru şekilde ilişkilendirip frekans değeri büyükse ince sese, değilse kalın sese karşılık getirmiştir.

Grup 2'nin temsilcileri 2. düzey matematiksel muhakeme düzeyine sahip Hamza ve Elif ise formüle etme sürecinde problemde verilenleri ve isteneni sadece gerekli verilerle ifade edebilmede ve kritik noktaları tam ve eksiksiz anlamlandırmakta zorluk yaşamaktadır. Amacı belirlerken tıpkı öğretimlerde olduğu gibi eksik belirledikleri görülmüştür. Örneğin *Güneş Panellerinde* Hamza kritik noktaya ilişkin yanlış gerekçe sunarak *toplam verimlilikle birim orandaki verimliliği* karıştırmıştır. Elif ise görsel temsil üzerinden ilerleyen çözüm sürecinde kullanılan değişkenlerin matematiksel olarak karşılıkları belirlenirken *gün uzunluğuna* dair yanlış ifade vermiştir. Yürütme sürecinde belirledikleri çözümü matematikleştirip matematiksel sonuca ulaşabilmektedirler. Örneğin *TEKNOFEST'e Hazırlık* öğretiminde her ikisi de matematikteki görselden cebirsel temsile geçiş için görsel üzerindeki noktaları söyleyerek parbole ait matematiksel denklemi bulmaya yönelmiş ve gerekçelerle denklemi elde etmişlerdir. Ancak bu işlemi sadece iki farklı veriyi ilişkilendirebildikleri daha fazlasını ise ilişkilendirmede zorluk yaşadıkları anlaşılmıştır. *TEKNOFEST'e Hazırlık* öğretiminde elde ettikleri ikiden fazla değişkenli denklemde Elif “*Periyotla frekans aynı etkiler*” şeklinde yanlış çıkarım yaparken Hamza ise ilk başta sessiz kalmış ancak GeoGebrada değişkenlerin değeri değiştirilince onaylayabilmiştir. Ayrıca orta görüşmedeki İnternette Sohbet sorusunda Elif gerekli ilişkilendirmeyi kurarken Hamza kuramamıştır. Bu durum Elifin ikiden fazla ilişkilendirmeyi anlamlandırmaya başladığını gösterse de Hamza hala yapamamaktadır. Yorumlama ve değerlendirme sürecinde işlemsel manipülasyon sonucu

elde ettikleri matematiksel sonucu gerçek yaşama dair aktarırken kimi zaman zorluk yaşamaya devam etmişlerdir. *Güneş Panellerinde* çözüme yönelik görsel temsil çizimi istenince Elif hemen bir parabol temsili çizmiş ve matematikteki görsel temsillerin çözümdeki anlamına yönelik ifadelerinde de y eksenini denilen değişken hariç geriye kalanları doğru olarak gerçek yaşama aktarmıştır. Parabol üzerinde ele aldığı noktaların gerçek hayatta neye karşılık geldiklerini de ifade ederken de bazılarını doğru bazılarını yanlış ifade etmiştir. Hamza ise *TEKNOFEST'e Hazırlık* öğretiminde matematiksel sonuca bağlı olarak kişileri ses frekanslarına dayalı seslerinin kalınlıklarını belirleyip uygun olmayanları eleyebilmiştir. Ancak matematiksel değişkenlerin soru bağlamındaki sese ilişkin neye karşılık geldiğini belirlerken yükseklikle yanlış şekilde ilişkilendirmiştir.

Grup 3'ün temsilcilerinden 1. düzey matematiksel muhakeme düzeyine sahip İlknur ve Aydan ise formüle etme sürecinde ikisi de problemde verilenleri ve isteneni gerekçeleriyle ifade etmede kısmen daha iyidirler. Örneğin *Arabanın Su Deposu* öğretiminde her ikisi de verileni ve isteneni kolaylıkla ifade edebilmektedir. Ancak kritik noktaları tam ve eksiksiz anlamlandırmada zorluk yaşamaları devam etmektedir. Ayrıca amacı ele alırken tıpkı orta görüşmenin son sorusu olan *İnternette Sohbet* sorusunda olduğu gibi amacı eksik belirledikleri görülmüştür. Yürütme sürecinde ise belirledikleri çözümü matematikleştirerek bir matematiksel sonuca ulaşabilmektedirler. Ancak halen iki veriyi ilişkilendirebildikleri daha fazlasını ise ilişkilendirirken zorluk yaşadıkları görülmüştür. Örneğin orta görüşmedeki *İnternette Sohbet* sorusunda ikisi de ilişkiyi kuramayıp soruyu çözememişlerdir. Yorumlama ve değerlendirme sürecinde işlemsel manipülasyon sonucu elde ettikleri matematiksel sonucu gerçek yaşama aktarmada yaşadıkları zorluk devam etmiştir. Örneğin *Güneş Panelleri* öğretiminde buldukları matematiksel sonucu gerçek yaşamda ifade ederken her ikisi de doğru anlamlandırma yapamamış ve y değişkeni için " y eksenini güneşin gelme açısı..." şeklinde yanlış çıkarımda bulunmuşlardır.

Grup 4'teki temsilcilerden 0. düzey matematiksel muhakeme düzeyine sahip Necati ve Hatice ise matematik okuryazarlığının formüle etme sürecinde Necati kısmen problemde verilenleri ve isteneni ifade ederken gerekli verileri sunabilse de gerçek yaşamadan sunduğu gerekçeler kritik noktaları doğru bir şekilde ele alıp amacı belirlemekte zorluk yaşamasına sebep olmuştur. Örneğin *Güneş Panelleri* öğretiminde birçok farklı çözüm bulmasına rağmen gerçek yaşama dayalı sunduğu gerekçeleri

nedeniyle amacı belirlemede zorlanmıştır. Hatice ise çoğu zaman verilenleri ve isteneni yüzeysel olarak ifade etmekte ve arkadaşlarının ifadelerine katılmaktadır. Örneğin *Arabanın Su Deposu* öğretiminde kritik noktaları belirlemede oldukça zorlanmış ve anlamlandıramamıştır. Bu nedenle de suskunluğunu devam ettirmiştir. Yürütme sürecinde ise Necati, Hatice'ye göre ele aldığı çözümü matematikleştirerek bir matematiksel sonuca ulaşabilmede öncüdür. Ancak her ikisi de iki farklı veriyi ilişkilendirmede zorluk yaşamaktadır. Örneğin *Güneş Panelleri* öğretiminde öğle saatine ilişkin aritmetik ortalamayı bulmada her ikisi de problem yaşamışlardır. Yorumlama ve değerlendirme sürecinde matematiksel sonucu elde ettikleri matematiksel sonucu gerçek yaşama aktarmada yaşadıkları zorluk devam etmiştir. Örneğin *Güneş Panelleri* öğretiminde buldukları sonucu gerçek yaşamda ifade ederken her ikisi de doğru anlamlandırma yapamamışlardır. *Dost Araç* öğretiminde Hatice hem grafiği yanlış çizmiş hem de benzer şekilde “*eşit miktarda azalma*”ya odaklanarak sabit ve doğrusal fonksiyonu anlamlandırma ve ayırt etmeye dair zorluk yaşadığını göstermiştir.

Üç öğretim sonrası PISA-2 testi uygulanmış ve ardından katılımcılarla birebir orta görüşmeler gerçekleştirilmiştir.

Üçüncü düzey matematiksel muhakeme yeterliğine sahip olan Fatime'nin öğretimlerde ve orta görüşmede muhakeme yapmada zorlanmadığı görülmüştür. Matematik okuryazarlığının tüm süreçlerinde etkin olmaya devam etmiştir. Formüle etme sürecinde özellikle amacı tam ve eksiksiz belirlemede çoğu zaman öncülük etmiştir. Örneğin *Arıların Çiçek Bulma Oyunu* adlı öğretimde her bir soruda amacı tam olarak belirleyebilmiştir. Yürütme sürecinde ikiden fazla veriyi ilişkilendirmede öncülük ederek matematiksel sonucu doğrulamalarında yardımcı olmuştur. Örneğin *Depreme Dayanıklı Kolonlarda* çözümde kaç basamak olduğu bilinmediği için basamak sayısına n değişkenini atayarak matematiksel işlemleri yürüterek aralık şeklindeki matematiksel sonuca ulaşmıştır. Yorumlama ve değerlendirme sürecinde ise elde ettiği matematiksel sonuçları gerçek yaşamda gerekçeleriyle anlamlandırabilmiştir. Örneğin orta görüşmede *Büyüme* sorusunda sonuca ulaşırken çözüm kağıdında *ortalamanın* bağlama özgü *yaklaşık* anlamını kullanarak “*ortalama 5 artarken*” şeklinde yazmıştır (Görsel 4.66). Bu durum matematikteki grafik temsiline dayalı gerçek yaşamdan açıklamalar yapabildiğini göstermektedir.

İkinci düzey matematiksel muhakeme yeterliğine sahip olan Elif ve Hamza ise öğretimlerde ve orta görüşmede muhakeme yapmada daha rahat oldukları görülmüştür. Formüle etme sürecinde her ikisi de amacı doğru belirlemede etkin rol oynamışlardır. Örneğin *Teleskop* adlı öğretimde Elif kritik noktaları ele alıp amacı tam olarak belirleyebilmiştir. Hamza ise ona gerekçe sunabilmiştir. Yürütme sürecinde Elif matematiği iyi kullandığını ön plana çıkarmıştır. Ayrıca ikiden fazla veriyi bile ilişkilendirip matematiksel sonucu elde edebilmiştir. Ancak çoğu zaman deneme yanılma veya nicelleştirmeye başvurduğu görülmüştür. Hamza da benzer şekilde iki değişkeni ilişkilendirebilirken üç değişken için zorlanmaktadır. Örneğin orta görüşmedeki *İnternette Sohbet* sorusunda Elif çözümde iki yerel saat arasındaki farkını, uyku ve okul saatlerini de ilişkilendirerek soruda istenen konuşma aralıklarını elde edebilirken Hamza çıkarımları birbiriyle tam olarak ilişkilendirememiş uygun saat aralıklarını oluşturamamış, çözümü eksik elde etmiştir. Ayrıca Hamza doğruluğunu kontrol etmek için de sayı doğrusu ile yaptığı işlemi tekrar edip *emin* olmaya çalışmıştır. Yorumlama ve değerlendirme sürecinde ise her ikisi de matematiksel sonuçları gerçek yaşamda gerekçeleriyle anlamlandırabilmektedirler. Örneğin orta görüşmedeki *Yarış Arabası'nda* her ikisi de grafik temsilini gerçek yaşama dayalı olarak ifade edebilmişlerdir. Ayrıca *Teleskop* adlı öğretimde temsiller aracılığıyla gerçek yaşamdan gerekçeler sunup matematikleştirdiklerini gerçek yaşamda ifade etmiştir (Görsel 4.97). Hamza bu öğretimde hem çekim kuvvetleriyle ilgili kritik noktaya hem de yakın çekimle ilgili kritik noktaya dair gerçek yaşama dair gerekçe oluşturan tek katılımcıdır.

Birinci düzey matematiksel muhakeme yeterliğine sahip olan İlknur ve Aydan ise öğretimlerde ve orta görüşmede muhakeme yapmada araştırma sürecinin başına göre daha iyi oldukları görülmüştür. Formüle etme sürecinde hem Aydan hem de İlknur verilenleri ve isteneni ayırt etmede tıpkı *Depreme Dayanıklı Kolonlarda* olduğu gibi etkin rol oynamıştır. Amacı doğru belirlemede kritik noktaları ifade edebilseler de Aydan henüz hepsini ifade edememektedir. Örneğin *Arıların Çiçek Bulma Oyunu* adlı öğretimde İlknur kritik noktaları belirleyip amacı ifade edebilse de Aydan daha sonra gerekçe sunabilmiştir. Yürütme sürecinde ise hem Aydan hem de İlknur matematiği daha iyi kullanabilmekte ve ikisi de gerekçe sunabilmektedirler. Ancak ikisi de ikiden fazla veriyi bile ilişkilendirmede zorluk yaşamaya devam etmişlerdir. Matematiksel sonucu deneme yanılma veya nicelleştirmeye dayalı olarak elde ettikleri görülmüştür. Örneğin orta görüşmedeki *İnternette Sohbet* sorusunda hem İlknur hem de Aydan ikiden fazla veriyi

ilişkilendirmeye çalışsa da ikisi de zorlanmışlardır. Sorunun çözümünde iki yerel saat arasındaki farkı, uyku ve okul saatlerini de dikkate alarak birden fazla çıkarım yapmış, ancak çıkarımları sentezleyememiş uygun saat aralıklarını oluşturamamıştır. Yorumlama ve değerlendirme sürecinde ise her ikisi de matematiksel sonuçları gerçek yaşama dayalı gerekçeli olarak ifade edebilmektedirler. Örneğin orta görüşmedeki *Yarış Arabası* sorusunda her ikisi de hıza ait grafiğe bakarak hızın azalmasını yoldaki viraja bağlamıştır. Ardından grafikteki hız azalmasıyla virajları ilişkilendirip toplamda üç dönüş noktası olacağı çıkarımında bulunup gerçek hayatta kavisli yolu bulabilmişlerdir.

Sıfırıncı düzey matematiksel muhakeme yeterliğine sahip olan Necati ve Hatice ise öğretimlerde ve orta görüşmede muhakeme yapmada araştırma sürecinin başına göre gelişmişlerdir. Formüle etme sürecinde Necati verilenleri ve isteneni ayırt etmede kimi zaman etkin rol oynamıştır. Ancak hala gerçek yaşama dayalı yanlış gerekçe sunmaları devam ettiği için amacı doğru belirlemede sıkıntı yaşayabilmektedir. Örneğin *Depreme Dayanıklı Kolonlar* adlı öğretimde Necati kritik noktaları göz ardı edip amaca yönelik çözüm bulmada sıkıntı yaşamıştır. Hatice ise herkesin nasıl yaptığını izleyip soru çözümünü takip etmeyi seçmiştir. Yürütme sürecinde ise hem Necati hem de Hatice basit işlemlerde gayet iyi iken iki değişkenli matematiksel işlemlerde veya grafiğe aktarımda Hatice oldukça zorlanmakta ve başkalarından yardım beklemektedir. Örneğin *Uzay Teleskopları* adlı öğretimde Necati tüm işlemlerde etkin iken Hatice ise sadece basit işlemleri yapabilmektedir. Necati birçok matematiksel kavramı daha hızlı anlamlandırabilmektedir. Örneğin *ortalama* kavramına dair her ikisi de yanlış anlamlandırırken Necati ilk üç öğretim sonrası anlamlandırmış ama Hatice sadece işlemsel olarak yapabilmektedir. Ancak her ikisi de halen ikiden fazla veriyi ilişkilendirmede zorluk yaşamaktadırlar. Ayrıca Hatice orta görüşmede iki değişkeni birbiriyle ilişkilendirmesi gereken *Yarış Arabasının Hızı* adlı soruda verilen grafik için grafikteki hızı takip edip aynı zamanda pistteki dönüşlerle de aynı olduğunu gösterip pistin temsili yanlış bulmuştur. Yorumlama ve değerlendirme sürecinde ise Necati kritik noktalara göz ardı etmezse gerçek yaşama dayalı anlamlandırabilirken Hatice basit düzeyde olan tek değişkenli veya bilindik durumları yapabilmektedir. İkisi de matematiksel sonuçları gerçek yaşama dayalı gerekçeli olarak ifade edebilmektedirler. Örneğin *Depreme Dayanıklı Kolonlar* adlı öğretimde Necati tüm detaylarıyla gerçek yaşamda anlamlandırabilirken Hatice basamak sayısını üç için değerlendirebilmiştir.

Katılımcıların araştırma sürecindeki ön ve orta görüşme bulgularının analizine dayalı matematiksel muhakeme düzeyleri Tablo 5.2 ile verilmiştir.

Tablo 5.2 Katılımcıların Ön ve Orta Görüşmelerinin Analizine Dayalı Matematiksel Muhakeme Düzeyleri

Gruplar	Katılımcılara Ait Kod İsimler	Matematiksel Muhakeme Düzeyi	
		Ön Görüşme	Orta Görüşme
Grup 1	Fatime	3	3
Grup 2	Hamza	2	2
	Elif	2	3
Grup 3	İlknur	1	2
	Aydan	1	2
Grup 4	Necati	0	2
	Hatice	0	1

Araştırma sürecinde altı öğretim gerçekleştirildikten sonra PISA-3 testi yapıp ardından tüm katılımcılarla birebir son görüşmeler yapılmıştır.

Üçüncü düzey matematiksel muhakemeye sahip olan Fatime'nin tıpkı araştırmanın diğer süreçlerinde olduğu gibi son görüşmede de matematiksel muhakeme yapmada zorluk yaşamadığı görülmüştür. Formüle etme sürecinde verilenleri ve istenileni gerçek yaşamda anlamlandırırken bağlama dair ifadeler sunabilmektedir. Örneğin *Bisiklet Sürücüsü Hale 2* sorusunda verilen *ortalama* kavramını diğer görüşmelerde olduğu gibi gerçek yaşama dayalı olarak anlamlandırabilmiştir. *Fuji Dağı'na Tırmanış* sorusunda amaca dair kritik noktaları da ayırt edebilmiştir. Yürütme sürecinde ise değişkenlerin değerini bulup matematiksel sonuca ulaşırken uygun gerekçeyi sunabilmektedir. Örneğin *En İyi Araba 2* sorusunda her bir arabaya ait değişken değerlerini bularak katsayılarını kendi belirlediği formülde yerine yazıp tüm arabalara ait

toplam puanları bulabilmiştir (Görsel 4.129). Değişkenleri birbiriyle gerekçeli olarak ilişkilendirebilmekte ve bu ilişkilendirmeyi gerçek yaşamdan ifadelerle de anlamlandırabilmektedir. *Fuji Dağı'na Tırmanış* sorusunda kişi sayısı ve süreyi ilişkilendirerek günlük ortalama kişi sayısı ortalama kavramına dayalı olarak matematik sonuca ulaştırmıştır (Görsel 4.130). Benzer şekilde iki değişkene ait matematiksel verileri ilişkilendirerek gerçek yaşama dayalı anlamlandırıp gerekçe sunarak gerçek yaşamdan sonuca ulaşabilmektedir. Son görüşmedeki *Bisiklet Sürücüsü Hale 2* sorusunda verilen yol ve ortalama hıza ait iki değişkeni ilişkilendirerek süreyi elde edip ardından her bir şık için gerekçe sunup doğru cevabı işaretlemiştir. Ayrıca *Araba Gezintisi* sorusunda sonuçları kolaylıkla gerçek yaşama dayalı ifade edebilmiştir. Bu arada Fatime'nin araştırma sürecinin başında matematiksel muhakeme düzeyi 3 iken araştırma sonunda da düzeyi 3 olarak belirlenmiştir.

İkinci düzey matematiksel muhakeme yeterliğine sahip olan Elif ve Hamza ise son görüşmede muhakeme yapmada daha rahat oldukları görülmüştür. Her iki temsilci de problem durumunda verilenleri ve isteneni gerçek yaşamda anlamlandırırken bağlama dair açıklamalar yapabilmektedir. Ayrıca verilenleri anlamlandırırken nicel değerler verebilmektedirler. Örneğin *Bisiklet Sürücüsü Hale 2* sorusunda ve *Fuji Dağı'na Tırmanış* sorusunda verilen ortalama kavramını diğer görüşmelerde olduğu gibi gerçek yaşama dayalı olarak anlamlandırabilmişlerdir. Öğretimlerde kimi zaman amaca dair kritik noktaları belirleyebilmede zorlanırken son görüşmede zorlanmamışlardır. Örneğin *Fuji Dağı'na Tırmanış* sorusunda “ 1 Temmuz'dan 27 Ağustos'a kadar” ifadesini anlamlandırırken Temmuz ayını 31 gün ve Ağustos'ta geçen süreyi ise 27 gün alarak toplam süreyi 58 gün olarak hesap edip gün sayısına bölerek sonuca ulaşabilmişlerdir. Yürütme sürecinde değişkenlerin değerini bulup matematiksel sonuca ulaşırken uygun gerekçe sunabilmektedir. Örneğin son *En İyi Araba 2* sorusunda her ikisi de Ca arabasına yönelik en iyi puanı veren formülün katsayılarını bulmak için farklı değerler verip değişken değerlerine dayalı formülde uygun yerlerine yazarak cebirsel manipülasyon yapabilmışlerdir (Görsel 4.134 ve Görsel 4.135). Ayrıca iki değişkeni ilişkilendirme için *Araba Gezintisi* sorusunda hem Hamza hem de Elif soruda yer alan grafikten hız ve zaman şeklindeki iki değişken arasındaki ilişkiyi anlamlandırıp gerekçe oluşturabilmiştir. İki den fazla değişkeni ilişkilendirmede tüm süreç boyunca zorluk yaşamalarına rağmen son görüşmedeki *En İyi Araba 2* sorusunda Elif denemeyle yapabilirken Hamza ilk önce istenmeyenleri sıfırlayıp daha sonra toplamsal olarak arttırarak sonucu rastgele

bulmuştur. Yorumlama ve değerlendirme sürecinde ise her ikisi de matematiksel sonuçları gerçek yaşamda gerekçeleriyle anlamlandırabilmektedirler. Örneğin *Araba Gezintisi* sorusunda yer alan grafikten hız ve zaman şeklindeki iki değişken arasındaki ilişkiyi gerçek yaşama dayalı anlamlandırıp gerekçe oluşturabilmişlerdir. Ayrıca Elif'in araştırma sürecinin başında matematiksel muhakeme düzeyi 2 iken araştırma sonunda da düzeyi 3 olarak belirlenmiştir. Hamza'nın ise matematiksel muhakeme düzeyi 2 olarak belirlenmiştir. Bu anlamda aynı gruptan iki temsilci farklılaşmıştır.

Birinci düzey matematiksel muhakeme yeterliğine sahip olan Aydan ve İlknur son görüşmede formüle etme sürecine dair verilenleri ve istenileni gerçek yaşamda anlamlandırırken bağlama dair ifadeler sunabilmişlerdir. Örneğin *Bisiklet Sürücüsü Hale 2* sorusundaki *ortalama* kavramını daha önceki görüşmelerde matematikteki aritmetik ortalama ile ilişkilendirmişlerdir. Yürütme sürecinde metinde verilen değişkenlerin değerini formülde yerine koyup matematiksel sonuca ulaşabilmekte ve uygun gerekçeleri sunabilmektedir. *En İyi Araba 2* sorusunda arabalara ait farklı değişkenlerin değerlerini bulup katsayılarına göre formülde yerine yazmış ve metindeki tüm arabalara ait toplam puanları ayrı ayrı hesaplayabilmişlerdir (Görsel 4.145 ve Görsel 4.146). İki değişkeni gerekçeli olarak ilişkilendirebilmektedirler. Ayrıca gerçek yaşamdan ifadelerle anlamlandırabilmektedir. Örneğin *Fuji Dağı'na Tırmanış* sorusunda kişi sayısı ve süreye ait değişkenlerin ilişkilendirerek ortalama günde kaç kişinin tırmandığı sorulmuştur. Burada her ikisi de kişi sayısını matematikteki aritmetik ortalama göre ilişkilendirip doğru cevaba yaklaşık olarak alarak ulaşmışlardır. Ancak ikisi de ikiden fazla veriyi bile ilişkilendirmede zorluk yaşamaya devam etmişlerdir. Matematiksel sonucu deneme yanılma veya nicelleştirmeye dayalı olarak elde ettikleri görülmüştür. Örneğin son görüşmedeki *En İyi Araba 2* sorusunda hem İlknur hem de Aydan ikiden fazla veriyi ilişkilendirmeye çalışsa da ikisi de soruyu çözememişlerdir. Yorumlama ve değerlendirme sürecinde ise her ikisi de matematiksel sonuçları gerçek yaşama dayalı gerekçeli olarak ifade edebilmektedirler. Örneğin *Bisiklet Sürücüsü Hale 2'de* yol ve hız ilişkisi iki değişkeni ilişkilendirerek sonucu gerçek yaşamdan ifade edebilmişlerdir. Daha sonra her bir şık için de gerekçe sunmuşlardır (Görsel 4.151 ve 4.152). Benzer şekilde *Araba Gezintisi'nde* de grafikten elde ettiği sonucu gerçek yaşama uygun ifade edebilmişlerdir. Ayrıca İlknur'un ve Aydan'ın araştırma sürecinin başında matematiksel muhakeme düzeyi 1 iken araştırma sonunda da düzeyleri 2 olarak belirlenmiştir. Bu anlamda ikisi de düzey olarak aynıdır.

Sıfırıncı düzey matematiksel muhakeme düzeyine sahip Necati ve Hatice formüle etme sürecinde verilenleri ve istenileni gerçek yaşamda anlamlandırırken bağlama dair ifadeleri kolaylıkla sunabilmektedir. Son görüşmede sorulan *Bisiklet Sürücüsü Hale 2* için verilen *ortalama* kavramını önceki görüşmelere benzer şekilde aktarmışlardır. Yürütme sürecinde soruda verilen değişkenlerin değerini bularak matematiksel manipülasyonla sonuca ulaşabilmekte ve gerekçe sunabilmektedir. *En İyi Araba 2* sorusundaki arabaların değerlerini bulup formülde yerine yazarak puanları bulabilmişlerdir. Ancak Necati ikiden fazla değişken arasında ilişki kurup gerekçe sunarken Hatice ikiden fazla değişkeni ilişkilendirirken zorluk yaşamaktadır. Örneğin hem *Araba Gezintisi* sorusunda hem de *Bisiklet Sürücüsü Hale'de* ikisi de hız ve zaman arasındaki ilişkiyi kolaylıkla ifade edip gerekçe sunarken Hatice soruyu çözebilmesine rağmen gerekçe sunamamıştır. Ayrıca *En İyi Araba 2* sorusunda Necati ilişkilendirmeleri açılayıp gerekçe sunarken Hatice ise tesadüfi olarak doğru cevabı verse de aslında ikiden fazla değişken arasında istenilen çıkarımı yaparak katsayıları belirleyememiştir (Görsel 4.155 ve Görsel 4.156). Bu esnada her ikisi de sonucun kontrolünü GeoGebra'da deneyerek veya nicel değer atayarak yapmaktadırlar. Yorumlama ve değerlendirme sürecine yönelik ise her ikisi de matematiksel sonuçları gerçek yaşama ilişkin verebilmede daha iyidirler. *En İyi Araba 2* ve *Bisiklet Sürücüsü Hale-2* sorularında her ikisi de gerçek yaşama uygun ifade edebilmişlerdir. Ayrıca Necati'nin araştırma sürecinin başında matematiksel muhakeme düzeyi 0 iken araştırma sonunda da düzeyi 3 olarak belirlenmiştir. Hatice'nin ise matematiksel muhakeme düzeyi ise 2 olarak belirlenmiştir. Bu anlamda ikisi de farklılaşmıştır.

Katılımcıların araştırma sürecindeki ön, orta ve son görüşme bulgularının analizine bağlı matematiksel muhakeme düzeyleri Tablo 5.3 ile verilmiştir

Tablo 5.3 Katılımcıların Ön, Orta ve Son Görüşmelerinin Analizine Dayalı Matematiksel Muhakeme Düzeyleri

Gruplar	Katılımcılara Ait Kod İsimler	Matematiksel Muhakeme Düzeyi		
		Ön Görüşme	Orta Görüşme	Son Görüşme
Grup 1	Fatime	3	3	3
Grup 2	Hamza	2	2	2
	Elif	2	3	3
Grup 3	İlknur	1	2	2
	Aydan	1	2	2
Grup 4	Necati	0	2	3
	Hatice	0	1	2

Ancak Hatice'nin her ne kadar PISA-3 testinde iki değişkene ait ilişkilendirmeleri yaptığı görülsede öğretmelerde iki değişkeni ilişkilendirmede kısmen zorluk yaşaması testte ortalama hız gibi iki değişkenli soruların yer almasından kaynaklı olabilir. Öğretim sürecinin aritmetik ortalama kavramına dair destekleyici yapı sunmasından kaynaklı olabilir. *Güneş panelleri ve Uzay Teleskopları* adlı öğretmelerde katılımcılar tarafından kavramın sıkça kullanılması ve son testte Hatice'nin de benzer sorularda işlem olarak ortalamayı uygulayabilmesi bu kavramı anlamlandırmaya başladığını gösterebilir.

Araştırma sonucunda dört farklı gruba ayrılan toplam yedi katılımcının öğretim sonunda kimi zaman kendi grup arkadaşlarından dahi ayrıştığı görülmüştür. Bu durumun nedenleri arasında katılımcıların sahip olduğu kavramsal bilgi eksikliklerini daha hızlı gidermelerinden ve gerçek yaşama dayalı STEM öğrenme ortamından kaynaklanmış olabilir. Örneğin düşük düzeyden Necati *aritmetik ortalama* kavramını gerçek yaşamda da anlamlandırdıktan sonra öğretmelerde de etkin olarak kullanmış ve görüşme öncesi

yapılan ortalama hıza dayalı sorularda daha kolay ilişkilendirme yapıp soruları doğru çözebilmiştir. Bu da muhakeme düzeyinin artmasında etkili olmuştur. Ayrıca STEM'e dayalı öğrenme ortamında kritik noktaları ve amacı belirleyerek uygun çözüm yolunun bulunma durumu da Necati'nin muhakeme gelişiminde etkin rol oynamıştır. Çünkü Necati adlı katılımcının öğretimlerde gerçek yaşamdan uygun olmayan gerekçeler sunarak kendi kendini bile yanıltabildiği görülmüştür.

Araştırmanın son sorusunda yer alan STEM'e dayalı öğrenme ortamının matematiksel muhakemeyi nasıl etki etkilediği sorusuna yönelik sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Gerçek yaşama ilişkin STEM'e dayalı öğrenme ortamında canlandırmaya izin verilmesi *Güneş Panelleri* öğretimindeki olası çözümün uygunluğunun değerlendirilmesinde etkin rol oynamıştır. STEM ortamında yapılan canlandırmanın çizimle örtüşen sonuçlar vermemesi katılımcıları çözümün görsel temsiline ilişkin doğruluğu düşünmeye sevk etmiştir. Canlandırma sonrası çözümün doğruluğuna ilişkin uygun gerekçelerle iddianın yanlışlığını gerçek hayattan gösterebilme imkanı STEM öğrenme ortamından kaynaklanıyor olabilir. Bu duruma çözümün üç boyutlu cisimlerle gerçekleştirmeleri beklenirken katılımcıların iki boyutlu temsillerle çözüm arayışına girmelerinden dolayı kritik noktaları fark edememeleri de yol açmış olabilir. Bu nedenle de öğretimdeki olası çözümün uygunluğunda rol oynamıştır. Ayrıca canlandırma öncesi düşünülmeyen olası durumlar ve kritik noktalar canlandırma sonrası fark edilmiştir. Canlandırma ile *Dost Araç* öğretiminde de yüksekliğe dair kritik noktanın her an değiştiği Fatime tarafından göz önüne alınabilmektedir. Bu da çözümdeki kritik noktanın fark edilmesinde etkin bir roldür. Ancak materyal olarak eğik düzlemin verilmeyişi çözümdeki bir kritik noktanın dikkate alınmayacağına da örnek oluşturmuştur. Materyal olarak verilmeyip sadece metinde yer verilen kritik noktalar dikkate alınamayabilmektedir. Aynı durum *TEKNOFEST'e Hazırlık* öğretimindeki GeoGebra geometrik yazılımında yapılan sürgülere dayalı grafiğin hareketli görünümü için de geçerlidir. Böylece katılımcılar sürgüye bağlı ifade edilen her bir değişkeni gerçek yaşama ilişkin daha kolay anlamlandırabilmişlerdir. *Uzay Teleskopları* öğretiminde GeoGebra da yörünge temsiline ait parabol çiziminin tek nokta ve doğrultman eşliğinde bulundurma imkanı olması da katılımcıların hem geometrik hem de cebirsel olarak parabolü anlamlandırmalarında yardımcı olmuştur.

Ancak GeoGebra’da ele alınan durum ile temsili materyallerin canlandırılması arasında kısmi bir fark vardır. Materyallerle veya temsillerle canlandırma, gerçek yaşamda ele alınacak çözümün kritik noktalarını ve matematiksel sınırlarını belirlemede etkin rol oynamıştır. Bu da matematiksel çözümü doğrudan etkilemiştir. Ancak GeoGebra’da sürgünün hareketi ile geometrik temsilde yapılan canlandırma ve ses dinleme ile matematiksel değişkenlerin anlamlandırılmasında ve matematiksel çözümün sınırlarının bulunmasında etkin olma durumu oluşmuştur. Bu da canlandırmanın geometrik bir yazılım olan GeoGebra’ya göre gerçek yaşama ilişkin çözümün kritik noktalarında daha etkin rol oynayabileceğini göstermiştir.

Ayrıca STEM’e dayalı öğrenme ortamında gerçek yaşama yer verilmesi katılımcıların matematiksel kavramları gerçek yaşamda anlamlandırmalarının yanı sıra gerçek yaşamda verilenleri matematikleştirmelerinde de rol oynamıştır. Örneğin *Arıların Çiçek Bulma Oyunu*’nda gerçek yaşama dair verilen bilgiler ile matematiksel içerikli bir oyun hazırlanarak her bir soru aşamasında matematikleştirme yapılmıştır. Ayrıca o esnada Kosinüs Teoremi elde edilmiştir. Bu durum gerçek yaşama ilişkin STEM’e dayalı öğrenme ortamının matematikte derinleşme imkanı sağladığını da göstermektedir. Benzer durum Depreme Dayanıklı Kolonlarda da ortaya çıkmıştır. Ardışık sayıların toplamına ilişkin bağıntı Necati ve Elif adlı katılımcılar tarafından iki farklı yolla ortaya koyulmuştur. Ayrıca matematikleştirmedeki hatalar da gün yüzüne çıkmıştır. Necati ve Elif’in *TEKNOFEST’e Hazırlık* öğretiminde değişkenleri sabit tutma ve gerçek yaşamda yok saymayı benzer şekilde anlamlandırdıkları ve GeoGebra’da değişkenlere değer atarken ilgili değişkenleri sıfır şeklinde adadıkları ortaya çıkmıştır. Oysa değişkenleri sabit tutma ve ilgili değişkeni yok sayma adına sıfır değeri vermek aynı durum değildir.

Üst düzeyden Fatime ve orta düzeyden temsilciler Hamza ve Elif’in iki değişkeni ilişkilendirip çözüme ulaşabilmedeki süreçte genel performansına dayalı ilişkilendirmeyi matematiksel veya gerçek yaşamdan gerekçelerle dayanaklandırması formüle etme sürecinde isteneni, amacı ve çözümü bulmayı etkilemiştir. Bu durum ilişkilendirmenin önemini vurgularken matematiksel ve gerçek yaşamdan gerekçe sunmanın da önemini gösterir. Gerçekten de öğretimlerde ilişkilendirmede zorluk yaşamayan Fatime birçok öğretimde amacı ve çözümü belirlemede öncü rol oynamıştır. Hamza da benzer şekilde amacın belirlenmesinde ve çözümün bulunmasında *Uydu Teleskopları* öğretiminde temsiller aracılığıyla gerçek yaşamdan gerekçeler sunup matematikleştirdiklerini gerçek

yaşamda ifade etmiştir (Görsel 4.97). Hamza burada hem çekim kuvvetleriyle ilgili kritik noktaya hem de yakın çekimle ilgili kritik noktaya dair gerçek yaşama dair gerekçe oluşturan tek katılımcı olup çözümün bulunmasında önemli roller oynamıştır.

STEM'e dayalı öğrenme ortamında doğrulama ve kontrol etme sürecinde katılımcılar gerçek yaşamdan veya matematiksel olarak çözümü kontrol edebilmişlerdir. Ayrıca doğrulama esnasında birçok katılımcı nicel değerler atayarak doğrulama yapmak isteseler de Elif matematiksel kontrol sağlarken hem geometrik hem de cebirsel kontrol yapabilmiştir.

Hemen hemen her katılımcının matematiksel muhakeme düzeyinde ve performansında görülen gelişmeler STEM'e dayalı öğrenme ortamının matematiksel muhakeme düzeyini desteklediğini göstermektedir. Formüle etme sürecinde kritik noktaların belirlenmesinde, gerçek yaşama uygun çözümün belirlenmesinde etkindir (örneğin *Dost Araç öğretimi*). Yürütme sürecinde özellikle gerçek yaşamdan gerekçeler aracılığıyla matematiksel sınırlandırmaların belirlenmesinde rol oynarken (örneğin *Güneş Panelleri öğretimi*)) yorumlama ve değerlendirme sürecinde de benzer şekilde matematiksel sınırlandırmaların gerçek yaşamda ifade edilmesinde etkindir (örneğin *Depreme Dayanıklı Kolonlar öğretimi*).

Öğretimlerde kimi zaman önce gerçek yaşamdan çözümü bulup sonra matematiksel çözüm belirlenirken kimi zamanda önce matematiksel çözüm bulunup sonra gerçek yaşamdan çözüme aktarılmıştır. Örneğin *Güneş Panelleri* öğretiminde önce panellere dair çözüm bulunup sonra matematikleştirilmiştir. Oysa TEKNOFEST'e Hazırlık öğretiminde önce matematiksel çözüm bulunup sonra gerçek yaşamdan çözüme uyarlanmıştır. Ayrıca matematiksel olarak elde edilen çözümün doğru olup olmadığı gerçek yaşamdan da kontrol edilebilmiştir. Örneğin *Güneş Panelleri'nde* Necati matematiksel denklemle gerçek yaşamda hangi sorulara cevap verebileceği sorulunca çözüm adına yapılan yanlışlığı fark edip ters bir örnekle çözümün yanlış olduğunu doğrulamıştır. Bu anlamda yapılan sorgulamalar ve gerçek yaşam durumu çözümün kontrolünde tetikleyici görevi görmüş olabilir.

5.2 TARTIŞMA

Bu araştırmada 11. sınıf öğrencilerinin STEM'e dayalı öğrenme ortamında matematiksel muhakemelerinin gelişimi amaçlanmıştır. Bu amaca yönelik katılımcıların gerçek yaşama dayalı STEM etkinliklerinin çözümünü grup işbirliği içerisinde yaparken

matematiksel muhakemelerine odaklanılmıştır. Araştırmada yer alan dört farklı gruptan gelen toplam yedi katılımcının gerçekleştirilen öğretimler sonunda kimi zaman kendi gruplarından dahi ayrılarak matematiksel muhakeme düzeylerinde değişiklik yaşadığı görülmüştür. Bazı katılımcıların matematiksel muhakeme düzeyi bir düzey ilerlerken bazılarının ise iki düzey ilerlemiştir. Altı farklı gerçek yaşam durumu içeren STEM'e dayalı öğrenme ortamının katılımcıların matematiksel muhakeme düzeyinde bu etkiyi göstermesi göz ardı edilemeyecek kadar önemlidir. Çünkü fazla sayıda öğretime gerek kalmaksızın matematiksel muhakeme yeterliliğinde iki düzey birden ilerlenilebilmesi oldukça iyi bir gelişmedir. Bu durum gerçek yaşama dayalı STEM öğrenme ortamından kaynaklanmış olabileceğini işaret etmiştir.

Koçyiğit ve Yenilmez (2022) 10. sınıflarla STEM odaklı öğretim sürecinde matematiksel muhakeme becerisini ele almış ve öğrencilerin matematiksel muhakeme becerilerinde artış olduğunu gözlemlemiştir. Yapılan araştırma sonucunun da benzer sonuçlar göstermesi STEM'e dayalı öğrenme ortamının muhakeme üzerindeki etkililiğini göstermektedir. Hermawan ve arkadaşlarının (2019) yaptığı çalışmada fonksiyon ve ilişkiler konusuyla ilgili matematiksel okuryazarlık problemlerinin, muhakeme becerilerini desteklemesi; Özaydın ve arkadaşlarının (2024) farklı matematiksel problem türlerini karşılaştırmalı incelediğinde rutin olmayan problemlerdeki matematiksel muhakeme başarılarının diğer problemlerden daha düşük olduğunu bulması ve Kara Çalışkan'ın (2019) matematikte başarılı olanların rutin olmayan problemleri çözerken matematiksel muhakeme becerilerinde artış olduğunu belirtmesi değişken ve ilişkiler alanına ait gerçek yaşama durumlarının STEM ortamında ele alınmasının matematiksel muhakemeyi geliştirdiğini desteklemiştir. Benzer şekilde öğrencilerinin problem çözme sürecindeki niceliksel muhakemelerini inceleyen Akın (2016) da muhakemenin geliştiğini ve bu yolla desteklenmesi gerektiğini ifade ederek çalışmayı desteklemektedir.

Cai ve arkadaşları (1996) matematiksel düşünme ve muhakeme içeren açık uçlu görevler aracılığıyla matematiksel iletişimi ele alırken bu ortamın iletişimin yanı sıra düşünme ve muhakeme becerilerini de destekleyeceğini iddia etmiştir. Yapılan çalışmada öğretmenin sorgulamaları ve STEM'e dayalı öğrenme ortamının öğrencilere kendilerini rahat hissedip fikirlerini değiştirme imkanı vermesi araştırma sonunda muhakemelerinin gelişiminde benzer şekilde rol oynamıştır. Petchthai ve Poonpaiboonpipat (2021) alan hesaplama konusunda STEM aktivitelerinin matematik okuryazarlığı üzerine etkilerini

incelemek amacıyla yaptığı çalışmada STEM etkinlik kağıtları ile matematik okuryazarlık testleri kullanmış ve birçok öğrencinin STEM etkinliklerinin yapısı formüle etme sürecinde başarıya ulaştığını; ancak testte başarılı olsalar dahi üç öğrencinin yorumlama ve değerlendirmede başarı gösteremediği görülmüştür. Neden olarak da sadece cevapla ilgilenen sorulara alışkın olmaları ve grup çalışmasında zihinsel olarak sürecin yavaş ilerlemesi olabilir, denilmiştir. Yapılan araştırma sonuçları da formüle etme sürecinde benzer sonuçlar göstermiş, katılımcıların formüle etme sürecinde zorluk yaşadığı gözlemlenmiştir.

Aydın ve Derin (2019)'ın matematiksel modellemenin STEM eğitimine katkısını göz ardı etmeyip ortak yönlerinin birlikte kullanılmasını önerdiği çalışması ele alınınca sonuçta elde edilen materyal kullanımının matematiksel modellemeyi olumlu etkilemesi yapılan araştırma sonucunu desteklemiştir. Armutçu'nun (2021) da STEM bağlamında matematiksel modelleme becerileri ile matematik okuryazarlık başarı düzeyleri arasında pozitif yönde yüksek ilişki tespit ettiği çalışması, araştırma sonuçlarında matematiksel muhakemelerinin artışını destekler niteliktedir. Ata Baran (2019) ise öğrencilerin matematiksel modelleme yaklaşımına dayalı öğrenme ortamında matematiksel iletişim becerilerinin geliştiğini ve dolayısıyla matematik okuryazarlıklarının desteklendiğini ortaya koymuştur. Bu çalışmadaki STEM'e dayalı öğrenme ortamında da problemlerin çözümünde matematiksel modellemeden yararlanılarak çözüme ulaşılması çalışmanın sonucunu benzer şekilde desteklenmiştir. Muhakemenin etkin olacağı eğitim anlayışına yönelik ortaya atılan eğitim ihtiyacında (Sumarsih vd., 2018) STEM ve matematik okuryazarlığı çerçevelerinin birlikte kullanımının faydaları göz önüne serilmiştir.

Teknoloji destek içeren öğrenme ortamları ele alındığında Demir ve Zengin (2023) teknoloji destekli işbirlikçi öğrenme ortamının matematiksel muhakeme gelişimindeki olumlu rolünü vurgulamış; Hidayat ve arkadaşları (2022) da benzer şekilde aritmetik diziler ve seriler konusunda probleme dayalı öğrenme yaklaşımıyla ePub formatında geliştirilen e-modülün matematiksel muhakeme gelişiminde geçerli ve pratik olduğunu belirtmiştir. Ayrıca gelişim gösterge olarak varsayımları önerme ve çözümleri mantıksal olarak sonuçlandırmayı verip e-modül kullanarak matematiksel muhakeme gelişimine dair alternatif yol aradığını ifade etmiştir. Bu çalışmalar Bybee(2013) tarafından öne sürülen STEM anlayışının matematiksel muhakeme gelişimi için uygunluğunu işaret etmiş ve sonuçların doğruluğunu da desteklemiştir.

Peng ve Song (2011) çalışmasında bireysel problem çözme etkinliklerinde öğrencilerin farklı çözüm yollarını tercih etmediklerini ifade etseler de bu çalışmada öğrencilerin bazı etkinliklerde çözümünde farklı çözüm yolları kullandıkları görülmüştür. Bu anlamda araştırma sonuçları farklılaşmaktadır.

Araştırma sonuçlarında karşılaşılan matematiksel muhakeme düzeylerindeki ilerlemenin bir diğer sebebi de matematiksel muhakeme testlerinde yer alan aritmetik ortalama kavramının STEM'e dayalı öğrenme ortamında anlamlandırılmaya başlanması olarak görülmüştür.

Al-Salmi'nin (2020) yaptığı çalışmada kavramsal anlayışın gelişmesine paralel olarak Cidde'deki birinci sınıf ortaokul öğrencileri arasında matematikte matematiksel yeterliliğin bileşenlerinden biri olarak kavramsal anlayışı geliştirmede STEM yaklaşımının etkililiği bildirmiştir. Bu durum araştırma sonucunda bir katılımcının *ortalama* kavramını edinmesi sebebiyle matematiksel muhakeme düzeyinin gelişmesine yol açmasıyla yakından ilişkilidir. Kavramsal anlayışın gelişmesi ortalama kavramıyla ilişkili olan sorularda başarılı muhakeme göstermelerde kolaylık göstermiştir.

Jablonski (2022) öğrencilerin matematiksel muhakemelerini farklı problem çözme görevleri bağlamında tanımlamayı amaçladığı çalışmasında öğrencilere fotoğraflar, 3D model veya ortamın kendisi yardımıyla sunulan gerçek nesnelerle problem çözme ve modelleme ile ilişkilere atıfta bulunularak, matematiksel muhakeme için teorik potansiyeller ortaya çıkarmıştır. Sonuçlarda, matematiksel muhakemenin özellikle fotoğraflarla yapılan çalışmalarda gözlemlenebileceğini ve gerçek nesnelerle yapılan çalışmaların genellikle planlama ve stratejilerin keşfi alanında muhakeme etkinliklerini çağrıştırdığını göstermiştir. Ancak bu durum çalışmamızda STEM ortamının formüle etme sürecinde kritik noktaların ve çözümün belirlenmesindeki muhakemeye etkisini desteklerken fotoğraflara yaptığı vurgu çalışmamızın gerçek nesnelerin verildiği zaman muhakemeye yaptığı vurgu ile çelişmektedir.

5.3 ÖNERİLER

Araştırma sonuçlarına dayalı olarak hem uygulamaya hem de ileride yapılabilecek araştırmalara ilişkin önerilere iki başlık altında aşağıda yer verilmiştir.

5.3.1 Uygulamaya yönelik öneriler

- Lise öğrencilerinin matematiksel muhakeme yeterliliklerini geliştirme adına matematik dersleri gerçek yaşama dayalı STEM yaklaşımına uygun bir biçimde desenlenebilir. Ancak STEM etkinliklerinin her bir aşamasında matematik öğretmenlerinin süreçte sorgulama yaptırarak ders sürecini yönlendirmesi daha uygun olacaktır.
- Gerçek yaşama dayalı ve matematik içerikli STEM etkinliklerinin çözümünün her aşamasında öğrencilerin işbirliği içinde olması, tüm olası fikirleri gerekçeleriyle sunabilmeleri Turner ve arkadaşlarının (2015) belirlediği matematiksel muhakeme düzeylerinin yanı sıra PISA 2021 matematik okuryazarlığı çerçevesindeki matematiksel muhakemelerinin de gelişimini destekleyecektir.
- PISA matematik okuryazarlığında ülkemizin daha da yüksek performans gösterebilmesini destekleme adına öğretim programında gerçek yaşama dayalı STEM etkinliklerine yer verilebilir.
- Araştırmanın sonucunda öğretmenlerin öğrenciyi öğrenme ortamında yönlendirmesinin ve sorgulamasının çok önemli olduğunu göstermektedir. Bu nedenle öğretmenlerin kendilerini bu hususta geliştirmek amacıyla hizmet içi eğitim almaları önerilebilir.

4.3.2 İleride yapılabilecek araştırmalara yönelik öneriler

- Gerçek yaşama dayalı öğrenme ortamında STEM etkinliklerinin ortaöğretim öğrencilerinin kavramsal, işlemsel ve bağlamsal bilgilerine dair gelişimlerini ele alan farklı çalışmalar tasarlanabilir.
- Gerçek yaşama dayalı öğrenme ortaöğretim matematik öğretmenlerinin öğrencilerin matematiksel muhakemelerini geliştirmek amacıyla etkinlik planlama, etkinlik sürecini yönetme, sorgulama yapabilmeye dair gelişimlerini izleme adına boylamsal çalışmalar yürütülebilir.
- Gerçek yaşam ve matematik dünyasındaki ilişkilendirme, matematiksel muhakeme yeterlilikleri açısından farklı çerçevelerle ayrı ayrı incelenebilir.
- Ele alınacak herhangi bir matematiksel bağıntının veya formülün ispat süreci gerçek yaşama dayalı STEM ortamında incelenebilir.

KAYNAKÇA

- Akın, A. (2016). *Ortaokul öğrencilerinin matematik okuryazarlıklarının niceliksel muhakemelerinin güçlendirilerek desteklenmesinin incelenmesi*. Yayınlanmamış Doktora Tezi. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi.
- Akın, A., Sezgin, H.S., Alkan, S., Ada, T. ve Güzeller, C.O. (2023). Yükseköğretim kurumları sınavlarında oran-orantı kavramı ile ilgili çıkmış problemlerin matematiksel muhakeme açısından incelenmesi. *Anadolu Journal of Educational Sciences International*, 13(2), 273-302. <https://doi.org/10.18039/ajesi.1194051>
- Alan, B., & Güven, M. (2022). An international concept confusion: A document analysis on the concepts of competence, competency and competent. *Anadolu Journal of Educational Sciences International*, 12(1), 271-293. <https://doi.org/10.18039/ajesi.1004416>
- Almarashdi, H. S., & Jarrah, A. M. (2022). The Impact of a Proposed Mathematics Enrichment Program on UAE Students' Mathematical Literacy Based on the PISA Framework. *Sustainability*, 14(18), 11259. <https://doi.org/10.3390/su141811259>
- Al-Salami and Waslallah F. M. (2020). The effectiveness of using the STEM approach in developing conceptual understanding in mathematics for first year secondary school students, *Proceedings of the 7th Conference on Teaching and Learning Mathematics - Mathematics Education Research Impact and Practice*, Riyadh, Saudi Arabia.
- Ananiadou, K., & Claro, M. (2009). *21st century skills and competences for new millennium learners in OECD countries*. OECD Education Working Papers, No. 41, OECD Publishing Retrieved from <http://dx.doi.org/10.1787/218525261154>
- Asghar, A., Ellington, R., Rice, E., Johnson, F., ve Prime, G. M. (2012). Supporting STEM education in secondary science contexts. *The Interdisciplinary Journal of Problem-based Learning*, 6(2), 85–125. <https://doi.org/10.7771/1541-5015.1349>.
- Ateş, S., Temiz, B. K., Yüksel, İ., Şahin, F., İnaltun, H., & Yalvaç, E. (2019). *Bilimsel muhakeme (Akıl yürütme)*. S. Ateş (Ed.), Palme Yayınevi.
- Aydın, E., & Derin, G. (2020). Matematik öğretmeni eğitiminde STEM-matematiksel modelleme birlikteliğinin problem çözme ve modelleme becerilerine etkisi. *Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Dergisi*, 37, 93-121.

- Ball, D. and Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, G. Martin, and D. Schifter (Eds.), *A research compaion to principles and standards for school mathematics* (pp. 27-44). Reston, VA: National Concil of Teachers of Mathematics.
- Bal İncebacak, B., ve Ersoy, E. (2016). 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel muhakeme becerilerinin TIMSS'e göre analizi. *Uluslararası Sosyal Araştırmalar Dergisi*, 9(46), 474- 481.
- Barak, B. (2022). Matematiksel muhakeme üzerine 2007-2021 yılları arasında Türkiye’de yapılan lisansüstü tezlerin incelenmesi. *Uluslararası Eğitim Bilimleri Dergisi*, 9 (32), 236-266.
- Baykul, Y. (2014). *Ortaokulda Matematik Öğretimi (5-8. Sınıflar)*. Ankara: Pegem Akademi Yayınları.
- Bender, W. N. (2018). *STEM öğretimi için 20 strateji (Çev. S. Durmuş, S.A. İpek ve B. Yıldız)*. Nobel Akademik Yayıncılık.
- Boesen, J., Lithner, J., & Palm, T. (2014). Reasoning, learning and assessment. *Educational Studies in Mathematics*, 85(1), 103–121.
- Bozkurt Altan, E. (2017a). *Tasarım temelli fen eğitimi ve probleme dayalı STEM uygulamaları* [Design based science education and problem-based STEM education]. In
- Bozkurt Altan, E. (2017b). *Fen, teknoloji, mühendislik ve matematik (FeTeMM-STEM) eğitimi* [Science, technology, engineering, and mathematics education] Hastürk, H. G. (Ed.), *Teoriden pratiğe fen bilimleri öğretimi* [Science Education from theory to practice] (pp. 354-388). Turkey, Ankara: Pegem Academy Press.
- Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms*. New York: Springer.
- Bybee, R. W. (2013). *The Case for STEM Education: Challenges and opportunities*. NSTA press.
- Cai, J., Jakabcsin, M. S., & Lane, S. (1996). Assessing students' mathematical communication. *School Science and Mathematics*, 96(5), 238-246.
- Caner, F. (2021). *Bütünleşik STEM öğretmen yeterliklerinin belirlenmesi: Bir delphi çalışması*. Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Marmara Üniversitesi, İstanbul.

- Căprioară, D. (2015). Problem solving-purpose and means of learning mathematics in school. *ProcediaSocial And Behavioral Sciences*, 191, 1859-1864.
- Carnevale, A. P., Smith, N., & Melton, M. (2011). *STEM: Science, technology, engineering and mathematics*. Washington: Georgetown University. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED525297.pdf>
- Corbin, J., and Strauss, A. (2008). *Basics of qualitative research: techniques and procedures for developing grounded theory (3rd ed.)*. Thousand Oaks, CA: Sage
- Creswell, J.W. (2007). *Qualitative inquiry and research design: choosing among five approaches*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Çepni, S. (Ed.), Kuramdan uygulamaya STEM+A+E Eğitimi [STEM+A+E Education from theory to practice] (pp. 169-199). Turkey, Ankara: Pegem Academy Press.
- IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement). (2005). *TIMSS 2003 user guide for the international database*. International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.
- Çiftci, Z. (2015). *The analysis of mathematical reasoning skills of middle school math teacher candidates (Publication No. 418254)* [Doctoral dissertation, Atatürk University]. Council of Higher Education Thesis Center.
- Çiltaş, A. (2011). *Dizi ve Seriler Konusunun Matematiksel Modelleme Yoluyla Öğretiminin İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Öğrenme ve Modelleme Becerileri Üzerine Etkisi*. Yayınlanmış Doktora Tezi. Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü.
- Çoban, H. (2019). *Farklılaştırılmış öğretim tasarımının öğrencilerin muhakeme becerilerine, bilişötesi öğrenme stratejilerini kullanma düzeyine ve problem çözme becerisine etkisi*. Yayınlanmamış Doktora Tezi. Balıkesir Üniversitesi. Balıkesir.
- Çorlu, MS (2014). FeTeMM eğitimi makale çağrı mektubu. *Türk Eğitim Dergisi*, 3(1), 4-10. <https://doi.org/10.19128/turje.181071>
- Çötök, T., & Kabil, O. (2023). Aristoteles'te pratik akıl yürütme: Logismos. *Bingöl Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 26, 201-210. <https://doi.org/10.29029/busbed.1296500>

- Demir, M. ve Zengin, Y. (2023). The effect of a technology-enhanced collaborative learning environment on secondary school students' mathematical reasoning: A mixed method design. *Education and Information Technologies*, 28(3), 23-39.
- Ellis, A., & Fouts, J. (2001). Interdisciplinary curriculum: The research base: The decision to approach music curriculum from an interdisciplinary perspective should include a consideration of all the possible benefits and drawbacks. *Music Educators Journal*, 87(22), 22-26,68.
- English, L.D. (2016) STEM education K-12: perspectives on integration. *IJ STEM Ed* 3, 3. <https://doi.org/10.1186/s40594-016-0036-1>
- English, L.D. (2023). Ways of thinking in STEM-based problem solving. *ZDM Mathematics Education* 55, 1219–1230 <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01474-7>
- Erlina, N., Susantini, E., & Wasis. (2018). Common false of student's scientific reasoning in physics problems. *JPhCS*, 1108(1), 012016.
- Engelhardt, P. V., Corpuz, E. G., Ozimek, D. J., & Rebello, N. S. (2003). *The teaching experiment - What it is and what it isn't. Paper presented at the Physics Education Research Conference*. Madison, WI.
- Erdem, E. (2011). *İlköğretim 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel ve olasılıksal muhakeme becerilerinin incelenmesi*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Adıyaman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Adıyaman.
- Erdem, E. (2015). *Matematiksel muhakemeyi geliştirmeye yönelik tasarlanan öğrenme ortamının etkileri*. Yayınlanmamış Doktora tezi. Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Esendemir, Ö., Çırak, S. ve Samancıoğlu, M. (2015). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının matematik öğretimi yeterliklerine ilişkin görüşleri. *Gaziantep University Journal of Social Sciences*, 14(1).
- Gierl, M. J., Alves, C. ve Majeau, R. T. (2010). Using the attribute hierarchy method to make diagnostic inferences about examinees' knowledge and skills in mathematics: An operational implementation of cognitive diagnostic assessment. *International Journal of Testing*, 10(4), 318-341. doi:10.1080/15305058.2010.509554

- Glesne, C. (2012). *Nitel zamanında giriş*. (Çev. Ed. A. Ersoy ve P. Yalçınoglu). Ankara: Anı Yayıncılık.
- Gren, A. J. K., & Gilhooly, K. (2005). *Problem solving*. In Nick Braisby & Angus Gellatly (Eds.), *Cognitive Psychology*, pp. 347-381. New York: Oxford University Press.
- Gürbüz, R. ve Erdem, E. (2014). Matematiksel ve olasılıksal muhakeme arasındaki ilişkinin incelenmesi: 7. sınıf örneği. *Adıyaman Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*.16, 205-230.
- Hermawan, L. I., Lestari, N. D. S., Rahmawati, A. F. and Suwarno. (2019). *Supporting students reasoning and argumentation skills through mathematical literacy problem on relation and function topic*. IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science. doi:10.1088/1755-1315/243/1/012106.
- Hidayat, W., Rohaeti, E. E., Ginanjar, A., & Putri, R. I. I. (2022). An ePub learning module and students' mathematical reasoning ability: A development study. *Journal on Mathematics Education*, 13(1), 103-118. <http://doi.org/10.22342/jme.v13i1.pp103-118>
- Hiebert, J. (Ed.). (1986). *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (1st ed.). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203063538>
- Højgaard, T. (2009). Competencies, skills and assessment. In *Crossing divides: Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 1, pp. 225-231).
- Honey, M. A., Pearson, G. & Schweingruber, H. (2014). *STEM integration in K-12 education: status, prospects, and an agenda for research*. Washington, DC: The National Academies Press.
- Hoogland, K. (2003). *Mathematical literacy and numeracy*. Utrecht: APS, National Center for School Improvement.
- Ingram, J., & Stiff, J. (2023). Mathematical reasoning and problem-solving in PISA 2022 – How do performance profiles vary across countries? *International Journal of Educational Research*, 122, 102236. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2023.102236>

- Jablonka, E. (2003). *Mathematical literacy*. In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 75–102). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Jablonski, S. (2023). Real objects as a reason for mathematical reasoning – A comparison of different task settings. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 18(4), em0758. <https://doi.org/10.29333/iejme/13859>
- Jeannotte, D. & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 1-16. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8>
- Kalemkuş, J. (2019). Deneysel araştırmalarda STEM eğilimi. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi* (36), 78-90.
- Kandeel, A. A. (2021). Learners' mathematics proficiency levels on PISA 2018: A comparative study. *International Journal of Instruction*, 14(3), 393-416.
- Kara-Çalışkan, A. L. (2019). 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel muhakeme becerilerinin incelenmesi (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Kaya, A. & Ayar, M. C. (2020). Türkiye örnekleminde STEM eğitimi alanında yapılan çalışmaların içerik analizi. *İstanbul Aydın Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 6(2), 275-306. <https://dergipark.org.tr/tr/pub/iauefd/issue/57710/822443>
- Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren* (J. Kilpatrick & I. Wirszup, Ed.; J. Teller, Çev.). University of Chicago Press. (Orijinal kitabın yayın tarihi 1968)
- Kelley, T.R., & Knowles, J.G. (2016). A conceptual framework for integrated STEM education. *International Journal of STEM Education*, 3(1). <https://doi.org/10.1186/s40594-016-0046-z>
- Kelly, A. E., and Lesh, R.A. (2000). *Teaching experiments*. In A.E. Kelly and R.A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (192-195). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

- Kızıltoprak, F. (2017). *Matematik okuryazarlığının problem çözmede sistematik çeşitleme ile desteklenmesinin öğretim deneyi yoluyla incelenmesi*. Yayınlanmamış Doktora Tezi. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi.
- Knuth, E., and Elliott, R. (1997). *Pre-service secondary mathematics teachers' interpretations of mathematical proof*. In J.A. Dossey, J.O. Swafford, M. Parmantie and A.E. Dossey (Eds.), *Proceedings of the 19th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Illinois, USA, Oct. 18-21, 545-552.
- Koçyiğit, Ş., Yenilmez, K. (2022). STEM odaklı öğretim süreçlerinde öğrencilerin matematiksel muhakeme becerilerinin incelenmesi. *Afyon Kocatepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 24(1), 122-145.
- Kollosche, D. (2021). Style of reasoning for mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 107, 471-486.
- Kosonen, P. O. (1992). *Effects of teaching statistical laws on reasoning about problems*. Thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of doctor of philosophy. Faculty of Education, Simon Fraser University.
- Kramarski, B., Mevarech, Z. R., & Lieberman, A. (2001). Effects of Multilevel Versus Unilevel Metacognitive Training on Mathematical Reasoning. *The Journal of Educational Research*, 94(5), 292–300.
<https://doi.org/10.1080/00220670109598765>
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics* (Vol. 2101). National research council (Ed.). Washington, DC: National Academy Press.
- Lawson, E. A., Clark, B., Meldrum- Cramer, E., Falconer, A. K., Sequist, M. J., Kwon, Y. (2000). Development of scientific reasoning in college biology: Do two levels of general hypothesis-testing skills exist? *Journal of Research in Science Teaching*, 37(1), 81-101.
- Leopold D. G. and Edgar B. (2008). Degree of mathematics fluency and success in second semester introductory chemistry. *Journal of Chemistry Education*, 85, 724–731.

- Li, J., Peng, A., & Song, N. (2011). Teaching algebraic equations with variation in Chinese classroom. In J. Cai ,& E. Knuth (Eds.). *Early Algebraization* (pp. 529-556). Springer Berlin Heidelberg.
- Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 255–276.
- Loong, E., Vale, C., Bragg, L. ve Herbert, S. (2013). Primary school teachers' perceptions of mathematical reasoning. Mathematics education: Yesterday, today and tomorrow. *Proceedings of the Thirty-Sixth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*.
- Maass, K., Geiger, V., Ariza, M.R. et al. (2019). The Role of Mathematics in interdisciplinary STEM education. *ZDM Mathematics Education* 51, 869–884 <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01100-5>
- Maiti, S. (2017). Impact of reasoning ability on mathematics achievement. *International Journal of Research and Scientific Innovation (IJRSI)* 4(6), 111-113. <https://www.rsisinternational.org/IJRSI/Issue41/111-113.pdf>
- Martin, H. (2007). *Mathematical literacy*. Principal Leadership, 7(5), 28-31.
- Mason, J. (2001). Questions about mathematical reasoning and proof in schools. *Opening address to QCA Conference*, UK.
- Mayes, R. & Gallant, B. (2018). *The 21st Century STEM Reasoning*. US-China Education Review B. 8. <https://doi.org/10.17265/2161-6248/2018.02.002>
- McCrone, S. S. and Dossey, J. A. (2007). *Mathematical literacy, it's become fundamental*. Principal Leadership, 7(5), 32-37.
- MEB.(2022a). *PISA 2022 Tanıtım Kitapçığı*. http://pisa.meb.gov.tr/meb_iys_dosyalar/2022_01/26105818_PISA_2022_TanYtYm_KitapcYYY.pdf
- MEB. (2022b). *PISA 2022 Türkiye Raporu*. Ankara.
- Mesleki Yeterlilik Kurumu (MYK) (2015). *Türkiye yeterlilikler çerçevesi*. https://myk.gov.tr/images/articles/editor/130116/TYC_2.pdf
- Mesleki Yeterlilik Kurumu (MYK) (2021). *Avrupa yeterlilikler çerçevesi*. <https://www.myk.gov.tr/index.php/avrupa-yeterlilikler-cercevesi>

- Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *An expanded sourcebook qualitative data analysis*. SAGE Publications.
- Milli Eğitim Bakanlığı. [MEB]. (2011). *PISA bülteni II*. Retrieved July 16, 2012 from the World Wide Web: <http://earged.meb.gov.tr>
- Milli Eğitim Bakanlığı (MEB). (2016). *PISA 2015 ulusal raporu*. https://odsgm.meb.gov.tr/test/analizler/docs/PISA/PISA2015_Ulusal_Rapor.pdf
- Mousoulides, N., Sriraman, B., & Christou, C. (2006). *The Modeling perspective in the teaching and learning of mathematical problem solving at the elementary and secondary school level*. Department of Mathematical Sciences of the University of Montana, Technical Reports.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Hooper, M. (2016). *TIMSS 2015 International Results in Mathematics*. TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.
- Murphy, S., MacDonald, A., Wang, C.A. *et al.* Towards an Understanding of STEM Engagement: a Review of the Literature on Motivation and Academic Emotions. *Can. J. Sci. Math. Techn. Educ.* 19, 304–320 (2019). <https://doi.org/10.1007/s42330-019-00054-w>
- Moore, T. J., Glancy, A. W., Tank, K. M., Kersten, J. A. ve Smith, K. A. (2014). A Framework for quality K-12 engineering education: Research and development. *Journal of Pre-College Engineering Education Research*, 4(1), 1–13. <https://doi.org/10.7771/2157-9288.106>
- Morrison, J. (2006). *Attributes of STEM education: The student, the school, the classroom*. TIES (Teaching Institute for Excellence in STEM). 20 Eylül 2023 tarihinde http://www.wythe-excellence.org/media/STEM_Articles.pdf adresinden alınmıştır.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

- NCTM (2010). *The Role of Elementary Mathematics Specialists in the Teaching and Learning of Mathematics*.
https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/Position_Statements/EMS%20Joint%20Position%20Statement.pdf
- National Research Council [NRC]. (2012). *A Framework for k-12 science education: practices, crosscutting concepts, and core ideas*. Washington DC: The National Academic Press.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2020). *Standards for the preparation of middle level mathematics teachers*, Reston, VA: Author.
- Neumann, I., Duchhardt, C., Grüßing, M., Heinze, A., Knopp, E., & Ehmke, T. (2013). Modeling and assessing mathematical competence over the lifespan. *Journal for Educational Research Online/Journal für Bildungsforschung Online*, 5(2), 80-109.
- Newcombe, N. (2017). Harnessing Spatial Thinking to Support Stem Learning. *OECD Education Working Papers*, No. 161, OECD Publishing, Paris, <https://doi.org/10.1787/7d5dcae6-en>.
- NRC. (2006). *Learning to think spatially*. Washington: The National Academic Press.
- Nicholes, Justin. (2019, June 22). How STEM majors' evaluations of quantitative literacy relate to their imagined STEM-career futures. *Across the Disciplines*, 16(2), 1-15. Retrieved from <http://wac.colostate.edu/docs/atd/articles/nicholes2019.pdf>
- Niss, M., & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring—ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Undervisningsministeriet. Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18. English translation of title: Competencies and Learning of Mathematics—Ideas and Inspiration for the Development of Mathematics Education in Denmark.
- Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In *3rd Mediterranean conference on mathematical education* (pp. 115-124).
- Niss, M. A., & Højgaard, T. (Eds.) (2011). *Competencies and Mathematical Learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning*

- in Denmark. Roskilde: Roskilde Universitet. IMFUFA-tekst: i, om og med matematik og fysik, No. 485.
- Niss, M., & Jablonka, E. (2014). *Mathematical literacy*. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 391–396). Dordrecht: Springer.
- Niss, M. A. (2015). *Mathematical Competencies and PISA*. In K. Stacey, & R. Turner (Eds.), *Assessing Mathematical Literacy: The PISA Experience* (pp. 35-55). Springer Science+Business Media. <http://www.springer.com/978-3-319-10120-0>
- Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 1-20.
- Nunes, T., Bryant, P., Barros, R., & Sylva, K. (2012). The relative importance of two different mathematical abilities to mathematical achievement. *British Journal of Educational Psychology*, 82(1), 136-156.
- OECD. (2004). *Learning for Tomorrow's World: First results from PISA 2003*. Paris: OECD Publishing.
- OECD. (2007). *PISA 2006: Science competencies for tomorrow's World*. Paris: OECD Publishing.
- OECD. (2010). *PISA 2012 Mathematics framework to OECD*, 30. Paris: OECD Publications.
- OECD. (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*, PISA, OECD Publishing.
- OECD. (2016). *Ten Questions for Mathematics Teachers and how PISA can help answer them*. PISA, OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/9789264265387-en>
- OECD. (2019). *PISA 2018 Results (Volume I): What Students Know and Can Do*. OECD Publishing.
- OECD. (2021). *PISA 2021 Mathematics Framework*. OECD Publishing. <https://www.oecd.org/pisa/pisa-2021-mathematics-framework.pdf>

- Özaydın, Z., & Arslan, Ç. (2022). Assessment of mathematical reasoning competence in accordance with PISA 2021 mathematics framework. *Kuramsal Eğitim Bilim Dergisi [Journal of Theoretical Educational Science]*, 15(3), 453-474.
- Özaydın, Z., Arslan, Ç. & Yıldız, H. (2024). Evaluation of mathematical reasoning competence in middle school students. *Inonu University Journal of the Faculty of Education*, 25(1), 365-387. DOI: 10.17679/inuefd.1225147
- Patton, M. Q. (2014). Nitel araştırma ve değerlendirme yöntemleri (Çev. Ed. M. Bütün ve S. B. Demir). Ankara: Pegem A.
- Pham, S. (2015). *Teachers' perceptions on the use of mathmanipulatives in elementary classroom*. Master's Thesis, University of Toronto. https://tspace.library.utoronto.ca/bitstream/1807/68723/1/Pham_Son_H_201506_MT_MTRP.pdf
- Pilten, P. (2008). *Üst biliş stratejileri öğretiminin ilköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin matematiksel muhakeme becerilerine etkisi*. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Poçan, S., Yaşaroğlu, C. & İlhan, A. (2017). Ortaokul 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel akıl yürütme beceri düzeylerinin bazı değişkenler açısından incelenmesi. *Uluslararası Sosyal Araştırmalar Dergisi*, 10(52), 808-818.
- Polaki, M. V. (2002). Using instruction to identify key features of basic elementary students' growth in probabilistic thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 4(4), 285-313.
- Pratt, D. (2000). Making sense of the total of two dice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(5), 602-625.
- Pellerin (2012). Improving mathematical reasoning and discourse through problem solving. University of South Florida St. Petersburg Student Research Journal, 2(1), 1-14.
- Phetthai, C., & Poonpaiboonpipat, W. (2020). The Effects Of Learning Activities Based On Stem Education On Mathematical Literacy In The Topic Of Calculating Area For Grade 9 Students: ผลการจัดการเรียนรู้ตามแนวทางสะเต็มศึกษาที่มีต่อการรู้เรื่องคณิตศาสตร์ เรื่อง การคำนวณพื้นที่ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. *Journal of Education and*

- Innovation*, 23(4), 146–160. retrieved from https://so06.tci-thaijo.org/index.php/edujournal_nu/article/view/241573
- PISA (2021a). *PISA 2021 mathematics: A broadened perspective* [https://one.oecd.org/document/EDU/PISA/GB\(2017\)17/en/pdf](https://one.oecd.org/document/EDU/PISA/GB(2017)17/en/pdf)
- PISA (2021b). *PISA 2021 mathematics framework draft*. <https://pisa2021-maths.oecd.org/files/PISA%202021%20Mathematics%20Framework%20Draft.pdf>
- Pilten, P. (2008). *Üstbiliş stratejileri öğretiminin ilköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin matematiksel muhakeme becerilerine etkisi*. Yayınlanmamış Doktora Tezi. Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Pugalee, D. K. (1999). Constructing a model of mathematical literacy. *The Clearing House* 73(1), 19-22.
- Roehrig, G. H., Moore, T. J., Wang, H. H. & Park, M. S. (2012). Is adding the E enough? Investigating the impact of K-12 engineering standards on the implementation of STEM integration. *School Science and Mathematics*, 112(1), 31-44. doi:10.1111/j.1949-8594.2011.00112.x
- Ragasa, C. Y. (2008). A comparison of computer-assisted instruction and the traditional method of teaching basic statistics. *Journal of Statistics Education*, 16(1), 1-10.
- Randel, J. M. & Morris, B. A. (1992). The effectiveness of games for educational purposes: A review of recent research. *Simulation & Gaming*, 23(3).
- Rule, A. C. & Auge, J. (2005). Using humorous cartoons to teach mineral and rock concepts in sixth grade science class. *Journal of Geoscience Education*, 53(5), 548-558. <https://doi.org/10.5408/1089-9995-53.5.548>
- Sanders, M. (2009). STEM, STEM Education, STEMAnia. *The Technology Teacher*, 68(4), 20-27.
- Savran Gencer, A., Doğan, H., Bilen, K., Can, B. (2019). Bütünleşik STEM Eğitimi Modelleri. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 45(45), 38-55.
- Sarı, S. (2010). *The effect of instruction with concrete materials on fourth grade students' geometry achievement*. Master Thesis, Middle East Technical University, Ankara.

- SCANS (1991). *Secretary's commission on achieving necessary skills*. What work requires of schools: A SCANS Report for America 2000. Washington, D.C.: U.S. Department of Labor.
- Schleicher, A. (2018). *World Class: How to Build a 21st-Century School System*. OECD Publishing.
- Schliemann, A. D. & Carraher, D. W. (2002). The evolution of mathematical reasoning: Everyday versus idealized understandings. *Developmental Review*, 22(2), 242-266.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.
- Selden, A. & Selden J. (2003). Validations of proofs considered as texts: can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1), 4-36. DOI: 10.2307/30034698
- Sibaen, N. W. (2022). Quantitative literacy and reasoning of freshman students with different senior high school academic background pursuing STEM-related programs. *European Journal of Educational Research*, 11(1), 231-242. <https://doi.org/10.12973/eu-jer.11.1.231>
- Silver, E. A. & Snider, R. B. (2014). Using PISA to stimulate STEM teacher professional learning in the United States: The case of mathematics. *Issues in Teacher Education*, 23(1), 11-30.
- Singley, A. T. M., & Bunge, S. A. (2014). Neurodevelopment of relational reasoning: Implications for mathematical pedagogy. *Trends in Neuroscience and Education*, 3(2), 33-37.
- Siregar, Y.E.Y., Rahmawati, Y., & Suyono (2023). The impact of an integrated STEAM Project delivered via mobile technology on the reasoning ability of elementary school students. *Journal of Technology and Science Education*, 13(1), 410-428. <https://doi.org/10.3926/jotse.1446>
- Smith, A. (2018). *STEM integration: Making connections in mathematics and science by teaching logarithms conceptually*. (Unpublished doctoral thesis). Kennesaw State University, Georgia.
- Sokolowski, A. (2019). *Developing Mathematical Reasoning Using a STEM Platform*. In: Doig, B., Williams, J., Swanson, D., Borromeo Ferri, R., Drake, P. (eds)

- Interdisciplinary Mathematics Education. ICME-13 Monographs. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-11066-6_7
- Steen, L.A. (1999). *Twenty questions about mathematical reasoning. Developing mathematical reasoning in grades K-12.* (Lee V. Stiff, 1999 yearbook editor), National Council of Teachers of Mathematics, Reston: Virginia.
- Steffe L. P. (1991). *The constructivist teaching experiment: Illustrations and implications.* In: Glasersfeld E. von (ed.) *Radical constructivism in mathematics education.* Kluwer, Dordrecht: 177–194.
- Steffe, L. P., & Thomson, P. W. (2000). *Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(3), 314–352.
- Storey, S. O. (2004). *Teacher questioning to improve early childhood reasoning.* Doctoral Thesis, The University of Arizona. Available from ProQuest Dissertations and Theses database. (UMI Microform 3132260).
- Sumarsih, & Budiyo, B. & Indriati, Diari. (2018). Profile of mathematical reasoning ability of 8 th grade students seen from communicational ability, basic skills, connection, and logical thinking. *Journal of Physics: Conference Series.* 1008. 012078. 10.1088/1742-6596/1008/1/012078.
- Şencan, H. (2005). *Sosyal ve davranışsal ölçümlerde güvenilirlik ve geçerlilik* (1. Basım). Seçkin Yayıncılık Sanayi ve Ticaret AŞ, Ankara, 499-559.
- Tabar, V. (2018). *Ülkemizde FeTeMM alanında yapılmış olan çalışmaların içerik analizi.* Yayımlanmamış yüksek lisans tezi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Van.
- Tang, K. S. and Williams, P.J. (2019), *STEM literacy or literacies? Examining the empirical basis of these constructs.* *Rev Educ*, 7: 675-697. <https://doi.org/10.1002/rev3.3162>
- Tekerek, M. (2016). Ethical Reasoning in STEM Disciplines. *Journal of Education and Practice*, 7(32), 182-188.

- Thuneberg, H.M., Salmi, H.S., & Bogner, F.X. (2018). How creativity, autonomy and visual reasoning contribute to cognitive learning in a STEAM hands-on inquiry-based math module. *Thinking Skills and Creativity*, 29, 153-160. <https://doi.org/10.1016/j.tsc.2018.07.003>
- Thom, J. S. (2011). Nurturing mathematical reasoning. *Teaching Children's Mathematics*, 18(4), 234-243.
- TIMSS .(2003). *User guide for the international database*. International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.
- Toole, C. M. (2001). *Explaining Math Achievement By Examining Its Relationships To Ethnic Background, Gender, And Level Of Formal Reasoning. Unpublished Doctoral Dissertation*. The University of North Carolina, Greensboro.
- Toulmin, S. E. (1958). *The philosophy of science* (Vol. 14). Genesis Publishing Pvt Ltd.
- Tum, A. (2024). Reasoning Skills in Mathematics Teaching: A Meta-Synthesis on Studies Conducted in Turkey. *International E-Journal of Educational Studies*, 8(16), 45-86. <https://doi.org/10.31458/iejes.1389681>
- Tum, A., & Kutluca, T. (2021). Farklı Öğrenme Yollarının Kullanıldığı Zengin Öğrenme Ortamlarının Matematiksel Muhakeme Becerisine ve Problem Çözmeye Yönelik Tutuma Etkisi. *Cumhuriyet Uluslararası Eğitim Dergisi*, 10(1), 344-370. <https://doi.org/10.30703/cije.722191>
- Turner, R. & Adams, R. (2012). *Some drivers of test item difficulty in mathematics: an analysis of the competency rubric*. OECD Programme for International Student Assessment (PISA).
- Turner, R., Blum, W. & Niss, M. (2015). *Using competencies to explain mathematical item demand: A work in progress*. Assessing mathematical literacy içinde (s. 85-115). Springer, Cham.
- Tzur, R., Johnson, H. L., McClintock, E., Xin, Y. P., Si, L., Woodward, J., Hord, C., & Jin, X. (2013). Distinguishing schemes and tasks in children's development of multiplicative reasoning. *PNA*, 7(3), 85-101.
- Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24(3), 234-243.

- Walker, W., Moore, T., Guzey, S., & Sorge, B. (2018). Frameworks to develop integrated STEM curricula. *K-12 STEM Education*, 4(2), 331-339.
- Wang, M. T. (2012). Educational and career interests in math: a longitudinal examination of the links between perceived classroom environment, motivational beliefs, and interests. *Developmental Psychology*, 48, 1643–1657.
- Webb, N. L. (2002). *Depth of knowledge levels for four content areas*. Unpublished manuscript. Wisconsin Center for Education Research, University of Wisconsin-Madison, Madison, WI.
- Weinert, F. E. (2001). Concept of competence: a conceptual clarification. In *Defining and Selecting Key Competencies*, Salganik LH (eds). Hogrefe & Huber: Seattle, WA; 45–65.
- Yvankelewitz, D. (2009). The development of mathematical reasoning in elementary school students' exploration of fraction ideas. Unpublished doctoral dissertation. The State University of New Jersey.
- Yulian, V. N., & Wahyudin. (2018). Analysing categories of mathematical proficiency based on Kilpatrick opinion in junior high school. *Journal of Physics: Conference Series*, 1132(1), 012052. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1132/1/012052>
- Zawojewski, J. S., Lesh, R., & English, L. D. (2003). *A models and modelling perspective on the role of small group learning*. R. A. Lesh & H. Doerr (Ed.), Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching (s. 337–358) içinde. Lawrence Erlbaum.

EKLER

EK-1.

MUHAKEME EYLEMLERİ

- 1.**Basit bir sonuç çıkar
- 2.** Uygun bir gerekçe seçin
- 3.**Matematiksel bir sonucun veya sonucun, bir problem bağlamında neden mantıklı olup olmadığını açıklayın.
- 4.Matematiksel kavramlara göre düzenlemek ve uygun varsayımlarda bulunmak da dahil olmak üzere bir problemi farklı bir şekilde temsil edin.
- 5.Tanımlar, kurallar ve resmi sistemlerin yanı sıra algoritmalar ve hesaplamalı düşünmeyi kullanın
- 6.Gerçek dünyadaki bir durumun tanımlanmış veya tasarlanmış temsili için bir gerekçeyi açıklayın ve savunun
- 7.Bir matematiksel sonucu veya çözümü belirlemek için kullanılan süreçler ve prosedürler veya simülasyonlar için bir gerekçeyi açıklayın veya savunun
- 8.Bir problemi çözmek için kullanılan modelin sınırlarını belirleyin
- 9.Tanımları, kuralları ve biçimsel sistemleri anlamının yanı sıra algoritmaları ve hesaplamalı muhakemeyi anlayın
- 10.Gerçek dünya durumunun tanımlanmış veya tasarlanmış temsili için bir gerekçe sağlayın
- 11.Matematiksel bir sonucu veya çözümü belirlemek için kullanılan süreçler ve prosedürler için bir gerekçe sağlayın
- 12.Matematiksel argümanlar üzerinde düşünmek, matematiksel sonucu açıklamak ve gerekçelendirmek
- 13.Bir problemi çözmek için kullanılan modelin sınırlarını eleştirmek
- 14.Sonuçların anlamını açıklamak için matematiksel bir sonucu gerçek dünya bağlamına geri döndürmek

15.Bir problemin bağlama özgü dili ile onu matematiksel olarak temsil etmek için gereken sembolik ve biçimsel dil arasındaki ilişkileri açıklamak

16.Basit bir algoritmanın nasıl çalıştığını ve algoritmalarındaki ve programlardaki hataları tespit edip düzeltmek için matematiksel argümanlar üzerinde düşünme, matematiksel sonucu açıklama ve doğrulama



ÖĞRETİM DENEYLERİ VE BEKLENEN MUHAKEME EYLEMLERİ

GÜNEŞ PANELLERİ

Güneş enerjisi, temiz bir enerji kaynağıdır. Fosil yakıtların aksine doğaya zarar verici gazlar salmadan elektrik üretimi yapmaktadır. Bu anlamda sera gazı emisyonlarını azaltarak iklim değişikliğiyle mücadelede rol oynamaktadır. Güneş enerjisi aynı zamanda



yenilebilir ve sürdürülebilir bir kaynaktır. Güneşten elde edilen enerji kaynağının tükenmez ve sınırsız bir kaynak olduğu bilinmektedir. Bu anlamda doğaya dost enerji sistemlerinin önemi her geçen gün artmaktadır. Ayrıca kullanıcıya da ekonomiklik sağlamaktadır. Güneşli günlerde verimi daha fazladır ancak bu güneş panelleri kış aylarında da kullanılabilir. Dolayısıyla her mevsim en yüksek düzeyde elektrik enerjisi üretecek biçimde tasarlanması önem kazanmaktadır. Bu doğrultuda son yıllarda güneş panellerine farklı biçimler verilerek kurulum gerçekleştirilmektedir.

Biz de bu amaca katkı sağlayarak yüksek enerji üretimini destekleyen güneş enerjisi panelinin kurulum biçiminin nasıl olması gerektiğini araştırılmalı ve buna matematiksel bir dayanak oluşturulmalıdır.

Parabol-1
Matematik 11.3.1.1. Fonksiyonun grafik ve tablo temsilini kullanarak problem çözer. 11.3.2.1. İkinci dereceden bir değişkenli fonksiyonun grafiğini çizerek yorumlar. 11.3.2.2. İkinci dereceden fonksiyonlarla modellenen problemleri çözer. 11.3.3.1. Bir fonksiyonun grafiğinden, dönüşümler yardımı ile yeni fonksiyon grafikleri çizer. Fizik 9.4.5.1. Yenilenebilir ve yenilenemez enerji kaynaklarını avantaj ve dezavantajları açısından değerlendirir. 9.5.4.3. Enerji tasarrufu için yaşam alanlarının yalıtımına yönelik tasarım yapar. 11.2.5.1. Alternatif akımı açıklar. 11.2.5.2. Alternatif ve doğru akımı karşılaştırır. Teknoloji ve Mühendislik 1. Bir proje için ihtiyaç duyulan temel süreçleri tanımlar. 2. Döngüsel bir tasarım sürecinin bir parçası olarak prototipler geliştirir, test eder ve iyileştirir. 3. Bir tasarımın fayda ve risklerini değerlendirir. 4. Tüm hesaplama ve ölçümlerde uygun birimleri kullanır.
Beklenen Matematiksel Muhakeme Eylemlerinin Sıra Numaraları ve Gerekçeleri
(4) Çözüm öncesi Güneş panelinin izleyeceği yolu, parabol ile temsil edebilir
(5) Parabole ait kuralları kullanır
(6) Güneş panelinin izleyeceği yolun parabolün grafik temsili olduğunu savunur, gerekçelendirir
(8) Panelin izleyeceği yola ait parabol temsiline sınırlarını belirler
(10) Güneş panelinin izleyeceği yol temsili için gerekçe sunar
(11) Güneşin panelinin izleyeceği yolun parabol olması gerekliliği için gerekçe sağlar
(12) Matematiksel gerekçeleri kullanıp parabol denkleminin ait sonucu gerekçelendirir
(14) Bulunan parabol denkleminin gerçek hayatta güneş panelinin izleyeceği yol olduğunu ifade eder
(15) Panel ile matematiksel model temsili arasındaki ilişkiyi açıklar

ÇEVREYE DOST ARAÇ

Küresel ısınma ve sera gazı salınımının yanı sıra hayatımızı kolaylaştıran araçlardan çıkan fosil yakıtlar da çevreye oldukça zarar vermektedir. Ayrıca atmosferde biriken gazların solunumu insanların sağlığını tehlikeye atmaktadır. Bu nedenle çevre dostu araçların kullanılması ve yaygınlaştırılması önerilmektedir.



Çevre dostu araçlar benzil ve dizel yakıt kullanmadığından karbondioksit gazı salınımı yapmaz. Havayı kirletmez. Onun yerine yenilenebilir enerji kaynaklarıyla çalışır. Bu araçlara örnek olarak elektrik veya su ile çalışan araçlar verilebilir.

Bu araçlar yokuş yollarıyla bilinen Karadeniz yöresi için yeni bir fikri açığa çıkarmıştır. Genellikle yokuşlarda yetişen fındıklar toplandıktan sonra yokuş dibinde bekleyen araçlara konularak satışa götürülmektedir. Ancak fındıklar büyük araçların çıkamayacağı yerlerde olduğundan fındık toplayan işçiler her seferinde fındıkları topladıktan sonra araçlara taşımak zorunda kalmakta ve bu da işi yavaşlatmaktadır. Bu durumdan rahatsız olan işçiler fındıkları taşımak yerine su ile çalışan araç yardımıyla en kısa sürede götürmeyi planlamaktadır. İnternette buldukları su değirmenindeki mantığı dayalı basit bir düzenekle kendilerine uygun aracı tasarlayabileceklerdir. Su deposunu yukarıya koyup pipet yardımıyla suyun akmasını ve sistemi çalıştırarak fındıkları taşımayı hayal etmişlerdir. Ancak sabit yüksekliğe sahip olan su deposunun şekli için karar verememişlerdir. Su deposu en fazla 5 lt su alabilecek ve su bitene dek fındıkları araca ulaştıracaktır.

Haydi biz de hep beraber su deposunun şeklini matematiksel dayanaklara göre hazırlayıp onlara yardım edelim.

Eşitsizlik Sistemleri-1

Matematik

11.4.1.1. İkinci dereceden İki bilinmeyenli denklem sistemlerinin çözüm kümesini bulur.

Bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılarak çizilen grafikler yardımıyla çözüm yorumlatılır.

11.4.2.1. İkinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizliklerin çözüm kümesini bulur.

Bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılarak çizilen grafikler yardımıyla çözüm yorumlatılır.

11.4.2.2. İkinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümesini bulur.

Fizik

9.3.1.1. Cisimlerin hareketlerini sınıflandırır.

9.3.1.2. Konum, alınan yol, yer değiştirme, sürat ve hız kavramlarını birbirleri ile ilişkilendirir.

9.3.1.4. Ortalama hız kavramını açıklar.

9.3.1.5. İvme kavramını hızlanma ve yavaşlama olayları ile ilişkilendirir.

9.3.1.6. Bir cismin hareketini farklı referans noktalarına göre açıklar.

10.2.1.2. Akışkanlarda akış sürati ile akışkan basıncı arasında ilişki kurar.

11.1.2.1. Sabit hızlı iki cismin hareketini birbirine göre yorumlar.

11.1.2.2. Hareketli bir ortamdaki sabit hızlı cisimlerin hareketini farklı gözlem çerçevelerine göre yorumlar.

11.1.2.3. Bağlı hareket ile ilgili hesaplamalar yapar.

11.1.3.1. Net kuvvetin yönünü belirleyerek büyüklüğünü hesaplar.

a) Yatay, düşey ve eğik düzlemde sürtünme kuvvetinin yönü belirlenerek büyüklüğünün hesaplanması sağlanır.

11.1.1.4. Bir vektörün iki boyutlu kartezyen koordinat sisteminde bileşenlerini çizerek büyüklüklerini hesaplar. 11.1.6.1. Yapılan iş ile enerji arasındaki ilişkiyi analiz eder. a) Kuvvet-yol grafiğinden faydalanılarak iş hesaplamaları yapılır. 11.1.10.1. Günlük hayatta kullanılan basit makinelerin işlevlerini açıklar. Kaldıraç, sabit ve hareketli makara, palanga, eğik düzlem, vida, çukruk, çark ve kasnak ile sınırlı kalınır. 11.1.10.2. Basit makineler ile ilgili hesaplamalar yapar. 11.1.10.3. Hayatı kolaylaştırmak amacıyla basit makinelerden oluşan güvenli bir sistem tasarlar. Teknoloji ve Mühendislik 1. Bir proje için ihtiyaç duyulan temel süreçleri tanımlar. 2. Döngüsel bir tasarım sürecinin bir parçası olarak prototipler geliştirir, test eder ve iyileştirir. 3. Bir tasarımın fayda ve risklerini değerlendirir. 4. Tüm hesaplama ve ölçümlerde uygun birimleri kullanır.
Beklenen Matematiksel Muhakeme Eylemlerinin Sıra Numaraları ve Gerekçeleri
(4) Düz ve yokuş aşağı yol için hız-zaman grafiğiklerini kıyaslaması gerektiğini ifade eder; depo modeliyle hızı ilişkilendirip basınca bağlı hız-zaman grafiklerini karşılaştıracağını ifade eder
(7) Araba deposu çözümünde kullandığı süreçler için gerekçe açıklar, savunur
(11) Araba deposu modelinin daha hızlı olması gerektiği için gerekçe sağlar
(12) Matematiksel gerekçeler kullanıp grafikleri yorumlar, sonucu gerekçelendirir
(13) Araba deposu modeline dayalı çizilen hız-zaman grafiğinin sınırlarını eleştirir
(16) Araba su deposuna dayalı yanlış modelleri fark etmek ve uygun gerekçelerle doğrulamak

TEKNOFEST'E HAZIRLIK

Bir Anadolu Lisesi'nde öğrenim gören Ali, Burak, Cenk, Didem ve Efe 2024-2025 yılı TEKNOFEST yarışmaları için güzel bir proje tasarlamış ve başvuru yapmaya hazırlanmaktadır. TEKNOFEST yarışmalarında başvuru için projenin detaylarına değinilmeden genel hatlarıyla neler yapıldığının anlatıldığı bir video istenmektedir. Bu video için şu şartlar yer almaktadır:



“Video, ön değerlendirme raporu ile birlikte sistemde açılacak YouTube veya Drive linki şeklinde sisteme yüklenmelidir. Videonun çözünürlüğü en az 720p, toplam süresi ise en az 1.5 dakika, en fazla 2 dakika (1.30 sn – 2 dk) olmalıdır. Yarışmaya katılabilmek için videosunun yarışma takviminde belirtilen tarihe kadar gönderilmesi zorunludur. Belirtilen süreyi aşan takımların videoları değerlendirmeye alınmayacaktır. Çekim esnasında kameranız gerekmedikçe hareket etmemeli, sabit olmalıdır. “

Ali proje içeriğine uygun olarak videoyu çekmiş ve yaklaşık olarak 4 dakika sürmüştür. Ancak kurallara uyması için video sıkıştırma programı kullanınca Ali'nin sesinin anlaşılmadığı fark edilmiştir. Bunun üzerine yeni video çekimi kararlaştırılmıştır. Herkes video çekimi için isteklidir ve proje içeriğinden dolayı video süresinin herkes için yaklaşık olarak 4 dakika süreceği düşünülmektedir. Kimin video çekimi yapacağına karar verememişlerdir ve başvuru süreleri de azalmaktadır.

Haydi Ali ve arkadaşlarına TEKNOFEST kurallarına uygun anlaşılabilir bir video için matematiksel bir dayanak oluşturup en anlaşılır video için kimin video çekmesi gerektiğini bulmalarında yardım edelim.

Trigonometri-1

Matematik

11.1.2.2. Kosinüs teoremiyle ilgili problemler çözer.

11.1.2.3. Sinüs teoremiyle ilgili problemler çözer.

11.1.2.4. Trigonometrik fonksiyon grafiklerini çizer.

a) $y=\sin x$ ve $y=\cos x$ fonksiyonları dışındaki fonksiyonların grafik çizimlerinde sadece bilgi ve iletişim teknolojileri kullanılır.

b) Periyodik fonksiyon tanımı verilir, trigonometrik fonksiyonların periyodik oldukları gösterilir.

c) $f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + k$ türündeki fonksiyonların grafikleri ve katsayılarının grafik üzerindeki etkileri ele alınır.

ç) Grafikleri yardımıyla trigonometrik fonksiyonların tek ya da çift fonksiyon olup olmadıkları belirlenir.

Fizik

10.3.1.1. Titreşim, dalga hareketi, dalga boyu, periyot, frekans, hız ve genlik kavramlarını açıklar.

a) Deney, gözlem veya simülasyonlarla kavramların açıklanması sağlanır.

b) Periyot ve frekans kavramlarının birbiriyle ilişkilendirilmesi ve matematiksel model oluşturulması sağlanır. Matematiksel hesaplamalara girilmez.

c) Dalganın ilerleme hızı, dalga boyu ve frekans kavramları arasındaki matematiksel model verilir. Matematiksel hesaplamalara girilmez.

ç) Dalganın ilerleme hızının ortama, frekansın kaynağa bağlı olduğu vurgulanır.

Teknoloji ve Mühendislik

1. Bir proje için ihtiyaç duyulan temel süreçleri tanımlar.

2. Döngüsel bir tasarım sürecinin bir parçası olarak prototipler geliştirir, test eder ve iyileştirir.

3. Bir tasarımın fayda ve risklerini değerlendirir.
4. Tüm hesaplama ve ölçümlerde uygun birimleri kullanır.
Beklenen Matematiksel Muhakeme Eylemlerinin Sıra Numaraları ve Gerekçeleri
(5) Trigonometrik fonksiyonlara ait kuralları kullanır
(6) Sese ait frekansın sinüse ait grafik temsili olduğunu savunur, gerekçelendirir
(7) Ses frekansını belirlemek için çözümünde neden simülasyona kullandığını açıklar, savunur
(8) Ses frekansının izleyeceği yola ait parabol temsilinin sınırlarını belirler
(9) Ses frekansının izleyeceği yolun sinüse ait grafik olduğunu fark eder ve sinüs fonksiyonunu anlar
(10) Ses frekansının izleyeceği yol için gerekçe sunar
(11) Ses frekansı çözümünün sinüs fonksiyonu şeklinde olmasına dair gerekçe sağlar
(12) Matematiksel gerekçeleri kullanıp sinüs grafiğine ait çözümle sonucu gerekçelendirir
(13) Sinüse dayalı çizilen grafik modelinin sınırlarını eleştirir

UZAY TELESKOPLARI

Uzay teleskopları, Dünya'dan 1,5 milyon kilometre uzakta bile belirlenen cisimlerin kızıl ötesi görüntülerini çekme ve elektromıknatıssal ışınımını ölçerek yaşlarını ve kütlelerini belirleme imkânına sahiptir. Böylece gök cisimlerinin kimyasal yapı ve devinim gibi özellikleri elde edilebilmektedir. Bu durum gök cisimlerini daha yakından inceleyip Güneş Sisteminin nasıl oluştuğunu anlama adına umut ışığı doğurmaktadır.



Geçen yıllarda Dünyamıza çarpma olasılığı araştırılan ancak daha sonra çarpmayacağı kesinleşen dev göktaşları oldukça ilgi odağıdır. Dünyaya en yakın 1 milyon km uzaklığa yaklaşacak olan bir göktaşının kütlesi yaklaşık olarak dünya kadar ve doğrusal olarak yol almaktadır. Bu durumda onu daha yakından görebilmek için uzay teleskopuna bir yörünge belirlenecektir. Bu yörüngede göktaşını olabildiğince daha yakından izleyebilecek bir yol gereklidir. Ancak her türlü duruma karşılık göktaşının teleskopu etkileyen kütle çekim kuvvetinin Dünya'nın teleskopu etkileyen kütle çekim kuvvetinden daha çok olması istenmemektedir. Bu durumları ele alan bir grup genç araştırmacı uzay teleskobunun izlemesi gereken yörüngeyi geometri yazılım aracı olan GeoGebra'da çizip, matematiksel bir model yardımıyla belirlemek istemiştir.

Haydi hep beraber yörüngeye ait GeoGebra'da çizim için gerekli olan matematiksel dayanakları oluşturup yörüngeyi tasarlayalım ve genç araştırmacılara yardım edelim.

Beklenen Matematiksel Muhakeme Eylemlerinin Sıra Numaraları ve Gerekçeleri
(4) Uzay teleskopunun izleyeceği yol için parabol şeklinde uygun bir varsayımda bulunur veya x 'ten farklı değişkenlere bağlı olarak da parabolü temsil eder.
(5) Parabolü yeniden tanımlar, kuralları belirler ve algoritmalarla hesaplamalı düşünmeyi kullanıp yörüngeyi modeller
(6) Yörüngeye ait tasarlanmış temsil için bir gerekçeyi açıklar ve savur
(7) Yörüngeyi tam modelini belirlerken kullanılan matematiksel süreçler ve GeoGebra'daki çizim için eşit uzaklık gerekçesini açıklar ve savunur
(8) Çekim kuvvetinin göktaşından daha az olmaması nedeniyle eşit yol olma sınırını belirler modeli ona göre kurar
(9) Parabolün resmi okullarda verilen tanımı ile kendi elde ettiği tanımı ve algoritmaları karşılaştırır ve anlar
(10) Parabolün yörünge temsili için ikinci dereceden denklemler aracılığıyla gerekçe sağlar
(11) Yörüngeyi matematiksel çözümünü belirlemede kullanılan sürece gerekçe sağlar
(12) Parabolün tanımını oluştururken matematiksel gerekçeler üzerinde düşünür, matematiksel sonucu açıklar ve gerekçelendirir
(13) Parabolün ilk elde ediliş sırasında çekim yasasından kaynaklı kullanılan mesafe eşitliğinin gerekliliğini eleştirir
(14) Parabolün anlamını yörünge olarak gerçek dünya bağlamına geri döndürür
(15) Problemdeki çekim yasası ve yörüngeyi, elde edilen matematiksel temsil etmek için gereken sembolik ve biçimsel dil arasındaki ilişkileri açıklar
(16) yörüngeyi parabol olarak elde edildiğini tespit edip olası yanlışlıklarda matematiksel gerekçeler üzerinde düşünür, matematiksel sonucu açıklar ve doğrular

ARILARIN ÇİÇEK BULMA OYUNU

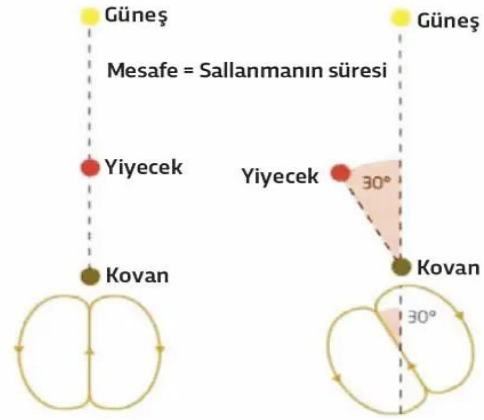
Bilim insanlarından Profesör Karl von Frisch 1973 yılında arıların muhteşem özelliklerinden biri olan haberleşmeyi ele alıp “sallanma dansı” adı verilen bir yolla haberleştiklerini açığa çıkarmış ve bu sayede Nobel Fizyoloji Ödülü’nü kazanmıştır.

Sallanma dansı kovanlarına en kaliteli bal özünü bulan arıların kovana gelip yaptıkları bir dandır. Böylece zaman ve enerji kaybı engellenmiş olacaktır. Dansçı arı kendisini besin kaynağı yönünde Güneş’e dik olarak konumlandırır ve dikey şeklinde bal peteği üzerinde dans eder. Yiyeceğin konumunu Güneş’e göre gösterir. Güneş yönünde ise bal peteğinden yukarı çıkar, ters yönde ise aşağı iner. Diğer yönlerde ise Güneş ve kovanla yiyecek yönünde bir çizgi belirleyip ardından titreşimlerle sekiz şekli çizer. Kaynağın ne kadar uzakta olduğunu ise çizgideki sallanma hareketi sayısı belirler. Her bir saniyelik sallanması 1 km uzakta olduğunu söyler.

Arıların sallanma dansına oldukça ilgi duyan Betül “Arıların Çiçek Bulma Oyunu”nu tasarlamaya karar vermiştir. Bunun için güneş, kovan, arı ve çiçek resimlerinin olduğu bir oyun tablası hazırlamıştır. Bu oyun iki kişilik olacak ve soruların hepsini en kısa sürede bilen oyunu kazanacaktır. Toplamda üç soru olacaktır. Bu sorular ve cevapları aşağıda verilen içerikte bir yönerge hazırlanacaktır:

- * Bir arının yaptığı dansa bakarak bilinmeyen bir çiçeğin yerini bulma
- * Kovandan uzaklığı ve Güneş’e göre yönü belli bir çiçeğin yerini dansla anlatma
- * Eski kovanda yapılan sallanma dansı ile yerleri bilinen iki çiçekten birine yeni kovan yapılması kararlaştırılsın. Bu durumda diğer çiçeğin yeri için yeni kovanda yapılacak sallanma dansında kaç sallanma yapılacağını bulma.

Haydi hep beraber bunlara dayanarak Betül’e “Arıların Çiçek Bulma Oyunu” yapımında matematiksel dayanaklar hazırlayıp yardım edelim.



Etkinlikte Gerçekleşmesi Beklenen Matematiksel Muhakeme Eylemleri

- (4) Oyunu aç kavrana uygun düzenler ve uygun varsayımlarda bulunmak da dahil olmak üzere bir problemi farklı bir şekilde temsil eder (Pisagor'dan yararlanabilir)
- (5) Oyun tasarımında iki çiçek arasındaki uzunluğu hesaplarken tanımları, kuralları ve algoritmaları Kosinüs teoremini kullanır
- (6) Gerçek dünyadaki arılara ait yön bulmayı matematiksel olarak tanımlar ve temsillerle gösterip gerekçelerine göre açıklar, savunur
- (7) Çiçeklerin yönünü ve peteğe olan açısını belirlemede kullanılan süreçler için bir gerekçeyi açıklar veya savunur
- (8) Oyuna ait matematiksel modelin sınırlarını belirler; sınır kenarların negatif olamayacağıdır
- (9) Tasarladıkları oyuna ait matematiksel tanımları, kuralları anlamının yanı sıra algoritmaları ve hesaplamalı muhakemeyi anlar
- (10) Oyuna ait temsiller için bir gerekçe sağlar
- (11) Oyundaki iki çiçek arasındaki mesafede kullanılan matematiksel modeli belirlemek için kullanılan süreçler ve prosedürler için bir gerekçe sağlar
- (12) Oyundaki matematiksel gerekçelerüzerinde düşünmek, matematiksel sonucu açıklar ve gerekçelendirir
- (14) Oyunda elde ettiği modelin anlamını açıklamak için sonucu gerçek dünya bağlamına geri döndürür
- (15) Arıların yön bulmadaki bağlama özgü dili ile onu matematiksel olarak temsil etmek için gereken sembolik ve biçimsel dil arasındaki ilişkileri açıklar
- (16) Oyundaki modele ait algoritmanın nasıl çalıştığını ve algoritmalarındaki hataları tespit edip düzeltmek için matematiksel gerekçeler üzerinde düşünür, matematiksel sonucu açıklar ve doğrular

DEPREME DAYANIKLI KOLONLAR

1549 yılında inşa edilmeye başlanan Süleymaniye Cami, bu zamana dek 15 tanesi 5.5 büyüklüğünde olmak üzere toplam 89 depremden hiçbir şekilde zarar görmemiş ve sadece 4 kez onarılmıştır. Mimar Sinan inşa için önce sağlam bir temel atmıştır. Temelin inşası 1.5 yıl, yapım süresi ise toplamda 7 yıl sürmüştür. Mimar Sinan yapının temelini bir piramit şeklinde tasarlamıştır. Geniş bir harç tabakasının yanı sıra zemine ızgaralar yerleştirmiştir. Bu tasarım sayesinde deprem anında bina direncini temelden göstermekte ve deprem anında temel adeta bir hacıyatmaz gibi davranmaktadır.



Yeni kurulan bir inşaat şirketi tıpkı Mimar Sinan'ki gibi temel çalışmaları yaptıklarını ve bu yapıların yüzeye daha az basınç oluşturduğunu göstermek için Canva'da bir afiş hazırlamaktadır. Bu nedenle 100 ton ağırlığındaki bir yapıya Mimar Sinan'inki gibi temel tasarlayıp yeni basıncının aynı yükseklikteki eski basıncına göre nasıl azalacağını afişle gösterecektir. Ele alınan yapı kare tabanlı dikdörtgensel bir prizma biçimindedir. Eski temeller yapının en alt kısmını tam kaplayacak şekilde zeminde üst üste bloklarla yapılırdı. Bu bloklar 10 cm yüksekliğe sahip bir metrekare karesel bölge tabanlı ve bir ton ağırlığındadır. Yeni temelde de birbirine eş bu blok yapılar kullanılacaktır. Temelin ilk basamağı ve yapının tabanı birbirini tam olarak kaplayacaktır. Yeni temelin her basamağında kullanılan blok sayısı bir önceki basamaktan bir fazla olacak olup simetrik bir görünüm sunacaktır. Her iki temelde de yapılan temel yüksekliği aynı ve yeni temelin oluşturacağı basınç eski temelin basıncının yarısından bile az olmalıdır. Buna göre yapının eski ve yeni temele göre en az kaçınıcı basamakta şartları taşıyacağı belirlenip afişte gösterilmelidir.

Haydi hep beraber bunlara dayalı olarak yeni inşaat şirketinin yapacağı afiş için matematiksel dayanaklar sunup bir afiş hazırlayalım ve onlara yardım edelim.

Etkinlikte Beklenen Matematiksel Muhakeme Eylemleri

- (4) Eski temele bağılı basınç temsilini basınç kavramından elde eder; eski temele bağılı basınç temsilini düzenleyip yeni basınç temsilini elde eder
- (5) Eşitsizlik kurallarına göre iki basınç temsilini düzenler
- (6) Yeni ve eski basınç temsillerini gerekçelendirir, savunur
- (8) Basınç ilişkisi için eşitsizliğe dayalı olağan sınırları belirler (basınç 0'dan büyük olmalı, n değeri 1'den farklı olmalı)
- (9) Tanımları, kuralları ve biçimsel sistemleri anlamının yanı sıra algoritmaları ve hesaplamalı muhakemeyi anlayan
- (10) Blokların toplam temsili için bir gerekçe sağlar (ardışık sayılarda genellemede dikdörtgen alanına tamamlama, aynı sayıyı farklı kez elde etme, ...)
- (12) Blok sayısını elde ederken kullanacağı matematiksel gerekçeler üzerinde düşünür, matematiksel sonucu açıklar ve gerekçelendirir
- (13) Eşitsizliğin ve n değerinin sınırlarını eleştirir
- (14) Bulunan n değerini basamak sayısı olarak yorumlar
- (16) Eşitsizlikte denemelerle hataları tespit edip düzeltmek için matematiksel gerekçeler üzerinde düşünür, matematiksel sonucu açıklar ve doğrulama yapar

**MATEMATİKSEL MUHAKEME EYLEMLERİNE UYGUN ÖĞRETMEN
GENEL YÖNLENDİRME SORULARI**

- 1-2. Uygun gerekçeleriniz, sonuçlarınız nelerdir?
 3. Matematiksel sonucun neden mantıklı olup olmadığını açıklayın.
 4. Problem başka nasıl bir şekilde temsil edilebilir? Varsayımlarınız nelerdir?
 5. Hangi tanımları, kuralları veya algoritmaları kullandın? Yazmadığın neler var?
 6. Bu temsilin problemdeki durumu tanımladığına dair gerekçelerin nelerdir?
 7. Matematiksel sonucu elde etmek neden bu süreci veya simülasyonları kullandın?
 8. Bu modelin sınırlılıkları nelerdir? Sınırlılıkların hangileri çözüm için kullanılır?
 9. Hangi algoritmaları kullanarak sonucu elde ettin? Neden bu algoritmayı tercih ettin?
 10. Bu gerçek durum için bu temsilin kullanılmasındaki gerekçelerin nelerdir?
 11. Matematiksel sonuç için kullandığın süreçleri gerekçeleriyle açıklayınız.
 12. Sonuç için seçtiğin matematiksel gerekçeler nelerdir? Neden bu matematiksel gerekçeleri seçtiğini gerekçeleriyle açıklayınız.
- Matematiksel sonucu açıklayınız. Matematiksel sonucu gerekçeleriyle açıklayınız.
13. Problem çözümü için kullanılan modelin sınırlılıkları nelerdir? Bu sınırlılıklar çözümü nasıl etkiledi?
 14. Matematiksel sonuçların gerçek yaşamda neyi ifade eder?
 15. Problemin matematiksel ve gerçek yaşamda ifadeleri arasındaki ilişkiyi açıklayın?
 16. Kullandığın algoritmanın nasıl çalıştığını anlatabilir misin? Algoritmadaki hataları nasıl tespit ediyorsun? Bu algoritmayı nasıl doğrularsın?

EK-4

ÖĞRENCİ VE GRUP ÇÖZÜM KAĞIDI

1) Etkinlik kapsamında okuduklarınızı, dinlediğinizi ve gördüklerinizi de göz önünde bulundurarak problem durumunuzu ve kısıtlamaları belirtiniz.

Problemimiz:

Kısıtlamalar:

2) Belirlemiş olduğunuz problemin nedenlerini ve ortadan kaldırılabilmesi için olası önerilerinizi belirtiniz.

Nedenleri:

Öneriler:

3) Problemin çözümüne yönelik geliştirilmesi planlanan ürünün tasarımını belirtiniz. Tasarımınızı belirtirken mümkün olduğunca görselleştirmeye ve tasarımınızdaki her bir unsuru açıklamaya çalışınız.

Tasarımınızı çiziniz, modelinizi yazınız.

4) Geliştirmiş olduğunuz ürünün veya modelin hangi unsurları veya kısımlarının değiştirilmesi, geliştirilmesi gerekmektedir. Neden?

5) Geliştirmiş olduğunuz ürünün veya modelin son halini arkadaşlarınıza sununuz ve ürününüzü güçlü ve zayıf yönleri açısından diğer ürünlerle karşılaştırarak tartışınız.

EK-5

PISA-1 Testi

Soru 1. GAZETE SATMA 1

Zed ülkesindeki iki gazete işe gazete satıcısı almak istemektedir. Aşağıdaki ilanlar, bu gazetelerin, satıcılara nasıl ödeme yapacağını göstermektedir.

ZED YILDIZ GAZETESİ

EKSTRA GELİRE Mİ İHTİYACINIZ VAR?

GAZETEMİZİ SATIN

Kazanacağınız ücret:
Bir hafta içinde satacağınız ilk 240 gazete için gazete başına 0,20 zed + fazladan sattığınız her gazete için 0,40 zed

ZED GÜNLÜK GAZETESİ

AZ ZAMANINIZI ALACAK DOLGUN ÜCRETLİ İŞ!

Zed Günlük Gazetesi satın ve haftalık 60 zed + sattığınız her gazete için 0,05 zed kazanın.

Ferdi her hafta Zed Yıldız gazetesinden ortalama olarak 350 adet satmaktadır.

Ferdi, ortalama olarak her hafta kaç zed kazanmaktadır?

zed cinsinden tutarı:

Soru 2.EN İYİ ARABA

Bir araba dergisi, yeni arabaları değerlendirmek için bir puanlama sistemi kullanmakta ve "Yılın Arabası" ödülünü en yüksek toplam puanı olan arabaya vermektedir. Beş yeni araba değerlendirilmiş ve aldıkları puanlar tabloda gösterilmiştir.

Araba	Emniyet Özellikleri (E)	Yakıt Verimliliği (Y)	Dış Görünüş (D)	İç Bağlantılar (İ)
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	2
N1	1	3	3	3
KK	3	2	3	2

Puanlar aşağıdaki şekilde yorumlanmaktadır:

3 puan =Mükemmel

2 puan = İyi

1 puan = Orta

Araba dergisi, bir arabanın toplam puanını hesaplamak için, her bir puan grubunun ağırlıklı toplamından oluşan aşağıdaki kuralı kullanmaktadır:

$$\text{Toplam Puan} = (3 \times E) + Y + D + İ$$

“Ca” arabası için toplam puanı hesaplayınız. Yanıtınızı aşağıdaki boşluğa yazınız.

“Ca” için toplam puan :

Soru 3. BİSİKLET SÜRÜCÜSÜ HALE

Hale, yeni bir bisiklet almıştır. Bisikletin gidonunda bir hız ölçer bulunmaktadır. Hız ölçer, Hale'nin gittiği mesafeyi ve yolculuğundaki ortalama hızını gösterebilmektedir.

Soru: Hale, bir yolculuğunda ilk 10 dakikada 4 km ve sonraki 5 dakikada 2 km bisiklet sürmüştür. Buna göre, aşağıdaki önermelerden hangisi doğrudur?

- A. Hale'nin ilk 10 dakikadaki ortalama hızı, sonraki 5 dakikadaki ortalama hızından daha fazladır.
- B. Hale'nin ilk 10 dakikadaki ve sonraki 5 dakikadaki ortalama hızı aynıdır.
- C. Hale'nin ilk 10 dakikadaki ortalama hızı, sonraki 5 dakikadaki ortalama hızından daha azdır.
- D. Verilen bilgilerle, Hale'nin ortalama hızı ile ilgili bir şey söylemek mümkün değildir.

Soru 4. Hale, evinden 4 km uzaklıkta olan nehre kadar bisikletle gitmiş ve bu yolculuğu 9 dakika sürmüştür. Eve dönüşünde, 3 km'lik daha kısa bir yolu kullanmış ve bu yoldan dönmesi sadece 6 dakika sürmüştür. Hale'nin nehre gidiş dönüş yolculuğundaki ortalama hızı kaç km/h'dir?

Yolculuğundaki ortalama hız: km/h



PISA-2 Testi

SORU 1.

DAMLAMA ORANI

Bazı ilaç ve sıvıları hastalara nakletmek üzere serum kullanılmaktadır.



Hemşirelerin serum için D ile gösterilen damlama oranını, yani bir dakikada düşen damla sayısını hesaplamaları gerekmektedir.

Hemşireler bunun için $D = \frac{dh}{60s}$ formülünü kullanmaktadırlar. Formüldeki;

d , bir mililitredeki (ml) damla sayısı ile ölçülen damla faktörüdür

h , serumun ml cinsinden hacmidir.

s , serumun akması için gereken süredir (saat).

Hemşirelerin serumun hacmi olan h 'yi, damlama oranı D 'den, hesaplamaları gerekmektedir.

Bir dakikada 50 damlalık bir damlama oranına sahip olan bir serumun hastaya 3 saatte verilmesi gerekmektedir. Bu serum için damla faktörü mililitre başına 25 damladır.

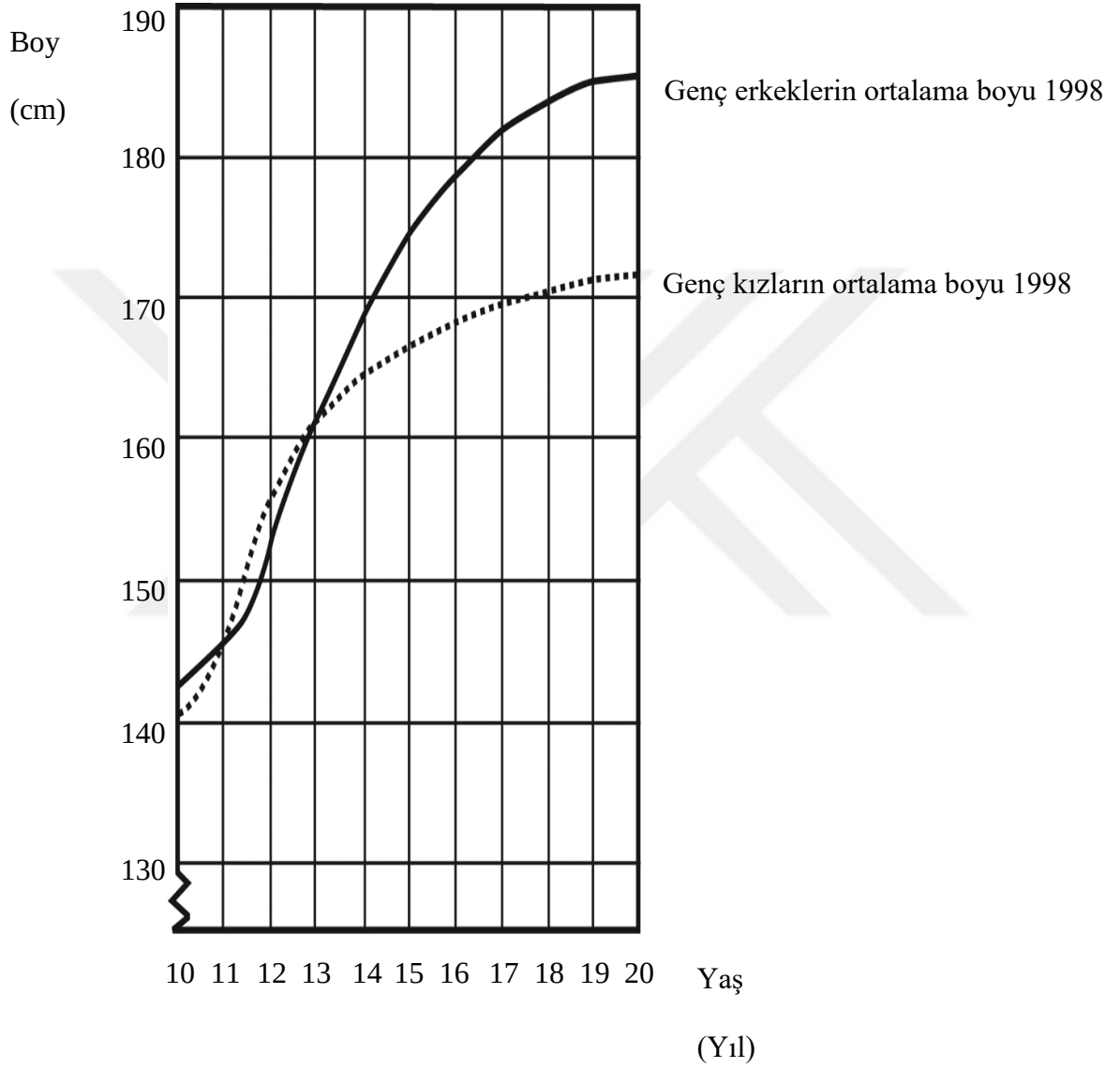
Serumun hacmi kaç ml'dir?

Serumun hacmi: ml

Soru 2: BÜYÜME

YENİ KUŞAK GENÇLERİN BOYU DAHA UZUN OLUYOR

1998 yılında, Hollanda'daki hem genç erkeklerin hem de genç kızların ortalama boyları aşağıdaki grafikte gösterilmiştir.

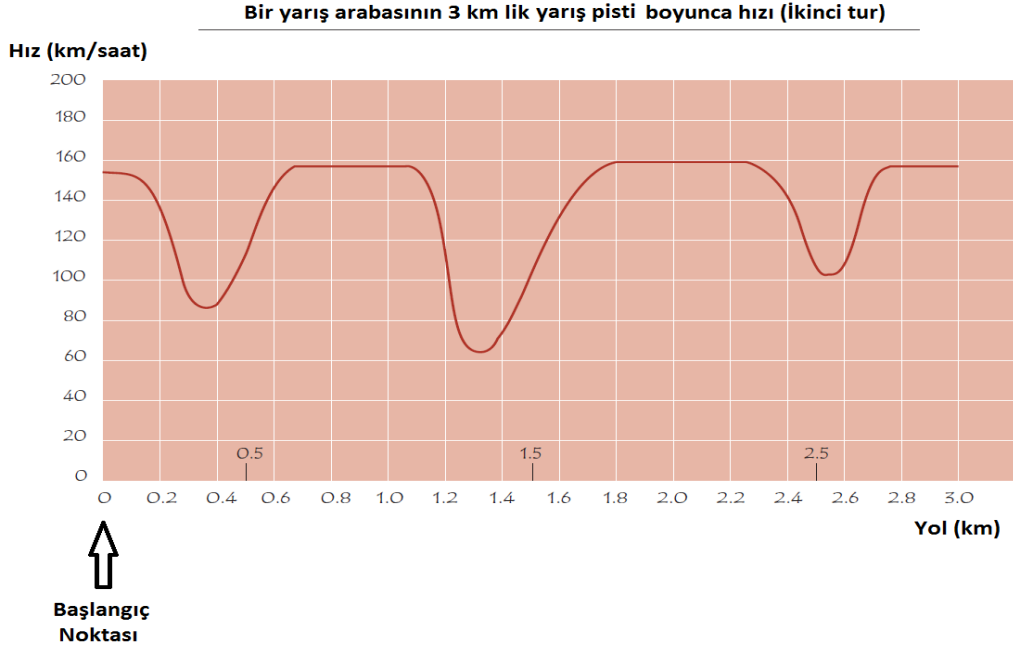


12 yaşından sonra ortalama olarak kızların büyüme hızlarındaki yavaşlamayı grafiğin nasıl gösterdiğini açıklayınız.

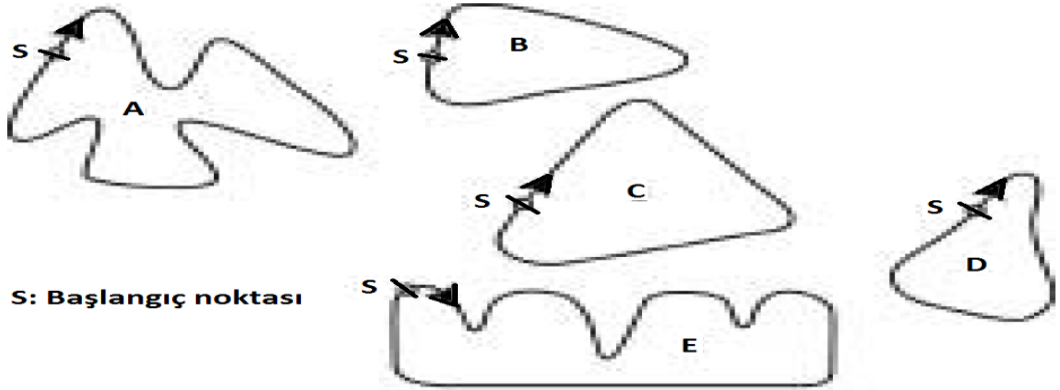
Soru 3:

YARIŞ ARABASININ HIZI

Bu grafik, düz 3 kilometrelik bir pistte ikinci turunu atan bir yarış arabasının hızının nasıl değiştiğini göstermektedir.



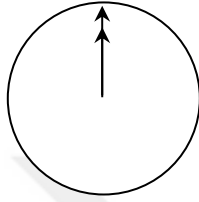
Aşağıda 5 yarış pisti görülmektedir. Yukarıda gösterilen hız grafiğini oluşturmak için yarış arabası bu pistlerden hangisinde sürülmüştür?



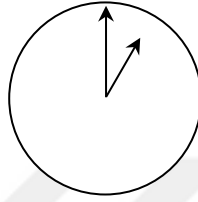
Soru 4: İNTERNETTE SOHBET

Mark (Avustralya, Sidney'den) ve Hans (Almanya, Berlin'den) internet ortamında "çet" (chat) aracılığıyla haberleşiyorlar. 'Sohbet' edebilmeleri için internete aynı saatte bağlanmaları gerekmektedir.

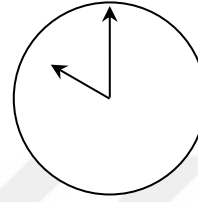
'Sohbet edebilmek' için uygun bir zaman bulabilmek amacıyla, Mark dünya saat çizelgesine bakarak aşağıdakileri öğrendi:



Greenwich 24:00



Berlin 1:00



Sidney 10:00

Mark ve Hans okula gitmek zorunda oldukları için yerel saatleriyle 9:00 ve 16:30 arasında sohbet edemiyorlar. Ayrıca, yerel saatleriyle 23:00'ten 07:00'ye kadar uyuyor olacakları için sohbet edemiyorlar.

Mark ve Hans'ın sohbet edebilmeleri için hangi saatler uygun olacaktır? Tabloya yerel saatleri yazınız.

Yer	Saatler
Sidney	
Berlin	

PISA-3 Testi

Soru 1. FUJİ DAĞINA TIRMANIŞ

Fuji Dağı Japonya’da bulunan ünlü bir sönmüş yanardağdır.



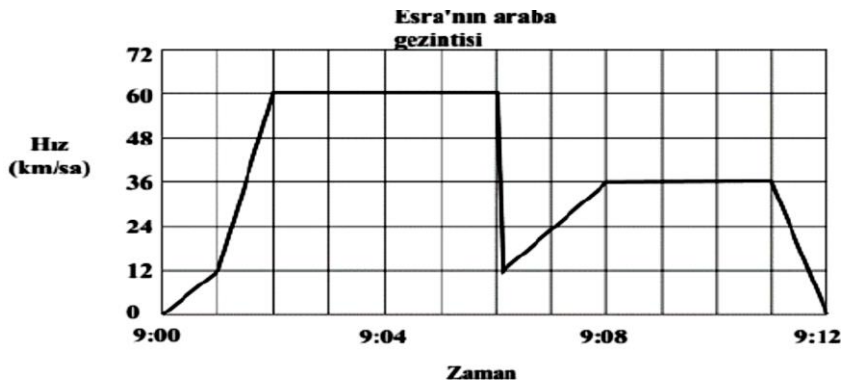
Fuji dağına tırmanmak her yıl sadece 1 Temmuz’dan 27 Ağustos’a kadar halka açıktır. Bu zamanda yaklaşık 200 000 kişi tırmanır.

Fuji dağına günde ortalama kaç kişi tırmanmaktadır?

- A 340 B 710 C 3400 D 7100 E 7400

Soru 2. ARABA GEZİNTİSİ

Esra arabasıyla gezintiye gitti. Gezisi sırasında, arabanın önüne doğru bir kedi koştu. Esra hemen frene bastı ve kediye kurtardı. Hafif sarsılan Esra, eve dönmeye karar verdi. Aşağıdaki grafik, gezinti sırasında arabanın basitleştirilmiş hız kayıtlarını göstermektedir.



Soru: Esra, kediye ezmek için birden frene bastığında saat kaçtı?

Yanıt:.....

Soru 3. BİSİKLET SÜRÜCÜSÜ HALE

Hale, yeni bir bisiklet almıştır. Bisikletin gidonunda bir hız ölçer bulunmaktadır. Hızölçer, Hale'nin gittiği mesafeyi ve yolculuğundaki ortalama hızını gösterebilmektedir.

Soru: Hale, teyzesinin evine gitmek için 6 km bisiklet sürmüştür. Hızölçer, yolculuğunun tamamı için Hale'nin ortalama hızının 18 km/h olduğunu göstermiştir. Buna göre, aşağıdaki önermelerden hangisi doğrudur?

- A. Hale'nin, teyzesinin evine gitmesi 20 dakika sürmüştür.
- B. Hale'nin, teyzesinin evine gitmesi 30 dakika sürmüştür.
- C. Hale'nin, teyzesinin evine gitmesi 3 saat sürmüştür.
- D. Hale'nin, teyzesinin evine gitmesinin ne kadar sürdüğünü söylemek mümkün değildir.

Soru 4. EN İYİ ARABA

Bir araba dergisi, yeni arabaları değerlendirmek için bir puanlama sistemi kullanmakta ve "Yılın Arabası" ödülünü en yüksek toplam puanı olan arabaya vermektedir. Beş yeni araba değerlendirilmiş ve aldıkları puanlar tabloda gösterilmiştir.

Araba	Emniyet Özellikleri (E)	Yakıt Verimliliği (Y)	Dış Görünüş (D)	İç Bağlantılar (İ)
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	2
N1	1	3	3	3
KK	3	2	3	2

Puanlar aşağıdaki şekilde yorumlanmaktadır:

3 puan = Mükemmel

2 puan = İyi

1 puan = Orta

“Ca” arabasının üreticisi, toplam puan hesabı için kullanılan kuralın adil olmadığını düşünüyor. Toplam puanı hesaplamak için öyle bir kural yazınız ki ödülü kazanan araba "Ca" olsun. Sizin kuralınız dört değişkenin hepsini kapsamalı ve aşağıdaki eşitlikte bırakılan dört boşluğa pozitif sayılar yerleştirerek kuralınızı yazmalısınız.

Toplam puan = ... E + ... Y+ ... D + ... İ.



EK-6

GÖRÜŞME SORULARI

Uygulanacak olan PISA-1, PISA-2 ve PISA-3 testlerinin ardından katılımcılara görüşme sırasında aşağıdaki olası sorular sorulmuştur:

- 1) Problemi çözmek için hangi temsilleri kullandığını gerekçeleriyle açıklayabilir misin?
- 2) Problemde bizden istenen nedir?
- 3) Problemi çözüm aşamalarını gerekçeleriyle açıklar mısın?
- 4) Bulduğun çözüm modelinin sınırlarını gerekçeleriyle açıklar mısın?
- 5) Çözüm yolunun uygunluğundan nasıl emin olabiliyorsun?
- 6) Sonucun doğruluğundan nasıl emin olabilirsin?
- 7) Bulduğun matematiksel sonuç gerçek bağlamda neyi ifade etmektedir?

ÖZ GEÇMİŞ

Adı Soyadı: Yeşim YANARDAĞ

Yabancı Dil: İngilizce

Doğum Tarihi:

E-posta:

Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

- 2005-2010, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi, Matematik Öğretmenliği Lisans Programı
- 2018-2020, Kilis 7 Aralık Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Matematik Tezli Yüksek Lisans Programı
- 2020-2025 Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Matematik Eğitimi Doktora Programı

Yayınlar

- Yanardağ, Y., Özdemir, B. & Kule, L. (2025). ETNOSTEAM etkinliklerinin problem çözme ve kültürel farkındalığa etkisi: Effect Of ETNOSTEAM activities on problem solving and cultural awareness. *Socrates Journal of Interdisciplinary Social Researches*, 11(51), 1–11. <https://doi.org/10.5281/zenodo.14965230>
- Yanardağ, Y., Özdemir, B. & Kule, L. (2024). ETNOSTEAM etkinliklerinin problem çözme ve kültürel farkındalığa etkisi. Sözlü Sunum, 14. *Uluslararası Başkent Sosyal, Beşeri, İdari Ve Eğitim Bilimleri Kongresi*, 12 Aralık-14 Aralık 2024.
- Yanardağ, Y. & Kule, Y. (2024). Uzunluk ve Ölçüm Bilgisinin İrrasyonel Sayıların Gerçek Yaşamda Kullanılabilirliğine Etkisi. Poster Sunumu, *International Education Congress 2024 / EDUCongress2024*, 18 Eylül-21 Eylül 2024, 978-605-72845-5-6, 1535 - 1537.
- Yanardağ, Y., Baştürk, M. Z., Fedakar, K. E., Çimen, Z. N., Karaağaç, A. E. & Tepe, M. A. (2023). İS-TEK Oyununun Görsel İspatlar Üzerindeki Etkisi. *Poster Sunumu, III. Uluslararası Projeden Uygulamaya Eğitim Sempozyumu (UPUES 2023)*, 07 Eylül-09 Eylül 2023.

- Yanardağ, Y. & Mercimek, Ş. (2021). Pisagor bağıntısının düzgün olmayan çokgenlerle alan ve hacim ilişkisi, Tam Metin Bildiri, *International Education Symposium & From Project To Practice*, 01 Nisan-04 Nisan 2021.

TÜBİTAK Burs ve Destekleri

- 823428, ETNOSTEAM Tanıyalım Taşıyalım: Yapay Zeka, Araştırmacı, Bilim ve Toplum Başkanlığı Destek Programları Müdürlüğü, Bilim ve Toplum, Proje Tarihleri: 01.06.2025 – devam ediyor.
- 123B575, ETNOSTEAM Tanıyalım Taşıyalım: Cumhuriyet, Yürütücü, Bilim ve Toplum Başkanlığı Destek Programları Müdürlüğü, Bilim ve Toplum, Proje Tarihleri: 15.05.2024 - 15.05.2025.
- 123B061, Kilis ve Osmaniye'de Bilim ve Sanat: Doğanın Nefesi, Atölye Lideri, Bilim ve Toplum Başkanlığı Destek Programları Müdürlüğü, Bilim ve Toplum / 4007-TÜBİTAK Bilim Şenlikleri Destekleme Programı, Proje Tarihleri: 14.04.2023 - 14.10.2023.
- 119B408, Kilis'te Bilim ve Sanat: Dün, Bugün, Yarın, Atölye Lideri, Bilim ve Toplum Başkanlığı Destek Programları Müdürlüğü, Bilim ve Toplum / 4007-TÜBİTAK Bilim Şenlikleri Destekleme Programı, Proje Tarihleri: 01.07.2020 - 31.12.2021.
- TÜBİTAK BİDEB Destekleri, Etkinlik Destekleri ve Eğitim Bursları Müdürlüğü, 2211-A Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı, Desteklendi.