



**STOKASTİK DİFERANSİYEL
DENKLEM MODELLEMEDE
GENELLEŞTİRİLMİŞ ENTROPİ
OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ**

Doktora Tezi

Nihal İNCE

Eskişehir 2021

STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEM MODELLEMEDE
GENELLEŞTİRİLMİŞ ENTROPİ OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ

Nihal İNCE

DOKTORA TEZİ

İstatistik Doktora Programı

İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Sevil ŞENTÜRK

Eskişehir

Eskişehir Teknik Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Aralık 2021

Bu Tez Çalışması Eskişehir Teknik Üniversitesi BAP Komisyonu tarafından kabul edilen 20DRP046 no.lu proje kapsamında desteklenmiştir.

ÖZET

STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEM MODELLEMEDE GENELLEŞTİRİLMİŞ ENTROPİ OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ

Nihal İNCE

İstatistik Anabilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Aralık, 2021

Danışman : Prof. Dr. Sevil ŞENTÜRK

Stokastik diferansiyel denklemlerin bir probleme uygulanabilmesi için çözümünün var ve tek olduğunun ispatlanabilmesi oldukça önemli bir konudur. Bu amaçla, literatürden farklı olarak stokastik diferansiyel denklemlerin çözümünün var ve tek olduğu Banach sabit nokta prensibinin genelleştirilmesi yardımıyla bu tez çalışmasında teorik olarak ispatına yer verilmiştir. Stokastik diferansiyel denklemlerin çözümü bir stokastik süreçtir ve bu süreç t zamanının her bir anında bir rassal değişken ifade etmektedir. Stokastik süreci oluşturan bu rassal değişkenlerin olasılık yoğunluk fonksiyonunun bulunması ise önemli bir problemdir. Söz konusu problemin çözümü için bu çalışmada, genelleştirilmiş entropi optimizasyon yöntemleri kullanılarak stokastik diferansiyel denklemlerin çözümü olan stokastik sürecin olasılık yoğunluk fonksiyonunu elde etmek için yeni bir yöntem geliştirilmiş ve teorik olarak da ispatlanmıştır. Genelleştirilmiş entropi optimizasyon yöntemlerinin kullanılma sebebi bu yöntemlerden elde edilen dağılımların diğer istatistiksel dağılımlardan daha esnek olmasıdır. Geliştirilen yeni yöntemin performansını göstermek amacıyla üç gerçek veri seti üzerinde uygulaması yapılmıştır ve simülasyon çalışması ile de elde edilen sonuçlar desteklenmiştir.

Anahtar Sözcükler: Stokastik diferansiyel denklem, Euler-Maruyama, Stokastik süreç, Genelleştirilmiş entropi optimizasyon yöntemleri.

ABSTRACT

GENERALIZED ENTROPY OPTIMIZATION METHODS IN STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION MODELLING

Nihal İNCE

Department of Statistics

Eskisehir Technical University, Institute of Graduate Programs, December, 2021

Advisor : Prof. Dr. Sevil ŞENTÜRK

In order for stochastic differential equations to be applied to a problem, it is quite important that its solution can be proved that it exists and is the only one. For this purpose, the solution of stochastic differential equations, which is different from the literature, exists and is the only one, has been theoretically proved in this thesis study with the help of the generalization of the Banach fixed point principle. The solution of stochastic differential equations is a stochastic process, and this process represents a random variable at each time of t time. It is an important problem that these random variables forming the stochastic process are the possibility density function. In this study, the solution of the problem in question is, a new method for obtaining the probability density function of the stochastic process, which is the solution of stochastic differential equations using generalized entropy optimization methods, has been developed and also theoretically proved. The reason for using generalized entropy optimization methods is that these methods are derived from this is because distributions are more flexible than other statistical distributions. In order to demonstrate the performance of the new method developed, its application was carried out on three real data sets and the results obtained by the simulation study were supported.

Keywords: Stochastic differential equation, Euler-Maruyama, Stochastic process, Generalized entropy optimization methods.

TEŞEKKÜR

İstatistik bölümünü ve akademisyenliği bana sevdiren, çalışmalarında her zaman beni destekleyen, bana yön veren, değerli vaktini ve desteğini hiçbir zaman esirgemyen, en ufak bir problemimde dahi beni yalnız bırakmayan, hazırlamış olduğum tez çalışmasının planlanması, yazılması ve sonuçlanmasında emeği geçen, sevgi, saygı ve güven duyduğum çok kıymetli hocam ve tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Sevil ŞENTÜRK'e,

Hazırlamış olduğum doktora tezine, bölümümüzde açmış olduğu “Kavramsal Yorumlar ve Uygulamalarla Olasılık Teorisi”, “Ölçüm Teorisi ve Olasılık”, “Entropi ve İnfomasyon Teorisi”, “İstatistiğin Matematiksel Yöntemleri” gibi çok önemli konuları kapsayan lisans, yüksek lisans ve doktora dersleriyle bilgilerini bizlere aktaran, tez konusunun belirlenmesinde olduğu kadar, çalışmanın teorik alt yapısının oluşturulmasında da büyük emeği geçen saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. Aladdin ŞAMİLOV'a,

Değerli katkılarından dolayı tez izleme komitesi ve tez savunma jürisinde yer alan Sayın Hocalarıma,

Eğitim-öğretim hayatımın tamamında beni teşvik eden ve her zaman destekleyen aileme,

Lisansüstü eğitimim süresince, gösterdiği sabır ve anlayıştan dolayı sevgili eşim Mustafa İNCE'ye ve oğlum Hasan Hüseyin İNCE'ye,

En içten saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Nihal İNCE

Aralık 2021

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmamın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığımı ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Nihal İNCE

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
BAŞLIK SAYFASI	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI.....	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR.....	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
TABLolar DİZİNİ	x
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xiv
1. GİRİŞ.....	1
2. STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER	6
2.1 Itô Stokastik Diferansiyel Denkleminin Tanımı.....	15
2.2 Itô Stokastik Diferansiyel Denklemi İçin Varlık-Teklik Teoremi	16
2.3 Fokker-Planck-Kolmogorov Denklemi ile Itô Stokastik Dife-	
ransiyel Denklemi Arasındaki İlişki	22
2.4 Wiener Sürecinin Varsayımlarının Kontrolü	26
2.4.1 Normallik varsayımının sınanması	26
2.4.2 Durağanlık varsayımının sınanması.....	27
2.4.3 Bağımsızlık varsayımının sınanması	28

2.5	Stokastik Diferansiyel Denklemler İçin Parametre Tahmini...	29
2.6	Stokastik Diferansiyel Denklemler İçin Ki-Kare Uyum İyiliği Testi	30
2.7	Stokastik Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümü İçin Euler-Maruyama Yöntemi	33
3.	GENELLEŞTİRİLMİŞ ENTROPİ OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ	35
3.1	Maksimum Entropi Yöntemi	36
3.1.1	Kesikli rassal değişkenler için maksimum entropi yöntemi	36
3.1.2	Sürekli rassal değişkenler için maksimum entropi yöntemi	39
3.2	Minimum Çapraz Entropi Yöntemi	42
3.2.1	Kesikli rassal değişkenler için minimum çapraz entropi yöntemi	42
3.2.2	Sürekli rassal değişkenler için minimum çapraz entropi yöntemi.....	45
3.3	Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyon Dağılımları	48
3.3.1	Genelleştirilmiş MaxEnt Dağılımları	48
3.3.2	Genelleştirilmiş MinxEnt Dağılımları	51
4.	STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEM ÇÖZÜMÜNÜN YAKLAŞIK OLASILIK YOĞUNLUK FONKSİYONUNUN GEOY ile BULUNMASI	54
5.	UYGULAMALAR	57
5.1	Simülasyon Çalışması	60
5.2	Biyolojik Popülasyon Örneği	70
5.3	Hisse Senedi Örneği	79
5.4	Covid-19 Örneği.....	89

6. SONUÇ VE TARTIŞMA	101
KAYNAKÇA.....	104
ÖZGEÇMİŞ	111



TABLÖLAR DİZİNİ

Sayfa

Tablo 5.1.	<i>Önerilen SDD modellerinin tahmini parametre değerleri</i>	63
Tablo 5.2.	<i>Önerilen SDD modellerinin χ^2 ve p değerleri</i>	63
Tablo 5.3.	<i>EM yörüngelerinin adım sayılarına göre MSE değerleri</i>	65
Tablo 5.4.	<i>$\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için $(MinMaxEnt)_m$ dağılımlarının istatistiksel kriterlerine göre incelenmesi</i>	67
Tablo 5.5.	<i>$\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için $(MaxMaxEnt)_m$ dağılımlarının istatistiksel kriterlerine göre incelenmesi</i>	67
Tablo 5.6.	<i>$\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için $(MinMinxEnt)_m$ dağılımlarının istatistiksel kriterlerine göre incelenmesi</i>	68
Tablo 5.7.	<i>$\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için $(MaxMinxEnt)_m$ dağılımlarının istatistiksel kriterlerine göre incelenmesi</i>	69
Tablo 5.8.	<i>EM yörüngelerinin adım sayılarına göre MSE değerleri</i>	74
Tablo 5.9.	<i>$\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için $(MinMaxEnt)_m$ dağılımlarının istatistiksel kriterlerine göre incelenmesi</i>	76
Tablo 5.10.	<i>$\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için $(MaxMaxEnt)_m$ dağılımlarının istatistiksel kriterlerine göre incelenmesi</i>	76
Tablo 5.11.	<i>$\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için $(MinMinxEnt)_m$ dağılımlarının istatistiksel kriterlerine göre incelenmesi</i>	77
Tablo 5.12.	<i>$\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için $(MaxMinxEnt)_m$ dağılımlarının istatistiksel kriterlerine göre incelenmesi</i>	78
Tablo 5.13.	<i>EM yörüngelerinin adım sayılarına göre MSE değerleri</i>	84
Tablo 5.14.	<i>$\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için $(MinMaxEnt)_m$ dağılımlarının istatistiksel kriterlerine göre incelenmesi</i>	86
Tablo 5.15.	<i>$\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için $(MaxMaxEnt)_m$ dağılımlarının istatistiksel kriterlerine göre incelenmesi</i>	86

Tablo 5.16.	$\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için $(MinMinxEnt)_m$ dağılımlarının istatistiksel kriterlerine göre incelenmesi	87
Tablo 5.17.	$\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için $(MaxMinxEnt)_m$ dağılımlarının istatistiksel kriterlerine göre incelenmesi	88
Tablo 5.18.	EM yörüngelerinin adım sayılarına göre MSE değerleri	94
Tablo 5.19.	$\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için $(MinMaxEnt)_m$ dağılımlarının istatistiksel kriterlerine göre incelenmesi	96
Tablo 5.20.	$\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için $(MinMaxEnt)_m$ dağılımlarının istatistiksel kriterlerine göre incelenmesi	96
Tablo 5.21.	$\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için $(MinMinxEnt)_m$ dağılımlarının istatistiksel kriterlerine göre incelenmesi	98
Tablo 5.22.	$\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için $(MaxMinxEnt)_m$ dağılımlarının istatistiksel kriterlerine göre incelenmesi	98

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 2.1.	<i>Bir stokastik sürecin beş farklı ω değerine karşılık gelen örneklem fonksiyonları (Mikosch, 1998)</i>	10
Şekil 3.1.	<i>Karakterize edici moment fonksiyonlar kümesine sahip S_{max} ve S_{min} entropi değerlerinin değişimi</i>	54
Şekil 5.1.	<i>Simülasyon verisinin dağılımı</i>	61
Şekil 5.2.	<i>Simülasyon verisi ve simüle edilmiş değerleri</i>	64
Şekil 5.3.	<i>Simülasyon verisinin dağılımı ve (5.1) SDD modelinin yaklaşık EM yörüngeleri</i>	66
Şekil 5.4.	<i>$\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için sırasıyla $(MinMaxEnt)_m$ ve $(MaxMaxEnt)_m$ dağılımlarının grafikleri ...</i>	68
Şekil 5.5.	<i>$\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için sırasıyla $(MinMinxEnt)_m$ ve $(MaxMinxEnt)_m$ dağılımlarının grafikleri .</i>	69
Şekil 5.6.	<i>1940-2011 yılları arasında yaşayan turna popülasyonu verilerinin dağılımı</i>	71
Şekil 5.7.	<i>Turna popülasyonu verileri ve simüle edilmiş değerleri</i>	73
Şekil 5.8.	<i>Turna popülasyonu verilerinin dağılımı ve (5.2) SDD modelinin yaklaşık EM yörüngeleri</i>	75
Şekil 5.9.	<i>$\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için sırasıyla $(MinMaxEnt)_m$ ve $(MaxMaxEnt)_m$ dağılımlarının grafikleri ...</i>	77
Şekil 5.10.	<i>$\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için sırasıyla $(MinMinxEnt)_m$ ve $(MaxMinxEnt)_m$ dağılımlarının grafikleri .</i>	78
Şekil 5.11.	<i>S&P 500 hisse senedi verilerinin dağılımı</i>	81
Şekil 5.12.	<i>S&P 500 hisse senedi verileri ve simüle edilmiş değerleri</i>	83
Şekil 5.13.	<i>S&P 500 hisse senedi verilerinin dağılımı ve (5.4) SDD modelinin yaklaşık EM yörüngeleri</i>	84

Şekil 5.14.	$\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için sırasıyla (MinMaxEnt) $_m$ ve (MaxMaxEnt) $_m$ dağılımlarının grafikleri ...	87
Şekil 5.15.	$\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için sırasıyla (MinMinxEnt) $_m$ ve (MaxMinxEnt) $_m$ dağılımlarının grafikleri .	88
Şekil 5.16.	Covid-19 ölüm oranı verilerinin dağılımı	91
Şekil 5.17.	Covid-19 ölüm oranı verileri ve simüle edilmiş değerleri	93
Şekil 5.18.	Covid-19 ölüm oranı verilerinin dağılımı ve SDD modelinin yaklaşık EM yörüngeleri	95
Şekil 5.19.	$\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için sırasıyla (MinMaxEnt) $_m$ ve (MaxMaxEnt) $_m$ dağılımlarının grafikleri ...	97
Şekil 5.20.	$\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için sırasıyla (MinMinxEnt) $_m$ ve (MaxMinxEnt) $_m$ dağılımlarının grafikleri .	99

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\in$	: Eleman
$\forall$	: Her
$\exists$	: En az bir
Ω	: Elementer sonuçlar uzayı
$\mathfrak{B}$	: Olayların σ -cebri
P	: Olasılık ölçümü
$(\Omega, \mathfrak{B}, P)$	: Olasılık uzayı
ω	: Olay, rassal bir deneyin sonucu
$\xi(t)$	: Beyaz gürültü süreci
$\mathcal{M}$	: Metrik uzay
S_{RV}	: Sade rassal değişkenlerin kümesi
H_{RV}	: Rassal değişkenlerin Hilbert uzayı
$\ \cdot\ $	: Norm
$X(t)$	: Stokastik süreç
$\hat{X}(t)$	: $\hat{X}$ yaklaşık sürecinin t anındaki değerleri
$X_t(\omega)$	: Rassal değişken
$W(t)$	: Wiener süreci
f	: Sürüklenme katsayısı
g	: Serpilme katsayısı
Δt	: Zaman periyodu
K	: Adım sayısı
N	: Veri seti büyüklüğü
R^2	: Belirlilik katsayısı
χ^2	: Ki-Kare
H	: MaxEnt ölçümü
D	: MinxEnt ölçümü
$\square$	: Kanıtın bittiğini gösteren simge

KISALTMALAR

SDD	: Stokastik Diferansiyel Denklem
ADD	: Adi Diferansiyel Denklem
EM	: Euler-Maruyama
GEOY	: Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyon Yöntemleri
GEOP	: Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyon Problemi
FPK	: Fokker-Planck-Kolmogorov
MaxEnt	: Maksimum Entropi
MinxEnt	: Minimum Çapraz Entropi
MSE	: Ortalama Kare Hata
RMSE	: Kök Ortalama Kare Hata
KPSS	: Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin
CTMC	: Continuous Time Markov Chains SDD
CEV	: Constant Elasticity of Variance SDD
CIR	: Cox, Ingersol, and Ross SDD
CKLS	: Chan, Karolyi, Longstaff, and Sanders SDD
GBM	: Geometric Brownian Motion SDD

1. GİRİŞ

Stokastik diferansiyel denklem (SDD), terimlerinin bir veya daha fazlasının stokastik süreç olduğu bir diferansiyel denklemdir, bu yüzden de kendi kendini stokastik süreç olan bir çözümle sonuçlandırmaktadır. Diferansiyel denklemlere rassal elemanların eklenmesi ile de stokastik diferansiyel denklemler oluşturulmaktadır. Ayrıca, stokastik diferansiyel denklemler ile Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) denklemi arasında bir ilişki bulunmaktadır. Çünkü stokastik diferansiyel denklemin çözümü bir stokastik süreçtir. FPK denkleminin çözümü ise ilgili stokastik sürecin olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

Her bir uygun başlangıç koşulu için benzersiz bir çözüme sahip olan adi diferansiyel denklemlerdeki gibi deterministik modellerin aksine, SDD modelleri sürekli zaman stokastik süreçleri olan çözümlere sahip olmasından dolayı literatürde birçok uygulama ve araştırma alanları için standart modeller haline gelmiştir. Özellikle, SDD modelleri; fizik, kimya, biyoloji, finans matematiği, ekonomi, aktüerya bilimleri, mühendislik, popülasyon dinamikleri, vb. dahil olmak üzere birçok karmaşık ve dinamik sistemleri modellemek için oldukça popüler modellerdir. Çünkü, bu karmaşık ve dinamik sistemlerin pek çoğunda rassallık bulunmaktadır. Bu sebeple, söz konusu disiplinlerde ortaya çıkan karmaşık ve dinamik sistemlerin modellenmeleri için gerekli olan matematiksel araç stokastik diferansiyel denklemlerdir.

Adi diferansiyel denklemlerde analitik çözümü bulmak oldukça zordur. Stokastik diferansiyel denklemler için çözümü bulmak ise rassallık içermesinden dolayı çok daha zordur. Bu zorluğu gidermek için nümerik çözüm yöntemleri ilgi alanı haline gelmiştir. Buradan yola çıkarak, diferansiyel denklemlerin çözümüne yönelik genel bir yöntem üretmek için kullanılan maksimum entropi yöntemi son zamanlarda istatistiksel mekaniğin içinde meydana gelen stokastik diferansiyel denklemlerin çözümlerine yaklaşmak için de kullanılmaktadır. Çünkü, maksimum entropi yöntemi sadece mevcut bilgileri kullanarak olasılık dağılımlarının açık bir şekilde elde edilmesine olanak sağlayan en etkili yöntemlerden biridir. Shannon'un bilgi teorisi (Shannon, 1948) bağlamında geliştirdiği bu güçlü yöntem, rassal değişkenle ilgili verilerin kısmen ya da hiç mevcut olmadığı birçok durumda son derece yararlıdır.

Hick ve Stevens (1987)'de maksimum entropi yönteminin, Fokker-Planck denk-

lemi gibi dağıtım fonksiyonlarının zaman evrimini yöneten kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için uygulanabilir olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca, Jaynes (1957)'in difüzyon benzeri ve Fokker-Planck denklemlerine yaklaşık çözüm bulma yöntemini incelemişlerdir.

Baker-Jarvis vd. (1989)'da maksimum entropi yönteminin Fokker-Planck denklemleri için uygun olduğu üzerine çalışmışlardır.

Jumarie (1990)'da Fokker-Planck denkleminin zamana bağlı katsayılar ile durağan olmayan çözümlerini belirlemek için maksimum entropi yöntemi ile bir yaklaşım önermişlerdir. Bu yöntemin çözümü, Fokker-Planck denklemlerinin öğeleri açısından doğrudan tanımlandığı için seri açılımlar ve öz fonksiyonlar aracılığıyla fiziksel olarak daha anlamlı olan kompakt bir form sağlamıştır.

Sobczyk ve Trebicki (1990)'da maksimum entropi prensibinin doğrusal ve doğrusal olmayan stokastik diferansiyel denklemlerin çözümlerinin olasılık dağılımlarının yaklaşık karakterizasyonunda kullanılabilir olduğunu göstermişlerdir.

Langtangen (1991)'de bir Markov işlemi ile sabit doğrusal olmayan rassal titreşimlere ilişkin modelin çözümünün olasılık yoğunluk fonksiyonunu Fokker-Planck denklemi yardımıyla bulunabilir olduğunu göstermiştir. Bu olasılık yoğunluk fonksiyonun elde edilmesi için genel bir sayısal çözüm yöntemi olarak yaklaşık dönüşümler veya maksimum entropi dağılımları yöntemini kullanmıştır. Başka bir ifadeyle bu çalışmada Fokker-Planck denklemlerini sayısal olarak çözmeyi amaçlamıştır.

Sobczyk ve Trebicki (1993)'de maksimum entropi prensibinin stokastik diferansiyel denklemleri çözmek için güçlü bir araç olduğunu göstermişlerdir. Özellikle, Itô formülünün oluşturduğu moment denklemleri ile bağlantılı olarak kullanımı ile geleneksel yöntemlerin uygulanamadığı bazı durumlarda olasılık yoğunluk fonksiyonunun doğru tahmin edilmesini sağlamışlardır.

Trebicki ve Sobczyk (1996)'da stokastik sistemlerin çözümlerinin durağan olmayan olasılık dağılımlarını karakterize etmek için maksimum entropi yaklaşımını kullanmışlardır. İstatistik, güvenilirlik ve tahmin gibi birçok alanda başarıyla uygulanan maksimum entropi yöntemini stokastik diferansiyel denklemlerin çözüm sürecinin olasılık dağılımını belirlemede kullanılabileceğini göstermişlerdir.

Plastino vd. (1997)'de Jaynes (1957)'in tekniklerini Fokker-Planck denklemini önemli bir astrofiziksel problem için kozmik ışın taşıma denklemine uygulamışlar ve

bir yaklaşım elde etmişlerdir.

Sobzyk ve Trebicki (1999)'da, stokastik nonlinear sistemlerin olasılık dağılımlarının karakterizasyonunu tahmin etmek için olası yaklaşımlar önermişlerdir. Bu tür sistemlerin temel özelliklerinin tanımlanmasından başlayarak olasılık dağılımlarının değerlendirilmesinde en dikkate değer olan maksimum entropi yöntemine vurgu yapmışlardır. Söz konusu bu yöntemin uygun bir şekilde genelleştirildiğinde karmaşık stokastik sistemlerin çözümün (veya yanıtın) istatistiksel denklemlerde yer alan bilgileri kullanarak başarılı bir şekilde çözüm elde edilebileceğini göstermişlerdir.

El-Wakil vd. (2001)'de değişken katsayılarla tek boyutlu Fokker-Planck denkleminin tam çözümünü bulmak için maksimum entropi yaklaşımını kullanmışlardır. Bununla birlikte, genelleştirilmiş Fokker-Planck denkleminin olasılık yoğunluğunun kesin çözümleri maksimum entropi yaklaşımı ile elde etmişlerdir. Yaklaşık çözümlere ek olarak, Fokker-Planck denkleminde maksimum entropi yaklaşımını kullanarak değişken katsayılarla Fokker-Planck denkleminin kesin çözümlerinin bulunması amaçlanmıştır. Çünkü, maksimum entropi tekniği genel bir veri azlığı veya benzersiz olmayan çözümlerin olduğu sistemlerde çözümlerin yaklaşımı için çok kullanışlıdır.

Soize (2008)'de maksimum entropi prensibini kullanarak vektör değerli bir rassal değişkenin olasılık dağılımını elde etmiştir ve Itô stokastik diferansiyel denkleminin durağan çözümünün oluşturulmasında bu olasılık dağılımının kullanılabilir olduğunu üç farklı şekilde göstermiştir.

Koverda ve Skokov (2012)'de bir rassal süreç üzerinde deterministik bir etki altında ortaya çıkan karmaşık stokastik süreçlerin durağanlığını araştırmak için maksimum entropi yönteminin kullanımını göstermişlerdir.

Zhang vd. (2014)'de stokastik diferansiyel denklemler için minimum çapraz entropi yöntemini incelemişler ve söz konusu yaklaşım ile üstel olarak eğimli olasılık dağılımlarının elde edilmesinde minimum çapraz entropi yönteminin de işlevsel olduğunu göstermiştir.

Opper (2017)'de stokastik diferansiyel denklemler tarafından açıklanan iki stokastik işlem için Kullback-Leibler entropi ölçümüne dayalı nispi entropi oranını tahmin etme problemini incelemiştir.

Vasconcelos vd. (2017)'de yeni bir yaklaşım olan H-teori ile elde edilen maksimum entropi prensibini kullanarak stokastik diferansiyel denklem çözümlerinin ol-

sılık dağılımına bir yaklaşım önermişlerdir ve özellikle parametrik belirsizliğe sahip stokastik diferansiyel denklemler ile ilgilenmişlerdir.

Deshpande ve Bhattacharya (2020)'de stokastik diferansiyel denklemin çözümüne polinom kaos açılımlarına benzer maksimum entropi temel fonksiyonlarını kullanarak bir yaklaşım geliştirmişlerdir. Maksimum entropi temel fonksiyonlarını bilgi teorik entropinin maksimize edilmesiyle mevcut verilerden elde etmişler ve mevcut yöntemlerle karşılaştırmışlardır.

Şu ana kadar verilmiş olan literatürdeki çalışmalar maksimum entropi yöntemi ve daha az sayıda olan minimum çapraz entropi yöntemi kullanarak stokastik diferansiyel denklemlerin çözümünü bulma üzerine olan çalışmalardır. Bu tez çalışmasının temel konusu olan stokastik diferansiyel denklemin çözümü olan stokastik sürecin yaklaşık olasılık yoğunluk fonksiyonun bulunması genelleştirilmiş entropi optimizasyon yöntemleri kullanılarak literatürde ilk kez bu çalışmada yapılmıştır ve geliştirilen yeni yöntem teorik olarak da ispatlanmıştır. Bu sebeple, geliştirilen yeni yöntemin etkin ve uygulanabilir olmasından dolayı literatürde yapılan çalışmalara farklı bir bakış açısı kazandırması beklenmektedir.

Tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır ve birinci bölüm olan giriş bölümünde literatür taramasına yer verilmiştir.

Çalışmanın ikinci bölümünde tez çalışmasının alt yapısını oluşturan gerekli matematiksel ön bilgiler ifade edilmiştir ve Itô stokastik diferansiyel denkleminin tanımına yer verilmiştir. Itô stokastik diferansiyel denklemler için varlık-teklik teoremi literatürde var olan yöntemlerden farklı olarak ilk defa Banach sabit nokta prensibinin bir genelleştirilmesi ile ispatlanmıştır. Sonrasında Itô stokastik diferansiyel denklem ile Fokker-Planck-Kolmogorov arasındaki ilişki ayrıntılı bir şekilde verilmiştir. Itô stokastik diferansiyel denkleminde yer alan Wiener süreci bir stokastik süreçtir. Bu sürecin varsayımlarının nasıl sağlanacağına ilişkin sınamalara da yer verilmiştir. Stokastik diferansiyel denklemlerin somut bir probleme uygulanabilmesi için parametrelerinin tahmin edilmesi gerekmektedir. Bu amaçla, en çok olabilirlik yöntemi ile stokastik diferansiyel denklemlerin parametre tahmini yapılmıştır. İlgilenilen veri setine önerilen stokastik diferansiyel denklem modelinin uygun olup olmadığının belirlenmesi gerekmektedir. Bu sebeple, stokastik diferansiyel denklemler için literatürde özel olarak geliştirilmiş olan Ki-Kare uyum iyiliği testi ayrıntılı

bir şekilde ifade edilmiştir. Bu bölümde son olarak Itô stokastik diferansiyel denklemlerin nümerik çözüm yöntemlerinden birisi olan Euler-Maruyama yöntemine yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde maksimum entropi, minimum çapraz entropi yöntemlerinin kesikli ve sürekli rassal değişkenler için elde edilme yöntemleri ifade edilmiş ve genelleştirilmiş entropi optimizasyon yöntemleri ile elde edilen genelleştirilmiş MaxEnt dağılımları ve genelleştirilmiş MinxEnt dağılımlarına yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise, çalışmanın temelini oluşturan stokastik diferansiyel denklemin çözümünün yaklaşık olasılık yoğunluk fonksiyonun elde edilmesine ilişkin yeni bir yöntem geliştirilmiştir ve söz konusu yeni yöntem bir teorem yardımıyla da ispatlanmıştır.

Beşinci bölümde ise bir önceki bölümde geliştirilen yeni yöntemin performansını göstermek için simülasyon çalışması ve farklı üç gerçek veri seti üzerinde uygulamalar yapılmıştır.

Son bölümde ise tez çalışmasında elde edilen bulgular değerlendirilmiş ve sonuçlar tartışılmıştır.

2. STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Stokastik diferansiyel denklemler konusu istatistik ve olasılık teorisine dayanan geniş çaplı bir alandır. Çözümleri stokastik süreç olan stokastik diferansiyel denklemler olasılık uzayı üzerinde tanımlandığından bu bölümde olasılıkla ilgili kavramlar, stokastik süreçlerle ilgili önemli tanım ve özelliklerden bahsedilmiştir. Stokastik diferansiyel denklemlerin çözümünün var ve tek olduğuna ilişkin Itô stokastik diferansiyel denklemler için varlık-teklilik teoremi farklı bir yöntem olan Banach sabit nokta prensibinin bir genelleştirilmesi yardımıyla literatürde var olan yöntemlerden farklı bir şekilde ispatı yapılmıştır. Sonrasında, SDD ile FPK arasındaki ilişki ayrıntılı bir şekilde verilmiştir. SDD'lerde yer alan Wiener sürecinin varsayımlarının sınanması istatistiksel testler ile gösterilmiştir. Stokastik diferansiyel denklemlerin çözümünün varlık-tekliliği ve Wiener sürecinin varsayımlarının sağlanmasından sonra SDD'lerin somut bir probleme uygulanabilmesi için parametrelerinin tahmin edilmesi gerekmektedir. Bu amaçla, en çok olabilirlik yöntemi ile stokastik diferansiyel denklemlerin parametre tahmini yapılmıştır. SDD modeline karar verildikten sonra önerilen modelin veri setine uyumlu olup olmadığı stokastik diferansiyel denklemler için literatürde özel olarak geliştirilmiş olan Ki-Kare uyum iyiliği testi yardımıyla gösterilmiştir. Son olarak da, Itô stokastik diferansiyel denklemlerin nümerik çözümü için Euler-Maruyama yöntemi ayrıntılı bir şekilde verilmiştir.

Tanm 2.1. Ω elementer sonuçlar uzayı, kompleks koşulların sabit tutulduğu ortamda sonsuza kadar devam ettirilebilir gözlemler sonucu baş gösterebilecek tüm olayların oluşturduğu bir küme ve $\mathfrak{B}$ 'de Ω 'nın alt kümelerinden oluşan bir kümeler sistemi olsun. Eğer P fonksiyonu $\mathfrak{B}$ 'de tanımlı gerçel değerli bir fonksiyon ise P bir küme fonksiyonudur. Her $A \in \mathfrak{B}$ için $P(A) \geq 0$ oluyorsa P negatif olmayan bir küme fonksiyonudur.

Bir Ω kümesinin alt kümelerinden oluşan $\mathfrak{B}$ kümeler sistemi için

1. $\emptyset \in \mathfrak{B}$,
2. $A \in \mathfrak{B}$ iken $A^c = (\Omega - A) \in \mathfrak{B}$,
3. $i = 1, 2, \dots$ için $A_i \in \mathfrak{B}$ iken $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{B}$

özelliklerini sağlıyorsa $\mathfrak{B}$ bir σ -cebri dir. $\mathfrak{B}$ bir σ -cebri ve P 'de $\mathfrak{B}$ üzerinde tanımlı bir küme fonksiyonu olsun. P küme fonksiyonu

1. $\forall A \in \mathfrak{B}$ için $P(A) \geq 0$,
2. $P(\Omega) = 1$,
3. $A_n, n \in \mathbb{N}$ ler $\mathfrak{B}$ 'deki ayrık ($A_k \cap A_j = \emptyset, k \neq j$) olayların bir dizisi olmak üzere,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

özelliklerini sağlıyorsa, P küme fonksiyonuna bir olasılık ölçüsü denir. Bu durumda, $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ üçlüsüne bir olasılık uzayı denir (Şamilov, 2014).

Tanm 2.2. $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ bir olasılık uzayı ve $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Eğer $x \in \mathbb{R}$ için $X^{-1}((-\infty, x])$ kümesi $\mathfrak{B}$ sistemi içinde yani $\{w \in \Omega : X(w) \leq x\}$ ise X bir rassal değişkendir.

$\{w \in \Omega : X(w) \leq x\} \in \mathfrak{B}$ özelliği X rassal değişkeninin ölçülebilirliğini ifade etmektedir. Bu özellik sayesinde $\forall x \in \mathbb{R}$ için bir fonksiyon yani $F_X(x) = P(X \leq x)$ fonksiyonu tanımlanabilir. Buna rassal değişkeninin dağılım fonksiyonu denir (Şamilov, 2014).

Tanm 2.3. Ω elementer sonuçlar uzayı sonlu veya sonsuz sayılabilir elemanlardan oluştuğunda X rassal değişkeninin dağılım fonksiyonu parçalı sabit azalmayan bir fonksiyonu ise X 'e kesikli rassal değişken denir. Kesikli rassal değişken sayılabilir sayıda değerlere sahiptir. Kesikli rassal değişkenin hemen hemen her yerde türevi 0'a eşittir (Şamilov, 2014).

Tanm 2.4. X rassal değişkeninin dağılım fonksiyonu $F(x)$ sürekli diferansiyellebilir fonksiyon ise, bir başka ifadeyle $F'(x) = f(x)$ koşulunu sağlayan $f(x)$ yoğunluk fonksiyonu sürekli bir fonksiyon ise X rassal değişkenine sürekli rassal değişken denir (Şamilov, 2014).

Tanm 2.5. X sürekli rassal değişkeni $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ olasılık uzayında tanımlı olsun. X rassal değişkeninin değerler kümesi D_X ve dağılım fonksiyonu $F(x)$ olsun. $\forall x \in D_X$

olmak üzere, X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_X(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x)}{\Delta x}$$

veya

$$f(x) = \begin{cases} \frac{dF(x)}{dx} & , \quad F\text{'nin türevlenebildiği yerlerde} \\ 0 & , \quad \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Olasılık yoğunluk fonksiyonunun özellikleri aşağıda verilmiştir:

1. $f_X(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$
3. $P(x_1 < X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)dx = F_X(x_2) - F_X(x_1)$
4. $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(s)ds$ (Şamilov, 2014).

Tanm 2.6. $y = f(x)$ fonksiyonu (α_x, α_y) ölçülebilir olsun. Eğer α_x ve α_y Borel sistemleri ise $y = f(x)$ fonksiyonuna Borel fonksiyonu denir. Başka bir ifadeyle, $y = f(x)$ fonksiyonu verildiğinde $\forall A \in \alpha_y$ Borel kümesiyken onun ters görüntüsü $f^{-1}(A) \in \alpha_x$ de Borel kümesi oluyor ise $y = f(x)$ fonksiyonuna Borel fonksiyonu denir (Şamilov, 2007).

Tanm 2.7. $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ olasılık uzayı üzerinde tanımlanmış rassal değişkenlerin bir koleksiyonuna bir stokastik süreç denir ve

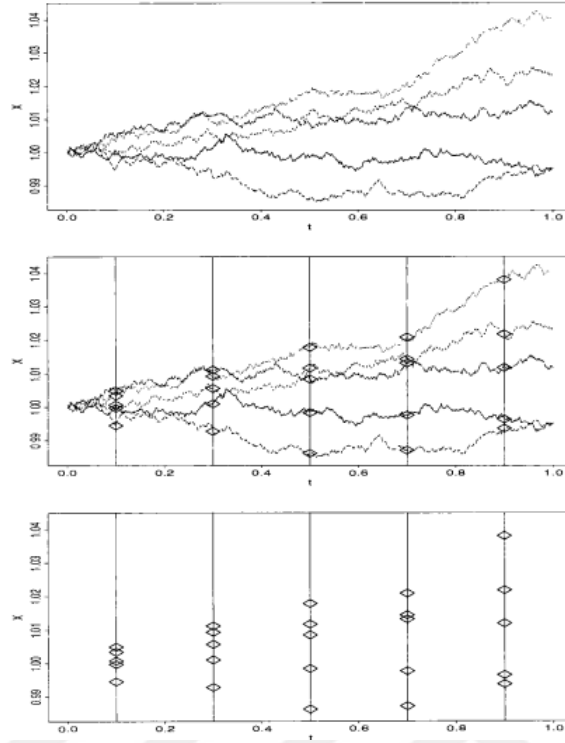
$$(X_t, t \in T) = (X_t(\omega), t \in T, \omega \in \Omega)$$

şeklinde yazılır. Burada T 'ye parametre kümesi denir. $t \in T, \omega \in \Omega$ olmak üzere $X(t, \omega)$ stokastik süreci iki değişkenli reel değerli bir fonksiyondur. Ayrıca, stokastik süreç $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ olasılık uzayı üzerinde tanımlı rassal değişkenler kümesi olarak da tanımlanmaktadır.

T genelde zaman olarak yorumlanan parametre kümesidir. T kümesi tanımdaki gibi soyut bir parametre kümesi iken genellikle literatürde $T \subset \mathbb{R}$ olarak alınır ve bu tez çalışmasında $T \subset \mathbb{R}$ olarak alınmıştır. Stokastik süreçler parametre kümesi T 'ye

ve rassal değişkenlerin durumlarına göre sınıflandırılmaktadır. Parametre kümesi, eğer sayılabilir bir küme ise o zaman stokastik sürece kesikli zamanlı stokastik süreç, eğer bir aralıksa yani $(T = (a, b), T = [a, b], \dots)$ ise o zaman stokastik sürece sürekli zamanlı stokastik süreç denir. Bir başka ifade ile $\forall t \in T$ için X_t rassal değişkenleri sürekli rassal değişkenler ise o zaman stokastik sürece sürekli, eğer $\forall t \in T$ için X_t rassal değişkenleri kesikli rassal değişkenler ise sürece kesikli stokastik süreç denir (Bozdağ, 2015). Stokastik sürece iki bakış açısı vardır:

1. Sabitlenmiş bir $t \in T$ zamanı için $X(t, \cdot) : (\Omega, \mathfrak{B}, P) \rightarrow \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyondur, bu da $X(t, \cdot)$ 'nin bir rassal değişken olduğunu gösterir. Dolayısıyla $\{X_t(\omega)\}_{t \in T}$ kümesine t parametresine bağlı rassal değişkenlerin ailesi olarak bakılabilir.
2. Eğer bir $\omega \in \Omega$ sabitlenirse bu durumda $X(\cdot, \omega) : T \rightarrow \mathbb{R}$ zamanın bir fonksiyonu olur. Bu durumda $X_t(\omega)$, t değişkenli bir fonksiyon olur. Bu fonksiyona sabit bir ω için stokastik sürecin yörüngesi, örnek yolu veya gerçekleşmesi denir. Çalışmanın geri kalan kısmında bu fonksiyon için yörünge terimi kullanılmıştır (Özel Kadılar, 2020).



Şekil 2.1. Bir stokastik sürecin beş farklı ω değerine karşılık gelen örneklem fonksiyonları (Mikosch, 1998)

Tanım 2.8. $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ olasılık uzayında tanımlanan $t \geq 0$ olmak üzere bir $W(t, \omega) : [0, \infty] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreci aşağıdaki koşulları sağlayan bir Brownian hareketi ya da Wiener sürecidir. $\{W_t, t \geq 0\}$ biçimindeki bir Wiener süreci aşağıda verilen özelliklerini taşır:

1. $W_0 = 0$ 'dır. Başka bir ifadeyle, süreç sıfır zamanında sıfır pozisyonundan başlar.
2. W_t, t 'nin sürekli bir fonksiyonudur.
3. $0 \leq t_1 < t_2$ için verilen $W(t_2) - W(t_1)$ artımı, 0 beklenen değerli $t_2 - t_1$ varyanslı normal dağılıma, yani $W(t_2) - W(t_1) \sim N(0, t_2 - t_1) = \sqrt{t_2 - t_1}N(0, 1)$ 'ne denktir.
4. $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ için $W_{t_1} - W_0, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ artımları durağandır.
5. $\{W_t, t \geq 0\}$ süreci bağımsız artmalı süreçtir. Başka bir deyişle, $0 < t_1 < t_2 <$

$\dots < t_n$ için $W_{t_1} - W_0, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ artımları bağımsız rassal değişkenlerdir (Özel Kadılar, 2020).

Tanm 2.9. Bir deneyin tekrarlanan denemelerinin bir dizisinde herhangi bir adımdaki sonuç en fazla bir önceki adımda bulunan sonuca bağlı olup daha önceki herhangi bir sonuca bağlı değildir. Böyle bir diziye Markov zinciri ya da Markov süreci denir.

Bir Markov stokastik süreç $N(\mu, \sigma)$ biçiminde gösterilen ortalaması μ , standart sapması σ olan normal dağılıma sahiptir. Markov özelliği taşıyan ve $(0, 1)$ dağılımına sahip olan bir değişken, Wiener süreci izler. Wiener süreci; Markov stokastik sürecinin özel bir durumudur (Türkseven, 2015).

Tanm 2.10. $\{X_t, t \in T\}$ sürecinin bir beyaz gürültü süreci olabilmesi için aşağıdaki koşulları sağlaması gerekmektedir:

- i. Her $t \in T$ için, $E(X_t) = 0$ olmalıdır.
- ii. Her $t \in T$ için, $\text{Var}(X_t) = \sigma^2 < \infty$ olmalıdır.
- iii. Her $t \in T, \tau > 0$ için, $\text{Cov}(X_t, X_{t-\tau}) = 0$ olmalıdır (Özel Kadılar, 2020).

Tanm 2.11. $x, y, z \dots$ elemanlarından oluşan bir $\mathcal{M}$ kümesi ele alınsın. Eğer $\mathcal{M}$ kümesinde bir metrik tanımlanmışsa, bir başka ifade ile iki nokta arasında mesafe kavramı tanımlanmışsa $\mathcal{M}$ kümesine metrik küme denir. $x, y \in \mathcal{M}$ iken bu iki nokta arasındaki mesafe $\rho(x, y)$ ile gösterilsin. $\rho(x, y)$ fonksiyonu $\forall x, y$ çiftine karşın bir sayı ifade eder. $\rho(x, y)$ fonksiyonu,

- i. $\rho(x, y) \geq 0, \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Pozitiflik özelliği)
- ii. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (Simetriklik özelliği)
- iii. $x, y, z \in \mathcal{M}$ için $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (Üçgen özelliği)

özelliklerine sahip ise $\rho(x, y)$ fonksiyonuna metrik denir. $\mathcal{M}$ metrik kümesinde dizi limiti kavramı tanımlanmış ise bu kümeye metrik uzay denir (Şamilov, 2012).

Tanm 2.12. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathcal{M}$ dizisi verildiğinde $\forall \varepsilon > 0$ sayısına göre $\exists N(\varepsilon)$ var ki $n > N$ ve $m = 1, 2, 3, \dots$ için $\rho(x_{n+m}, x_n) < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır ise $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisine Cauchy dizisi denir (Şamilov, 2012).

Tanm 2.13. $\mathcal{M}$ metrik uzayında her bir $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchy dizisi yakınsak ise ya da $\rho(x_n, x) \rightarrow 0, x \in \mathcal{M}$ ise, $\mathcal{M}$ metrik uzayına tam metrik uzay denir (Şamilov, 2012).

Tanm 2.14. $\mathcal{M}$ metrik uzayının her bir x elemanını başka bir $\mathcal{N}$ uzayının tek bir Ax elemanına atayan A kuralına $\mathcal{M}$ metrik uzayında tanımlı A operatörü denir (Şamilov, 2012).

Tanm 2.15. A operatörü $\mathcal{M}$ uzayında işlem yapan bir operatör ve $\forall x, y \in \mathcal{M}$ için $\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y)$, $0 < \alpha < 1$ ise ya da x ve y noktalarının görüntüleri arasındaki mesafe x ve y arasındaki mesafeden küçük ise A operatörüne sıkkan operatör denir (Şamilov, 2012).

Tanm 2.16. Her bir x elemanının normu denildiğinde $x \in \mathcal{M}$ olmakla $\|x\|$ anlaşılır. $\|x\|, \forall x$ için bir sayı tanımlar ve aşağıdaki özellikleri sağlar:

- i. $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- ii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- iii. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (Şamilov, 2012).

Tanm 2.17. $\forall \varepsilon > 0$ sayısına göre $\exists N(\varepsilon)$ var ki $n, m > N$ olmak üzere $\|X_n - X_m\|_{SP} < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanıyorsa $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisine Cauchy dizisi denir (Şamilov, 2012).

Tanm 2.18. S_{RV} , Sade rassal değişkenlerin kümesi, H_{RV} de rassal değişkenlerin Hilbert uzayı olsun. $(X, Y) \in S_{RV}$, iç çarpım

$$(X, Y) = E(XY) = E\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i I_{A_i} I_{B_j} d_i d_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i d_i d_j P(A_i \cap B_j)$$

Sade rassal değişkenlerin iç çarpımı tam değildir. Ancak, Hilbert uzayı ile tamamlanabilir. Bu durumda, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi- H_{RV} 'de tanımlı rassal değişkenler dizisi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ olmakla $\exists N(\varepsilon)$ var ki $n, m > N$ iken $|\|X\|_n - \|X\|_m|_{RV} < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır. Bu durumda, H_{RV} tamdır ve $n \rightarrow \infty$ ike. $\|X_n - X\|_{RV} \rightarrow 0$ olur. Buradan da, $S_{RV}; H_{RV}$ 'de sıktır denir.

Özetle, $(X, Y) = E(XY)$, Hilbert uzayı için norm $\|X\|_{RV} = (E(|X|^2))^{1/2}$ şeklinde tanımlanır (Allen, 2007).

Tanm 2.19. $f(t, \omega) = \sum_{i=0}^{N-1} f(t_i, \omega)$ basamaklı fonksiyonu verilmiş olsun. Stokastik süreçlerin Hilbert uzayı normu $\|f\|_{SP} = (f, f)^{1/2} = \left(\int_0^T E|f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$ şeklinde tanımlanmış metrik uzaydır (Allen, 2007).

Tanm 2.20. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ iki fonksiyon ve $\forall t \in [a, b]$ için $|f(t)|, |g(t)| < \infty$ olsun. $[a, b]$ aralığında keyfi $\tau_N : a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ parçalanışı olsun ve $\|\tau\| = \max_{i=1,2,\dots,N} |t_i - t_{i-1}|$ olarak tanımlansın. $\zeta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ keyfi nokta olmak üzere

$$S_\tau = \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) (g(t_i) - g(t_{i-1}))$$

toplamına τ için Riemann-Stieltjes toplam denir. Eğer $n \rightarrow \infty$ iken ve $\|\tau\| \rightarrow 0$ iken S_τ toplam bir sayıya yakınsıyor ise o zaman bu sayıya f fonksiyonunun g fonksiyonuna göre Riemann-Stieltjes integrali denir ve

$$\int_a^b f(t) dg(t)$$

ile gösterilir (Şamilov, 2007).

Tanm 2.21. $a \leq t \leq b$ olmak üzere stokastik süreçlerin Hilbert uzayı H_{SP} , rassal değişkenlerin Hilbert uzayı H_{RV} olmak üzere

$$J(f) = J(f)(\omega) = \int_a^b f(s, \omega) ds$$

$$J(f)(t) = J(f)(t, \omega) = \int_a^t f(s, \omega) ds$$

stokastik integralleri sırasıyla $H_{SP} \rightarrow H_{RV}$ ve $H_{SP} \rightarrow H_{SP}$ şeklinde dönüşümlerdir. Çünkü ilk integralin değeri rassal değişken iken ikinci integralin değeri stokastik süreçtir. H_{SP} 'da $[0, T]$ aralığında verilen f fonksiyonunun normu

$$\|f\|_{SP} = \left(\int_a^b E f(t)^2 dt \right)^{1/2}$$

şeklinde verilmiştir. Stokastik integrallerin tanımı gereği f stokastik süreci aşağıdaki üç koşulu sağlar:

1. $f(a) \in H_{RV}$ 'dir. Bu yüzden k_1 pozitif sabiti için $\|f(a)\|_{RV}^2 = E|f(a)|^2 \leq k_1$ eşitsizliği geçerlidir.
2. $\forall t_1, t_2 \in [a, b]$ için $\|f(t_2) - f(t_1)\|_{RV}^2 = E|f(t_2) - f(t_1)|^2 \leq k_2 |t_2 - t_1|$ ola-

cak şekilde k_2 pozitif sabiti vardır.

3. $[a, b]$ aralığında f "nonanticipating" fonksiyondur, yani f 'nin t anındaki durumu daha sonraki durumlardan bağımsızdır.

Riemann-Stieltjes integralinin yaklaşık değerinin Riemann toplamı olması gibi stokastik integralin yaklaşık değeri de $f \in H_{SP}$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ parçalanması, $\Delta t = (b - a)/N$ adım uzunluğu, $i = 0, 1, \dots, N$ için $t_i = a + i\Delta t$ olmak üzere

$$J(f) \approx J_N(f) = \sum_{i=0}^{N-1} f(t_i) \Delta t$$

şeklindedir (Allen, 2007).

Tanım 2.22. $a \leq t \leq b$ için

$$I(f) = I(f)(\omega) = \int_a^b f(s, \omega) dW(s, \omega)$$

$$I(f)(t) = I(f)(t, \omega) = \int_a^b f(s, \omega) dW(s, \omega)$$

integralleri Itô stokastik integrallerdir. Bu integraller sırasıyla $H_{SP} \rightarrow H_{RV}$ ve $H_{SP} \rightarrow H_{SP}$ şeklinde dönüşümlerdir ve f stokastik süreci stokastik integrallerin üç koşulunu da sağlamaktadır. $f \in H_{SP}$ ve f yukarıdaki üç şartı sağladığı varsayılırsa $\int_a^b f(s) dW(s)$ Itô stokastik integrali $s_i^{(w)} = a + i \left(\frac{b-a}{m} \right)$ olmak üzere

$$I(f) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b f_m(s) dW(s) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} f \left(s_i^{(m)} \right) \left(W \left(s_{i+1}^{(m)} \right) - W \left(s_i^{(m)} \right) \right)$$

şeklinde tanımlanır ve H_{RV} 'de yakınsaktır. $f, g \in H_{SP}$ ve c sabit olmak üzere Itô stokastik integrallerinin bazı özellikleri aşağıda verilmiştir:

- i. $I(f + g) = I(f) + I(g)$
- ii. $I(cf) = cI(f)$
- iii. $E(I(f)) = 0$
- iv. $E|I(f)|^2 = \int_a^b E|f(t)|^2 dt$ (Allen, 2007).

2.1. Itô Stokastik Diferansiyel Denkleminin Tanımı

Stokastik diferansiyel denklemler integralleyici sürece ve rassallığın kaynağına göre Itô ve Stratonovich olmak üzere iki alt denklem sınıfına ayrılmaktadır. Bu tez çalışmasında rassallığın hem başlangıç değere hem de adi diferansiyel denkleme eklenen Wiener sürecinden kaynaklandığı Itô stokastik diferansiyel denklemleri konusu ele alınmıştır. Bu bölümde adi diferansiyel denklemden yola çıkarak bir Itô stokastik diferansiyel denklemin nasıl elde edildiği ayrıntılı bir şekilde verilmiştir.

Bir adi diferansiyel denklem (ADD),

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x), \quad dx(t) = f(t, x)dt \quad (2.1)$$

başlangıç koşulları $x(0) = x_0$ olmakla integral formunda yazılabilirse

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds$$

elde edilir. Burada, $x(t) = x(t, x_0, t_0)$ eşitliği $x(t_0) = x_0$ başlangıç koşulları ile (2.1) adi diferansiyel denkleminin çözümüdür. Bir örnek vermek gerekirse

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(t)x(t), \quad x(0) = x_0 \quad (2.2)$$

(2.2) adi diferansiyel denkleminde $a(t)$ 'nin deterministik bir parametre değil, stokastik bir parametre olduğu varsayılırsa, stokastik diferansiyel denklem elde edilir. Stokastik parametresi $a(t)$ şu şekilde verilir:

$$a(t) = f(t) + h(t)\xi(t)$$

burada $\xi(t)$ beyaz gürültü sürecidir. Yani, rassallık sadece başlangıç şartından değil, aynı zamanda ölçümlerdeki hatalardan ve belirsizliklerden de kaynaklanabilir. Buradan yola çıkarak,

$$\frac{dX(t)}{dt} = f(t)X(t) + h(t)X(t)\xi(t) \quad (2.3)$$

elde edilir. (2.3) denklemi diferansiyel denklem formunda yazılırsa

$$dX(t) = f(t)X(t)dt + h(t)X(t)dW(t)$$

olur, burada $dW(t) = \xi(t)dt$ Wiener sürecidir.

$[0, T]$ aralığında tanımlanmış Itô stokastik diferansiyel denklemi,

$$dX(t, \omega) = f(t, X(t, \omega))dt + g(t, X(t, \omega))dW(t, \omega) \quad (2.4)$$

$$X(0, \omega) = X_0(\omega) \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $0 \leq t \leq T$ için $X(0, \omega) = X_0 \in H_{RV}$ başlangıç koşuluna sahiptir. (2.4) denkleminin çözümü bir stokastik süreçtir ve t zamanının her bir anında $X(t, \omega)$ bir rassal değişken ifade etmektedir. Ayrıca, $\int_c^d dW(s) = W(d) - W(c) \sim N(0, d - c)$ olan Wiener süreçleridir ve stokastik diferensiyel denklemlerde rassallığı sağlayan ifadedir.

f fonksiyonu sürüklenme katsayısı ve $f(t, X(t, \omega)) \in \mathbb{R}$, g fonksiyonu ise difüzyon katsayısı ve $g(t, X(t, \omega)) \in \mathbb{R}$ 'dir. f ve g "nonanticipating" fonksiyonlardır yani f ve g 'nin t anındaki durumu daha sonraki durumlardan bağımsızdır. Ayrıca, $k \geq 0$ olmak üzere f ve g fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlar:

$$k1. |f(t, x) - f(s, y)|^2 \leq k|t - s| + |x - y|^2, \quad s \geq 0, T \geq t, x, y \in \mathbb{R}$$

$$k2. |f(t, x)|^2 \leq k(1 + |x|^2), \quad 0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}.$$

(2.4) Itô SDD denklemi Itô integrali formunda yazılırsa,

$$X(t, \omega) = X(0, \omega) + \int_0^t f(s, X(s, \omega))ds + \int_0^t g(s, X(s, \omega))dW(s) \quad (2.6)$$

şeklinde elde edilmiş olur. Burada ilk integral bilinen Riemann-Stieltjes integrali, ikinci integral ise Itô integralidir (Allen, 2007).

2.2. Itô Stokastik Diferansiyel Denklemi İçin Varlık-Teklik Teoremi

Itô stokastik diferansiyel denklemin bir probleme uygulanabilmesi için öncelikle onun çözümünün olup olmadığı araştırılmalıdır. Özellikle de çözümün var ve

tek olması adi diferansiyel denklemlerde de olduğu gibi önemli bir konudur. Çünkü eğer somut bir problem için kurulan Itô stokastik diferansiyel denklem modelinin çözümü yok ise somut problem hakkında hiçbir bilgi edinilemez ve model kullanışsız olmaktadır. Bununla beraber eğer bir somut problem için kurulan Itô stokastik diferansiyel denklemin çözümü var ancak tek değil ise hangi çözüm üzerinden analizin yapılacağı bilinemeyeceğinden yine problem hakkında çıkarsama yapmak oldukça zordur ve model kullanılabilir olmaktadır. Ancak çözümün tekliği sağlanmadığı için yeni bir problemle karşı karşıya kalınmaktadır. Bu problemin çözümü için literatürde pek çok çalışma bulunmaktadır (Allen, 2007; Evans, 2013; Braumann, 2019). Fakat, bu tez çalışmasında verilen bir probleme uygun Itô stokastik diferansiyel denklem modeli kurulduktan sonra stokastik diferansiyel denklemin çözümünün var ve tek olduğu literatürden farklı olarak ilk defa Banach sabit nokta prensibinin genelleştirilmesi teoremi yardımıyla teorik olarak ispatlanmıştır. Bu bölümde sırasıyla Banach Teoremi ve Banach sabit nokta teoreminin genelleştirilmesi yardımcı teoremleri verildikten sonra Itô stokastik diferansiyel denklemin çözümünün var ve tek olduğuna ilişkin teorem ve ispatına yer verilmiştir.

Teorem 2.1. *A operatörü tam metrik $\mathcal{M}$ uzayında işlem yapan ve $\forall x, y \in \mathcal{M}$ için,*

$$\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y), \quad 0 < \alpha < 1$$

eşitsizliğini sağlayan bir sıkı operatör ise, A operatörünün $\mathcal{M}$ metrik uzayında tek bir tane sabit noktası vardır. Bir başka ifade ile,

$$Ax = x$$

denkleminin tek çözümü vardır ve bu çözüm,

$$x_n = Ax_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

olmak üzere $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin limiti olarak bulunur. Ayrıca $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin limiti $x_0 \in \mathcal{M}$ başlangıç noktasına bağlı değildir. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin bu şekilde kurulma yöntemine ardışık yaklaşımlar yöntemi denir (Banach, 1922).

Teorem 2.2. *Tam metrik $\mathcal{M}$ uzayında işlem yapan A operatörünün m. kuvveti sıkı*

ise, bir başka ifadeyle

$$\forall x, y \in \mathcal{M} \text{ için, } \rho(A^m x, A^m y) \leq \alpha \rho(x, y), \quad 0 < \alpha < 1$$

eşitsizliği sağlanıyor ise A operatörünün $\mathcal{M}$ uzayında tek bir sabit noktası vardır. Başka bir ifadeyle, A operatörünün kendisi sıkı değilse ancak m . derecesi sıkı operatör ise bu durumda, A operatörünün sabit noktası onun m . derecesinin de sabit noktasıdır (Ćirić, 1974).

Yukarıda verilen teoremler yardımıyla şimdi verilen bir Itô stokastik diferansiyel denklemin bir probleme uygulanabilmesi için öncelikle onun çözümünün var ve tek olduğunu gösteren teorem ve ispatına geçilebilir.

Teorem 2.3. *Itô stokastik diferansiyel denkleminin k_1 ve k_2 koşulları altında H_{SP} 'de tek bir çözümü vardır. Başka bir ifadeyle, (2.4) denkleminin k_1 ve k_2 koşulları altında çözümü var ve bu çözüm tektir.*

Kanıt. Önce (2.4) Itô stokastik diferansiyel denkleminin integral formuna uygun A operatörü

$$(A\varphi)(t) = X_0 + \int_0^t f(s, \varphi(s))ds + \int_0^t g(s, \varphi(s))dW(s) \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlansın. Burada, $A: H_{SP} \rightarrow H_{SP}$ ve $\varphi \in H_{SP}$ iken $A\varphi \in H_{SP}$ olur. k_1 ve k_2 koşulları doğrultusunda f ve g pürüzsüz ve sürekli fonksiyon, $\varphi(s)$ rassal değişken, $f(s, y)$ ve $g(s, y)$ Borel fonksiyon, f ve g Borel fonksiyon olduğu için sırasıyla $f(s, \varphi(s))$ ve $g(s, \varphi(s))$ 'de Borel fonksiyon, $\int_0^t f(s, \varphi(s))ds$ ve $\int_0^t g(s, \varphi(s))dW(s)$ integralleri de rassal değişkendir. Şimdi A operatörünün dereceleri tanımlansın:

$$(A\varphi)(t) = X_0 + \int_0^t f(s, \varphi(s))ds + \int_0^t g(s, \varphi(s))dW(s)$$

$$(A\psi)(t) = X_0 + \int_0^t f(s, \psi(s))ds + \int_0^t g(s, \psi(s))dW(s)$$

$$(A^2\varphi)(t) = A(A\varphi(t))$$

$$(A^2\varphi)(t) = X_0 + \int_0^t f(s, (A\varphi)(s))ds + \int_0^t g(s, (A\varphi)(s))dW(s)$$

$$(A^2\psi)(t) = X_0 + \int_0^t f(s, (A\psi)(s))ds + \int_0^t g(s, (A\psi)(s))dW(s)$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} |(A\varphi)(t) - (A\psi)(t)| &\leq \int_0^t |f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))| ds + \\ &+ \int_0^t |g(s, \varphi(s)) - g(s, \psi(s))| dW(s) \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} E|(A\varphi)(t) - (A\psi)(t)|^2 &\leq 2E \left\{ \int_0^t |f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))| ds + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t |g(s, \varphi(s)) - g(s, \psi(s))| dW(s) \right\}^2 \\ E|(A\varphi)(t) - (A\psi)(t)|^2 &\leq 2 \left\{ \left(\int_0^t E|f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))| ds \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_0^t E|g(s, \varphi(s)) - g(s, \psi(s))| dW(s) \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

elde edilir. (2.8) eşitsizliğinde matematiksel beklenti içeri dağıtılsa ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği (Steele, 2004) ile Itô integralinin 4. özelliği dikkate alınrsa,

$$\begin{aligned} E|(A\varphi)(t) - (A\psi)(t)|^2 &\leq 2 \left\{ \left(\int_0^t 1^2 ds \int_0^t E|f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))|^2 ds \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_0^t E|g(s, \varphi(s)) - g(s, \psi(s))|^2 ds \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.9)$$

elde edilir. (2.9) eşitsizliğinde k_1 koşulu dikkate alınrsa,

$$\begin{aligned} E|(A\varphi)(t) - (A\psi)(t)|^2 &\leq 2 \left\{ t \int_0^t k_2 E|\varphi(s) - \psi(s)|^2 ds + \int_0^t k_2 E|\varphi(s) - \psi(s)|^2 ds \right\} \\ &\leq (2tk_2 + 2k_2) \int_0^t E|\varphi(s) - \psi(s)|^2 ds \end{aligned} \quad (2.10)$$

elde edilir. (2.10) eşitsizliğinde $2tk_2 + 2k_2 = L$ olsun.

$$\begin{aligned} E|(A\varphi)(t) - (A\psi)(t)|^2 &\leq L \int_0^t E|\varphi(s) - \psi(s)|^2 ds \\ E|(A^2\varphi)(t) - (A^2\psi)(t)|^2 &\leq L^2 \int_0^t \int_0^{s_1} E|\varphi(s) - \psi(s)|^2 ds ds_1 \end{aligned}$$

⋮

$$E |(A^m \varphi)(t) - (A^m \psi)(t)|^2 \leq L^m \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{n-1}} E |\varphi(s) - \psi(s)|^2 ds ds_1 \dots ds_{n-1}$$

n katlı integralin parametreye bağı tek katlı integrale dönüştürülmesi $y^{(n)} = f(x)$ olsun.

$$y^{(n-1)}(x) - y^{(n-1)}(x_0) = \int_{x_0}^x f(s) ds$$

$$y^{(n-1)}(x) - y^{(n-2)}(x_0) - y_0(x - x_0) = \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{s_1} f(s) ds ds_1$$

$$y^{(n-2)}(x) - y^{(n-2)}(x_0)(x - x_0) - y_0^{(n-1)} \frac{(x - x_0)^2}{2!} = \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{s_2} \int_{x_0}^{s_1} f(s) ds ds_1 ds_2$$

$$y^{(n-3)}(x) = y_0^{(n-2)}(x - x_0) - y_0^{(n-1)} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{s_2} \int_{x_0}^{s_1} f(s) ds ds_1 ds_2$$

$$\Delta = \{(s_1, s_2) : x_0 \leq s_1 \leq s_2, x_0 \leq s \leq s_1\}$$

$$\Delta = \{(s_1, s_2) : x_0 \leq s \leq s_2, s \leq s_1 \leq s_2\}$$

dönüşümleri yapılsın. Bu durumda

$$\int_{x_0}^{s_2} \int_{x_0}^{s_1} f(s) ds ds_1 = \int_{x_0}^{s_2} ds \int_s^{s_2} f(s) ds_1 = \int_{x_0}^{s_2} (s_2 - s) f(s) ds$$

elde edilir.

$$\Delta = \{(s_1, s_2) : x_0 \leq s_2 \leq x, x_0 \leq s \leq s_2\}$$

$$\Delta = \{(s_1, s_2) : x_0 \leq s \leq x, s \leq s_2 \leq x\}$$

dönüşümleri yapılsın. Bu durumda

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{s_2} \int_{x_0}^{s_1} (s_2 - s) f(s) ds ds_2 &= \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{s_2} (s_2 - s) f(s) ds ds_2 = \\ &= \int_{x_0}^x ds \int_s^x (s_2 - s) f(s) ds_2 = \\ &= \int_{x_0}^x f(s) \left(\frac{(x - s)^2}{2!} \right) ds = \int_{x_0}^x \frac{(x - s)^2}{2!} f(s) ds \end{aligned}$$

elde edilir (Şamilov, 2012). Buradan, n katlı integral için

$$\int_{x_0}^x \int_{x_0}^{s_{n-1}} \dots \int_{x_0}^{s_1} f(s) ds ds_1 \dots ds_{n-1} = \int_{x_0}^x \frac{(x - s)^{n-1}}{(n - 1)!} f(s) ds$$

elde edilmiş olur (Şamilov, 2012). Burada da n katlı integralin parametreye bağlı tek katlı integrale dönüştürülmesi yönteminden yararlanarak,

$$E |(A^m \varphi)(t) - (A^m \psi)(t)|^2 \leq L^m \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \int_0^t E |\varphi(s) - \psi(s)|^2 ds$$

elde edilir. Buradan,

$$\int_0^T E |(A^m \varphi)(t) - (A^m \psi)(t)|^2 dt \leq \int_0^T L^m \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \int_0^t E |\varphi(s) - \psi(s)|^2 ds$$

$$\|(A^m \varphi) - (A^m \psi)\|_{sp}^2 \leq \left(\frac{L^m T^m}{m!} \right)^{1/2} \|\varphi - \psi\|_{sp}^2$$

$$\rho((A^m \varphi), (A^m \psi)) = \|(A^m \varphi) - (A^m \psi)\|_{sp}$$

$$\rho(\varphi, \psi) = \|\varphi - \psi\|_{sp}$$

$$\rho((A^m \varphi), (A^m \psi)) \leq \left(\frac{L^m T^m}{m!} \right)^{1/2} \rho(\varphi, \psi)$$

eşitsizliği elde edilir. $\left(\frac{L^m T^m}{m!} \right)^{1/2} = \alpha$ olsun. $0 < \alpha < 1$ ise,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{L^m T^m}{m!} \right)^{1/2}$$

dizisinin limitinin olup olmadığı D’alembert testi (Knopp, 1956) ile incelendiğinde

$$\vartheta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{m+1}}{u_m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{L^{m+1} T^{m+1}}{(m+1)!} \right)^{1/2}}{\left(\frac{L^m T^m}{m!} \right)^{1/2}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{LT}{m+1} \right)^{1/2} = 0$$

olur. Bu durumda, $\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{L^m T^m}{m!} \right)^{1/2}$ dizisi yakınsaktır. Yani, $m \rightarrow \infty$ iken $\alpha = \left(\frac{L^m T^m}{m!} \right)^{1/2} < 1$ eşitsizliği sağlanır. Bu ise A^m operatörünün sıkkan operatör olduğunu gösterir. Sıkkan operatör olduğu için sabit bir noktası vardır ve bu nokta tektir. Banach sabit nokta teoreminin genelleştirilmesinden, $\varphi_0 = A^m \varphi_0$ ise $\varphi_0 = A \varphi_0$ eşitliği geçerlidir. Yani, A operatörünün $\mathcal{M}$ uzayında tek bir sabit noktası vardır. Sonuç olarak, Banach sabit nokta prensibinin genelleştirilmesi kullanılarak Itô stokastik diferansiyel denklemi için varlık-teklilik teoremi ispatlanmış olur. $\square$

Literatürde var olan stokastik diferansiyel denklemlerin varlık ve tekliliğine ilişkin teorik ispatlara bakıldığında genellikle varlığın ispatlandığı tekliliğin ise kabul

edildiği görülmektedir (Allen, 2007; Evans, 2013; Panik, 2017). Bu tez çalışmasında ise; Banach sabit nokta prensibinin geliştirilmesi yardımıyla yapılan varlık-teklik ispatının hem varlık ve tekliğin ispatlanabilir olduğunu kısa bir şekilde elde edilmişinden hemde uygulanabilir olması açısından söz konusu ispatın literatüre farklı bir bakış açısı kazandırması beklenmektedir.

2.3. Fokker-Planck-Kolmogorov Denklemi ile Itô Stokastik Diferansiyel Denklemi Arasındaki İlişki

Stokastik diferansiyel denklemler ile Fokker-Planck-Kolmogorov denklemi arasındaki ilişki oldukça önemlidir. Çünkü bir stokastik diferansiyel denklemin çözümü bir stokastik süreçtir. FPK denkleminin çözümü ise bu stokastik sürecin olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

(2.4) Itô SDD modeli verilsin ve $F \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ olsun. Burada, F fonksiyonu $\mathbb{R}$ 'de tanımlanmış sonsuza kadar diferansiyellenebilir fonksiyon olup, uç noktalarda kendisi ve türevleri sıfıra yaklaşır.

$$F(t, X) = \ln(X(t))$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{X}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{1}{X^2}$$

olsun. Itô formülü

$$dF(t, X(t)) = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + f(t, X(t)) \frac{\partial F(t, X(t))}{\partial x} + \frac{1}{2} g^2(t, X(t)) \frac{\partial^2 F(t, X(t))}{\partial x^2} \right) dt + g(t, X(t)) \frac{\partial F(t, X(t))}{\partial x} dW(t) \quad (2.11)$$

şeklindedir (Kiyosi, 1951). Burada, $F(t, X) \ln(X(t))$ 'e Itô formülü uygulanırsa, aşağı-

ğdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
d \ln(X(t)) &= \left(0 + f(t)X(t) \frac{1}{X(t)} + \frac{1}{2}g^2(t)X^2(t) \left(-\frac{1}{X^2(t)} \right) \right) dx + \\
&\quad + g(t)X(t) \frac{1}{x(t)} dW(t) \\
d \ln(X(t)) &= \left(f(t) + \frac{1}{2}g^2(t) \right) dx + g(t)dW(t) \\
\ln X &= \int_0^t \left(f(s) - \frac{g^2(s)}{2} \right) ds + \int_0^t g(s)dW(s) \\
\ln X &= \ln X_0 + \int_0^t \left(f(s) - \frac{g^2(s)}{2} \right) ds + \int_0^t g(s)dW(s) \\
\ln \frac{X}{X_0} &= \int_0^t \left(f(s) - \frac{g^2(s)}{2} \right) ds + \int_0^t g(s)dW(s)
\end{aligned}$$

olur. Son eşitliğin her iki tarafından matematiksel beklenti alınırsa,

$$E \left[\ln \frac{X}{X_0} \right] = E \int_0^t \left(f(s) - \frac{g^2(s)}{2} \right) ds + E \int_0^t g(s)dW(s) \quad (2.12)$$

elde edilir. (2.12) eşitliğinin sağ tarafının ikinci kısmı Itô integralinin 3. özelliğinden

$$E \int_0^t g(s)dW(s) = 0$$

olur ve (2.12) eşitliği

$$E \left[\ln \frac{X}{X_0} \right] = E \int_0^t \left(f(s) - \frac{g^2(s)}{2} \right) ds$$

eşitliğine dönüşür. Buradan da,

$$\frac{dE(F)}{dt} = E \left[\frac{\partial F}{\partial x} f + \frac{1}{2}g^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right] \quad (2.13)$$

eşitliği geçerlidir. $F(t, X) = F(x)$ olsun. (2.13) eşitliği, (2.11) Itô formülünde dikkate

alınırsa $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} dF(X) &= \left(f(t, X(t)) \frac{\partial F(X(t))}{\partial x} + \frac{1}{2} g^2(t, X(t)) \frac{\partial^2 F(X(t))}{\partial x^2} \right) dt \\ &\quad + g(t, X(t)) \frac{\partial F(X(t))}{\partial x} dW(t) \\ F(X) &= F(X_0) + \int_0^t \left(f(s, X(s)) \frac{\partial F(X(s))}{\partial x} + \frac{1}{2} g^2(s, X(s)) \frac{\partial^2 F(X(s))}{\partial x^2} \right) ds \\ &\quad + \int_0^t g(s, X(s)) \frac{\partial F(X(s))}{\partial x} dW(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(F(X)) &= E(F(X_0)) \\ &\quad + E \left[\int_0^t \left(f(s, X(s)) \frac{\partial F(X(s))}{\partial x} + \frac{1}{2} g^2(s, X(s)) \frac{\partial^2 F(X(s))}{\partial x^2} \right) ds \right] \\ &\quad + E \left[\int_0^t g(s, X(s)) \frac{\partial F(X(s))}{\partial x} dW(s) \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

elde edilir. (2.14) eşitliğinin sağ taraf ikinci kısmı Itô integralinin 3. özelliğinden

$$E \left[\int_0^t g(s, X(s)) \frac{\partial F(X(s))}{\partial x} dW(s) \right] = 0$$

olur. Matematiksel beklentinin tanımına göre $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ şeklindedir. Buradan da,

$$E(F(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) p(t, x) dx \quad (2.15)$$

olur (2.15) eşitliği, denklem (2.14)'de dikkate alınır,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) p(t, x) dx &= E(F(X_0)) \\ &\quad + E \left[\int_0^t \left(f(s, X(s)) \frac{\partial F(X(s))}{\partial x} + \frac{1}{2} g^2(s, X(s)) \frac{\partial^2 F(X(s))}{\partial x^2} \right) ds \right] \end{aligned} \quad (2.16)$$

elde edilir. (2.16) denkleminde türev formuna geçilirse,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E \left(F(t, X(t)) \right) &= E \left[f(t, X(t)) \frac{\partial F(X(t))}{\partial x} + \frac{1}{2} g^2(t, X(t)) \frac{\partial^2 F(X(t))}{\partial x^2} \right] \\ \frac{d}{dt} E \left(F(t, X(t)) \right) &= E \left[f(t, X(t)) \frac{\partial F(X(t))}{\partial x} + \frac{1}{2} g^2(t, X(t)) \frac{\partial^2 F(X(t))}{\partial x^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)p(t, x)dx &= \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} p(t, x) \left[f(t, X(t)) \frac{\partial F(X(t))}{\partial x} + \frac{1}{2} g^2(t, X(t)) \frac{\partial^2 F(X(t))}{\partial x^2} \right] dx
\end{aligned} \tag{2.17}$$

elde edilir.

$\int u dv = uv - \int v du$ kısmi integrasyon formülü verilsin. (2.17) denkleminin sağ taraf 1. eşitliğine kısmi integrasyon formülü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} p(t, x) f(t, X(t)) \frac{\partial F(X(t))}{\partial x} dx &= p(t, x) f(t, X(t)) F(X(t)) \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\
&\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} F(X(t)) \frac{d}{dx} p(t, x) f(t, X(t)) dx
\end{aligned}$$

$F \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ olduğundan, $p(t, x) f(t, X(t)) F(X(t)) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$ olur. Bu durumda,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t, x) f(t, X(t)) \frac{\partial F(X(t))}{\partial x} dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} F(X(t)) \frac{d}{dx} p(t, x) f(t, X(t)) dx \tag{2.18}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi, (2.17) denkleminin sağ taraf 2. eşitliğine kısmi integrasyon formülü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} p(t, x) \frac{1}{2} g^2(t, X(t)) \frac{\partial^2 F(X(t))}{\partial x^2} dx &= \frac{1}{2} p(t, x) g^2(t, X(t)) \frac{\partial F(X(t))}{\partial x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \\
&\quad - \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dx} p(t, x) g^2(t, X(t)) F(X(t)) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2}{dx^2} p(t, x) \frac{1}{2} g^2(t, X(t)) F(X(t)) dx \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. $t \frac{d}{dx} p(t, x) g^2(t, X(t)) F(X(t)) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$ olduğundan,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t, x) \frac{1}{2} g^2(t, X(t)) \frac{\partial^2 F(X(t))}{\partial x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2}{dx^2} p(t, x) g^2(t, X(t)) F(X(t)) dx \tag{2.19}$$

eşitliği elde edilir. (2.18) ve (2.19) eşitlikleri (2.17)'te dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \frac{d}{dt} p(t, x) dx &= - \int_{-\infty}^{+\infty} F(X(t)) \frac{d}{dx} p(t, x) f(t, X(t)) dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2}{dx^2} p(t, x) g^2(t, X(t)) F(X(t)) dx
\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \left[\frac{d}{dt} p(t, x) + \frac{d}{dx} p(t, x) f(t, X(t)) - \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} p(t, x) g^2(t, X(t)) \right] dx = 0 \quad (2.20)$$

Eğer $p(t, x)$ stokastik diferansiyel denklemin çözümleri için olasılık yoğunluk fonksiyonu ise, yukarıdaki sonuç her $F \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ için $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) G dx = 0$ olduğundan $G = 0$ olur. Bu durumda $\frac{d}{dt} p(t, x) + \frac{d}{dx} p(t, x) f(t, X(t)) - \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} p(t, x) g^2(t, X(t)) = 0$ olur. Bu durumda, her $F \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ fonksiyonu için integral alınırsa,

$$\frac{d}{dt} p(t, x) = -\frac{d}{dx} p(t, x) f(t, X(t)) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} p(t, x) g^2(t, X(t))$$

ya da

$$\frac{\partial p(t, x)}{\partial x} = -\frac{\partial(p(t, x) f(t, X(t)))}{\partial x} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2(p(t, x) f(t, X(t)))}{\partial x^2} \quad (2.21)$$

elde edilir. (2.21) denklemini $p(0, x) = p_0(x)$ başlangıç koşuluna sahiptir. Denklem (2.21)'deki $p(t, x)$, (2.4) Itô stokastik diferansiyel denkleminin çözümü olan stokastik sürecin olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere Fokker-Planck-Kolmogorov denklemini sağlamaktadır (Allen, 2007).

2.4. Wiener Sürecinin Varsayımlarının Kontrolü

Itô stokastik diferansiyel denklem modelinde yer alan Wiener süreci bir stokastik süreçtir. Stokastik süreçler de zamana bağlı süreçler olduğundan söz konusu Wiener süreci bir zaman serisi olarak düşünülebilir. Ayrıca, Wiener sürecinin kendisi durağan olmayıp artımları normal dağılıma sahip, durağan ve bağımsız olmalıdır. Buradan yola çıkarak, bu bölümde herhangi bir $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$ için $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ özelliğini sağlayan $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ rassal değişkenlerinin dağılımının normal, durağan ve bağımsız olduğu özelliklerinin sağlandığını göstermek için gerekli sınamalara yer verilmiştir.

2.4.1. Normallik varsayımının sınanması

İstatistikte normallik testleri, bir veri kümesinin normal dağılım ile iyi modellenip modellenmediğini belirlemek ve veri kümesinin altında yatan rassal değişkenin normal dağılıma olasılığının ne kadar yüksek olduğunu hesaplamak için kullanılmaktadır. Bir verinin normal dağılıma olan uygunluğu normallik testi olarak da adlan-

dırılan istatistiksel testler yardımıyla tespit edilmektedir. Bu tez çalışmasında, normallik testleri arasında en güçlü test olarak geçen Shapiro-Wilk (S-W) testi (Shapiro ve Wilk, 1965) kullanılmıştır. Normal dağılım gösteren toplumdan rasgele seçilen n birimlik X_i gözlemlerinin normallik testi W test istatistiği ile test edilir. W test istatistiği,

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i X_{(i)})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

ile hesaplanır. Burada, $X_{(i)}$ sıralı gözlemleri, a_i, n sıralı gözlemin standart normal dağılım Z_i değerlerinden yararlanılarak hesaplanan ağırlık katsayılarıdır. Test sonucunda bir W istatistik değeri hesaplanmaktadır. W istatistiği 0 ile 1 arasında bir değer alır. S-W testinin hipotezleri:

H_0 : Veriler normal dağılıma uygundur.

H_1 : Veriler normal dağılıma uygun değildir.

şeklinde kurulmaktadır. Bu testten elde edilen p-değeri belirli bir anlamlılık düzeyinden büyükse H_0 hipotezi kabul edilir ve veriler normal dağılıma uygundur denir.

2.4.2. Durağanlık varsayımının sınanması

Zaman serisinin ortalaması ve varyansı zamandan bağımsız ise, seri durağan bir zaman serisidir. Durağanlığı test etmek için uygulamalarda en sık kullanılan yöntemlerden birisi birim kök analizidir. Durağanlık testindeki durağanlık, değişkenin değerinin zamanla değişmediğini, yani zamandaki değişimin bir değişkenin değerinde değişiklik getiren bir faktör olarak etki etmediğini belirten zaman serilerinin bir özelliğidir. Bu tez çalışmasında, uygulamalarda Kwiatkowski vd. (1992) tarafından önerilmiş KPSS birim kök testi kullanılmıştır.

KPSS birim kök testinin amacı; gözlenen serideki deterministik trendin arındırılarak serinin durağanlaştırılmasıdır. Test, artıkların uzun dönem varyansının parametrik olmayan tahmincisine dayanmaktadır. Test için denklem aşağıdaki gibi oluşturulmaktadır:

$$Y_t = x_t' \delta + u_t$$

Denklemden yer alan x_t ; sabit veya sabit ve trendi ifade eden deterministik bileşendir. Bu denklem yardımıyla elde edilen kalıntılar test istatistiğinin hesaplanmasında kul-

lanılmaktadır. KPSS test istatistiği;

$$LM = T^{-2} \sum_{i=1}^T s_t^2 / f_0$$

şeklindedir. Burada T gözlem sayısı, s_t birikimli kalıntı fonksiyonudur ve $s(t) = \sum_{r=1}^t \hat{u}_r$ şeklinde hesaplanmaktadır. f_0 ise sıfır frekansta kalıntı spektrumunun tahmincisidir. KPSS testinin hipotezleri ise:

H_0 : Seri durağandır, birim kök içermez.

H_1 : Seri durağan değildir, birim kök içerir.

şeklinde kurulmaktadır. Bu testten elde edilen p-değeri belirli bir anlamlılık düzeyinden büyükse H_0 hipotezi kabul edilir ve seri durağandır denir.

2.4.3. Bağımsızlık varsayımının sınanması

Zaman serilerine ilişkin özelliklerin en önemli göstergesi olan otokorelasyon katsayıları, bir zaman serisinin farklı dönemdeki gözlemleri arasındaki ilişkiyi göstermesi açısından oldukça önemlidir. Çünkü, zaman serisinin gözlemleri arasındaki bağımlılığın derecesini ortaya koymaktadırlar. Otokorelasyon katsayılarının küçük olması zaman serisinin rassal olduğunu, büyük olması ise zaman serisinin geçmiş değerlerine bağımlı olduğunu göstermektedir. Otokorelasyon katsayısı değerleri -1 ve 1 değerleri arasında yer alır. k gecikmede otokorelasyon katsayıları teorik olarak;

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

ile hesaplanır. Bu tez çalışmasındaki uygulamalarda tüm örnek otokorelasyon katsayılarının sıfıra eşit olup olmadıklarını test etmek için Box-Pierce Q testi (Box ve Pierce, 1970) kullanılmıştır. Box-Pierce Q test istatistiği

$$\text{Box - Pierce } Q = n \cdot \sum_{k=1}^m \hat{\rho}_k^2$$

şeklinde hesaplanır. Box-Pierce Q testinin hipotezleri:

H_0 : $\rho = 0$ (Tüm gecikmeler için otokorelasyon katsayıları sıfıra eşittir.)

H_1 : $\rho \neq 0$ (Tüm gecikmeler için otokorelasyon katsayıları sıfırdan farklıdır.)

şeklinde kurulmuştur. Bu testten elde edilen p-değeri belirtilen önem seviyesinden büyükse H_0 hipotezi kabul edilir ve tüm gecikmeler için otokorelasyon katsayıları sıfırdır ve artımların bağımsızlığı sağlanmış olur.

2.5. Stokastik Diferansiyel Denklemler İçin Parametre Tahmini

Itô stokastik diferansiyel denklem modelleri kurulduktan sonra bu denklemin özel somut problemlere uygulanabilmesi için modelde ortaya çıkan parametrelerini tahmin etmek için literatürde kullanılan pek çok tahmin yöntemleri bulunmaktadır. Bu yöntemler, en çok olabilirlik yöntemi, parametrik olmayan tahmin yöntemlerinden genelleştirilmiş momentler yöntemi, sözde en çok olabilirlik tahmini yöntemi vb. (Bishwal, 2007). Bu bölümde, Itô stokastik diferansiyel denklemlerinin parametre tahmini için en çok olabilirlik yöntemine yer verilmiştir. Bu amaçla parametre tahmini için kullanılacak Itô stokastik diferansiyel denklemi

$$dX(t) = f(t, X(t); \theta)dt + g(t, X(t); \theta)dW(t) \quad (2.22)$$

şeklinde verilsin. Burada, $\theta \in \mathbb{R}^m$ bilinmeyen parametreler vektörü olsun. $X(t)$ 'nin gözlem verisi

$$x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$$

olduğu varsayılın. $t_i = i\Delta t$ uniform dağılmış zaman aralığında $\Delta t = \frac{T}{N}$ ve $i = 0, 1, \dots, N-1$ olsun. Buradan yola çıkarak, $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$ değerleri (2.22) denkleminin çözümü olan $X(t)$ stokastik sürecinin eşit zaman aralıklarında gözlemlenmiş değerleri olmak üzere problem bu gözlemler verildiğinde parametre vektörünün tahmin edilmesidir.

Verilen θ vektörü için (t_{k-1}, x_{k-1}) noktasından başlayarak (t_k, x_k) noktasındaki geçiş olasılık yoğunluğu $P(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)$ olsun. Başlangıç durumun olasılık yoğunluğunun $P_0(x_0 | \theta)$ olduğu varsayılın. Bu durumda olabilirlik fonksiyonu parametre vektörünün bir fonksiyonu olarak

$$D(\theta) = P_0(x_0 | \theta) \prod_{k=1}^N P(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \theta) \quad (2.23)$$

olarak ifade edilir. θ 'nın tahmini için (2.23) eşitliğinin maksimize edilmesi gerekmektedir veya $L(\theta) = -\ln(D(\theta))$ fonksiyonu da minimize edilebilir. Yani θ 'nın tahmincisi

$$L(\theta) = -\ln(p_0(x_0 | \theta)) - \sum_{k=1}^N \ln(p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)) \quad (2.24)$$

fonksiyonuna minimum değer veren $\theta^* \in \mathbb{R}^m$ 'dir. Bu süreçte en önemli problemlerden birisi geçiş olasılıklarının tahmin edilmesidir. Geçiş olasılıklarının tahmini için Euler-Maruyama yönteminden yararlanılabilir.

Bu durumda, denklem (2.22) verildiğinde bu denkleme uygun Euler-Maruyama şemasından $i = 1, 2, \dots, N$ için geçiş olasılıkları

$$X(t_k) \approx x_{k-1} + f(t_{k-1}, x_{k-1}; \theta) \Delta t + g(t_{k-1}, x_{k-1}; \theta) \sqrt{\Delta t} \eta_k$$

yaklaşık olarak elde edilebilir. Burada, $t = t_{k-1}$ için $X(t_{k-1}) = x_{k-1}$, $X(t_i, \omega)$ sürecin gerçek değerleri ve $\eta_k \sim N(0, 1)$ 'dir. $X(t_i, \omega) \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ olmak üzere geçiş olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$P(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \theta) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}} \exp\left(-\frac{(x_k - \mu_k)^2}{2\sigma_k^2}\right)$$

olur. Burada, $\mu_k = x_{k-1} + f(t_{k-1}, x_{k-1}; \theta) \Delta t$ ve $\sigma_k = g(t_{k-1}, x_{k-1}; \theta) \sqrt{\Delta t}$. Buradan yola çıkarak geçiş olasılıklarının yaklaşık olarak normal dağılıma sahip olduğu kabul edilir ve (2.23) minimize edilerek parametre vektörünün tahmincisi elde edilebilir. Sonuç olarak, söz konusu geçiş yoğunlukları Euler-Maruyama yöntemi kullanılarak yaklaşık olarak belirlenmiştir ve belirli bir θ değeri için, t_{k-1} anındaki x_{k-1} değerinden başlayarak Itô stokastik diferansiyel denkleminin parametreleri sayısal olarak çözülmüştür (Allen, 2007; Bozdağ, 2015).

2.6. Stokastik Diferansiyel Denklemler İçin Ki-Kare Uyum İyiliği Testi

Stokastik diferansiyel denklem modellemelerinde ilgilenilecek olan veri ile bu veriye önerilen modellerin verilere uyum sağlayıp sağlamadığı da ele alınması gereken önemli bir konudur. Bu amaçla, bu bölümde verilere uygun modeli test etmek

için literatürde SDD'ler için özel olarak geliştirilmiş χ^2 uyum iyiliği testi ayrıntılı bir şekilde verilmiştir. Bu testin önemli noktası, ardışık gözlemler arasındaki yörüngelerin Monte-Carlo simülasyonlarının elde edilmesi ve bu gözlemlerin her noktadaki orijinal verilerle karşılaştırılmasının yapılmasıdır. Her noktada orijinal veri ve simüle gözlemler karşılaştırılarak, ranklar elde edilmiştir ve bu ranklara bağlı test istatistikleri oluşturulmuştur.

Stokastik diferansiyel denkleminin gözlem verisi olan

$$x_0, x_1, \dots, x_{N-1} \quad (2.25)$$

verisine uyup uymadığını simülasyon yöntemi ile belirlemek için önce $t \in [0, T]$ aralığında (2.4) Itô SDD'nin denkleminin ele alındığı varsayalım. $\Delta t = \frac{T}{N}$, $t_i = i\Delta t$, $i = 0, 1, \dots, N-1$ olsun.

Simülasyon yönteminin esas amacı (2.4) Itô SDD'nin belli yaklaşık yöntemi ile modelinin kurulması ve bu modelin (2.25) verisinden yola çıkarak simülasyonu gerçekleştirilirse elde edilen sonuçların (2.25) verisine uyup uymadığını belirlenmesidir. Bu amaçla, (2.25) verileri $X(t_i) = x_i; i = 0, 1, \dots, N-1$ olmakla gözlem değerleri olsun. (2.4) SDD'nin (2.5) koşulu altında Euler-Maruyama yöntemi ile modellenilebilir. Bu yöntem, x_i gözlemlerine göre $[t_i, T]$ aralığında yaklaşık yörünge diferansiyel denklem,

$$\begin{aligned} X_{j+1,i}(m) \left(t_{i-1} + (j+1) \frac{\Delta t}{K} \right) &= X_{j,i}^{(m)} \left(t_{i-1} + j \frac{\Delta t}{K} \right) + \\ &+ f \left(t_{i-1} + j \frac{\Delta t}{K}, X_{j,i}^{(m)} \left(t_{i-1} + j \frac{\Delta t}{K} \right) \right) + \\ &+ g \left(t_{i-1} + j \frac{\Delta t}{K}, X_{j,i}^{(m)} \left(t_{i-1} + j \frac{\Delta t}{K} \right) \right) \sqrt{\frac{\Delta t}{K}} \eta_{j,i}^{(m)} \end{aligned} \quad (2.26)$$

şeklindedir. (2.26) denkleminde $i = 1, 2, \dots, N-1$, $X_j = 0, 1, \dots, K-1$, $\eta_{j,i}^{(m)} \sim N(0, 1)$ olduğu varsayılmaktadır. Ek olarak, (2.26) formülünde

$$\begin{aligned} \Delta W(t, \omega) &= W(t_{i+1}, \omega) - W(t_i, \omega) \sim N(0, \Delta t_i) \\ \Delta t_i &= t_{i+1} - t_i = \frac{\Delta t}{K} \end{aligned}$$

şeklindedir. Bir başka ifade ile $\Delta W(t, \omega) \sim N\left(0, \frac{\Delta t}{K}\right)$ olduğu için $N\left(0, \frac{\Delta t}{K}\right) \sim \sqrt{\frac{\Delta t}{K}} N(0, 1)$ olduğu dikkate alınmıştır. (2.26) formülünde $m = 1, 2, \dots, M$ simülasyon sayısıdır. Bu ise (2.26) formülünde adım sayısı olan K sayısını m defa değiştirmekle elde edilir. (2.26) formülünde t_{i-1} noktasından t_i noktasına kadar, $j = 0, 1, \dots, K - 1$ yardımıyla

$$t_{i-1}, t_{i-1} + \frac{\Delta t}{K}, t_{i-1} + 2\frac{\Delta t}{K}, \dots, t_{i-1} + (K - 1)\frac{\Delta t}{K}$$

noktaları elde edilir. Eğer $j = k$ değeri de ele alınırsa $t_{i+1}\Delta t = t_i$ olur. Böylece $i = 1, 2, \dots, N$, $j = 0, 1, \dots, K - 1$ değerleri yardımıyla $[0, T]$ aralığı daha da küçük alt aralıklara bölünür. (2.26) formülü yardımıyla $[t_{i-1}, t_i]$ aralığında $X_{j,i}^{(m)}$ gözlem değerleri elde edilir. Bu durumda X_i verisinin yanı sıra t_i sabit zamanında (i -sabit tutulduğunda)

$$X_{k,i}^{(m)} = X_i^{(m)}$$

değerleri elde edilir. Buradan yola çıkarak $S_i^{(m)}$ değerleri,

$$S_i^{(m)} = \begin{cases} 1, & x_i \geq X_i^{(m)} \\ 0, & x_i < X_i^{(m)} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

$$\Gamma_i = 1 + \sum_{m=1}^M S_i^{(m)} \quad (2.27)$$

sayısına ise i değerinin (X_i 'nin) rankı denir. (2.26) denkleminde görüldüğü üzere $1 \leq \Gamma_i \leq M + 1$ dir.

$$I_{i,q} = \begin{cases} 1, & \Gamma_i = q \\ 0, & \Gamma_i \neq q \end{cases}$$

olsun. Bu durumda,

$$\sum_{i=1}^{N-1} I_{i,q} = \Omega(q)$$

ve

$$\sum_{q=1}^{M+1} \Omega(q) = N - 1 \quad (2.28)$$

olur. Buradan da, $\Omega(q)$, $q = 1, 2, \dots, M + 1$ şeklinde gözlem değerleri ortaya çıkar.

(2.28) eşitliği gösteriyor ki $N - 1$ sayıda x_i değerlerini Γ_i , $i = 1, 2, \dots, N - 1$ rankları $\Omega(q)$ şeklinde gruplara bölünmüştür. Çünkü her q 'ya karşılık tek Γ_i değil birkaç $\Omega(q)$ değeri vardır. Pearson teoremine (Neyman ve Pearson, 1933) göre elde edilen χ^2 test istatistiği,

$$\varphi_m = \sum_{q=1}^{M+1} \frac{\left(\Omega(q) - \frac{N-1}{M+1}\right)^2}{\frac{N-1}{M+1}} = \sum_{q=1}^{M+1} \frac{\left(\frac{\Omega(q)}{N-1} - \frac{1}{M+1}\right)^2}{\frac{1}{M+1}} \quad (2.29)$$

elde edilir. (2.29) formülünde $\frac{N-1}{M+1}$ beklenen frekans, $\Omega(q)$ gözlenen frekanstır. Burada, M simülasyon sayısı $\frac{N-1}{M+1} \geq 5$ eşitsizliği ile belirlenmektedir (Bak vd., 1999). χ^2 test istatistiği için hipotezler:

H_0 : Veriler önerilen stokastik diferansiyel denklem modeline uygundur.

H_1 : Veriler önerilen stokastik diferansiyel denklem modeline uygun değildir.

şeklinde oluşturulmuştur. Bu testten elde edilen p-değeri belirli bir anlamlılık düzeyinden büyükse H_0 hipotezi kabul edilir ve veriler önerilen stokastik diferansiyel denklem modeline uygundur denir.

Ayrıca, bir veri seti için eğer birden fazla model önerilmişse bu modeller arasından hangisinin daha iyi olduğunu belirlemek için de bu test istatistiği kullanılabilir. Bu sebeple, en küçük test değerini veren model, verilere uyan en iyi modeldir. Başka bir ifadeyle, elde edilen en küçük test değerine sahip olan model ilgili veri setine en uygun model olduğu söylenebilir.

2.7. Stokastik Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümü İçin Euler-Maruyama Yöntemi

Birçok adi diferansiyel denklemde analitik çözüm bulmak oldukça zordur. Stokastik diferansiyel denklemlerin çözümünü bulmak ise rassal değişkenden dolayı çok daha zordur. Ayrıca, adi diferansiyel denklemler teorisinde olduğu gibi kesin çözümü elde edilebilen Itô stokastik diferansiyel denklemleri sınıfı çok dar bir sınıftır. Bu nedenle Itô stokastik diferansiyel denklemlerinin nümerik çözümlerinin bulunması ilgi odağı olmuştur. Itô SDD modelinin çözümünü belirlemek için birçok yöntem vardır, bu yöntemler Euler-Maruyama, Milstein, Runge-Kutta ve benzeri. Bu tez çalışmasında, Itô SDD modelinin çözümünü belirlemek için literatürde en yaygın kullanılan Euler-Maruyama yöntemi seçilmiştir. Bu bölümde Euler-Maruyama yöntemine yer

verilmiştir.

(2.4) denkleminin nümerik olarak çözmek için (2.4) denkleminin integral formu olan (2.6) denklemi kullanılmıştır ve bunun için $[0, T]$ aralığı $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} = T$, $0 \leq i \leq N$ şeklinde ayrıştırılmıştır. Yani, $[0, T]$ aralığı; genişliği $\Delta t = \frac{T}{K}$ olan K tane eşit aralığa bölünmüştür. Burada, K EM yaklaşımının adım sayısıdır, $N > 0$ için $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ ve $t_i = i\Delta t$, $i = 0, 1, \dots, N$. X_i , $X(t)$ 'nin nümerik yaklaşımları göstermektedir. Bu durumda, EM yöntemi

$$X_i = X_{t_{i-1}} + f(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) \Delta t + g(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) (W(t_i) - W(t_{i-1})) \quad (2.30)$$

şeklindedir. $t = t_{i+a}$, $a = 0, 1$ olmak üzere $X(0, \omega) = X_0(\omega)$ başlangıç koşuluna sahip (2.6) denkleminde dikkate alınırsa,

$a = 0$ için,

$$X(t_i) = X_0 + \int_0^{t_i} f(X(s), s) ds + \int_0^{t_i} g(X(s), s) dW(s)$$

ve $a = 1$ için

$$X(t_{i+1}) = X_0 + \int_0^{t_{i+1}} f(X(s), s) ds + \int_0^{t_{i+1}} g(X(s), s) dW(s)$$

elde edilir. Buradan da,

$$X(t_{i+1}) - X(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X(s), s) ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(X(s), s) dW(s)$$

olur. Yani,

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X(s), s) ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(X(s), s) dW(s)$$

eşitliği geçerlidir. Bu integrallerden yola çıkarak,

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X(s), s) ds \approx \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X(t_i), t_i) ds = f(X(t_i), t_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} ds$$

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} g(X(s), s) dW(s) \approx g(X(t_i), t_i) (W(t_{i+1}) - W(t_i))$$

yaklaşımları elde edilir. (2.30) eşitliği integral formunda yazılırsa,

$$X(t_i) = X(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(X(s), s)ds + \int_{t_{i-1}}^{t_i} g(X(s), s)dW(s) \quad (2.31)$$

elde edilir (2.31) denklemini, (2.30) denkleminde karşılık gelen terimlerin yaklaşımını verir. Yani, Burada $X(t_i)$, $X(t)$ yaklaşık çözümünün t_i anındaki değeridir. Burada, $\Delta W(t_i) = W(t_i) - W(t_{i-1})$ artımları normal rassal sayı üretici tarafından belirlenir ve Wiener sürecini modellemek için kullanılır. Rassal artımların hesaplanması $\Delta W(t_i) = m_i \sqrt{\Delta t_i}$ ile elde edilir ve $m_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ 'dir (Sauer, 2012).

Euler-Maruyama yöntemleri kullanılarak, (2.4) SDD modelinin çözümü olan stokastik sürecin $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$ gözlemlerine göre N kadar yörünge elde etmek mümkündür. Sözü edilen yörüngelerin her birinin, t_i zamanında (2.4) SDD modeli çözümü olan $X(t)$ stokastik sürecini oluşturan rassal değişkenlerin yaklaşık değerlerini oluşturmaktadır. Bu durum, matematiksel olarak aşağıda belirtilmiştir:

$$\hat{X}(t_i) = \left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_K^{(i)} \right), \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad t_i = i\Delta t, \quad \Delta t = \frac{T}{N}.$$

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ ENTROPİ OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ

Genelleştirilmiş entropi optimizasyon yöntemleri (GEOY) denildiğinde veri setini genelleştirilmiş entropi optimizasyon problemi (GEOP)'nin çözümü şeklinde modellemeyi öneren yöntemler anlaşılmaktadır. Bu genelleştirmede amaç, ele alınan veri setini en iyi şekilde temsil eden dağılımın bulunmasıdır. Fonksiyonel analizin bazı uygulamalarına dayalı olarak Shamilov (2006, 2007, 2010) tarafından önerilen MaxMaxEnt, MinMaxEnt, MaxMinxEnt ve MinMinxEnt yöntemleri genelleştirilmiş entropi optimizasyon yöntemleri olarak tanımlanmıştır. GEOY verilmiş moment fonksiyonları kümesinden veri setine entropi optimizasyon ölçümüne göre en yakın ve en uzak olan dağılımları belirleyen moment fonksiyonlarının bulunmasını gerçekleştirecek veri setine kriterler açısından daha kesin modellemeyi sağlamaktadır (Shamilov, 2010).

GEOP: X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f^{(0)}(x)$, L entropi optimizasyon ölçümü, K ise verilen moment vektör fonksiyonlar kümesi olsun. Ve-

rilen K kümesinden öyle $g^{(1)}, g^{(2)} \in K$ moment vektör fonksiyonlarının bulunması gerekir ki $g^{(1)}$ 'in belirlediği entropi optimizasyon yoğunluk fonksiyonu $f^{(1)}(x)$ verilmiş $f^{(0)}(x)$ yoğunluk fonksiyonuna L ölçümüne göre en yakın, $g^{(2)}$ 'nin belirlediği entropi optimizasyon yoğunluk fonksiyonu $f^{(2)}(x)$ verilmiş $f^{(0)}(x)$ yoğunluk fonksiyonuna L ölçümüne göre en uzak olsun. Burada L Shannon'un entropi ölçümü olarak seçilirse $f^{(1)}(x)$ "MinMaxEnt Dağılımı", $f^{(2)}(x)$ "MaxMaxEnt Dağılımı" olarak; eğer L Kullback - Leibler ölçümü olarak seçilirse $f^{(1)}(x)$ "MinMinxEnt Dağılımı", $f^{(2)}(x)$ "MaxMinxEnt Dağılımı" olarak adlandırılır (Shamilov, 2007; 2010).

Bu bölümde, GEOY ile elde edilen dağılımlara geçmeden önce Shannon entropi ölçümünü maksimum yapmaya dayalı olan maksimum entropi yöntemi ve Kullback-Leibler çapraz entropi ölçümünü minimize etmeye dayalı olan minimum çapraz entropi yöntemine yer verilmiştir. Sonrasında, genelleştirilmiş entropi optimizasyon dağılımlarına ayrıntılı bir şekilde verilmiştir.

3.1. Maksimum Entropi Yöntemi

Rassal değişkenin karakterize edici moment fonksiyonları verildiğinde, Shannon'un entropi ölçüsünü maksimize ederek sistemin dağılımını belirleme yöntemine maksimum entropi (MaxEnt), elde edilen dağılıma da MaxEnt dağılımı denilmektedir (Jaynes, 1957). MaxEnt yöntemi, maksimum belirsizlik prensibi veya Jaynes'in formülü olarak da bilinmektedir (Kapur ve Kosevan, 1992). Bu bölümde sırasıyla kesikli ve sürekli rassal değişkenler için MaxEnt yöntemi ele alınmıştır.

3.1.1. Kesikli rassal değişkenler için maksimum entropi yöntemi

n değere sahip X kesikli rassal değişkeninin veya n duruma sahip X kesikli fiziksel sistemin entropisi

$$H(x) = - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i \quad (3.1)$$

fonsiyonu ile ifade edilmektedir. $p_i > 0$ olmak üzere (3.1) fonsiyonu,

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i &= 1 \\ \sum_{i=1}^n p_i g_j(x_i) &= \mu_j, \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

koşulları altında maksimum yapan $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ dağılımının bulunması bir optimizasyon problemidir. X rassal değişkeninin dağılımını bu optimizasyon probleminin çözümü olarak bulunmasını öneren yöntem MaxEnt yöntemi denir. İlk kez Jaynes (1957) tarafından önerilen bu yöntem, Jaynes'in maksimum entropi yöntemi olarak da bilinir. (3.2) sisteminde $g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)$ 'ler karakterize edici moment fonksiyonları olarak ifade edilir. Bu sistem n sayıda $p_1, p_2, \dots, p_n$ bilinmeyenlerine sahiptir. Bu sistemin çözüme sahip olabilmesi için bazı koşulların sağlanması gerekmektedir. Öncelikle, $1, g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)$ fonksiyonları lineer bağımsız olduğunda, bu fonksiyonların beklenen değerleri olan $1, \mu_1, \dots, \mu_m$ sayıları (3.2) sistemi çözüme sahip olacak şekilde verilmelidir. Sonrasında, $m+1$ koşul sayısı ile n durum sayısı arasında $m+1 < n$ bağıntısı bulunmalıdır. $m+1 < n$ eşitsizliği sağlandığında, n bilinmeyenli $m+1$ denklem oluşacağından, bu değişkenlerden $n - (m+1)$ kadarı bağımsız olacaktır. Bu durumda, $p_1, p_2, \dots, p_n$ değişkenleri sonsuz sayıda değerlere sahip olur ve böylelikle (3.1) fonksiyonunu maksimize eden $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ 'lerin seçilmesi anlamlı olacaktır. Eğer $m+1 = n$ koşulu sağlanmazsa, yani $m+1 = n$ veya $m+1 > n$ olursa birinci halde genellikle (3.1) fonksiyonunu maksimize etmek için bağımsız değişken kalmaz, ikinci halde ise (3.2) koşullarını sağlayan p_i 'ler olmayabilir. (3.1) fonksiyonunun (3.2) koşulları altında maksimize edilmesi, kısaca (3.1), (3.2) problemi olarak ifade edilmiştir. Burada (3.1) amaç fonksiyonu, (3.2) ise lineer koşullardır. Bu durumda, (3.1), (3.2) problemi koşullu ekstremum problemidir ve bilindiği gibi bu problem Lagrange çarpanları yöntemleri ile çözülebilmektedir (Şamilov, 2015). (3.1), (3.2) problemi Lagrange çarpanları yöntemi ile ele alındığında, (3.2) koşullarında ortaya çıkan μ_j sayıları keyfi verilemez. Pratik olarak, X rassal değişkenine ait $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n)$ istatistiksel frekans dağılımından ve verilmiş $g_j(x)$ moment fonksiyonlarından yola çıkarak μ_j 'ler hesaplandığında,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ g_1(x_0) & g_1(x_1) & g_1(x_2) & \cdots & g_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_m(x_0) & g_m(x_1) & g_m(x_2) & \cdots & g_m(x_n) \end{bmatrix}$$

matrisinin rankı, genişletilmiş

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ g_1(x_0) & g_1(x_1) & g_1(x_2) & \cdots & g_1(x_n) & \mu_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_m(x_0) & g_m(x_1) & g_m(x_2) & \cdots & g_m(x_n) & \mu_m \end{bmatrix}$$

matrisinin rankına $g_j(x_1)\tilde{p}_1 + \dots + g_j(x_n)\tilde{p}_n = \tilde{\mu}_j$; $j = 0, 1, \dots, m$, $g_0(x) = 1$; $\mu_0 = 1$ eşitlikleri sağlandığında birbirine eşit olur. Bu nedenle de Kronecker-Capelli teoremine (Capelli, 1892) göre (3.2) koşullarını sağlayan $p_1, p_2, \dots, p_n$ 'ler vardır. Başka bir ifadeyle, (3.2) eşitlikleri şeklinde verilmiş homojen olmayan lineer sistemi $p_1, p_2, \dots, p_n$ 'ye göre çözümü vardır. (3.1) fonksiyonunu (3.2) koşulları altında maksimize etme problemine MaxEnt problemi denir. MaxEnt problemi yardımıyla $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n)$ istatistiksel dağılımına entropi ölçümü açısından yakın olan $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ dağılımı bulunur. Burada, $p_1, p_2, \dots, p_n$ 'ler (3.1) fonksiyonuna (3.2) koşulları altında maksimum değer veren olasılıklardır. (3.1) fonksiyonunu (3.2) koşulları altında maksimize etmek için $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ Lagrange çarpanları yöntemiyle,

$$U = - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i + \lambda_0 \left(\sum_{i=1}^n p_i - 1 \right) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \left(\sum_{i=1}^n p_i g_j(x_i) - \mu_j \right) \quad (3.3)$$

veya

$$U = - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i - \sum_{j=0}^m \lambda_j (p_i g_j(x_i) - \mu_j)$$

yardımcı fonksiyonu kurulur ve bu fonksiyonun $p_1, p_2, \dots, p_n$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ değişkenlerine göre mutlak ekstremumu aranır. Ekstremumun varlık teoremine göre yardımcı (3.3) fonksiyonunun p_i 'lere göre kısmi türevlerinin sıfıra eşit olması gerekir. Böylelikle $p_1, p_2, \dots, p_n$ olasılıkları $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ Lagrange çarpanlarına bağlı olarak elde edilir. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ çarpanları da (3.2) eşitliği yardımıyla bulunur. U yardımcı fonksiyonunun p_i 'lere göre kısmi türevleri;

$$\frac{\partial U}{\partial p_i} = - \ln p_i - \lambda_0 - 1 - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_i) \quad (3.4)$$

elde edilir. (3.4) eşitliğinin sağ tarafı sıfıra eşitlenerek,

$$\begin{aligned}\ln p_i &= - \left(\lambda_0 + 1 + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_i) \right) \\ p_i &= e^{-(\lambda_0+1)-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_i)} \\ p_i &= e^{-\lambda^0-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_i)}, \quad \lambda^0 = \lambda_0 + 1, \quad i = 1, 2, \dots, n\end{aligned}\tag{3.5}$$

sonucuna varılır. (3.5) formülü ile $p_1, p_2, \dots, p_n$ 'ler $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ Lagrange çarpanlarına bağlı olarak ifade edilmiş olur.

Lagrange çarpanların bulmak için (3.5) ile ifade edilen $p_1, p_2, \dots, p_n$ 'lerin (3.2) koşullarında yerine yazılmasıyla,

$$\left. \begin{aligned}\sum_{i=1}^n e^{-\lambda^0-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_i)} &= 1 \\ \sum_{i=1}^n e^{-\lambda^0-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_i)} g_j(x_i) &= \mu_j\end{aligned}\right\}\tag{3.6}$$

sistemi elde edilir. (3.6) sisteminin birinci denkleminde

$$\begin{aligned}e^{\lambda^0} &= \sum_{i=1}^n e^{-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_i)} \\ \lambda^0 &= \ln \sum_{i=1}^n e^{-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_i)}\end{aligned}\tag{3.7}$$

λ^0 bulunur. λ^0 'ın bu değeri (3.6) sisteminin diğer denklemlerde yerine yazıldığında, (3.7) sistemi elde edilir. $j = 1, 2, \dots, m$ olmak üzere, (3.7) eşitliğinden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ değerlerinin $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ değerlerine bağlı olduğu görülmektedir. (3.7) sisteminde λ 'yı bulmak için ardışık yaklaşımlar yöntemlerinin hepsi kullanılabilir. Fakat, söz konusu bu yöntemlerden, Newton yöntemi diğer yöntemlerden daha büyük bir yakınsama hızına sahip olduğu için tercih edilir (Şamilov, 2015).

3.1.2. Sürekli rassal değişkenler için maksimum entropi yöntemi

X sürekli rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ olduğunda, bu sistemin entropisi,

$$H = - \int_a^b f(x) \ln f(x) dx\tag{3.8}$$

şeklinde tanımlanır. İstatistiksel veriyi (3.8) fonksiyoneline

$$\int_a^b f(x)g_j(x_i) dx = \mu_j, \quad j = 0, 1, \dots, m \quad (3.9)$$

koşulları altında maksimum değer veren dağılım ile modelleme yöntemine MaxEnt yöntemi denir. (3.8) fonksiyoneli X rassal değişkeninin veya fiziksel sisteminin entropisini, (3.9) koşulları ise sistem hakkında ek bilgiyi ifade etmektedir. Böylece (3.8) fonksiyonelinin (3.9) koşulları altında maksimumunun bulunması, (3.9) koşulları yardımıyla sistemin sahip olduğu entropinin maksimum değerinin bulunması anlamına gelmektedir. Ayrıca (3.9)'a ait olan her koşul sistem hakkında belli miktarda bilgi verdiğinden, koşul sayısının artmasıyla entropi azalmıştır. (3.8) fonksiyonelinin (3.9) koşulları altında maksimumu Lagrange çarpanları yöntemiyle bulunabilir. Bu durumda $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ 'ler Lagrange çarpanları olmak üzere, U Lagrange fonksiyoneli,

$$U = - \int_a^b f(x) \ln f(x) dx - \sum_{j=0}^m \lambda_j \left(\int_a^b f(x)g_j(x) dx - \mu_j \right) \quad (3.10)$$

şeklindedir. (3.10) fonksiyoneli

$$U = \left\{ \int_a^b (-f(x)) \ln f(x) - \sum_{j=0}^m \lambda_j f(x)g_j(x) \right\} - \sum_{j=0}^m \lambda_j \mu_j$$

veya

$$U = \int_a^b F(f, \lambda) dx - \sum_{j=0}^m \lambda_j \mu_j \quad (3.11)$$

olarak yazılabilir, burada $F(f, \lambda) = -f(x) \ln f(x) - \sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x)f(x)$ 'dir. (3.11) fonksiyonelinin ekstremumunun varlığı için gerek koşul, bu fonksiyonele ekstremum değer veren f fonksiyonunun

$$F_f - \frac{d}{dx} F_{f'} = 0 \quad (3.12)$$

Euler denklemini sağlamasıdır. (3.12) denkleminde $F_{f'} = 0$ olduğundan, bu denklem $F_f = 0$ denklemine dönüşür. F 'nin ifadesinden yola çıkarak Euler denkleminin

$$F_f = -\ln f(x) - 1 - \sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i) = 0$$

olduğu sonucuna varılır. Buradan,

$$\begin{aligned}\ln f(x) &= -1 - \sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x) \\ f(x) &= e^{-1-\lambda_0-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)} \\ f(x) &= e^{-\tilde{\lambda}_0-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)}, \quad \tilde{\lambda}_0 = 1 + \lambda_0\end{aligned}\tag{3.13}$$

elde edilir. (3.13) fonksiyonu (3.9) koşullarında yerine yazılarak λ 'lar bulunabilir:

$$\int_a^b e^{-\tilde{\lambda}_0-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)} g_k(x) dx = \mu_k, \quad k = 0, 1, \dots, m\tag{3.14}$$

formülünde $g_0(x) = 1$; $\mu_0 = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}\int_a^b e^{-\tilde{\lambda}_0-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)} dx &= 1 \\ e^{-\tilde{\lambda}_0} &= \frac{1}{\int_a^b e^{-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)} dx} \\ \tilde{\lambda}_0 &= \ln \left\{ \int_a^b e^{-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)} dx \right\}\end{aligned}\tag{3.15}$$

elde edilir ve $\tilde{\lambda}_0$ 'ın bu değeri (3.15)'in diğer eşitliklerinde yerine yazılıp k . eşitliğin sol tarafı F_k ile gösterildiğinde,

$$F_k(\lambda) = \frac{\int_a^b e^{-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)} g_k(x) dx}{\int_a^b e^{-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)} dx} = \mu_k, \quad k = 1, 2, \dots, m\tag{3.16}$$

sistemine ulaşılır. Burada (3.16) sistemi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ bilinmeyenlerine göre lineer olmayan denklemler sistemidir. (3.16) sisteminin $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 'lere göre çözüme sahip olabilmesi için

$$\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(\lambda_1, \dots, \lambda_m)} \neq 0\tag{3.17}$$

koşulunun sağlanması gerekir. Bu koşulun sağlandığını göstermek için (3.17)'deki Jacobian'ın $g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)$ rassal değişkenlerinin varyans-kovaryans matrisinin determinantı olduğunu göstermek yeterlidir. Bu amaçla (3.16)'dan $\frac{\partial F_k}{\partial \lambda_l}$ $k = 1, 2, \dots, m$; $l = 1, 2, \dots, m$ türevleri bulunmuştur ve $\left[\frac{\partial F_k}{\partial \lambda_l} \right]$ matrisinin varyans-

kovaryans matrisi olduğu gösterilmiştir:

$$\frac{\partial F_k}{\partial \lambda_1} = - \{E[g_l(x)g_k(x)] - E[g_k(x)] E[g_l(x)]\}.$$

Burada $\left[\frac{\partial F_k}{\partial \lambda_l}\right]$ 'nin varyans-kovaryans matrisinin negatif işaretlisine eşit olduğu görülür. Varyans-kovaryans matrisinin pozitif tanımlı olduğu bilindiğinden, (3.16) sisteminin Jacobi determinantının sıfırdan farklı olduğu, dolayısıyla (3.16) denklemler sisteminin tek çözüme sahip olduğu sonucuna varılmıştır (Şamilov, 2015).

3.2. Minimum Çapraz Entropi Yöntemi

Minimum çapraz entropi yöntemi (MinxEnt), Kullback'ın öncüsü olduğu diğer önemli bir entropi optimizasyon yöntemidir. Teorik anlamları ve uygulama alanlarının taşıdığı önem açısından MaxEnt yöntemiyle rekabet etmektedir.

Bilgi olarak fiziksel rassal değişkenden elde edilmiş moment değerleri ile bu rassal değişkene ait önsel bir dağılım olduğunda; Kullbak-Leibler ölçümünü, rassal değişkenden elde edilen moment değer kısıtlarına ve önsel dağılıma göre minimum yapan yöntem MinxEnt yöntemi (Kullbak ve Leibler, 1951) ve bu yöntemden elde edilen dağılıma MinxEnt dağılımı denilmektedir (Kullback, 1959). Bu bölümde sırasıyla kesikli ve sürekli rassal değişkenler için minimum çapraz entropi yöntemi ele alınmıştır.

3.2.1. Kesikli rassal değişkenler için minimum çapraz entropi yöntemi

X rassal değişkeni, $x_1, x_2, \dots, x_n$ durumlarına sahip, her bir durumun gerçekleşme olasılığı $p_1, p_2, \dots, p_n$ olan kesikli bir rassal değişken olsun ve X rassal değişkeni $q_1, q_2, \dots, q_n$ şeklinde önsel bir dağılıma sahip olsun. Bu durumda Kullback-Leibler ölçümü

$$D(p : q) = \sum_{i=1}^n p_i \ln \left(\frac{p_i}{q_i} \right) \quad (3.18)$$

şeklinde tanımlanır (Kullback 1959). Kullback-Leibler ölçümünü,

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad (3.19)$$

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n g_1(x_i) p_i = \mu_1 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n g_m(x_i) p_i = \mu_m \end{array} \right\} \quad (3.20)$$

ile verilen kısıtlara göre minimum yapan yönteme MinxEnt yöntemi ve bu yöntemden elde edilen dağılıma MinxEnt dağılımı denir. (3.18)  l  m nde kullanılan $q(x)$ fonksiyonuna da rassal deği   en hakkında önsel bilgi denir. (3.20) de ifade edilen $g_j(x)$ 'ler ($j = 1, 2, \dots, m$) moment fonksiyonları, μ_j 'ler ise ($j = 1, 2, \dots, m$) moment fonksiyonları yardımıyla rassal deği   enden elde edilen moment değerleridir. (3.18)'de verilen Kullback-Leibler ölçümünü, (3.19) ve (3.20) kısıtlarına göre minimumunu bulma problemi Lagrange  arpanları yöntemiyle çözülebilir. Buna göre L Lagrange fonksiyonu,

$$L \equiv \sum_{i=1}^n p_i \ln \left(\frac{p_i}{q_i} \right) - (1 - \lambda_0) \left(\sum_{i=1}^n p_i - 1 \right) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \left(\sum_{i=1}^n g_j(x_i) p_i - \mu_j \right) \quad (3.21)$$

 eklinde tanımlanır. (3.21)'de kullanılan $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ 'lere Lagrange  arpanları denir. L fonksiyonunu minimum yapan p_i 'leri bulmak için, (3.21) fonksiyonunun p_i 'lere göre kısmi türevleri alınıp sıfıra e itlenmelidir. L fonksiyonun p_i 'lere göre kısmi türevleri,

$$\frac{\partial L}{\partial p_i} = -\ln \frac{p_i}{q_i} - \frac{1/q_i}{p_i/q_i} p_i - (\lambda_0 - 1) - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.22)$$

 eklinde bulunur. (3.22) ifadesi sıfıra e itlendiğinde,

$$\ln \frac{p_i}{q_i} - 1 - \lambda_0 + 1 - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

veya

$$\ln p_i = \ln q_i - \lambda_0 - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.23)$$

elde edilir. (3.23) eşitliklerinden p_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) olasılıkları,

$$p_i = q_i e^{-\lambda_0 - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.24)$$

şeklinde bulunur. (3.24) ile ifade edilen $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ olasılık dağılımı (3.18) de verilen $D(p : q)$ Kullback-Leibler ölçümünü, (3.19) ve (3.20)'ye göre minimum yapan MinxEnt dağılımıdır. (3.24) ifadesinden görüldüğü gibi, $p_i, (i = 1, 2, \dots, n)$ olasılıkları $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ Lagrange çarpanlarına bağlıdır. $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ Lagrange çarpanlarının değerleri (3.19) ve (3.20) eşitlikleri yardımıyla bulunabilir.

MaxEnt yönteminde olduğu gibi, $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ Lagrange çarpanlarının $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ 'ye bağlı olduğunu göstermek için (3.24) ifadesi daha ayrıntılı olarak,

$$p_i = q_i e^{-\lambda_0} e^{-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.25)$$

şeklinde yazılır. (3.25) eşitliğindeki olasılık dağılımı (3.19) kısıdında yerine yazıldığında,

$$\sum_{i=1}^n q_i e^{-\lambda_0} e^{-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_i)} = 1 \quad (3.26)$$

eşitliği elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$e^{-\lambda_0} \sum_{i=1}^n q_i e^{-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_i)} = 1 \quad (3.27)$$

ifadesi bulunur. Buradan,

$$\sum_{i=1}^n q_i e^{-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_i)} = e^{\lambda_0} \quad (3.28)$$

sonucuna ulaşılır. (3.28) eşitliğinden, λ_0 Lagrange çarpanının $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ Lagrange çarpanlarına bağlı olduğu görülmektedir. Benzer şekilde, (3.25) ifadesi (3.20) kısıtlarında yerine yazıldığında,

$$\sum_{i=1}^n q_i g_j(x_i) e^{-\lambda_0} e^{-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_i)} = \mu_j, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3.29)$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\sum_{i=1}^n q_i g_j(x_i) e^{-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_i)} = \mu_j e^{\lambda_0}, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3.30)$$

ifadesi bulunur. (3.28) eşitliği (3.30)'da yerine yazıldığında $j = 1, 2, \dots, m$ olmak

üzere,

$$\sum_{i=1}^n q_i g_j(x_i) e^{-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_i)} = \mu_j \sum_{i=1}^n q_i e^{-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_i)} \quad (3.31)$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$\mu_j = \frac{\sum_{i=1}^n q_i g_j(x_i) e^{-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_i)}}{\sum_{i=1}^n q_i e^{-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_i)}}, j = 1, 2, \dots, m \quad (3.32)$$

ifadesi elde edilir (Kapur ve Kesevan 1992). (3.32) ifadesinden λ_j , $j = 1, 2, \dots, m$ 'lerin $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ 'lere bağlı olduğu görülmektedir (Şamilov, 2015).

3.2.2. Sürekli rassal değişkenler için minimum çapraz entropi yöntemi

X sürekli rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ ve X rassal değişkeni $q(x)$ seklinde önsel dağılıma sahip olsun. Bu durumda Kullback-Leibler ölçümü,

$$D(f : q) = \int_a^b f(x) \ln \frac{f(x)}{q(x)} dx \quad (3.33)$$

şeklinde tanımlanır. Kesikli rassal değişkene benzer olarak kısıtlar aşağıdaki şekilde,

$$\int_a^b f(x) dx = 1 \quad (3.34)$$

ve

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b g_1(x) f(x) dx &= \mu_1 \\ \vdots \\ \int_a^b g_m(x) f(x) dx &= \mu_m \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

verilsin. (3.33) ifadesinde kullanılan $q(x)$ fonksiyonuna rassal değişken hakkında önsel bilgi denir. (3.35)'de ifade edilen $g_j(x)$ 'ler ($j = 1, 2, \dots, m$) moment fonksiyonları, μ_j 'ler ise ($j = 1, 2, \dots, m$), $g_j(x)$ 'lere uygun rassal değişkenden elde edilen moment değerleridir.

Sürekli rassal değişkenler için MinxEnt yöntemi, $D(f : q)$ fonksiyoneli (3.34) ve (3.35) kısıtlarına göre minimum yapan $f(x)$ fonksiyonunun bulunması yöntemidir. Bu yöntem yardımıyla bulunan dağılıma MinxEnt dağılımı denir. (3.33)'de verilen Kullback-Leibler fonksiyoneli, (3.34) ve (3.35) kısıtlarına göre minimumu, Euler-

Lagrange çarpanları yöntemiyle bulunabilir. L Lagrange fonksiyoneli,

$$L \equiv \int_a^b f(x) \ln \frac{f(x)}{q(x)} dx - (\lambda_0 - 1) \left(\int_a^b f(x) dx - 1 \right) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \int_a^b g_j(x) f(x) dx - \mu_j \quad (3.36)$$

şeklinde tanımlanır. (3.36)'da gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$L \equiv \int_a^b \left(f(x) \ln \frac{f(x)}{q(x)} - (\lambda_0 - 1) f(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j f(x) - \frac{1}{b-a} \sum_{j=1}^m \lambda_j \mu_j + \lambda_0 - 1 \right) dx \quad (3.37)$$

ifadesi elde edilir. L Lagrange fonksiyoneli aynı zamanda,

$$L \equiv \int_a^b F(x) dx \quad (3.38)$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$F(x) = \left(f(x) \ln \frac{f(x)}{q(x)} - (\lambda_0 - 1) f(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j f(x) - \frac{1}{b-a} \sum_{j=1}^m \lambda_j \mu_j + \lambda_0 - 1 \right) \quad (3.39)$$

şeklinde dir. (3.36) ifadesindeki $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ 'lere Lagrange çarpanları denir. L fonksiyoneline ekstremum değer veren $f(x)$ fonksiyonu,

$$\frac{\partial F}{\partial f(x)} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial f'(x)} \right) = 0 \quad (3.40)$$

Euler-Lagrange denklemi yardımıyla bulunabilir. Gerekli hesaplamalar yapıldığında,

$$\frac{\partial F}{\partial f'(x)} = 0$$

ve

$$\frac{\partial F}{\partial f(x)} = \ln \frac{f(x)}{q(x)} - \frac{1/q(x)}{f(x)/q(x)} f(x) - (\lambda_0 - 1) - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x) \quad (3.41)$$

eşitlikleri bulunur. (3.41) ifadeleri (3.40) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\ln \frac{f(x)}{q(x)} - \frac{1/q(x)}{f(x)/q(x)} f(x) - (\lambda_0 - 1) - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x) = 0 \quad (3.42)$$

elde edilir. (3.42) eşitliğinde gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\ln f(x) = \ln q(x) - \lambda_0 - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x) \quad (3.43)$$

elde edilir. $f(x)$ fonksiyonu,

$$f(x) = q(x)e^{\lambda_0} e^{-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)} \quad (3.44)$$

şeklinde bulunur. (3.44) ile ifade edilen fonksiyona MinxEnt dağılım fonksiyonu denir. $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ Lagrange çarpanlarının değerleri (3.34) ve (3.35) eşitlikleri ile bulunabilir. $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ Lagrange çarpanlarının $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ 'ye bağlı olduğunu göstermek için (3.44) ifadesi (3.34)'de yerine yazıldığında,

$$\int_a^b q(x)e^{-\lambda_0} e^{-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)} dx = 1 \quad (3.45)$$

eşitliği elde edilir. (3.45)'de gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\int_a^b q(x)e^{-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)} dx = e^{\lambda_0} \quad (3.46)$$

sonucu bulunur. (3.46) eşitliğinden, λ_0 Lagrange çarpanının $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ Lagrange çarpanlarına bağlı olduğu görülür. Benzer şekilde (3.44) ifadesi (3.35) eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$\int_a^b q(x)g_j(x)e^{-\lambda_0} e^{-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)} dx = \mu_j, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3.47)$$

ifadesi elde edilir. (3.47) eşitliğinde gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\int_a^b q(x)g_j(x)e^{-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)} dx = \mu_j e^{\lambda_0}, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3.48)$$

elde edilir. (3.46) ifadesi (3.48)'de yerine yazılıp, gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\mu_j = \frac{\int_a^b q(x)g_j(x)e^{-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)} dx}{\int_a^b q(x)e^{-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)} dx}, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3.49)$$

sonucu bulunur. (3.49) ifadesinden, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ Lagrange çarpanlarının $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ 'lere bağlı olduğu görülmektedir (Şamilov, 2015).

3.3. Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyon Dağılımları

GEOY yöntemlerinden elde edilen dağılımlar genelleştirilmiş MaxEnt dağılımları ve genelleştirilmiş MinxEnt dağılımları olmak üzere GEOY dağılımları olarak ifade edilmektedir. Verilmiş moment fonksiyonlar kümesinde veri setine Shannon entropi ölçümüne göre en yakın ve en uzak olan entropi optimizasyon dağılımları genelleştirilmiş MaxEnt dağılımlarını oluşturmaktadır. Benzer şekilde, verilmiş moment fonksiyonlar kümesinde veri setine Kullback-Leibler çapraz entropi ölçümüne göre en yakın ve en uzak olan entropi optimizasyon dağılımları genelleştirilmiş MinxEnt dağılımlarını oluşturmaktadır (Şamilov, 2006; 2007; 2010)

Bu bölümde MaxEnt yöntemi yardımıyla tanımlanmış olan özel entropi optimizasyon fonksiyoneli ve bu fonksiyonelden yola çıkarak moment fonksiyonları kümesinde tanımlanmış olan genelleştirilmiş MaxEnt dağılımları açıklanmıştır. Ayrıca, önsel dağılım bilgisine sahip MinxEnt yönteminden yola çıkarak tanımlanmış olan özel entropi optimizasyon fonksiyoneli ve bu fonksiyonel yardımıyla moment fonksiyonları kümesi üzerinde tanımlanmış olan genelleştirilmiş MinxEnt dağılımlarına yer verilmiştir.

3.3.1. Genelleştirilmiş MaxEnt Dağılımları

Kesikli rassal değişkenler için MaxEnt yöntemi yardımıyla moment fonksiyonlarına bağlı MaxEnt fonksiyoneliyle ve bu fonksiyonele minimum değer veren dağılım $(\text{MinMaxEnt})_m$ ve maksimum değer veren dağılım $(\text{MaxMaxEnt})_m$ dağılımı olarak ifade edilmektedir. Bu bölümde $(\text{MinMaxEnt})_m$ ve $(\text{MaxMaxEnt})_m$ dağılımlarının elde edilmesi ayrıntılı bir şekilde gösterilmiştir.

$x_1, \dots, x_n$ rassal örnek olsun ve örnek içindeki değerlere, sırasıyla $p_1, \dots, p_n$ olasılıkları karşılık gelsin. Bu durumda Shannon entropi ölçümü,

$$H = - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i, \quad p_i = (p_1, \dots, p_n) \quad (3.50)$$

maksimum entropi fonksiyon problemi

$$\sum_{i=0}^n p_i g_j(x_i) = \mu_j, \quad j = 0, 1, \dots, m \quad (3.51)$$

kısıtları altında, burada $\mu_0 = 1$, $g_0(x) = 1$; $p_i \geq 0$, $i = 0, 1, \dots, n$; $m+1 < n$ olmak üzere

$$p_i = e^{-\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.52)$$

çözümüne sahiptir. Burada λ_j , $j = 0, 1, \dots, m$ Lagrange çarpanlarıdır. Eşitlik (3.52), (3.50)'de dikkate alınırsa, maksimum entropi değeri ya da maksimum entropi fonksiyoneli

$$H_{max} = - \sum_{i=1}^n e^{-\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)} \left(- \sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i) \right) \quad (3.53)$$

veya

$$H_{max} = \sum_{j=0}^m \lambda_j \mu_j. \quad (3.54)$$

şeklinde elde edilir. (3.54) denkleminde $\mu_0 = 1$ olmak üzere, μ_j , ($j = 0, 1, \dots, m$)'ler uygun $g_j(x)$, ($j = 0, 1, \dots, m$) moment fonksiyonları yardımıyla verilmiş rassal değişkenden elde edilen moment değerleridir.

(3.53) ve (3.54) formüllerinden görüldüğü gibi μ_j , ($j = 0, 1, \dots, m$)'ler, $g_j(x)$, ($j = 0, 1, \dots, m$) moment fonksiyonlarına bağlı fonksiyoneller gibi ele alınabilir. Bu durumda moment fonksiyonları, $\mathbf{g} = (g_0, g_1, \dots, g_m)$ vektör fonksiyonu şeklinde yazıldığında H_{max} , $\mathbf{g}$ vektör fonksiyonuna bağlı bir fonksiyonel gibi yorumlanabilir.

Bu fonksiyonel $\mathbf{g}$ moment vektör fonksiyonlarına bağlı değerleri (3.54) formülüyle belirlenen bir fonksiyonel olarak tanımlanmıştır (Shamilov, 2006; 2007). Söz konusu fonksiyonel,

$$U(\mathbf{g}) = H_{max}$$

şeklinde gösterilerek MaxEnt fonksiyoneli olarak isimlendirilir.

Moment vektör fonksiyonlar kümesi, bileşenleri lineer bağımsız olan sonsuz sayıda $\mathbf{g}$ moment vektör fonksiyonlarından oluşsun ve K şeklinde gösterilsin ($\mathbf{g} \in K$).

Kesikli rassal değişkenler için genelleştirilmiş MaxEnt dağılımları diğer bir ifade ile MinMaxEnt ve MaxMaxEnt dağılımları, K moment vektör fonksiyonları küme-

sine bağlıdır. K moment vektör fonksiyonları kümesi genel anlamda sonsuz sayıda elemanlardan oluşmaktadır ve bu durumda genelleştirilmiş MaxEnt dağılımlarının bulunması oldukça zordur (Shamilov, 2006). Fakat uygulama açısından, K moment fonksiyonları kümesinin sonlu sayıda elemanlardan oluşması da önemlidir. Bu durum, istatistiksel dağılımlara uygun karakterize edici momentlerin sonlu sayıda olması ve bu dağılımların entropi optimizasyon dağılımları şeklinde bulunabilmesiyle de desteklenmektedir (Kagan vd., 1973; Kapur, 1989).

Buna göre bu tez çalışmasında, kesikli rassal değişkenler için MinMaxEnt ve MaxMaxEnt dağılımlarının pratik uygulamalarının yapılabilmesi için K kümesi, m sayıda bileşene sahip sonlu sayıda moment vektör fonksiyonlarından oluşacak şekilde seçilmiştir.

$K_0 = \{g_1, \dots, g_r\}$, r elemanlı karakterize edici moment fonksiyonlar kümesi olsun. Bu durumda, $K_{0,m}$; K_0 'dan alınan r sayıda elemanların tüm m elemanlı kombinasyonlarından oluşan bir küme olur. Burada $K_{0,m}$ 'den alınan her bir kombinasyon verilmiş bir veri seti ve $U(\mathbf{g})$ fonksiyoneli için moment koşulunu ifade etmektedir. Kombinasyonlar sayısı ve $U(\mathbf{g})$ 'nin bu değerlere uygun değerlerinin sonlu olduğu için sayısı $U(\mathbf{g})$ 'nin bu değerleri arasından en büyük ve en küçük değeri vardır ve bulunabilir. Sözü edilen bu değerler, $U(\mathbf{g}) = H_{\max}$ fonksiyoneli için MinMaxEnt ve MaxMaxEnt dağılımlarının bulunmasına imkan sağlamaktadır (Şamilov, 2015).

MinMaxEnt ve MaxMaxEnt problemlerini çözmek için $(g_0(x), g^{(1)}(x))$, $(g_0(x), g^{(2)}(x))$ vektör fonksiyonlarını bulmak gerekmektedir. Burada $g_0(x) = 1$, $g^{(1)} \in K_{0,m}$ ve $g^{(2)} \in K_{0,m}$ sırasıyla $U(\mathbf{g})$ 'ye Shannon entropi ölçümüne göre minimum ve maksimum değerleri veren karakterize edici moment vektörleridir. $U(\mathbf{g})$ 'nin $g_0(x)$ ve tüm m -boyutlu $\mathbf{g} \in K_{0,m}$ vektör fonksiyonları tarafından üretilen kısıtlara göre minimum veya maksimum değerlere ulaştığına dikkat edilmelidir. Bir başka ifadeyle, $U(\mathbf{g})$ 'nin minimum değeri $\mathbf{g} \in K_{0,m}$ 'e uygun olan $H_{\max}$ değerinin en küçük, $U(\mathbf{g})$ 'nin maksimum değeri $\mathbf{g} \in K_{0,m}$ 'e uygun olan $H_{\max}$ değerinin en büyük değeridir. Eğer $(g_0(x), g^{(1)}(x))$, $U(\mathbf{g})$ 'ye en küçük değeri veriyorsa $p^{(1)} = (p_1^{(1)}, \dots, p_n^{(1)})$ dağılımı $(g_0(x), g^{(1)}(x))$ vektör fonksiyonuna göre veriye uygun olan dağılımdır ve $(\text{MinMaxEnt})_m$ dağılımı olarak adlandırılmaktadır. Eğer $(g_0(x), g^{(2)}(x))$ de $U(\mathbf{g})$ 'ye en büyük değeri veriyorsa $p^{(2)} = (p_1^{(2)}, \dots, p_n^{(2)})$ dağılımı $(g_0(x), g^{(2)}(x))$ vektör fonksiyonuna göre veriye uygun olan dağılımdır ve $(\text{MaxMaxEnt})_m$ dağılımı olarak ifade

edilmektedir (Shamilov, 2007; 2010).

3.3.2. Genelleştirilmiş MinxEnt Dağılımları

Kesikli rassal değişkenler için MinxEnt yöntemi yardımıyla moment fonksiyonlarına bağlı MinxEnt fonksiyoneliyle ve bu fonksiyonele minimum değer veren dağılım $(\text{MinMinxEnt})_m$ ve maksimum değer veren dağılım $(\text{MaxMinxEnt})_m$ dağılımı olarak ifade edilmektedir. Bu bölümde $(\text{MinMinxEnt})_m$ ve $(\text{MaxMinxEnt})_m$ dağılımlarının elde edilmesi ayrıntılı bir şekilde gösterilmiştir.

$x_1, \dots, x_n$ rassal örnek olsun ve örnek içindeki değerlere, sırasıyla $p_1, \dots, p_n$ olasılıkları karşılık gelsin. Bu rassal örnek, $q_1, q_2, \dots, q_n$ şeklinde önsel bir dağılıma sahip olsun. Bu durumda Kullback-Leibler ölçümü,

$$D(p : q) = \sum_{i=1}^n p_i \ln \frac{p_i}{q_i}, \quad p = (p_1, \dots, p_n), \quad q = (q_1, \dots, q_n) \quad (3.55)$$

şeklinde tanımlanır. Kullback-Leibler fonksiyonunu minimize etme problemi

$$\sum_{i=1}^n p_i g_j(x_i) = \mu_j, \quad j = 0, 1, \dots, m \quad (3.56)$$

kısıtları altında, burada $\mu_0 = 1$, $g_0(x) = 1$, $p_i \geq 0, i = 1, \dots, n$, $m + 1 < n$ ve $q_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$; $\sum_{i=1}^n q_i \leq 1$ olmak üzere

$$p_i = q_i e^{-\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.57)$$

çözümüne sahiptir. Burada λ_j ($j = 0, 1, 2, \dots, m$) Lagrange çarpanlarıdır. Eşitlik (3.57), (3.55)'te dikkate alınırsa, $D(p : q)$ 'nin minimum entropi değeri ya da minimum entropi fonksiyoneli

$$D_{\min} = \sum_{i=1}^n q_i e^{-\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)} \left(-\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i) \right) \quad (3.58)$$

veya

$$D_{\min} = -\sum_{j=0}^m \lambda_j \mu_j \quad (3.59)$$

şeklinde elde edilir. (3.58) denkleminde, $\mu_0 = 1$ olmak üzere, $\mu_j, (j = 0, 1, \dots, m)$ 'ler

uygun $g_j(x)$, ($j = 0, 1, \dots, m$) moment fonksiyonları yardımıyla verilmiş rassal değişkenden elde edilen moment değerleridir.

(3.58) ve (3.59) formüllerinden görüldüğü üzere μ_j , ($j = 0, 1, \dots, m$)'ler, $g_j(x)$, ($j = 0, 1, \dots, m$) moment fonksiyonlarına bağlı fonksiyoneller gibi ele alınabilir. Bu durumda moment fonksiyonları, $\mathbf{g} = (g_0, g_1, \dots, g_m)$ vektör fonksiyonu şeklinde yazıldığında $D(p : q)$, $\mathbf{g}$ vektör fonksiyonuna bağlı bir fonksiyonel gibi yorumlanabilir.

Bu fonksiyonel $\mathbf{g}$ moment vektör fonksiyonlarına bağlı değerleri (3.58) formülüyle belirlenen bir fonksiyonel olarak tanımlanmıştır (Shamilov, 2006; 2007). Söz konusu fonksiyonel,

$$U(\mathbf{g}) = D_{\min}$$

şeklinde gösterilerek, MinxEnt fonksiyoneli olarak isimlendirilir. Moment vektör fonksiyonlar kümesi, bileşenleri lineer bağımsız olan sonsuz sayıda $\mathbf{g}$ moment vektör fonksiyonlarından oluşsun ve K şeklinde gösterilsin ($\mathbf{g} \in K$).

Kesikli rassal değişkenler için genelleştirilmiş MinxEnt dağılımları diğer bir ifade ile MinMinxEnt ve MaxMinxEnt dağılımları, K moment vektör fonksiyonları kümesine bağlıdır. K moment vektör fonksiyonları kümesi genel anlamda sonsuz sayıda elemanlardan oluşur ve bu durumda genelleştirilmiş MinxEnt dağılımlarının bulunması oldukça zordur (Shamilov, 2006). Fakat uygulama açısından, K moment fonksiyonları kümesinin sonlu sayıda elemanlardan oluşması da önemlidir. Bu durum, istatistiksel dağılımlara uygun karakterize edici momentlerin sonlu sayıda olması ve bu dağılımların entropi optimizasyon dağılımları şeklinde bulunabilmesiyle de desteklenmektedir (Kagan vd., 1973; Kapur, 1989).

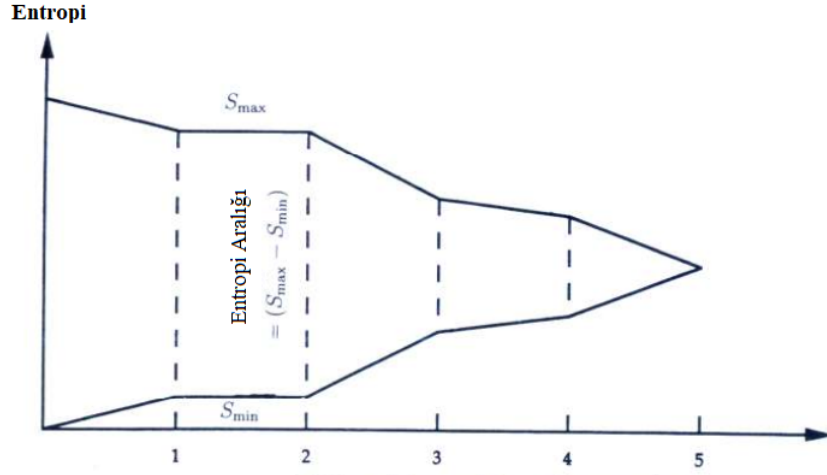
Buna göre bu tez çalışmasında, kesikli rassal değişkenler için MinMinxEnt ve MaxMinxEnt dağılımlarının pratik uygulamalarının yapılabilmesi için K kümesi, m sayıda bileşene sahip sonlu sayıda moment vektör fonksiyonlarından oluşacak şekilde seçilmiştir.

$K_0 = \{g_1, \dots, g_r\}$, r elemanlı karakterize edici moment fonksiyonlar kümesi olsun. Bu durumda, $K_{0,m}$; K_0 'dan alınan r sayıda elemanların tüm m elemanlı kombinasyonlarından oluşan bir küme olur. Burada $K_{0,m}$ 'den alınan her bir kombinasyon verilmiş bir veri seti ve $U(\mathbf{g})$ fonksiyoneli için moment koşulunu ifade etmektedir. Kombinasyonlar sayısı ve $U(\mathbf{g})$ 'nin bu değerlere uygun değerlerinin sonlu olduğu

için sayısı $U(\mathbf{g})$ 'nin bu değerleri arasından en büyük ve en küçük değeri vardır ve bulunabilir. Sözü edilen bu değerler, $U(\mathbf{g}) = D_{\min}$ fonksiyoneli için MinMinxEnt ve MaxMinxEnt dağılımlarının bulunmasına imkan sağlamaktadır.

MinMinxEnt ve MaxMinxEnt problemlerini çözmek için $(g_0(x), g^{(1)}(x))$, $(g_0(x), g^{(2)}(x))$ vektör fonksiyonlarını bulmak gerekmektedir. Burada $g_0(x) = 1$, $g^{(1)} \in K_{0,m}$ ve $g^{(2)} \in K_{0,m}$ sırasıyla $U(\mathbf{g})$ 'ye Kullback - Leibler ölçümüne göre minimum ve maksimum değerleri veren karakterize edici moment vektörleridir. $U(\mathbf{g})$ 'nin $g_0(x)$ ve tüm m -boyutlu $\mathbf{g} \in K_{0,m}$ vektör fonksiyonları tarafından üretilen kısıtlara göre minimum veya maksimum değerlere ulaştığına dikkat edilmelidir. Diğer yandan, $U(\mathbf{g})$ 'nin minimum değeri $\mathbf{g} \in K_{0,m}$ 'e uygun olan $D_{\min}$ değerinin en küçük, $U(\mathbf{g})$ 'nin maksimum değeri $\mathbf{g} \in K_{0,m}$ 'e uygun olan $D_{\min}$ değerinin en büyük değeridir. Eğer $(g_0(x), g^{(1)}(x))$, $U(\mathbf{g})$ 'ye en küçük değeri veriyorsa $p^{(1)} = (p_1^{(1)}, \dots, p_n^{(1)})$ dağılımı $(g_0(x), g^{(1)}(x))$ vektör fonksiyonuna göre veriye uygun olan dağılımdır ve $(\text{MinMinxEnt})_m$ dağılımı olarak adlandırılır. Eğer $(g_0(x), g^{(2)}(x))$ 'de $U(\mathbf{g})$ 'ye en büyük değeri veriyorsa $p^{(2)} = (p_1^{(2)}, \dots, p_n^{(2)})$ dağılımı $(g_0(x), g^{(2)}(x))$ vektör fonksiyonuna göre veriye uygun olan dağılımdır ve $(\text{MaxMinxEnt})_m$ dağılımı olarak ifade edilmektedir (Shamilov, 2007; 2010).

Son olarak geneleştirilmiş entropi optimizasyon yöntemlerinden elde edilen genelleştirilmiş MaxEnt ve MinxEnt dağılımlarını elde etmek için oluşturulan K kümesinde kombinasyon sayısı ve kullanılan MaxEnt ve MinxEnt fonksiyoneliinden elde edilen entropi değeri S ile gösterilsin. Bu durumda, her bir kombinasyonda elde edilen olasılık dağılımları kümesi, daha önceki bir kombinasyonda mevcut olan olasılık dağılımlarının bir alt kümesi olduğundan, $S_{\max}$ azalır (veya en azından artmaz) ve $S_{\min}$ artar (veya en azından azalmaz) ve Şekil 3.1'deki gibi bir grafik elde edilmiş olur. En son elde edilen kombinasyonda ise hem maksimum hem de minimum belirsizliği veren tek bir olasılık dağılımı elde edilmektedir (Kapur ve Kesavan, 1992).



Şekil 3.1. Karakterize edici moment fonksiyonlar kümesine sahip S_{max} ve S_{min} entropi değerlerinin değişimi

4. STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEM ÇÖZÜMÜNÜN YAKLAŞIK OLASILIK YOĞUNLUK FONKSİYONUNUN GEOY ile BULUNMASI

Stokastik diferansiyel denklemin çözümü bir stokastik süreçtir. Bu stokastik süreç sabit t zamanının her bir anında bir rassal değişken ifade etmektedir. Stokastik süreci oluşturan bu rassal değişkenlerin olasılık yoğunluk fonksiyonunun elde edilmesi ve dağılımının bulunması ise önemli bir problemdir. Bu bölümde, ilgili problemi çözmek için bir eğri yayı oluşturularak ilk defa genelleştirilmiş entropi optimizasyon yöntemleri kullanılarak yeni bir yöntem geliştirilmiştir. Geliştirilen yeni yöntem bir teorem yardımıyla da ispatlanmıştır.

Teorem 4.1. k_1 ve k_2 koşulları altında Itô stokastik diferansiyel denkleminin varlık-tekliğinin ispatlandığı ve Itô stokastik diferansiyel denkleminin $X(t)$ çözümünün $\varphi(t, s)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olduğu varsayılın. İlgilenilen veri seti kullanılarak Euler-Maruyama yöntemi ile elde edilen yaklaşık $\hat{X}(t_i)$ rassal değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu $\varphi_i(x)$ 'tir. Bu durumda

$$|X(t_i) - \hat{X}(t_i)| \leq E \left(|X(t_i) - \hat{X}(t_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \hat{c} \Delta t \quad (4.1)$$

eşitsizliği geçerlidir. Ayrıca $Z = \varphi_i(x)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, N-1$ ile elde edilen yüzey $\Delta t \rightarrow 0$ iken Itô stokastik diferansiyel denkleminin çözümü olan $X(t)$ stokastik sürecinin olasılık yoğunluk fonksiyonu $\varphi(t, x)$ 'in yaklaşımlarını ifade etmektedir.

Kanıt. Verilen bir veri seti için önerilen SDD modelinin nümerik çözümü EM yöntemi ile yapılmış olsun ve yaklaşık EM yörüngeleri elde edilsin. EM yörüngelerinden oluşan doğru parçası üzerindeki değerler

$$\hat{X}(t_i) = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_K^{(i)}), \quad i = 0, 1, \dots, K; \quad K = N, 2N, \dots \quad (4.2)$$

şeklinde gösterilmiştir. Burada, $t_i = i\Delta t$, $\Delta t = \frac{T}{K}$, K Euler-Maruyama yöntemi ile elde edilen yaklaşımın adım sayısı ve N veri seti büyüklüğü. Ayrıca, $\hat{X}(t_i)$ rassal değişkenin değerleri $t = t_i$, $i = 0, 1, \dots, K$; $K = N, 2N, \dots$ adımları için oluşturulan doğru parçası üzerindeki EM yörüngelerinden elde edilen değerlerdir. Bununla birlikte, $(t_i, x_j^{(i)})$, $j = 0, 1, \dots, K$; $K = N, 2N, \dots$ noktaları stokastik diferansiyel denkleminin yaklaşık yörüngelerinin düğüm noktaları olarak da ifade edilmektedir. EM yöntemindeki ortalama kare hatasının

$$E \left| X(t_i) - \hat{X}(t_i) \right|^2 < \hat{c}\Delta t \quad (4.3)$$

eşitsizliğini sağladığı bilinmektedir (Allen, 2007). Burada, $X(t_i)$ (2.4) SDD denkleminin çözümü olan stokastik süreçtir, $\hat{c} = \frac{1}{2}(1+c)e^{(1+4K)T}$, $c = 2k(T+1)(1+M)$, $M = 3(E|X(0)|^2 + kT^2 + kT)e^{3k(T+T^2)}$, $k \geq 0$.

(4.3)'de Lyapunov eşitsizliği (Lyapunov, 1992) dikkate alınırsa,

$$E \left| X(t_i) - \hat{X}(t_i) \right| \leq E \left(\left| X(t_i) - \hat{X}(t_i) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \hat{c}\Delta t \quad (4.4)$$

elde edilir. (4.4)'den görülüyor ki, $\Delta t \rightarrow 0$ iken $\{\hat{X}(t_i)\}$ dizisi $X(t_i)$ 'ye güçlü yakınsamaktadır. Sonuç olarak, eğer $X(t_i)$ 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu $\varphi(t_i, x)$ ile, $\{\hat{X}(t_i)\}$ dizisinin olasılık yoğunluk fonksiyonu ise $\varphi_i(x)$ ile gösterilirse bu durumda

$$\varphi(t_i, x) = \varphi_i(x), \quad i = 0, 1, \dots, K; \quad K = N, 2N, \dots \quad (4.5)$$

eşitliği geçerlidir. Sabit $t = t_i$ zamanına uygun $\{\hat{X}(t_i)\}$ dizisinin olasılık yoğunluk fonksiyonu olan $\varphi_i(x)$ çeşitli istatistiksel yöntemlerle elde edilebilir. Söz konusu olasılık yoğunluk fonksiyonu bu teoremden genelleştirilmiş entropi optimizasyon yöntemleri ile elde edilmiştir.

$Z = \varphi_i(x)$ eğri yayı $t = t_i$ düzlemi üzerinde bulunan ve veri setinden EM yöntemi ile elde edilen rassal değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu, benzer şekilde $Z = \varphi_{i+1}(x)$ ise $t = t_{i+1}$ düzlemi üzerinde bulunan "yaklaşık" olasılık yoğunluk fonksiyonu olsun. $t = t_i$ düzleminde bulunan $Z = \varphi_i(x)$ eğri yayının kendine paralel olarak $t = t_{i+1}$ düzlemine doğru paralel kaydırılarak $t = t_i$ ve $t = t_{i+1}$ düzlemleri arasında bulunan $Z = \varphi_i(x)$, $t_i \leq t \leq t_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, N-1$ yüzeyi elde edilmiştir. Benzer şekilde, $t = t_{i+1}$ düzleminde bulunan $Z = \varphi_{i+1}(x)$ eğrisi paralel kaydırılarak $t_{i+1} \leq t \leq t_{i+2}$ aralığında tanımlanmış $Z = \varphi_{i+1}(x)$ yüzeyi elde edilmiştir.

Böylece, $t = t_i$, $i = 0, 1, \dots, N$ düzlemleri üzerinde bulunan $Z = \varphi_i(x)$ eğri yaylarından geçen yüzey elde edilmiş olur. Söz konusu yüzey $Z = \varphi(t, x)$ yoğunluk fonksiyonunun bir yaklaşımı olarak kabul edilebilir. Bir başka deyişle, verilen bir veri setinden başlayarak EM yöntemi ile SDD'lerin çeşitli yörüngeleri oluşturulmuştur. Elde edilen yörüngeler sabit zamana göre rassal değişken elde edilmesine olanak sağlamıştır.

Şimdi $Z = \varphi_i(x)$ eğri yayından geçen S_i yüzeyi elde edilsin. S_i yüzeyinin deklemi $Z = \varphi_i(x)$, $t_i \leq t \leq t_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, N-1$. Görülüyor ki, S_i yüzeyi

$$S = S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_{N-1}$$

şeklinde basamakla yüzeylerin birleşimidir ve aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$Z = \varphi_i(x), \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.6)$$

(4.6) yüzeyi $Z = \varphi_i(x)$ Itô stokastik diferansiyel denkleminin çözümü olan stokastik sürecinin olasılık yoğunluk fonksiyonuna bir yaklaşımdır. Bununla birlikte, eğer tüm komşu sabit zamanlar arasındaki mesafe yeteri kadar küçültülebilirse, eğriler arasından geçen bu yüzey SDD'in çözümü olan stokastik sürecin olasılık yoğunluk fonksiyonuna bir yaklaşım olarak da düşünülebilir (İnce ve Shamilov, 2020; Ince,

2021).

□

5. UYGULAMALAR

Stokastik diferansiyel denklemler biyolojiden mühendisliğe, ekonomiden fiziğe, tıptan kimyaya olmak üzere bir çok alanda çeşitli uygulamalara sahiptir. Literatürde, biyolojik popülasyonların stokastik dinamiklerini modelleyen SDD modelleme çalışmaları (Allen, 1999; Allen, 2003; Capasso ve Bakstein, 2005; Särkkä, ve Arno, 2019), dinamik sistemlerinde rassal etkileri içeren çeşitli fiziksel sistem için SDD modelleme çalışmaları (Hayes ve Allen, 2005; Allen, 2007; Panik, 2017;), hisse senetleri, faiz oranları ve varlık fonları gibi ekonometrik alanlarda yapılan SDD modelleme çalışmaları (Mikosh, 1998; Ross, 1999; Korn ve Korn, 2001; Sauer, 2012) bulunmaktadır.

Bu bölümde stokastik diferansiyel denklemlerin çözümü olan stokastik sürecin yaklaşık olasılık yoğunluk fonksiyonun GEOY ile bulunması için geliştirilen yeni yöntemin performansı bir simülasyon çalışması ile incelendikten sonra biyolojik popülasyon verisi, hisse senedi verisi ve Covid-19 ölüm oranı verisi olmak üzere üç farklı gerçek hayat problemi için de gösterilmiştir. Söz konusu uygulamaların analizleri MATLAB ve R programları kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

Geliştirilen yeni yöntemi kullanarak ilgilenilen veri setine önerilen stokastik diferansiyel denklem modelinin çözümünün yaklaşık olasılık yoğunluk fonksiyonunu elde etmek için aşağıdaki adımlar izlenmiştir:

- **Wiener sürecinin varsayımlarının testi:** SDD modelinde yer alan Wiener süreci bir stokastik süreçtir. Parametreleri tahmin etmeden önce, Wiener süreci varsayımlarının gerçekleşip gerçekleşmediği kontrol edilmelidir. Varsayım kontrolü ilgilenilen veri setindeki değerlerden oluşan $X_j - X_{j-1}$, $j = 1, 2, \dots, N$ serisine uygulanmıştır. Yapılan testler için anlamlılık düzeyi $\alpha = 0.05$ olarak seçilmiştir.

- **SDD için parametre tahmini:** En çok olabilirlik yöntemi ile stokastik diferansiyel denklemin bilinmeyen parametreleri tahmin edilmiştir.

- **SDD için uyum testi:** Önerilen SDD modelinin verilere uygun olup olmadığı Bölüm 2.5'te yer alan ki-kare uyum iyiliği testi ile belirlenmiştir.

- **SDD'in EM ile çözümü:** İlgili veri seti için seçilen uygun modelden elde

edilen yaklaşık EM değerleri $K = N, 2N, 3N$ adımları için hesaplanmıştır. Bu adımlardan EM'nin ortalama kare hata değerlerine göre en küçük hataya sahip adım için EM yörüngeleri çizilmiştir ve söz konusu yörüngeler üzerindeki rassal değişkenlerin aldığı değerler belirlenmiştir.

Stokastik diferansiyel denklem modelinin yaklaşık çözümüne ait elde edilen EM yörüngelerinin her biri t_i anındaki $\hat{X}(t_i)$ rassal değişkenin yaklaşık değerlerini ifade etmektedir. Her bir $t = t_i$ anında $i = 0, 1, \dots, K$ sayısı kadar $\hat{X}(t_i)$ rassal değişken elde edilmiştir. Elde edilen bu rassal değişkenler, $\{\hat{X}(t_i)\}$ rassal değişkenler dizisini oluşturmaktadır. Teorem 4.1'e göre $\Delta t \rightarrow 0$ iken $\{\hat{X}(t_i)\}$ dizisi $X(t_i)$ 'ye güçlü yakınsamaktadır. Eğer $X(t_i)$ 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu $\varphi(t_i, x)$ ve $\{\hat{X}(t_i)\}$ dizisinin olasılık yoğunluk fonksiyonu da $\varphi_i(x)$ ile gösterilirse bu durumda (4.5) eşitliği geçerlidir. Yani, $X(t_i)$ 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu $\varphi(t_i, x)$ 'nin bulunması SDD'in çözümü olan $X(t)$ stokastik sürecinin olasılık yoğunluk fonksiyonunun bulunmasına bir yaklaşımdır. Söz konusu olasılık yoğunluk fonksiyonu ise genelleştirilmiş entropi optimizasyon yöntemleri ile elde edilmiştir.

• **Geliştirilen yeni yöntemin kullanılması: SDD'in çözümünün yaklaşık olasılık yoğunluk fonksiyonun GEOY ile bulunması**

Bir önceki adımda elde edilen $\{\hat{X}(t_i)\}$ dizisinin olasılık yoğunluk fonksiyonunun bulunması, ilgilenilen veri setinin modellenenebilir olduğunu göstermek açısından oldukça önemlidir. Bu sebeple, bu tezde teorik olarak ispatlanan yeni yöntem; SDD modelinin çözümü olan stokastik sürecin yaklaşık olasılık yoğunluk fonksiyonunun bulunmasına imkan sağlamıştır.

$\{\hat{X}(t_i)\}$ dizisi T parametre uzayından alınan t zaman parametresine bağlı olarak Ω elementer sonuçlar uzayında tanımlıdır ve bu dizi bir stokastik süreçtir. Yani, t zamanın her anı için kaydedilen rassal değişkenlerin bir araya gelmesi ile oluşan rassal değişkenler dizisi bir stokastik süreç oluşturmaktadır. Bu stokastik süreç " $\hat{X}(t)$ " ile gösterilmiştir. Uygulamalarda geçen $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler ifadesindeki kasıt $\hat{X}(t)$ stokastik sürecini oluşturan rassal değişkenlerdir. Bu durumda, $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin dağılımının GEOY ile bulunması $\hat{X}(t)$ stokastik sürecini oluşturan rassal değişkenlerin dağılımının bulunması anlamına gelmektedir.

Geliştirilen yeni yöntemin uygulanabilir olduğunu göstermek için şu adımlar

izlenmiştir: Öncelikle, verilere göre verilen moment fonksiyonlarının MaxEnt ve MinxEnt karakterize edici momentleri belirlenmiştir. Seçilen MaxEnt ve MinxEnt karakterize edici momentlerine karşılık gelen GEOY tarafından üretilen dağılımlar elde edilmiştir. Sonrasında ise GEOY tarafından üretilen dağılımların performansları kök ortalama kare hata (RMSE), belirlilik katsayısı (R^2), Ki-Kare (χ^2) ve MaxEnt ölçümü (H) ve MinxEnt ölçümü (D) gibi istatistiksel kriterlere göre değerlendirilmiştir. En iyi dağılımın performansı en düşük RMSE, χ^2 , MaxEnt ve MinxEnt ölçümü değerleri ve en yüksek R^2 değerlerine göre belirlenmiştir.

GEOY dağılımlarını elde etmek için $U(g)$ MaxEnt ve MinxEnt fonksiyoneline maksimum ve minimum değerler veren moment vektör fonksiyonları seçilmiştir. Bu nedenle, $g_0(x) = 1$, $g_1(x) = x$, $g_2(x) = x^2$, $g_3(x) = \ln x$, $g_4(x) = \ln^2(x)$, $g_5(x) = \ln(1 + x^2)$ karakterize edici moment vektör fonksiyonları olarak seçilmiştir. Bu moment fonksiyonlarının seçimi, bilinen istatistiksel dağılımların karakterize edici momentleri olacak şekilde yapılmıştır. Örneğin x ve x^2 momentleri normal dağılımın karakterize edici momentleridir (Kapur ve Kosevan, 1992).

GEOY'ne göre, $K_0 = \{g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}$ ve m elemana sahip K_0 'ın r sayıda elemanlarının tüm kombinasyonları $K_{0,m}$, ($m = 1, 2, \dots, r$) olarak gösterilsin. $K_{0,m}$, ($m = 1, 2, 3, 4, 5$) kümelerinden $U(g)$ 'ye en küçük ve en büyük değeri veren iki moment vektör fonksiyonu seçilmiştir.

Örneğin, $K_{0,2}$ üçlü kombinasyon kümesinde, $(g_0, g^{(1)}) = (1, x, \ln x, \ln(1 + x^2))$, $g^{(1)} \in K_{0,2}$ MaxEnt fonksiyoneli $U(g)$ 'ye en küçük değeri veren dağılım (MinMaxEnt)₂, $(g_0, g^{(2)}) = (1, x^2, \ln x, \ln^2(x))$, $g^{(2)} \in K_{0,2}$ MaxEnt fonksiyoneli $U(g)$ 'ye en büyük değeri veren dağılım ise (MaxMaxEnt)₂ dağılımı olarak gösterilmiştir. Bu şekilde diğer kombinasyonlar için genelleştirilmiş MaxEnt dağılımları elde edilmiştir.

Benzer şekilde, MinxEnt dağılımları için $K_{0,2}$ üçlü kombinasyon kümesinde, $(g_0, g^{(1)}) = (1, x, \ln x, \ln^2(x))$, $g^{(1)} \in K_{0,2}$, MinxEnt fonksiyoneli $U(g)$ 'ye en küçük değeri veren dağılım (MinMinxEnt)₂, $(g_0, g^{(2)}) = (1, x, x^2, \ln x)$, $g^{(2)} \in K_{0,2}$, MinxEnt fonksiyoneli $U(g)$ 'ye en büyük değeri veren dağılım (MaxMinxEnt)₂'dir. Bu şekilde diğer kombinasyonlar için genelleştirilmiş MinxEnt dağılımları elde edilmiştir.

Uygulamalarda çizilen şekillerde (MinMaxEnt)_m ve (MaxMaxEnt)_m dağılımları ile (MinMinxEnt)_m ve (MaxMinxEnt)_m dağılımlarında minimum dağılımlar kırmızı çizgi, maksimum dağılımlar ise yeşil çizgi ile gösterilmiştir.

GEOY’nden elde edilen genelleştirilmiş MinxEnt dağılımları için ilgili veri setlerine ilişkin önsel dağılımın belirlenmesinde genelleştirilmiş MaxEnt dağılımlarından elde edilen olasılık değerlerinden yararlanılmıştır.

Geliştirilen yeni yöntemin uygulamalarda performansını göstermek için kullanılan istatistiksel kriterlerin formülleri ise aşağıda verilmiştir:

$$RMSE = \left(\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - x_i)^2}{N} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - x_i)^2}{N - k}$$

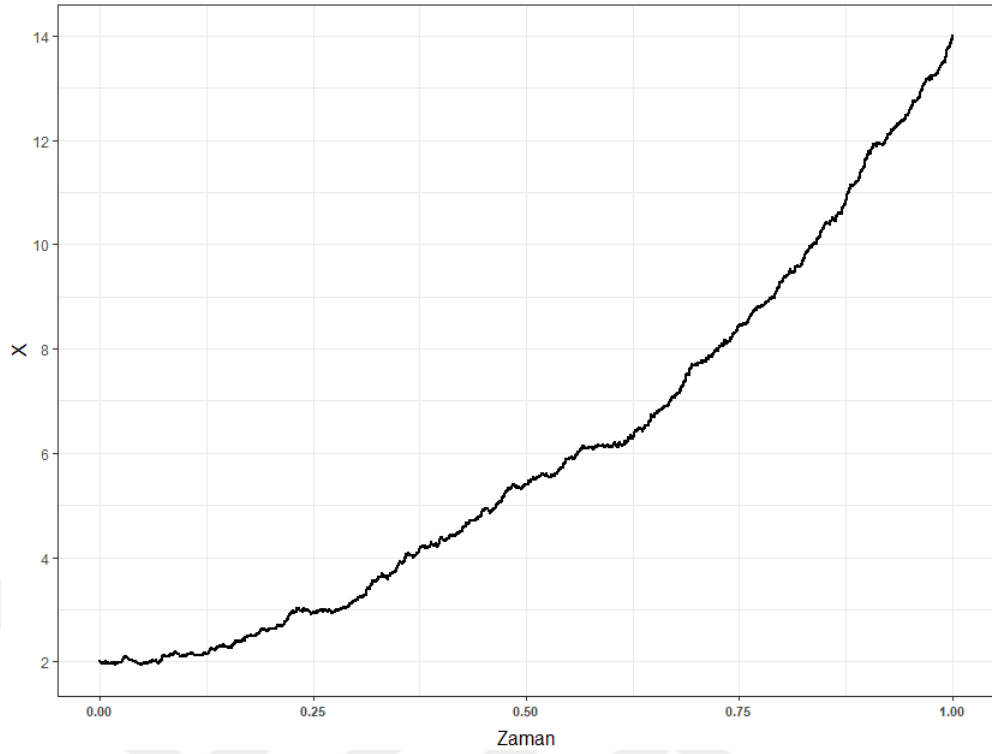
$$R^2 = \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - x_i)^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2} \right)$$

Burada x_i, i . dağılımdan tahmin edilen veri, y_i i. gerçek veri, $\bar{y}$ gerçek verilerin ortalaması, k parametre sayısı veya kısıt sayısı ve N gözlem sayısıdır. En iyi dağılım belirlenirken RMSE, χ^2 , H ve D değerlerinin en küçük değerlerine, R^2 için ise en yüksek aldığı değere bakılmaktadır. Çünkü, R^2 bir modelin tahmin gücünün bir ölçüsü olarak 0 ve 1 arasında değişmektedir ve 1’e yaklaşması modelin tahmin gücünün arttığının göstergesidir.

5.1. Simülasyon Çalışması

Stokastik diferansiyel denklemler gerçek veri setleri üzerinde uygulamalara sahip olduğu gibi simülasyon çalışmaları için de önemli bir yer tutmaktadır ve bu konu ile ilgili literatürde çeşitli uygulamalar bulunmaktadır (Higham, 2001; Iacus, 2008; Bayram vd., 2018; Kessler vd. 2019).

Bu uygulamada parametreleri (2, 0.3, 0.5), başlangıç değeri 2 olan lineer olmayan bir stokastik diferansiyel denklem modelinden Monte Carlo yöntemi ile N=1000 tane veri elde edilmiştir. Üretilen bu veri setinin dağılımı Şekil 5.1’da gösterilmiştir.



Şekil 5.1. *Simülasyon verisinin dağılımı*

Simülasyon ile üretilen veri seti için önerilen SDD modelleri aşağıda verilmiştir:

$$\text{CEV (1976) modeli: } dX(t) = \theta_1 X(t)dt + \theta_2 X(t)^{\theta_3} dW(t)$$

$$\text{CIR (1985) modeli : } dX(t) = (\theta_1 + \theta_2 X(t)) dt + \theta_3 \sqrt{X(t)} dW(t)$$

$$\text{GBM (1983) modeli: } dX(t) = \theta_1 dt + \theta_2 X(t) dW(t)$$

$$\text{CKLS (1992) modeli: } dX(t) = (\theta_1 + \theta_2 X(t)) dt + \theta_3 X(t)^{\theta_4} dW(t)$$

Simülasyon veri setine önerilen stokastik diferansiyel denklem modelinin çözümünün olasılık yoğunluk fonksiyonunu elde etmek için aşağıdaki adımlar izlenmiştir:

- **Wiener sürecinin varsayımlarının testi**

Simülasyon veri seti için önerilen modellerle yapılan analizlere geçmeden önce Wiener sürecinin varsayımlarının sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilmelidir. Bu amaçla, $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_{1000}\}$ için $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{1000}$ özelliğini sağlayan $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_{1000}} - X_{t_{999}}$ şeklinde oluşturulan simülasyon verisine ait artımların dağılımının normal, durağan ve bağımsız olduğuna ilişkin varsayımların sınamaları aşağıda verilmiştir:

Normallik varsayımı sınamasını gerçekleştirmek için S-W testine ilişkin hipo-

tezler:

H_0 : Simülasyon verisi normal dağılıma uygundur.

H_1 : Simülasyon verisi normal dağılıma uygun değildir.

şeklinde kurulmuştur. S-W test istatistiği 0.98'dir ve $p = 0.07 > \alpha = 0.05$ olduğundan H_0 hipotezi kabul edilir. Bu durumda, simülasyon verisi normal dağılıma uygundur denir.

Durağanlık varsayımı için KPSS testine ilişkin kurulan hipotezler:

H_0 : Simülasyon verisi durağandır.

H_1 : Simülasyon verisi durağan değildir.

şeklindedir. KPSS test istatistiği 1'dir ve $p = 0.08 > \alpha = 0.05$ olduğundan H_0 hipotezi kabul edilir. Bu durumda, simülasyon verisi durağandır denir.

Bağımsızlık varsayımı için Box-Pierce Q testine ilişkin kurulan hipotezler:

H_0 : Simülasyon verisine ait tüm gecikmeler için otokorelasyon katsayıları sıfıra eşittir.

H_1 : Simülasyon verisine ait tüm gecikmeler için otokorelasyon katsayıları sıfırdan farklıdır.

şeklindedir. Box-Pierce Q test istatistiği 2'dir ve $p = 0.27 > \alpha = 0.05$ olduğundan H_0 hipotezi kabul edilir. Bu durumda, simülasyon verisine ait tüm gecikmeler için otokorelasyon katsayıları sıfıra eşittir ve artımların bağımsızlığı sağlanmış olur.

$(X_j - X_{j-1}), j = 1, 2, \dots, 1000$ serilerinin normallik, durağanlık ve bağımsızlık varsayımları sağlandığına göre, önerilen stokastik diferansiyel denklem modelleri için parametre tahminine geçilebilir.

• SDD için parametre tahmini

Önerilen SDD modellerinin parametrelerini tahmin etmek için en çok olabilirlik yöntemi kullanılmıştır ve her bir modele uygun parametre tahminleri Tablo 5.1'de verilmiştir.

Tablo 5.1. Önerilen SDD modellerinin tahmini parametre değerleri

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
CEV modeli	2.1322	0.2930	0.4805	
CIR modeli	11.8196	0.4777	0.3239	
GBM modeli	0.3415	2.0969		
CKLS modeli	0.5429	2.0664	0.4807	0.2928

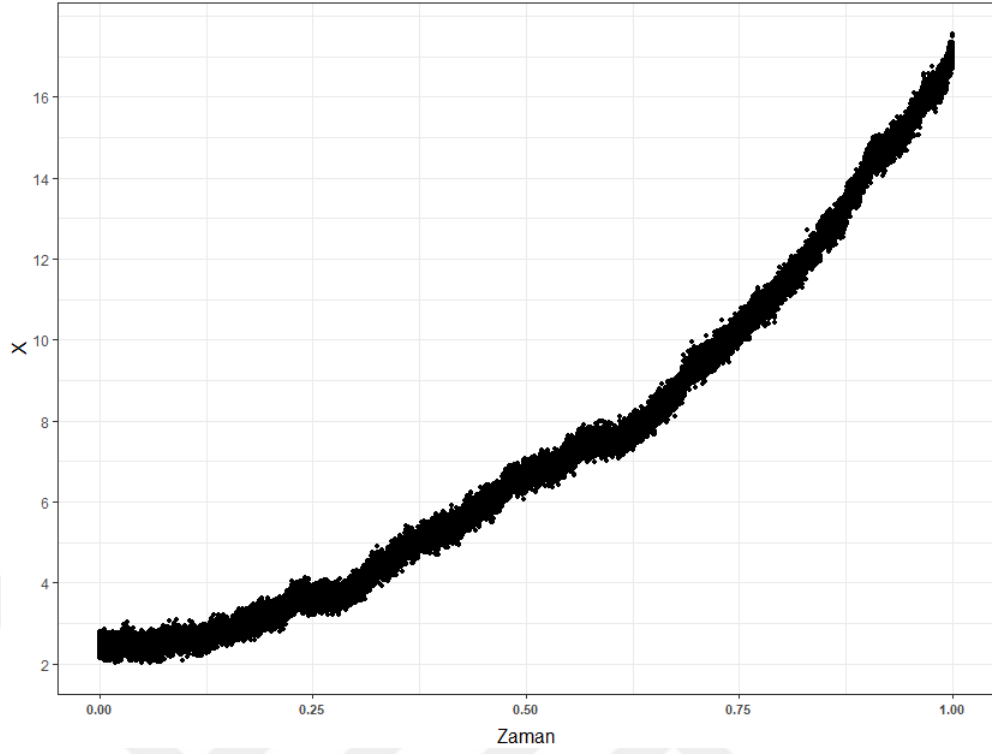
• SDD için uyum testi

Simülasyon verisi için birden fazla önerilmiştir. Uygun modele karar verilirken hangi modelin en iyi olduğuna karar vermek için ilgili modellerin χ^2 değerleri ve buna uygun p değerleri hesaplanmıştır ve Tablo 5.2’de verilmiştir.

Tablo 5.2. Önerilen SDD modellerinin χ^2 ve p değerleri

	χ^2	p-değeri
CEV modeli	787.73	1
CIR modeli	799.78	0.9578
GBM modeli	800.65	0.9885
CKLS modeli	805.44	0.8884

Tablo 5.2 incelendiğinde en küçük χ^2 test istatistiğine sahip olan modelin CEV modeli olduğu görülmektedir. CEV modelinin simülasyon veri setine uygunluğu Şekil 5.2’de grafiksel olarak da gösterilmiştir.



Şekil 5.2. *Simülasyon verisi ve simüle edilmiş değerleri*

Şekil 5.2 incelendiğinde (5.7) denklemine göre simüle edilmiş veri değerleri ve orijinal veri değerleri çizilmiştir. Siyah daireler simüle edilmiş veri değerleri ve siyah çizgi orijinal veri değerlerini temsil etmektedir. Şekil 5.17'den birbirine yakın olan orijinal ve simüle edilmiş değerler karşılaştırıldığında bir uyum olduğu görülmektedir. Burada, uyum iyiliği testini uygulamak için her verinin Monte-Carlo simülasyonları yapılmıştır. $[0, 1]$ aralığında elde edilmiş simülasyon verisi için $t = 0$ anındaki X_0 elde edilen gözlem başlangıç değeridir ve $t = 0.01$ 'den $T = 1$ 'e kadar adım uzunluğu $\Delta = \frac{T}{N} = \frac{1}{1000} = 0.01$ olan her bir t anı için simüle edilen değerler elde edilmiştir. Simülasyon verisindeki her bir nokta için M simülasyon sayısı $\frac{N-1}{M+1} \geq 5$ eşitsizliğinden $\frac{1000-1}{M+1} \geq 5$ olmak üzere $M \leq 198.8$ eşitsizliğinden $M = 198$ kabul edilmiştir.

CEV modeli için parametre tahmin edicileri $\theta_1 = 2.1322, \theta_2 = 0.2930, \theta_3 = 0.4805$ CEV modelinde dikkate alındığında,

$$dX(t) = 2.1322X(t)dt + 0.2930X(t)^{0.4805}dW(t), \quad X_0 = 2 \quad (5.1)$$

denklemini elde edilmiştir.

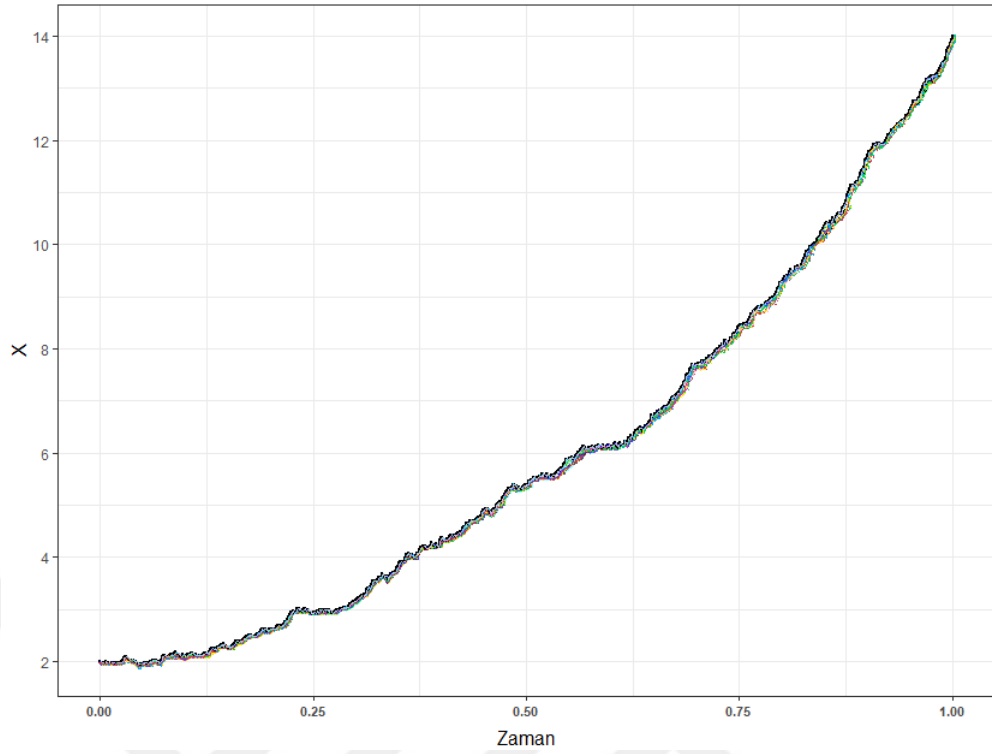
• SDD'in EM ile çözümü

SDD modelinin ilgili veri setine uygun olduğu gösterildikten sonra uygun SDD modeli için EM yöntemi ile nümerik çözümüne geçilebilir. Bu amaçla EM yönteminin hangi adımda en küçük hataya sahip olduğuna karar verilmesi gerekmektedir. Sonrasında ise seçilen adım sayısı için geliştirilen yeni yöntem kullanılarak EM yörüngeleri çizdirilmiştir. Öncelikle, simülasyon verisi ve (5.1) modelinden elde edilen yaklaşık EM değerleri $K=1000, 2000, 3000$ adımları için MSE değerleri hesaplanmıştır ve Tablo 5.3’de verilmiştir.

Tablo 5.3. *EM yörüngelerinin adım sayılarına göre MSE değerleri*

K	MSE
1000	0.0010
2000	0.0504
3000	0.0305

Tablo 5.3 incelendiğinde 1000. adımda EM yönteminin en küçük MSE değerine sahip olduğu görülmektedir. Buradan yola çıkarak, simülasyon verisi için önerilen (5.1) SDD modelinin nümerik çözümünde EM yöntemini kullanarak yaklaşık EM yörüngeleri Şekil 5.3’de $K=1000$ adım büyüklüğü kullanılarak çizilmiştir. Burada, önerilen (5.1) SDD modeline ilişkin yaklaşık EM yörüngelerinden $t = t_i, i = 1, 2, \dots, 1000$ noktalarındaki $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin değerleri elde edilmiştir. Yani, verilen bir veri setinden başlayarak EM yöntemi ile SDD’lerin çeşitli yörüngeleri oluşturulmuştur. Elde edilen yörüngeler sabit zamana göre rassal değişken elde edilmesine olanak sağlamıştır.



Şekil 5.3. *Simülasyon verisinin dağılımı ve (5.1) SDD modelinin yaklaşık EM yörüngeleri*

Şekil 5.3 incelendiğinde simülasyon verisi önerilen (5.1) SDD modelinin çözümüne ilişkin yaklaşık EM yörüngelerinden $t = t_i, i = 1, 2, \dots, 1000$ anındaki doğru parçası üzerindeki değerler $(t_i, x_j^{(i)})$, $j = 0, 1, \dots, 1000$; $K = 1000$ olmak üzere stokastik diferansiyel dekleminin yaklaşık yörüngelerinin düğüm noktaları olduğu görülmektedir. Yani, ilgili veri setinden başlayarak EM yöntemi ile SDD'lerin çeşitli yörüngeleri oluşturulmuştur. Elde edilen yörüngeler her bir t anı için bir rassal değişken elde edilmesine olanak sağlamıştır. Bu durumda, her bir $t = t_i, i = 0, 1, \dots, 1000$ anında bu düğüm noktaları $\{\hat{X}(t_i)\}$ rassal değişkenler dizisini oluşturmaktadır. Bu dizi bir stokastik süreç ifade eder ve bu süreç $\hat{X}(t)$ 'dir.

Bu durumda uygulamanın esas kısmı olan, simülasyon verisi önerilen (5.1) SDD modelinin çözümü olan stokastik sürecin olasılık yoğunluk fonksiyonun geliştirilen yeni yöntem ile elde edilme aşamasına geçilebilir.

• **Geliştirilen yeni yöntemin kullanılması: SDD'in çözümünün yaklaşık olasılık yoğunluk fonksiyonun GEOY ile bulunması**

Bir önceki adımda elde edilen stokastik sürecin olasılık yoğunluk fonksiyonunun bulunması ilgilenilen modelin çözümünün olasılık yoğunluk fonksiyonun bulunmasına da bir yaklaşım oluşturmıştır. Ayrıca, GEOY ile elde edilen olasılık dağılımları

da ilgili veri setinin modellenenebilir olduğunu göstermek açısından oldukça önemlidir.

Bu adımda, simülasyon verisi için önerilen (5.1) SDD modelinin yaklaşık EM yörüngelerine ait $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin olasılık yoğunluk fonksiyonu GEOY ile elde edilmiştir. Ayrıca, GEOY ile elde edilen $(\text{MinMaxEnt})_m$, $(\text{MaxMaxEnt})_m$ ve $(\text{MinMinxEnt})_m$, $(\text{MaxMinxEnt})_m$ dağılımları ile $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin modellenenebilir olduğu gösterilmiştir.

Simülasyon verisi için önerilen (5.1) SDD modelinin yaklaşık EM yörüngelerine ait $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerleri için $K_{0,m}$, ($m = 1, 2, 3, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(\text{MinMaxEnt})_m$, $(\text{MaxMaxEnt})_m$ ve $(\text{MinMinxEnt})_m$, $(\text{MaxMinxEnt})_m$ dağılımlarının performansı H, D, RMSE, R^2 ve χ^2 istatistiksel kriterleri ile sırasıyla Tablo 5.4-5.5 ve Tablo 5.6-5.7’de verilmiştir. Elde edilen sonuçlar aynı zamanda, Şekil 5.4 ve Şekil 5.5’te grafiksel olarak da gösterilmiştir.

Tablo 5.4. $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için $(\text{MinMaxEnt})_m$ dağılımlarının istatistiksel kriterlerine göre incelenmesi

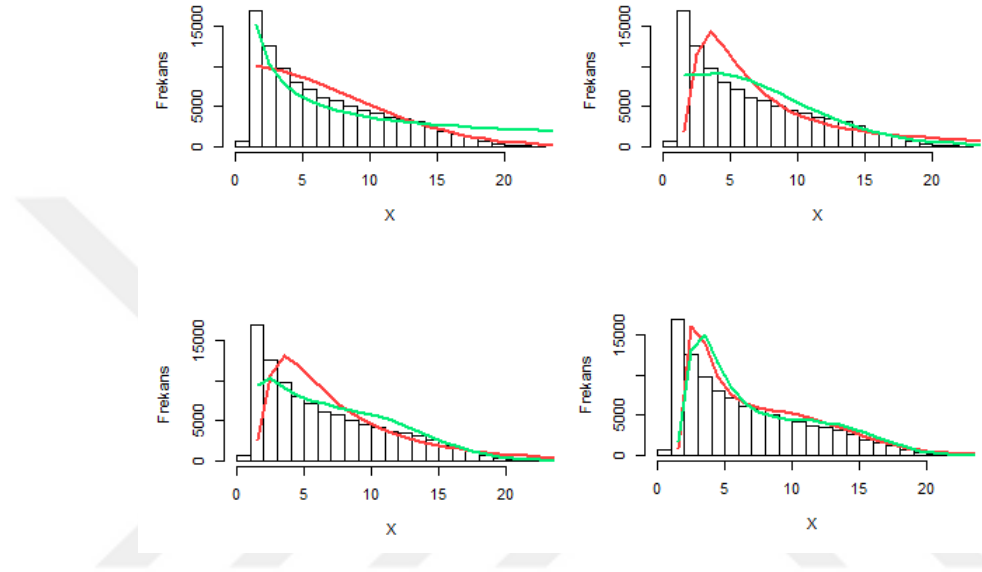
$(\text{MinMaxEnt})_m$	H	RMSE	χ^2	R^2	Moment Fonksiyonları
$(\text{MinMaxEnt})_1$	4.0388	6057.91	0.6135	0.6302	$1, x^2$
$(\text{MinMaxEnt})_2$	3.9642	6057.90	0.8865	0.8646	$1, \ln x, \ln(1 + x^2)$
$(\text{MinMaxEnt})_3$	3.9535	6057.90	0.8339	0.8505	$1, x^2, \ln x, \ln(1 + x^2)$
$(\text{MinMaxEnt})_4$	3.8887	6057.89	0.5381	0.9881	$1, x, \ln x, \ln^2(x), \ln(1 + x^2)$

Tablo 5.5. $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için $(\text{MaxMaxEnt})_m$ dağılımlarının istatistiksel kriterlerine göre incelenmesi

$(\text{MaxMaxEnt})_m$	H	RMSE	χ^2	R^2	Moment Fonksiyonları
$(\text{MaxMaxEnt})_1$	4.2402	6057.90	0.5991	0.2695	$1, \ln x$
$(\text{MaxMaxEnt})_2$	4.0422	6057.91	0.5817	0.6273	$1, x, \ln^2(x)$
$(\text{MaxMaxEnt})_3$	4.0250	6057.91	0.5812	0.6599	$1, x, x^2, \ln^2(x)$
$(\text{MaxMaxEnt})_4$	3.8888	6057.90	0.5812	0.9335	$1, x^2, \ln x, \ln^2(x), \ln(1 + x^2)$

Tablo 5.4 ve Tablo 5.5 incelendiğinde $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin dağılımı için tüm $(\text{MinMaxEnt})_m$ dağılımları verilen istatistiksel kriterler açısından tüm $(\text{MaxMaxEnt})_m$ dağılımlarından daha iyi performans göstermiştir. Özellikle, R^2 kriterine göre $(\text{MinMaxEnt})_4$ dağılımının diğer $(\text{MinMaxEnt})_m$, ($m =$

1, 2, 3) ve tüm $(\text{MaxMaxEnt})_m, (m = 1, 2, 3, 4)$ dağılımlarından $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin dağılımı için daha uygun olduğu görülmektedir ve bu sonuç diğer istatistiksel kriterler ile de desteklenmektedir. Ayrıca, $(\text{MinMaxEnt})_m$ ve $(\text{MaxMaxEnt})_m, (m = 1, 2, 3, 4)$ dağılımlarının $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin dağılımına uyumu grafiksel olarak Şekil 5.4’da gösterilmiştir.



Şekil 5.4. $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için sırasıyla $(\text{MinMaxEnt})_m$ ve $(\text{MaxMaxEnt})_m$ dağılımlarının grafikleri

Şekil 5.4 incelendiğinde $(\text{MinMaxEnt})_m$ ve $(\text{MaxMaxEnt})_m$ dağılımlarının $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin dağılımı ile uyumlu olduğu görülmektedir.

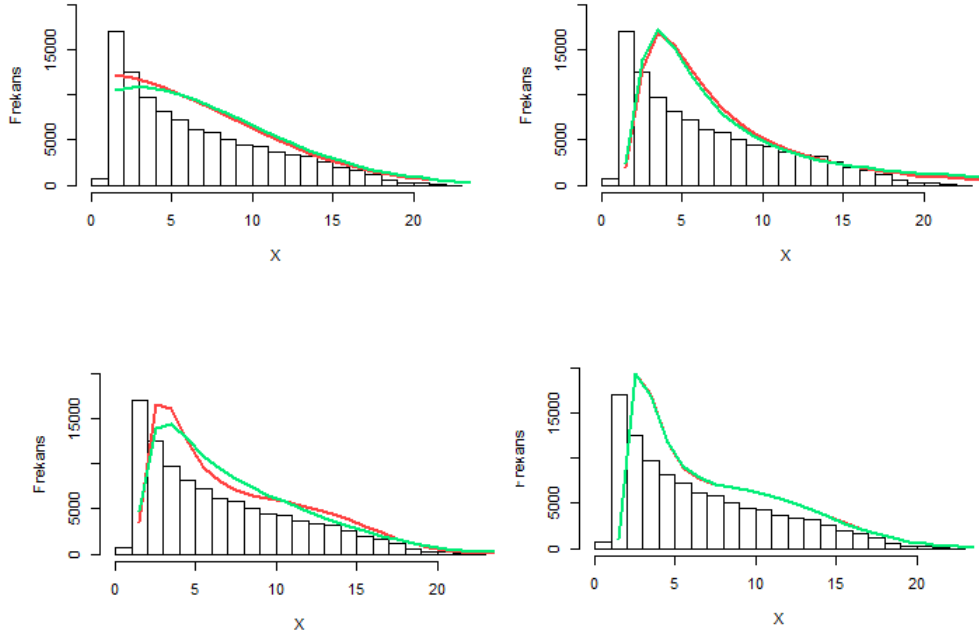
Tablo 5.6. $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için $(\text{MinMinxEnt})_m$ dağılımlarının istatistiksel kriterlerine göre incelenmesi

$(\text{MinMinxEnt})_m$	D	RMSE	χ^2	R^2	Moment Fonksiyonları
$(\text{MinMinxEnt})_1$	4.0388	6057.91	0.6135	0.6302	$1, x^2$
$(\text{MinMinxEnt})_2$	3.9174	6057.90	0.5799	0.8363	$1, x^2, \ln x$
$(\text{MinMinxEnt})_3$	3.9505	6057.90	0.5811	0.9637	$1, x, x^2, \ln^2(x)$
$(\text{MinMinxEnt})_4$	3.8857	6057.89	0.5513	0.9974	$1, x, x^2, \ln^2(x), \ln(1 + x^2)$

Tablo 5.7. $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için $(MaxMinxEnt)_m$ dağılımlarının istatistiksel kriterlerine göre incelenmesi

$(MaxMinxEnt)_m$	D	RMSE	χ^2	R^2	Moment Fonksiyonları
$(MaxMinxEnt)_1$	4.0905	6057.91	0.5936	0.6477	$1, \ln x$
$(MaxMinxEnt)_2$	3.9642	6057.90	0.8865	0.8646	$1, \ln x, \ln(1 + x^2)$
$(MaxMinxEnt)_3$	3.9938	6057.90	0.7124	0.9031	$1, x, x^2 \ln x$
$(MaxMinxEnt)_4$	3.8890	6057.89	0.9381	0.9881	$1, x, \ln x, \ln^2(x), \ln(1 + x^2)$

Tablo 5.6 ve Tablo 5.7 incelendiğinde simülasyon için $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin olasılık dağılımı için tüm $(MinMinxEnt)_m$ dağılımları verilen istatistiksel kriterler açısından tüm $(MaxMinxEnt)_m$ dağılımlarından daha iyi performans göstermiştir. Özellikle, R^2 kriterine göre $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin dağılımında $(MinMinxEnt)_4$ dağılımı diğer $(MinMinxEnt)_m, (m = 1, 2, 3)$ ve tüm $(MaxMinxEnt)_m, (m = 1, 2, 3, 4)$ dağılımlarından daha iyi performans göstermiştir ve bu sonuç diğer istatistiksel kriterler ile de desteklenmektedir. $(MinMinxEnt)_m$ ve $(MaxMinxEnt)_m, (m = 1, 2, 3, 4)$ dağılımlarının $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlere uyumu grafiksel olarak Şekil 5.5'te gösterilmiştir



Şekil 5.5. $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için sırasıyla $(MinMinxEnt)_m$ ve $(MaxMinxEnt)_m$ dağılımlarının grafikleri

Şekil 5.5 incelendiğinde $(\text{MinMinxEnt})_m$ ve $(\text{MaxMinxEnt})_m$ dağılımlarının $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin dağılımına uyumu net bir şekilde görülmektedir.

Elde edilen karşılaştırma sonuçlarına bakıldığında simülasyon verisi için önerilen (5.1) SDD modelinin yaklaşık EM yörüngelerine ait $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin dağılımı; $K_{0,m}, (m = 1, 2, 3, 4)$ moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(\text{MinMinxEnt})_4$ dağılımına özellikle R^2 değeri açısından diğer $(\text{MinMinxEnt})_m, (m = 1, 2, 3)$ ve tüm $(\text{MaxMinxEnt})_m, (\text{MinMaxEnt})_m$, ve $(\text{MaxMaxEnt})_m, (m = 1, 2, 3, 4)$ dağılımlarından daha güçlü bir uyuma sahip olduğu görülmektedir ve bu sonuç diğer istatistiksel kriterler ile de desteklenmektedir. Ayrıca, $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlere genelleştirilmiş MinxEnt dağılımlarının genelleştirilmiş MaxEnt dağılımlarına göre $\hat{X}(t)$ daha iyi uyum sağladığı görsel açıdan da Şekil 5.5'te net bir şekilde görülmektedir.

Son olarak, geliştirilen yeni yöntem yardımıyla simülasyon verisi için önerilen (5.1) SDD modelinin çözümü olan $\hat{X}(t)$ stokastik sürecini oluşturan rassal değişkenlerin yaklaşık olasılık yoğunluk fonksiyonu GEOY ile elde edilmiştir.

Simülasyon çalışmasında özetle aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

- $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin olasılık dağılımının nasıl elde edilebildiği gösterilmiştir.
- $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin dağılımı bilinen herhangi bir istatistiksel dağılıma benzemediği için GEOY dağılımları ile modellenabilir olduğu gösterilmiştir.
- Genelleştirilmiş MinxEnt dağılımlarının genelleştirilmiş MaxEnt dağılımlarına göre $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerleri modellemede daha esnek ve güçlü olduğu yorumu yapılabilmektedir.

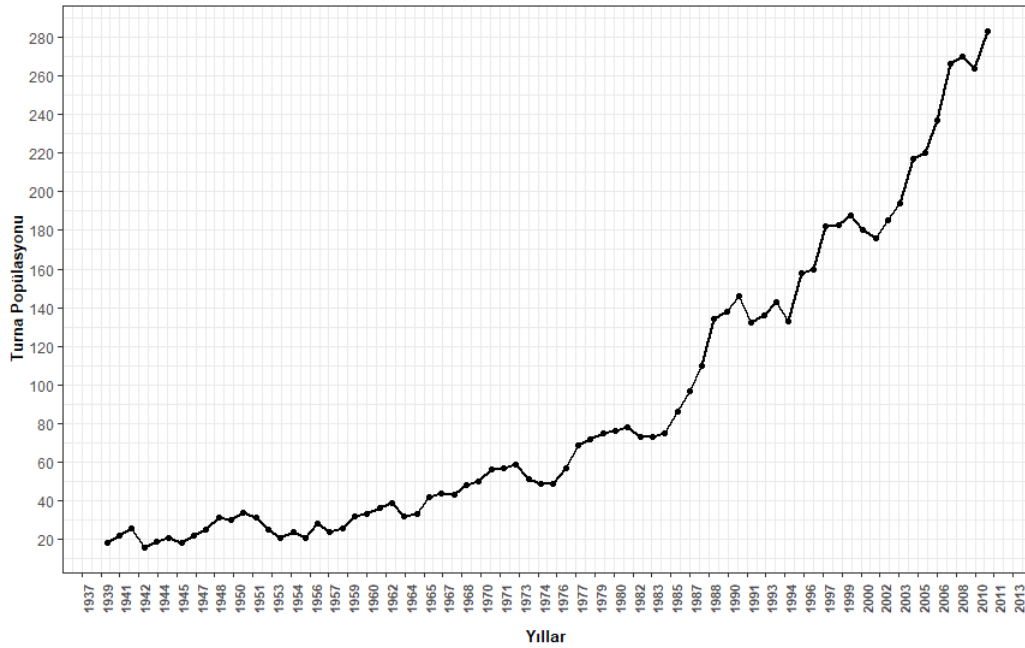
5.2. Biyolojik Popülasyon Örneği

Popülasyon dinamiği ve popülasyon verilerinin modellenmesi stokastik diferansiyel denklemlere dayanmaktadır. Popülasyon dinamikleri demografik değişkenlere sahiptir ve genellikle sürekli zamanlı Markov zinciri (CTMC) modelleri kullanılarak incelenmektedir (Allen vd., 2020). Bu uygulamada geliştirilen yeni yöntemin kullanımını göstermek için 1940-2011 yılları arasında Aransas-Wood bölgesinde yaşayan

$N = 72$ tane gözleme ait turna popülasyonu verileri kullanılmıştır (Butler, 2013) ve her bir yıla ait turna sayısı Şekil 5.6'da gösterilmiştir. Bu biyolojik veri seti için CTMC modeli:

$$dX(t) = \alpha X(t)dt + \sqrt{\beta X(t)}dW(t), \quad X_0 = 18 \quad (5.2)$$

şeklinde. Burada $X(t)$ turna sayısı, α, β bilinmeyen parametreler ve $X(0) = 18$ başlangıç değeri.



Şekil 5.6. 1940-2011 yılları arasında yaşayan turna popülasyonu verilerinin dağılımı

Turna popülasyonu veri setine önerilen stokastik diferansiyel denklem modelinin çözümü olan stokastik sürecin olasılık yoğunluk fonksiyonunu elde etmek için aşağıdaki adımlar izlenmiştir:

- **Wiener sürecinin varsayımlarının testi**

Turna popülasyonu verileri için önerilen CTMC modeliyle analizine geçmeden önce Wiener sürecinin varsayımlarının sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilmelidir. Bu amaçla, $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$ için $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{72}$ özelliğini sağlayan $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_{72}} - X_{t_{71}}$ şeklinde oluşturulan turna popülasyonuna verilerine ait artımların dağılımının normal, durağan ve bağımsız olduğuna ilişkin varsayımların sınamaları aşağıda verilmiştir:

Normallik varsayımı sınamasını gerçekleştirmek için S-W test istatistiği kulla-

nılmıştır. Bu teste ilişkin hipotezler:

H_0 : Turna popülasyonu verileri normal dağılıma uygundur.

H_1 : Turna popülasyonu verileri normal dağılıma uygun değildir.

şeklinde kurulmuştur. S-W test istatistiği 0.84'dir. Bu testten elde edilen p-değeri 0.25 olarak bulunmuştur. p-değeri $\alpha = 0.05$ anlamlılık düzeyinden daha büyüktür ve H_0 hipotezi kabul edilir. Bu durumda, turna popülasyonu verileri normal dağılıma uygundur denir.

Durağanlık varsayımı için KPSS testi kullanılmıştır. Bu teste ilişkin kurulan hipotezler:

H_0 : Turna popülasyonu verileri durağandır.

H_1 : Turna popülasyonu verileri durağan değildir.

şeklindedir. KPSS test istatistiği 1.2'dir. Bu testten elde edilen p-değeri 0.09 olarak bulunmuştur. p-değeri $\alpha = 0.05$ anlamlılık düzeyinden daha büyüktür ve H_0 hipotezi kabul edilir. Bu durumda, turna popülasyonu verileri durağandır denir.

Bağımsızlık varsayımı için Box-Pierce Q testi kullanılmıştır. Bu test için kurulan hipotezler:

H_0 : Turna popülasyonu verilerine ait tüm gecikmeler için otokorelasyon katsayıları sıfıra eşittir.

H_1 : Turna popülasyonu verilerine ait tüm gecikmeler için otokorelasyon katsayıları sıfırdan farklıdır.

şeklindedir. Box-Pierce Q test istatistiği 0.44'dir. Bu testten elde edilen p-değeri 0.06 olarak bulunmuştur. p-değeri $\alpha = 0.05$ anlamlılık düzeyinden daha büyüktür ve H_0 hipotezi kabul edilir. Bu durumda, turna popülasyonu verilerine ait tüm gecikmeler için otokorelasyon katsayıları sıfıra eşittir ve artımların bağımsızlığı sağlanmış olur.

$(X_j - X_{j-1}), j = 1, 2, \dots, 72$ serilerinin normallik, durağanlık ve bağımsızlık varsayımları sağlandığına göre, önerilen CTMC stokastik diferansiyel denklem modeli için parametre tahminine geçilebilir.

• SDD için parametre tahmini

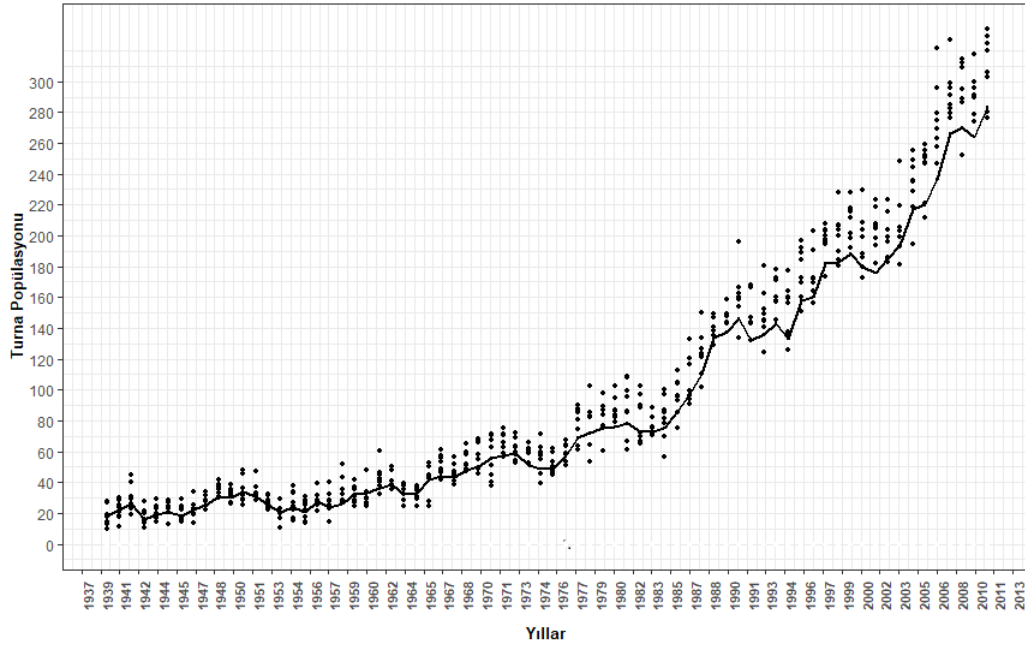
(5.2) denkleminde verilen SDD modelinin parametrelerini tahmin etmek için en çok olabilirlik yöntemi kullanılmıştır ve tahmin ediciler sırasıyla $\alpha = 0.042, \beta = 0.691$ olarak bulunmuştur. Bu parametreler (5.2) denkleminde dikkate alındığında,

$$dX(t) = 0.042X(t)dt + \sqrt{0.691X(t)}dW(t), \quad X_0 = 18 \quad (5.3)$$

denklemini elde edilmiştir.

• SDD için uyum testi

Uyum iyiliği testinde ardışık gözlemler arasındaki yörüngelerin Monte-Carlo simülasyonları elde edilmiştir ve bu gözlemler her noktada orijinal verilerle karşılaştırılmıştır. Bunun için simülasyonda, 1940'da elde edilen gözlem başlangıç değeridir ve 1941'den 2011'e kadar simüle edilen değerler elde edilmiştir. Turna popülasyonu verilerindeki her bir nokta için M simülasyon sayısı $\frac{N-1}{M+1} \geq 5$ eşitsizliğinden $\frac{72-1}{M+1} \geq 5$ olmak üzere $M \leq 13.2$ eşitsizliğinden $M = 13$ kabul edilmiştir.



Şekil 5.7. Turna popülasyonu verileri ve simüle edilmiş değerleri

Şekil 5.7 incelendiğinde (5.3) denkleminde göre simüle edilmiş veri değerleri ve orijinal veri değerleri çizilmiştir. Siyah daireler simüle edilmiş veri değerleri ve siyah çizgi orijinal veri değerlerinin dağılımını temsil etmektedir. Şekil 5.7'den birbirine yakın olan orijinal ve simüle edilmiş değerler karşılaştırıldığında bir uyum olduğu görülmektedir. Ancak, gerçek bir uyum olup olmadığını kesin olarak anlamak için

χ^2 uyum iyiliği testi kullanılmıştır. Bu teste ilişkin hipotezler:

H_0 : Turna popülasyonu verileri önerilen (5.3) SDD modeline uygundur.

H_1 : Turna popülasyonu verileri önerilen (5.3) SDD modeline uygun değildir.

şeklinde kurulmuştur. χ^2 test istatistiği 7.67 elde edilmiştir. (5.3) denklemini iki parametreye sahip olduğu için, serbestlik derecesi $(M - 2) = 13 - 2 = 11$ 'dir. p-değeri $P(\chi^2(11) > 7.67) = 0.74$ ve $\alpha = 0.05$ 'den büyüktür ve H_0 hipotezi kabul edilir. Bu durumda, turna popülasyonu verileri önerilen (5.3) SDD modeline uygundur denir.

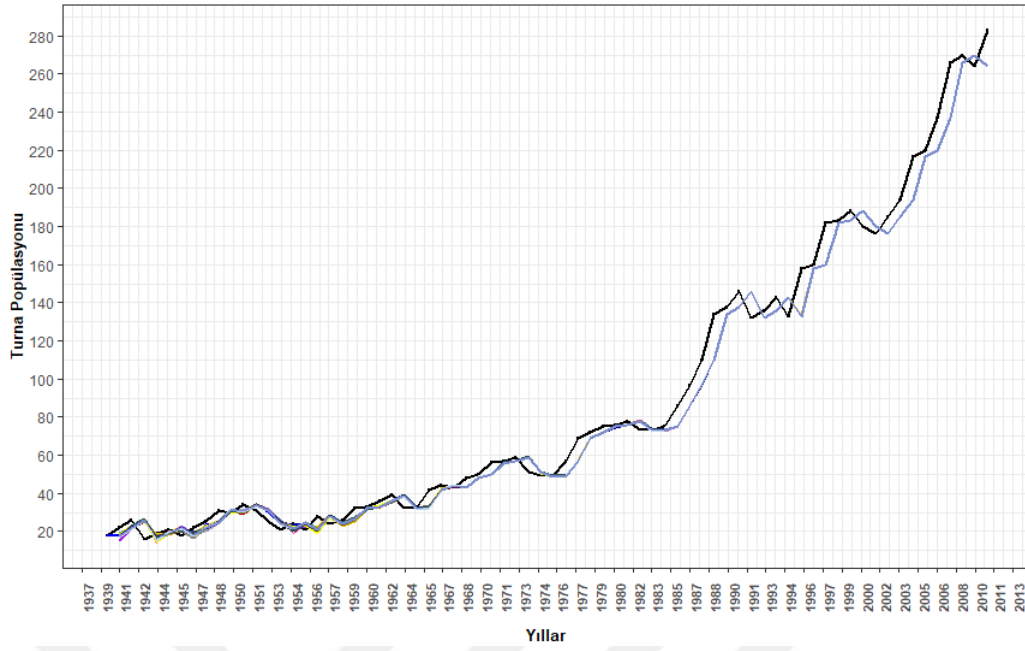
• SDD'in EM ile çözümü

SDD modelinin ilgili veri setine uygun olduğu gösterildikten sonra uygun SDD modeli için EM yöntemi ile nümerik çözümüne geçilebilir. Bu amaçla EM yönteminin hangi adımda en küçük hataya sahip olduğuna karar verilmelidir ve seçilen adım sayısı için EM yörüngeleri çizdirilmelidir. Bu amaçla, turna popülasyonu verileri ve (5.3) modelinden K=72, 144, 216 adımları için elde edilen yaklaşık EM değerlerinin ortalama kare hata değerleri (MSE) hesaplanmıştır ve Tablo 5.8'de verilmiştir.

Tablo 5.8. EM yörüngelerinin adım sayılarına göre MSE değerleri

K	MSE
72	0.8010
144	0.7185
216	0.4749

Tablo 5.8 incelendiğinde 216. adımda EM yönteminin en küçük MSE değerine sahip olduğu görülmektedir. Buradan yola çıkarak, turna popülasyonu verileri için önerilen (5.3) SDD modelinin nümerik çözümünde EM yöntemini kullanarak elde edilen $\hat{X}(t_i), i = 1, \dots, 72$ yaklaşık EM yörüngeleri Şekil 5.8'te K=216 adım büyüklüğü kullanılarak çizilmiştir. Şekil 5.8'te turna popülasyonu verileri siyah çizgi ile yaklaşık EM yörüngeleri ise renkli çizgilerle gösterilmiştir.



Şekil 5.8. *Turna popülasyonu verilerinin dağılımı ve (5.2) SDD modelinin yaklaşık EM yörüngeleri*

Şekil 5.8 incelendiğinde önerilen (5.3) SDD modelinin çözümüne ilişkin yaklaşık EM yörüngelerinden $t = t_i, i = 1, 2, \dots, 72$ anındaki doğru parçası üzerindeki değerler $(t_i, x_j^{(i)})$, $j = 0, 1, \dots, 72$; $K = 216$ olmak üzere stokastik diferansiyel dekleminin yaklaşık yörüngelerinin düğüm noktaları olduğu görülmektedir. Her bir $t = t_i, i = 0, 1, \dots, 72$ anında bu düğüm noktaları $\{\hat{X}(t_i)\}$ dizisini oluşturmaktadır. Bu dizi bir stokastik süreç ifade eder ve bu süreç $\hat{X}(t)$ 'dir.

Bu durumda uygulamanın esas kısmı olan, turna popülasyonu verileri için önerilen (5.3) SDD modelinin çözümü olan stokastik sürecin olasılık yoğunluk fonksiyonunun geliştirilen yeni yöntem ile elde edilme aşamasına geçilebilir.

• **Geliştirilen yeni yöntemin kullanılması: SDD'in çözümünün yaklaşık olasılık yoğunluk fonksiyonun GEOY ile bulunması**

Bir önceki adımda elde edilen stokastik sürecin olasılık yoğunluk fonksiyonunun bulunması ilgilenilen modelin çözümünün olasılık yoğunluk fonksiyonunun bulunmasına da bir yaklaşım oluşturmıştır. Ayrıca, GEOY ile elde edilen olasılık dağılımları da veri setinin modellenenebilir olduğunu göstermek açısından oldukça önemlidir.

Bu kısımda, 1940 ile 2011 yılları arasında turna popülasyonu verileri için önerilen (5.3) SDD modelinin yaklaşık EM yörüngelerine ait çözümü olan $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin olasılık yoğunluk fonksiyonu GEOY ile elde edilmiştir. Ayrıca, $\hat{X}(t)$ sto-

kastik sürecinin t anında aldığı değerlerin GEOY ile elde edilen $(\text{MinMaxEnt})_m$, $(\text{MaxMaxEnt})_m$ ve $(\text{MinMinxEnt})_m$, $(\text{MaxMinxEnt})_m$ dağılımları ile modellenenebilir olduğu gösterilmiştir.

Turna popülasyonu verileri için önerilen (5.3) SDD modelinin yaklaşık EM yörüngelerine ait $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için $K_{0,m}$, ($m = 1, 2, 3, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(\text{MinMaxEnt})_m$, $(\text{MaxMaxEnt})_m$ ve $(\text{MinMinxEnt})_m$, $(\text{MaxMinxEnt})_m$ dağılımlarının performansı H, D, RMSE, R^2 ve χ^2 istatistiksel kriterleri ile sırasıyla Tablo 5.9-5.10 ve Tablo 5.11-5.12’de verilmiştir. Elde edilen sonuçlar aynı zamanda, Şekil 5.9 ve Şekil 5.10’da grafiksel olarak gösterilmiştir.

Tablo 5.9. $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için $(\text{MinMaxEnt})_m$ dağılımlarının istatistiksel kriterlerine göre incelenmesi

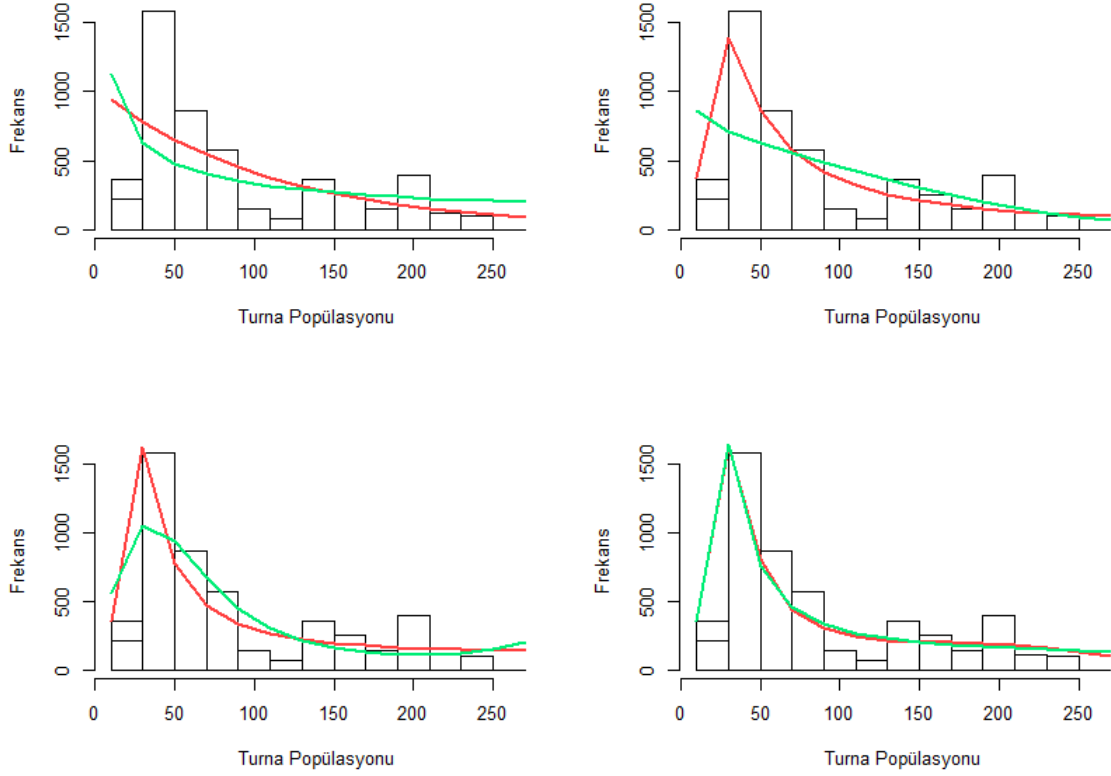
$(\text{MinMaxEnt})_m$	H	RMSE	χ^2	R^2	Moment Fonksiyonları
$(\text{MinMaxEnt})_1$	3.4667	546.88	1.4965	0.4268	$1, x$
$(\text{MinMaxEnt})_2$	3.2977	546.85	1.4844	0.8850	$1, \ln x, \ln(1 + x^2)$
$(\text{MinMaxEnt})_3$	3.2770	546.85	1.0869	0.9110	$1, \ln x, \ln^2(x), \ln(1 + x^2)$
$(\text{MinMaxEnt})_4$	3.2685	546.85	1.0868	0.9193	$1, x, x^2, \ln^2(x), \ln(1 + x^2)$

Tablo 5.10. $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için $(\text{MaxMaxEnt})_m$ dağılımlarının istatistiksel kriterlerine göre incelenmesi

$(\text{MaxMaxEnt})_m$	H	RMSE	χ^2	R^2	Moment Fonksiyonları
$(\text{MaxMaxEnt})_1$	3.5755	546.89	1.4201	0.1903	$1, \ln x$
$(\text{MaxMaxEnt})_2$	3.5010	546.88	1.4146	0.3804	$1, x^2, \ln x$
$(\text{MaxMaxEnt})_3$	3.2771	546.86	1.7980	0.7390	$1, x, x^2, \ln^2(x)$
$(\text{MaxMaxEnt})_4$	3.2767	546.85	1.0955	0.9087	$1, x, \ln x, \ln^2(x), \ln(1 + x^2)$

Tablo 5.9 ve Tablo 5.10 incelendiğinde $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin olasılık dağılımına ilişkin tüm $(\text{MinMaxEnt})_m$ dağılımları verilen istatistiksel kriterler açısından tüm $(\text{MaxMaxEnt})_m$ dağılımlarından daha iyi performans göstermiştir. Özellikle, R^2 kriterine göre $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerinin dağılımında $(\text{MinMaxEnt})_4$ dağılımının diğer $(\text{MinMaxEnt})_m$, ($m = 1, 2, 3$) ve tüm $(\text{MaxMaxEnt})_m$, ($m = 1, 2, 3, 4$) dağılımlarından daha uygun olduğu görülmektedir ve diğer istatistiksel kriterler de bu sonucu desteklemektedir. Ayrıca,

$(\text{MinMaxEnt})_m$ ve $(\text{MaxMaxEnt})_m, (m = 1, 2, 3, 4)$ dağılımlarının $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlere uyumu grafiksel olarak Şekil 5.9'te gösterilmiştir.



Şekil 5.9. $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için sırasıyla $(\text{MinMaxEnt})_m$ ve $(\text{MaxMaxEnt})_m$ dağılımlarının grafikleri

Şekil 5.9 incelendiğinde $(\text{MinMaxEnt})_m$ ve $(\text{MaxMaxEnt})_m$ dağılımlarının $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin dağılımı ile uyumlu olduğu görülmektedir.

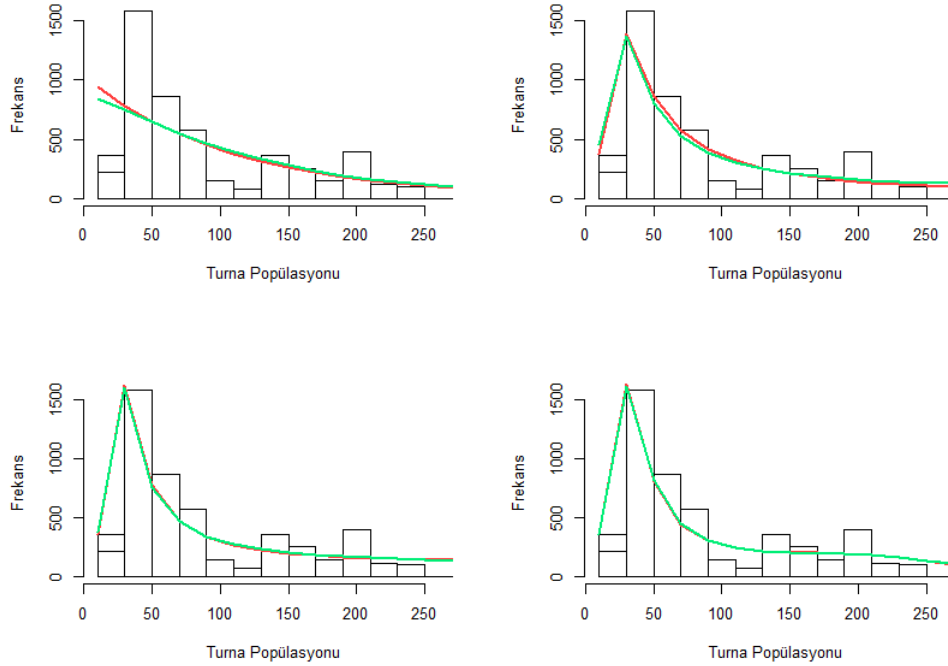
Tablo 5.11. $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için $(\text{MinMinxEnt})_m$ dağılımlarının istatistiksel kriterlerine göre incelenmesi

$(\text{MinMinxEnt})_m$	D	RMSE	χ^2	R^2	Moment Fonksiyonları
$(\text{MinMinxEnt})_1$	3.4666	546.88	0.4965	0.4268	$1, x$
$(\text{MinMinxEnt})_2$	3.2977	546.85	0.9044	0.8850	$1, \ln x$
$(\text{MinMinxEnt})_3$	3.2770	546.85	1.0868	0.9110	$1, \ln x, \ln^2(x)$
$(\text{MinMinxEnt})_4$	3.2732	546.85	1.1869	0.9193	$1, x, x^2, \ln^2(x), \ln(1 + x^2)$

Tablo 5.12. $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için $(MaxMinxEnt)_m$ dağılımlarının istatistiksel kriterlerine göre incelenmesi

$(MaxMinxEnt)_m$	D	RMSE	χ^2	R^2	Moment Fonksiyonları
$(MaxMinxEnt)_1$	3.5157	546.88	0.4128	0.4488	$1, \ln x$
$(MaxMinxEnt)_2$	3.3573	546.86	0.8156	0.8953	$1, x, \ln x$
$(MaxMinxEnt)_3$	3.2921	546.85	1.0447	0.9114	$1, x, x^2, \ln^2(x)$
$(MaxMinxEnt)_4$	3.2695	546.85	0.3899	0.9207	$1, x, \ln x, \ln^2(x), \ln(1+x^2)$

Tablo 5.11 ve Tablo 5.12 incelendiğinde $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin dağılımında tüm $(MaxMinxEnt)_m$ dağılımları verilen istatistiksel kriterler açısından tüm $(MinMinxEnt)_m$ dağılımlarından daha iyi performans göstermiştir. Özellikle, $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin dağılımında R^2 kriterine göre $(MaxMinxEnt)_4$ dağılımının diğer $(MaxMinxEnt)_m, (m = 1, 2, 3)$ ve tüm $(MinMinxEnt)_m, (m = 1, 2, 3, 4)$ dağılımlardan daha uyumlu olduğu görülmektedir ve diğer istatistiksel kriterler de bu sonucu desteklemektedir. Ayrıca, $(MinMinxEnt)_m$ ve $(MaxMinxEnt)_m, (m = 1, 2, 3, 4)$ dağılımlarının $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlere uyumu grafiksel olarak Şekil 5.10'da gösterilmiştir.



Şekil 5.10. $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için sırasıyla $(MinMinxEnt)_m$ ve $(MaxMinxEnt)_m$ dağılımlarının grafikleri

Şekil 5.10 incelendiğinde $(\text{MinMinxEnt})_m$ ve $(\text{MaxMinxEnt})_m$ dağılımlarının $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin dağılımına uyumu net bir şekilde görülmektedir.

Elde edilen karşılaştırma sonuçlarına bakıldığında turna popülasyonu veri seti için önerilen (5.3) SDD modelinin yaklaşık EM yörüngelerine ait $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerleri için $K_{0,m}$, $(m = 1, 2, 3, 4)$ moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(\text{MaxMinxEnt})_4$ dağılımı özellikle R^2 değeri açısından diğer $(\text{MaxMinxEnt})_m$, $(m = 1, 2, 3)$ ve tüm $(\text{MinMinxEnt})_m$ dağılımları ve $(\text{MinMaxEnt})_m$, $(\text{MaxMaxEnt})_m$, $m = (1, 2, 3, 4)$ dağılımlarına göre daha güçlü bir uyuma sahip olduğu görülmektedir. Bu durum, önsel dağılımın veriyi modellemedeki etkisinin bir göstergesi olarak da yorumlanabilir. Ayrıca, genelleştirilmiş MinxEnt dağılımlarının genelleştirilmiş MaxEnt dağılımlarına göre $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerine daha iyi uyum sağladığı Şekil 5.10'da görsel açıdan da net bir şekilde görülmektedir.

Son olarak, geliştirilen yeni yöntem yardımıyla turna popülasyonu veri seti için önerilen (5.3) SDD modelinin çözümü olan $\hat{X}(t)$ stokastik sürecini oluşturan rassal değişkenlerin yaklaşık olasılık yoğunluk fonksiyonu GEOY ile bulunmuştur.

Biyolojik popülasyon uygulamasında özetle aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

- $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin olasılık yoğunluk fonksiyonun nasıl elde edilebildiği gösterilmiştir.
- $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin dağılımı bilinen herhangi bir istatistiksel dağılıma benzemediği için GEOY dağılımları ile modellenenebilir olduğu gösterilmiştir.
- $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerleri modellemede genelleştirilmiş MinxEnt dağılımlarının genelleştirilmiş MaxEnt dağılımlarına göre daha esnek ve güçlü olduğu yorumu da yapılabilmektedir.

5.3. Hisse Senedi Örneği

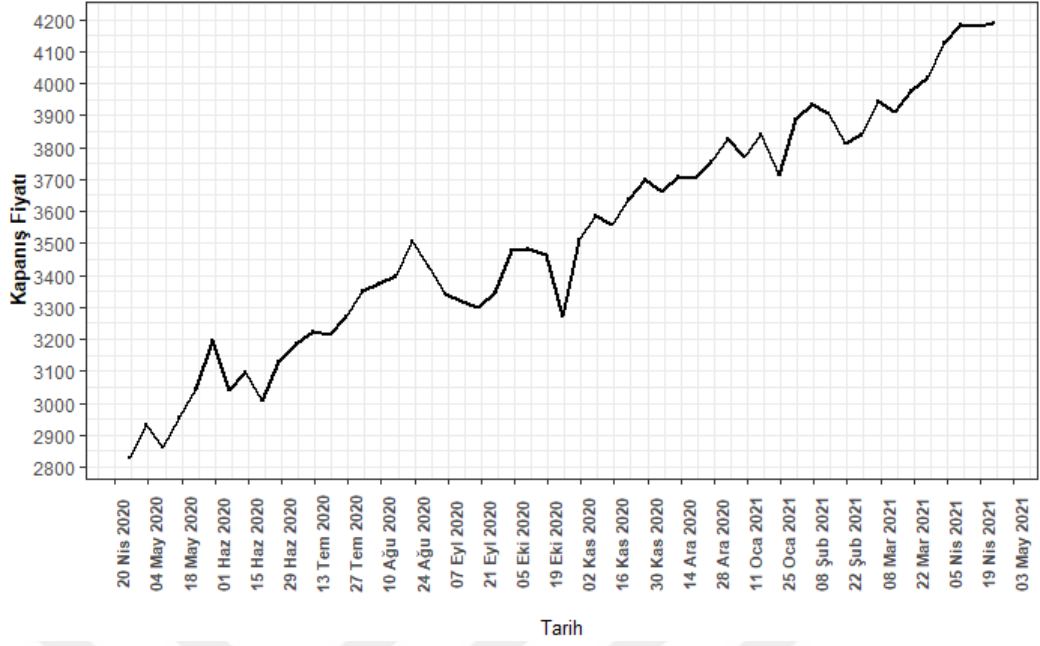
Hisse senedi fiyatlarının modelleri stokastik diferansiyel denklemlere dayanmaktadır. Genellikle hisse senedi piyasalarının standart Wiener süreci takip ettikleri kabul edilmektedir. Çünkü, borsa her akşam kapanıp sabah açıldığından hisse senedi fiyat hareketleri gerçekte sürekli değildir. Fakat sürekli parametrelili bir süreç olarak

düşünülmektedir. Bu sebeple, hisse senedi fiyatının bugünkü değeri gelecekle ilgili tahminlerde kullanılabilir olan tek geçerli bilgidir. Geleceği kesin olarak tahmin etmek zor olduğundan tahminler olasılık yoğunluk fonksiyonları ile ifade edilmelidir (Chernov vd., 2003). Bu uygulamada geliştirilen yeni yöntemin kullanımını göstermek için 1 Mayıs 2020 ile 26 Nisan 2021 tarihleri arasında New York Menkul Kıymetler Borsası'nda (NYSE) işlem gören S&P 500 hisse senedi verilerinin haftalık kapanış fiyatları veri seti (http-1) kullanılmıştır ve Şekil 5.11'de grafiksel olarak gösterilmiştir. Uygulamada kolaylık olması açısından S&P 500 hisse senedinin 1 Mayıs 2020 ile 26 Nisan 2021 tarihleri arasındaki haftalık kapanış fiyatları veri seti "S&P 500 hisse senedi verileri" olarak kullanılmıştır.

S&P 500 hisse senedi veri seti için literatürde finansal sistemlerde kullanılan Cox-Ross modeli (Dassios ve Nagaradjasarma, 2006) kullanılmıştır ve aşağıda verilmiştir:

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma \sqrt{X(t)}dW(t), \quad X_0 = 2830.71 \quad (5.4)$$

burada $X(t)$ hisse senedi kapanış fiyatı, fiyatı μ sürüklenme katsayısı σ sürecin volatilité parametresidir. Ayrıca, hisse senedi fiyatları için ele alınan modellerde hisse senedinin volatilitesi olarak da adlandırılan σ parametresi gerçekte günden güne hatta dakikadan dakikaya değişmektedir. Bu sebeple ilgili parametrenin zamanın bir fonksiyonu olarak ele alınması modelin yapısını büyük ölçüde etkilemektedir.



Şekil 5.11. S&P 500 hisse senedi verilerinin dağılımı

S&P 500 hisse senedi veri setine önerilen stokastik diferansiyel denklem modelinin çözümü olan stokastik sürecin olasılık yoğunluk fonksiyonunu elde etmek için aşağıdaki adımlar izlenmiştir:

- **Wiener sürecinin varsayımlarının testi**

S&P 500 hisse senedi verileri için önerilen (5.4) Cox-Ross modeli ile analizine geçmeden önce Wiener sürecinin varsayımlarının sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilmelidir. Bu amaçla, $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$ için $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{53}$ özelliğini sağlayan $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_{53}} - X_{t_{52}}$ şeklinde oluşturulan S&P 500 hisse senedi verilerine ait artımların dağılımının normal, durağan ve bağımsız olduğuna ilişkin varsayım sınamaları aşağıda verilmiştir:

Normallik varsayımı sınaması için S-W test istatistiğine ilişkin hipotezler:

H_0 : S&P 500 hisse senedi verileri normal dağılıma uygundur.

H_1 : S&P 500 hisse senedi verileri normal dağılıma uygun değildir.

şeklinde kurulmuştur. S-W test istatistiği 0.98'dir ve $p = 0.62 > \alpha = 0.05$ olduğundan H_0 hipotezi kabul edilir. Bu durumda, S&P 500 hisse senedi verileri normal dağılıma uygundur denir.

Durağanlık varsayımı sınaması için KPSS testine ilişkin hipotezler:

H_0 : S&P 500 hisse senedi verileri durağandır.

H_1 : S&P 500 hisse senedi verileri durağan değildir.

şeklinde kurulmuştur. KPSS test istatistiği 0.03'dir ve $p = 0.10 > \alpha = 0.05$ olduğundan H_0 hipotezi kabul edilir. Bu durumda, S&P 500 hisse senedi verileri durağandır denir.

Bağımsızlık varsayımı sınaması için Box-Pierce Q testine ilişkin hipotezler:

H_0 : S&P 500 hisse senedi verilerine ait tüm gecikmeler için otokorelasyon katsayıları sıfıra eşittir.

H_1 : S&P 500 hisse senedi verilerine ait tüm gecikmeler için otokorelasyon katsayıları sıfırdan farklıdır.

şeklinde kurulmuştur. Box-Pierce Q test istatistiği 8.72'dir ve $p = 0.06 > \alpha = 0.05$ olduğundan H_0 hipotezi kabul edilir. Bu durumda, S&P 500 hisse senedi verilerine ait tüm gecikmeler için otokorelasyon katsayıları sıfıra eşittir ve artımların bağımsızlığı sağlanmış olur.

$(X_j - X_{j-1}), j = 1, 2, \dots, 53$ serilerinin normallik, durağanlık ve bağımsızlık varsayımları sağlandığına göre, önerilen Cox-Ross stokastik diferansiyel denklem modeli (5.4) için parametre tahminine geçilebilir.

• SDD için parametre tahmini

(5.4) denkleminde verilen SDD modelinin parametrelerini tahmin etmek için en çok olabilirlik yöntemi kullanılmıştır ve tahmin ediciler sırasıyla $\mu = 0.007, \sigma = 1.407$ olarak bulunmuştur. Bu parametreler (5.4) denkleminde dikkate alındığında,

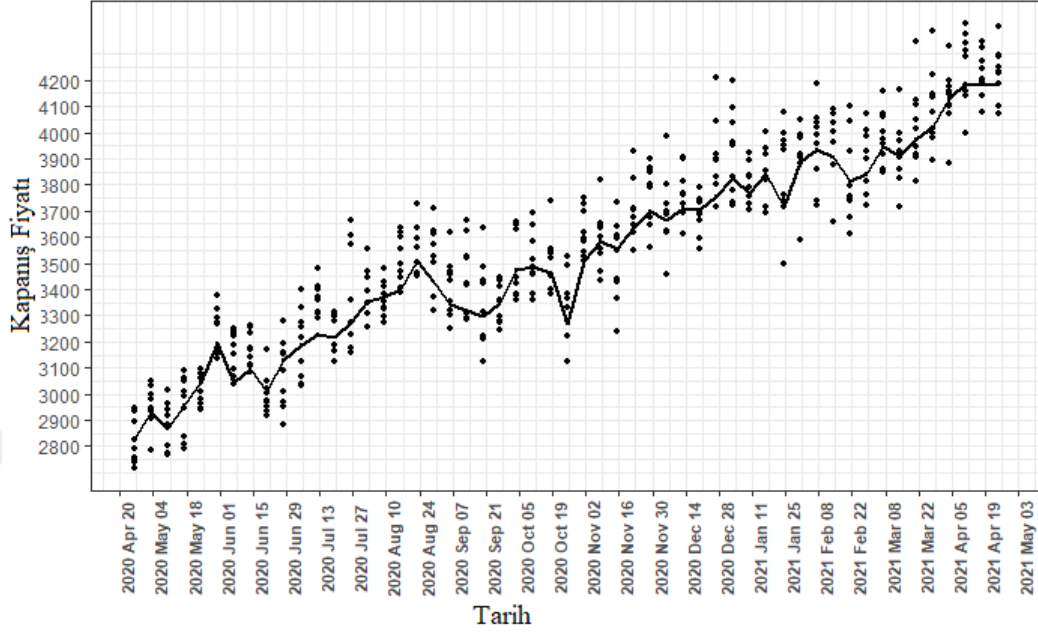
$$dX(t) = 0.007X(t)dt + 1.407\sqrt{X(t)}dW(t), \quad X_0 = 2830.71 \quad (5.5)$$

denklemini elde edilmiştir.

• SDD için uyum testi

Uyum iyiliği testini uygulamak için her bir verinin Monte-Carlo simülasyonları yapılmalıdır. Bunun için simülasyonda, 1 Mayıs 2020'de elde edilen gözlem başlangıç değeridir ve 8 Mayıs 2020'den 26 Nisan 2021'e kadar simüle edilen değerler elde edilmiştir. S&P 500 hisse senedi verilerindeki her bir nokta için M simülasyon sayısı

$\frac{N-1}{M+1} \geq 5$ eşitsizliğinden $\frac{53-1}{M+1} \geq 5$ olmak üzere $M \leq 9.4$ eşitsizliğinden $M = 9$ kabul edilmiştir.



Şekil 5.12. S&P 500 hisse senedi verileri ve simüle edilmiş değerleri

Şekil 5.12 incelendiğinde (5.5) denklemine göre simüle edilmiş veri değerleri ve orijinal veri değerleri çizilmiştir. Siyah daireler simüle edilmiş veri değerleri ve siyah çizgi orijinal veri değerlerinin dağılımını temsil etmektedir. Şekil 5.12'den birbirine yakın olan orijinal ve simüle edilmiş değerleri karşılaştırıldığında bir uyum olduğu görülmektedir. Ancak, gerçek bir uyum olup olmadığını kesin olarak anlamak için χ^2 uyum iyiliği testi kullanılmıştır. Bu teste ilişkin kurulan hipotezler:

H_0 : S&P 500 hisse senedi verileri önerilen (5.5) SDD modeline uygundur.

H_1 : S&P 500 hisse senedi verileri önerilen (5.5) SDD modeline uygun değildir.

şeklindedir. χ^2 test istatistiği 9.92'dir ve (5.5) denklemi iki parametreye sahip olduğu için, serbestlik derecesi $(M - 2) = 9 - 2 = 7$ 'dir. p-değeri $P(\chi^2(7) > 9.92) = 0.19$ ve $\alpha = 0.05$ 'den büyüktür ve H_0 hipotezi kabul edilir. Bu durumda, turna popülasyonu verileri önerilen (5.5) SDD modeline uygundur denir.

• SDD'in EM ile çözümü

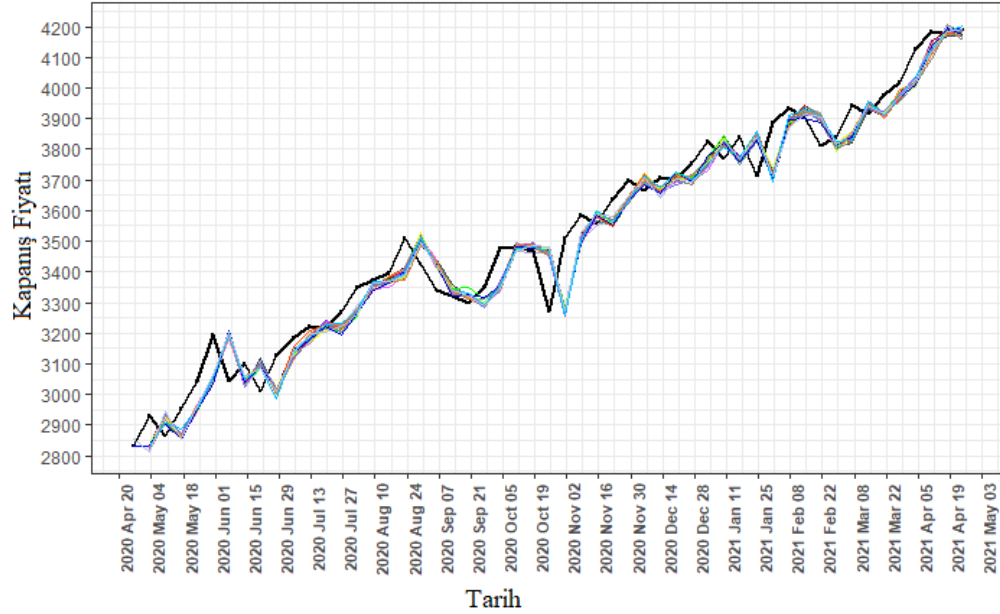
SDD modelinin ilgili veri setine uygun olduğu gösterildikten sonra uygun SDD modeli için EM yöntemi ile nümerik çözümüne geçilebilir. Bu amaçla EM yönteminin

hangi adımda en küçük hataya sahip olduğuna karar verilmesi gerekmektedir. Sonra da seçilen adım sayısı için geliştirilen yeni yöntem kullanılarak EM yörüngeleri çizdirilmiştir. Öncelikle, S&P 500 hisse senedi verileri ve (5.5) modelinden elde edilen yaklaşık EM değerleri $K=53, 106, 159$ adımları için MSE değerleri hesaplanmıştır ve Tablo 5.13'te verilmiştir.

Tablo 5.13. *EM yörüngelerinin adım sayılarına göre MSE değerleri*

K	MSE
53	1.985
106	1.905
159	1.965

Tablo 5.13 incelendiğinde 106. adımda EM yönteminin en küçük MSE değerine sahip olduğu görülmektedir. Buradan yola çıkarak, S&P 500 hisse senedi verileri için önerilen (5.5) SDD modelinin nümerik çözümünde EM yöntemini kullanarak elde edilen $\hat{X}(t_i), i = 1, \dots, 53$ yaklaşık EM yörüngeleri Şekil 5.13'de $K=106$ adım büyüklüğü kullanılarak çizilmiştir. Şekil 5.13'te S&P 500 hisse senedi verileri siyah çizgi ile yaklaşık EM yörüngeleri ise renkli çizgilerle gösterilmiştir.



Şekil 5.13. *S&P 500 hisse senedi verilerinin dağılımı ve (5.4) SDD modelinin yaklaşık EM yörüngeleri*

Şekil 5.13 incelendiğinde önerilen (5.5) SDD modelinin çözümüne ilişkin yak-

laşık EM yörüngelerinden $t = t_i, i = 1, 2, \dots, 53$ anındaki doğru parçası üzerindeki değerler $(t_i, x_j^{(i)})$, $j = 0, 1, \dots, 53$; $K = 106$ olmak üzere stokastik diferansiyel dekleminin yaklaşık yörüngelerinin düğüm noktaları olduğu görölmektedir. Yani, verilen bir veri setinden başlayarak EM yöntemi ile SDD'lerin çeşitli yörüngeleri oluşturulmuştur. Elde edilen yörüngeler her bir t anı için bir rassal değişken elde edilmesine olanak sağlamıştır. Bu durumda, her bir $t = t_i, i = 0, 1, \dots, 53$ anında bu düğüm noktaları $\{\hat{X}(t_i)\}$ rassal değişkenler dizisini oluşturmaktadır. Bu dizi bir stokastik süreç ifade eder ve bu süreç $\hat{X}(t)$ 'dir.

Bu durumda uygulamanın esas kısmı olan, S&P 500 hisse senedi verileri önerilen (5.5) SDD modelinin çözümü olan stokastik sürecin olasılık yoğunluk fonksiyonun geliştirilen yeni yöntem ile elde edilme aşamasına geçilebilir.

• **Geliştirilen yeni yöntemin kullanılması: SDD'in çözümünün yaklaşık olasılık yoğunluk fonksiyonun GEOY ile bulunması**

Bir önceki adımda elde edilen stokastik sürecin yaklaşık olasılık yoğunluk fonksiyonunun bulunması ilgilenilen modelin çözümünün olasılık yoğunluk fonksiyonun bulunmasına da bir yaklaşım oluşturmuştur. Ayrıca, GEOY ile elde edilen olasılık dağılımları da ilgili veri setinin modellenenebilir olduğunu göstermek açısından oldukça önemlidir.

Bu adımda, S&P 500 hisse senedi verileri için önerilen (5.5) SDD modelinin yaklaşık EM yörüngelerine ait $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin olasılık yoğunluk fonksiyonu GEOY ile elde edilmiştir. Ayrıca, GEOY ile elde edilen $(\text{MinMaxEnt})_m$, $(\text{MaxMaxEnt})_m$ ve $(\text{MinMinxEnt})_m$, $(\text{MaxMinxEnt})_m$ dağılımları ile $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin modellenenebilir olduğu gösterilmiştir.

S&P 500 hisse senedi verileri için önerilen (5.5) SDD modelinin yaklaşık EM yörüngelerine ait $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için $K_{0,m}$, ($m = 1, 2, 3, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(\text{MinMaxEnt})_m$, $(\text{MaxMaxEnt})_m$ ve $(\text{MinMinxEnt})_m$, $(\text{MaxMinxEnt})_m$ dağılımlarının performansı H, D, RMSE, R^2 ve χ^2 istatistiksel kriterleri ile sırasıyla Tablo 5.14-5.15 ve Tablo 5.16-5.17'de verilmiştir. Elde edilen sonuçlar aynı zamanda şekil 5.14 ve şekil 5.15'te grafiksel olarak gösterilmiştir.

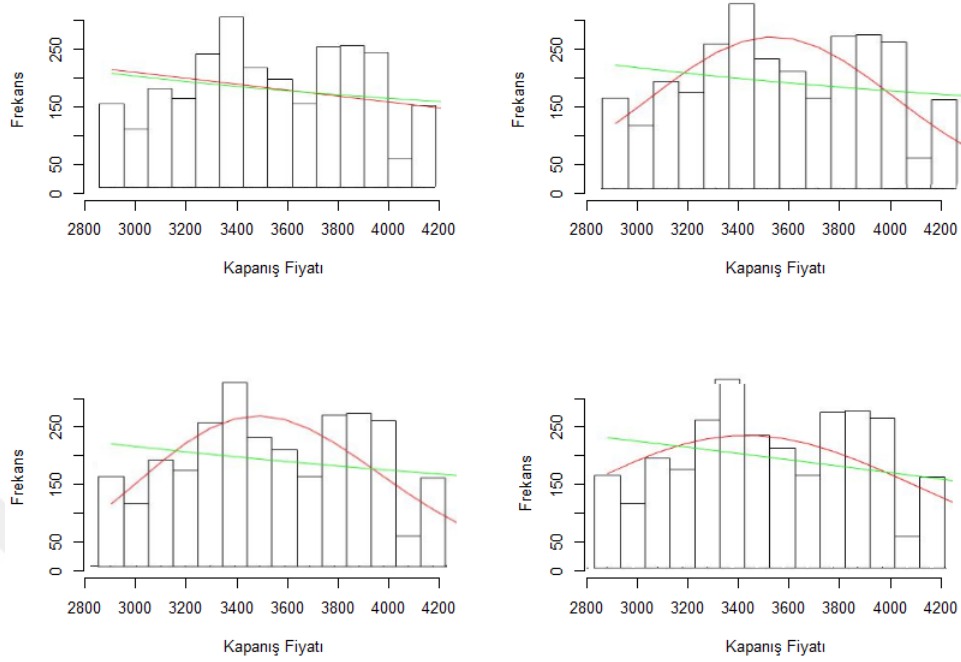
Tablo 5.14. $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için $(\text{MinMaxEnt})_m$ dağılımlarının istatistiksel kriterlerine göre incelenmesi

$(\text{MinMaxEnt})_m$	H	RMSE	χ^2	R^2	Moment Fonksiyonları
$(\text{MinMaxEnt})_1$	3.8959	0.2288	0.1985	0.0568	$1, x^2$
$(\text{MinMaxEnt})_2$	3.8200	0.0211	0.1220	0.4942	$1, x, x^2$
$(\text{MinMaxEnt})_3$	3.8240	0.0214	0.1259	0.4817	$1, x, \ln x, \ln(1 + x^2)$
$(\text{MinMaxEnt})_4$	3.8786	0.0228	0.1346	0.4757	$1, x, \ln x, \ln^2(x), \ln(1 + x^2)$

Tablo 5.15. $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için $(\text{MaxMaxEnt})_m$ dağılımlarının istatistiksel kriterlerine göre incelenmesi

$(\text{MaxMaxEnt})_m$	H	RMSE	χ^2	R^2	Moment Fonksiyonları
$(\text{MaxMaxEnt})_1$	3.9011	0.0292	4.7912	0.0304	$1, \ln(1 + x^2)$
$(\text{MaxMaxEnt})_2$	3.9011	0.0292	4.7912	0.0304	$1, \ln x, \ln(1 + x^2)$
$(\text{MaxMaxEnt})_3$	3.9008	0.0291	4.7017	0.0386	$1, \ln x, \ln^2(x), \ln(1 + x^2)$
$(\text{MaxMaxEnt})_4$	3.8959	0.0287	4.0573	0.0614	$1, x, x^2, \ln x, \ln(1 + x^2)$

Tablo 5.14 ve Tablo 5.15 incelendiğinde $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerinin dağılımı için verilen tüm istatistiksel kriterler açısından tüm $(\text{MinMaxEnt})_m$ dağılımı tüm $(\text{MaxMaxEnt})_m$ dağılımından daha iyi performans göstermiştir. Özellikle R^2 kriterine göre $(\text{MinMaxEnt})_2$ dağılımı, diğer $(\text{MinMaxEnt})_m$, $(m = 1, 3, 4)$ ve tüm $(\text{MaxMaxEnt})_m$, $(m = 1, 2, 3, 4)$ dağılımlarından daha uygun olduğu görülmektedir ve bu sonuç diğer istatistiksel kriterler ile de desteklenmektedir. Ayrıca, $(\text{MinMaxEnt})_m$ ve $(\text{MaxMaxEnt})_m$, $(m = 1, 2, 3, 4)$ dağılımlarının $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlere uyumu grafiksel olarak Şekil 5.14'te gösterilmiştir.



Şekil 5.14. $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için sırasıyla $(MinMaxEnt)_m$ ve $(MaxMaxEnt)_m$ dağılımlarının grafikleri

Şekil 5.14 incelendiğinde $K_{0,m}$, ($m = 1, 2, 3, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(MinMaxEnt)_m$ ve $(MaxMaxEnt)_m$ dağılımlarının $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin dağılımına uyumlu olduğu görülmektedir.

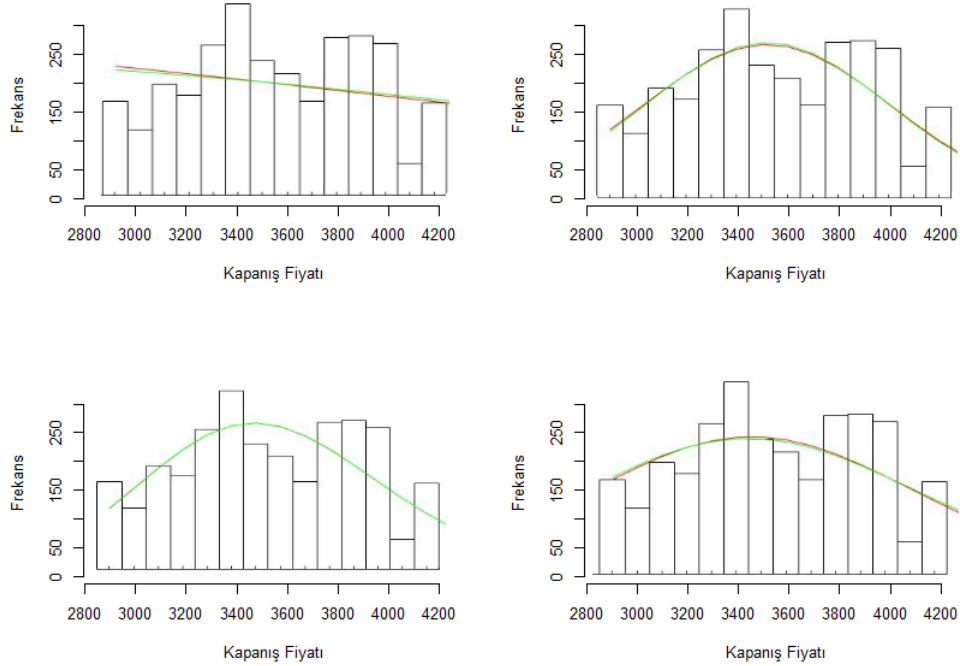
Tablo 5.16. $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için $(MinMinxEnt)_m$ dağılımlarının istatistiksel kriterlerine göre incelenmesi

$(MinMinxEnt)_m$	D	RMSE	χ^2	R^2	Moment Fonksiyonları
$(MinMinxEnt)_1$	0.1443	0.0287	0.1961	0.0625	$1, x$
$(MinMinxEnt)_2$	0.1009	0.0210	0.1206	0.4965	$1, \ln^2(x), \ln(1 + x^2)$
$(MinMinxEnt)_3$	0.2886	0.0214	0.1258	0.4819	$1, x, \ln^2(x), \ln(1 + x^2)$
$(MinMinxEnt)_4$	0.1054	0.0228	0.1351	0.4885	$1, x^2, \ln x, \ln^2(x), \ln(1 + x^2)$

Tablo 5.17. $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için $(MaxMinxEnt)_m$ dağılımlarının istatistiksel kriterlerine göre incelenmesi

$(MaxMinxEnt)_m$	D	RMSE	χ^2	R^2	Moment Fonksiyonları
$(MaxMinxEnt)_1$	0.9539	0.0286	4.5395	0.0765	$1, \ln(1 + x^2)$
$(MaxMinxEnt)_2$	0.2348	0.0211	0.9524	0.4941	$1, x, x^2$
$(MaxMinxEnt)_3$	0.2901	0.0214	1.1172	0.4818	$1, x, x^2, \ln x$
$(MaxMinxEnt)_4$	0.1176	0.0212	1.0776	0.4880	$1, x, \ln x, \ln^2(x), \ln(1 + x^2)$

Tablo 5.16 ve Tablo 5.17 incelendiğinde $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerinin dağılımı için verilen tüm istatistiksel kriterler açısından tüm $(MinMinxEnt)_m$ dağılımı tüm $(MaxMinxEnt)_m$ dağılımından daha iyi performans göstermiştir. Özellikle R^2 kriterine göre $(MinMinxEnt)_2$ dağılımı, diğer $(MinMinxEnt)_m, (m = 1, 3, 4)$ ve tüm $(MaxMinxEnt)_m, (m = 1, 2, 3, 4)$ dağılımlarından daha uygun olduğu görülmektedir ve bu sonuç diğer istatistiksel kriterler ile de desteklenmektedir. Ayrıca, $(MinMinxEnt)_m$ ve $(MaxMinxEnt)_m, (m = 1, 2, 3, 4)$ dağılımlarının $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlere uyumu grafiksel olarak Şekil 5.15'te gösterilmiştir.



Şekil 5.15. $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için sırasıyla $(MinMinxEnt)_m$ ve $(MaxMinxEnt)_m$ dağılımlarının grafikleri

Şekil 5.15 incelendiğinde $(\text{MinMinxEnt})_m$ ve $(\text{MaxMinxEnt})_m$ dağılımlarının $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin dağılımına uyumu net bir şekilde görülmektedir.

Elde edilen karşılaştırma sonuçlarına bakıldığında S&P 500 hisse senedi verileri için önerilen (5.5) SDD modelinin yaklaşık EM yörüngelerine ait $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerinin dağılımı için $K_{0,m}$, $(m = 1, 2, 3, 4)$ moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(\text{MinMinxEnt})_2$ dağılımına özellikle R^2 değeri açısından diğer $(\text{MinMinxEnt})_m$, $(m = 1, 3, 4)$ ve tüm $(\text{MaxMinxEnt})_m$, $(\text{MinMaxEnt})_m$, $(\text{MaxMaxEnt})_m$, $(m = 1, 2, 3, 4)$ dağılımlarından daha güçlü bir uyuma sahip olduğu görülmektedir ve bu sonuç diğer istatistiksel kriter ile de desteklenmektedir. Ayrıca, genelleştirilmiş MinxEnt dağılımlarının genelleştirilmiş MaxEnt dağılımlarına göre $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerini daha iyi modellediği Şekil 5.15'te görsel açıdan da net bir şekilde görülmektedir.

Son olarak, geliştirilen yeni yöntem yardımıyla S&P 500 hisse senedi verileri için önerilen (5.5) modelinin çözümü olan $\hat{X}(t)$ stokastik sürecini oluşturan rassal değişkenlerin yaklaşık olasılık yoğunluk fonksiyonu GEOY ile bulunmuştur.

Hisse senedi uygulamasında özetle aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

- $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin olasılık yoğunluk fonksiyonun nasıl elde edilebildiği gösterilmiştir.
- $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin dağılımı bilinen herhangi bir dağılıma benzemediği için GEOY dağılımları ile modellenebilir olduğu gösterilmiştir.
- Genelleştirilmiş MinxEnt dağılımlarının genelleştirilmiş MaxEnt dağılımlarına göre $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerleri modellemede daha esnek ve güçlü olduğu yorumu yapılabilmektedir.

5.4. Covid-19 Örneği

Dünya Sağlık Örgütü (WHO) bir pandemi olan Covid-19'u (koronavirüs hastalığı 2019) yeni bir hastalığın dünya çapında yayılması olarak tanımlamıştır. Covid-19 çok hızlı ve kolayca yayılabilen bir virüs olduğundan Aralık 2019'dan bu yana 255 milyondan fazla insanın enfeksiyonuna ve 5 milyondan fazla ölüme neden olmuştur (<http://2>). Covid-19 gibi önemli salgınların ekonomik ve sosyal kalkınma üzerinde

derin bir tarihsel etkisi vardır, bu sebeple epidemik salgınlar üzerinde yapılan araştırmalar salgının seyrini yorumlama açısından önemli bulunmaktadır. Bu amaçla, literatürde salgınları geliştirmek ve tahmin etmek için bazı stokastik diferansiyel denklem modelleri bulunmaktadır (Rihan vd. 2020; Simha vd., 2020; Yanev vd., 2020; Mahrouf, 2021).

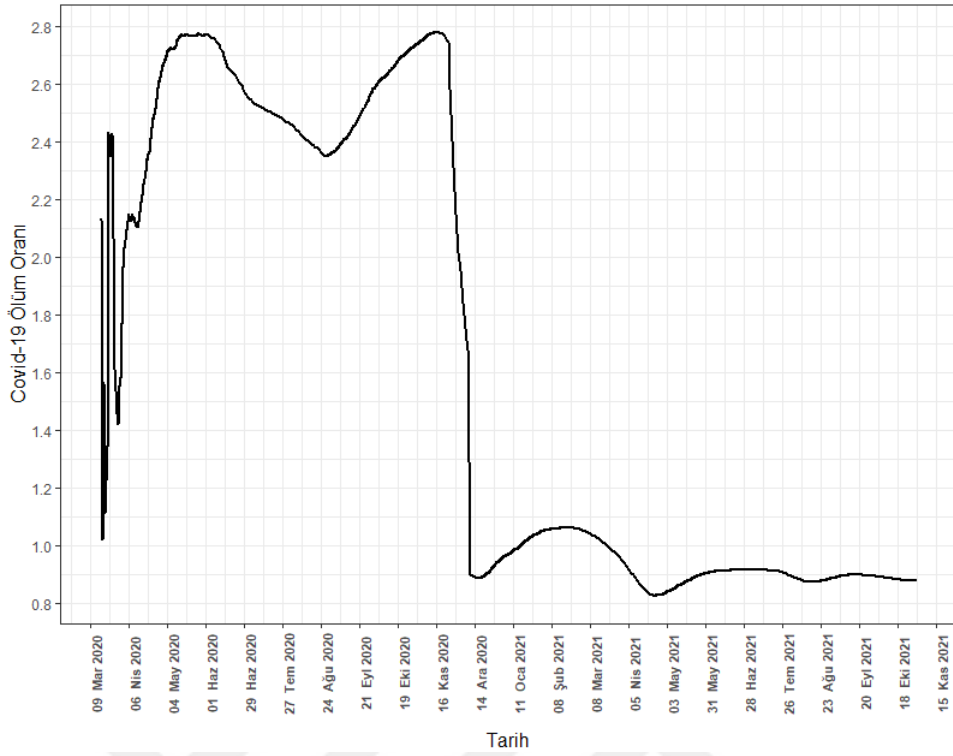
Bu uygulamada epidemik salgınlarda SDD modelinin nasıl uygulandığını göstermek için 17 Mart 2020 ile 31 Ekim 2021 tarihleri arasında Türkiye'deki Covid-19 ölüm oranı verileri kullanılmıştır (http-3) ve Şekil 5.16'da her bir güne ait Covid-19 ölüm oranı görsel olarak verilmiştir. Ham ölüm oranını tanımlamak gerekirse belirli bir hastalıktan ölen tüm nüfus arasındaki payı ölçer. Hastalıktan ölenlerin sayısının toplam nüfusa bölünmesiyle hesaplanmaktadır. Bu uygulama için kullanılan ham ölüm oranı verisi her 1000 kişi başına Covid-19 nedeniyle ölen insan sayısıdır. Örneğin, 1000 nüfusta 10 ölüm için ham ölüm oranı $[10 / 1000]$ veya %1'dir (http-4).

Covid-19 ham ölüm oranı dinamiğini belirlemek için literatürde epidemik olaylarda yaygın olarak tercih edilen stokastik Richards büyüme modeli (Panik, 2017) kullanılmıştır ve aşağıda verilmiştir:

$$dX(t) = \beta X(t) \left[1 - \left(\frac{X(t)}{K} \right)^r \right] dt + \gamma X(t) dW(t) \quad (5.6)$$

$$X_0 = X(0)$$

burada $X(t)$ Covid-19 ölüm oranı, K taşıma kapasitesi, β büyüme hızı, r esneklik ölçüsü ve γ çarpımsal gürültü terimidir.



Şekil 5.16. Covid-19 ölüm oranı verilerinin dağılımı

Covid-19 ölüm oranı veri setine önerilen stokastik diferansiyel denklem modelinin çözümünün olasılık yoğunluk fonksiyonunu elde etmek için aşağıdaki adımlar izlenmiştir.

• **Wiener sürecinin varsayımlarının testi**

Önerilen stokastik Richards büyüme modelinin Covid-19 ölüm oranı veri setine için analizine geçmeden önce Wiener sürecinin varsayımlarının sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilmelidir. Bu amaçla, $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_{594}\}$ için $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{594}$ özelliğini sağlayan $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_{594}} - X_{t_{593}}$ şeklinde oluşturulan Covid-19 ölüm oranı verilerine ait artımların dağılımının normal, durağan ve bağımsız olduğuna ilişkin varsayım sınamaları aşağıda verilmiştir:

Normallik varsayımı sınaması için kullanılan S-W test için kurulan hipotezler:

H_0 : Covid-19 ölüm oranı verileri normal dağılıma uygundur.

H_1 : Covid-19 ölüm oranı verileri normal dağılıma uygun değildir.

şeklindedir. S-W test istatistiği 0.88'dir ve $p = 0.07 > \alpha = 0.05$ olduğundan H_0 hipotezi kabul edilir. Bu durumda, Covid-19 ölüm oranı verileri normal dağılıma uyguna oluğu sonucu elde edilmiş olur.

Durağanlık varsayımı sınaması için KPSS testi kurulan hipotezler:

H_0 : Covid-19 ölüm oranı verileri durağandır.

H_1 : Covid-19 ölüm oranı verileri durağan değildir.

şeklindedir. KPSS test istatistiği 0.27'dir ve $p = 0.10 > \alpha = 0.05$ olduğundan H_0 hipotezi kabul edilir. Bu durumda, Covid-19 ölüm oranı verilerinin durağan olduğu sonucuna varılır.

Bağımsızlık varsayımı için Box-Pierce Q testi kurulan hipotezler:

H_0 : Covid-19 ölüm oranı verilerine ait tüm gecikmeler için otokorelasyon katsayıları sıfıra eşittir.

H_1 : Covid-19 ölüm oranı verilerine ait tüm gecikmeler için otokorelasyon katsayıları sıfırdan farklıdır.

şeklindedir. Box-Pierce Q test istatistiği 2.97'dir ve $p = 0.08 > \alpha = 0.05$ olduğundan H_0 hipotezi kabul edilir. Bu durumda, Covid-19 ölüm oranı verilerine ait tüm gecikmeler için otokorelasyon katsayıları sıfıra eşittir ve artımların bağımsızlığı sağlanmış olur.

$(X_j - X_{j-1}), j = 1, 2, \dots, 594$ serilerinin normallik, durağanlık ve bağımsızlık varsayımları sağlandığına göre, önerilen stokastik Richards büyüme modeli için parametre tahminine geçilebilir.

• SDD için parametre tahmini

(5.6) denkleminde verilen SDD modelinin parametrelerini tahmin etmek için en çok olabilirlik yöntemi kullanılmıştır ve tahmin ediciler sırasıyla tahmin ediciler sırasıyla $K = 967.48, \beta = 0.390, r = 0.006, \gamma = 0.074$ olarak bulunmuştur. Bu parametreler (5.6) denkleminde dikkate alındığında,

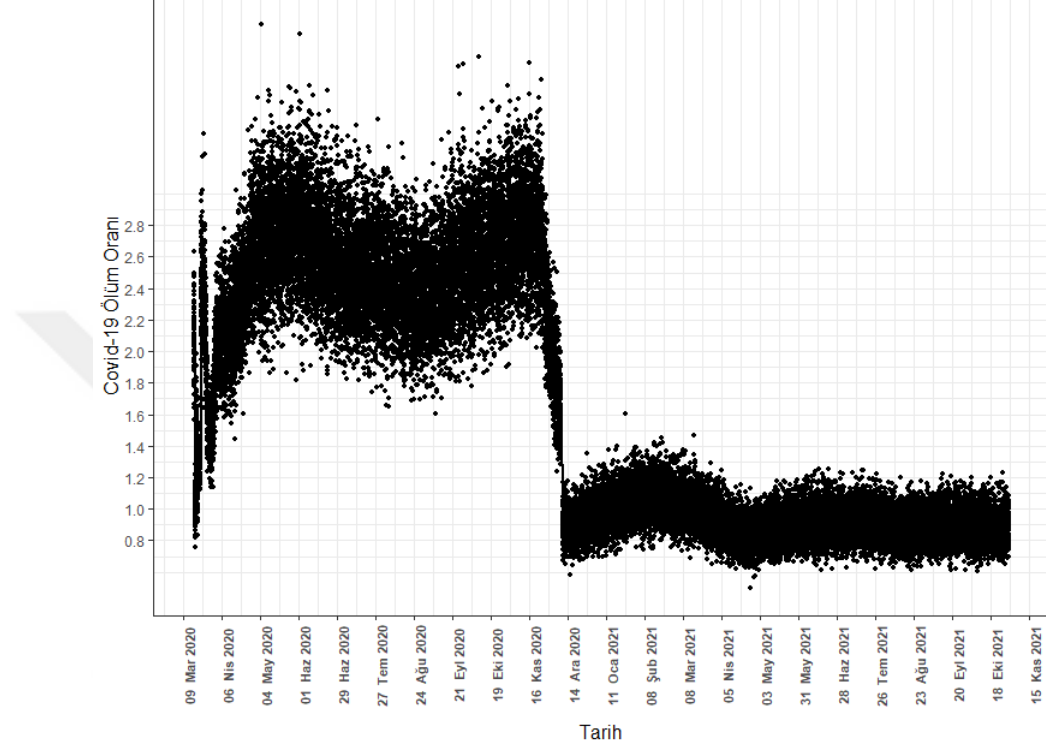
$$X(t) = 0.390X(t) \left[1 - \left(\frac{X(t)}{967.48} \right)^{0.006} \right] dt + 0.074X(t)dW(t) \quad (5.7)$$

denklemini elde edilmiştir.

• SDD için uyum testi

Uyum iyiliği testini uygulamak için her verinin Monte-Carlo simülasyonları yapılmalıdır. Bunun için simülasyonda, 17 Mart 2020'de elde edilen gözlem başlangıç

değeridir ve 18 Mart 2020'den 31 Ekim 2021'e kadar simüle edilen değerler elde edilmiştir. Covid-19 ölüm oranı verilerindeki her bir nokta için M simülasyon sayısı $\frac{N-1}{M+1} \geq 5$ eşitsizliğinden $\frac{594-1}{M+1} \geq 5$ olmak üzere $M \leq 117.6$ eşitsizliğinden $M = 117$ kabul edilmiştir.



Şekil 5.17. Covid-19 ölüm oranı verileri ve simüle edilmiş değerleri

Şekil 5.17 incelendiğinde (5.7) denklemine göre simüle edilmiş veri değerleri ve orijinal veri değerleri çizilmiştir. Siyah daireler simüle edilmiş veri değerleri ve siyah çizgi orijinal veri değerlerini temsil etmektedir. Şekil 5.17'den birbirine yakın olan orijinal ve simüle edilmiş değerler karşılaştırıldığında bir uyum olduğu görülmektedir. Gerçek bir uyum olup olmadığını kesin olarak anlamak için χ^2 uyum iyiliği testi kullanılmıştır ve bu teste ilişkin hipotezler:

H_0 : Covid-19 ölüm oranı verileri önerilen (5.7) SDD modeline uygundur.

H_1 : Covid-19 ölüm oranı verileri önerilen (5.7) SDD modeline uygun değildir.

şeklinde kurulmuştur. χ^2 test istatistiği 10.25'dir ve $p=0.27 > \alpha = 0.05$ olduğundan H_0 hipotezi kabul edilir. Bu durumda, Covid-19 ölüm oranı verileri önerilen (5.7) SDD modeline uygun olduğu sonucuna varılır.

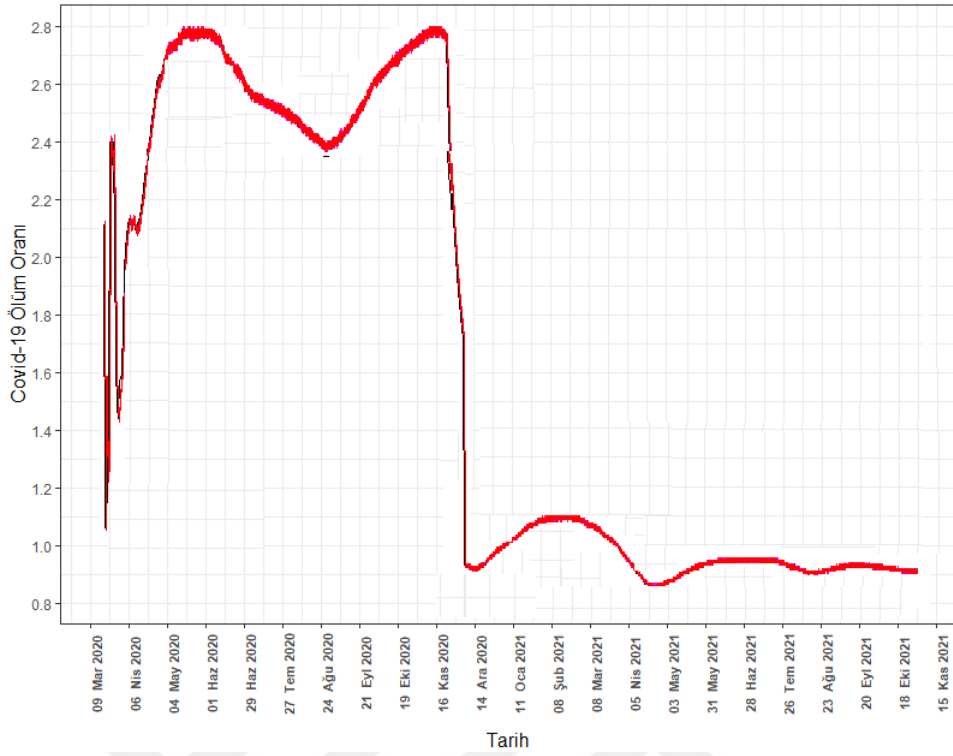
• SDD’in EM ile çözümü

SDD modelinin ilgili veri setine uygun olduğu gösterildikten sonra uygun SDD modeli için EM yöntemi ile nümerik çözümüne geçilebilir. Bu amaçla EM yönteminin hangi adımda en küçük hataya sahip olduğuna karar verilmesi gerekmektedir. Sonrasında ise seçilen adım sayısı için geliştirilen yeni yöntem kullanılarak EM yörüngeleri çizdirilmiştir. Öncelikle, Covid-19 ölüm oranı verileri ve (5.7) modelinden elde edilen yaklaşık EM değerleri $K=594, 1188, 1782$ adımları için MSE değerleri hesaplanmıştır ve Tablo 5.18’de verilmiştir.

Tablo 5.18. *EM yörüngelerinin adım sayılarına göre MSE değerleri*

K	MSE
594	0.0026
1188	0.0025
1782	0.0024

Tablo 5.18 incelendiğinde 1782. adımda EM yönteminin en küçük MSE değerine sahip olduğu görülmektedir. Buradan yola çıkarak, Covid-19 ölüm oranı verileri için önerilen (5.7) SDD modelinin nümerik çözümünde EM yöntemini kullanarak yaklaşık EM yörüngeleri Şekil 5.18’te $K=1782$ adım büyüklüğü kullanılarak çizilmiştir. Burada, önerilen (5.7) SDD modeline ilişkin yaklaşık EM yörüngelerinden $t = t_i, i = 1, 2, \dots, 594$ noktalarındaki $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin değerleri elde edilmiştir. Yani, verilen bir veri setinden başlayarak EM yöntemi ile SDD’lerin çeşitli yörüngeleri oluşturulmuştur. Elde edilen yörüngeler sabit zamana göre rassal değişken elde edilmesine olanak sağlamıştır.



Şekil 5.18. Covid-19 ölüm oranı verilerinin dağılımı ve SDD modelinin yaklaşık EM yörüngeleri

Şekil 5.18 incelendiğinde önerilen (5.7) SDD modelinin çözümüne ilişkin yaklaşık EM yörüngelerinden $t = t_i$, $i = 1, 2, \dots, 594$ anındaki doğru parçası üzerindeki değerler $(t_i, x_j^{(i)})$, $j = 0, 1, \dots, 594$; $K = 1782$ olmak üzere stokastik diferansiyel denkleminin yaklaşık yörüngelerinin düğüm noktaları olduğu görülmektedir. Yani, verilen bir veri setinden başlayarak EM yöntemi ile SDD'lerin çeşitli yörüngeleri oluşturulmuştur. Elde edilen yörüngeler her bir t anı için bir rassal değişken elde edilmesine olanak sağlamıştır. Bu durumda, her bir $t = t_i$, $i = 0, 1, \dots, 594$ anında bu düğüm noktaları $\{\hat{X}(t_i)\}$ rassal değişkenler dizisini oluşturmaktadır. Bu dizi bir stokastik süreç ifade eder ve bu süreç $\hat{X}(t)$ 'dir.

Bu durumda uygulamanın esas kısmı olan, Covid-19 ölüm oranı verileri için önerilen (5.7) SDD modelinin çözümü olan stokastik sürecin olasılık yoğunluk fonksiyonun geliştirilen yeni yöntem ile elde edilme aşamasına geçilebilir.

• **Geliştirilen yeni yöntemin kullanılması: SDD'in çözümünün yaklaşık olasılık yoğunluk fonksiyonun GEOY ile bulunması**

Bir önceki adımda elde edilen stokastik sürecin olasılık yoğunluk fonksiyonunun bulunması ilgilenilen modelin $X(t)$ çözümünün olasılık yoğunluk fonksiyonun

bulunmasına da bir yaklaşım oluşturmıştır. Ayrıca, GEOY ile elde edilen olasılık dağılımları da ilgili veri setinin modellenenebilir olduğunu göstermek açısından oldukça önemlidir.

Bu adımda, Covid-19 ölüm oranı verileri için önerilen (5.7) SDD modelinin yaklaşık EM yörüngelerine ait $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin olasılık yoğunluk fonksiyonu GEOY ile elde edilmiştir. Ayrıca, GEOY ile elde edilen $(\text{MinMaxEnt})_m$, $(\text{MaxMaxEnt})_m$ ve $(\text{MinMinxEnt})_m$, $(\text{MaxMinxEnt})_m$ dağılımları ile $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin modellenenebilir olduğu gösterilmiştir.

Covid-19 ölüm oranı verileri için önerilen (5.7) SDD modelinin yaklaşık EM yörüngelerine ait $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için $K_{0,m}$, ($m = 1, 2, 3, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(\text{MinMaxEnt})_m$, $(\text{MaxMaxEnt})_m$ ve $(\text{MinMinxEnt})_m$, $(\text{MaxMinxEnt})_m$ dağılımlarının performansı H, D, RMSE, R^2 ve χ^2 istatistiksel kriterleri ile sırasıyla Tablo 5.19-5.20 ve Tablo 5.21-5.22’de verilmiştir. Elde edilen sonuçlar aynı zamanda, Şekil 5.19 ve Şekil 5.20’de grafiksel olarak da gösterilmiştir.

Tablo 5.19. $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için $(\text{MinMaxEnt})_m$ dağılımlarının istatistiksel kriterlerine göre incelenmesi

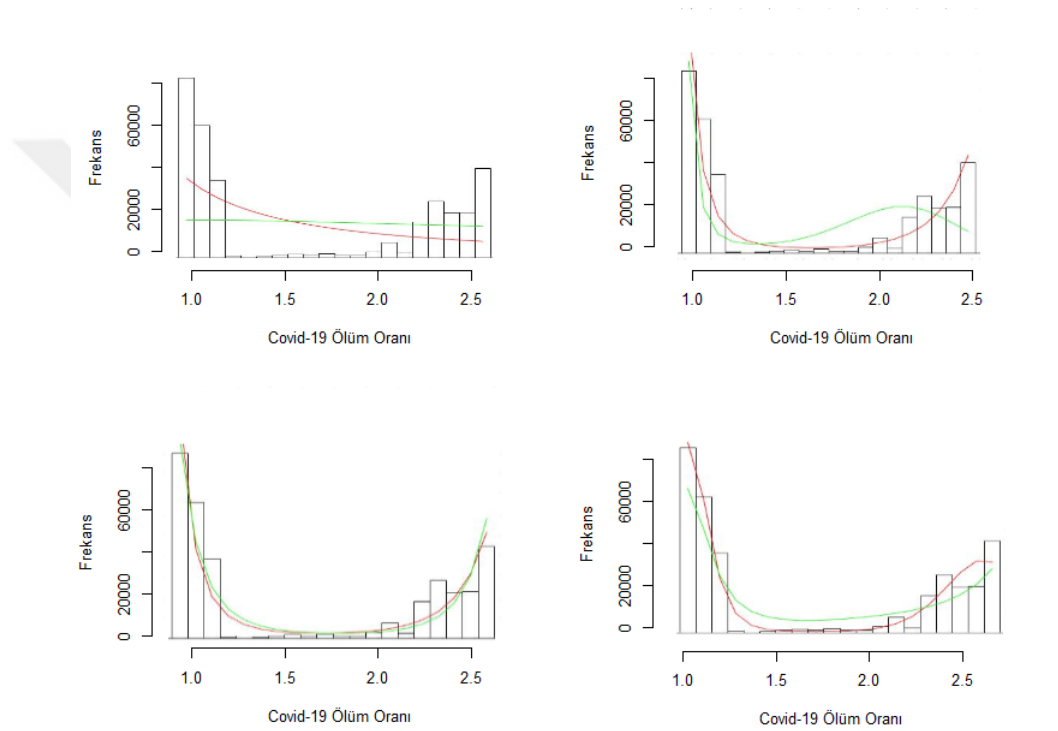
$(\text{MinMaxEnt})_m$	H	RMSE	χ^2	R^2	Moment Fonksiyonları
$(\text{MinMaxEnt})_1$	4.1576	0.0594	1.4077	0.2867	$1, \ln x$
$(\text{MinMaxEnt})_2$	3.3590	0.0292	0.2683	0.8366	$1, x, \ln x$
$(\text{MinMaxEnt})_3$	3.3562	0.0274	0.2596	0.8526	$1, x, \ln x, \ln^2(x)$
$(\text{MinMaxEnt})_4$	3.2583	0.0163	0.1191	0.9441	$1, x, x^2, \ln x \ln^2(x),$

Tablo 5.20. $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için $(\text{MinMaxEnt})_m$ dağılımlarının istatistiksel kriterlerine göre incelenmesi

$(\text{MaxMaxEnt})_m$	H	RMSE	χ^2	R^2	Moment Fonksiyonları
$(\text{MaxMaxEnt})_1$	4.3095	0.0688	0.9332	0.0031	$1, \ln^2(x)$
$(\text{MaxMaxEnt})_2$	3.8167	0.0468	1.1299	0.5399	$1, x^2, \ln^2(x)$
$(\text{MaxMaxEnt})_3$	3.3902	0.0259	1.7980	0.8612	$1, x, x^2 \ln(1 + x^2)$
$(\text{MaxMaxEnt})_4$	3.8660	0.0268	0.5812	0.9414	$1, x, \ln x, \ln^2(x), \ln(1 + x^2)$

Tablo 5.19 ve Tablo 5.20 incelendiğinde $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin dağılımı için tüm $(\text{MinMaxEnt})_m$ dağılımları verilen istatistiksel kriter-

ler açısından tüm $(\text{MaxMaxEnt})_m$ dağılımlarından daha iyi performans göstermiştir. Özellikle, R^2 kriterine göre $(\text{MinMaxEnt})_4$ dağılımı diğer $(\text{MinMaxEnt})_m, (m = 1, 2, 3)$ ve tüm $(\text{MaxMaxEnt})_m, (m = 1, 2, 3, 4)$ dağılımlarından $\hat{X}(t)$ stokastik süreci için daha uygun olduğu görülmektedir ve diğer istatistiksel kriterlerde bu sonucu desteklemektedir. Ayrıca, $(\text{MinMaxEnt})_m$ ve $(\text{MaxMaxEnt})_m, (m = 1, 2, 3, 4)$ dağılımlarının $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlere uyumu grafiksel olarak Şekil 5.19'da gösterilmiştir.



Şekil 5.19. $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için sırasıyla $(\text{MinMaxEnt})_m$ ve $(\text{MaxMaxEnt})_m$ dağılımlarının grafikleri

Şekil 5.19 incelendiğinde $(\text{MinMaxEnt})_m$ ve $(\text{MaxMaxEnt})_m$ dağılımlarının $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin dağılımına uyumlu olduğu görülmektedir.

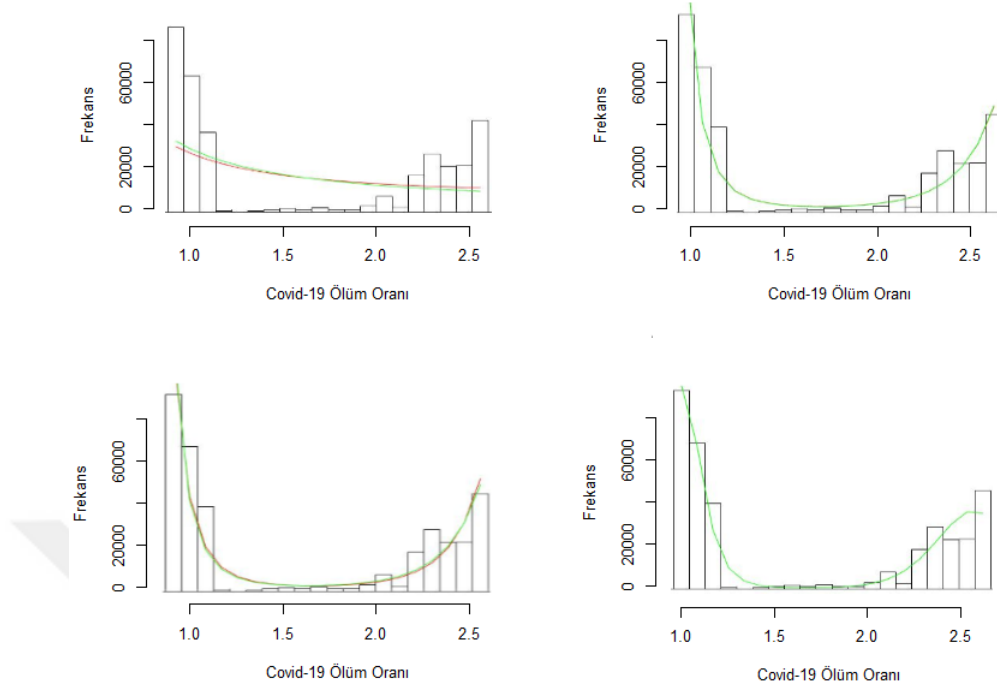
Tablo 5.21. $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için $(\text{MinMinxEnt})_m$ dağılımlarının istatistiksel kriterlerine göre incelenmesi

$(\text{MinMinxEnt})_m$	D	RMSE	χ^2	R^2	Moment Fonksiyonları
$(\text{MinMinxEnt})_1$	0.0077	0.0594	1.4082	0.2865	$1, \ln x$
$(\text{MinMinxEnt})_2$	0.0032	0.0292	0.2682	0.8365	$1, x, \ln x$
$(\text{MinMinxEnt})_3$	0.0019	0.0274	0.2594	0.8527	$1, x, \ln x, \ln^2(x)$
$(\text{MinMinxEnt})_4$	0.0004	0.0163	0.5813	0.9442	$1, x^2, \ln x, \ln^2(x), \ln(1 + x^2)$

Tablo 5.22. $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için $(\text{MaxMinxEnt})_m$ dağılımlarının istatistiksel kriterlerine göre incelenmesi

$(\text{MaxMinxEnt})_m$	D	RMSE	χ^2	R^2	Moment Fonksiyonları
$(\text{MaxMinxEnt})_1$	0.1085	0.0605	0.1337	0.8557	$1, \ln^2(x)$
$(\text{MaxMinxEnt})_2$	0.1627	0.0280	1.1777	0.8451	$1, x^2, \ln^2(x)$
$(\text{MaxMinxEnt})_3$	0.1085	0.0228	1.7680	0.8906	$1, x, x^2, \ln(1 + x^2)$
$(\text{MaxMinxEnt})_4$	0.0954	0.0163	0.1189	0.9441	$1, x, x^2, \ln x, \ln^2(x)$

Tablo 5.21 ve Tablo 5.22 incelendiğinde $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin olasılık dağılımı için tüm $(\text{MinMinxEnt})_m$ dağılımları verilen istatistiksel kriterler açısından tüm $(\text{MaxMinxEnt})_m$ dağılımlarından daha iyi performans göstermiştir. Özellikle, R^2 kriterine göre $(\text{MinMinxEnt})_4$ dağılımı diğer $(\text{MinMinxEnt})_m$, $(m = 1, 2, 3)$ ve tüm $(\text{MaxMinxEnt})_m$, $(m = 1, 2, 3, 4)$ dağılımlarından daha uygun olduğu görülmektedir ve bu sonuç diğer istatistiksel kriterler ile de desteklenmektedir. Ayrıca, $(\text{MinMinxEnt})_m$ ve $(\text{MaxMinxEnt})_m$, $(m = 1, 2, 3, 4)$ dağılımlarının $\hat{X}(t)$ için stokastik sürecinin t anında aldığı değerlere uyumu grafiksel olarak Şekil 5.20’de gösterilmiştir.



Şekil 5.20. $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler için sırasıyla $(\text{MinMinxEnt})_m$ ve $(\text{MaxMinxEnt})_m$ dağılımlarının grafikleri

Şekil 5.20 incelendiğinde $(\text{MinMinxEnt})_m$ ve $(\text{MaxMinxEnt})_m$ dağılımlarının $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin dağılımına uyumu net bir şekilde görülmektedir.

Elde edilen karşılaştırma sonuçlarına bakıldığında Covid-19 ölüm oranı verileri için önerilen (5.7) SDD modelinin yaklaşık EM yörüngelerine ait $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin dağılımı; $K_{0,m}$, ($m = 1, 2, 3, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(\text{MinMinxEnt})_4$ dağılımına özellikle R^2 değeri açısından diğer $(\text{MinMinxEnt})_m$, ($m = 1, 2, 3$) ve tüm $(\text{MaxMinxEnt})_m$, $(\text{MinMaxEnt})_m$, $(\text{MaxMaxEnt})_m$, ($m = 1, 2, 3, 4$) dağılımlarından daha güçlü bir uyuma sahip olduğu görülmektedir ve bu sonuç diğer istatistiksel kriterler de desteklenmektedir. Ayrıca, $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlere genelleştirilmiş MinxEnt dağılımlarının genelleştirilmiş MaxEnt dağılımlarına göre $\hat{X}(t)$ daha iyi uyum sağladığı görsel açıdan da Şekil 5.20’de net bir şekilde görülmektedir.

Son olarak, geliştirilen yeni yöntem yardımıyla Covid-19 oranı verileri için önerilen (5.7) SDD modelinin çözümü olan $\hat{X}(t)$ stokastik sürecini oluşturan rassal değişkenlerin yaklaşık olasılık yoğunluk fonksiyonu GEOY ile elde edilmiştir.

Covid-19 uygulamasında özetle aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

- $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin olasılık yoğunluk fonksiyonun nasıl elde edilebildiği gösterilmiştir.
- $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin dağılımı bilinen herhangi bir istatistiksel dağılıma benzemediği için GEOY dağılımları ile modellenabilir olduğu gösterilmiştir.
- Genelleştirilmiş MinxEnt dağılımlarının genelleştirilmiş MaxEnt dağılımlarına göre $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerleri modellemede daha esnek ve güçlü olduğu yorumu yapılabilmektedir.



6. SONUÇ VE TARTIŞMA

Stokastik diferansiyel denklem modelleri rassalık içermesinden dolayı biyoloji, popülasyon dinamiği, kimya, fizik, tıp, mühendislik, hisse senedi, faiz oranı ve varlık fonları gibi çeşitli alanlarda oldukça önemli modeller haline gelmiştir. Stokastik diferansiyel denklem modellerinin bu kadar önemli olmasının yanında stokastik diferansiyel denklemlerin çözümünün var ve tek olması bir o kadar önemlidir. Bu durum için literatürde stokastik diferansiyel denklemler için varlık-teklik teoremleri ve ispatları bulunmaktadır. Bu tez çalışmasında, literatürden farklı olarak stokastik diferansiyel denklemlerin çözümünün var ve tek olduğu Banach sabit nokta prensibinin genelleştirilmesi yardımıyla ispatı yapılmıştır. Söz konusu teorik ispatın literatürde yapılan Varlık-Teklik ispatlarına farklı bir bakış açısı kazandırması beklenmektedir.

Stokastik diferansiyel denklemin çözümü bir stokastik süreçtir ve t zamanının her bir anında bu süreç bir rassal değişken ifade etmektedir. Stokastik süreci oluşturan bu rassal değişkenlerin olasılık yoğunluk fonksiyonu genellikle literatürde Fokker-Planck-Kolmogorov denklemi yardımıyla elde edilmektedir. Bu çalışmada ise, literatürde yapılan çalışmalardan farklı olarak ilk kez söz konusu rassal değişkenlerin olasılık yoğunluk fonksiyonu için genelleştirilmiş entropi optimizasyon yöntemleri kullanılarak yeni bir yöntem geliştirilmiştir ve teorik olarak da ispatlanmıştır. Söz konusu yöntemde bir veri seti için önerilen stokastik diferansiyel denklem modelinin Euler-Maruyama yöntemi ile birçok yörüngesi inşa edilmiştir. Elde edilen yörüngeler t zamanının her bir anı için bir rassal değişken elde edilmesine olanak sağlamıştır. Bu durumda, her bir $t = t_i$, $i = 0, 1, \dots, N$ anında bu düğüm noktaları $\{\hat{X}(t_i)\}$ rassal değişkenler dizisini oluşturmuştur. Bu dizi bir stokastik süreç olarak ifade edilmiştir ve bu süreç $\hat{X}(t)$ olarak gösterilmiştir. İlgili stokastik süreci oluşturan rassal değişkenler, $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerler olarak ifade edilmiştir. $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin yaklaşık olasılık yoğunluk fonksiyonu ise genelleştirilmiş entropi optimizasyon yöntemleri ile elde edilmiştir. Ayrıca, $\hat{X}(t)$ stokastik sürecinin t anında aldığı değerlerin dağılımının genelleştirilmiş MaxEnt ve genelleştirilmiş MinxEnt dağılımları ile modellenilebilir olduğu gösterilmiştir. Genelleştirilmiş entropi optimizasyon dağılımlarının seçilme sebebi ise literatürde olan diğer istatistiksel dağılımlardan daha esnek olmasıdır. Bu

çalışma ile stokastik diferansiyel denklemin yaklaşık nümerik çözümü olan stokastik sürecin olasılık yoğunluk fonksiyonun bulunması için yeni bir yöntem olarak geliştirilmiş entropi optimizasyon yöntemlerinin kullanılmasıyla literatüre önemli bir katkı sağlaması amaçlanmıştır.

Uygulamada faiz oranlarına dayalı bir simülasyon çalışması ve biyolojik popülasyon örneği, hisse senedi örneği ve Covid-19 örneği olmak üzere üç gerçek veri seti üzerinde yapılmıştır. Söz konusu uygulamalarda, ilgilenilen veri seti için önerilen stokastik diferansiyel denklem modelinin çözümünün olasılık yoğunluk fonksiyonunu elde etmek için şu adımlar izlenmiştir:

- Stokastik diferansiyel denklemlerde yer alan Wiener sürecinin varsayımlarının sınanması istatistiksel testler ile gösterilmiştir.

- Verilen bir veri seti için önerilen modelin veri setine uyumlu olup olmadığı stokastik diferansiyel denklemler için geliştirilmiş olan ki-kare uyum iyiliği testi yardımıyla gösterilmiştir.

- Modele karar verildikten sonra modelin parametre tahmini en çok olabilirlik yöntemi ile yapılmıştır.

- Verilen stokastik diferansiyel denklem modelinin nümerik çözümü Euler-Maruyama yöntemi kullanılarak yapılmıştır ve stokastik diferansiyel denklemin bir çok yörüngesi oluşturulmuştur. Elde edilen yörüngeler sabit t zamanının her bir anında bir rassal değişken ifade etmektedir. Elde edilen bu rassal değişkenlerde ilgilenilen stokastik diferansiyel denklem modelinin çözümü olan stokastik süreci oluşturmaktadır.

- Bir önceki adımda elde edilen rassal değişkenlerden bir dizi oluşturulmuştur ve bu dizi $\hat{X}(t)$ stokastik süreç olarak ifade edilmiştir. Önerilen stokastik diferansiyel denklem modelinin çözümü olan bu stokastik sürecin yaklaşık olasılık yoğunluk fonksiyonu genelleştirilmiş entropi optimizasyon yöntemleri kullanılarak elde edilmiştir ve olasılık dağılımları genelleştirilmiş MaxEnt ve genelleştirilmiş MinxEnt dağılımları kullanılarak bulunmuştur. Bu dağılımların ilgilenilen bir veri setine uyumu çeşitli istatistiksel kriterlerle incelenmiştir ve elde edilen sonuçlar görsel olarak da desteklenmiştir. Özellikle, genelleştirilmiş MinxEnt dağılımlarının genelleştirilmiş MaxEnt dağılımlarına göre uygulamada kullanılan tüm istatistiksel kriterler anlamında daha iyi sonuç verdiği görülmüştür. Bu durum, önsel dağılımın ilgilenilen veri setini mo-

dellemedeki etkisinin bir göstergesi olarak da yorumlanabilir.

Dört farklı veri seti ve birbirinden farklı modellerden oluşan uygulama bölümünde $(\text{MinMaxEnt})_m$ ve $(\text{MaxMaxEnt})_m$, $(\text{MinMinxEnt})_m$ ve $(\text{MaxMinxEnt})_m$ dağılımları şeklinde olan genelleştirilmiş entropi optimizasyon dağılımları stokastik diferansiyel denkleminin çözümü olan stokastik sürecin yaklaşık olasılık yoğunluk fonksiyonun ve olasılık dağılımlarının bulunmasında etkin ve başarılı bir şekilde uygulanabilir olduğu gösterilmiştir.

Sonuç olarak, söz konusu uygulamalar ile stokastik diferansiyel denklemin çözümünün yaklaşık olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmak için teorik olarak ispatlanan yeni yöntemin çeşitli uygulama alanlarındaki başarısı hem görsel açıdan hem de istatistiksel kriterler kullanılarak gösterilmiştir. Bununla birlikte stokastik diferansiyel denklemin çözümünün yaklaşık olasılık yoğunluk fonksiyonunun elde edilmesinde geliştirilen yeni yöntem; stokastik diferansiyel denklem çözümünün olasılık yoğunluk fonksiyonun elde edilmesinde literatürde kullanılan yöntemlere bir alternatif olduğu gösterilmiştir.

KAYNAKÇA

- Allen, E. J. (1999). Stochastic differential equations and persistence time of two interacting populations. *Dynamics of Continuous, Discrete, and Impulsive Systems*, 5, 271–281.
- Allen, L. J. S. (2003). *An introduction to stochastic processes with applications to biology*. New Jersey: Pearson Education Inc.
- Allen, E. (2007). *Modeling with Itô stochastic differential equations*. Netherlands: Springer Science and Business Media.
- Allen, E. J., Allen, L. J. S. and Smith, H. L. (2020). On real-valued SDE and nonnegative-valued SDE population models with demographic variability. *Journal of Mathematical Biology*, 81 (2), 487-515.
- Bak, J., Madsen, H. and Nielsen, H. A. (1999). Goodness of fit of stochastic differential equations. *In Symposium i Anvendt Statistik*, pp. 341-346, Copenhagen Business School Copenhagen, Denmark.
- Baker-Jarvis, J., Racine, M. and Alameddine, J. (1989). Solving differential equations by a maximum entropy-minimum norm method with applications to Fokker-Planck equations. *Journal of Mathematical Physics*, 30 (7), 1459-1463.
- Banach, S. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales. *Fundamental Mathematics*, 3, 133–181.
- Bayram, M., Partal, T. and Buyukoz, G. O. (2018). Numerical methods for simulation of stochastic differential equations. *Advances in Difference Equations*, 2018(1), 1-10.
- Bishwal, J. P. (2007). *Parameter estimation in stochastic differential equations*. Springer.
- Bozdağ, B. (2015). *Stokastik Diferansiyel Denklemlerle Modelleme*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Box, G.E.P. and Pierce, D.A. (1970). Distribution of Residual Autocorrelation in Autoregressive-Integrated Moving Average Time Series Models. *Journal of*

- American Statistical Association*, 65, 1509-1526.
- Braumann, C. A. (2019). *Introduction to Stochastic Differential Equations with Applications to Modelling in Biology and Finance*, Wiley.
- Butler, M., Harris, G. and Strobel, B. (2013). Influence of Whooping Crane population dynamics on its recovery and management. *Biological Conservation*, 162, 89–99.
- Capasso, V. and Bakstein, D. (2005). *An introduction to continuous-time stochastic processes: Theory, models, and applications to finance, biology and medicine*. Boston: Springer.
- Capelli, A. (1892). Sopra la compatibilit  o incompatibilit  di pi  equazioni di primo grado fra pic  incognite. *Revista di Matematica*, 2, 54–58.
- Chan, K. C., Karolyi, G. A., Longstaff, F. A. and Sanders, A. B. (1992). An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate. *The Journal of Finance*, 47 (3), 1209-1227.
- Chernov, M., Gallant, A. R., Ghysels, E. and Tauchen, G. (2003). Alternative models for stock price dynamics. *Journal of Econometrics*, 116, 225–257.
- Ćirić, Lj. B. (1974). A Generalization of Banach’s Contraction Principle. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 45 (2), 267–273.
- Cox, J. C. and Ross, S. A. (1976). The valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of financial economics*, 3 (1-2), 145-166.
- Cox, J., Ingersoll, J. and Ross, S. (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53 (3), 385–407.
- Dassios, A. and Nagaradjasarma, J. (2006). The square-root process and Asian options. *Quantitative Finance*, 6 (4), 337-347.
- Deshpande, V. M. and Bhattacharya, R. (2020). Data-driven Solution of Stochastic Differential Equations Using Maximum Entropy Basis Functions. *IFAC-PapersOnLine*, 53 (2), 7234-7239.
- El-Wakil, S. A., Elhanbaly, A. and Abdou, M. A. (2001). Solution of Fokker-Planck equation by means of maximum entropy approach. *Journal of Quantitative*

- Spectroscopy and Radiative Transfer*, 69, 41-48.
- Evans, L. C. (2013). *An introduction to stochastic differential equations*. (Vol. 82). American Mathematical Soc.
- Hayes, J. G. and Allen, E. J. (2005). Stochastic point-kinetics equations in nuclear reactor dynamics. *Annals of Nuclear Energy*, 32, 572–587.
- Hick, P. and Stevens, G. (1987). Approximate solutions to the cosmic ray transport equation The maximum entropy method. *Astronomy and Astrophysics*, 172 (1-2), 350-358.
- Higham, D. J. (2001). An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations. *SIAM Review*, 43, 525–546.
- http-1:** <https://au.finance.yahoo.com/quote/GM/history?> (Erişim tarihi: 26.04.2021)
- http-2:** <https://covid19.who.int> (Erişim tarihi: 31.10.2021)
- http-3:** <https://www.macrotrends.net/countries/TUR/turkey/death-rate> (Erişim tarihi: 31.10.2021)
- http-4:** https://en.wikipedia.org/wiki/Mortality_rate (Erişim tarihi: 30.10.2021)
- Ince, N. (2021). A generalized entropy optimization modelling in the theory of stochastic differential equations. *Journal of the Korean Statistical Society*, 1-19.
- İnce, N. and Shamilov, A. (2020). An application of new method to obtain probability density function of solution of stochastic differential equations. *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, 5 (1), 337-348.
- Jaynes, E.T (1957). Information theory and statistical mechanics. *Physical Review*, 106, 620-630.
- Jumarie, G. (1990). Solution of the multivariate Fokker-Planck equation by using a maximum path entropy principle. *Journal of Mathematical Physics*, 31 (10), 2389-2392.
- Kagan, A.M, Linik, Y.V. and Rao, C.R. (1973). *Characterization Problems in Mathematical Statistics*, New York: Wiley.

- Kapur, J. N. (1989). *Maximum Entropy Models in Science and Engineering*, New York: Wiley.
- Kapur, J.N. and Kesevan, H.K. (1992). *Entropy Optimization Principle with Applications*, Academic Press.
- Kessler, M., Lindner, A. and Sorensen, M. (2019). *Statistical methods for stochastic differential equations*. Chapman and Hall/CRC.
- Kiyosi, I. (1951). On stochastic differential equations. *Memoirs, American Mathematical Society*, 4, 1–51.
- Knopp, K. (1956). *Infinite Sequences and Series*. New York: Dover publications, Inc.
- Korn, R. and Korn, E. (2001). *Option pricing and portfolio optimization: modern methods of financial mathematics* (Vol. 31). American Mathematical Society.
- Koverda, V. P. and Skokov, V. N. (2012). Maximum entropy and stability of a random process with a $1/f$ power spectrum under deterministic action. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 391 (23), 5850-5857.
- Kullback, S. and Leibler, R. A. (1951). On Information and Sufficiency. *Annals of Mathematical Statistics*, 22, 79–86.
- Kullback, S. (1959). *Information Theory and Statistics*. New York: Wiley.
- Kwiatkowski, D., Phillips, P. C., Schmidt, P. and Shin, Y. (1992). Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root: How sure are we that economic time series have a unit root?. *Journal of Econometrics*, 54 (1-3), 159-178.
- Langtangen, H. P. (1991). A general numerical solution method for Fokker-Planck equations with applications structural reliability. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 6 (1).
- Lyapunov, A. M. (1992). The general problem of the stability of motion. *International journal of control*, 55 (3), 531-534.
- Mahrouf, M., Boukhouima, A., Zine, H., Lotfi, E. M., Torres, D. F. and Yousfi, N.

- (2021). Modeling and forecasting of COVID-19 spreading by delayed stochastic differential equations. *Axioms*, 10 (1), 18.
- Marsh, T. A. and Rosenfeld, E.R. (1983). Stochastic processes for interest rates and equilibrium bond prices. *Journal of Finance*, 38 (1), 635-646.
- Mikosch, T. (1998). *Elementary stochastic calculus, with finance in view*. World Scientific.
- Neyman, J. and Pearson, E. S. (1933). IX. On the problem of the most efficient tests of statistical hypotheses. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 231 (694-706), 289-337.
- Opper, M. (2017). An estimator for the relative entropy rate of path measures for stochastic differential equations. *Journal of Computational Physics*, 330, 127-133.
- Özel Kadılar, G. (2020). *Stokastik Süreçler ve R Uygulamaları*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Panik, M. J. (2017). *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications in Population Dynamics Modeling*. Hoboken, NJ: John Wiley and Sons, Inc.
- Plastino, A. R., Miller, H. G. and Plastino, A. (1997). Minimum Kullback entropy approach to the Fokker-Planck equation. *Physical Review E*, 56 (4).
- Rihan, F. A., Alsakaji, H. J. and Rajivganthi, C. (2020). Stochastic SIRC epidemic model with time-delay for COVID-19. *Advances in difference equations*, 2020 (1), 1-20.
- Ross, S. M. (1999). *An introduction to mathematical finance*. Cambridge University Press.
- Särkkä, S. and Arno, S. (2019). *Applied stochastic differential equations*. Cambridge University Press.
- Sauer, T. (2012). Numerical solution of stochastic differential equations in finance. *In Handbook of Computational Finance*. Berlin, Heidelberg: Springer.

- Shamilov, A. (2006). A development of entropy optimization methods. *WSEAS Transactions Mathematics*, 5(5), 568-575.
- Shamilov, A. (2007). Generalized Entropy Optimization Problems And The Existence of Their Solutions. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 382 (2), 465-472.
- Shamilov, A. (2010). Generalized entropy optimization problems with finite moment function sets. *Journal of Statistics and Management Systems*, 3 (3), 595-603.
- Shannon, C. E. (1948). A mathematical theory of communication. *The Bell system technical journal*, 27 (3), 379-423.
- Shapiro, S.S. and Wilk, M.B. (1965). An analysis of variance test for normality (complete samples). *Biometrika*, 52 (3/4), 591-611.
- Simha, A., Prasad, R. V. and Narayana, S. (2020). A simple stochastic sir model for covid 19 infection dynamics for karnataka: Learning from europe. *arXiv:2003.11920 [math, q-bio]*.
- Sobczyk, K. and Trebicki, J. (1990). Maximum entropy principle in stochastic dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 5 (3), 102-110.
- Sobczyk, K. and Trebicki, J. (1993). Maximum entropy principle and nonlinear stochastic oscillators. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 193 (3-4), 448-468.
- Sobczyk, K. and Trebicki, J. (1999). Approximate probability distributions for stochastic systems: maximum entropy method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 168, 91-111.
- Soize, C. (2008). Construction of probability distributions in high dimension using the maximum entropy principle: Applications to stochastic processes, random fields and random matrices. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 76 (10), 1583-1611.
- Steele, J. M. (2004). *The Cauchy-Schwarz master class: an introduction to the art of mathematical inequalities*. Cambridge University Press.
- Şamilov, A. (2007). *Ölçüm Teorisi, Olasılık ve Lebesgue Integrali*. Eskişehir: Anadolu

Üniversitesi Yayınları.

Şamilov, A. (2012). *Teori ve Çözümlü Problemlerle Diferansiyel Denklemler*. Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık.

Şamilov, A. (2014). *Kavramsal Yorumlar ve Uygulamalarla Olasılık Teorisi*. Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık.

Şamilov, A. (2015). *Entropi, İnfomasyon and Entropi Optimizasyon*. Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık.

Trebicki, J. and Sobczyk, K. (1996). Maximum entropy principle and non-stationary distributions of stochastic systems. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 11, 169-178.

Türkseven, V. (2015). *Geriye doğru stokastik diferansiyel denklemlerin varlık ve teklik şartlarının incelenmesi ve optimal kontrole uygulanması*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. İzmir: Yaşar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

Vasconcelos, G. L., Salazar, D. S. and Macêdo, A. M. S. (2018). Maximum entropy approach to H-theory: Statistical mechanics of hierarchical systems. *Physical Review E*, 97 (2), 022104.

Yanev, N. Stoimenova, V. and Atanasov, D. (2020). Stochastic Modelling and Estimation of COVID-19 Population Dynamics. *Proceedings of the Bulgarian Academy of Sciences*, 73 (4), 451-460.

Zhang, W., Wang, H., Hartmann, C., Weber, M. and Shütte, C. (2014). Applications of the cross-entropy ethod to importance sampling and optimal control diffusions. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 36 (6), A2654-A2672.

ÖZGEÇMİŞ

Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

- 2016 - 2022, Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı, Doktora
- 2013 - 2016, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans
- 2018- , Araştırma Görevlisi, Eskişehir Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü
- 2014-2018, Araştırma Görevlisi, Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü
- 2013-2014, Araştırma Görevlisi, Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü
- 2008 - 2013, Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, Lisans

Yayınlar ve Bilimsel/Sanatsal Faaliyetleri:

1. Uluslararası Hakemli Dergilerde Yayınlanan Makaleler

Shamilov, A., Senturk S. and **Yilmaz, N.** (2016) Generalized Maximum Fuzzy Entropy Methods with Applications on Wind Speed Data. *Journal of Mathematics and System Science*, 6 (1), 46-52.

Shamilov, A. and **Ince, N.** (2016) Minimum Cross Fuzzy Entropy Problem The Existence of Its Solution and Generalized Minimum Cross Fuzzy Entropy Problems. *Journal of Mathematics and System Science*, 6 (8), 315-322.

Shamilov, A. and **Ince, N.** (2016) On Several New Generalized Entropy Optimization Methods. *Türkiye Klinikleri Journal of Biostatistics*, 8 (2), 110-115.

- Shamilov, A., Senturk S. and **Ince, N.** (2017) (2017) An Estimation Method Of Membership Function For Given Fuzzy Data. *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences* , 8 (1), 11-18.
- Shamilov, A. and **Ince, N.** (2017) A New Method Of Approximation For Fuzzy Membership Function With Application. *Anadolu Üniversitesi Bilim Ve Teknoloji Dergisi - B Teorik Bilimler*, 5 (1), 1-12.
- Ince, N.** and Shamilov, A. (2020) An Application of New Method to Obtain Probability Density Function of Solution of Stochastic Differential Equations. *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences* , 46 (3), 492-510.
- Ince, N.** (2021) A generalized entropy optimization modelling in the theory of stochastic diferential equations. *Journal of the Korean Statistical Society*, 1-19.

3. Uluslararası Bilimsel Toplantılarda Sunulan Bildiriler

- Shamilov, A., Ozdemir S. and **Yilmaz, N.** (2014) Generalized Entropy Optimization Methods for Survival Data. *The 5th International Conference on Accelerated Life Testing and Degradation Models* . Pau, France.
- Shamilov, A., Senturk, S. and **Ince, N.** (2015) Generalized Fuzzy Entropy Optimization Methods with application on Wind Speed Data. *The 5th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications*. Baku, Azerbaijan.
- Shamilov, A., Senturk S. and **Yilmaz, N.** (2015) Generalized Maximum Fuzzy Entropy Methods with Applications. *The 4th International Fuzzy Systems Symposium*. İstanbul, Turkey.
- Ince, N.** and Shamilov, A. (2017) On Several New Generalized Entropy Optimization Methods with Applications. *3rd International Researchers, Statisticians and Young Statisticians Congress*, Konya, Turkey.
- Shamilov, A. and **Ince, N.** (2017) An Application of Generalized Entropy Optimization Methods in the Theory of Stochastic Differential Equations. *III*.

International Conference on Symmetries, Differential Equations and Applications. Konya, Turkey.

Shamilov, A. and **Ince, N.** (2019) An Application of New Method to Obtain Probability Density Function of Solution of Stochastic Differential Equations. *The 4th International Conference On Computational Mathematics And Engineering Sciences.* Antalya, Turkey.

Shamilov, A., **Ince, N.** and Özdemir S. (2019). Several Applications of New Generalized Entropy Optimization Methods in Survival Data Analysis. *The 5th International Researchers, Statisticians And Young Statisticians Congress.* Aydın, Turkey.

Shamilov, A. and **Ince, N.** (2019) An Application of New Stochastic Model Using Generalized Entropy Optimization Methods. *The 5th International Researchers, Statisticians And Young Statisticians Congress.* Aydın, Turkey.

Shamilov, A. and **Ince, N.** (2019) On new method to obtain probability density function of solution of stochastic differential equations. *International Conference on Modern Problems of Mathematics and Mechanics.* Baku, Azerbaijan.

Ince, N. and Shamilov, A. (2019) An Approximate Method of Obtaining Probability Density Function of Solution of Stochastic Differential Equation. *IV. International Scientific and Vocational Studies Congress, Science and Health.* Ankara, Turkey.

Ince, N. and Shamilov, A. (2020) Stochastic differential equations modelling for the dynamics of human mortality rates. *2nd International Eurasian Conference on Science, Engineering and Technology.* Gaziantep, Turkey.

Ince, N. and Senturk, S. (2020) Using Stochastic Differential Equations Modelling for Agricultural Products on Real Data. *1st International Applied Statistics Conference,* Tokat, Turkey.

Ince, N. and Senturk, S. (2020) Using Intuitionistic Fuzzy C-Means Clustering Algorithms to Model Covid-19 Cases in the High Risks Countries. *7th Ifs And Contemporary Mathematics Conference.* Mersin, Turkey.

- Shaltoot Mahmoud, I. **Ince, N.** and Senturk, S. (2021) Estimators in Multiple Linear Regression and an Application. *II. International Applied Statistics Conference*. Tokat, Turkey.
- Ince, N.** (2021) Generalized Fuzzy Entropy Optimization Methods for Fuzzy Data Analysis. *International Conference on Intelligent and Fuzzy Systems*. Izmir, Turkey.
- Ince, N.** and Senturk, S. (2021) Modelling of Covid-19 in Turkey Based on Fuzzy Stochastic Differential Equations. *International Conference on Intelligent and Fuzzy Systems*. Izmir, Turkey.
- Ince, N.** (2021) Solving Stochastic Differential Equations with Generalized Entropy Optimization Methods and Simulation. *The Second International Conference on Applied Mathematics in Engineering*. Balıkesir, Turkey.

4. Ulusal ve Uluslararası Projeler

- Araştırmacı**, Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyon Yöntemleri ile Bulanık Veri Analizi, Anadolu üniversitesi Bilimsel Araştırma Projesi, 2014-2016.
- Araştırmacı**, Yeni Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyon Yöntemleri ve Uygulamaları, Anadolu üniversitesi Bilimsel Araştırma Projesi, 2017 - 2018.
- Araştırmacı**, Stokastik Diferansiyel Denklemlerle Modelleme ve Uygulamaları, Eskişehir Teknik üniversitesi Bilimsel Araştırma Projesi, 2019 - 2020.
- Araştırmacı**, Stokastik Diferansiyel Denklem Modellemede Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyon Yöntemleri, Eskişehir Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projesi, 2016 - 2021.