



STOKASTİK DİFERANSİYEL
DENKLEMLER İÇİN GEOMETRİK
BROWN HAREKETİ TABANLI
NÜMERİK ŞEMALAR

Yüksek Lisans Tezi

EBRU GÜNDAY

Eskişehir 2024

STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN GEOMETRİK
BROWN HAREKETİ TABANLI NÜMERİK ŞEMALAR

Ebru GÜNDAY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Uygulamalı Matematik Tezli Yüksek Lisans Programı

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Utku ERDOĞAN

Eskişehir

Eskişehir Teknik Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Mayıs 2024

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Ebru GÜNDAY'ın "STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN GEOMETRİK BROWN HAREKETİ TABANLI NÜMERİK ŞEMALAR" başlıklı tezi 20/05/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Eskişehir Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

<u>Jüri Üyeleri</u>	<u>Unvanı Adı-Soyadı</u>	<u>İmza</u>
Üye (Tez Danışmanı)	: Doç. Dr. Utku ERDOĞAN	
Üye	: Prof. Dr. Yılmaz DERELİ	
Üye	: Doç. Dr. Sıla Övgü KORKUT UYSAL	

Prof. Dr. Semra KURAMA
Enstitü Müdürü

../../2024

DANIŞMAN ONAYI

Danışmanlığımı yürüttüğüm Ebru GÜNDAY öğrencisi "STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN GEOMETRİK BROWN HAREKETİ TABANLI NÜMERİK ŞEMALAR" başlıklı tez çalışmasını tamamlamıştır. Hazırlamış olduğu tez tarafımda incelenmiş ve öğrencinin tez savunma sınavına alınması bilimsel ve etik açıdan uygun görülmüştür.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Utku ERDOĞAN



ÖZET

STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN GEOMETRİK BROWN HAREKETİ TABANLI NÜMERİK ŞEMALAR

Ebru GÜNDAY

Matematik Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Mayıs 2024

Danışman: Doç. Dr. Utku ERDOĞAN

Stokastik Diferansiyel Denklemler (SDD) finansal, biyolojik ve fiziksel sistemlerin modellenmesinde etkili bir şekilde kullanılmaktadır. Bu denklemler, içerdği gürültü terimi nedeniyle deterministik diferansiyel denklemlerden farklı bir sınıfta değerlendirilir. Stokastik Diferansiyel Denklemlerin tam çözümlerini elde etmek genelde mümkün olmadığı için nümerik yaklaşımların geliştirilmesi ve analiz edilmesi önem arz etmektedir.

Bu tez çalışmasında Stokastik Diferansiyel Denklemler ile ilgili temel kavramlar açıklandıktan sonra, bu denklemler için kullanılan klasik nümerik metotlar tanıtılmış ve ardından bu metotların nümerik testleri sunulmuştur. SDD'deki sürüklenme ve difüzyon katsayı fonksiyonlarının yarı-lineer olduğu durumlarda global Lipschitz ve lokal Lipschitz koşulları altında Geometrik Brown Hareketi tabanlı metotlar incelenmiştir. İncelenen metotların performans karşılaştırmaları nümerik testler üzerinden yapılmıştır. Difüzyon katsayı fonksiyonunun lineer olduğu durum için yakınsaklık analizi yapılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Stokastik diferansiyel denklemler, Geometrik Brown hareketi, Nümerik analiz

ABSTRACT

NUMERICAL SCHEMES BASED ON GEOMETRIC BROWNIAN MOTION FOR THE STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

Ebru GÜNDAY

Department of Mathematics

Programme in Applied Mathematics

Eskişehir Technical University, Institute of Graduate Schools, May 2024

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Utku ERDOĞAN

Stochastic Differential Equations (SDEs) are effectively utilized in modeling financial, biological, and physical systems. Due to the noise term they contain, these equations are classified differently from deterministic differential equations. Since obtaining exact solutions for Stochastic Differential Equations is generally not feasible, the development and analysis of numerical approaches are of significant importance.

In this thesis, after presenting the fundamental concepts related to Stochastic Differential Equations, classical numerical methods used for these equations are introduced, followed by numerical tests of these methods. In the case where the drift and diffusion coefficient functions in SDEs are semi-linear, methods based on Geometric Brownian Motion have been examined under global Lipschitz and local Lipschitz conditions. The performance comparisons of the examined methods are conducted through numerical tests. Convergence analysis has been conducted for the case where the diffusion coefficient function is linear.

Keywords: Stochastic differential equations, Geometric Brownian motion, Numerical analysis

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezim boyunca bilgisini ve desteklerini esirgemeyen, rehberliği ve cesaretlendirmeleri sayesinde bu tez çalışmasını başarıyla tamamlamamı sağlayan, bu süreçte sabır ve ilgi gösteren değerli danışman hocam Doç Dr. Utku ERDOĞAN'a teşekkür ederim.

TÜBİTAK 2211 Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı ve TÜBİTAK ARDEB 1002 programı 120F299 numaralı proje kapsamında sağladığı desteklerden dolayı TÜBİTAK Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığına teşekkürlerimi sunarım.

TÜBİTAK 2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programından burs almam için bana kefil olan değerli arkadaşım Zeynep YAPRAK'a teşekkür ederim. Her zaman yanımda olan maddi manevi desteklerini esirgemeyen, beni yetiştiren bugünlere gelmemi sağlayan anneme ve babama teşekkür ederim. Tez sürecim boyunca bana destek olan, varlığını her daim hissettiren değerli hayat arkadaşım Fırat KORKMAZ'a teşekkürlerimi sunarım.

Ebru GÜNDAY

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarda bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığımı ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Ebru GÜNDAY

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
BAŞLIK SAYFASI	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI.....	ii
DANIŞMAN ONAYI.....	iii
ÖZET	iii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR.....	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	x
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖN BİLGİLER	4
2.1 Stokastik Süreçler	4
2.2 Brown Hareketi	4
2.3 Itô İntegrali.....	5
3. STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER	12
3.1 Itô Stokastik Diferansiyel Denklemler	12
3.2 Varlık ve Teklik Teoremleri	13
3.3 Çözümlerin Momentlerinin Özellikleri.....	15
3.4 Otonom Doğrusal Denklemler	16
4. SDD'LER İÇİN KLASİK NÜMERİK METOTLAR.....	19
4.1 Global Lipschitz Koşulu Altında Klasik Yakınsak Metotlar ..	19
4.1.1 Açık Euler-Maruyama metodu	19

4.1.2	Kapalı Euler-Maruyama metodu	20
4.1.3	Milstein metodu	21
4.1.4	Nümerik testler	21
4.2	Lokal Lipschitz Koşulu Altında Klasik Yakınsak Metotlar	22
4.2.1	Evcilleştirilmiş Euler-Maruyama metodu	22
4.2.2	Projeksiyon Euler-Maruyama metodu	23
4.2.3	Split-Step Euler-Maruyama metodu.....	23
4.2.4	Nümerik testler	24
5.	SDD'LER İÇİN GBH TABANLI NÜMERİK METOTLAR	26
5.1	Global Lipschitz Koşulu Altında GBH Metodu	26
5.1.1	Metotların türetilmesi	27
5.2	Lokal Lipschitz Koşulu Altında Metotlar.....	36
5.2.1	Evcilleştirilmiş GBH metodu.....	37
5.2.2	GBH tabanlı Projeksiyon Euler-Maruyama metodu....	38
5.2.3	Nümerik testler	39
6.	SONUÇ.....	40
	KAYNAKÇA.....	41
	EKLER	
	ÖZGEÇMİŞ	

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 4.1.	Denklem (4.3)'ün çeşitli metotlarla türetilen örneklem yörüngesi	21
Şekil 4.2.	Açık Euler-Maruyama, kapalı Euler-Maruyama ve Milstein metotlarının (4.3) denklemi için kuvvetli yakınsaklık mertebeleri	22
Şekil 4.3.	Denklem (4.11)'in çeşitli metotlarla türetilen örneklem yörüngesi	24
Şekil 4.4.	Evcilleştirilmiş Euler-Maruyama, Projeksiyon Euler-Maruyama ve Split-Step Euler-Maruyama metotlarının (4.11) denklemi için kuvvetli yakınsaklık mertebeleri	25
Şekil 5.1.	Denklem (4.11)'in çeşitli metotlarla türetilen kuvvetli yakınsaklık mertebeleri.....	39

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$h.h.k.$	: Özelliği hemen hemen kesindir, (almost surely)
$\mathbb{P}$	: Olasılık Ölçüsü
Ω	: Örneklem Uzayı
$\mathcal{F}$	: Sigma Cebir
$\mathcal{F}_t$	: Uyarlanmış Filtrasyon
$\mathcal{B}$	: Borel Cebir
$\ \cdot\ $	: Vektör Normu
SDD	: Stokastik Diferansiyel Denklem
GBH	: Geometrik Brown Hareketi
$\mathbb{R}^d$	: d boyutlu öklid uzayı
$\mathbb{R}^{d \times m}$	: $d \times m$ gerçel matris uzayı
$A^\top$	: A matrisinin transpozu
$L^p(\Omega; \mathbb{R}^d)$	: $\mathbb{E}[\ \xi\ ^p]x < \infty$ için ξ , $\mathbb{R}^d$ değerli rassal değişkenlerin ailesi
$\ \xi\ _{L^p}$	: $\left(\mathbb{E}[\ \xi\ ^p]\right)^{1/p}$

1. GİRİŞ

Bir fiziksel veya biyolojik sistemin zamana bağılı değişimi diferansiyel denklemlerle ifade edilebilir. İncelenen dinamik sistemin değişim yasaları deterministik fonksiyonlarla ifade edilebilirse sistemin gelecekteki durumu, mevcut durum tarafından tek türlü belirlenebilir. Fakat sisteme etki eden rassal unsurlar varsa, deterministik diferansiyel denklemler, söz konusu dinamik sistemin davranışını açıklamakta yetersiz kalabilir. Gürültü olarak adlandırılan bu rassal etkiler, ait oldukları olasılık dağılımına bağılı olarak bir Stokastik Diferansiyel Denklemlerde (SDD) temsil edilebilirler. Böylece Stokastik Diferansiyel Denklemlerin çözümü, incelenen sistemin gelecekteki davranışının istatistiksel dağılımını verebilir. Fakat deterministik diferansiyel denklemlerde olduğu gibi sınırlı sayıda SDD'nin tam çözümü bilinmektedir. Dolayısıyla Stokastik Diferansiyel Denklemlerin yaklaşık nümerik çözümlerinin elde edilmesi biyoloji [1, 2], iletişim [3], iklim modelleme [4], epidemiyoloji [5], makine öğrenmesi tekniğinde öğrenme parametrelerinin belirlenmesi [6] gibi pek çok uygulama alanı açısından önem arz etmektedir.

Bir SDD sürüklenme (drift) ve difüzyon katsayı fonksiyonlarını içerir. Sürüklenme ve difüzyon katsayı fonksiyonlarının global Lipschitz koşulunu sağladığı durumlarda kullanılan klasik Euler-Maruyama metotları ve bu metotların yakınsaklık kararlılık analizi [7, 8] çalışmalarında sunulmuştur. Klasik metotlar sürüklenme ve difüzyon katsayı fonksiyonlarının yarı-lineer olması durumunda hesaplama açısından herhangi bir avantaj sağlamazlar. Fakat sürüklenme ve difüzyon katsayı fonksiyonları hem lineer hem de lineer olmayan terimler içerdiğinde, alt lineer denklemlerin tam çözüme sahip olması sebebiyle daha etkin nümerik metotlar türetmek mümkündür. Deterministik diferansiyel denklemler için [9] çalışmasında türetilen üstel integratörlerin stokastik versiyonları [10, 11, 12] çalışmalarında sunulmuştur. Fakat bu üstel integratörler sadece sürüklenme katsayı fonksiyonundaki lineer terime karşılık gelen alt denklemin tam çözümünü kullanır. Öte yandan [13] çalışmasında hem sürüklenme hem de difüzyon katsayı fonksiyonlarındaki lineer terimlere karşılık gelen alt lineer denklemin tam çözümü olan Geometrik Brown Hareketi (GBH) kullanılmıştır. Böylelikle klasik nümerik şemalara kıyasla daha kararlı ve hassas nümerik metotlar türetilmiştir.

Sürüklenme ve difüzyon katsayılarından en az biri global Lipschitz koşulunu sağlamadığında, klasik nümerik metotların türettiği çözümler gerçek çözüme yakınsamamaktadır [14]. Bu durumda klasik nümerik metotlarda çeşitli modifikasyonlar yapmak suretiyle yakınsak metotlar elde etmek mümkündür. [15] çalışmasında global Lipschitz koşulunu sağlamayan katsayı fonksiyonları, taming (evcilleştirme) çarpanı adı verilen özel çarpanlarla çarpılmıştır. Bu sayede açık metotların türettiği çözümlerin sınırlı kalması sağlanmıştır. Evcilleştirilmiş metotlarının farklı versiyonları [16, 17, 18, 19] çalışmalarında türetilmiştir.

[20, 21] çalışmalarında Projeksiyon Euler-Maruyama (PEM) ve Projeksiyon Milstein metotları geliştirilmiştir. Adından da anlaşılacağı üzere, bu metotlar nümerik çözümlerin sonsuza ıraksamasını engellemek için izdüşüm teknikleri kullanmaktadırlar. [22, 23, 24] çalışmalarında SDD'nin katsayı fonksiyonlarının kesme dönüşümleri ile bileşkeleri alınmak suretiyle çözümlerin sınırlı kalması sağlanmaktadır. [25] çalışmasında ise yarı-lineer denklemler için sürüklenme katsayı fonksiyonundaki lineer olmayan terimin global Lipschitz koşulunu sağlamadığı ve difüzyon katsayı fonksiyonunun sadece lineer terimi içerdiği durum için taming çarpanlı GBH üstel integratörü geliştirilmiş ve yakınsaklık analizi verilmiştir.

Bu tez çalışmasında, Bölüm 2'de stokastik süreçler ve Brown hareketi tanıtılmıştır. Ayrıca ilerleyen bölümlerde kullanılan olasılıksal eşitsizliklere yer verilmiştir. Bölüm 3'te Stokastik Diferansiyel Denklemlerin tam çözümlerinin, çeşitli koşullar altında varlık-teklik teoremleri ve çözümlerin momentlerinin sınırlı olması için yeter koşullar verilmiştir. Ayrıca 1-boyutlu ve d -boyutlu Geometrik Brown Hareketi tanıtılmış ve çözüm operatörünün sağladığı özellikler verilmiştir. Bölüm 4'te katsayı fonksiyonlarının global Lipschitz koşulunu sağladığı ve sağlamadığı durumlarda kuvvetli yakınsak olan klasik nümerik metotlar tanıtılmıştır. Metotların yakınsaklığını garanti eden koşullar verilmiş ve yakınsaklık mertebeleri belirlenmiştir. Test problemleri üzerinden teorik bulgular nümerik olarak doğrulanmıştır. Bölüm 5'te sürüklenme ve difüzyon katsayı fonksiyonları kendi içlerinde lineer ve lineer olmayan terimlere ayrılarak lineer terimlerin tam çözümlerini kullanan GBH tabanlı üstel integratörler tanıtılmıştır. Verilen referanslardaki sonuçlara ek olarak, global Lipschitz koşulu altında lineer difüzyon terime sahip SDD'ler için GBH tabanlı metodun (EI0) yakınsaklık mertebesinin 1 olduğu kanıtlanmıştır. Ayrıca [20] çalışmasında ta-

nıtılan Projeksiyon Euler-Maruyama metodu için GBH versiyonu türetilmiştir. Bu bölümde tanıtılan metotların çeşitli test denklemleri için nümerik performansları karşılaştırılmıştır.



2. ÖN BİLGİLER

2.1. Stokastik Süreçler

Bu tez çalışmasında incelenen stokastik diferansiyel denklemlerin çözümleri birer stokastik süreçtir. Stokastik süreçler rassal değişkenlerin bir koleksiyonu olarak düşünülebilir [26].

Ω örnek uzay, $\mathcal{F}$ sınıfı Ω 'nın ölçülebilir alt kümelerini içeren bir σ -cebiri ve $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ olasılık ölçüsü olmak üzere $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ olasılık uzayı verilsin. Her $0 \leq t < s < \infty$ için $\mathcal{F}$ 'nin $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}$ özelliğini sağlayan artan alt σ -cebirlerinin $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ ailesine **filtrasyon** denir. Eğer her $t \geq 0$ için $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s$ oluyorsa $\mathcal{F}_t$ filtrasyonu sağdan süreklidir denir. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ olasılık uzayı olmak üzere

$$\bar{\mathcal{F}} = \{A \subset \Omega \mid B \subset A \subset C, \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) \text{ olacak şekilde } \exists B, C \in \mathcal{F}\}$$

bir σ -cebirdir ve $\mathcal{F}$ 'nin tamlaması denir. Eğer $\mathcal{F} = \bar{\mathcal{F}}$ ise $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ olasılık uzayı **tam olasılık uzayıdır**. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ olasılık uzayı tam olasılık uzayı olsun, $\mathcal{F}_t$ filtrasyonu sağ sürekli ve $\mathcal{F}_0$ σ -ceberi, $\mathbb{P}$ 'ye göre ölçüsü 0 olan bütün kümeleri içersin. Bu durumda $\mathcal{F}_t$ filtrasyonu **genel koşulları** sağlıyor denir.

I indis kümesi ve $\mathbb{R}^d$ durum uzayı olmak üzere $\{X_t\}_{t \in I}$, $\mathbb{R}^d$ değerli rassal değişkenlerinin ailesine **stokastik süreç** denir. $\omega \in \Omega$ için $X_t(\omega) \in \mathbb{R}^d$ fonksiyonuna **örneklem yörünge** denir; kısaca X_t de yazılabilir.

$t \geq 0$ olmak üzere hemen hemen her $\omega \in \Omega$ için $X_t(\omega)$ fonksiyonu sürekli ise $\mathbb{R}^d$ değerli $\{X_t\}_{t \leq 0}$ stokastik süreç süreklidir. Aynı şekilde $\forall t$ için $X_t, \mathcal{F}_t$ -ölçülebilir ise stokastik süreç $\{\mathcal{F}_t\}$ -uyumlu denir.

2.2. Brown Hareketi

Brown hareketi ismini polen taneciklerinin su yüzeyindeki düzensiz hareketlerini inceleyen Robert Brown'dan [27] almaktadır. t anında ω polen tanesinin konumu $W_t(\omega)$ stokastik süreci ile modellenmiştir. Aşağıda Brown hareketinin matematiksel tanımı verilmiştir [7].

Tanım 2.2.1. $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ filtrasyon olmak üzere $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ olasılık uzayı olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan 1-boyutlu, reel değerli, sürekli ve $\{\mathcal{F}_t\}$ -uyumlu stokastik

sürece **Brown hareketi** denir ve $\{W_t\}$ ile gösterilir.

1. $W_0 = 0$
2. $\forall 0 \leq s < t < \infty$ için $W_t - W_s$ artışı $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ sağlar.
3. $\forall 0 \leq s < t < \infty$ için $W_t - W_s$ artışı $\mathcal{F}_s$ 'den bağımsızdır.

2.3. Itô İntegrali

Bu bölümde $d \times m$ -boyutlu matris değerli $\{f(t)\}$ stokastik süreci için m -boyutlu $\{W_t\}$ Brown hareketine göre

$$\int_0^t f(s) dW_s$$

stokastik integrali tanımlanacaktır. Bu integral ilk olarak 1949 yılında Kiyosi Itô tarafından tanımlanmıştır ve Itô stokastik integral [28] olarak bilinmektedir.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ genel koşulları sağlayan $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ filtrasyonuna göre tam olasılık uzayı olsun. $W = \{W_t\}_{t \geq 0}$ 1-boyutlu Brown hareketi bu olasılık uzayında tanımlı ve $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -uyumlu olsun.

Tanım 2.3.1. $0 \leq a < b < \infty$ olsun. $\mathcal{M}^2([a, b]; \mathbb{R})$

$$\|f\|_{a,b}^2 = \mathbb{E} \left[\int_a^b \|f(t)\|^2 dt \right] < \infty$$

şeklindeki $f = \{f(t)\}_{a \leq t \leq b}$ reel değerli, ölçülebilir ve $\{\mathcal{F}_t\}$ -uyumlu süreçlerin uzayıdır.

$$\|f - \bar{f}\|_{a,b}^2 = 0$$

için $f, \bar{f} \in \mathcal{M}^2([a, b]; \mathbb{R})$ olur. Bu durumda f ve $\bar{f}$ denktir ve $f = \bar{f}$ yazılır.

$f \in \mathcal{M}^2([a, b]; \mathbb{R})$ stokastik süreci için $\int_a^b f(t) dW_t$ Itô integralinin tanımlanmasındaki ilk adım g basit süreci için $\int_a^b g(t) dW_t$ integralinin tanımlanmasıdır. Ardından $f \in \mathcal{M}^2([a, b]; \mathbb{R})$ fonksiyonu g_n basit süreçler dizisinin limiti olarak ifade edilir ve $\int_a^b f(t) dW_t$ ve $\int_a^b g(t) dW_t$ integrallerinin limiti tanımlanır.

Tanım 2.3.2. $[a, b]$ aralığının bir bölüntüsü $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ olsun ve

$0 \leq i \leq k-1$ için $\mathcal{F}_{t_i}$ -ölçülebilir olacak şekilde ξ_i rassal değişkenleri verilsin.

$$g(t) = \xi_0 I_{[t_0, t_1]}(t) + \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i I_{[t_i, t_{i+1}]}(t) \quad (2.1)$$

şeklilde tanımlı reel değerli $g = \{g(t)\}_{a \leq t \leq b}$ stokastik sürecine **basit süreç** denir. Bu süreçler ailesi $\mathcal{M}_0([a, b]; \mathbb{R})$ ile ifade edilir.

Açıkça görüleceği gibi $\mathcal{M}_0([a, b]; \mathbb{R}) \subset \mathcal{M}^2([a, b]; \mathbb{R})$ 'dir. Artık basit süreçler için Itô integralin tanımı verilebilir.

Tanım 2.3.3. (2.1) formundaki bir basit süreç $g \in \mathcal{M}_0([a, b]; \mathbb{R})$ için

$$\int_a^b g(t) dW_t = \sum_{i=0}^{k-1} \xi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlı ifadeye $\{W_t\}$ Brown hareketine göre g 'nin stokastik integrali ya da **Itô integral** denir.

$\int_a^b g(t) dW_t$ stokastik integrali $\mathcal{F}_b$ -ölçülebilirdir. Aşağıda bu integralin $L^2(\Omega; \mathbb{R})$ uzayına ait olduğu gösterilmektedir.

Yardımcı Teorem 2.3.1. [8] $g \in \mathcal{M}_0([a, b]; \mathbb{R})$ verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_a^b g(t) dW_t \right] &= 0 \\ \mathbb{E} \left[\left| \int_a^b g(t) dW_t \right|^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\int_a^b |g(t)|^2 dt \right] \end{aligned}$$

olur. İkinci özellik Itô izometri olarak adlandırılır.

Yardımcı Teorem 2.3.2. $g_1, g_2 \in \mathcal{M}_0([a, b]; \mathbb{R})$ ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sabitler olsun. Bu durumda $c_1 g_1 + c_2 g_2 \in \mathcal{M}_0([a, b]; \mathbb{R})$ ve

$$\int_a^b [c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t)] dW_t = c_1 \int_a^b g_1(t) dW_t + c_2 \int_a^b g_2(t) dW_t$$

olur.

Artık yardımcı teorem (2.3.1) ve yardımcı teorem (2.3.2) kullanılarak integral tanımı basit süreçlerden $\mathcal{M}^2([a, b]; \mathbb{R})$ 'deki süreçlere genişletilebilir.

Yardımcı Teorem 2.3.3. [8] Herhangi $f \in \mathcal{M}^2([a, b]; \mathbb{R})$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_a^b |f(t) - g_n(t)|^2 dt \right] = 0$$

olacak şekilde basit süreçlerin $\{g_n\}$ dizisi vardır.

Tanım 2.3.4. $f \in \mathcal{M}^2([a, b]; \mathbb{R})$ olsun. $\{g_n\}$ basit süreçlerin dizisi olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_a^b |f(t) - g_n(t)|^2 dt \right] = 0$$

olsun. f 'nin $\{W_t\}$ 'ye göre Itô integrali

$$\int_a^b f(t) dW_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(t) dW_t \quad (2.3)$$

şeklindedir.

Aşağıda stokastik integrallerin bazı özellikleri verilmiştir.

Teorem 2.3.1. [29] $f, g \in \mathcal{M}^2([a, b]; \mathbb{R})$ ve α, β reel sabitler olsun.

1. $\int_a^b f(t) dW_t$ integrali $\mathcal{F}_b$ -ölçülebilirdir
2. $\mathbb{E} \left[\int_a^b f(t) dW_t \right] = 0$
3. $\int_a^b [\alpha f(t) + \beta g(t)] dW_t = \alpha \int_a^b f(t) dW_t + \beta \int_a^b g(t) dW_t$
- 4.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_a^b f(t) dW_t \mid \mathcal{F}_a \right] &= 0, \\ \mathbb{E} \left[\left| \int_a^b f(t) dW_t \right|^2 \mid \mathcal{F}_a \right] &= \mathbb{E} \left[\int_a^b |f(t)|^2 dt \mid \mathcal{F}_a \right] \\ &= \int_a^b \mathbb{E}[|f(t)|^2 \mid \mathcal{F}_a] dt \end{aligned}$$

özellikleri sağlanır.

Yardımcı Teorem 2.3.4. [7] $f \in \mathcal{M}^2([a, b]; \mathbb{R})$ ve ξ reel değerli sınırlı $\mathcal{F}_a$ -ölçülebilir

rassal değişken olsun. Bu durumda $\xi f \in \mathcal{M}^2([a, b]; \mathbb{R})$ ve

$$\int_a^b \xi f(t) dW_t = \xi \int_a^b f(t) dW_t$$

olur.

Artık Itô stokastik integrali çok boyutlu hale genişletilebilir. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tam olasılık uzayı ve $\{W_t = (W_t^1, \dots, W_t^m)^T\}_{t \geq 0}$ bu uzayda tanımlı m -boyutlu ve $\{\mathcal{F}_t\}$ -uyumlu Brown hareketi olsun. $d \times m$ matris değerli, ölçülebilir ve $\{\mathcal{F}_t\}$ -uyumlu

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T |f(s)|^2 ds \right] < \infty$$

sağlayan $f = \{(f_{ij}(t))_{d \times m}\}_{0 \leq t \leq T}$ süreçlerinin ailesi $\mathcal{M}^2([0, T]; \mathbb{R}^{d \times m})$ olsun. Burada $|A| = \sqrt{\text{tr}(A^T A)}$ ifadesi A matrisinin iz normunu belirtir.

Tanım 2.3.5. $f \in \mathcal{M}^2([0, T]; \mathbb{R}^{d \times m})$ olsun. Matris notasyonunu kullanarak çok boyutlu belirsiz Itô integral

$$\int_0^t f(s) dW_s = \int_0^t \begin{pmatrix} f_{11}(s) & \cdots & f_{1m}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{d1}(s) & \cdots & f_{dm}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_s^1 \\ \vdots \\ dW_s^m \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır. d -kolonu i . bileşeni

$$\sum_{j=1}^m \int_0^t f_{ij}(s) dW_s^j$$

şeklinde 1-boyutlu Itô integrallerin toplamı şeklinde vektör değerli süreçlerdir.

Öncelikle 1-boyutlu Itô süreci tanıtılıp daha sonra çok boyutlu olarak genelleştirilecektir.

$\{W_t\}$ 1-boyutlu $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tam olasılık uzayında tanımlı ve $\{\mathcal{F}_t\}$ -uyumlu Brown hareketi olsun. Hemen hemen $\forall t > 0$ için

$$\int_0^t \|f(s)\|^2 ds < \infty$$

şeklinde tanımlı $f = \{f(t)\}_{t \geq 0}$ fonksiyonu $\mathbb{R}^d$ değerli ve $\{\mathcal{F}_t\}$ -uyumlu süreçlerin

ailesi $L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$ 'nin elemanı olsun.

Tanım 2.3.6. $f \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$ ve $g \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$ olsun. $t \geq 0$ için X_t

$$dX_t = f(t)dt + g(t)dW_t$$

şeklinde verilen dX_t stokastik diferansiyale sahip olsun. $t \geq 0$ için

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t g(s)dW_s \quad (2.5)$$

sürekli uyumlu X_t sürecine 1-boyutlu **Itô süreci** denir.

$t \geq 0$ için $W(t) = (W_1(t), \dots, W_m(t))^T$ m -boyutlu $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tam olasılık uzayında tanımlı ve $\{\mathcal{F}_t\}$ -uyumlu Brown hareketi olsun.

Tanım 2.3.7. $f = (f_1, \dots, f_d)^T \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$ ve $g = (g_{ij})_{d \times m} \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^{d \times m})$ olsun. $t \geq 0$ için $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^d)^T$

$$dX_t = f(t)dt + g(t)dW_t$$

şeklinde verilen dX_t stokastik diferansiyale sahip olsun. $t \geq 0$ için

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t g(s)dW_s$$

$\mathbb{R}^d$ değerli sürekli uyumlu X_t sürecine d -boyutlu **Itô süreci** denir.

Itô Formülü

$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ 'te tanımlı, X 'e göre iki kez türevlenebilir ve t 'ye göre bir kez türevlenebilir $V(X, t)$ reel değerli fonksiyonların ailesi $C^{2,1}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ ile gösterilsin. Eğer $V \in C^{2,1}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ ise

$$V_t = \frac{\partial V}{\partial t}, \quad V_x = \left(\frac{\partial V}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x^d} \right)$$

$$V_{xx} = \left(\frac{\partial V}{\partial x^i, x^j} \right)_{d \times d} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x^1, x^1} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x^1, x^d} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial V}{\partial x^d, x^1} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x^d, x^d} \end{pmatrix}$$

olsun.

Teorem 2.3.2. [8, 29] $t \geq 0$, $f \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$ ve $g \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^{d \times m})$ için

$$dX_t = f(t)dt + g(t)dW_t$$

stokastik diferansiyel olmak üzere X_t Itô süreci olsun. $V \in C^{2,1}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ olsun.

$V(X_t, t)$ Itô süreci

$$dV(X_t, t) = \left[V(X_t, t) + V_x(X_t, t)f(t) + \frac{1}{2} \text{tr}(g^\top(t)V_{xx}(X_t, t)g(t)) \right] dt + V_x(X_t, t)g(t)dW(t)$$

ile verilen stokastik denklemi sağlar.

Olasılık Teorisinde Temel Eşitsizlikler

$L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$ uzayı, $\mathbb{E}[\|X\|^p] < \infty$ özelliğini sağlayan $\mathbb{R}^d$ değerli X rassal değişkenlerinin uzayını göstermek üzere aşağıda bazı temel eşitsizlikler verilmiştir [7].

i. Hölder Eşitsizliği

$X \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$ ve $Y \in L^q(\Omega, \mathbb{R}^d)$ olsun $p > 1$ olmak üzere $1/p + 1/q = 1$ iken

$$|\mathbb{E}[X^\top Y]| \leq (\mathbb{E}[\|X\|^p])^{1/p} (\mathbb{E}[\|Y\|^q])^{1/q}$$

olur.

ii. Minkovski Eşitsizliği

$X, Y \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$ olmak üzere $p > 1$ iken

$$(\mathbb{E}[\|X + Y\|^p])^{1/p} \leq (\mathbb{E}[\|X\|^p])^{1/p} + (\mathbb{E}[\|Y\|^p])^{1/p}$$

olur.

iii. **Chebyshev Eşitsizliği**

$X \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$ alınsın $c > 0$ ve $p > 0$ iken

$$\mathbb{P}\{\omega \mid \|X(\omega)\| \geq c\} \leq c^{-p} \mathbb{E}[\|X\|^p]$$

olur.

iv. **Jensen Eşitsizliği** $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon, X reel değerli bir rassal değişken ve $\mathbb{E}[X] < \infty$ olsun. Bu taktirde

$$\phi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\phi(X)] \quad (2.6)$$

Özel olarak $p > 1$ için $\mathbb{E}[\|X\|^p] \leq \mathbb{E}[\|X\|^p]$ dir.

Gronwall Eşitsizlikleri

Yardımcı Teorem 2.3.5 (Ayrık Gronwall Lemma). [8, 29] $n \geq 0$ ve $c \geq 0$ olsun. u_k sınırlı, negatif olmayan ve v_k negatif olmayan fonksiyonlar olsun. Her $n \geq 0$ için

$$u_n \leq c + \sum_{k=0}^n u_k v_k$$

oluyorsa

$$u_n \leq c \exp\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$$

sağlanır.

Yardımcı Teorem 2.3.6 (Sürekli Gronwall Lemma). [7, 8] $T > 0$ ve $c \geq 0$ olsun. $u(\cdot)$ $[0, T]$ üzerinde tanımlı, sınırlı ve negatif olmayan Borel ölçülebilir fonksiyon ve $v(\cdot)$ $[0, T]$ üzerinde tanımlı negatif olmayan integrallenebilir fonksiyon olsun. Her $0 \leq t \leq T$ için

$$u(t) \leq c + \int_0^t v(s)u(s)ds$$

oluyorsa

$$u(t) \leq c \exp\left(\int_0^t v(s)ds\right)$$

sağlanır.

3. STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER

3.1. Itô Stokastik Diferansiyel Denklemler

Stokastik diferansiyel denklemler, stokastik integralin Itô veya Stratonovich tipinde olmasına bağlı olarak iki kategoride sınıflandırılabilir [30]. Bu çalışmada Itô stokastik diferansiyel denklemler ele alınacaktır. $\{\mathcal{F}_t\}$, Bölüm (2.1)'de tanımlanan genel koşulları sağlayan filtrasyon ile birlikte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tam olasılık uzayı olsun. $0 < T < \infty$ ve X_0 rassal değişkeni, $\mathbb{E}[||X_0||] < \infty$ şeklinde $\mathbb{R}^d$ değerli $\mathcal{F}_0$ -ölçülebilir olsun. $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ve $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$ fonksiyonları Borel ölçülebilir olsun. $0 \leq t \leq T$ üzerinde W_t Brown hareketi olmak üzere başlangıç koşulu X_0 ile d -boyutlu Itô tipindeki stokastik diferansiyel denklem

$$dX_t = f(X_t)dt + g(X_t)dW_t \quad (3.1)$$

biçiminde verilir. Bu denklem

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s)ds + \int_0^t g(X_s)dW_s \quad (3.2)$$

ile verilen stokastik integral denkleme karşılık gelir. Aşağıda bir stokastik sürecin denklem (3.1)'in çözümü olarak tanımlanabilmesi için gereklilikler verilmiştir.

Tanım 3.1.1. $\{X_t\}_{0 \leq t \leq T}$, $\mathbb{R}^d$ değerli stokastik süreç olsun. Aşağıda verilen

1. $\{X_t\}$ sürekli ve $\{\mathcal{F}_t\}$ -uyumludur
2. $\{f(X_t)\} \in L^1([0, T]; \mathbb{R}^d)$ ve $\{g(X_t)\} \in L^2([0, T]; \mathbb{R}^{d \times m})$
3. $\forall t \in [0, T]$ için denklem (3.2)'nin sağlanma olasılığı 1'dir

özellikleri sağlanıyorsa $\{X_t\}$ sürecine denklem (3.1)'in çözümüdür denir. Farklı bir $\{\bar{X}_t\}$ çözümü bu $\{X_t\}$ çözümünden ayırt edilemez ise başka bir deyiş ile

$$\mathbb{P}\{\forall 0 \leq t \leq T \text{ için } X_t = \bar{X}_t\} = 1$$

eşitliği sağlanıyorsa çözümün tek olduğu söylenir.

3.2. Varlık ve Teklik Teoremleri

Stokastik diferansiyel denklemler için varlık ve teklik teoremleri katsayıların global veya lokal Lipschitz koşullarından hangisini sağladığına bağlı olarak çeşitlendirilebilir. Lipschitz özelliğinin global veya lokal olarak sağlanması önerilen nümerik metotları yakınsaklık analizleri için de önemli bir husustur [14].

Teorem 3.2.1. [8, 29] Varsayalım K pozitif sabit sayısı

1. (Global Lipschitz koşulu) $\forall X, Y \in \mathbb{R}^d$ için

$$|f(X) - f(Y)|^2 \vee |g(X) - g(Y)|^2 \leq K|X - Y|^2 \quad (3.3)$$

2. (Lineer büyüme koşulu) $\forall X \in \mathbb{R}^d$ için

$$|f(X)|^2 \vee |g(X)|^2 \leq K(1 + |X|^2) \quad (3.4)$$

olacak şekilde var olsun. Bu durumda (3.1) denkleminin tek bir X_t çözümü vardır ve bu çözüm $\mathcal{M}^2([0, T]; \mathbb{R}^d)$ uzayına aittir.

Çözümün varlığı bilindiği taktirde bu çözümün herhangi bir $t \in [0, T]$ anında sonlu momente sahip olması ve bu momentin başlangıç koşulu ile sınırlanması da önem arz etmektedir.

Yardımcı Teorem 3.2.1. [29] (3.4) lineer büyüme koşulunun sağlandığı varsayalım. Eğer X_t süreci (3.1) denkleminin çözümü ise

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2 \right] \leq (1 + 3\mathbb{E}|X_0|^2)e^{3KT(T+4)} \quad (3.5)$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $X_t \in \mathcal{M}^2([0, T]; \mathbb{R}^d)$.

Uygulama alanındaki pek çok denklem için global Lipschitz koşulu oldukça sınırlayıcıdır. Örneğin $x \rightarrow x^2$, $x \rightarrow \cos x^2$ gibi fonksiyonlar $\mathbb{R}$ 'de sürekli olmalarına rağmen global Lipschitz özelliğini sağlamazlar. Bu yüzden bir önceki varlık teoreminin lokal Lipschitz koşulunu sağlayan denklemler için genelleştirilmesi aşağıdaki teoremden verilmiştir.

Teorem 3.2.2. (3.4) lineer büyüme koşulunun sağlandığı varsayalım. Fakat (3.3) global Lipschitz koşulu yerine $\forall n \geq 1$ tamsayısı, $\forall t \in [0, T]$ ve $|X| \vee |Y| \leq n$ şeklindeki her $X, Y \in \mathbb{R}^d$ için

$$|f(X) - f(Y)|^2 \vee |g(X) - g(Y)|^2 \leq K_n |X - Y|^2. \quad (3.6)$$

olacak şekilde K_n pozitif sabitinin varolma koşulu (lokal Lipschitz koşulu) konulsun. Bu durumda (3.1) denkleminin $\mathcal{M}^2([0, T]; \mathbb{R}^d)$ uzayında tek bir çözümü mevcuttur [29].

Varlık teoremlerinde (3.4) ile verilen lineer büyüme koşulu da kısıtlayıcı bir koldur. Güncel literatürde lineer büyüme koşulunun yerine aşağıdaki teoremden ifade edilecek olan global monotonluk koşulu konulmaktadır. Böylece daha geniş bir sınıftaki stokastik diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varlık ve tekliği garanti edilmiş olur.

Teorem 3.2.3. (3.6) lokal Lipschitz koşulunun sağlandığı varsayalım. Fakat (3.4) lineer büyüme koşulu yerine $\forall X \in \mathbb{R}^d \times [0, T]$ için

$$\langle X, f(X) \rangle + \frac{1}{2} |g(X)|^2 \leq K(1 + |X|^2) \quad (3.7)$$

olacak şekilde pozitif K sabitinin varolması koşulu (global monotonluk koşulu) konulsun. Bu durumda (3.1) denkleminin $\mathcal{M}^2([0, T]; \mathbb{R}^d)$ uzayında tek bir çözümü mevcuttur.

Örneğin

$$dX_t = (X - X^3)dt + X^2 dW_t$$

denkleminde $f(X) = X - X^3$ ve $g(X) = X^2$ katsayı fonksiyonları global Lipschitz ve lineer büyüme koşullarından hiçbirini sağlamaz. Fakat her ikisi de kompakt bir küme üzerinde sürekli türevlere sahip oldukları için lokal Lipschitz koşulunu sağlarlar.

Şimdiye kadar verilen varlık teklik teoremleri çözümlerin varlığını sabit bir T için sonlu $[0, T]$ aralığında garanti etmişlerdir. Tüm $[0, \infty)$ aralığında mevcut olan çözümlere global çözüm adı verilir. Global çözümlerin varlığı aşağıdaki teorem ile ifade edilir.

Teorem 3.2.4. $\forall T > 0$ reel sayı ve $n \geq 1$ tamsayı olmak üzere $\forall t \in [0, T]$ ve $|X| \vee |Y| \leq n$ şeklindeki her $X, Y \in \mathbb{R}^d$ için

$$|f(X) - f(Y)|^2 \vee |g(X) - g(Y)|^2 \leq K_{T,n} |X - Y|^2 \quad (3.8)$$

olacak şekilde $K_{T,n}$ pozitif sabit sayısının mevcut olduğu varsayalım. Ayrıca $\forall T > 0$ olmak üzere $\forall X \in \mathbb{R}^d \times [0, T]$ için

$$\langle X, f(X) \rangle + \frac{1}{2} |g(X)|^2 \leq K_T (1 + |X|^2)$$

olacak şekilde K_T pozitif sabit sayısı da mevcut olsun. Bu taktirde $t \in [0, \infty)$ olmak üzere (3.1) denkleminin $\mathcal{M}^2([0, \infty); \mathbb{R}^d)$ uzayında tek bir çözümü vardır.

3.3. Çözümlerin Momentlerinin Özellikleri

(3.1) denkleminin çözümünün $[0, T]$ aralığında çözümünün mevcut olduğu bilindiğinde çözümün sınırlı momentlere sahip olduğu ve zamandaki regülerliği nümerik analiz aşamalarında kullanılmaktadır. Aşağıda söz konusu özellikler $p \geq 2$ için $L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$ uzayında verilmiştir. Benzer şekilde $0 < p < 2$ için özellikler

$$\mathbb{E}[|X|^p] \leq \mathbb{E}[|X|^2]^{\frac{p}{2}}$$

Hölder eşitsizliğinden elde edilebilir.

Teorem 3.3.1. $p \geq 2$ ve $X_0 \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$ olsun. Varsayalım $\forall X \in \mathbb{R}^d \times [0, T]$ için

$$\langle X, f(X) \rangle + \frac{p-1}{2} |g(X)|^2 \leq \alpha (1 + |X|^2) \quad (3.9)$$

olacak şekilde $\alpha > 0$ sayısı olsun. Böylece $\forall t \in [0, T]$ için

$$\mathbb{E}[|X_t|^p] \leq 2^{\frac{p-2}{2}} (1 + \mathbb{E}[|X_0|^p]) e^{p\alpha(t-0)} \quad (3.10)$$

olur.

Teorem 3.3.2. $p \geq 2$ ve $X_0 \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$ olsun. Varsayalım lineer büyüme koşulu

(3.4) sağlansın. Bu durumda $\alpha = \sqrt{K} + K(p-1)/2$ ve

$$C = 2^{p-2}(1 + \mathbb{E}[|X_0|^p])e^{p\alpha(T-0)} \left([2(T-0)]^{\frac{p}{2}} + [p(p-1)]^{\frac{p}{2}} \right)$$

iken her $0 \leq s < t \leq T$ için

$$\mathbb{E}[|X_t - X_s|^p] \leq C(t-s)^{\frac{p}{2}} \quad (3.11)$$

dir. Çözümün p . momentini $[0, T]$ üzerinde sürekli olarak

3.4. Otonom Doğrusal Denklemler

$A, B_k \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ve $f, g_k : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ olmak üzere $X_0 = X_{t_0}$ başlangıç değeri ile $[0, T]$ üzerindeki bir d -boyutlu stokastik diferansiyel denklemi

$$dX_t = (AX_t + f(t))dt + \sum_{k=1}^m (B_k X_t + g_k(t))dW_t^k \quad (3.12)$$

şeklinde ele alınsın. Bu denkleme karşılık gelen homojen denklem

$$dX_t = AX_t dt + \sum_{k=1}^m B_k X_t dW_t^k \quad (3.13)$$

şeklindedir. Genel olarak bu homojen denklemin Φ_{t,t_0} temel matrisi açık bir şekilde verilemez. Fakat eğer $A, B_1, \dots, B_m$ matrisleri çarpma işlemine göre değişme özelliğine sahiplerse, yani her $1 \leq k, j \leq m$ için

$$AB_k = B_k A, \quad B_k B_j = B_j B_k \quad (3.14)$$

sağlanıyorsa (3.13) denkleminin çözümü **Geometrik Brown Hareketi** olarak adlandırılır. Bu çözüme karşılık gelen temel matris

$$\Phi_{t,t_0} = \exp \left[\left(A - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m B_k^2 \right) (t - t_0) + \sum_{k=1}^m B_k (W_t^k - W_{t_0}^k) \right] \quad (3.15)$$

ile verilir [7]. Bunu göstermek için

$$Y_t = \left(A - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m B_k^2 \right) (t - t_0) + \sum_{k=1}^m B_k (W_t^k - W_{t_0}^k)$$

seçildiğinde

$$\Phi_{t,t_0} = \exp(Y_t)$$

yazılabilir. (3.14) koşulundan ve (2.3.2) Itô Lemma'dan stokastik diferansiyel denklemi

$$\begin{aligned} d\Phi_{t,t_0} &= \exp(Y_t) dY_t + \frac{1}{2} \exp(Y_t) dY_t^2 \\ &= \Phi_{t,t_0} dY_t + \frac{1}{2} \Phi_{t,t_0} \left(\sum_{k=1}^m B_k^2 \right) dt \\ &= A \Phi_{t,t_0} dt + \sum_{k=1}^m B_k \Phi_{t,t_0} dW_t^k \end{aligned}$$

olduğu gösterilir. Dolayısıyla $\Phi_{t,0}$ homojen denklemi sağlar ve bu yüzden temel matristir.

Artık homojen olmayan (3.13) denkleminin çözümü, temel matris Φ_{t,t_0} cinsinden Itô kalkülüs yardımıyla

$$\begin{aligned} X_t = \Phi_{t,t_0} \left[X_{t_0} + \left(\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) ds \right) \left(f - \sum_{k=1}^m B_k g_k \right) \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^m \left(\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) dW_s^k \right) g_k \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

biçiminde verilir.

Örnek 3.4.1 (1-boyutlu Geometrik Brown Hareketi). Geometrik Brown Hareketi α, σ sabitler olmak üzere 1-boyutlu

$$dX_t = \alpha X_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad t \geq 0 \quad (3.17)$$

lineer denklemin çözümüdür. Verilen X_0 başlangıç değeri için denklemin çözümü

$$X_t = X_{t_0} \exp \left[\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right] \quad (3.18)$$

şeklindedir.

GBH tabanlı nümerik metotların yakınsaklık analizi için aşağıdaki teoremlerde verilen eşitsizliklere ihtiyaç duyulacaktır.

Yardımcı Teorem 3.4.1. [25] $0 < t - s < 1$ ve $t_0 = s$ iken (3.15) denklemindeki Φ_{t,t_0} stokastik matrisi göz önünde bulundursun. $p \geq 2$ iken her $\mathcal{F}_s$ -ölçülebilir $Y \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$ rassal değişkeni için

$$\begin{aligned} \|\Phi_{t,s} Y - Y\|_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)} &\leq C_p |t - s|^{1/2} \\ \|\Phi_{t,s}^{-1} Y - Y\|_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)} &\leq C_p |t - s|^{1/2} \end{aligned}$$

olur.

Yardımcı Teorem 3.4.2. [25] $p \geq 2$, $s < t$ olduğu varsayılın ve $t_0 = s$ iken (3.15) denklemini verilsin.

i. Herhangi bir $\mathcal{F}_s$ -ölçülebilir $Y \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$ rassal değişkeni için

$$\|\Phi_{t,s} Y\|_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)} \leq \exp \left(\left(\|A\| + \frac{p-1}{2} \sum_{i=1}^m \|B_i\|^2 \right) (t-s) \right) \|Y\|_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)}.$$

ii. Herhangi bir $\mathcal{F}_t$ -ölçülebilir $Y \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$ rassal değişken, $r, q > 1$ olmak üzere $1/p = 1/r + 1/q$ için $K_p = \|\Phi_{t,s}\|_{L^r(\Omega, \mathbb{R}^d)}$ iken

$$\|\Phi_{t,s} Y\|_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)} \leq K \|Y\|_{L^q(\Omega, \mathbb{R}^d)}$$

olur.

4. SDD'LER İÇİN KLASİK NÜMERİK METOTLAR

Lineer olmayan sürüklenme ya da difüzyon fonksiyonları için (3.1) denkleminin tam (exact) çözümleri genelde belirlenemez. Dolayısıyla nümerik tekniklere başvurulur. Bu bölümde f ve g katsayı fonksiyonlarının global Lipschitz koşulunu sağladığı ve sağlamadığı durumlarda yakınsak olan nümerik metotlar tanıtılacaktır.

Nümerik metotlarda genel olarak $t \in [0, T]$ için X_t çözümlerine yaklaşım $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$, $t_{i+1} - t_i = \Delta t = T/N$ bölüntüsü üzerinde aranır. Bir nümerik metot, $t = t_n$ anında X_{t_n} gerçek çözümüne yeterince yakın olan X_n yaklaşımını türetir.

Tanım 4.0.1 (Kuvvetli Yakınsaklık ve Yakınsaklık Mertebesi). $\bar{X}_t$ süreci, $\bar{X}_{t_n} = X_n$ eşitliğini sağlayan $\{X_n\}_{k=0}$ nümerik çözümlerinin sürekli bir interpolasyon fonksiyonu olmak üzere

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\|X_t - \bar{X}_t\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)}] = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa, $\bar{X}_t$ nümerik çözümü X_t tam çözümüne $L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ 'de **kuvvetli yakınsaktır** [7, 8] denir.

$$\sup_{t \in [0, T]} \|X_t - \bar{X}_t\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)} \leq K \Delta t^\alpha$$

olacak şekilde $K, \alpha > 0$ reel sayıları mevcutsa $\bar{X}_t$ 'yi türeten metodun **kuvvetli yakınsaklık mertebesi** α 'dır.

4.1. Global Lipschitz Koşulu Altında Klasik Yakınsak Metotlar

f ve g fonksiyonları (3.3) ve (3.4) ile verilen global Lipschitz ve lineer büyüme koşullarını sağlasın. Bu taktirde deterministik nümerik analizde geliştirilen açık ve kapalı Euler metotlarının [31] stokastik versiyonları kolaylıkla türetilir.

4.1.1. Açık Euler-Maruyama metodu

Bu bölümde, Euler-Maruyama metodu ile stokastik diferansiyel denklemin X_{t_n} tam çözümünün X_n nümerik yaklaşımı incelenecektir.

$f \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ ve $g \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d \times m})$ olmak üzere (3.1) denkleminin X_{t_n} tam çözümüne karşılık gelen X_n Euler-Maruyama yaklaşımı

$$X_{n+1} = X_n + f(X_n)\Delta t + g(X_n)\Delta W_n, \quad \Delta W_n := \int_{t_n}^{t_{n+1}} dW_i = W_{t_{n+1}} - W_{t_n}$$

şeklinde ifade edilir. Denklem (3.1)'den

$$X_{t_{n+1}} = X_0 + \int_0^{t_{n+1}} f(X_s)ds + \int_0^{t_{n+1}} g(X_s)dW_s$$

ve

$$X_{t_n} = X_0 + \int_0^{t_n} f(X_s)ds + \int_0^{t_n} g(X_s)dW_s$$

eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$X_{t_{n+1}} = X_{t_n} + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(X_s)ds + \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(X_s)dW_s$$

olur. f ve g fonksiyonlarını $[t_n, t_{n+1}]$ aralığında sabitletirse

$$X_{n+1} = X_n + f(X_n)\Delta t + g(X_n)\Delta W_n, \quad \Delta W_n = W_{t_{n+1}} - W_{t_n}$$

Euler-Maruyama metodu elde edilir. Euler-Maruyama metodu katsayı fonksiyonlarının global Lipschitz ve lineer büyüme koşullarını (3.2.1) sağladığı durumda kuvvetli yakınsaktır ve yakınsama mertebesi $1/2$ 'dir [7, 8].

4.1.2. Kapalı Euler-Maruyama metodu

$\Delta t > 0$ zaman adımı ve $X_0 \in \mathbb{R}^d$ başlangıç koşulu göz önünde bulunsun. (3.1) denkleminin X_{t_n} tam çözümüne bir yaklaşım kapalı Euler-Maruyama metodu

$$X_{n+1} = X_n + f(X_{n+1})\Delta t + g(X_n)\Delta W_n \quad (4.1)$$

şeklinde ifade edilir. Kapalı Euler-Maruyama metodu katsayı fonksiyonlarının global Lipschitz ve lineer büyüme koşullarını (3.4) ve (3.3) sağladığı durumda kuvvetli yakınsaktır ve yakınsama mertebesi $1/2$ 'dir [7].

4.1.3. Milstein metodu

$\Delta t > 0$ zaman adımı ve $X_0 \in \mathbb{R}^d$ başlangıç koşulu ele alınsın. (3.1) denkleminin X_{t_n} tam çözümüne karşılık X_n Milstein yaklaşımı ($d = m = 1$)

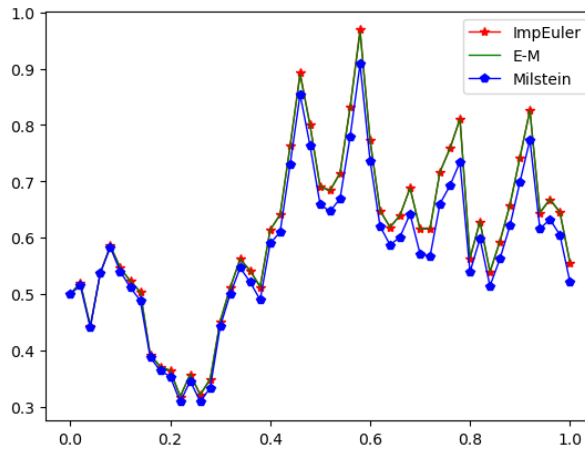
$$X_{n+1} = X_n + f(X_n)\Delta t + g(X_n)\Delta W_n + \frac{1}{2}\partial g(X_n)g(X_n)(\Delta W_n^2 - \Delta t) \quad (4.2)$$

şeklinde verilir. Bu metodun f ve g katsayı fonksiyonları global Lipschitz ve lineer büyüme koşullarını sağladığı durumda kuvvetli yakınsaktır ve yakınsama mertebesi 1'dir. Daha yüksek mertebeden metotlar için Milstein metodunun türetilmesi ve uygulanması için [7, 8] kaynakları incelenebilir.

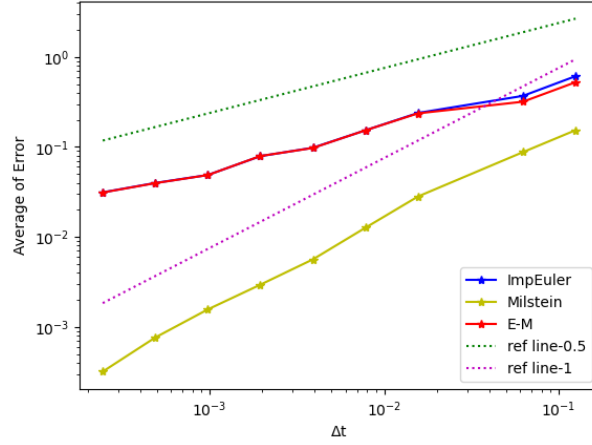
4.1.4. Nümerik testler

$$dX = \left(aX - \frac{bX}{1 + X^2} \right) dt + \sigma X dW \quad (4.3)$$

denklemi $X_0 = 0.5$ başlangıç koşulu altında $a = 0.5$, $b = 0.4$, $\sigma = 1$, $T = 1$, $N = 50$ parametreleri ve $\Delta t = T/N = 1/50$ alınarak E-M (açık Euler-Maruyama), ImpEuler (kapalı Euler-Maruyama) ve Milstein metotları ile çözülmüştür. Şekil 4.1'de denklemin her metot için bir adet örneklem yörüngesi verilmiştir. Şekil 4.2'de Monte Carlo simülasyonu kullanılarak metotların kuvvetli hata mertebeleri nümerik olarak doğrulanmıştır. Şekil 4.1 ve Şekil 4.2'yi üreten kodlar Ekler kısmında verilmiştir.



Şekil 4.1. Denklem (4.3)'ün çeşitli metotlarla türetilen örneklem yörüngesi



Şekil 4.2. Açık Euler-Maruyama, kapalı Euler-Maruyama ve Milstein metotlarının (4.3) denklemi için kuvvetli yakınsaklık mertebeleri

4.2. Lokal Lipschitz Koşulu Altında Klasik Yakınsak Metotlar

f ve g fonksiyonlarından en az biri global Lipschitz koşulunu sağlamadığında açık Euler-Maruyama metodunun ıraksak çözümler türettiği [14] çalışmasında kanıtlanmıştır. Bu bölümde global Lipschitz koşulunu sağlamayan f sürüklenme terimine sahip SDD'ler için kuvvetli yakınsaklığı garanti eden evcilleştirilmiş Euler-Maruyama [15], Projeksiyon Euler-Maruyama (PEM) metodu [20] ve Split-Step Euler-Maruyama metodu [30] tanıtılmıştır. Metotların performansı lineer olmayan kübik sürüklenme terimine sahip Ginzburg-Landau denklemi üzerinde test edilmiştir.

4.2.1. Evcilleştirilmiş Euler-Maruyama metodu

Diferansiyellenebilir ve polinom büyümesine sahip $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ sürüklenme fonksiyonu (3.6) lokal Lipschitz koşulunu sağladığını varsayalım. Artık lineer büyüme koşulu yerine

$$\|f'(X)\| \leq C(1 + \|X\|^c), \quad \langle X - Y, f(X) - f(Y) \rangle \leq C\|X - Y\|^2 \quad (4.4)$$

koşulunu sağlasın. $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ difüzyon fonksiyonu (3.3) global Lipschitz koşulunu sağlasın. Bu durumda (3.7) monotonluk koşulu sağlanmış olur. Evcilleştirilmiş Euler-

Maruyama metodu [15]

$$X_{n+1} = X_n + \frac{f(X_n)\Delta t}{(1 + \Delta t\|f(X_n)\|)} + g(X_n)\Delta W_n \quad (4.5)$$

ile verilir. $\frac{f(X_n)\Delta t}{(1 + \Delta t\|f(X_n)\|)} < 1$ olduğu göz önünde bulundurulmalıdır. Bu da sürüklenme teriminin sınırsız büyümesini engellemektedir.

4.2.2. Projeksiyon Euler-Maruyama metodu

(3.1) denklemi göz önünde bulunsun. f ve g katsayı fonksiyonlarının $\eta \in (\frac{1}{2}, \infty)$ pozitif bir sabit, $\forall t \in [0, T]$, $q \in (1, \infty)$ ve $X, Y \in \mathbb{R}^d$ için

$$\langle f(X) - f(Y), X - Y \rangle + \eta \sum_{i=1}^m \|g_i(X) - g_i(Y)\|^2 \leq L\|X - Y\| \quad (4.6)$$

ve

$$\begin{aligned} \|f(X)\| \vee \|g_i(X)\| &\leq L(1 + \|X\|^q) \\ \|f(X) - f(Y)\| \vee \|g_i(X) - g_i(Y)\| &\leq L(1 + \|X\|^{q-1} + \|Y\|^{q-1})\|X - Y\| \end{aligned} \quad (4.7)$$

koşullarını sağladığı varsayımı altında Euler-Maruyama metodunun başka bir şekli olan **Projeksiyon Euler-Maruyama metodu**, [20] bir önceki adımdan gelen nümerik çözümü bir dairenin üzerine izdüşürmektedir. $q \in (1, \infty)$ için $\alpha \in (0, 1]$ parametresi $\alpha = \frac{1}{2(q-1)}$ şeklinde seçilir ve bu metot $1 \leq i \leq N$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \bar{X}_{n+1} &:= \min(1, \Delta t^{-\alpha}\|X_n\|^{-1})X_n \\ X_{n+1} &:= \bar{X}_{n+1} + \Delta t f(\bar{X}_{n+1}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m g_i(\bar{X}_{n+1})(W_t^i - W_{t_{-1}}^i) \end{aligned} \quad (4.8)$$

şeklinde ifade edilir.

4.2.3. Split-Step Euler-Maruyama metodu

Split-Step Euler-Maruyama metodu [30] verilen SDD'yi iki alt denkleme ayırmaktadır. Sürüklenme terimini içeren alt denklem kapalı metot ile difüzyon terimini

içeren alt denklem ise açık metot ile çözülmektedir.

$$\bar{X}_n = X_n + f(\bar{X}_n)\Delta t \quad (4.9)$$

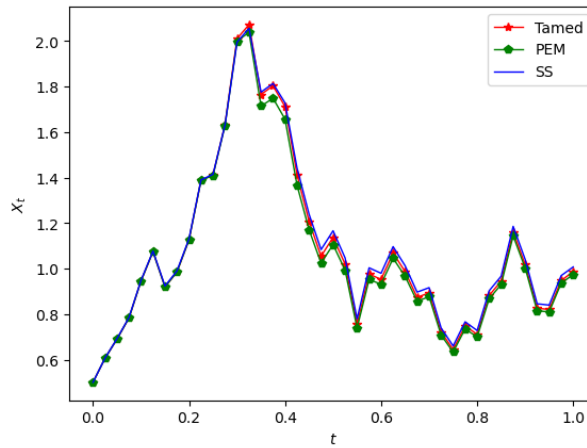
$$X_{n+1} = \bar{X}_n + g(\bar{X}_n)\Delta W_n \quad (4.10)$$

(4.9) denkleminin $\bar{X}_n$ ara yaklaşımına göre çözülmesi gereken kapalı denklem olduğuna dikkat edilmelidir.

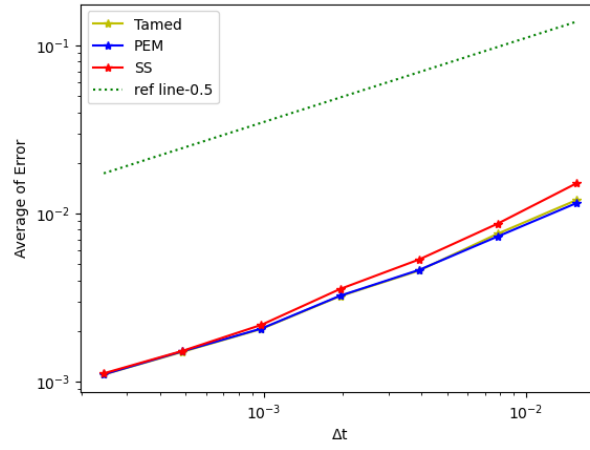
4.2.4. Nümerik testler

$$dX_t = (-X_t^3 + (\mu + \sigma^2)X_t)dt + \sigma X_t dW_t \quad (4.11)$$

denklemini $X_0 = 0.5$ başlangıç koşulu altında $\mu = 0.5$, $\sigma = 1$, $\alpha = 0.5$, $T = 1$, $N = 40$ parametreleri ve $\Delta t = T/N = 1/40$ alınarak Tamed (evcilleştirilmiş Euler-Maruyama), PEM (Projeksiyon Euler-Maruyama) ve SS (Split-Step Euler-Maruyama) metotları ile çözülmüştür. Şekil 4.3'de denklemin her metot için bir adet örneklem yörüngesi verilmiştir. Şekil 4.4'de Monte Carlo simülasyonu kullanılarak metotların kuvvetli hata mertebeleri nümerik olarak doğrulanmıştır. Şekil 4.3 ve Şekil 4.4'ü üreten kodlar Ekler kısmında verilmiştir.



Şekil 4.3. Denklem (4.11)'in çeşitli metotlarla türetilen örneklem yörüngesi



Şekil 4.4. *Evcilleştirilmiş Euler-Maruyama, Projeksiyon Euler-Maruyama ve Split-Step Euler-Maruyama metodlarının (4.11) denklemi için kuvvetli yakınsaklık mertebeleri*

5. SDD'LER İÇİN GBH TABANLI NÜMERİK METOTLAR

Bölüm (3)'te tanıtılan Geometrik Brown Hareketinin tam çözümü bilinmektedir. Bu bölümde W_t^i bağımsız ve özdeş dağılmış Brown hareketleri, $F, g_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ fonksiyonları ve $A, B_i \in \mathbb{R}^{d \times d}$ matrisleri $i, j = 1, \dots, m$ için

$$[A, B_i] = 0 \quad [B_j, B_i] = 0$$

olmak üzere $m, d \in \mathbb{N}$ ve $X_0 = X_{t_0} \in \mathbb{R}^d$ için

$$dX_t = (AX_t + F(X_t))dt + \sum_{i=1}^m (B_i X_t + g_i(X_t))dW_t^i \quad (5.1)$$

formundaki yarı-linear SDD'ler için GBH'nin tam çözümünü kullanan nümerik metotlar incelenecektir.

Öncelikle global Lipschitz koşulunu sağlayan katsayı fonksiyonlarına sahip SDD'ler için Erdoğan ve Lord tarafından [13] çalışmasında verilen metotlar tanıtılacaktır. Daha sonra bu çalışmada yer almayan $g_i = 0$ özel durumu için *EI0* isimli metodun kuvvetli yakınsaklık mertebesinin 1 olduğu kanıtlanacaktır.

Ayrıca katsayı fonksiyonlarının global Lipschitz koşulunu sağlamadığı durumlarda kuvvetli yakınsayan Evcilleştirilmiş GBH [25] metodu tanıtılacaktır. Son olarak bir önceki bölümde tanıtılan PEM metodunun GBH tabanlı bir versiyonu türetilmiştir. Ele alınan metotların performans karşılaştırmaları için yapılan nümerik testlerin sonuçlarına yer verilmiştir.

5.1. Global Lipschitz Koşulu Altında GBH Metodu

(5.1) tipindeki SDD'ler için klasik üstel integratörler [8] $I_d \in \mathbb{R}^{d \times d}$ birim matris ve $S_{t_0, t_0} = I_d$ olmak üzere

$$dS_{t, t_0} = AS_{t, t_0}dt$$

lineer denklemden elde edilen $S_{t, t_0} = e^{(t-t_0)A}$ yarıgrup operatörüne dayanır. Karşılaştırmak için

$$\varphi(A) = A^{-1}(e^A - I_d), \quad \Delta t = t_{n+1} - t_n \quad \text{ve} \quad \Delta W^{i,n} = W_{t_{n+1}}^i - W_{t_n}^i$$

olmak üzere *SETD0* (Stochastic Exponential Time Differencing) adı verilen [32]

$$X_{t_{n+1}} = e^{\Delta t A} \left(X_{t_n} + F(X_{t_n})\Delta t + \sum_{i=1}^m (B_i X_{t_n} + g_i(X_{t_n}))\Delta W_t^{i,n} \right) \quad (5.2)$$

ve *SETD1* adı verilen [32]

$$X_{t_{n+1}} = e^{\Delta t A} \left(X_{t_n} + \sum_{i=1}^m (B_i X_{t_n} + g_i(X_{t_n}))\Delta W_t^{i,n} \right) + \varphi(\Delta t A)F(X_{t_n})\Delta t \quad (5.3)$$

çoklu gürültü terimine sahip standart 2 üstel integratörleri göz önünde bulundurulsun. Bu metotlar sabit katsayılı lineer adi diferansiyel sistemleri için tam çözümü türetmektedir. Bu yaklaşım (5.1) tipindeki yarı-lineer denklemler için Geometrik Brown Hareketinin bilinen çözümünden yararlanılarak [13] çalışmasında genişletilmiştir. Bu algoritmanın türetilmesinde $\Phi_{t_0, t_0} = I_d$ olmak üzere

$$d\Phi_{t, t_0} = A\Phi_{t, t_0}dt + \sum_{i=1}^m B_i\Phi_{t, t_0}dW_t^i \quad (5.4)$$

lineer homojen matris diferansiyel denkleminin temel çözümü olan (3.15) matrisinden faydalanılmıştır.

5.1.1. Metotların türetilmesi

$T \in (0, \infty)$ sabit reel sayı olduğu varsayılınsın ve $[0, T]$ zaman aralığının bir bölüntüsü $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ iken $\Delta t = t_{j+1} - t_j$ sabit adım uzunluğu olsun. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ filtrasyonu ile olasılık uzayı olsun. F ve g_i 'nin uygun varsayımlar altında (5.1) denklemini sağlayan $\mathcal{F}_t$ -uyumlu $X : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ stokastik sürecinin var olduğu bilinmektedir.

$$\tilde{f}(\cdot) = F(\cdot) - \sum_{i=1}^m B_i g_i(\cdot)$$

olmak üzere $[t_n, t_{n+1}]$ aralığında integral gösterimi (3.16)'dan

$$X_{t_{n+1}} = \Phi_{t_{n+1}, t_n} \left(X_{t_n} + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi_{s, t_n}^{-1} \tilde{f}(X_s) ds + \sum_{i=1}^m \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi_{s, t_n}^{-1} g_i(X_s) dW_s^i \right) \quad (5.5)$$

biçiminde yazılır.

Denklem (5.5) stokastik integrali için $\Delta W_{i,n} = W_{t_{n+1}}^i - W_{t_n}^i$ olmak üzere

$$\Phi_{t_{n+1},t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi_{s,t_n}^{-1} g_i(X_s) dW_s^i \approx \Phi_{t_{n+1},t_n} g_i(X_{t_n}) \Delta W_t^{i,n} \quad (5.6)$$

yaklaşımı ele alınsın. (5.5) denklemindeki deterministik integral için aşağıdaki üç durum incelenir:

X_{t_n} süreci (5.1) denkleminin $t = t_n$ 'deki tam çözümünü ve X_n ise X_{t_n} sürecinin nümerik yaklaşımını göstermek üzere;

1. $\Phi_{t_{n+1},t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi_{s,t_n}^{-1} \tilde{f}(X_s) ds \approx \Phi_{t_{n+1},t_n} \tilde{f}(X_n) \Delta t$ için ilk metot *EI0*

$$X_{n+1} = \Phi_{t_{n+1},t_n} \left(X_n + \tilde{f}(X_n) \Delta t + \sum_{i=1}^m g_i(X_n) \Delta W_t^{i,n} \right) \quad (5.7)$$

şeklinde elde edilir.

2. Eğer

$$Z_{t,s} = \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m B_i^2(t-s) + \sum_{i=1}^m B_i(W_t^i - W_s^i) \right)$$

iken $\Phi_{t_{n+1},s} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi_{s,t_n}^{-1} \tilde{f}(X_s) ds \approx Z_{t_{n+1},t_n} \varphi(\Delta t A) \tilde{f}(X_n) \Delta t$ için ikinci metot *EI1*

$$X_{n+1} = \Phi_{t_{n+1},t_n} \left(X_n + \sum_{i=1}^m g_i(X_n) \Delta W_t^{i,n} \right) + Z_{t_{n+1},t_n} \varphi(\Delta t A) \tilde{f}(X_n) \Delta t$$

şeklinde elde edilir.

3. Son olarak $\Phi_{t_{n+1},t_k} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi_{s,t_n}^{-1} \tilde{f}(X_s) ds \approx \varphi(\Delta t A) \tilde{f}(X_n) \Delta t$ için metot *EI2*

$$X_{n+1} = \Phi_{t_{n+1},t_n} \left(X_n + \sum_{i=1}^m g_i(X_n) \Delta W_t^{i,n} \right) + \varphi(\Delta t A) \tilde{f}(X_n) \Delta t$$

olarak elde edilir.

Bu çalışmada *EI0* metodu incelenecektir. *EI0*, *EI1*, *EI2* metotları (5.2)'deki *SETD0* ve (5.3)'deki *SETD1* [13] metotları gibi aynı $\mathcal{O}(\Delta t^{1/2})$ güçlü yakınsaklık oranına sahiplerdir.

Varsayım 5.1.1. F ve g_i fonksiyonları (3.3) ve (3.4)'de verilen global Lipschitz ve lineer büyüme koşullarını sağlasın.

Varsayım 5.1.2. F ve g_i fonksiyonlarının iki kez türevlenebildiğini ve türevlerinin düzgün sınırlı olduğu varsayılın.

Bu metotların global Lipschitz koşulu altında yakınsaması Erdoğan ve Lord [13] çalışmasında sunulmuştur.

Yardımcı Teorem 5.1.1. [8] Varsayım (5.1.1) ve varsayım (5.1.2) sağlansın. Bu takdirde (5.1) denkleminin tam çözümü X_t aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar. $s \in [t_k, t_{k+1}]$ için

$$\|X_s - X_{t_k}\|_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)} \leq K(s - t_k)^{1/2}$$

ve

$$\|F(X_s) - F(X_{t_k})\|_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)} \leq K(s - t_k)^{1/2}$$

olur.

Bu tez çalışmasında (5.1) denkleminin $g_i = 0$ için özel durumu olan lineer difüzyon terimine sahip yarı-lineer SDD'ye uygulanan $EI0$ metodunun kuvvetli yakınsaklık mertebesinin 1 olduğu kanıtlanacaktır.

Teorem 5.1.1.

$$dX_t = (AX_t + F(X_t))dt + \sum_{i=1}^m B_i X_t dW_t^i \quad (5.8)$$

denklemini için yaklaşık çözümler üreten

$$X_{n+1} = \Phi_{t_{n+1}, t_n}(X_{n+1} + \Delta t F(X_n)) \quad (5.9)$$

nümerik şemasının sürekli interpolasyon versiyonu $\bar{X}_t$ olmak üzere ($\bar{X}_{t_k} = X_k$)

$$\sup_{t \in [0, T]} \|X_t - \bar{X}_t\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)} \leq K \Delta t \quad (5.10)$$

olacak şekilde $K > 0 \in \mathbb{R}$ mevcuttur.

Aşağıda teoremin kanıtında kullanılacak önermeler verilmiştir.

Önerme 5.1.2. (5.9) nümerik şemasının sürekli interpolasyon süreci $\bar{X}_t$, $[t_n, t_{n+1}]$ aralığında

$$d\bar{X}_t = (A\bar{X}_t + \Phi_{t,t_n} F(\bar{X}_{t_n}))dt + \sum_{i=1}^m B_i \bar{X}_t dW_t^i \quad (5.11)$$

ile verilen stokastik denklemi sağlar.

Kanıt. GBH'nin tanımından

$$d\Phi_{t,t_n}^{-1} = \left(-A + \sum_{i=1}^m B_i^2 \right) \Phi_{t,t_n}^{-1} dt - \sum_{i=1}^m B_i \Phi_{t,t_n}^{-1} dW_t^i$$

olur.

$$d\bar{X}_t = \mu dt + \sum_{i=1}^m \sigma_i dW_t^i$$

denklemini sağlayan μ ve σ_i katsayı fonksiyonları araştırılsın. Lineer sürekli interpolasyon süreci

$$\bar{X}_t = \Phi_{t,t_n} X_0 + \Phi_{t,t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi_{s,t_n}^{-1} F(\bar{X}_s) ds$$

olmak üzere matris vektör çarpımı

$$\begin{aligned} d[\Phi_{t,t_n}^{-1} \bar{X}_t] &= \Phi_{t,t_n}^{-1} \left[\left(-A + \sum_{i=1}^m B_i^2 \right) \bar{X}_t + \mu - \sum_{i=1}^m B_i \sigma_i \right] dt \\ &\quad + \Phi_{t,t_n}^{-1} \left[- \sum_{i=1}^m B_i \bar{X}_t + \sigma_i \right] dW_t^i \end{aligned} \quad (5.12)$$

şeklinde ifade edilir. (5.12) denklemini Φ_{t,t_n} ile çarptıktan ve bu ifadeyi $\bar{X}_t$ sürekli interpolasyon süreci ile karşılaştırdıktan sonra

$$\Phi_{t,t_n}^{-1} \left[\left(-A + \sum_{i=1}^m B_i^2 \right) \bar{X}_t + \mu - \sum_{i=1}^m B_i \sigma_i \right] = \Phi_{t,t_n} F(\bar{X}_{t_n})$$

ve

$$\Phi_{t,t_n}^{-1} \left[- \sum_{i=1}^m B_i \bar{X}_t + \sigma_i \right] = 0$$

bulunur. Sonuç olarak $\mu = A\bar{X}_t + \Phi_{t,t_n} F(\bar{X}_{t_n})$ ve $\sigma_i = B_i \bar{X}_t$ bulunur. $\square$

Yakınsaklık teoreminin kanıtı için aşağıdaki önermelerden faydalanılacaktır.

Önerme 5.1.3. $s \in [t_k, t_{k+1}]$ için

$$\mathbb{E} [\|X_s - \bar{X}_s\|^2] \leq K (\mathbb{E} [\|X_{t_k} - \bar{X}_{t_k}\|^2] + (s - t_k)^3) \quad (5.13)$$

olacak şekilde $K > 0$ reel sayısı mevcuttur.

Kanıt. $s \in [t_k, t_{k+1}]$ için gerçek çözüm ve nümerik çözümün sürekli interpolasyon süreci

$$\begin{aligned} X_s &= X_{t_k} + \int_{t_k}^s (AX_r + F(X_r))dr + \sum_{i=1}^m \int_{t_k}^s B_i X_r dW_r^i \\ \bar{X}_s &= \bar{X}_{t_k} + \int_{t_k}^s (A\bar{X}_r + \Phi_{r,t_k} F(\bar{X}_{t_k}))dr + \sum_{i=1}^m \int_{t_k}^s B_i \bar{X}_r dW_r^i \end{aligned}$$

Itô denklemlerini sağlar. Taraf tarafa çıkarılır

$$\begin{aligned} X_s - \bar{X}_s &= X_{t_k} - \bar{X}_{t_k} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} A(X_r - \bar{X}_r)dr \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \int_{t_k}^s B_i (X_r - \bar{X}_r) dW_r^i + \int_{t_k}^s (F(X_r) - \Phi_{r,t_k} F(\bar{X}_{t_k}))dr \end{aligned}$$

ve ardından normunun karesini ve beklenen değeri alınırsa

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\|X_s - \bar{X}_s\|^2] &\leq 4 \left(\mathbb{E} [\|X_{t_k} - \bar{X}_{t_k}\|^2] + (s - t_k) \int_{t_k}^s \|A\|^2 \mathbb{E} [\|X_r - \bar{X}_r\|^2] dr \right. \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \int_{t_k}^s \|B_i\|^2 \mathbb{E} [\|X_r - \bar{X}_r\|^2] dr \\ &\quad \left. + (s - t_k) \int_{t_k}^s \mathbb{E} [\|F(X_r) - \Phi_{r,t_k} F(\bar{X}_{t_k})\|^2] dr \right) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Denklemin son terimine $F(X_{t_k}) - F(\bar{X}_{t_k})$ ifadesinin eklenmesi ve çıkarılması sonucu

$$\begin{aligned} &\int_{t_k}^s \mathbb{E} [\|F(X_r) - \Phi_{r,t_k} F(\bar{X}_{t_k})\|^2] dr = \\ &\int_{t_k}^s \mathbb{E} [\|F(X_r) - F(X_{t_k}) + F(X_{t_k}) - F(\bar{X}_{t_k}) + F(\bar{X}_{t_k}) - \Phi_{r,t_k} F(\bar{X}_{t_k})\|^2] dr \\ &\leq 3 \left(\int_{t_k}^s \mathbb{E} [\|F(X_r) - F(X_{t_k})\|^2] dr + \int_{t_k}^s \mathbb{E} [\|F(X_{t_k}) - F(\bar{X}_{t_k})\|^2] dr \right) \end{aligned}$$

$$+ \int_{t_k}^s \mathbb{E} \left[\|F(\bar{X}_{t_k}) - \Phi_{r,t_k} F(\bar{X}_{t_k})\|^2 \right] dr \Bigg)$$

bulunur. Yardımcı teorem (5.1.1) ve yardımcı teorem (3.4.1)'den

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\|F(X_r) - F(X_{t_k})\|^2] &\leq K(r - t_k) \\ \mathbb{E} [\|F(\bar{X}_{t_k}) - \Phi_{r,t_k} F(\bar{X}_{t_k})\|^2] &\leq K(r - t_k) \end{aligned}$$

ve F 'nin global Lipschitz özelliğinden

$$\mathbb{E} [\|F(X_{t_k}) - F(\bar{X}_{t_k})\|^2] \leq \mathbb{E} [\|X_{t_k} - \bar{X}_{t_k}\|^2]$$

olur. İfadeler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\|X_s - \bar{X}_s\|^2] &\leq 4 \left(\mathbb{E} [\|X_{t_k} - \bar{X}_{t_k}\|^2] + (s - t_k) \int_{t_k}^s \|A\|^2 \mathbb{E} [\|X_r - \bar{X}_r\|^2] dr \right. \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \int_{t_k}^s \|B_i\|^2 \mathbb{E} [\|X_r - \bar{X}_r\|^2] dr + 3(s - t_k) \left(\int_{t_k}^s 2K(r - t_k) dr \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{t_k}^s \mathbb{E} [\|X_{t_k} - \bar{X}_{t_k}\|^2] dr \right) \right) \\ &\leq 4 \left(\mathbb{E} [\|X_{t_k} - \bar{X}_{t_k}\|^2] \right. \\ &\quad + \left((s - t_k) \|A\|^2 + \sum_{i=1}^m \|B_i\|^2 \right) \int_{t_k}^s \mathbb{E} [\|X_r - \bar{X}_r\|^2] dr \\ &\quad \left. + 3(s - t_k)^3 + 3(s - t_k)^2 \mathbb{E} [\|X_{t_k} - \bar{X}_{t_k}\|^2] \right) \\ &\leq (4 + 12(s - t_k)^2) \mathbb{E} [\|X_{t_k} - \bar{X}_{t_k}\|^2] + 12(s - t_k)^3 \\ &\quad + 4 \left((s - t_k) \|A\|^2 + \sum_{i=1}^m \|B_i\|^2 \right) \int_{t_k}^s \mathbb{E} [\|X_r - \bar{X}_r\|^2] dr \end{aligned}$$

elde edilir. Gronwall eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\|X_s - \bar{X}_s\|^2] &\leq \left((4 + 12(s - t_k)^2) \mathbb{E} [\|X_{t_k} - \bar{X}_{t_k}\|^2] \right. \\ &\quad \left. + 12(s - t_k)^3 \right) \exp \left\{ 4 \left((s - t_k) \|A\|^2 + \sum_{i=1}^m 4\|B_i\|^2 \right) (s - t_k) \right\} \\ &\leq K \left(\mathbb{E} [\|X_{t_k} - \bar{X}_{t_k}\|^2] + (s - t_k)^3 \right) \end{aligned}$$

□

(5.8) denkleminin $t = t_{k+1}$ 'deki tam çözümü

$$\Psi_{\text{Exact}}(t_{k+1}, t_k, X_{t_k}) = \Phi_{t_{k+1}, t_k} \left[X_{t_k} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi_{s, t_k}^{-1} F(X_s) ds \right] \quad (5.14)$$

tam akışıyla tanımlansın. (5.11) denkleminin $\bar{X}_{t_k} = X_{t_k}$ koşulu altında, $t = t_{k+1}$ 'deki çözümü

$$\Psi_{\text{num}}(t_{k+1}, t_k, X_{t_k}) = \Phi_{t_{k+1}, t_k} X_{t_k} + \Phi_{t_{k+1}, t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} F(X_{t_k}) ds \quad (5.15)$$

verilsin. Bir sonraki önermede

$$R_{EI0}(t, s, X_s) = \Psi_{\text{Exact}}(t, s, X_s) - \Psi_{\text{num}}(t, s, X_s) \quad (5.16)$$

ile verilen lokal hatanın birikimli mertebesi incelenecektir.

Önerme 5.1.4. (5.16) ile verilen R_{EI0} lokal hatası için

$$\mathbb{E} \left[\left\| \sum_{k=1}^{N-1} R_{EI0}(t_{k+1}, t_k, X_{t_k}) \right\|^2 \right] \leq K \Delta t^2 \quad (5.17)$$

Kanıt. $X_s = \Psi_{\text{Exact}}(s, t_k, X_{t_k})$ ve $\bar{X}_s = \Psi_{\text{num}}(s, t_k, X_{t_k})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} R_{EI0}(t_{k+1}, t_k, X_{t_k}) &= X_{t_k} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (AX_s + F(X_s)) ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sum_{i=1}^m B_i X_s dW_s^i \\ &\quad - X_{t_k} - \int_{t_k}^{t_{k+1}} (A\bar{X}_s + \Phi_{s, t_k} F(X_{t_k})) ds - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sum_{i=1}^m B_i \bar{X}_s dW_s^i \\ R_{EI0}(t_{k+1}, t_k, X_{t_k}) &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} A(X_s - \bar{X}_s) ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sum_{i=1}^m B_i (X_s - \bar{X}_s) dW_s^i \\ &\quad + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (F(X_s) - \Phi_{s, t_k} F(X_{t_k})) ds \end{aligned}$$

olur. $X_s - \bar{X}_s = R_{EI0}(s, t_k, X_{t_k})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} R_{EI0}(t_{k+1}, t_k, X_{t_k}) &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} A(R_{EI0}(s, t_k, X_{t_k})) ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sum_{i=1}^m B_i (R_{EI0}(s, t_k, X_{t_k})) dW_s^i \\ &\quad + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (F(X_s) - F(X_{t_k}) + F(X_{t_k}) - \Phi_{s, t_k} F(X_{t_k})) ds \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\|R_{EI0}(t_{k+1}, t_k, X_{t_k})\|^2\right] &\leq 3\left(\Delta t \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|A\|^2 \mathbb{E}[\|R_{EI0}(s, t_k, X_{t_k})\|^2] ds \right. \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|B_i\|^2 \mathbb{E}[\|R_{EI0}(s, t_k, X_{t_k})\|^2] ds \\ &\quad + 2\Delta t \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbb{E}[\|F(X_s) - F(X_{t_k})\|^2] ds \\ &\quad \left. + 2\Delta t \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbb{E}[\|F(X_{t_k}) - \Phi_{s,t_k} F(X_{t_k})\|^2] ds \right)\end{aligned}$$

olur. Yardımcı teorem (5.1.1) ve yardımcı teorem (3.4.1)'den

$$\begin{aligned}2\Delta t \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbb{E}[\|F(X_s) - F(X_{t_k})\|^2] ds &\leq 2\Delta t \int_{t_k}^{t_{k+1}} K(s - t_k) ds \leq 2K\Delta t^3 \\ + 2\Delta t \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbb{E}[\|F(X_{t_k}) - \Phi_{s,t_k} F(X_{t_k})\|^2] ds &\leq 2\Delta t \int_{t_k}^{t_{k+1}} K(s - t_k) ds \leq 2K\Delta t^3\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\mathbb{E}\left[\|R_{EI0}(t_{k+1}, t_k, X_{t_k})\|^2\right] \leq K\Delta t^3$$

sonucuna ulaşılır. $R_{EI0}(t_{k+1}, t_k, X_{t_k})$ ifadesine Itô-Taylor açılımı uygulandığında, baskın terimin

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} dW_r^i ds$$

olduğu görülür.

$$\mathbb{E}\left[\left\langle \int_{t_k}^{t_{k+1}} dW^i dr, \int_{t_j}^{t_{j+1}} dW^i dr \right\rangle\right] = 0$$

olduğu için

$$\mathbb{E}\left[\left\|\sum_{k=1}^{N-1} R_{EI0}(t_{k+1}, t_k, X_{t_k})\right\|^2\right] \leq K\Delta t^2$$

elde edilir. □

Teorem (5.1.1)'in Kanıtı. Lokal hatanın tanımından ve (5.11) denkleminde

$$\begin{aligned}X_{t_n} &= X_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (AX_s + \Phi_{s,t_k} F(X_{t_k})) ds + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^m \int_{t_k}^{t_{k+1}} B_i X_s dW_s^i \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} R_{EI0}(t_{k+1}, t_k, X_{t_k})\end{aligned}$$

$$\bar{X}_{t_n} = X_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (A\bar{X}_s + \Phi_{s,t_k} F(\bar{X}_{t_k})) ds + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^m \int_{t_k}^{t_{k+1}} B_i \bar{X}_s dW_s^i$$

ifadeleri yazılır ve ardından taraf tarafa çıkarılırsa

$$\begin{aligned} X_{t_n} - \bar{X}_{t_n} &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} A(X_s - \bar{X}_s) ds + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi_{s,t_k} (F(X_{t_k}) - F(\bar{X}_{t_k})) ds \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^m \int_{t_k}^{t_{k+1}} B_i (X_s - \bar{X}_s) dW_s^i + \sum_{k=0}^{n-1} R_{EI0}(t_{k+1}, t_k, X_{t_k}) \end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafın normunun karesi ardından beklenen değeri alınırsa

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\|X_{t_n} - \bar{X}_{t_n}\|^2] &\leq 4 \left(\Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|A\|^2 \mathbb{E} [\|X_s - \bar{X}_s\|^2] ds \right. \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^m \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|B_i\|^2 \mathbb{E} [\|X_s - \bar{X}_s\|^2] ds \\ &\quad + \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbb{E} [\|\Phi_{s,t_k} (F(X_{t_k}) - F(\bar{X}_{t_k}))\|^2] ds \\ &\quad \left. + \mathbb{E} \left[\left\| \sum_{k=1}^{N-1} R_{EI0}(t_{k+1}, t_k, X_{t_k}) \right\|^2 \right] \right) \end{aligned}$$

sonucuna varılır. Önerme (5.1.4)'teki eşitsizlik ve yardımcı teorem (3.4.1)'den

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\|X_{t_n} - \bar{X}_{t_n}\|^2] &\leq 4 \left(\Delta t \|A\|^2 + \sum_{i=1}^m \|B_i\|^2 \right) \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbb{E} [\|X_s - \bar{X}_s\|^2] ds \\ &\quad + K \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} [\|X_{t_k} - \bar{X}_{t_k}\|^2] + K \Delta t^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Önerme (5.1.3) yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\|X_{t_n} - \bar{X}_{t_n}\|^2] &\leq \left(4\Delta t \|A\|^2 + 4 \sum_{i=1}^m \|B_i\|^2 \right) \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(K \mathbb{E} [\|X_{t_k} - \bar{X}_{t_k}\|^2] \right. \\ &\quad \left. - (s - t_k)^3 \right) ds + K \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} [\|X_{t_k} - \bar{X}_{t_k}\|^2] + K \Delta t^2 \end{aligned}$$

olur. $C = 4\Delta t\|A\|^2 + 4\sum_{i=1}^m \|B_i\|^2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\mathbb{E} [\|X_{t_n} - \bar{X}_{t_n}\|^2] &\leq CK\Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} [\|X_{t_k} - \bar{X}_{t_k}\|^2] - C\Delta t^3 \\ &\quad + K\Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} [\|X_{t_k} - \bar{X}_{t_k}\|^2] + K\Delta t^2 \\ &\leq (CK\Delta t + K\Delta t) \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} [\|X_{t_k} - \bar{X}_{t_k}\|^2] + K\Delta t^2\end{aligned}$$

ifadesine ayrık Gronwall Lemma uygulandığında

$$\begin{aligned}\mathbb{E} [\|X_{t_n} - \bar{X}_{t_n}\|^2] &\leq \Delta t^2 \exp \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (CK\Delta t + K\Delta t) \right\} \\ &\leq K\Delta t^2\end{aligned}$$

sonucuna varılır. □

5.2. Lokal Lipschitz Koşulu Altında Metotlar

Bölüm (4)'de

$$dX_t = f(X_t)dt + g(X_t)dW \quad (5.18)$$

ile verilen bir SDD'de g difüzyon katsayı fonksiyonu global Lipschitz koşulunu sağlarken f sürüklenme katsayı fonksiyonunun tek yönlü Lipschitz koşulunu sağladığı durumda kuvvetli yakınsaklığı garanti eden Evcilleştirilmiş Euler-Maruyama ve Projeksiyon Euler-Maruyama metotları tanıtılmış ve nümerik performansları karşılaştırılmıştır.

Bu bölümde f 'nin tek yönlü Lipschitz koşulunu sağladığı durumda

$$dX_t = (AX_t + F(X_t))dt + \sum_{i=1}^m B_i X_t dW_t^i \quad (5.19)$$

denkleminin çözümüne kuvvetli yakınsayan GBH tabanlı metotlar tanıtılacaktır. İlk olarak [25] çalışmasında türetilen ve analiz edilen Evcilleştirilmiş GBH metodu tanıtılacaktır. Daha sonra, bir önceki bölümde de tanıtılan Projeksiyon Euler-Maruyama metodunun [20] GBH versiyonu türetilenektir. GBH tabanlı bu metotların bölüm

(4.2)'deki klasik metotlarla nümerik performansları karşılaştırılacaktır. Bu bölüm boyunca sürüklenme katsayısı üzerine aşağıdaki koşul konulacaktır.

Varsayım 5.2.1. F fonksiyonu ve bu fonksiyonun $\mathcal{D}F$ ve $\mathcal{D}^2F$ türevleri de sürekli olsun. Buna ek olarak $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$ için

1. $\langle X - Y, F(X) - F(Y) \rangle \leq K \|X - Y\|^2$
2. $\|\mathcal{D}F(X)\| \leq K(1 + \|X\|^c)$
3. $\|\mathcal{D}^2F(X)\| \leq K(1 + \|X\|^q)$

olacak şekilde $K \geq 0$, $c, q \geq 1$ pozitif sabitleri mevcut olsun.

5.2.1. Evcilleştirilmiş GBH metodu

Bölüm (4.2.1)'de tanımlan Evcilleştirilmiş Euler-Maruyama metodu (5.19) denkleminde uygulandığında

$$X_{n+1} = X_n + \frac{AX_n + F(X_n)}{1 + \Delta t \|AX_n + F(X_n)\|} \Delta t + B_i \Delta W_n \quad (5.20)$$

nümerik şeması elde edilir. Burada evcilleştirme çarpanının lineer olan AX_n terimini de içerdiğine dikkat edilmelidir. Fakat lineer terimlerin çözümün ıraksamasına bir etkisi yoktur. Dolayısıyla evcilleştirme çarpanının lineer terimlerden arındırılması metodun hassasiyetini artıracaktır. Bu doğrultuda [33] çalışmasında

$$X_{n+1} = X_n + AX_n \Delta t + \frac{F(X_n)}{1 + \Delta t \|F(X_n)\|} \Delta t + B_i \Delta W_n \quad (5.21)$$

şeması türetilmiş ve analiz edilmiştir.

[25] çalışmasında ise lineer terimlere karşılık gelen SDD tam olarak integre edilmiş ve evcilleştirme çarpanı sadece lineer olmayan sürüklenme terimine uygulanmıştır. Sonuç olarak

$$X_{n+1} = \Phi_{t_{n+1}, t_n} \left(X_n + \frac{F(X_n) \Delta t}{1 + \Delta t \|F(X_n)\|} \right) \quad (5.22)$$

nümerik şeması elde edilmiştir.

[33] çalışmasında (5.21) şemasının kuvvetli yakınsaklık mertebesi $1/2$ olduğu kanıtlanmıştır. [25] çalışmasında ise (5.22) metodunun kuvvetli yakınsaklık merte-

besinin 1 olduğu kanıtlanmıştır. Nümerik testler bölümünde bu bulgular doğrulanacaktır.

5.2.2. GBH tabanlı Projeksiyon Euler-Maruyama metodu

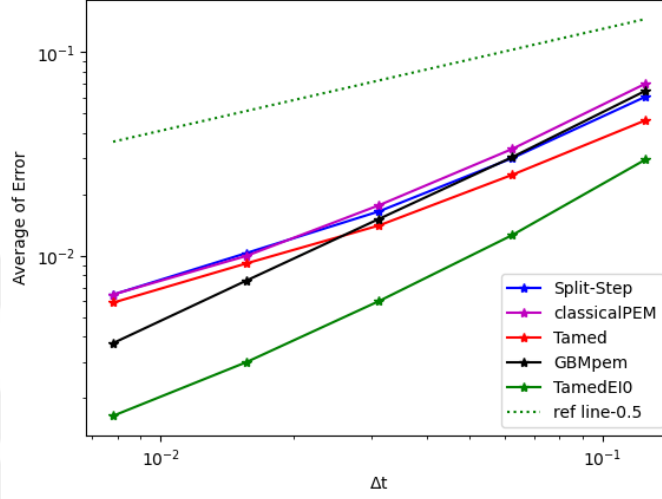
Bölüm (4.2)'de tanıtılan PEM metodu (5.19) denkleminde direkt uygulandığında hem lineer (AX) hem lineer olmayan ($F(X)$) fonksiyonların girdilerine projeksiyon uygulanır. Fakat lineer alt denklemin türettiği çözümler sınırlı momente sahip olduğu için projeksiyon dönüşümü sadece lineer olmayan alt denkleme uygulanabilir. Böylece (5.19) denklemin için (4.6) ve (4.7) varsayımları altında (4.2.2)'de verilen PEM metoduna bir modifikasyon uygulanarak **Geometrik Brown Hareketi Projeksiyon Euler-Maruyama (GBH-PEM)** adını verilen metot

$$\begin{aligned}\bar{X}_{n+1} &:= \min(1, \Delta t^{-\alpha} \|X_n\|^{-1}) X_n \\ X_{n+1} &:= \Phi_{t_{n+1}, t_n}(\bar{X}_{n+1} + \Delta t F(\bar{X}_{n+1}))\end{aligned}\tag{5.23}$$

şeklinde türetilebilir.

5.2.3. Nümerik testler

(4.11) denklemi classicalPEM (PEM), Tamed (Evcilleştirilmiş Euler-Maruyama), Split-Step (Split-Step Euler-Maruyama), GBMpem (GBH-PEM) ve TamedEI0 (GBH tabanlı Evcilleştirilmiş Euler-Maruyama) metotları için kuvvetli hata mertebeleri nümerik olarak doğrulanmıştır. Şekil 5.1'i üreten kod Ekler kısmında verilmiştir.



Şekil 5.1. Denklem (4.11)'in çeşitli metotlarla türetilen kuvvetli yakınsaklık mertebeleri

6. SONUÇ

Bu tez çalışmasında SDD'nin sürüklenme ve difüzyon katsayı fonksiyonlarının global Lipschitz koşulunu sağladığı durumlar için türetilen GBH metodu tanıtılmış ve katsayı fonksiyonlarının global Lipschitz koşulunu sağlamadığı durumlar için GBH metodunun farklı versiyonları türetilmiştir. Türetilen metotlardan *EI0* metodunun yakınsaklık analizi yapılmış ve lineer difüzyon terimini içeren SDD'ler için yakınsaklık mertebesinin 1 olduğu kanıtlanmıştır. Ardından sürüklenme katsayı fonksiyonunun yarı-lineer olduğu durumlar için Evcilleştirilmiş Euler-Maruyama ve Projeksiyon Euler-Maruyama metotlarının GBH versiyonları türetilmiştir. Türetilen nümerik metotlarda özellikle yarı-lineer denklemler için GBH tabanlı metotların performansı incelenmiştir.

Lineer difüzyon terimine sahip SDD'ler için GBH tabanlı metotların yakınsaklık mertebesinin, klasik metotların yakınsaklık mertebesinden daha yüksek olması hesaplamaların performansı açısından büyük avantaj sağlar. Difüzyon teriminin yarı-lineer olduğu durumlarda, GBH tabanlı metotlar klasik metotlarla teorik olarak aynı yakınsaklık mertebesine sahip olmasına rağmen, daha küçük hata katsayısına sahip olduğu için daha hassas sonuçlar üretmektedir.

KAYNAKÇA

- [1] Jacky Cresson, Benedicte Puig, and Stefanie Sonner. Stochastic models in biology and the invariance problem. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B*, 21:2145–2168, 08 2016.
- [2] N. Dalal, D. Greenhalgh, and X. Mao. A stochastic model for internal hiv dynamics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 341(2):1084–1101, May 2008.
- [3] S. Primak, Valeri Kontorovich, and Vladimir Lyandres. Stochastic methods and their applications to communications stochastic differential equations approach. 07 2004.
- [4] Brian Ewald and Cécile Penland. *Numerical Generation of Stochastic Differential Equations in Climate Models*, volume 14, pages 279–306. 12 2009.
- [5] Marouane Mahrouf, Adnane Boukhouima, Houssine Zine, El Mehdi Lotfi, Delfim FM Torres, and Noura Yousfi. Modeling and forecasting of covid-19 spreading by delayed stochastic differential equations. *Axioms*, 10(1):18, 2021.
- [6] Max Welling and Yee Teh. Bayesian learning via stochastic gradient langevin dynamics. pages 681–688, 01 2011.
- [7] P.E. Kloeden and E. Platen. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [8] Gabriel J Lord, Catherine E Powell, and Tony Shardlow. *An introduction to computational stochastic PDEs*, volume 50. Cambridge University Press, 2014.
- [9] Marlis Hochbruck and Alexander Ostermann. Exponential integrators. *Acta Numer.*, 19:209–286, may 2010.
- [10] R Biscay, JC Jimenez, JJ Riera, and PA Valdes. Local linearization method for the numerical solution of stochastic differential equations. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 48:631–644, 1996.
- [11] Gabriel J Lord and Jacques Rougemont. A numerical scheme for stochastic pdes with gevrey regularity. *IMA journal of numerical analysis*, 24(4):587–604, 2004.
- [12] Gabriel J Lord and Antoine Tambue. Stochastic exponential integrators for the finite element discretization of spdes for multiplicative and additive noise. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 33(2):515–543, 2013.
- [13] Utku Erdogan and Gabriel Lord. A new class of exponential integrators for sdes with multiplicative noise. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 39:820–846, 04 2019.

- [14] Martin Hutzenthaler and Arnulf Jentzen. Convergence of the stochastic euler scheme for locally lipschitz coefficients. *Foundations of Computational Mathematics*, 11(6):657–706, oct 2011.
- [15] Martin Hutzenthaler, Arnulf Jentzen, and Peter E. Kloeden. Strong convergence of an explicit numerical method for sdes with nonglobally lipschitz continuous coefficients. *The Annals of Applied Probability*, 22(4), August 2012.
- [16] Sotirios Sabanis. A note on tamed euler approximations. *Electronic Communications in Probability*, 18(none), January 2013.
- [17] Sotirios Sabanis. Euler approximations with varying coefficients: the case of superlinearly growing diffusion coefficients. 2016.
- [18] Burhaneddin İzgi and Coskun Cetin. Semi-implicit split-step numerical methods for a class of nonlinear stochastic differential equations with non-lipschitz drift terms. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 343, 05 2018.
- [19] Xiaofeng Zong, Fuke Wu, and Chengming Huang. Convergence and stability of the semi-tamed euler scheme for stochastic differential equations with non-lipschitz continuous coefficients. *Applied Mathematics and Computation*, 228:240–250, 02 2014.
- [20] Wolf-Jürgen Beyn, Elena Isaak, and Raphael Kruse. Stochastic c-stability and b-consistency of explicit and implicit euler-type schemes. *Journal of Scientific Computing*, 67(3):955–987, October 2015.
- [21] Wolf-Jürgen Beyn, Elena Isaak, and Raphael Kruse. Stochastic c-stability and b-consistency of explicit and implicit milstein-type schemes. *Journal of Scientific Computing*, 70(3):1042–1077, sep 2016.
- [22] Xiaoyue Li, Xuerong Mao, and George Yin. Explicit numerical approximations for stochastic differential equations in finite and infinite horizons: truncation methods, convergence in pth moment and stability. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 39:847–892, 04 2019.
- [23] Xuerong Mao. The truncated euler–maruyama method for stochastic differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 290:370–384, 2015.
- [24] Qian Guo, Wei Liu, Xuerong Mao, and Rongxian Yue. The truncated milstein method for stochastic differential equations with commutative noise. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 338:298–310, 2018.
- [25] Utku Erdoğan and Gabriel Lord. Strong convergence of a gbm based tamed integrator for sdes and an adaptive implementation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 399:113704, 01 2022.
- [26] Zdzisław Brzeźniak and Tomasz Zastawniak. *Basic Stochastic Processes*. Springer, London, 2000.

- [27] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, and EM Hafner. *The Feynman Lectures on Physics; Vol. I*, volume 33. AAPT, 1965.
- [28] Kiyosi Itô. 109. stochastic integral. *Proceedings of the Imperial Academy*, 20(8):519–524, 1944.
- [29] X. Mao. *Stochastic Differential Equations and Applications*. Horwood series in mathematics & applications. Elsevier Science, 2008.
- [30] Desmond Higham, Xuerong Mao, and Andrew Stuart. Strong convergence of euler-type methods for nonlinear stochastic differential equations. *SIAM J. Numerical Analysis*, 40:1041–1063, 09 2002.
- [31] R.L. Burden, J.D. Faires, and A.M. Burden. *Numerical Analysis*. Cengage Learning, 2015.
- [32] Gabriel J Lord and Antoine Tambue. Stochastic exponential integrators for finite element discretization of spdes for multiplicative and additive noise, 2011.
- [33] Xiaofeng Zong, Fuke Wu, and Chengming Huang. Convergence and stability of the semi-tamed euler scheme for stochastic differential equations with non-lipschitz continuous coefficients. *Applied Mathematics and Computation*, 228:240–250, 2014.

EKLER

Global Lipschitz Koşulu Altında Klasik Nümerik Testler

Algorithm 1 (4.3) denkleminin Euler-Maruyama, Implicit Euler-Maruyama ve Milstein metotlarıyla türetilen örneklem yörüngeleri

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import math
4 from scipy.optimize import fsolve
5 from numpy.linalg import norm
6 #parameters; final time; number of paths; initial condition
7 a = 0.5; b = 0.4; sigma = 1; T = 1; N = 50; Xzero = 0.5
8 #drift and diffusion functions
9 f= lambda x: a*x - b * x/(1+ x**2); g= lambda y: sigma * y
10 #
11 dt= T/N; t = np.linspace(0,T,num=N+1)
12 #
13 Ximp= np.zeros(N+1); XEM= np.zeros(N+1); Xmil= np.zeros(N+1)
14 #
15 Ximp[0] = Xzero; XEM[0] = Xzero; Xmil[0] = Xzero
16 for i in range(N): #time loop over the paths
17     Winc = math.sqrt(dt) * np.random.randn()
18     fimp = lambda z : Ximp[i] + dt*f(z) + g(Ximp[i])*Winc -z
19     #implicit E-M
20     Ximp[i+1] = fsolve(fimp, Ximp[i])
21     XEM[i+1] = XEM[i] + dt*f(XEM[i]) + g(XEM[i])*Winc #E_M
22     Xmil[i+1] = Xmil[i] + f(Xmil[i])*dt + g(Xmil[i])*Winc +
23         0.5 * (sigma**2 * Xmil[i])*(Winc**2 - dt) #Milstein
24 #plots of ImpEuler, E-M, Milstein
25 plt.plot(t,Ximp, 'r-*', linewidth =1,label = "ImpEuler")
26 plt.plot(t,XEM, 'g-', linewidth =1, label = "E-M")
27 plt.plot(t,Xmil, 'b-p', linewidth =1, label = "Milstein")
28 plt.legend()
29 plt.show()
```

Algorithm 2 Euler-Maruyama, Kapalı Euler-Maruyama ve Milstein metotlarının (4.3) denklemi için kuvvetli yakınsaklık mertebeleri

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import math
4 from scipy.optimize import fsolve
5 from numpy.linalg import norm
6 #parameters; final time; number of paths; initial condition
7 a = 0.5; b = 0.4; sigma = 1; T = 1; M = 100; Xzero = 2
8
9 Nref = 2**16; dtref = T/Nref; R = np.power
   (2,[0,4,5,6,7,8,9,10])
10 #drift and diffusion functions
11 f = lambda x : a*x - b * x/(1+ x**2); g = lambda y : sigma *
   y
12
13 Imp_errFinal = np.zeros((len(R)-1,M))
14 EM_errFinal = np.zeros((len(R)-1,M))
15 Mil_errFinal = np.zeros((len(R)-1,M))
16 dtArray = np.array(R[1:])*dtref
17 for i in range(M):
18     dW = math.sqrt(dtref) * np.random.randn(Nref) #
   Brownian increments
19     W = np.cumsum(dW, axis=0) #discrete Brownian path
20     for p in range(len(R)):
21         Dt = dtref*R[p]; N = int(Nref/R[p])
22         Xold = Xzero; XEM = Xzero; Xold_mil = Xzero
23         for j in range(N):# time loop over the path
24             Winc = np.sum(dW[R[p]*j : R[p]*(j+1)])
25             fimp = lambda Ximp : Xold + Dt*f(Ximp) + g(Xold)
   *Winc - Ximp # implicit E-M
26             Ximp = fsolve(fimp, 0); Xold = Ximp
27             XEM = XEM + Dt*f(XEM) + g(XEM)*Winc
28             Xmil = Xold_mil + f(Xold_mil)*Dt + g(Xold_mil)*
   Winc + 0.5 * (sigma**2 * Xold_mil)*(Winc**2 -
   Dt); Xold_mil = Xmil
29         if p == 0:
30             Xref = Xmil # exact solution at final time is
   stored
31         else:
32             Imp_errFinal[p-1,i] = norm(Ximp-Xref) # final
   time errors
33             EM_errFinal[p-1,i] = norm(XEM-Xref)
34             Mil_errFinal[p-1,i] = norm(Xmil-Xref)
```

```

1 Imp_avErr = np.mean(Imp_errFinal, axis=1)
2 Mil_avErr = np.mean(Mil_errFinal, axis=1)
3 EM_avErr = np.mean(EM_errFinal, axis=1)
4 avDt = np.mean(dtArray); C = np.mean(Imp_avErr)/avDt - 0.1
5
6 plt.loglog(dtArray, Imp_avErr, 'b--', label = "ImpEuler")
7 plt.loglog(dtArray, Mil_avErr, 'y--', label = "Milstein")
8 plt.loglog(dtArray, EM_avErr, 'r--', label = "E-M")
9 plt.xlabel("$\Delta t$"); plt.ylabel("Average of Error")
10 plt.loglog(dtArray, C*dtArray**(0.5), 'g:', label = "ref line
    -0.5")
11 plt.loglog(dtArray, C*dtArray, 'm:', label = "ref line -1")
12 plt.legend(); plt.show()

```

Lokal Lipschitz Koşulu Altında Klasik Nümerik Testler

Algorithm 3 (4.11) denkleminin Evcilleştirilmiş Euler-Maruyama, Projeksiyon Euler-Maruyama ve Split-Step Euler-Maruyama metotlarıyla türetilen örneklem yörüngeleri

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import math
4 from scipy.optimize import fsolve
5 from numpy.linalg import norm
6 #parameters
7 mu = 0.5 ; sigma = 1 ; alpha = 0.5
8 T = 1 # final time
9 N = 40 #number of paths
10
11 f = lambda x : -x**3 + (mu + sigma**2)*x
12 g = lambda y : sigma * y
13
14 dt = T/N
15 t = np.linspace(0,T,num=N+1)
16 Xzero = 0.5 #initial condition
17 Xtamed = np.zeros(N+1)
18 Xpem = np.zeros(N+1)
19 Xssem = np.zeros(N+1)
20
21 Xtamed[0] = Xzero
22 Xpem[0] = Xzero
23 Xssem[0] = Xzero

```

```

1 for i in range(N):# time loop over the path
2     Winc = math.sqrt(dt) * np.random.randn()
3     Xtamed[i+1] = Xtamed[i] + f(Xtamed[i])*dt / (1 + dt *
4         norm(f(Xtamed[i]))) + g(Xtamed[i])*Winc #tamed E-M
5     if dt**(-alpha) * norm(Xpem[i])**(-1) < 1:
6         #PEM
7         Xbar = dt**(-alpha) * norm(Xpem[i])**(-1) * Xpem[i]
8     else:
9         Xbar = Xpem[i]
10    Xpem[i+1] = Xbar + dt * f(Xbar) + g(Xbar) * Winc
11    SplitStep = lambda Xs : Xssem[i] + dt*f(Xs) - Xs #Split
12    Step E-M
13    Xs = fsolve(SplitStep, Xssem[i])
14    Xssem[i+1] = Xs + g(Xs) * Winc
15
16 plt.plot(t,Xtamed,'r-*', linewidth =1, label = "Tamed")
17 plt.plot(t,Xpem, 'g-p', linewidth =1, label = "PEM")
18 plt.plot(t,Xssem, 'b-', linewidth =1, label = "SS")
19 plt.legend(); plt.show()

```

Algorithm 4 Evcilleştirilmiş Euler-Maruyama, Projeksiyon Euler-Maruyama ve Split-Step Euler-Maruyama metotlarının (4.11) denklemi için kuvvetli yakınsaklık mertebeleri

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import math
4 from scipy.optimize import fsolve
5 from numpy.linalg import norm
6 #parameters; time;
7 mu = 0.5 ; sigma = 1 ; alpha = 0.5; Xzero = 2; T = 1
8 #number of paths
9 M = 100; Nref = 2**16; dtref = T/Nref
10 R = np.power(2,[0,4,5,6,7,8,9,10])
11 #drift and diffusion functions
12 f = lambda x : -x**3 + (mu + sigma**2)*x; g = lambda y :
13     sigma * y
14 #
15 Tamed_errFinal = np.zeros((len(R)-1,M))
16 PEM_errFinal = np.zeros((len(R)-1,M))
17 SS_errFinal = np.zeros((len(R)-1,M))
18 dtArray = np.array(R[1:]) * dtref

```

```

1  for i in range(M):
2      dW = math.sqrt(dtref) * np.random.randn(Nref) #Brownian
        increments
3      W = np.cumsum(dW, axis=0) #discrete Brownian path
4      for p in range(len(R)):
5          Dt = dtref*R[p]
6          N = int(Nref/R[p])
7          Xtamed = Xzero; Xpem = Xzero; Xssem = Xzero
8
9          for j in range(N):# time loop over the path
10             Winc = np.sum(dW[R[p]*j : R[p]*(j+1)])
11
12             Xtamed = Xtamed + f(Xtamed)*Dt / (1 + Dt * norm(
                f(Xtamed))) + g(Xtamed)*Winc #tamed E-M
13
14             if Dt**(-alpha) * norm(Xpem)**(-1) < 1: #PEM
15
16                 Xbar = Dt**(-alpha) * norm(Xpem)**(-1) *
                    Xpem
17             else:
18                 Xbar = Xpem
19                 Xpem = Xbar + Dt * f(Xbar) + g(Xbar) * Winc
20
21                 SplitStep = lambda Xs : Xssem + Dt*f(Xs) - Xs
22                 Xs = fsolve(SplitStep, Xssem)
23                 Xssem = Xs + g(Xs) * Winc
24
25             if p == 0:
26                 Xref = Xssem # exact solution at final time is
                    stored
27             else:
28                 Tamed_errFinal[p-1,i] = norm(Xtamed-Xref)# final
                    time errors
29                 PEM_errFinal[p-1,i] = norm(Xpem-Xref)
30                 SS_errFinal[p-1,i] = norm(Xssem-Xref)
31                 avDt = np.mean(dtArray)
32                 Tamed_avErr = np.mean(Tamed_errFinal, axis=1)
33                 PEM_avErr = np.mean(PEM_errFinal, axis=1)
34                 SS_avErr = np.mean(SS_errFinal, axis=1)
35                 C = np.mean(SS_avErr)/avDt -0.1
36
37                 plt.loglog(dtArray, Tamed_avErr, 'y-*', label = "Tamed")
38                 plt.loglog(dtArray, PEM_avErr, 'b-*', label = "PEM")
39                 plt.loglog(dtArray, SS_avErr, 'r-*', label = "SS")
40                 plt.xlabel("$\Delta t$")
41                 plt.ylabel("Average of Error")
42                 plt.loglog(dtArray, C*dtArray**(0.5), 'g:', label = "ref line
                    ")
43                 plt.legend()
44                 plt.show()

```

GBH Tabanlı Nümerik Testler

Algorithm 5 (4.11) denkleminin Split-Step Euler-Maruyama, Klasik PEM, Evcilleştirilmiş Euler-Maruyama, GBH-PEM ve Evcilleştirilmiş GBH metotlarıyla türetilen kuvvetli yakınsaklık mertebeleri

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import math
4 from scipy.optimize import fsolve
5 from numpy.linalg import norm
6 #parameters
7 mu = 0.5 ; sigma = 0.5; alpha = 1/4 #when q = 3
8 Xzero = 2 ; T = 1 ; M = 100 # number of paths
9 Nref = 2**13 ; dtref = T/Nref
10 R = np.power(2,[0,6,7,8,9,10])
11 A = mu ; B = sigma
12
13 F = lambda X : -X**3 +sigma**2*X
14 fullf = lambda X : -X**3+sigma**2*X + A * X
15 g = lambda X : B * X
16
17 SS_errFinal = np.zeros((len(R)-1,M))
18 GBMpem_errFinal = np.zeros((len(R)-1,M))
19 classicalPEM_errFinal = np.zeros((len(R)-1,M))
20 dtArray = np.array(R[1:])*dtref
21 Tamed_errFinal = np.zeros((len(R)-1,M))
22 tamedEI0_errFinal = np.zeros((len(R)-1,M))
23
24 for i in range(M):
25     dW = math.sqrt(dtref) * np.random.randn(Nref) #
26     Brownian increments
27     W = np.cumsum(dW, axis=0) #discrete Brownian path
28
29     for p in range(len(R)):
30         Dt = dtref*R[p]
31         N = int(Nref/R[p])
32         Xssem = Xzero
33         Xgbmpem = Xzero
34         Xtamed = Xzero
35         Xcpem=Xzero
36         XtamedEI0 = Xzero
```

```

1     for j in range(N):          # time loop over the path
2         Winc = np.sum(dW[R[p]*j : R[p]*(j+1)])
3         if Dt**(-alpha) * norm(Xgbmpem)**(-1) < 1:
4             Xgbmpem = Dt**(-alpha) * norm(Xgbmpem)**(-1)
5                 * Xgbmpem
6
7         Xgbmpem = np.exp((A - 0.5 * B**2)*Dt + B*Winc)*(
8             Xgbmpem + Dt * F(Xgbmpem))
9
10        SplitStep = lambda Xs : Xssem + Dt*fullf(Xs) -
11            Xs #Split-Step
12        Xs = fsolve(SplitStep, Xssem)
13        Xssem = Xs + g(Xs) * Winc
14
15        Xtamed = Xtamed + fullf(Xtamed)*Dt / (1 + Dt *
16            norm(fullf(Xtamed))) + g(Xtamed)*Winc #tamed
17            E-M
18
19        if Dt**(-alpha) * norm(Xcpem)**(-1) < 1:
20            #classicalPEM
21
22            Xcpem = Dt**(-alpha) * norm(Xcpem)**(-1) *
23                Xcpem
24
25            Xcpem = Xcpem + Dt * fullf(Xcpem) + g(Xcpem) *
26                Winc
27
28            XtamedEI0 = np.exp((A - 0.5 * B**2)*Dt + B*Winc)
29                * (XtamedEI0 + (F(XtamedEI0) * Dt)/(1 + Dt *
30                    norm(F(XtamedEI0)))) #tamed ei0
31
32    if p == 0:
33
34        Xref = Xssem # exact solution at final time is
35            stored
36
37    else:
38        GBMpem_errFinal[p-1,i] = norm(Xgbmpem-Xref)
39        SS_errFinal[p-1,i] = norm(Xssem-Xref) # final
40            time errors
41        classicalPEM_errFinal[p-1,i] = norm(Xcpem-Xref)
42        Tamed_errFinal[p-1,i] = norm(Xtamed-Xref)
43        tamedEI0_errFinal[p-1,i] = norm(XtamedEI0-Xref)

```

```
1 avDt = np.mean(dtArray)
2
3 GBMpem_avErr = np.mean(GBMpem_errFinal, axis=1)
4 classicalPEM_avErr = np.mean(classicalPEM_errFinal, axis=1)
5 SS_avErr = np.mean(SS_errFinal, axis=1)
6 Tamed_avErr = np.mean(Tamed_errFinal, axis=1)
7 tamedEI0_avErr = np.mean(tamedEI0_errFinal, axis=1)
8 C = np.mean(SS_avErr)/avDt - 0.1
9
10 plt.loglog(dtArray, SS_avErr, 'b--', label = "Split-Step")
11 plt.loglog(dtArray, classicalPEM_avErr, 'm--', label = "
    classicalPEM")
12 plt.loglog(dtArray, Tamed_avErr, 'r--', label = "Tamed")
13 plt.loglog(dtArray, GBMpem_avErr, 'k--', label = "GBMpem")
14 plt.loglog(dtArray, tamedEI0_avErr, 'g--', label = "TamedEI0
    ")
15 plt.xlabel("$\Delta t$")
16 plt.ylabel("Average of Error")
17 plt.loglog(dtArray, C*dtArray**(0.5), 'g:', label = "ref line
    -0.5")
18 plt.legend()
19 plt.show()
```

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Ebru GÜNDAY
Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Geçmişi:

- 2015-2018, Kütahya Dumlupınar Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği, Lisans
- 2018-2021, Eskişehir Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, Lisans
- 2021-2024, Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik Bilim Dalı, Yüksek Lisans

ORCID ID:

- <https://orcid.org/0009-0007-0059-0505>