



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**STOKES AKIŞ PROBLEMLERİ İÇİN BİORTAGONALLİK
ŞARTLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mahmut KOYUN

DANIŞMAN

Doç. Dr. Halis BİLGİL

AKSARAY, 2019

Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 172342625 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi, **Mahmut KOYUN** tarafından hazırlanan “ **STOKES AKIŞ PROBLEMLERİ İÇİN BİORTAGONALLİK ŞARTLARI**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir

Danışman: Doç. Dr. Halis BİLGİL
Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.



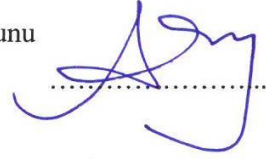
Üye: Doç. Dr. Ayhan ERCİYES
Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.



Üye: Dr. Öğr. Üyesi Ali AYTEKİN
Pamukkale Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.



Tez Savunma Tarihi: 05/07/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....
Doç. Dr. Mehmet Ali HİNİS
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu çalışmamda kullandığım verilerin orijinallliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.



Mahmut KOYUN

TEŞEKKÜR

“Stokes Akış Problemleri İçin Biortagonallik Şartları” konulu tez çalışmasının seçiminde, yürütülmesinde, sonuçlandırılmasında ve sonuçlarının değerlendirilmesinde değerli zamanını feda ederek her konuda yardımcı olan, başta tez danışmanım Doç. Dr. Halis BİLGİL olmak üzere tüm hocalarıma ve bütün hayatım boyunca desteklerini esirgemeyen kıymetli aileme, eşime ve oğluma teşekkürlerimi borç bilirim.

Mahmut KOYUN
AKSARAY, 2019

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
1.1 Literatür Taraması	1
1.2 Tezin Amaçları ve Ana Hatları	3
2. TEK KAPAKLA SÜRÜLEN DİKDÖRTGENSEL KAVİTEDE STOKES AKIŞ	4
2.1 Yönetici Denklem ve Sınır Şartları	4
2.1.1 Seri çözüm metodu	5
2.1.2 Bir yarı sonsuz boşluk için biortagonal seri çözümü.....	5
2.2 Bir Dikdörtgenel Bölge İçin Biortagonal Seri Çözümü.....	13
2.2.1 Katsayıların belirlenmesi.....	15
3. SEKTÖREL KAVİTELERDEKİ STOKES AKIŞ PROBLEMİNİN BİORTAGONAL SERİ ÇÖZÜMÜ	20
3.1 Biortagonallik Şartları	20
3.1.1 Dördüncü dereceden sınır değer problemlerinin bir sınıflandırması	20
3.1.2 Bir sektörel bölge biortagonallik koşulu	25
3.2 Sektörel Kavite İçin Biortagonal Seri Çözümü.....	28
3.2.1 Biharmonik denklemin değişkenlerine ayrılır çözümü.....	28
3.3 $\sin \hat{\lambda}_n = \pm \beta \hat{\lambda}_n$ Denkleminden $\hat{\lambda}$ Öz-Değerlerinin Elde Edilişi.....	31
4. DİKDÖRTGENSEL BÖLGELERDEKİ STOKES AKIŞ İÇİN BİORTAGONALLİK ŞARTI.....	37
4.1 Dikdörtgen Bölgelerde Biortagonallik Koşulu.....	38
4.2 Kenarları Sıkıştırılmış Bölgelerde Biortagonallik Şartı	40
4.2.1 Serbest yüzeyli eğrisel kavitelerde stokes akış için biortagonallik koşulu.....	40
4.3 Annular Bölgeler İçin Biortagonallik Şartı	43
4.3.1 Annular bölgelerde stokes denklemi	43
4.4 Küresel Koordinatlarda Eksenel Simetrik Stokes Akış İçin Biortagonallik Şartları.....	45
4.4.1 Eksenel simetrik küresel düzlemlerde stokes akış denklemi	45
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	49
KAYNAKLAR	50
ÖZGEÇMİŞ.....	52

YÜKSEK LİSANS TEZİ
STOKES AKIŞ PROBLEMLERİ İÇİN BİORTAGONALLİK ŞARTLARI

Mahmut KOYUN

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Halis BİLGİL

ÖZET

Bu tez çalışmasında endüstrinin bir çok alanında kullanılan bazı kavite akışları ele alındı. İki boyutlu dikdörtgensel, sektörel ve eğrisel bölgelerde iki boyutlu Stokes Akış problemlerinin analitik çözümü incelendi.

Tez beş bölümden oluşmakta olup birinci bölümde tez çalışmasında kullanılacak temel kavramlar, denklemler ve tanımlar verildi.

İkinci bölümde, bir ya da iki duvarının hareketli ve karşılıklı yan duvarların birer serbest yüzey olduğu dikdörtgensel bölgedeki akış probleminin çözümü analiz edildi.

Tezin üçüncü bölümünde sektörel bölgedeki akış probleminin çözümü verildi.

Dördüncü bölümde ise çeşitli geometrilere sahip kaviteler için biortagonallik koşulları verildi.

Beşinci ve son bölümde elde edilen bulgular ve öneriler verildi.

Anahtar Kelimeler: Stokes akış, Biortagonallik, Kavite, Biharmonik denklem.

Temmuz, 2019; 52 sayfa

M.Sc. THESIS

BIORTHOGONALITY CONDITIONS FOR STOKES FLOW

Mahmut KOYUN

**Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Halis BİLGİL

ABSTRACT

In this study, some of cavity flow problems which are used in many areas of the industry are discussed. Two-dimensional Stokes flow in rectangular, sectorial and curved shaped cavity are considered.

The thesis consists of five sections. In the first section, general concepts, equations and definitions which will be used in thesis, are introduced.

In the second section, flow structures are analyzed in a rectangular cavity formed by a pair free surface and one or two moving lids.

In the third section, analytical solution mechanism of Stokes flow problem in a sectorial region is given.

In the fourth section, the biorthogonality conditions of cavity which have differently geometries are given.

In the fifth and last section, the conclusions and recommendations were given.

Keywords: Stokes flow, Biorthogonality, Cavity, Biharmonic equations.

July, 2019; 52 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Dikdörtgen kavite.....	6
Şekil 2.2. Bölge ve sınır koşulları.....	7
Şekil 3.1. Sektörel kavite örnekleri.....	21
Şekil 4.1. Serbest yüzeyli eğrisel kavite.....	43



1. GİRİŞ

Mühendislik ve endüstri başta olmak üzere, birçok alanda üretim, araştırma ve geliştirme aşamalarında akışkanlarla karşılaşılır. Akışkanların bulundukları bölge içerisinde oluşturdukları farklı akış yapıları özellikle son 30 yıldan beri ilgi duyulan bir çalışma alanı olmaya devam etmektedir. Çünkü akışkanların hızı, akış şekli ve çatalanmaları gibi diğer bazı özellikleri, ortaya çıktıkları problemin karakterini belirleyebilmek için önem taşımaktadır. Bir bölge içerisindeki akış problemleri, ya deneysel yollarla ya da olayı yöneten denklemlerin sayısal veya tam çözümlerinin elde edilmesiyle incelenebilir. Teorik yöntemlerle elde edilen sonuçlar, hem deneysel yöntemlerle elde edilenlerden daha kesin hem de daha az masraf ve zaman gerektirdiğinden dolayı tercih edilmektedir.

Akışkanlar mekaniğinin önemli denklemlerinden olan Navier-Stokes (N-S) denklemleri, akışkanın birçok özelliğini taşımakta olduğu için birçok akış probleminde yönetici denklem olarak alınır. Dolayısıyla bu denklemin uygun sınır koşullarına göre çözümleri uygulamalı matematiğin önemli problemlerinden biri olmuştur. Lineer olmayan bir denklem sisteminden oluşan N-S denklemlerinin genel çözümü bildiğimiz kadarıyla henüz bulunabilmiş değildir. Bu nedenle uygulamalarda N-S denkleminin sayısal çözüm yöntemleri ile yaklaşık çözümleri bulunabilmektedir.

Bu tez çalışmasında, farklı geometriye sahip kaviteler içerisindeki iki boyutlu Stokes akış probleminin analitik çözümlerin elde edilebilmesine olanak sağlayan biortagonallik şartları verilmiştir.

1.1 Literatür Taraması

Bir kapağı hareketli dikdörtgen bir kavitenin içinde oluşturulan akış, Joseph ve Sturges (1978) tarafından çözülmüştür. Öz fonksiyon genişleme katsayısı bulmak için kullanılan biortagonallik şartı dikdörtgen kaviteler ile sınırlıdır ve farklı tipteki kavitelerdeki akış problemleri için uygulanamaz. Dikdörtgen kavitelerdeki probleme ilişkin özel durumlar Burggraf (1996) ve Pan ve Acrivos (1967) tarafından sayısal yöntemlerle çözülmüştür. Analitik çözümün sonlu farklar çözümü ile eş ya da daha doğru olduğu saptanmıştır. Joseph ve Sturges (1978) ile diğerleri belirli bir bölge için Stokes akış denklemini çözmekle ilgilenirken özel biortagonallik koşulları bu

problem ile elde edilmiştir. Ayrıca bu şartları sağlamak için ele aldıkları dördüncü dereceden sınır değer problemleri sabit katsayılara sahiptir. Khuri (1993)'nin kanıtladığı basit konfigürasyonun iki boyutlu ve asimetrik akış problemleri için Stokes akış denklemlerinde değişkenlerin ayrımı bu çalışmada bahsi geçen aynı dördüncü derece denklemlerine götürmektedir. Sonuçlar silindirik, küresel ve halka şeklindeki farklı koordinat sistemlerinden çeşitli örnekler verilerek resmedilmiştir. Bu çalışmada bahsi geçen dördüncü derece denklemler grubu da değişim katsayılarına sahiptir. Bu yüzden elde ettiğimiz biortagonallik şartları sadece belirli bir stokes akış problemi ile sınırlandırılmamıştır. Kullanılan teknik ve algoritmalar üst kapağı hareketli ve yanları sabit yarı sonsuz şeridin bükülmesini ele alan biharmonik problemin çözümü ilk olarak Smith (1952) tarafından ortaya konulmuş; çözüm biortagonal seri olarak ifade edilmiş ve bahsi geçen veriler biortagonal seri içinde genişletilmiştir. Smith ayrıca verilerin biortagonal seri'nin yakınsaklığını garanti etmesini sağlayacak şartları ortaya koymuştur. Smith şartları uygulamada oldukça sınırlayıcıdır. Joseph (1977) ile Joseph ve Sturges (1978) uygulamalarda beklenebilecek sınır verilerin hepsi için yakınsaklığı garanti etmeye yetecek daha az kısıtlayıcı şartlar ortaya koymuştur. Gregory (1980), Spence (1982) ile Joseph, Sturges ve Warner (1982) biharmonik öz fonksiyonların biortagonal serinin bütünlüğü ve yakınsaklığı teorisine yeni teoremler eklemiştir. Bir sonraki çalışmalarında Joseph ve diğerleri Titchmarsh metodunu kullanarak biharmonik öz fonksiyonların biortagonal serinin yakınsaklığını kanıtlamıştır. Smith'in fikirleri Joseph ve Fosdick (1973) tarafından farklı hızlarda dönen silindirler arasındaki bölgedeki serbest yüzey akış problemi için kullanıldı. Joseph ve Sturges (1975) yandan ısıtılan dikdörtgensel kavitedeki sıvı dolgusunun serbest yüzey problemini incelediler. Çalışmalarında sayısal bir analize yer verilmiş ve dikdörtgen kavite yarı sonsuz olmadığında, fakat sert bir tabana sahip olduğunda çözümleri hesaplamak için öz fonksiyon açılımları kullanılması gerektiğini gösterdi. Biortagonal seri açılım metodu ayrıca Joseph (1974) tarafından kıvrımlı akış viskozimetresini dolduran sıvının yuvarlak kenarındaki serbest yüzey çalışmasında kullanılmıştır. Ancak, bu durum biharmonik olmayan bir stokes akış problemi için öz fonksiyon açılım türünün ortaya çıktığı ilk durumdur. Benzer şekilde Liu ve Joseph (1977) tarafından serbest yüzeyli eğrisel kavitelere asimetrik stokes akış problemleri için biortagonal öz fonksiyon açılımları ve biortagonallik koşulları incelenmiştir. Koni şeklindeki

kavitelerdeki asimetrik akış problemleri Liu ve Joseph (1978) ve eşmerkezli silindir şeklindeki kaviterlerde ise Yoo ve Joseph (1978) tarafından incelenmiştir.

1.2 Tezin Amaçları ve Ana Hatları

Stokes akış problemlerini yöneten denklem biharmonik denklemdir. Bu denklem aynı zamanda dördüncü mertebeden lineer bir adi diferansiyel denklem olup çeşitli sınır koşullarına sahiptir.

Tezin amaçlarından birisi, dördüncü mertebeden sınır değer problemleri için biortagonallik özelliğinin verilmesidir. Bir diğer amacı ise bu özelliklerin farklı akış bölgeleri üzerinde nasıl olacağının verilmesidir.

Tez çalışmasında ilk olarak klasik yöntemlerle biharmonik denkleminin çözümünün elde edildiği bir stokes akış probleminin çözümü verildi. Bu çözüm aşamasında gerekli olan biortagonallik şartının daha kolay nasıl bulunacağı daha sonra verildi. Son olarak bu biortagonallik şartlarının elde edilmesine referans olan teoremler, farklı sınır-değer problemleri için kullanıldı.

2. TEK KAPAKLA SÜRÜLEN DİKDÖRTGENSEL KAVİTEDE STOKES AKIŞ

Bu bölümde amacımız kapakla sürülen dikdörtgenel kavitenin üst kapağının hareket ettirilmesiyle içerideki akışkanın hareketini irdelemektir. Bu problem genellikle çeşitli nümerik çözüm metotlarının test edilmesi için bir ölçüt olarak kullanılmaktadır. Burada Joseph ve Sturges (1978) analitik çözüm metodu üzerinde durulacaktır. Akış fonksiyonları Papkovich-Fadle öz fonksiyonlarının bir serisi olarak ifade edilmektedir. Gerçekte sert duvarlar ve bir yarı sonsuz bölge için biortagonal seri çözümü ilk olarak Smith (1952) ve Joseph ve Sturges (1978) tarafından elde edildi. Daha sonra bu yöntem dikdörtgenel bir kavite için uygulandı.

Joseph ve Sturges (1978) tarafından geliştirilen çözüm yöntemi ile dikdörtgenel kavitedeki akış probleminin çözümü verilecektir.

2.1 Yönetici Denklem ve Sınır Şartları

Üç sabit ve bir hareketli kapaktan oluşan bir kavite içindeki akış biharmonik denklem,

$$\nabla^4 \psi = 0 \quad (2.1)$$

tarafından yönetilir. Akış fonksiyonu daha önce belirttiğimiz gibi sınırlar üzerinde sabit olup sıfır alınır.

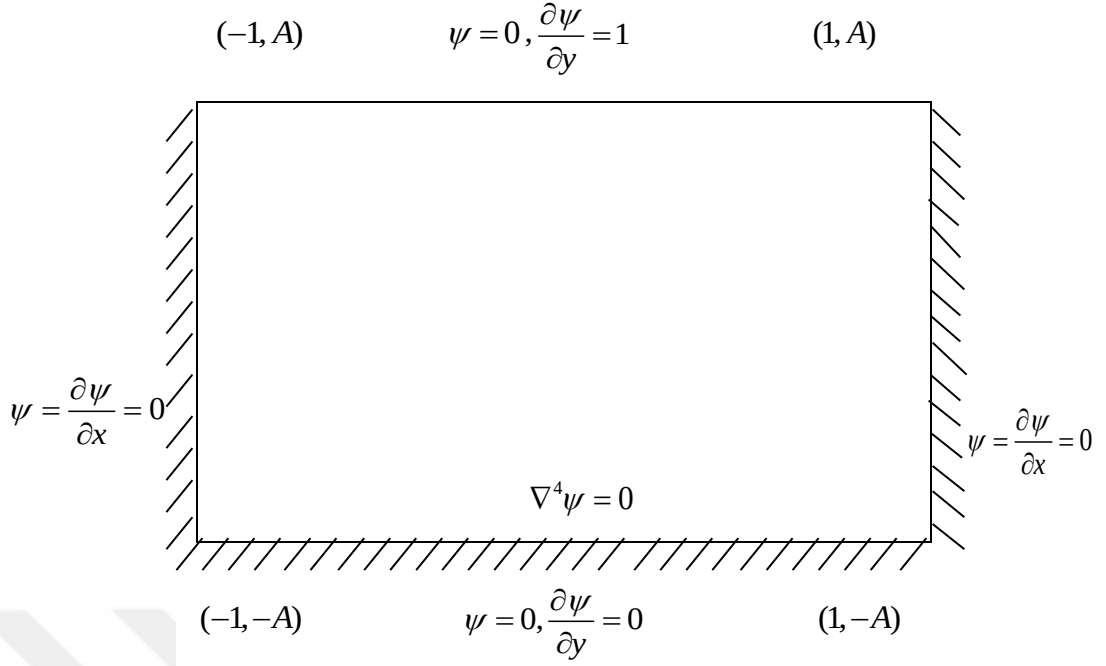
$$\psi(1, y) = \psi(-1, y) = 0 \quad (2.2)$$

$$\psi(x, A) = \psi(x, -A) = 0 \quad (2.3)$$

$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ hız bileşenleri olduğundan no-slip şartlarını üst kapak ve üç sabit duvar için yazarsak,

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(x, A) = 1, \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, -A) = 0, \frac{\partial \psi}{\partial x}(\pm 1, y) = 0 \quad (2.4)$$

olur.



Şekil 2.1. Dikdörtgen kavite.

2.1.1 Seri çözüm metodu

Tek hareketli kapağa sahip dikdörtgensel bölge için Joseph ve Sturges (1978)'in çözüm metodunu tanıtmadan önce Smith (1952) tarafından yarı sonsuz bölge için elde edilen çözümü vereceğiz.

2.1.2 Bir Yarı Sonsuz Boşluk İçin Biortagonal Seri Çözümü

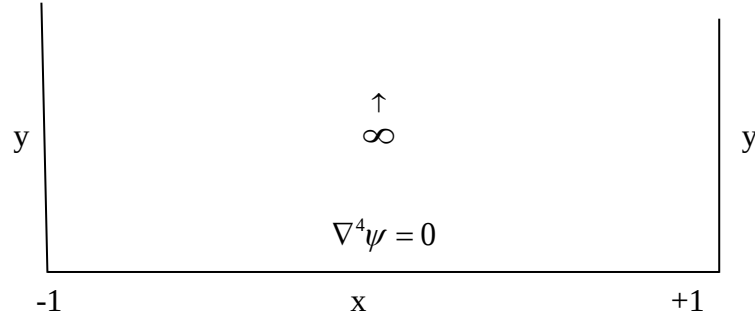
Smith (1952) yan kenarları boyunca sıkıştırılmış bir yarı sonsuz şerit üzerinde biharmonik denklemin çözümü için bir algoritma kurdu.

Yarı sonsuz bölge olan,

$$y > 0, -1 \leq x \leq 1$$

içerisinde çözülen biharmonik denklem bazı sınır şartlarına sahiptir.

$$\psi(\pm 1, y) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(\pm 1, y) = 0 \quad (2.5)$$



Şekil 2.2. Bölge ve sınır koşulları.

Denklem değişkenlerine ayırma yöntemi ile çözülebilir.

$$\psi(x, y) = \phi(x)M(y) \quad (2.6)$$

şeklinde çözüm aranacaktır.

$y \rightarrow \infty$ iken $\psi \rightarrow 0$ olması için $M(y) \approx e^{-s_n y}$ şeklinde alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \sum_{sn} c_n \phi_1^{(n)}(x, s_n) e^{-s_n y} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \sum_{sn} c_n \phi_2^{(n)}(x, s_n) e^{-s_n y} \end{aligned} \quad (2.7)$$

olacaktır. $s_n > 0$ öz değerler ve $\phi_1^{(n)}(x, s_n)$, $\phi_2^{(n)}(x, s_n)$ fonksiyonları öz fonksiyonlardır. $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$ 'nın integralenmesiyle,

$$\psi = \sum_{sn} c_n \phi_1^{(n)}(x, s_n) \frac{e^{-s_n y}}{s_n^2} \quad (2.8)$$

elde edilir. Problem c_n katsayılarının, $\phi_1^{(n)}(x, s_n)$ öz fonksiyonlarının ve s_n öz değerlerinin bulunmasına indirgendi.

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial y^2 \partial x^2} = \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} \quad (2.9)$$

olduğu düşünülerek ve (2.7)'den yararlanarak,

$$\frac{d^2 \phi_1^{(n)}}{dx^2} - s_n^2 \phi_2^{(n)} = 0 \quad (2.10)$$

olduğu kolayca görülür. Biharmonik denklem,

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = 0 \quad (2.11)$$

olup (2.7)'den,

$$c_n \frac{d^2 \phi_2^{(n)}}{dx^2} e^{-s_n y} + 2c_n \frac{d^2 \phi_1^{(n)}}{dx^2} e^{-s_n y} + c_n \phi_1^{(n)} s_n^2 e^{-s_n y} = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{d^2 \phi_2^{(n)}}{dx^2} + \frac{d^2 \phi_1^{(n)}}{dx^2} + s_n^2 (\phi_1^{(n)} + \phi_2^{(n)}) = 0 \quad (2.13)$$

olup (2.10) kullanılırsa,

$$\frac{d^2 \phi_2^{(n)}}{dx^2} + s_n^2 (2\phi_2^{(n)} + \phi_1^{(n)}) = 0 \quad (2.14)$$

elde edilir. Ya da daha basitçe,

$$\nabla^4 \psi = \nabla^2 (\nabla^2 \psi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left[\sum_{s_n} c_n (\phi_1^{(n)} + \phi_2^{(n)}) e^{-s_n y} \right] \quad (2.15)$$

$$\frac{d^2 \phi_1^{(n)}}{dx^2} + \frac{d^2 \phi_2^{(n)}}{dx^2} + s_n^2 (\phi_1^{(n)} + \phi_2^{(n)}) = 0$$

elde edilir.

$$\frac{d^2 \phi_1^{(n)}}{dx^2} = s_n^2 \phi_2^{(n)} \quad (2.16)$$

olduğundan,

$$\frac{d^2 \phi_2^{(n)}}{dx^2} + s_n^2 (\phi_1^{(n)} + 2\phi_2^{(n)}) = 0 \quad (2.17)$$

olur. (2.10) ve (2.14) matris formunda yazılırsa,

$$\frac{d^2}{dx^2} \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{bmatrix} + s_n^2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.18)$$

olur. (2.5) ve (2.8)'den faydalanılarak,

$$\phi_1^{(n)} = \frac{d\phi_1^{(n)}}{dx} = 0, \quad x = \pm 1 \quad (2.19)$$

yazılabilir. (2.10)'da $\phi_2^{(n)}$ çekilip (2.12)'de yerine yazılırsa, yani;

$$\phi_2^n = \frac{d^2 \phi_1^{(n)}}{dx^2} \frac{1}{s_n^2} \quad (2.20)$$

ise (2.12)'den,

$$\frac{d^4 \phi_1^{(n)}}{dx^4} \frac{1}{s_n^2} + \frac{d^2 \phi_1^{(n)}}{dx^2} + s_n^2 (\phi_1^{(n)} + \frac{d^2 \phi_1^{(n)}}{dx^2} \frac{1}{s_n^2}) = 0 \quad (2.21)$$

$$\frac{d^4 \phi_1^{(n)}}{dx^4} + 2s_n^2 \frac{d^2 \phi_1^{(n)}}{dx^2} + s_n^4 \phi_1^{(n)} = 0 \quad (2.22)$$

olur. Bu denklemi çözelim. Sabit katsayılı lineer denklemdir. Karakteristik denklemi,

$$a^4 + 2s_n^2 a^2 + s_n^4 = 0, \quad a^2 = k$$

olsun

$$k^2 + 2s_n^2 k + s_n^4 = 0 \quad (2.23)$$

$$k_{1,2} = -s_n^2 \quad \text{ise} \quad a = \pm \sqrt{k}$$

$$a_1 = a_2 = i.s_n, \quad a_3 = a_4 = -i.s_n$$

olur.

$$\phi_1^{(n)} = c_1 e^{is_n x} + c_2 x e^{is_n x} + c_3 e^{-is_n x} + c_4 x e^{-is_n x} \quad (2.24)$$

$$\phi_1^{(n)} = c_1 (\text{coss}_n x + i \text{sins}_n x) + c_2 x (\text{coss}_n x + i \text{sins}_n x) \quad (2.25)$$

$$+ c_3 (\text{coss}_n x - i \text{sins}_n x) + c_4 x (\text{coss}_n x - i \text{sins}_n x)$$

$$= (c_1 + c_3) \text{coss}_n x + (c_1 - c_3) i \text{sins}_n x + (c_2 + c_4) x \text{coss}_n x + (c_2 - c_4) x i \text{sins}_n x \quad (2.26)$$

$$= A \text{coss}_n x + B \text{sins}_n x + C x \text{coss}_n x + D x \text{sins}_n x \quad (2.27)$$

olur. A,B,C,D katsayıları bulunmalıdır. Bunun için (2.19)'dan faydalanırız. $\phi_1^{(n)}$ çift fonksiyondur. ($x=1$ ve $x=-1$ de ψ 'nin değeri aynı çünkü)

$$\phi_1^{(n)} = A \text{coss}_n x + D x \text{sins}_n x$$

olur. (2.19)'dan,

$$A \text{coss}_n + D \text{sins}_n = 0 \quad (2.28)$$

$$A \text{coss}_n = -D \text{sins}_n \quad (2.29)$$

olur. $\phi_1^{(n)}$ 'in türevini alırsak,

$$\frac{d\phi_1^{(n)}}{dx} = -A s_n \text{sins}_n x + D \text{sins}_n x + D s_n x \text{coss}_n x \quad (2.30)$$

olup yine (2.19)'dan,

$$0 = -A s_n \text{sins}_n + D \text{sins}_n + D s_n \text{coss}_n \quad (2.31)$$

$$(A s_n - D) \text{sins}_n = D s_n \text{coss}_n \quad (2.32)$$

olur. (2.28) ve (2.31)'den,

$$A = s_n \text{sins}_n, \quad D = -s_n \text{coss}_n \quad (2.33)$$

bulunur ve yerine konursa,

$$\phi_1^{(n)}(x, s_n) = s_n \sin s_n \cos s_n x - s_n x \cos s_n \sin s_n x \quad (2.34)$$

bulunur. (2.34) ve (2.10)'dan,

$$\frac{d\phi_1^{(n)}}{dx} = -s_n^2 \sin s_n \sin s_n x - s_n \cos s_n \sin s_n x - s_n^2 x \cos s_n \cos s_n x \quad (2.35)$$

$$\frac{d^2\phi_1^{(n)}}{dx^2} = -s_n^3 \sin s_n \cos s_n x - s_n^2 \cos s_n \cos s_n x - s_n^2 \cos s_n \cos s_n x + s_n^3 x \cos s_n \sin s_n x \quad (2.36)$$

olur.

$$\phi_2^{(n)}(x, s_n) = -(s_n \sin s_n + 2 \cos s_n) \cos s_n x + s_n x \cos s_n \sin s_n x \quad (2.37)$$

elde edilir. Bulunan bu $\phi_1^{(n)}$ ve $\phi_2^{(n)}$ fonksiyonlarına Papkovich-Fadle fonksiyonları adı verilir.

Bundan sonraki adımda bir biortagonallik özelliği türetilecek ve c_n katsayılarının belirlenmesi mümkün olacaktır. Bunu yapmak için kullanılacak olan genelleştirilmiş Wronksion şöyle tanımlanır.

$$w = \begin{bmatrix} \psi_1^{(m)}, \psi_2^{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\phi_1^{(n)}}{dx} \\ \frac{d\phi_2^{(n)}}{dx} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{d\psi_1^{(m)}}{dx}, \frac{d\psi_2^{(m)}}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$w_1 = \psi_1^{(m)} \frac{d\phi_1^{(n)}}{dx} - \frac{d\psi_1^{(m)}}{dx} \phi_1^{(n)} \quad (2.39)$$

$$w_2 = \psi_2^{(m)} \frac{d\phi_2^{(n)}}{dx} - \frac{d\psi_2^{(m)}}{dx} \phi_2^{(n)} \quad (2.40)$$

$$\frac{dw_1}{dx} = \frac{d\psi_1^{(m)}}{dx} \cdot \frac{d\phi_1^{(n)}}{dx} + \frac{d^2\phi_1^{(n)}}{dx^2} \psi_1^{(m)} - \frac{d^2\psi_1^{(m)}}{dx^2} \phi_1^{(n)} - \frac{d\phi_1^{(n)}}{dx} \cdot \frac{d\psi_1^{(m)}}{dx} \quad (2.41)$$

$$\frac{dw_1}{dx} = \psi_1^{(m)} \frac{d^2 \phi_1^{(n)}}{dx^2} - \frac{d^2 \psi_1^{(m)}}{dx^2} \phi_1^{(n)} \quad (2.42)$$

$$\frac{dw_2}{dx} = \psi_2^{(m)} \frac{d^2 \phi_2^{(n)}}{dx^2} - \frac{d^2 \psi_2^{(m)}}{dx^2} \phi_2^{(n)} \quad (2.43)$$

$$\frac{dw}{dx} = \begin{bmatrix} \psi_1^{(m)} & \psi_2^{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^2 \phi_1^{(n)} / dx^2 \\ d^2 \phi_2^{(n)} / dx^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{d^2 \psi_1^{(m)}}{dx^2} & \frac{d^2 \psi_2^{(m)}}{dx^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

(2.18) ve (2.44)'den,

$$\frac{dw}{dx} = - \left\{ s_n^2 \begin{bmatrix} \psi_1^{(m)} & \psi_2^{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{d^2 \psi_1^{(m)}}{dx^2} & \frac{d^2 \psi_2^{(m)}}{dx^2} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

olur. (2.18) için adjoint denklemi,

$$\frac{d^2}{dx^2} \begin{bmatrix} \psi_1^{(m)} & \psi_2^{(m)} \end{bmatrix} + s_m^2 \begin{bmatrix} \psi_1^{(m)} & \psi_2^{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.46)$$

olarak tanımlanır. Eğer w , $\phi_1^{(n)} = \frac{d\phi_1^{(n)}}{dx} = 0$ olduğunda yok oluyorsa, $\psi_2^{(m)} = \frac{d\psi_2^{(m)}}{dx} = 0$

olmalıdır. (2.19) için adjoint sınır şartları,

$$\psi_2^{(m)} = \frac{d\psi_2^{(m)}}{dx} = 0, \quad x = \pm 1 \quad (2.47)$$

bulunur. Eğer $\begin{bmatrix} \psi_1^{(m)} & \psi_2^{(m)} \end{bmatrix}$, (2.46)'nın bir öz vektörü ise benzer şekilde s_n^2 ye tekabül eden (2.19) sınır şartları ile (2.18)'in bir öz vektörü $\{\phi_1^{(n)}, \phi_2^{(n)}\}$ 'dür.

Buradan itibaren,

$$\frac{dw}{dx} = - \left\{ s_n^2 \begin{bmatrix} \psi_1^{(m)} & \psi_2^{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{d^2 \psi_1^{(m)}}{dx^2} & \frac{d^2 \psi_2^{(m)}}{dx^2} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

$$\frac{d^2 \psi_1^{(m)}}{dx^2} + s_m^2 \psi_2^{(m)} = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{d^2 \psi_2^{(m)}}{dx^2} + s_m^2 (2\psi_2^{(m)} - \psi_1^{(m)}) = 0 \quad (2.49)$$

denklemlerine sahibiz. Yukarıdakilerden faydalanarak,

$$\frac{dw}{dx} = - \left\{ s_n^2 [\psi_1^{(m)}, \psi_2^{(m)}] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -s_m^2 \psi_2^{(m)}, -s_m^2 (2\psi_2^{(m)} - \psi_1^{(m)}) \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

$$= - \left\{ \begin{bmatrix} s_n^2 \psi_2^{(m)}, (2\psi_2^{(m)} - \psi_1^{(m)}) s_n^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -s_m^2 \psi_2^{(m)}, -s_m^2 (2\psi_2^{(m)} - \psi_1^{(m)}) \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

$$= - \left\{ (s_n^2 - s_m^2) \psi_2^{(m)}, (s_n^2 - s_m^2) (2\psi_2^{(m)} - \psi_1^{(m)}) \right\} \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

$$= (s_m^2 - s_n^2) [\psi_1^{(m)}, \psi_2^{(m)}] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{bmatrix} = \frac{dw}{dx} \quad (2.53)$$

yazılabilir. (2.19) ve (2.47) sınır şartlarını kullanarak integrallersek,

$$(s_m^2 - s_n^2) \int_{-1}^1 [\psi_1^{(m)}, \psi_2^{(m)}] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{bmatrix} dx = w \quad (2.54)$$

olur. $x = \pm 1$ de $w = 0$ 'dır. $(\int_{-1}^{+1} \frac{dw}{dx} = w(1) - w(-1) = 0)$ $s_m^2 \neq s_n^2$ ise

$$\int_{-1}^1 [\psi_1^{(m)}, \psi_2^{(m)}] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{bmatrix} dx = 0 \quad (2.55)$$

olur. Bu bir biortagonallik bağıntısıdır. Burada $\psi_1^{(n)}(x, s_n)$, $\psi_2^{(n)}(x, s_n)$, öz fonksiyonları (2.46) denkleminde hesaplanabilir ve,

$$\psi_1^{(n)}(x, s_n) = (s_n \sin s_n - 2 \cos s_n) \cos s_n x - s_n x \cos s_n \sin s_n x \quad (2.56)$$

$$\psi_2^{(n)}(x, s_n) = s_n \sin s_n \cos s_n x - s_n x \cos s_n \sin s_n x = \phi_1^{(n)} \quad (2.57)$$

olarak yazılabilirler. s_n parametresi (2.19) şartlarından bulunabilir. Böylece s_n için öz değer denklemi,

$$\sin 2s_n = -2s_n \quad (2.58)$$

olarak bulunur.

Bu öz değerin çözümleri birinci çeyrek daire içinde kompleks köklerdir. (s_n) 'in büyük değerleri için (2.58)'in n . kökü yaklaşık olarak,

$$2s_n \approx 2n + 1,5\pi + i \log_{(4n+3)} \pi \quad (2.59)$$

dir. Burada $s_n = u_n + i v_n$ şeklindedir. İki değişkenli fonksiyonlar için Newton iterasyon metodu kullanılır.

2.2 Bir Dikdörtgensel Bölge İçin Biortogonal Seri çözümü

Joseph ve Sturges (1978) tek hareketli kapaklı bir dikdörtgensel bölge (kavite) içindeki Stokes akış için Smith (1952)'in tekniğini geliştirdiler. Bu problemin çözümü,

$$\psi = \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ A_n e^{s_n(y-A)} + B_n e^{-s_n(y+A)} \right\} \frac{\phi_1^{(n)}(x, s_n)}{s_n^2} \quad (2.60)$$

$$\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \quad (2.61)$$

$$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \quad (2.62)$$

şeklindedir. Burada $\phi_1^{(n)}(x, s_n)$ bir Papkovich-Fadle öz fonksiyonu, s_n 'ler (2.58)'in kökleri (öz değerler) ve A bölgenin yükseklik ile genişlik uzunluklarının oranıdır. (2.58)'den kolayca $s_n = \bar{s}_{-n}$ olduğu ve bu kullanılarak $\phi_1^{(-n)}(x) = \bar{\phi}_1^{(n)}(x)$ olduğu görülür. Buradaki üst çizgi kompleks konjugeyi ifade eder. Akış fonksiyonu reel olduğundan, $A_{-n} = \bar{A}_n$, $B_{-n} = \bar{B}_n$ 'dir. Bunları biraz açacak olursak,

$$\sin s_n = -s_n \quad (2.63)$$

olmak üzere,

$$\sin \overline{s_n} = \sin(u + iv) = \sin(u - iv) = \sin u \cos iv + \cos u \sin(-iv) \quad (2.64)$$

$$\cos iv = \frac{e^{-v} + e^v}{2} = \cosh v \quad (2.65)$$

$$\sin iv = \frac{e^{-v} - e^v}{2i} = i \frac{e^v - e^{-v}}{2} = i \sinh v \quad (2.66)$$

olup,

$$\overline{\sin s_n} = \sin \overline{s_n} \quad (2.67)$$

olduğunu gösterelim.

$$\overline{\sin s_n} = \overline{\sin(u + iv)} = \overline{\sin u \cos iv + \cos u \sin iv} = \overline{\sin u \cosh v + i \cos u \sinh v} \quad (2.68)$$

$$= \sin u \cosh v - i \cos u \sinh v = \sin u \cos iv - \cos u \sin iv \quad (2.69)$$

$$= \sin(u - iv) = \sin \overline{s_n} \quad (2.70)$$

olur. $s_n = -\overline{s_n}$ olduğunu gösterelim. Bu doğru ise (2.58)'de s_n yerine $-\overline{s_n}$ yazılırsa eşitlik sağlanmalıdır.

$$\sin(\overline{-s_n}) = -(\overline{-s_n}) = -(-u - iv) = u + iv \text{ olmalı. } \sin(\overline{-s_n}) = \overline{s_n} \quad (2.71)$$

$$\sin(\overline{-s_n}) = \sin(u + iv) = -\sin u \cosh v + i \sinh v \cos u \quad (2.72)$$

$$= -[\sin u \cosh v - i \sinh v \cos u] = -[\overline{\sin s_n}] = \overline{s_n} \quad (2.73)$$

olur. Yani

$$s_n = -\overline{s_n} \quad (2.74)$$

dir. $\phi_1^{-(n)}(x) = \overline{\phi_1^{(n)}}(x)$ olduğunu da görebiliriz.

$$\overline{\phi_1^{(n)}} = \overline{s_n \sin s_n \cos s_n x} - \overline{s_n x \cos s_n \sin s_n x} \quad (2.75)$$

$$= s_{-n} \sin \overline{s_n} \cos \overline{s_n} x - s_{-n} x \cos \overline{s_n} \sin \overline{s_n} x \quad (2.76)$$

$$= s_{-n} \sin s_{-n} \cos s_{-n} x - s_{-n} x \cos s_{-n} \sin s_{-n} x = \phi_1^{-n} \quad (2.77)$$

2.2.1 Katsayıların Belirlenmesi

Alt ve üst kapak için (2.4) sınır şartlarından,

$$V_1 = 1 = \sum_{-\infty}^{\infty} (A_n - B_n \exp(-2s_n A)) \frac{\phi_1^{(n)}}{s_n} \quad (2.78)$$

$$0 = \sum_{-\infty}^{\infty} (A_n + B_n \exp(-2s_n A)) \frac{\phi_1^{(n)}}{s_n^2} \quad (2.79)$$

$$V_2 = 0 = \sum_{-\infty}^{\infty} (A_n \exp(-2s_n A) - B_n) \frac{\phi_1^{(n)}}{s_n} \quad (2.80)$$

$$0 = \sum_{-\infty}^{\infty} (A_n \exp(-2s_n A) + B_n) \frac{\phi_1^{(n)}}{s_n^2} \quad (2.81)$$

olur. Burada V_1 ve V_2 sırasıyla üst ve alt kapakların hızlarını gösterir. A_n ve B_n 'yi bulmak için (2.55) biortagonallik bağıntısını (2.78) ve (2.81) denklemlerine uygulayacağız. (2.55) biortagonallik bağıntısını tekrar yazalım.

$$\int_{-1}^1 [\psi_1^{(m)}, \psi_2^{(m)}] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{bmatrix} dx = 0 \quad (2.82)$$

yani,

$$\int_{-1}^1 \phi_1^{(n)} \psi_2^{(m)} + \phi_2^{(n)} (2\psi_2^{(m)} - \psi_1^{(m)}) dx = 0 \quad (2.83)$$

şeklindeydi. Şimdi (2.79)'un iki defa x 'e göre türevini alır ve

$$\frac{d^2 \phi_1^{(n)}}{dx^2} = s_n^2 \phi_2^{(n)}(x) \quad (2.84)$$

bağıntısını kullanırsak $\phi_1^{(n)}$ elimine edilir. Yani (2.79)'dan,

$$0 = \sum_{-\infty}^{\infty} (A_n + B_n e^{-2s_n A}) \frac{d^2 \phi_1^{(n)}}{dx^2} \frac{1}{s_n^2} \quad (2.85)$$

$$0 = \sum_{-\infty}^{\infty} (A_n + B_n e^{-2s_n A}) \phi_2^{(n)}(x) \quad (2.86)$$

elde edilir. (2.78)'e $(A_n + B_n e^{-2s_n A}) \phi_1^{(n)}$ terimini ekleyip çıkararak

$$I = \sum_{-\infty}^{\infty} (A_n + B_n e^{-2s_n A} - A_n - B_n e^{-2s_n A} + \frac{A_n}{s_n} - \frac{B_n}{s_n} e^{-2s_n A}) \phi_1^{(n)} \quad (2.87)$$

olup (2.87) ve (2.85) yardımıyla,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ (A_n + B_n e^{-2s_n A}) \begin{pmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{pmatrix} + \left[A_n \frac{(1-s_n)}{s_n} - B_n e^{-2s_n A} \frac{(1+s_n)}{s_n} \right] \begin{pmatrix} \phi_1^{(n)} \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (2.88)$$

elde edilir. Benzer şekilde (2.81)'in iki kere türevlenerek (2.80) ile birlikte düşünülmesiyle,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ (A_n e^{-2s_n A} + B_n) \begin{pmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{pmatrix} + \left[A_n e^{-2s_n A} \frac{(1-s_n)}{s_n} - B_n \frac{(1+s_n)}{s_n} \right] \begin{pmatrix} \phi_1^{(n)} \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (2.89)$$

olur,

$$\int_{-1}^1 (\psi_1^2, \psi_2^2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} dx \quad (2.90)$$

operatörü (2.88) ve (2.89)'a uygulanırsa,

$$\int_{-1}^1 (\psi_1^2, \psi_2^2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dx \quad (2.91)$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(A_n + B_n e^{-2s_n A} \right) \int_{-1}^1 (\psi_1^2, \psi_2^2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{pmatrix} dx \right\} + \quad (2.92)$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ A_n \left(\frac{1-s_n}{s_n} \right) - B_n e^{-2s_n A} \left(\frac{1+s_n}{s_n} \right) \right\} \int_{-1}^1 (\psi_1^2, \psi_2^2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^{(n)} \\ 0 \end{pmatrix} dx$$

burada,

$$K_L = \int_{-1}^1 (\psi_1^2, \psi_2^2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{pmatrix} dx \quad (2.93)$$

ve,

$$M_{L,n} = \int_{-1}^1 (\psi_1^2, \psi_2^2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^{(n)} \\ 0 \end{pmatrix} dx \quad (2.94)$$

olur.

$$\int_{-1}^1 (\psi_1^2, \psi_2^2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dx = \quad (2.95)$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(A_n + B_n e^{-2s_n A} \right) K_L \right\} + \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ A_n \left(\frac{1-s_n}{s_n} \right) - B_n e^{-2s_n A} \left(\frac{1+s_n}{s_n} \right) \right\} M_{L,n} \quad (2.96)$$

olarak yazılır.

$$\int_{-1}^1 (\psi_1^2, \psi_2^2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dx = \int_{-1}^1 \psi_2^L dx = \int_{-1}^1 s_L \sin s_L \cos s_L x - s_L x \cos s_L \sin s_L x dx \quad (2.97)$$

$$= 2 \sin^2 s_L - s_L \cos s_L \left(\frac{-x \cos s_L x}{s_L} + \frac{\sin s_L x}{s_L^2} \right) \Big|_{-1}^1 \quad (2.98)$$

$$= 2 \sin^2 s_L - s_L \cos s_L \left(-\frac{2 \cos s_L}{s_L} + \frac{2 \sin s_L}{s_L^2} \right) \quad (2.99)$$

$$= 2 \sin^2 s_L - \frac{\cos s_L}{s_L} (-2s_L \cos s_L + 2 \sin s_L) \quad (2.100)$$

$$= 2 \sin^2 s_L + 2 \cos^2 s_L - \frac{1}{s_L} (\sin 2s_L) \quad (2.101)$$

$$\sin 2s_L = -2s_L \quad (2.102)$$

$$= 4$$

olur. K_L ve $M_{L,n}$ 'de benzer şekilde hesaplanır.

$$K_L = \int_{-1}^1 (\psi_1^L, \psi_2^L) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{pmatrix} dx \quad (2.103)$$

$$= \int_{-1}^1 (\psi_2^L, -\psi_1^L + 2\psi_2^L) \begin{pmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{pmatrix} dx \quad (2.104)$$

$$= \int_{-1}^1 \psi_2^L \phi_1^{(n)} + (-\psi_1^L \phi_2^{(n)} + 2\psi_2^L \phi_2^{(n)}) dx \quad (2.105)$$

$$\phi_1^{(n)} = \psi_2^{(n)} = s_n \sin s_n \cos s_n x - s_n x \cos s_n \sin s_n x \quad (2.106)$$

$$\phi_2^{(n)} = -(s_n \sin s_n + 2 \cos s_n) \cos s_n x + s_n x \cos s_n \sin s_n x \quad (2.107)$$

$$\psi_1^{(n)} = (s_n \sin s_n - 2 \cos s_n) \cos s_n x - s_n x \cos s_n \sin s_n x \quad (2.108)$$

$$= \int_{-1}^1 \psi_2^L \phi_1^{(n)} = s_L s_n \left\{ 2 \cos s_L \cos s_n \left[\frac{\sin(s_L + s_n)}{(s_L + s_n)^3} - \frac{\sin(s_L - s_n)}{(s_L - s_n)^3} \right] + \right. \quad (2.109)$$

$$\left. + (1 + \cos(s_L - s_n) \cos(s_L + s_n)) \left[\frac{1}{(s_L - s_n)^2} - \frac{1}{(s_L + s_n)^2} \right] \right\} \quad (l \neq n)$$

eğer $l = n$ ise,

$$M_{LL} = -\cos^2 s_L \left(\frac{2}{3} s_L^2 + \cos^2 s_L \right) \quad (2.110)$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$(A_L + B_L e^{-2s_L A})K_L + \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[A_n \frac{(1-s_n)}{s_n} - B_n e^{-2s_L A} \frac{(1+s_n)}{s_n} \right] M_{L,n} \right\} = 4 \quad (2.111)$$

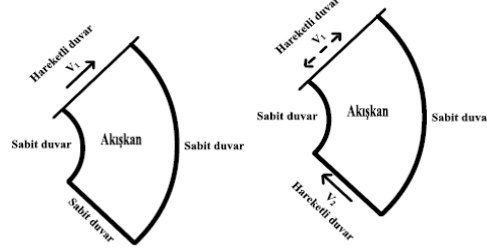
$$(A_L e^{-2s_L A} + B_L)K_L + \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[A_n e^{-2s_L A} \frac{(1-s_n)}{s_n} - B_n \frac{(1+s_n)}{s_n} \right] M_{L,n} \right\} = 0 \quad (2.112)$$

denklem sistemi elde edilir. $n = e = N$ alınarak $2N$ bilinmeyenli $2N$ denklemden oluşan sistem Gauss-Eliminasyon metodu ile çözülerek A_n ve B_n katsayıları elde edilir. Bu katsayılar çözümde yerlerine konur ve analitik çözüm elde edilmiş olunur.

Analitik çözümün sayısal değerleri ise paket programlar yardımıyla elde edilebilir. Her bir (x, y) noktası için ψ değerleri Fortran programlama dilinde hazırlanan algoritmalarda elde edildi. Sayısal sonuçlar literatürde yer aldığı için bu kısımda yer verilmedi.

3. SEKTÖREL KAVİTELERDEKİ STOKES AKIŞ PROBLEMİNİN BİORTAGONAL SERİ ÇÖZÜMÜ

Sektörel kavitelerdeki Stokes akış probleminin biortagonal seri çözümü Khuri (1996) tarafından elde edildi.



Şekil 3.1. Sektörel kavite örnekleri.

3.1 Biortagonallik Şartları:

3.1.1 Dördüncü dereceden sınır değer problemlerinin bir sınıflandırması

Bu bölümde ilk olarak (3.1)'deki gibi self-adjoint formda yazılan 4. mertebeden bir diferansiyel denklemin, öz fonksiyonlar ve adjoint öz fonksiyonlar yardımıyla biortagonallik özelliği gösterildi.

$$\left(P_0(r)y''(r)\right)'' + \left(P_1(r;\alpha)y'(r)\right)' + \left(P_2(r;\alpha)y(r)\right) = 0, \quad r \in [r_1, r_2] \quad (3.1)$$

Biortagonallik şartı için Teorem (3.2)'de tanımlandığı şekliyle katsayılar üzerine yüklenen bazı sınırlamalar getirilecektir. Sınır koşulları;

$$y(r_1) = y(r_2) = y'(r_1) = y'(r_2) = 0 \quad (3.2)$$

şeklindedir. (3.1) denklemini (2×2) sistemi olarak yazmak istiyoruz. Öncelikle aşağıdaki dördüncü dereceden denklemi self-adjoint şekilde düşünelim.

$$\left(\alpha_1(r)y''(r)\right)'' + \left(\alpha_2(r)y'(r)\right)' + \alpha_3(r)y(r) = 0 \quad (3.3)$$

Bu durumda aşağıdaki teoremi kullanabiliriz, Khuri (1996)

Teorem 3.1: $r_1 \leq r \leq r_2$ olmak üzere $a_1(r), a_2''(r), a_3(r)$ sürekli ve $a_1 \neq 0$ olsun. Bu durumda (3.3) denklemi aşağıdaki formda yazılabilir.

$$\begin{aligned} z'' + p(r)z &= q(r)w \\ w'' + p(r)w &= s(r)z \end{aligned} \quad (3.4)$$

burada $r_1 \leq r \leq r_2$ üzerinde p, q ve s sürekli, $q(r) \neq 0$ ve $p/q \in C^{(2)}$. Aksine, eğer p, q ve s sürekli ve $q(r) \neq 0$ ise o zaman (3.4) denklemi $a_1(r) \neq 0$ ve $a_1(r), a_2''(r)$ ve $a_3(r)$ sürekli olduğundan (3.3)'e denktir.

ispat:

$$q = \frac{1}{\alpha_1}, \quad p = \frac{\alpha_2}{2\alpha_1} \quad \text{ve} \quad s = \frac{\alpha_2''}{2} + \frac{\alpha_2^2}{4\alpha_1} - \alpha_3 \quad \text{olsun.}$$

buradan.

$$\alpha_1 = \frac{1}{q}, \quad \alpha_2 = \frac{2p}{q} \quad \text{ve} \quad \alpha_3 = [p/q]'' + [p^2/q] - s \quad (3.5)$$

elde edilir. Bunları (3.3)'te yerine yazarsak,

$$[y''/q]''' + 2[py'/q]'' + y[p/q]'' + y[p^2/q] - sy = 0 \quad (3.6)$$

ya da düzenlenmiş haliyle

$$[y''/q + py/q]'' + p[y''/q + py/q] = sy \quad (3.7)$$

elde edilir.

$$y = z, \quad w = \frac{y''}{q} + \frac{p}{q}y \quad (3.8)$$

olarak alınırsa yukarıdaki denklemin (3.4)'e eşit olduğu görülür.

Teorem (3.2) katsayılara yüklenen bazı koşullarla birlikte (3.1) ve (3.2) de verilen sınır değer problemi için biortagonallik özelliği ortaya çıkar.

Teorem 3.2 (Biortagonallik Koşulu): $r_1 \leq r \leq r_2$ olması şartıyla $P_0(r)$, $P_1''(r; \alpha)$ ve $P_2(r; \alpha)$ 'nin sürekli olduğu ve $P_0(r) \neq 0$ olduğu durumda (3.1) ve (3.2)'de verilen sınır değer problemini ele alalım. (3.1)'deki P_i 'ler, α ya göre en fazla i. dereceden polinomlardır. Özellikle $P_1(r; \alpha) = p_{11}(r)\alpha + p_{12}(r)$ olup,

$$P_1^2(r; \alpha) - 4P_0(r)P_2(r; \alpha) = p_{31}(r)\alpha + p_{32}(r) \quad (3.9)$$

$$p_{11}^2(r) + p_{31}^2(r) \neq 0 \quad (3.10)$$

şeklinde olmasını istiyoruz. P_n^* aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$P_n^* = \int_{r_1}^{r_2} [\varphi_2^{(n)}(r), \varphi_1^{(n)}(r)] B(r) \begin{bmatrix} \varphi_1^{(n)}(r) \\ \varphi_2^{(n)}(r) \end{bmatrix} dr \quad (3.11)$$

biortagonallik şartı aşağıdaki gibidir.

$$\int_{r_1}^{r_2} [\varphi_2^{(m)}(r), \varphi_1^{(m)}(r)] B(r) \begin{bmatrix} \varphi_1^{(n)}(r) \\ \varphi_2^{(n)}(r) \end{bmatrix} dr = P_n^* \delta_{mn} \quad (3.12)$$

burada δ_{mn} Kronoker deltası olup,

$$B(r) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \frac{p_{11}(r)}{p_0(r)} & 0 \\ \frac{1}{2} p_{11}''(r) + \frac{1}{4} \frac{p_{31}(r)}{p_0(r)} & -\frac{1}{2} \frac{p_{11}(r)}{p_0(r)} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

ve

$$\varphi_1^{(n)}(r) = y_n(r) \quad (3.14)$$

$$\varphi_2^{(n)}(r) = P_0(r) y_n''(r) + \frac{1}{2} P_1(r; \alpha_n) y_n(r) \quad (3.15)$$

dir. Burada y_i , (3.1)'in α_i öz değerlerine karşılık gelen öz fonksiyonlardır.

İspat: Teorem (3.1)'i, aşağıdaki şekilde verilmiş olan bir (2x2) sistemi olarak yeniden yazalım.

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}'' = (A(r) + \alpha B(r)) \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

burada

$$A(r) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \frac{p_{12}(r)}{p_0(r)} & \frac{1}{p_0(r)} \\ \frac{1}{2} p_{12}'' + \frac{1}{4} \frac{p_{32}(r)}{p_0(r)} & -\frac{1}{2} \frac{p_{12}(r)}{p_0(r)} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

$$B(r) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \frac{p_{11}(r)}{p_0(r)} & 0 \\ \frac{1}{2} p_{11}''(r) + \frac{1}{4} \frac{p_{31}(r)}{p_0(r)} & -\frac{1}{2} \frac{p_{11}(r)}{p_0(r)} \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

ve

$$z = y, \quad w = P_0(r) y'' + \frac{1}{2} P_1(r; \alpha) y \quad (3.19)$$

dir. Açıkça $p_{11}^2(r) + p_{31}^2(r) \neq 0$ koşulu matris $B(r)$ 'nin özdeş biçimde sıfır olmadığını garanti eder. Sistem (3.16) aşağıdaki şekle sahip olan ve (3.4)'te verilen $s(r)$ 'den dolayı lineerdir.

$$s(r) = \frac{1}{2} P_1'' + \frac{1}{4 P_0} \{P_1^2 - 4 P_0 P_2\}$$

bu lineerdir çünkü α 'daki $(P_1^2 - 4P_0P_2)$ ifadesinin lineer olması gerekir; P_2 ise α 'ya en fazla ikinci dereceden polinomdur. Böylece lineer bir sistemi elde etmek için ikinci koşul çok önemlidir.

(3.16) sistemini şu şekilde yazabiliriz,

$$x'' = (A(r) + \alpha B(r))x, \quad x = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

(3.2) ve (3.19) denklemlerinden çıkan aşağıdaki sınır koşullarıyla birlikte,

$$z(r_1) = z(r_2) = z'(r_1) = z'(r_2) = 0 \quad (3.21)$$

(3.21) sınır koşullarıyla birlikte (3.20) için bir adjoint sistem şu şekildedir.

$$s'' = s(A(r) + \alpha B(r)), \quad s = [s_1, s_2] \quad (3.22)$$

sınır koşulları,

$$s_2(r_1) = s_2(r_2) = s_2'(r_1) = s_2'(r_2) = 0 \quad (3.23)$$

şeklinde.

$s_2 = y$ alınarak (3.23)'deki sınır koşullarıyla birlikte, (3.22) sistemi (3.2) deki sınır koşullarına sahip olan dördüncü mertebeden (3.1) denkleme indirgenir. (3.22)'yi genişletirsek

$$s_1 = P_0(r)y'' + \frac{1}{2}P_1(r;\alpha)y \quad (3.24)$$

elde edilir. (3.22)-(3.23) sistemi gerçekte (3.20)-(3.21) için bir self-adjoint sistemdir. Bu matris $(A(r) + \alpha B(r))$ 'nin iki köşegen elemanının özdeş olduğu gerçeğinden kaynaklanır. (3.20)-(3.21) sınır değer problemi için olan öz değerler, (3.22)-(3.23) eşlenik sınır değer probleminde verilenler için olan öz değerlerle özdeşir.

x_n (3.20)-(3.21)'de verilen sistemin α_n öz değerine denk gelen bir öz fonksiyonu olsun ve s_m , (3.22)-(3.23)'de verilen eşlenik sistemin α_m öz değerine denk gelen bir öz fonksiyonu olsun, böylece,

$$x_n'' = (A(r) + \alpha_n B(r))x_n \quad (3.25)$$

$$s_m'' = s_m (A(r) + \alpha_m B(r)) \quad (3.26)$$

elde edilir. (3.25)'i soldan s_m ile çarparak ve (3.26) denklemini de sağdan x_n ile çarparak ve sonra her iki denklemi birbirinden çıkararak aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$s_m x_n'' - s_m'' x_n = (\alpha_n - \alpha_m) s_m B(r) x_n \quad (3.27)$$

(3.27)'nin her iki tarafını r_1 den r_2 ye birleştirerek ve (3.21) ve (3.23) sınır koşullarını kullanarak aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$0 = s_m x_n' - s_m' x_n \Big|_{r_1}^{r_2} = (\alpha_n - \alpha_m) \int_{r_1}^{r_2} s_m B(r) \begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

fakat,

$$s_m B(r) x_n = [s_1^{(m)}, s_2^{(m)}] B(r) \begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

olduğu için (3.19), (3.24) ve (3.28) denklemlerini kullanarak (3.12)'de verilen biortagonallik koşulu elde edilir.

3.1.2 Bir sektörel bölge biortagonallik koşulu

İki boyutlu sektörel bir bölgedeki Stokes akışı yöneten dördüncü mertebeden sınır değer problemi için Teorem (3.2) kullanılarak biortagonallik şartı elde edildi.

$$V = \{r, \theta : 0 < r_1 \leq r_2, -\theta_1 \leq \theta \leq \theta_1\} \quad (3.30)$$

Kararlı akış bir ψ akış fonksiyonundan elde edilir. ψ 'nın türevleri hız bileşenlerini verir.

$$v_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (3.31)$$

burada, v_r ve v_θ 'nın sırasıyla yarıçap ve açısal yöndeki hız bileşenlerini verir. v 'deki Stokes akış denklemi aşağıdaki gibi verilir.

$$\nabla^4 \psi(r, \theta) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 \psi(r, \theta) = 0 \quad (3.32)$$

$r = r_1, r_2$ olması şartıyla hızın yok olması gerekir. Bu nedenle yukarıdaki akış fonksiyonunun,

$$\psi(r_1, \theta) = \psi(r_2, \theta) = \frac{\partial \psi}{\partial r}(r_1, \theta) = \frac{\partial \psi}{\partial r}(r_2, \theta) = 0 \quad (3.33)$$

şartlarını sağlaması gerekir. (3.32) ve (3.33)'ün ayrılabilir çözümleri,

$$\psi(r, \theta) \approx \{\sin \lambda \theta, \cos \lambda \theta\} y(r) \quad (3.34)$$

şeklindedir. Burada $y(r)$ sınır koşullarını sağlamak zorunda olup,

$$r y^{iv} + 2 y''' - \frac{1}{r} (1 + 2\lambda^2) y'' + \frac{1}{r^2} (1 + 2\lambda^2) y' + \frac{1}{r^3} \lambda^2 (\lambda^2 - 4) y = 0 \quad (3.35)$$

$$y(r_1) = y(r_2) = y'(r_1) = y'(r_2) = 0 \quad (3.36)$$

şeklinde yazılır. Açıkça (3.35) aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir,

$$(r y'')'' - (1 + 2\lambda^2) \left(\frac{1}{r} y' \right)' + \lambda^2 (\lambda^2 - 4) \frac{1}{r^3} y = 0 \quad (3.37)$$

$\alpha_n \neq \alpha_m$ ve aşağıdaki şartlar halinde Teorem (3.2)'nin hipotezi sağlanır:

$$P_0(r) = r, \quad P_1(r; \alpha) = -\frac{\alpha}{r}, \quad P_2(r; \alpha) = \frac{1}{4r^3}(\alpha - 1)(\alpha - 9) \quad (3.38)$$

$$\alpha = 1 + 2\lambda^2 \quad (3.39)$$

böylece,

$$P_1^2(r; \alpha) - 4P_0(r)P_2(r; \alpha) = \frac{1}{r^2}(10\alpha - 9) \quad (3.40)$$

olup buradan,

$$p_{31}(r) = \frac{10}{r^2}, \quad p_{32}(r) = -\frac{9}{r^2}, \quad p_{11}(r) = -\frac{1}{r}, \quad p_{12}(r) = 0 \quad (3.41)$$

elde edilir. Böylece Teorem (3.2)'yi kullanarak biortagonallik koşulu aşağıda verilir:

$$\int_{r_1}^{r_2} [\varphi_2^{(m)}(r), \varphi_1^{(m)}(r)] B(r) \begin{bmatrix} \varphi_1^{(n)}(r) \\ \varphi_2^{(n)}(r) \end{bmatrix} dr = P_n^* \delta_{mn} (\lambda_n^2 \neq \lambda_m^2) \quad (3.42)$$

$$B(r) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2r^2} & 0 \\ \frac{3}{2r^3} & \frac{1}{2r^2} \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

öz fonksiyonlar aşağıdaki özelliktedirler,

$$\phi_1^{(n)}(r) = y_n(r) \quad (3.44)$$

$$\phi_2^{(n)}(r) = ry_n''(r) - \frac{\mu_n}{2r} y_n(r) \quad (3.45)$$

$$\mu_n = 1 + 2\lambda_n^2 \quad (3.46)$$

(3.42)'yle verilen biortagonallik koşulu gelecek bölümde sektörel kavite içerisinde Stokes akış problemini çözmek için kullanılacaktır.

3.2 Sektörel Kavite İçin Biortagonal Seri Çözümü

3.2.1 Biharmonik denklemin değişkenlerine ayrılır çözümü

Kutupsal koordinatlarda biharmonik denklem,

$$\nabla^4 \psi(r, \theta) = \left(\frac{\partial^2}{\partial^2 r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 \psi(r, \theta) = 0 \quad (3.47)$$

şeklinde olup değişkenlerine ayrılabilir çözümü ise,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial^2 r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) R(r) \Phi(\theta) = 0 \quad (3.48)$$

olarak ifade edilir. (3.48) denklemini düzenlenerek,

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3}{\partial \theta^2 \partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2 \partial r^2} + \frac{4}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] R(r) \Phi(\theta) = 0 \quad (3.49)$$

olur. Buradan, (3.32) denklemini sağlayan akış fonksiyonunun değişkenlerine ayrılmış şekli,

$$\psi(r, \theta) = R(r) \Phi(\theta) \quad (3.50)$$

$$\Phi R'' + \frac{2\Phi}{r} R''' - \frac{\Phi}{r^2} R'' + \frac{\Phi}{r^3} R' + \frac{R}{r^4} \Phi'' - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{4}{r^4} R \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (3.51)$$

elde edilir.

$$\Phi'' = -\lambda^2 \Phi \quad (3.52)$$

olarak alınarak bu sabit katsayılı diferansiyel denklem çözülürse,

$$\Phi(\theta) = c_1 \cos(\lambda \theta) + c_2 \sin(\lambda \theta) \quad (3.53)$$

olarak bulunur ve $\Phi'' = \lambda^4 \Phi$ olup (3.50) denklemini düzenlenirse,

$$r^4 R^{iv} + 2r^3 R''' - r^2 (1 + 2\lambda^2) R'' + (1 + 2\lambda^2) r R' + (\lambda^4 - 4\lambda^2) R = 0 \quad (3.54)$$

olur ki Cauchy-Euler denklemdir. Bu denklem çözülerek,

$$R(r) = ar^\lambda + br^{-\lambda} + cr^{2-\lambda} + dr^{2+\lambda} \quad (3.55)$$

elde edilir. Böylece (3.51) ve (3.53)'den yararlanılarak, (3.47) ifadesini (3.32) denkleminde yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılarak,

$$R(r) = ar^\lambda + br^{-\lambda} + cr^{2-\lambda} + dr^{2+\lambda} \quad (3.56)$$

$$\Phi(\theta) = E \sin(\lambda\theta) + F \cos(\lambda\theta) \quad (3.57)$$

şeklinde ifade edilir. (3.56) ve (3.57) ifadelerinden faydalananarak ve üst üste ekleme (super-position) özelliğini kullanarak (3.50)'den akış fonksiyonu için aradığımız çözümün,

$$\psi(r, \theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} [E_n \sin(\lambda_n \theta) + F_n \cos(\lambda_n \theta)] \phi_1^{(n)}(r) \quad (3.58)$$

şeklinde olacağı görüldü. Böylelikle problem a_n, b_n, c_n, d_n, E_n ve F_n katsayıları ile λ_n öz değerlerinin bulunmasına indirgendi. Burada $\phi_1^{(n)}(r)$ Papkovich-Fadle öz fonksiyonunun,

$$\phi_1^{(n)}(r) = a_n r^{\lambda_n} + b_n r^{-\lambda_n} + c_n r^{2-\lambda_n} + d_n r^{2+\lambda_n} \quad (3.59)$$

şeklinde olacağı açıktır. $r_1 \leq r \leq r_2$ için (3.36) ve (3.42) sınır koşullarından,

$$\phi_1^{(n)}(r_1) = \phi_1^{(n)}(r_2) = \frac{\partial \phi_1^{(n)}}{\partial r}(r_1) = \frac{\partial \phi_1^{(n)}}{\partial r}(r_2) = 0 \quad (3.60)$$

olacağı görüldü (3.59) ve (3.60)'dan,

$$0 = a_n r_1^{\lambda_n} + b_n r_1^{-\lambda_n} + c_n r_1^{2-\lambda_n} + d_n r_1^{2+\lambda_n} \quad (3.61)$$

$$0 = \lambda_n a_n r_1^{\lambda_n-1} - \lambda_n b_n r_1^{-\lambda_n-1} + (2 - \lambda_n) c_n r_1^{1-\lambda_n} + (2 + \lambda_n) d_n r_1^{1+\lambda_n} \quad (3.62)$$

$$0 = a_n r_2^{\lambda_n} + b_n r_2^{-\lambda_n} + c_n r_2^{2-\lambda_n} + d_n r_2^{2+\lambda_n} \quad (3.63)$$

$$0 = \lambda_n a_n r_2^{\lambda_n-1} - \lambda_n b_n r_2^{-\lambda_n-1} + (2 - \lambda_n) c_n r_2^{1-\lambda_n} + (2 + \lambda_n) d_n r_2^{1+\lambda_n} \quad (3.64)$$

denklem sistemi oluştu. Bu denklem sistemi çözümlere a_n, b_n, c_n ve d_n katsayıları bulundu.

$$b_n = \lambda_n b^{2\lambda_n} \left(\frac{b^2 - a^2}{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{2\lambda_n}} \right) \quad (3.65)$$

$$c_n = \frac{1}{\lambda_n - 1} a^{2\lambda_n} - \frac{\lambda_n^2}{1 - \lambda_n} b^{2\lambda_n} \left(\frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{2\lambda_n}} \right) \quad (3.66)$$

$$d_n = 1 \quad (3.67)$$

elde edildi. (3.50)'deki denklem sisteminin çözülebilmesi için katsayılar matrisi olan,

$$M = \begin{bmatrix} a^{\lambda_n} & a^{-\lambda_n} & a^{2-\lambda_n} & a^{2+\lambda_n} \\ b^{\lambda_n} & b^{-\lambda_n} & b^{2-\lambda_n} & b^{2+\lambda_n} \\ \lambda_n a^{\lambda_n-1} & -\lambda_n a^{-\lambda_n-1} & (2 - \lambda_n) a^{1-\lambda_n} & (2 + \lambda_n) a^{1+\lambda_n} \\ \lambda_n b^{\lambda_n-1} & -\lambda_n b^{-\lambda_n-1} & (2 - \lambda_n) b^{1-\lambda_n} & (2 + \lambda_n) b^{1+\lambda_n} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

matrisin determinantı $\det M = 0$ olmalıdır. Bu determinant hesaplanarak,

$$0 = 8(1 - \lambda_n^2)ab - 4a^{1+2\lambda_n}b^{1-2\lambda_n} + 4\lambda_n^2 a^{-1}b^3 - 4a^{1-2\lambda_n}b^{1+2\lambda_n} + 4\lambda_n^2 a^3b^{-1} \quad (3.69)$$

elde edildi. Son denklemleri düzenleyerek,

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{a}{b}\right)^{-\lambda_n} \right]^2 - \lambda_n^2 \left[\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right]^2 = 0 \quad (3.70)$$

ya da,

$$2 \sinh \left[\left(\log \frac{a}{b} \right) \lambda_n \right] = \pm \left[\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right] \lambda_n \quad (3.71)$$

veya,

$$\sin \left[i \left(\log \frac{a}{b} \right) \lambda_n \right] = \pm \frac{i}{2} \left[\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right] \lambda_n \quad (3.72)$$

olarak yazıldı.

$$\hat{\lambda}_n = i \left(\log \frac{a}{b} \right) \lambda_n \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{1}{2 \log \frac{b}{a}} \left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right) \quad (3.73)$$

dönüşümleri ile,

$$\sin \hat{\lambda}_n = \pm \beta \hat{\lambda}_n \quad (3.74)$$

bulundu. $\hat{\lambda}_n = \mu_n + i v_n$ şeklindeki öz değerleri bulmak için iki değişkenli fonksiyonlar için Newton-iterasyon metodunu kullandık.

3.3 $\sin \hat{\lambda}_n = \pm \beta \hat{\lambda}_n$ Denkleminde $\hat{\lambda}$ Öz-Değerlerinin Elde Edilişi

Yukarıda özetlenen Newton-İterasyon metodunu,

$$\sin \hat{\lambda} = \pm \beta \hat{\lambda} \quad (3.75)$$

denkleminde uygulayarak $\hat{\lambda}_n$ öz-değerlerini elde edelim. Öz-değerler,

$$\hat{\lambda} = \mu_n + i v_n \quad (3.76)$$

şeklinde alındı. (3.73)'den yararlanarak,

$$\sin \left(i \log \frac{a}{b} \right) (\mu_n + i v_n) = \pm \beta \left(i \log \frac{a}{b} \right) (\mu_n + i v_n) \quad (3.77)$$

şeklinde yazıldı. İlk olarak (3.76) denklemi $\sin \hat{\lambda}_n = -\beta \hat{\lambda}_n$ şeklinde düşünüldü daha sonra $\sin \hat{\lambda}_n = \pm \beta \hat{\lambda}_n$ olarak alınacaktır. Yani,

$$\beta = \frac{1}{2 \log \frac{b}{a}} \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \quad (3.78)$$

şeklindedir. (3.77) denklemi düzenlenerek,

$$\sin(v_n \log \frac{b}{a}) \cosh(\mu_n \log \frac{b}{a}) - i \cos(v_n \log \frac{b}{a}) \sinh(\mu_n \log \frac{b}{a}) = \beta v_n \log \frac{b}{a} - i \beta \mu_n \log \frac{b}{a} \quad (3.79)$$

elde edildi.

$$c_n = v_n \log \frac{b}{a}, d_n = \mu_n \log \frac{b}{a} \quad (3.80)$$

şeklinde bir dönüşüm yapılarak son denklemi,

$$[\sin(c_n) \cosh(d_n) - \beta c_n] - i [\cos(c_n) \sinh(d_n) - \beta d_n] = 0 \quad (3.81)$$

olarak yazıldı. Böylece,

$$f(c_n, d_n) = \sin(c_n) \cosh(d_n) - \beta c_n = 0 \quad (3.82)$$

$$g(c_n, d_n) = \cos(c_n) \sinh(d_n) - \beta d_n = 0 \quad (3.83)$$

olmak üzere,

$$DT = \begin{bmatrix} f_{c_n} & f_{d_n} \\ g_{c_n} & g_{d_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(c_n) \cosh(d_n) - \beta & \sin(c_n) \sinh(d_n) \\ -\sin(c_n) \sinh(d_n) & \cos(c_n) \cosh(d_n) - \beta \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

şeklinde yazıldı. Sadelik için,

$$p = \cos(c_n) \cosh(d_n) - \beta \quad (3.85)$$

$$q = \sin(c_n) \sinh(d_n) \quad (3.86)$$

dönüşümleri yardımıyla,

$$j = \text{Det}[DT] = p^2 + q^2 \quad (3.87)$$

olarak ifade edildi. Son olarak,

$$c_{nn} = c_n - \left[\frac{gd_n f - fd_n g}{j} \right] = c_n - \left[\frac{pf - qg}{j} \right] \quad (3.88)$$

$$d_{nn} = d_n - \left[\frac{-g_{c_n} f + f_{c_n} g}{j} \right] = d_n - \left[\frac{qf + pg}{j} \right] \quad (3.89)$$

şeklinde yazılarak,

$$u_n = \frac{d_{nn}}{\log \frac{b}{a}}, v_n = \frac{c_{nn}}{\log \frac{b}{a}} \quad (3.90)$$

olarak ifade edildi. Genel olarak,

$$a \sin \zeta = \zeta \quad (3.91)$$

şeklinde bir denklem için iterasyon başlangıcı olarak,

$$\zeta \approx (4n+1) \frac{\pi}{2} + i \left[-\log a + \log(4n+1) \pi \right], \alpha > 0 \quad (3.92)$$

olarak alınır. (3.75) denklemi için iterasyon başlangıç değeri,

$$\hat{\lambda} \approx (4n+1) \frac{\pi}{2} + i \left[\log(\beta) + \log(4n+1) \pi \right] \quad (3.93)$$

olmak üzere $\beta < 0$ olup $\log(-1) = i\pi$ olduğu da hesaba katılarak,

$$\hat{\lambda} \approx (4n-1) \frac{\pi}{2} + i \left[\log(-\beta) + \log(4n+1) \pi \right], -\beta > 0 \quad (3.94)$$

şeklinde alındı. Bu işlemler $\sin \hat{\lambda}_n = \beta \hat{\lambda}_n$ için de $\beta = \frac{1}{2 \log \frac{b}{a}} \left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right)$ olmak üzere,

iterasyon başlangıcını,

$$\hat{\lambda} \approx (4n+1) \frac{\pi}{2} + i \left[\log(\beta) + \log(4n+1) \pi \right] \quad (3.95)$$

$\beta > 0$ alarak yaptık. λ_n için tablo yapılırken önce $-\beta$ sonrada β için yukarıdaki hesaplama yapılır ve sırayla alt alta yazılır. Sınır koşullarını (3.58) denkleminde uygulayarak,

$$-1 = \sum_{-\infty}^{\infty} [E_n \lambda_n \cos(\lambda_n \alpha) - F_n \lambda_n \sin(\lambda_n \alpha)] \frac{\phi_1^{(n)}(r)}{r} \quad (3.96)$$

$$0 = \sum_{-\infty}^{\infty} [E_n \sin(\lambda_n \alpha) + F_n \cos(\lambda_n \alpha)] \phi_1^{(n)}(r) \quad (3.97)$$

$$0 = \sum_{-\infty}^{\infty} [E_n \lambda_n \cos(\lambda_n \alpha) + F_n \lambda_n \sin(\lambda_n \alpha)] \frac{\phi_1^{(n)}(r)}{r} \quad (3.98)$$

$$0 = \sum_{-\infty}^{\infty} [F_n \cos \lambda_n \alpha - E_n \sin \lambda_n \alpha] \frac{\phi_1^{(n)}(r)}{r} \quad (3.99)$$

denklemler sistemi elde edildi. Khuri'nin biortagonallik şartından faydalanarak öz fonksiyonlar için,

$$\phi_1^{(n)}(r) = y_n(r) \quad (3.100)$$

$$\phi_2^{(n)}(r) = r y_n''(r) - \frac{\mu_n}{2r} y_n(r) \quad (3.101)$$

$$\mu_n = 1 + 2\lambda_n^2 \quad (3.102)$$

elde edildi. Böylece bilinen bir öz fonksiyon olan $\phi_1^{(n)}(r)$, diğer öz fonksiyon $\phi_2^{(n)}(r)$ 'yi elde etmekte kullanıldı. (3.100) ve (3.101) denklemlerinden,

$$\varphi_2^{(n)}(r) = \left(-\lambda_n - \frac{1}{2}\right) a_n r^{\lambda_n-1} + \left(\lambda_n - \frac{1}{2}\right) b_n r^{-\lambda_n-1} + 3\left(-\lambda_n + \frac{1}{2}\right) c_n r^{1-\lambda_n} + 3\left(\lambda_n + \frac{1}{2}\right) d_n r^{\lambda_n+1} \quad (3.103)$$

olarak bulundu. Şimdi yukarıdaki denklem sistemine geri dönelim. Bu denklem sistemine,

$$\int_{r_1}^{r_2} [\varphi_2^{(m)}(r), \varphi_1^{(m)}(r)] B(r) \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} dr \quad (3.104)$$

biortagonallik operatörünü uygulayabilmek için bazı düzenlemeler yapıldı. Burada,

$$B(r) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2r^2} & 0 \\ \frac{3}{2r^3} & \frac{1}{2r^2} \end{pmatrix} \quad (3.105)$$

şeklindedir. (3.97) ve (3.98)'den,

$$\begin{aligned} & \sum_{-\infty}^{\infty} [E_n \sin \lambda_n \alpha + F_n \cos \lambda_n \alpha] \begin{pmatrix} \varphi_1^{(n)}(r) \\ \varphi_2^{(n)}(r) \end{pmatrix} - \sum_{-\infty}^{\infty} [E_n \sin \lambda_n \alpha + F_n \cos \lambda_n \alpha] \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_2^{(n)}(r) \end{pmatrix} \\ & + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\mu_n} \lambda_n [E_n \cos \lambda_n \alpha - F_n \sin \lambda_n \alpha] \begin{pmatrix} 0 \\ r\varphi_1^{(n)''}(r) - \varphi_2^{(n)}(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.106)$$

elde edildi. Benzer şekilde (3.98) ve (3.99)'dan,

$$\begin{aligned} & \sum_{-\infty}^{\infty} [-E_n \sin \lambda_n \alpha + F_n \cos \lambda_n \alpha] \begin{pmatrix} \varphi_1^{(n)}(r) \\ \varphi_2^{(n)}(r) \end{pmatrix} - \sum_{-\infty}^{\infty} [-E_n \sin \lambda_n \alpha + F_n \cos \lambda_n \alpha] \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_2^{(n)}(r) \end{pmatrix} \\ & - \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\mu_n} \lambda_n [E_n \cos \lambda_n \alpha + F_n \sin \lambda_n \alpha] \begin{pmatrix} 0 \\ r\varphi_1^{(n)''}(r) - \varphi_2^{(n)}(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.107)$$

elde edildi. Şimdi (3.106) ve (3.107) denklemlerine (3.104) biortagonallik operatörü uygulanarak,

$$g_m = \int_1^a [\varphi_2^{(m)}(r), \varphi_1^{(m)}(r)] B(r) \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} dr \quad (3.108)$$

$$V_{mn} = \int_{r_1}^{r_2} [\phi_2^{(m)}(r), \phi_1^{(m)}(r)] B(r) \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_2^{(n)}(r) \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

$$W_{mn} = \int_{r_1}^{r_2} [\phi_2^{(m)}(r), \phi_1^{(m)}(r)] B(r) \begin{bmatrix} 0 \\ r\phi_1^{(n)''}(r) - \phi_2^{(n)}(r) \end{bmatrix} dr \quad (3.110)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \sum_{-\infty}^{\infty} [E_n \sin(\lambda_n \alpha) + F_n \cos(\lambda_n \alpha)] \int_{r_1}^{r_2} [\phi_2^{(m)}(r), \phi_1^{(m)}(r)] B(r) \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)}(r) \\ \phi_2^{(n)}(r) \end{bmatrix} dr \\ & - \sum_{-\infty}^{\infty} [E_n \sin(\lambda_n \alpha) + F_n \cos(\lambda_n \alpha)] \int_{r_1}^{r_2} [\phi_2^{(m)}(r), \phi_1^{(m)}(r)] B(r) \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_2^{(n)}(r) \end{bmatrix} dr \end{aligned} \quad (3.111)$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\mu_n} \lambda_n [E_n \cos(\lambda_n \alpha) - F_n \sin(\lambda_n \alpha)] \int_{r_1}^{r_2} [\phi_2^{(m)}(r), \phi_1^{(m)}(r)] B(r) \begin{bmatrix} 0 \\ r\phi_1^{(n)''}(r) - \phi_2^{(n)}(r) \end{bmatrix} dr \\ & = \int_{r_1}^{r_2} [\phi_2^{(m)}(r), \phi_1^{(m)}(r)] B(r) \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} dr \end{aligned} \quad (3.112)$$

ve,

$$\begin{aligned} & \sum_{-\infty}^{\infty} [-E_n \sin(\lambda_n \alpha) + F_n \cos(\lambda_n \alpha)] \int_{r_1}^{r_2} [\phi_2^{(m)}(r), \phi_1^{(m)}(r)] B(r) \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)}(r) \\ \phi_2^{(n)}(r) \end{bmatrix} dr \\ & - \sum_{-\infty}^{\infty} [-E_n \sin(\lambda_n \alpha) + F_n \cos(\lambda_n \alpha)] \int_{r_1}^{r_2} [\phi_2^{(m)}(r), \phi_1^{(m)}(r)] B(r) \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_2^{(n)}(r) \end{bmatrix} dr \end{aligned} \quad (3.113)$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\mu_n} \lambda_n [E_n \cos(\lambda_n \alpha) + F_n \sin(\lambda_n \alpha)] \int_{r_1}^{r_2} [\phi_2^{(m)}(r), \phi_1^{(m)}(r)] B(r) \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)}(r) \\ r\phi_1^{(n)''}(r) - \phi_2^{(n)}(r) \end{bmatrix} dr \\ & = \int_{r_1}^{r_2} [\phi_2^{(m)}(r), \phi_1^{(m)}(r)] B(r) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} dr \end{aligned} \quad (3.114)$$

elde edildi. Bu iki denklem düzenlenerek, F_n ve E_n katsayıları iki bilinmeyen olmak üzere aşağıdaki iki bilinmeyenli iki denklem elde edildi,

$$g_m = (P_m^* \sin(\lambda_m \alpha)) E_m + (P_m^* \cos(\lambda_m \alpha)) F_m \quad (3.115)$$

$$+ \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2}{\mu_n} \lambda_n W_{mn} \cos(\lambda_n a) - V_{mn} \sin \lambda_n a \right) E_n$$

$$- \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2}{\mu_n} \lambda_n W_{mn} \sin(\lambda_n \alpha) + V_{mn} \cos(\lambda_n \alpha) \right) F_n$$

$$0 = (-P_m^* \sin(\lambda_m \alpha)) E_m + (P_m^* \cos(\lambda_m \alpha)) F_m \quad (3.116)$$

$$+ \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2}{\mu_n} \lambda_n W_{mn} \cos(\lambda_n \alpha) + V_{mn} \sin(\lambda_n \alpha) \right) E_n$$

$$+ \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2}{\mu_n} \lambda_n W_{mn} \sin(\lambda_n \alpha) - V_{mn} \cos(\lambda_n \alpha) \right) F_n$$

(3.115) ve (3.116) denklemleri $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ için E_n ve F_n katsayılarına göre sonlu bir set oluşturdular. Bu katsayılar (3.115) ve (3.116) denklemlerinin ilk N terimi alınarak bulundu. Böylece $n = 1, 2, \dots, N$ için (3.115) ve (3.116) denklemleri E_n ve F_n katsayılarının reel ve sanal kısımlarına göre $4N$ bilinmeyenli $4N$ denklem oluşturdular. Sonuç olarak kavitenin içerisindeki her noktada akış fonksiyonunun değeri, (3.58) serisinin ilk N teriminin toplanmasıyla elde edildi. Serinin terim sayısı olan N 'e karar vermek önemli bir ayrıntıdır. N sayısı serinin yeterince yakınsamasına olanak sağlayacak kadar büyük olmalıdır. Akış fonksiyonu ile ilgili olarak sadece kavitenin sınırları üzerindeki değerleri önceden bilinmektedir. Bu ise yakınsamanın bu sınır şartları üzerinde test edileceği anlamına gelir.

4. DİKDÖRTGENSEL BÖLGELERDEKİ STOKES AKIŞ İÇİN BİORTAGONALLİK ŞARTI

Dikdörtgenel bölgeler için biortagonallik şartı Khuri (1999) tarafından elde edildi.

4.1 Dikdörtgen Bölgelerde Biortagonallik Koşulu

Bu bölümde, aşağıdaki denklemde verilen iki boyutlu dikdörtgenel bölgede v Stokes akış denklemi için biortagonallik koşulunu ortaya koyarız.

$$v = \{x, y : x_1 \leq x \leq x_2, -y_1 \leq y \leq y_1\}$$

Bu sürekli, Stokes akış denklemi ψ gibi bir akış fonksiyonundan elde edilir. ψ 'nin türevleri sırasıyla x ve y doğrultularında hız bileşenlerini verir.

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

v 'deki Stokes akış denklemi aşağıda verildi.

$$\nabla^4 \psi(x, y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 \psi(x, y) = 0 \quad (4.1)$$

$y = \pm y_1$, üzerindeki hızın kaybolmasını gerektirmektedir, yukarıdaki denklem aşağıdaki denklemi ortaya çıkarır.

$$\psi(x, \pm y_1) = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, \pm y_1) = 0 \quad (4.2)$$

(4.1) ve (4.2)'nin birbirinden ayrılabilir çözümü aşağıdaki gibidir.

$$\psi(x, y) \approx e^{px} T(y) \quad (4.3)$$

$T(y)$ aşağıdaki denklemi sağladığında,

$$T^{iv} + 2p^2 T'' + p^4 T = 0 \quad (4.4)$$

ve sınır koşulları,

$$T(\pm y_1) = T'(\pm y_1) = 0 \quad (4.5)$$

Açıkça (4.4) denklemi şu şekilde yeniden yazılabilir,

$$(T'')'' + 2p^2(T')' + p^4T = 0 \quad (4.6)$$

$\alpha_n \neq \alpha_m$ olduğunda bölüm üçteki Teorem (3.2) Khuri (1996), hipotezi aşağıdaki denklemle sağlanır.

$$P_0(y) = 1; P_1(y; \alpha) = 2\alpha; P_2(y; \alpha) = \alpha^2 \quad (4.7)$$

$\alpha = p^2$ olduğu durumda,

$$P_1^2(y; \alpha) - 4P_0(y)P_2(y; \alpha) = 0 \quad (4.8)$$

böylece,

$$p_{31}(y) = p_{32}(y) = 0 \quad (4.9)$$

açıkça,

$$p_{11}(y) = 2, p_{12}(y) = 0 \quad (4.10)$$

böylece Teorem (3.2) Khuri (1996), ile biortagonallik koşulu aşağıdaki denklemle verilir,

$$\int_{-y_1}^{y_1} [\psi_1^{(m)}(y), \psi_2^{(m)}(y)] B(y) \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)}(y) \\ \phi_2^{(n)}(y) \end{bmatrix} dy = P_n^* \delta_{mn} (P_n^2 \neq P_m^2) \quad (4.11)$$

aşağıda verilen denklemin kullanılması şartıyla,

$$B(y) = -I_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

$I_{2 \times 2}$ 'nin birim matris olduğu durumda öz fonksiyonları aşağıdaki durumları sağlar,

$$\varphi_1^{(n)}(y) = T_{(n)}(y) \quad (4.13)$$

$$\varphi_2^{(n)}(y) = T_n''(y) + \alpha_n T_n(y) \quad (4.14)$$

ve eşlenik öz fonksiyonlar aşağıdaki denklemi sağlar,

$$\psi_1^{(m)}(y) = T_m''(y) + \alpha_m T_m(y) \quad (4.15)$$

$$\psi_2^{(m)}(y) = T_m(y) \quad (4.16)$$

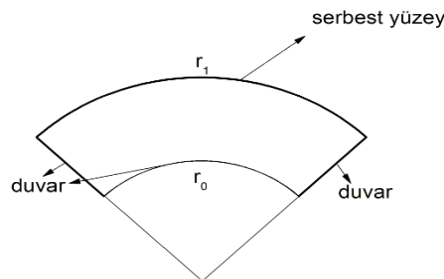
$\alpha_n = p_n^2$ olduğu durumda,

bu Stokes akış problemi için biortagonallik şartları Joseph (1977) tarafından farklı ve adjoint öz fonksiyonlar kullanılarak elde edildi. Bununla beraber burada öz fonksiyonlar self-adjoint şeklinde türetildi. Ayrıca, öz fonksiyonlar (4.13), (4.14), (4.15) ve (4.16) da açık olarak verilmiş olup Joseph (1977)'in çalışmasında üstü kapalı olarak elde edildi.

4.2. Kenarları Sıkıştırılmış Bölgelerde Biortagonallik Şartı

Kenarları sıkıştırılmış bölgelerde biortagonallik şartı Khuri (2003) tarafından elde edildi.

4.2.1 Serbest yüzeyli eğrisel kavitelerde stokes akış için biortagonallik koşulu



Şekil 4.1. Serbest yüzeyli eğrisel kavite.

Bu bölümde Stokes'un, Liu ve Joseph (1977) tarafından incelenen sıkıştırılmış bölgenin tepesinin tam ortasında olan ışınsal çizgiler ve eş merkezli dairelerce sınırlandırılan serbest yüzeyli eğrisel kavitelerdeki akış problemi için biortagonallik koşulunu ortaya koyacağız. Liu ve Joseph (1977), serbest yüzeyli eğrisel bir kavitedeki serbest yüzeyin hareketi ile oluşan akış problemini inceledi. Bu bölge aşağıdaki gibi verilir,

$$\nu(r, \theta) = \{r, \theta : r_1 \leq r \leq r_2, -\theta_1 \leq \theta \leq \theta_1\}$$

yönetici denklem,

$$\nabla^4 \psi(r, \theta) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 \psi(r, \theta) = 0 \quad (4.17)$$

şeklindedir. Sınır koşulları ise,

$$\psi(r, \pm\theta_1) = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(r, \pm\theta_1) = 0 \quad (4.18)$$

dir. Liu ve Joseph (1977) tarafından da gösterildiği üzere diğer kenarlara ait datalar $r = r_1, r_2$ de hesaplanır. Burada, bölgenin ışınsal çizgileri sabit iken, $r = r_1$ boyunca serbest bir yüzeye sahiptir.

(4.17) ve (4.18)'in birbirinden ayrılabilir çözümleri aşağıdaki gibi,

$$\psi(r, \theta) \approx \{r^\lambda, r^{2-\lambda}\} y(\theta) \quad (4.19)$$

elde edilir. $y(\theta)$ aşağıdaki denklemi sağladığı zaman,

$$y^{(iv)} + [\lambda^2 + (\lambda - 2)^2] y'' + \lambda^2 (\lambda - 2)^2 y = 0 \quad (4.20)$$

ve sınır koşulları,

$$y(\pm\theta_1) = y'(\pm\theta_1) = 0 \quad (4.21)$$

Teorem (3.2)'ye göre Khuri (1996), $\alpha_n \neq \alpha_m$ ve $\alpha = (\lambda - 1)^2$ olduğu durumda aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$P_0(\theta) = 1; P_1(\theta; \alpha) = 2(\alpha + 1); P_2(\theta; \alpha) = (\alpha - 1)^2 \quad (4.22)$$

çünkü,

$$P_1^2(\theta; \alpha) - 4P_0(\theta)P_2(\theta; \alpha) = 16\alpha \quad (4.23)$$

bu yüzden,

$$p_{31}(\theta) = 16; p_{32}(\theta) = 0 \quad (4.24)$$

açıkça,

$$p_{11}(\theta) = p_{12}(\theta) = 2 \quad (4.25)$$

böylece Teorem (3.2) Khuri (1996),

$$B(\theta) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

olduğu durumda aşağıdaki biortagonallik koşulunu verir,

$$\int_{-\theta_1}^{\theta_1} [\psi_1^{(m)}(\theta), \psi_2^{(m)}(\theta)] B(\theta) \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)}(\theta) \\ \phi_2^{(n)}(\theta) \end{bmatrix} d\theta = P_n^* \delta_{mn} \quad (\lambda_{(n)} - 1)^2 \neq (\lambda_{(m)} - 1)^2 \quad (4.27)$$

öz fonksiyonları bize aşağıdaki denklemleri sağlar,

$$\phi_1^{(n)}(\theta) = y_n(\theta) \quad (4.28)$$

$$\phi_2^{(n)}(\theta) = y_n''(\theta) + (\alpha_n + 1)y_n(\theta) \quad (4.29)$$

ve eşlenik öz fonksiyon aşağıdaki denklemleri sağlar,

$$\psi_1^{(m)}(\theta) = y_m''(\theta) + (\alpha_m + 1)y_m(\theta) \quad (4.30)$$

$$\psi_2^{(m)}(\theta) = y_m(\theta) \quad (4.31)$$

benzer bir biortagonallik koşulu farklı bir yaklaşım kullanılarak Liu ve Joseph (1977)'de de elde edilir.

4.3 Annular Bölgeler İçin Biortagonallik Şartı

Annular bölgeler için biortagonallik şartı Khuri (2000) tarafından elde edildi.

4.3.1 Annular bölgelerde stokes denklemi

Yoo ve Joseph (1978) tarafından üzerinde çalışılan annular bölgelerdeki Stokes denklemlerinde yatay düzlemlerle sınırlanan ortak merkezli dikey silindirlerdeki biortagonallik şartını türeteceğiz. Bölge sınır koşulları aşağıdaki gibidir,

$$v = \{r, z : 0 < r_1 \leq r \leq r_2, -z_1 \leq z \leq z_1\} \quad (4.32)$$

eksenel simetrik silindirik koordinatlarda Stokes akış denklem

$$\nabla^4 \psi(r, z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 \psi(r, z) = 0 \quad (4.33)$$

olup burada eş merkezli silindirlerdeki sabit sınırlara ait olan hız vektörüne ihtiyaç olup $r = r_1, r_2$ için bunlar,

$$\psi(r_1, z) = \psi(r_2, z) = \frac{\partial \psi}{\partial r}(r_1, z) = \frac{\partial \psi}{\partial r}(r_2, z) = 0 \quad (4.34)$$

olup, diğer kenar verileri $z = \pm z_1$ üzerinden açıklanır (4.33) ve (4.34)'de verilen ayrılabilir çözümler,

$$\psi(r, z) \approx e^{\pm pz} T(r) \quad (4.35)$$

$T(r)$ denklemin devamında aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$T^{iv} - \frac{2}{r}T^{iii} + \left(2p^2 + \frac{3}{r^2}\right)T'' - \left(\frac{2p^2}{r} + \frac{3}{r^3}\right)T' + p^4T = 0 \quad (4.36)$$

ve sınır değerleri aşağıda verilmiştir.

$$T(r_1) = T(r_2) = T'(r_1) = T'(r_2) = 0 \quad (4.37)$$

görüldüğü gibi (4.36) denklemi aşağıdaki gibi tekrar yazılır,

$$\left(\frac{1}{r}T''\right)'' + \left(\left[\frac{2p^2}{r} + \frac{1}{r^3}\right]T'\right)' + \frac{p^4}{r}T = 0 \quad (4.38)$$

Teorem (3.2) Khuri (1996), ile karşılaştırsak $\alpha_n \neq \alpha_m$ olmasına ihtiyacımız vardır ve

$$p_{0(r)} = \frac{1}{r}, \quad p_1(r, \alpha) = \frac{2\alpha}{r} + \frac{1}{r^3}, \quad p_2(r, \alpha) = \frac{\alpha^2}{r} \quad (4.39)$$

burada,

$$\alpha = p^2 \quad (4.40)$$

için,

$$p_1^2(r, \alpha) - 4p_0(r)p_2(r, \alpha) = \frac{4\alpha}{r^4} + \frac{1}{r^6} \quad (4.41)$$

bu nedenle,

$$p_{31}(r) = \frac{4}{r^4}, \quad p_{32}(r) = \frac{1}{r^6} \quad (4.42)$$

açıkça,

$$p_{11}(r) = \frac{2}{r}; \quad p_{12}(r) = \frac{1}{r^3} \quad (4.43)$$

burada tekrar Teorem (3.2) Khuri (1996)'da verilen biortagonallik şartını kullanırız,

$$\int_{r_1}^{r_2} [\varphi_1^{(m)}(r), \varphi_2^{(m)}(r)] B(r) \begin{bmatrix} \varphi_1^{(n)}(r) \\ \varphi_2^{(n)}(r) \end{bmatrix} dr = p_n^* \delta_{mn}, \quad (p_n^2 \neq p_m^2) \quad (4.44)$$

burada,

$$B(r) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{3}{r^3} & -1 \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

burada vurgulanan öz fonksiyon,

$$\varphi_1^n(r) = T_n(r) \quad (4.46)$$

$$\varphi_2^{(n)}(r) = \frac{1}{r} T_n''(r) + \left(\frac{1}{r} \alpha_n + \frac{1}{2r^3} \right) T_n(r) \quad (4.47)$$

ve vurgulanan eşlenik öz fonksiyon,

$$\psi_1^{(m)}(r) = \frac{1}{r} T_m''(r) + \left(\frac{1}{r} \alpha_m + \frac{2}{r^3} \right) T_m(r) \quad (4.48)$$

$$\psi_2^{(m)}(r) = T_m(r) \quad (4.49)$$

burada,

$$\alpha_n = p_n^2 \quad (4.50)$$

Benzer bir biortagonallik şartı da Yoo ve Joseph (1978) tarafından ortaya konulmuştur. Burada $\phi^{(n)}$ ve $\psi^{(n)}$ iki boyutlu öz değer probleminde açıklanmaktadır. Öz fonksiyon ve eşlenik öz fonksiyonlar türetilerek açık bir şekilde ortaya konulmaktadır.

4.4 Küresel Koordinatlarda Simetrik Stokes Akış İçin Biortagonallik Şartları

Küresel koordinatlarda Eksenel Simetrik bölgelerde Stokes akış için biortagonallik şartı Khuri (2000) tarafından elde edildi.

4.4.1 Eksenel simetrik küresel düzlemlerde stokes akış denklemi

Eş merkezli iki küre arasındaki bir bölgede eksenel simetrik akış için biortagonallik koşulu elde edilir. Akış bölgesi sınır koşulları aşağıdaki gibidir.

$$V = \{r, \theta : 0 < r_1 \leq r \leq r_2, -\theta_1 \leq \theta \leq \theta_1\} \quad (4.51)$$

V deki küresel koordinatları (r, θ, ϕ) olan Stokes akış denklemi aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$$\nabla^4 \psi(r, \theta) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 \psi(r, \theta) = 0 \quad (4.52)$$

(r, θ) doğrultusundaki hız bileşenleri akış fonksiyonu bakımından aşağıdaki şekilde verilir,

$$v_r = -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (4.53)$$

(4.53) denklemi $r = r_1, r_2$ olması durumunda hızın yok olmasını gerektirerek aşağıdaki denklemi verir,

$$\psi(r_1, \theta) = \psi(r_2, \theta) = \frac{\partial \psi}{\partial r}(r_1, \theta) = \frac{\partial \psi}{\partial r}(r_2, \theta) = 0 \quad (4.54)$$

(4.52) ve (4.54)'ün ayrılabilir çözümleri aşağıdaki gibidir.

$$\psi(r, \theta) \approx T(\cos \theta) y(r) \quad (4.55)$$

$y(r)$ aşağıdaki denklemi sağladığında (4.55) denklemi elde edilir.

$$y^{(iv)} + \frac{2}{r^2} p(1-p)y'' - \frac{4}{r^3} p(1-p)y' + p(1-p)(2+p)(3-p)\frac{1}{r^4}y = 0 \quad (4.56)$$

ve sınır koşulları,

$$y(r_1) = y(r_2) = y'(r_1) = y'(r_2) = 0 \quad (4.57)$$

r doğrultusun da bir öz fonksiyon çözümü ararken $\eta = \cos \theta$ olduğu durumda $T(\eta)$ fonksiyonunun aşağıdaki denklemi sağlaması gerekir.

$$(1-\eta^2)T''(\eta) - p(1-p)T(\eta) = 0 \quad (4.58)$$

(4.58) denklemi p 'nin kompleks olabileceği durumda Gegenbauer in $-1/2$. dereceden denklemidir. (4.58) in iki bağımsız çözümü sırasıyla birinci ve ikinci türden Gegenbauer fonksiyonları olarak tanımlanan $C_p^{-1/2}(\eta)$ ve $D_p^{-1/2}(\eta)$ 'dir. Açıkça (4.56) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$(y'')'' + 2p(1-p)\left(\frac{1}{r^2}y'\right)' + p(1-p)(2+p)(3-p)\frac{1}{r^4}y = 0 \quad (4.59)$$

$$\alpha = p(1-p) \quad (4.60)$$

olduğu durumda $\alpha_n \neq \alpha_m$ iken Teorem (3.1) in hipotezi aşağıdaki denklemlerdeki gibi sağlanır.

$$P_0(r) = 1 ; P_1(r; \alpha) = \frac{2}{r^2}\alpha ; P_2(r; \alpha) = \frac{1}{r^4}\alpha(\alpha + 6) \quad (4.61)$$

$$P_1^2(r; \alpha) - 4P_0(r)P_2(r; \alpha) = -\frac{24}{r^4}\alpha \quad (4.62)$$

olduğu için bu nedenle,

$$p_{31}(r) = -\frac{24}{r^4} ; p_{32}(r) = 0 \quad (4.63)$$

dır. Açıkça,

$$p_{11}(r) = \frac{2}{r^2} ; p_{12}(r) = 0 \quad (4.64)$$

böylece (3.2) Teoreminde Khuri (1996),

$$B(r) = -\frac{1}{r^2} I_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r^2} \end{pmatrix} \quad (4.65)$$

denklemini kullanılması durumunda ve $I_{2 \times 2}$ birim matrisi olması durumunda biortogonalite koşulu aşağıdaki şekilde verilir,

$$\int_{r_1}^{r_2} -\frac{1}{r^2} [\psi_1^{(m)}(r), \psi_2^{(m)}(r)] B(r) \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)}(r) \\ \phi_2^{(n)}(r) \end{bmatrix} dr = P_n^* \delta_{mn}, \quad p_n(1-p_n) \neq p_m(1-p_m) \quad (4.66)$$

$$\alpha_n = p_n(1-p_n) \quad (4.67)$$

durumunda öz fonksiyonlar,

$$\phi_1^{(n)}(r) = y_n(r), \quad \phi_2^{(n)}(r) = y_n''(r) + \frac{\alpha_n}{r^2} y_n(r) \quad (4.68)$$

(4.68)'i sağlar. Eşlenik öz fonksiyonlarda,

$$\psi_1^{(m)}(r) = y_m''(r) + \frac{\alpha_m}{r^2} y_m(r), \quad \psi_2^{(m)}(r) = y_m(r) \quad (4.69)$$

(4.69)'u sağlar.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Özellikle kavite akışlarının analitik çözümlerinde, problemin sınır koşullarının çeşitliliği, çözümün elde edilmesinde zorluklara sebebiyet vermektedir. Yönetici denklem olarak alınan biharmonik denklem dördüncü mertebeden bir denklem ve kavitelerin genelde en az dört sınırının olması bu zorluğa katkıda bulunurlar.

Bu tez çalışmasında verilen bilgiler, bu tür kavite akış problemlerinde karşılaşılan ve analitik çözümün elde edilebilmesi için denklemlerin birleştirilerek iki bilinmeyenli bir denklem sistemine dönüştürülmesine olanak sağlayan biortagonallik özelliklerini vermektedir.

Verilen biortagonallik şartları akış bölgesinin kartezyen, kutupsal ya da silindirik koordinatlarla ifade edilmesi durumlarında da başarı ile çalışmaktadır. Geleneksel olarak yaklaşık 40 yıldır kullanılan klasik yöntemlerden daha kolay ve daha hızlı sonuçlar elde edilmesine olanak sağlayan bu biortagonallik şartları, kavite akış problemlerinin yanı sıra ısı ve kütle transferleri problemlerine de kolaylıkla adapte edilebilir.

Sonraki çalışma olarak, daha önce uzun ve daha zor yöntemlerle elde edilen Stokes akış problemlerinin çözümleri, bu tez çalışmasında verilen biortagonallik özellikleri yardımıyla çözülerek daha az hata ve daha az iş yüküyle elde edilebileceği gösterilebilir. Ayrıca bu çözüm yöntemi, ısı ve kütle transferi problemlerinin de daha yakınsak bir çözümüne götüreceği öngörülmekte olup sonraki bir çalışma olarak önerilebilir.

KAYNAKLAR

1. Burggraf, O. R., 1996. Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows, J. Fluid Mech., 113-151.
2. Gregory, R. D., 1980. The semi-infinite strip $x \geq 0$, $-1 \leq y \leq 1$; completeness of the Papkovitch- Fadle eigenfunctions when $\phi_{xx}(0, y)$, $\phi_{yy}(0, y)$ are prescribed, J. Elasticity, 10, 57-80.
3. Joseph, D. D., 1974. Slow motion and viscometric motion; Stability and bifurcation of the rest state of a simple fluid, Arch. Rational Mech. Anal., 56, 99-156.
4. Joseph, D. D., 1977. The convergence of biorthogonal series for biharmonic and stokes flow edge problems, part I., Siam J. Appl. Math. 33, 337-347.
5. Joseph, D. D. ve Fosdick, R. L., 1973. The free surface on a liquid between cylinders rotating at different speeds part I., Arch. Rational Mech. Anal., 49, 321-380.
6. Joseph, D. D. ve Sturges, L., 1975. The free surface on a liquid filling a trench heated from its side, J. Fluid Mech., 69, 565-589.
7. Joseph, D. D. ve Sturges L., 1978. The convergence of biorthogonal series for biharmonic and stokes flow edge problems, part II., Siam., J. Appl.Math. 34, 7-26.
8. Joseph, D. D., Sturges, L. ve Warner W. H., 1982. Convergence of biorthogonal series of biharmonic eigenfunctions by the method of titchmarsh, Arch. Rational Mech. Anal., 78, 223-274.
9. Khuri, S. A., 1993. Biorthogonal series solution of stokes flow problems, Ph. D. Dissertation, Dept. Math., Michigan State Univ., 1993.
10. Khuri, S. A., 1996. Biorthogonal series solution of stokes flow problems in sectorial regions, Siam Journal on Applied Mathematics, 19-39.
11. Khuri, S. A., 1999. Biorthogonality condition for stokes flow in rectangular regions, International Journal of Computer Mathematics, 70, 3, 411-415.
12. Khuri, S. A., 2000. Biorthogonality condition for axisymmetric stokes flow in spherical geometries, Internat. J. Math. & Math. Sci., 711-715.
13. Khuri, S. A., 2000. Biorthogonality condition for creeping motion in annular trenches, Internat. J. Math. & Math. Sci., 613-616.
14. Khuri, S. A., 2003. Biorthogonality condition for creeping flow in wedge-shaped trenches, Applied Mathematics and Computation, 141-145.

15. Khuri, S. A., 2006. Stokes flow in curved channels, *Journal Of Computational And Applied*, 187, 2, 171-191.
16. Liu, C. H. ve Joseph D. D., 1977. Stokes flow in wedge-shaped trenches, *J. Fluid Mech.*, 80, 443-463.
17. Liu, C. H. ve Joseph D. D., 1978. Stokes flow in conical trenches, *Siam J. Appl. Math.*, 34, 286-296.
18. Pan, F. ve Acrivos, A., 1967. Steady flows in rectangular cavities. *J. Fluid Mech.*, 28, 643-655.
19. Smith, R. C. T., 1952. The bending of a semi-infinite strip, *Austral. J. Sci. Res.*, 5, 227-237.
20. Spence D. A., 1982. A note on the eigenfunction expansion for the elastic strip, *Siam J. Appl. Math.*, 42, 155-173.
21. Yoo, J. Y. ve Joseph, D. D., 1978. Stokes flow in a trench between concentric cylinders, *Siam J. Appl. Math.*, 34, 247-285.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Mahmut KOYUN
Adres : Yunusemre Mah. Bağdat Cad. Mesnevi apt. 7/19
Kayseri
E-posta adresi : mahoni484@hotmail.com

EĞİTİM BİLGİLERİ

Lisans : İstanbul Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği,
2005-2009
Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi Matematik, 2017-2019