

**SUBORDİNASYON METODU İLE TANIMLANMIŞ BAZI
HARMONİK FONKSİYON SINIFLARINA AİT ÖZELLİKLER**

ADNAN CANBULAT

NİSAN 2024

DİYARBAKIR

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SUBORDİNASYON METODU İLE TANIMLANMIŞ BAZI
HARMONİK FONKSİYON SINIFLARINA AİT ÖZELLİKLER**

ADNAN CANBULAT

DİCLE ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM-ÖĞRETİM VE SINAV
YÖNETMELİĞİNİN BİR PARÇASI OLARAK
MATEMATİK ANA BİLİM DALINDA
DOKTORA TEZİ
OLARAK HAZIRLANMIŞTIR

NİSAN 2024

DİYARBAKIR

SUBORDİNASYON METODU İLE TANIMLANMIŞ BAZI HARMONİK FONKSİYON SINIFLARINA AİT ÖZELLİKLER

Adnan CANBULAT tarafından Dicle Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin bir parçası olarak hazırlanan bu çalışma, aşağıda bilgileri yazılı jüri üyeleri tarafından değerlendirilerek **Matematik Ana Bilim Dalı'nda Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Neslihan DALKILIÇ
Müdür, **Fen Bilimleri Enstitüsü**

Doç. Dr. Fethiye Müge SAKAR
Danışman, **Matematik Bölümü,**
Dicle Üniversitesi

Sınav Jürisi:

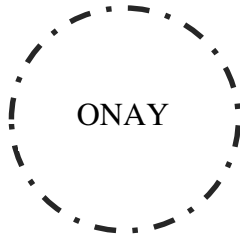
Prof. Dr. Bilal ŞEKER(*)
Matematik Bölümü, Batman Üniversitesi

Doç. Dr. Fethiye Müge SAKAR(**)
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Prof. Dr. Sevtap Sümer
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Prof. Dr. Seher Melike AYDOĞAN
Mimarlık Bölümü, İstanbul Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Hacer Bozkurt
Matematik Bölümü, Batman Üniversitesi



Savunma Tarihi: 19 / 04/ 2024

(*) Jüri Başkanı.
(**)Tez Danışmanı.

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tez çalışmasında yer alan tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu beyan ederim. Ayrıca, bahse konu bu kural ve ilkelerin gerektirdiği üzere, bu çalışmada özgün olmayan tüm bilimsel içerikleri kurallara uygun biçimde alıntılıyıp kaynak gösterdiğimi beyan ederim. Beyanımınla çelişen herhangi bir delil bulunduğu takdirde tüm sorumluluğu üstleneceğimi kabul ederim.

Ad, Soyad: Adnan CANBULAT

İmza:

TEŞEKKÜR

Öncelikle bu zorlu süreçte her adımda yanımda olan, sabırla her konuda sonsuz desteğini gördüğüm, emeklerini asla ödeyemeyeceğim, çok sevgili danışmanım Doç. Dr. Fethiye Müge SAKAR'a sonsuz teşekkür ve şükranlarımı sunuyorum. O olmasaydı kesinlikle sonunu getiremezdim. En umutsuz, yorgun ve bıkkın zamanlarımda telkinleri, desteği, ışığı ile yol gösterdi, umut verdi ve bugüne geldim. Emeline minnettarım.

Yine yüksek lisansa başladığım ilk günden doktora sürecimin sonuna dek engin bilgisi, varlığı ve dostluğu ile yanımda olan, en sıkıntılı zamanlarımda desteğini esirgemeyen, başarabileceğime benden çok inanan çok değerli Hocam Prof. Dr. Bilal ŞEKER'e çok teşekkür ederim.

Tezimin ortaya çıkma sürecinde her aşamada destek olan, yol gösteren Doç. Dr. Hacer BOZKURT Hocama teşekkürlerimi sunuyorum.

Dicle Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'ne destekleri için şükranlarımı sunuyorum. (Proje No: DÜBAP-İİBF.21.001).

Annem, babam, kardeşlerim ve tüm ailem benden çok bana inandılar. Arkadaşlarım ve öğrencilerim bu süreçte benden desteklerini esirgemediler. Hepsine ayrı ayrı sonsuz sevgi ve şükranlarımı sunuyorum.

Eşim ve çocuklarım; belki bu süreçte en çok etkilenen onlardı. Varlıkları ile hayatımı tamamladıkları gibi tezimin tamamlanmasında en büyük güç onlardı. İyi ki varsınız...

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER	vi
ŞEKİLLER LİSTESİ	viii
TABLolar LİSTESİ.....	ix
ABSTRACT.....	xii
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	4
2.1 Analitik Fonksiyonlar	4
2.2 Ünivalent Fonksiyonlar.....	9
2.3 Ünivalent Fonksiyonlara Ait Bazı Alt Sınıflar	16
2.4 m -katlı Ünivalent fonksiyonlar.....	20
3. MALZEME VE YÖNTEM	22
3.1 Harmonik Fonksiyonlar	22
3.2 Harmonik Ünivalent Fonksiyonlar.....	25
3.3 m -Katlı Harmonik Fonksiyonlar.....	32
3.4 Subordinasyon Prensibi.....	34
3.5 Hadamard Çarpımı (Konvolüsyon).....	36
3.6 Salagean Operatörü	37
3.7 q -Benzer	39
3.8 (p, q) -Benzer	45
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	52
4.1 Salagean Operatörü ile tanımlanan $\mathcal{H}_m^{k, \delta}(\mathcal{A}, \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ Sınıfının Özellikleri 52	
4.2 q -operatörü ile Tanımlanan $\mathcal{H}_q^k(\mathcal{A}, \delta, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ Sınıfının Özellikleri.....	62

4.3	$\mathcal{SH}_q(\mathcal{A}, \lambda, \beta)$ Sınıfı İçin q -Poisson Seri Açılımları	70
4.4.	$\mathcal{H}_{p,q}(\mathcal{A}, \eta, \beta)$ ve $\mathcal{H}_{p,q}(\mathcal{A}, \varpi, \nu)$ Sınıfları İçin (p, q) -Poisson Seri Açılımları	76
5.	SONUÇLAR VE ÖNERİLER	83
	KAYNAKLAR	90
	ÖZGEÇMİŞ	92



ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1 Eğri çeşitleri	4
Şekil 2.2 Bölge örnekleri	4
Şekil 2.3 Konform dönüşüm	7
Şekil 2.4 Ünivalent f fonksiyonunun görüntüsü.....	9
Şekil 2.5 Fiziksel alan ile kanonik alanın Riemann dönüşümü	10
Şekil 2.6 Farklı bölgelerin $\mathcal{U}$ birim çemberde Riemann dönüşümü.....	11
Şekil 2.7 Koebe fonksiyonunun görüntüsü	12
Şekil 2.8 Bir noktaya göre yıldızlı bölge	15
Şekil 2.9 Yıldızlı fonksiyon	16
Şekil 2.10 Konveks ve konveks olmayan bölge	17
Şekil 3.1 $n = 2$ için $f(z) = z + \frac{1}{2}\bar{z}^n$ dönüşümünün $\mathcal{U}$ birim diski altındaki görüntüsü	21
Şekil 3.2 $n = 3$ için $f(z) = z + \frac{1}{2}\bar{z}^n$ dönüşümünün $\mathcal{U}$ birim diski altındaki görüntüsü	22
Şekil 3.3 Harmonik Koebe fonksiyonu	24
Şekil 3.4 $\mathcal{L}(z)$ fonksiyonunun $\mathcal{U}$ birim diski altındaki görüntüsü	28
Şekil 3.5 $f(z) \prec g(z)$ subordinasyonu	33
Şekil 3.6 Farklı r değerleri için Poisson dağılımının değerleri	45
Şekil 5.1 $\mathcal{H}_m^{k,\delta}(d, \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ sınıfı ile diğer harmonik alt sınıflar arasındaki bağlantılar.....	80
Şekil 5.2 $\mathcal{H}_q^k(d, \delta, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ sınıfı ile diğer harmonik alt sınıflar arasındaki bağlantılar	83

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 3.1 (p, q) - Binom katsayısının ilk değerleri	43
Tablo 3.2 n değerleri için sel baskının gerçekleşme olasılıkları.....	46
Tablo 3.3 Bazı özel değerler için (p, q) -Poisson dağılımı	48



SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

Simge	Açıklama
$\mathcal{U}$	$\{z: z < 1\}$, Açık birim disk
$f \prec g$	f fonksiyonunun g fonksiyonuna subordinate olması
$f_1 * f_2$	f_1 ile f_2 fonksiyonlarının Hadamard çarpımı
$\mathcal{P}$	Pozitif reel kısma sahip fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}$	$\mathcal{U}$ birim diskinde normalize şartını sağlayan ünivalent fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}^*$	Yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{K}$	Konveks fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{SH}$	Harmonik ünivalent fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{SH}^*$	Harmonik yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{KH}$	Harmonik konveks fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{H}(m)$	m -katlı harmonik fonksiyonlar Sınıfı
$\mathcal{SH}^*(m)$	m -katlı harmonik yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{H}_m^{n,\delta}(d, \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{E})$	m -katlı Salagean operatörü ile tanımlı harmonik fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{H}_q^k(d, \delta, \mathcal{L}, \mathcal{E})$	q -diferansiyel operatörü ile tanımlı harmonik fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{SH}_q(d, \eta, \beta)$	q -Poisson dağılımı ile tanımlanan harmonik fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{SH}_{p,q}(d, \varpi, \nu)$	(p, q) -Poisson dağılımı yardımı ve subordinasyon ile tanımlanan harmonik fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{SH}_{p,q}(d, \eta, \beta)$	(p, q) -Poisson dağılımı yardımı ile tanımlanan harmonik fonksiyonlar sınıfı

ÖZET

SUBORDİNASYON METODU İLE TANIMLANMIŞ BAZI HARMONİK FONKSİYON SINIFLARINA AİT ÖZELLİKLER

CANBULAT, Adnan

Doktora, Matematik Bölümü

Danışman: Doç. Dr.Fethiye Müge SAKAR

Mart 2024, 92 sayfa

Bu tez çalışması beş bölüm içermektedir. İlk bölümde, genel bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, kompleks, analitik ve ünivalent fonksiyonlarla ilgili temel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde, araştırmamızda kullandığımız harmonik fonksiyonların önemli tanım ve teoremleri verilmiştir. Tezin dördüncü bölümünde ise dört ayrı çalışma yer almaktadır. Birinci çalışmada Salagean operatörü ile tanımlı, m -katlı harmonik $\mathcal{H}_m^{k,\delta}(d, \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ sınıfının ve ikinci çalışmada, q -diferansiyel operatörü ile tanımlı harmonik $\mathcal{H}_q^k(d, \delta, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ sınıfının gerekli ve yeterli Hadamard çarpım şartları, distorsiyon teoremleri, ekstrem noktaları gibi bazı özellikleri incelenmiştir. Üçüncü çalışmada q -poisson dağılımı yardımıyla $\mathcal{H}_q(d, \eta, \beta)$ sınıfının q -harmonik olma şartları incelenmiştir. Dördüncü çalışmada (p, q) -Poisson dağılımı yardımıyla tanımlanan $\mathcal{H}_{p,q}(d, \varpi, \nu)$ ve $\mathcal{H}_{p,q}(d, \eta, \beta)$ sınıflarının (p, q) -harmonik olma şartlarını incelenmiştir. Beşinci bölümde ise bu çalışmalarda elde edilen bazı sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: m -katlı harmonik fonksiyonlar, Poisson dağılımı, q -benzer, (p, q) -benzer

ABSTRACT

PROPERTIES OF SOME HARMONIC FUNCTION CLASSES DEFINED BY SUBORDINATION METHOD

CANBULAT, Adnan

PhD Thesis in Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr.Fethiye Müge SAKAR

April 2024, 92 pages

This thesis study contains five sections. In the first section, general knowledge are presented. Basic knowledge about complex, analitic and univalent functions are presented in second section. Important definitions and theorems for harmonic functions utilized in our research presented in third section. In fourth section of the thesis four separate studies are presented. In the first study, some properties of the class $\mathcal{H}_m^{k,\delta}(d, \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ that m -fold and defined by Salagean operator and in the second study some properties of class $\mathcal{H}_q^k(d, \delta, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ that defined by q -differation operator like necessary and sufficient Hadamard product conditions, distortion theorems and extreme points are analyzed. In the third study, q -harmonic conditions of the subclass $\mathcal{H}_q(d, \eta, \beta)$ that defined by q -Poisson distribution is investigated. In the fourth study, (p, q) -harmonic conditions of subclasses $\mathcal{H}_{p,q}(d, \varpi, \nu)$ and $\mathcal{H}_{p,q}(d, \eta, \beta)$ that defined by (p, q) -Poisson distributions are investigated. In the fifth part, some conclusions reached in the thesis are given.

Keywords: m -valent harmonic function, Poisson distribution, q -analog, (p, q) -analog

1. GİRİŞ

Kompleks bir değişkenin fonksiyonlar teorisi olarak bilinen kompleks kalkülüs; fizik, mühendislik, diğer bilim dallarının ve uygulamalarının anlaşılmasında matematiğin önemli role sahip bir dalıdır. 1777 yılında Euler'in " i " notasyonunu tanıtması, daha sonra Hamilton'un kompleks sayıyı bir reel sayı çifti gibi düşünme fikri, kompleks sayıları daha anlaşılır ve kullanılabilir bir hale getirmiştir. Bu düşünce ile Weierstrass, Schwarz ve Poincare gibi birçok matematikçi kompleks sayılarda çalışmış ve yeni alanlar oluşturmuşlardır. Analitik fonksiyonların geometrisini inceleyen "*Geometrik Fonksiyonlar Teorisi*" bu alanlardan biridir.

Geometrik fonksiyonlar teorisinin temeli 1851 senesindeki Riemann'ın meşhur dönüşüm teoremine dayanır. Bu teorem; kompleks düzlemin tamamı boş olmayan basit bağlantılı bir bölgesinin birim diski konformal olarak resmedilebileceğini söyler. Bu teoremin ilk ispatı 1900 senesinde yapılmıştır. C. Carathéodory, 1912 yılında normal aileleri ve Riemann yüzeylerini kullanarak bu teoremi ispatlamıştır. P. Koebe ise bu teoremin Riemann yüzeylerini gerektirmeyen ispatını yapmıştır. 1916'da L. Bieberbach bu eşlemelerin tersinin katsayıları için sınır tahmininde bulunmuştur. Bu tahmin geometrik fonksiyonlar teorisinin birçok uygulama alanına sahip olmuştur. Bu alanlardan biri de ünivalent fonksiyonlar teorisidir.

Birçok matematikçi, Bieberbach kestirimi ile ünivalent fonksiyonlar teorisinde yıldızlılık, konvekslik gibi tanımları yaparak, katsayı sınırlarını bulmaya yönelik çalışmalar gerçekleştirmişlerdir. P. Montel 1933 senesinde "*Leçons sur les Fonctions Univalentes ou Multivalentes*" adlı kitabıyla çok katlı fonksiyonlar teorisini tanıtmıştır. Çok katlı ya da m -katlı olarak bilinen fonksiyonların farklı alt sınıfları, birçok matematikçi tarafından incelenmiş ve bunların katsayı sınırları gibi bazı özellikleri araştırılmıştır. Bu matematikçilerden bazıları Fekete ve Szegő (1933), Goodman (1948), Keogh ve Merkes (1969) dır.

1984 yılında, De Branges'in Bieberbach kestirmini ispatlaması çalışılacak alan kalmadığının aksine yeni çalışma alanları oluşturmuştur. Bunlardan biri de Clunie ve Sheil-Small'ın ünivalent fonksiyonlar için yapılan tanım ve katsayı tahminlerinin

harmonik fonksiyonlara yorumlanmasıdır. 1984 senesinde Clunie ve Sheil-Small'ın yaptığı araştırma ile bazı kısıtlamalar altında ünivalent fonksiyon sınıfları için yapılan tahmin ve tanımların harmonik fonksiyon sınıfları için de yapılabileceği gösterilmiştir. q - kalkülüs sıradan kalkülüsün sınırlara ihtiyaç duymadığımız bir genişlemesidir. q - kalkülüsün tarihi 18. ve 19. yüzyıllarda L. Euler, C. F. Gauss, E. Heine ve C. G. Jacobi gibi araştırmacıların çalışmalarına dayanır. 1908'de Jackson q -kalkülüsü sistematik olarak geliştirmiş ve q -türevi tanımlamıştır. Yine Jackson 1910'da daha önce Thomas tarafından bulunan q -integrali tanımlamıştır.

1990'da İsmail, Merkes ve Styer q - kalkülüs ile analitik ünivalent fonksiyonların bazı ilginç özelliklerini sunmuşlardır. Birim disk $\mathcal{U}$ da tanımlı yıldızlı fonksiyonlar kümesinin, q -benzer özellikleri yine bu araştırmacılar tarafından tanımlanmıştır. Geometrik fonksiyonlar teorisindeki ilk q - kalkülüs çalışmaları Srivastava tarafından yapılmıştır. Bununla beraber birçok matematikçi, kalkülüsdeki daha önce araştırılan konuları q - kalkülüsle araştırmaya başlamıştır. Bu araştırmalar son dönemlerde özellikle bazı özel fonksiyonların q -benzerlerinin genelleştirilmesi, bunlarla ilgili eşitsizliklerin ve monotonlukların belirlenmesi gibi konular üzerinde yoğunlaşmıştır. 2004 yılında Remmel ve Wachs, Stirling sayısını araştırırken, Jackson'un q - türev fikrini genelleştirmeye çalışmış ve (p, q) -türev kavramını ortaya atmışlardır. Daha sonra Mursaleen ve diğerleri tarafından Bernstein operatörleri için, (p, q) -benzer araştırılmıştır. 2018 yılında Sadjang tarafından (p, q) -kalkülüsün temel teoremi tanımlanmıştır. 2020'de (p, q) -türevin de tanıtılması ile kesirli kalkülüs gibi türevlerin özelliklerinin incelenmesi araştırmacıların dikkatini çekmiş ve çok sayıda makale yayınlanmıştır.

Poisson dağılımı istatistik ve olasılık kuramında bir ayrık olasılık dağılımıdır. Poisson dağılımı olaylar arasındaki ortalama sürenin bilindiği, fakat bir olayın ne zaman gerçekleşeceğinin bilinmediği durumlarda kullanılır.

Siméon-Denis Poisson'un 1838'de yazdığı bir hukuk kitabında, Poisson dağılımı, olasılık ile ilgili diğer çalışmalarla birlikte yer almıştır. 1868'de Ladislaus Josephovich Bortkiewicz'in kitabında Poisson dağılımı ile verdiği Prusya'da atlı birliklerinde her sene katır ve at tepmelerinden yaşamını yitiren asker sayısı örneği yıllarca askeriye ve diğer okullarda öğrencilere anlatılmıştır.



2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Tezin bu kısmında kompleks fonksiyonlar, analitik fonksiyonlar ve ünivalent fonksiyonlarla ilgili temel teorem ve tanımlar verilmiştir.

2.1 Analitik Fonksiyonlar

Tanım 2.1.1

$\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesinde, $r > 0$ ve $z_0 \in \mathbb{C}$ verilsin.

$\mathcal{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ kümesi z_0 merkezli r yarıçaplı **açık disk**,

$\bar{\mathcal{D}}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ kümesi z_0 merkezli r yarıçaplı **kapalı disk**

$\partial\mathcal{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ kümesi ise z_0 merkezli r yarıçaplı **çember** olarak adlandırılır.

$\mathcal{D}(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ kümesi 0 merkezli 1 yarıçaplı açık disk. Bu kümeye birim disk denir ve $\mathcal{U}$ ile sembolize edilir.

Tanım 2.1.2

Kompleks düzlemde boştan farklı $\mathcal{A}$ kümesinin belirli bir noktası, belirli bir komşuluğu ile birlikte yine $\mathcal{A}$ kümesinde ise bu noktaya $\mathcal{A}$ 'nın bir **iç noktası** denir. Bu şartı sağlayan noktaların kümesine $\mathcal{A}$ kümesinin **içi** denir. $\mathcal{A}$ kümesi sadece iç noktalarından oluşmuşsa $\mathcal{A}$ kümesi **açık küme** olarak adlandırılır. $\mathcal{A}$ 'nın tümleyeni açıksa $\mathcal{A}$ **kapalı küme** olarak adlandırılır.

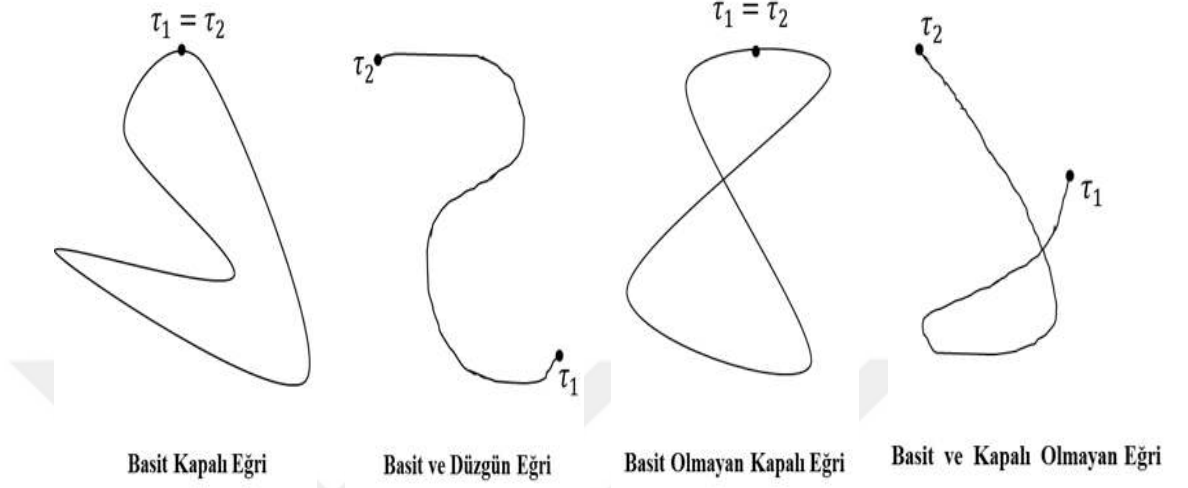
Tanım 2.1.3

Kompleks düzlemde herhangi bir küme; kesişimi boş, açık iki kümenin birleşimi biçiminde ifade edilemiyorsa **bağlantılıdır** denir.

Tanım 2.1.4 (Eğri)

$[m, n]$ kapalı aralığının $\sigma(\tau)$ sürekli fonksiyonundaki görüntüsüne kompleks düzlemde bir **Eğri** denir. $\forall \tau \in [m, n]$ olmak üzere $\sigma'(\tau)$ var ve $\sigma'(\tau) \neq 0$ oluyorsa bu görüntü **Düzgün Eğri** olarak adlandırılır. Uç noktaları aynı, bitişik olan eğri **Kapalı**

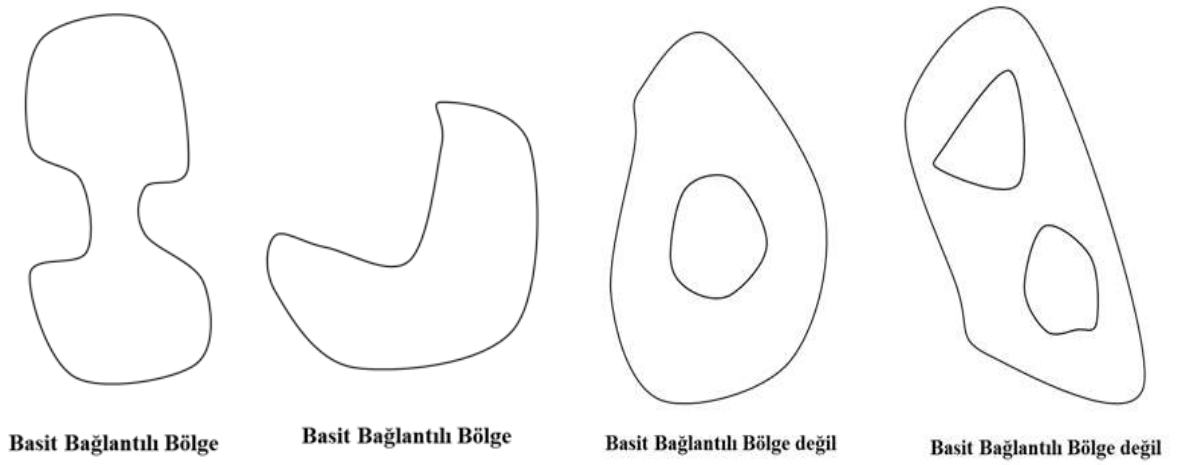
Eğri, kendi kendini kesmeyen yalnızca $\tau_1 = \tau_2$ için $\sigma(\tau_1) = \sigma(\tau_2)$ ifadesini sağlayan eğri de **Basit (Jordan) Eğri** olarak adlandırılır. Bu eğri tarafından sınırlanan bölgeye ise **Jordan Bölgesi** denir.



Şekil 2.1 Eğri Çeşitleri

Tanım 2.1.5

Kompleks düzlemde yer alan herhangi bir $\mathcal{D}$ bölgesindeki, basit kapalı eğri tarafından sınırlanan küme, yalnızca $\mathcal{D}$ 'deki noktaları içeriyorsa, bu bölge **Basit Bağlantılı Bölge** olarak adlandırılır. Kompleks düzlemde en önemli basit bağlantılı bölge örneği $\mathcal{U}$ birim diskidir.



Şekil 2.2 Bölge Örnekleri

Tanım 2.1.6 (Kompleks Fonksiyon)

Kompleks düzlemde $\mathcal{A} \neq \emptyset$ olsun. Her $z \in \mathcal{A}$ elemanını ω kompleks sayısı ile eşleştiren ilişki **kompleks fonksiyon** olarak adlandırılır ve $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$, $\omega = f(z)$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.1.7 (Diferansiyellenebilirlik)

$\mathcal{D}$ bölgesinde kompleks f fonksiyonu ve $z_0 \in \mathcal{A}$ olmak üzere

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

değeri bulunabiliyorsa f bu noktada **diferansiyellenebilirdir** denir ve $\frac{df}{dz}(z_0)$ yada $f'(z_0)$ şeklinde gösterilir. Bu limit değerine f fonksiyonunun z_0 noktasındaki türevi denir.

Tanım 2.1.8

$f(z) = u(a, b) + iv(a, b)$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ bölgesinde türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$J_f(z) = \begin{vmatrix} u_a & v_a \\ u_b & v_b \end{vmatrix} = u_a v_b - u_b v_a$$

ifadesine **Jakobiyen matrisi** denir.

Tanım 2.1.9 (Analitik Fonksiyon)

$\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlanan bir f fonksiyonu bu bölgedeki her noktada diferansiyellenebilirse, bu fonksiyona **analitiktir** denir.

Bir fonksiyon kompleks düzlemin her noktasında analitik ise bu fonksiyon **tam fonksiyon** olarak adlandırılır. e^z , $\cos z$, $\sin z$, $az + b$... fonksiyonları tam fonksiyonlara örnek olarak verilebilir.

Kompleks düzlemde $z_0 = a + ib$ noktasında analitik olan bir $f(z) = u(a, b) + iv(a, b)$ fonksiyonu

$$u_a = v_b \text{ ve } u_b = -v_a$$

Cauchy-Riemann eşitliklerini sağlar.

$f(z)$ fonksiyonunun f_z ve $f_{\bar{z}}$ kısmi türevleri

$$f_z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(f_a - if_b) = \frac{1}{2}(u_a + iv_a - iu_b + v_b)$$

$$f_{\bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(f_a + if_b) = \frac{1}{2}(u_a + iv_a + iu_b - v_b)$$

biçimindedir. Buradan

$$J_f(z) = u_a v_b - u_b v_a = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2$$

elde edilir.

f , $\mathcal{D}$ ’de analiktir $\Leftrightarrow f_{\bar{z}} = 0$ ve $f_z = f'(z)$ dir.

Cauchy-Riemann denklemlerinden

$$J_f(z) = J\left(\frac{u,v}{a,b}\right) = u_a^2 + u_b^2 = |u_a + iu_b|^2 = |f'(z)|^2$$

elde edilir.

Eğer bir fonksiyonun Jakobiyeni pozitif çıkarsa bu fonksiyon “yön koruyandır”. Fonksiyonun jakobiyeni negatif ise “yön değiştiren” denir.

Tanım 2.1.10

Yön koruyan özelliği kullanılarak $f(z) = u(a,b) + iv(a,b)$ şeklindeki fonksiyonların dilatasyon ve kompleks dilatasyon (ikinci dilatasyon) kavramları tanımlanabilir.

- $\mathcal{D}_f = \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|}$ ifadesi $f(z)$ fonksiyonunun dilatasyonu olarak adlandırılır.
- $\mu_f = \frac{f_z}{f_{\bar{z}}}$ ifadesi $f(z)$ fonksiyonunun karmaşık dilatasyonu (ikinci dilatasyonu) olarak adlandırılır.

Tanımdan $|\mu_f| < 1$ olduğu görülür. Uygun işlemler yapıldığında dilatasyon ile kompleks dilatasyon arasında

$$\mathcal{D}_f = \frac{1 + |\mu_f|}{1 - |\mu_f|} \text{ ve } |\mu_f| = \frac{\mathcal{D}_f - 1}{\mathcal{D}_f + 1}$$

ifadeleri bulunur.

Teorem 2.1.11 (Maksimum ve Minimum Teoremi)

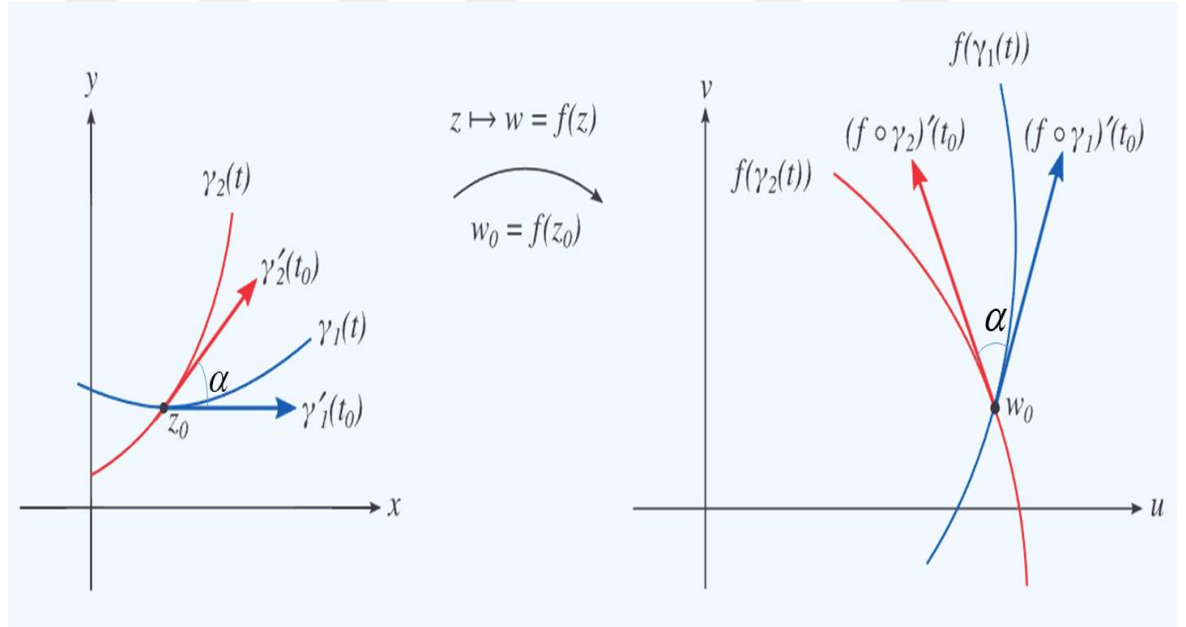
Sabit olmayan, sınırlı $\mathcal{D}$ bölgesinde analitik $\omega = f(z)$ fonksiyonu maksimum değerini bu $\mathcal{D}$ 'nin sınırında alır. Minimum değer için maksimum prensibinde $\frac{1}{f(z)}$ uygulanır.

Teorem 2.1.12 (Konform Dönüşüm)

Kompleks düzlemin sürekli $\mathcal{D}$ bölgesindeki z_0 noktasından geçen eğri çiftlerinin arasındaki açının yön ve büyüklüğü; görüntü eğrilerinde de $f(z_0)$ noktasından geçip korunuyorsa, f fonksiyonu bu noktada **konformdur** denir. Bir bölgedeki her noktada konform olan dönüşüme **konform dönüşüm** denir (Duren, 1983).

f , analitik fonksiyon ve $f'(z_0) \neq 0$ ise bu fonksiyon $z_0 \in \mathcal{D}$ 'de konformdur.

Konform dönüşüm yerel bir kavramdır. Farklı bir noktada açı ve büyüklük farklı olabilir. Şekil 2.3'de tanjant eğrileri ve bu eğrilerin görüntüleri arasındaki açının da korunduğu görülmektedir.



Şekil 2.3 Konform Dönüşüm

Teorem 2.1.13 (Möbius Dönüşümü)

$m, n, x, y \in \mathbb{C}$, $xn - ym \neq 0$ olmak üzere

$$f(z) = \frac{mz + n}{xz + y}$$

ifadesi **Möbiüs dönüşümü** olarak adlandırılır. Kesirli lineer dönüşümü olarak da bilinen Möbiüs dönüşümü kompleks kalkülüsde önemli bir yere sahiptir. Bu dönüşümün en temel özelliği genişletilmiş kompleks düzlemi yine kendi üzerine konform olarak görüntülemesidir.

Tanım 2.1.14 (Kuvvet Serisi)

c ve a_n kompleks sayıları için

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n = a_0 + a_1(z - c) + a_2(z - c)^2 + \dots + a_n(z - c)^n + \dots$$

açılımı c merkezli **kuvvet serisi** olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.15 (Taylor Açılımı)

Analitik bir f fonksiyonunun c noktası komşuluğundaki

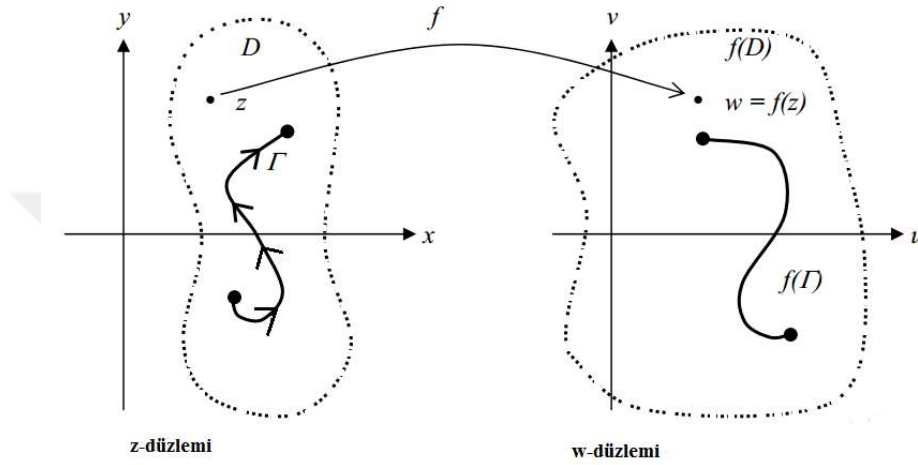
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (z - c)^n$$

açılımına **Taylor açılımı** denir. Özel olarak $c = 0$ için bu açılıma Maclaurin açılımı denir.

2.2 Ünivalent Fonksiyonlar**Tanım 2.2.1 (Ünivalent Fonksiyon)**

Kompleks düzlemde, $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonunun eşit olmayan z_1 ve z_2 noktaları için; görüntüleri $f(z_1)$ ve $f(z_2)$ de eşit değil ise f fonksiyonu bu bölgede **ünivalenttir** denir. f , ünivalent ise bu bölgede aynı değeri iki kez almaz. Bu geometrik olarak fonksiyonun görüntüsünün katlı olmadığı anlamına gelir. $\mathcal{D}$ bölgesinde ünivalent olan bir fonksiyon bu bölgeyi birebir biçimde farklı bir bölgeye dönüştürür.

Ünivalent bir f fonksiyonunun aynı zamanda analitik de olması gerekmez. Örnek olarak $f(z) = z + \frac{1}{z}$ fonksiyonu orijin içeren herhangi bir $\mathcal{D}$ bölgesinde ünivalenttir ancak $z=0$ noktasında bu fonksiyonun basit kutbu olduğu için bu $\mathcal{D}$ bölgesinde analitik değildir. Aşağıda Şekil 2.3 de ünivalent fonksiyonların geometrik gösterimi verilmiştir.



Şekil 2.4 Ünivalent f Fonksiyonunun Görüntüsü

Tanım 2.2.2 (Yerel Ünivalent Fonksiyon)

Bir f fonksiyonu kompleks düzlemdeki bir noktanın belirli komşuluğunda ünivalent ise bu fonksiyona **yerel ünivalent fonksiyon** denir.

Yerel ünivalent bir fonksiyonda dönme ve açılar değişmediğinde konform dönüşüm ile ünivalent bir fonksiyon birbirine denk sayılır.

Analitik f fonksiyonunda, $z \in \mathcal{D}$ için yerel ünivalentlik, $f'(z) \neq 0$ olması ile eşdeğerdir. Fakat buradan f 'nin tüm bölgede ünivalent olduğu sonucu çıkarılamaz.

Riemann dönüşüm teoremi, ünivalent fonksiyonlarla ilgili problemlerde zor bir bölgede çalışmak yerine $\mathcal{U}$ birim diskinde, basit bağlantılı bir bölgede çalışmanın çok daha basit olduğunu belirtir. Bu açıdan bu teorem ünivalent fonksiyonlarda önemli ve temel bir teoremdir.

Tanım 2.2.3 (Riemann Dönüşüm Teoremi)

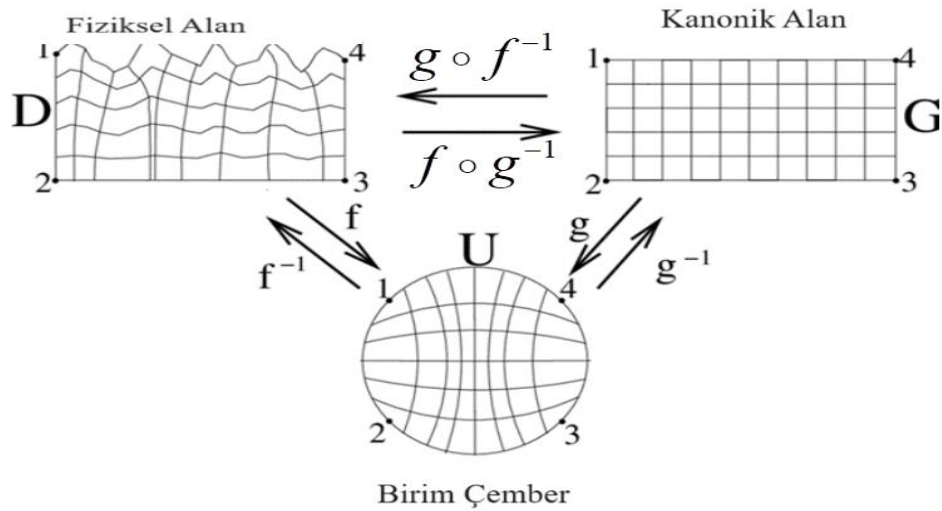
Kompleks düzlemin basit bağlantılı bir özalt kümesi olan $\mathcal{D}$ bölgesini keyfi bir $z_0 \in \mathcal{D}$ noktasında, $\mathcal{U}$ birim diskinde konform ve birebir dönüştüren $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ şartlarını sağlayan tek bir f fonksiyonu vardır.

$\mathcal{U}$ birim diskte ünivalent ve analitik olan bir f fonksiyonu ile $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ normalizasyon şartını sağlayan ve

$$h(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{f'(0)}$$

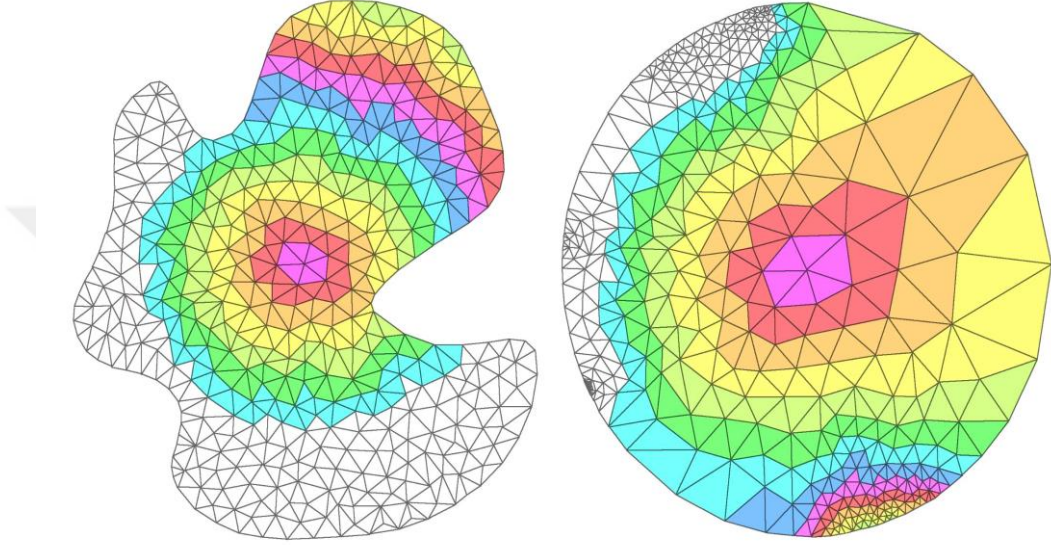
biçiminde yazılan bir h fonksiyonu aynı karakteristik özellikleri sağlar. Fonksiyonun normalize edilmesi sınıfın genelliğini sınırlamaz (Duren, 1983).

Aşağıda Şekil 2.5 de dalgalı bir fiziksel alan, kanonik dikdörtgen alan ve birim çember arasında Riemann dönüşüm teoremi uygulanmıştır. Bu örnekte fiziksel alan ile birim çember arasında birebir resmedilen f fonksiyonu vardır. Bu fonksiyon birebir olduğu için tersi olan f^{-1} de vardır. Benzer şekilde kanonik alan ile bir çember arasında g ve g^{-1} fonksiyonları vardır. Buradan $f \circ g^{-1}$ fonksiyon birleşimi fiziksel ve kanonik alan arasında tanımlıdır. Ayrıca bu fonksiyonun tersi olan $g \circ f^{-1}$ fonksiyonu da fiziksel ve kanonik alan arasında tanımlıdır. Ayrıca alanlar üzerinde 1 den 4 e kadar sayılarla gösterilen bölgeler fiziksel alandaki tarafların kanonik alandaki kenarlarına karşılık gelir.



Şekil 2.5 Fiziksel Alan ile Kanonik Alanın Riemann Dönüşümü

Aşağıdaki Mathematica programı ile hazırlanan Şekil 2.6 da solda farklı alan ve açılarla verilen bölgelerin sağ tarafta birim çember üzerindeki Riemann dönüşümleri gösterilmiştir. Şekildeki dönüşümü olan her bir bölge yine aynı renkle gösterilmiştir. Şekil 2.6 incelendiğinde, her bölgede açının hem yönünün hem de büyüklüğünün korunduğu görülmektedir.



Şekil 2.6 Farklı Bölgelerin $\mathcal{U}$ Birim Çemberde Riemann Dönüşümü

Tanım 2.2.4

$\mathcal{U}$ birim diskte $f(0)=0$ ve $f'(0)=1$ koşulunu sağlayan ünivalent ve analitik f fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{S}$ ile gösterilir ve **normalize edilmiş ünivalent fonksiyonlar sınıfı** olarak adlandırılır. $\mathcal{S}$ sınıfındaki her fonksiyon;

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

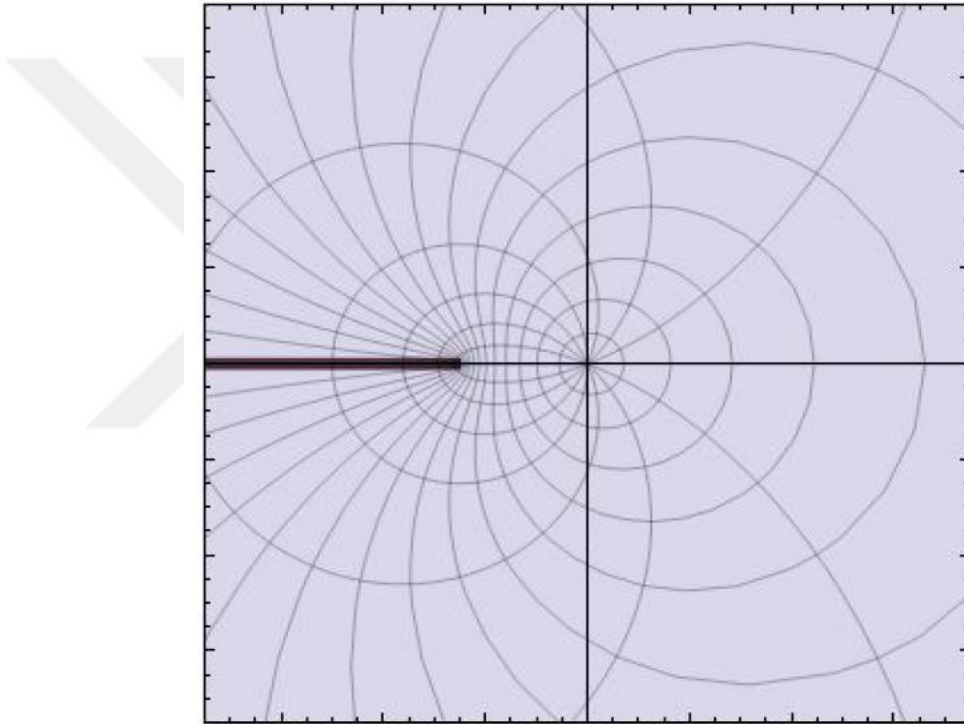
şeklinde Taylor serisi olarak yazılabilir.

$\mathcal{S}$ sınıfındaki en önemli fonksiyon

$$\mathcal{K}(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots ,$$

şeklindeki Koebe fonksiyonudur.

$k(z) = \omega$ ifadesinde $\omega z^2 - (2\omega + 1)z + \omega = 0$ denkleminin kökleri $\Delta > 1 + 4\omega$, $(\omega \in \mathbb{R})$ durumunda varken $\omega < -\frac{1}{4}$ durumunda yoktur. Bundan dolayı aşağıdaki Şekil 2.7’de görüldüğü gibi $k(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini reel eksen üzerinde, $-\infty$ ile $-\frac{1}{4}$ arasındaki kısmı dışındaki tüm kompleks düzleme konform olarak dönüştürür. $\mathcal{S}$ sınıfında birçok problemde ekstrem role sahip bu fonksiyon, ünivalent olarak $\mathcal{U}$ birim diski en geniş bölge üzerine görüntüleyen fonksiyondur.



Şekil 2.7 Koebe Fonksiyonunun Görüntüsü

Bieberbach, aşağıdaki teoremi ile $\mathcal{S}$ sınıfı için katsayı sınırları bulmaya yönelik çalışmalar yapan ilk araştırmacı olmuştur.

Teorem 2.2.5 (Bieberbach Teoremi)

$\forall f \in \mathcal{S}$ için

$$|a_2| \leq 2$$

ifadesi sağlanır (Bieberbach, 1916).

Bieberbach bu teoremi 1946 yılında ispatlamıştır. Bu teoremdeki eşit olma durumu yalnızca $f(z) = \frac{z}{(1 + e^{i\beta} z)^2}$ için sağlanır. Bu fonksiyon Koebe fonksiyonunun bir dönmesidir.

Teorem 2.2.6 (Bieberbach Kestirimi)

$\forall f \in \mathcal{S}$ ve $\forall n \geq 2$ için $|a_n| \leq n$ katsayı eşitsizliği vardır (Bieberbach, 1916).

Bieberbach'ın 1916 senesinde öne sürdüğü bu kestirimi ispatlamak için araştırmacılar yoğun çalışmalar yapmıştır. Yıllar içerisinde bazı araştırmacılar bu kestirimi kısmen ispatlamışlardır. Nihayetinde 1985 senesinde De Branges tarafından tam ispatı yapılmıştır.

- 1916 senesinde Bieberbach $|a_2| \leq 2$ eşitsizliğini ispatlamıştır.
- 1923 senesinde Loewner $|a_3| \leq 3$ eşitsizliğini ispatlamıştır.
- 1955 senesinde Garabedian ve Schiffer $|a_4| \leq 4$ eşitsizliğini ispatlamışlardır.
- 1972 senesinde Pederson ve Schiffer a_5 katsayısı için $|a_5| \leq 5$ eşitsizliğini ispatlamışlardır.
- 1968 senesinde Pederson ve 1969 da Ozawa $|a_6| \leq 6$ eşitsizliğini ispatlamışlardır.
- 1985 senesinde L. De Branges ise $|a_n| \leq n$ eşitsizliğinin sağlandığını göstererek 70 yıl sonra Bieberbach kestirimini ispatlamıştır.

1907 yılında Koebe'nin bulduğu Koebe dörtte bir teoremi $\forall f \in \mathcal{S}$ için önemli ve temel bir sonuçtur. Bu teoreme göre $\mathcal{S}$ sınıfındaki tüm fonksiyonların görüntüsü

$$\left\{ \omega : |\omega| < \frac{1}{4} \right\} \text{ diskini kapsar.}$$

Teorem 2.2.7 (Distorsiyon Teoremleri)

$\mathcal{U}$ birim diskinin, $\mathcal{S}$ sınıfındaki bir fonksiyon altındaki görüntüsü bu bölgenin bir burulması (distorsiyon) olarak yorumlanabilir. Bu burulmayla fonksiyonun kendisi ve türevleri ile ilgili sınır değerlerinin bulunması distorsiyon teoremleri olarak adlandırılır.

$\forall f \in \mathcal{S}$ için,

$$\frac{r'}{(1+r')^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r'}{(1-r')^2}, \quad |z| = r' < 1$$

ve

$$\frac{1-r'}{(1+r')^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r'}{(1-r')^3}, \quad |z| = r' < 1$$

ifadeleri sağlanır (Goodman, 1983).

Büyüme ve distorsiyon teoremlerinin eşitlik durumu Koebe fonksiyonu ve Koebe fonksiyonunun uygun dönmeleri için sağlanır.

Büyüme ve distorsiyon teoremleri birleştirilerek oluşturulan aşağıdaki teorem birçok işlemde daha kullanışlıdır.

Teorem 2.2.8

$\forall z \in \mathcal{U}$ ve $\forall f \in \mathcal{S}$ için

$$\frac{1-r'}{1+r'} \leq \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1+r'}{1-r'}, \quad |z| = r' < 1$$

ifadesi sağlanır.

2.3 Ünivalent Fonksiyonlara Ait Bazı Alt Sınıflar

Tanım 2.3.1 ($\mathcal{P}$ Sınıfı)

$\mathcal{U}$ birim diskte analitik ve $\Re\{\rho(z)\} > 0$ koşulunu sağlayan ve

$$\mathcal{P}(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n z^n$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonlar **reel kısmı pozitif fonksiyonlar sınıfı** olarak adlandırılır. Kısaca $\mathcal{P}$ ile sembolize edilir.

$\mathcal{P}$ sınıfındaki fonksiyonların ünivalent olması gerekmez. Örnek olarak bir $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{P}(z) = 1 + z^n$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ 'dedir. Ama $n \geq 2$ alınırsa $\mathcal{P}(z)$ ünivalent olmaz.

$\mathcal{S}$ sınıfında, $\mathcal{K}(z)$ fonksiyonunun önemli rolüne benzer şekilde

$$\mathcal{L}(z) = \frac{1+z}{1-z} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

biçimindeki ünivalent ve analitik olan Mobius fonksiyonu, $\mathcal{P}$ sınıfında $\mathcal{U}$ birim diski sağ yarı düzlem içine konform olarak dönüştürür.

$\mathcal{K}(z)$, $\mathcal{S}$ sınıfındaki birçok ekstrem problemde tek bir çözümdür. Möbiüs fonksiyonu ise $\mathcal{P}$ sınıfında $f(z)$ 'nin ρ_n katsayılarını maksimize eder. Ancak $\mathcal{P}$ sınıfında $n \geq 2$ için $\rho_n = 2$ şartını sağlayan sonsuz tane fonksiyon vardır. Ayrıca Koebe fonksiyonunda olduğu gibi uygun rotasyonlarla bu fonksiyonlar arasında geçiş mümkün değildir.

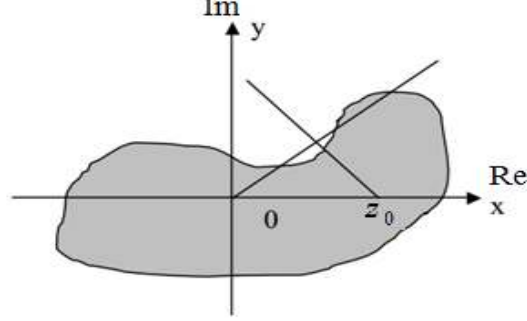
Teorem 2.3.2 (Carathodory Teoremi)

n doğal sayı ve f fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfında olmak üzere $|\rho_n| \leq 2$ eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.3.3 (Yıldızlı Fonksiyonlar Sınıfı)

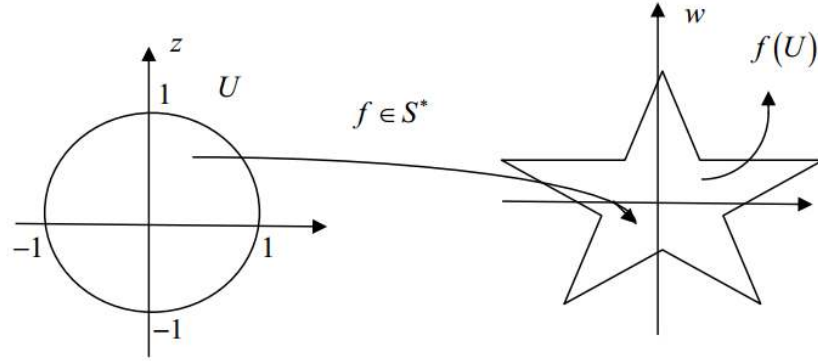
Kompleks düzlemde $\mathcal{D}$ bölgesi ve bu bölgedeki z_0 noktasını ele alalım. Bu bölgedeki her nokta ile z_0 noktasını birleştiren doğru parçaları tümüyle yine $\mathcal{D}$ bölgesi içerisinde ise $\mathcal{D}$ bölgesi z_0 **noktasına göre yıldızlı bölge** olarak adlandırılır. Bir noktaya göre

yıldızlılık geometrik olarak Şekil 2.8’den görülebileceği gibi, z_0 noktasından bakıldığında bölgedeki her noktanın görünür olmasıdır.



Şekil 2.8 Bir Noktaya Göre Yıldızlı Bölge

Orijine göre $\mathcal{U}$ birim diski yıldızlı bölgeye görüntüleyen fonksiyon **yıldızlı fonksiyon** olarak adlandırılır (Goodman, 1983).



Şekil 2.9 Yıldızlı Fonksiyon

$\mathcal{S}^*$ ile gösterilen yıldızlı fonksiyonları 1915 yılında Alexander ve 1921 yılında Nevanlinna tanıtmışlardır.

Teorem 2.3.4

$\mathcal{U}$ birim diskinde $f(0)=0$, $f'(0)=1$ ve f analitik olsun. f fonksiyonunun $\mathcal{S}^*$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart $0 < |z| = r < 1$

$$\Re \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0$$

ifadesinin sağlanmasıdır.

$\mathcal{S}^*$ sınıfı

$$\mathcal{S}^* = \left\{ f \in \mathcal{A} : \operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0; \quad z \in \mathcal{U} \right\}$$

şeklinde de yazılabilir.

Tanım 2.3.5 (α – Mertebeli Yıldızlı Fonksiyon)

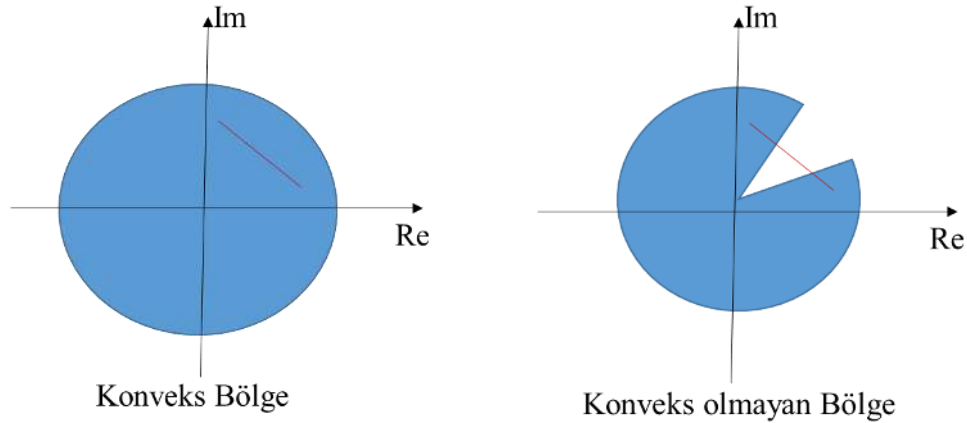
$\mathcal{U}$ birim diskinde $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ ve f ünivalent olsun.

$$\operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > \alpha; \quad z \in \mathcal{U}, \quad 0 \leq \alpha < 1$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f , α – mertebeli yıldızlı fonksiyon olarak adlandırılır ve bu şartı sağlayan fonksiyonlar sınıfı $\mathcal{S}^*(\alpha)$ şeklinde sembolize edilir (Robertson, 1936).

Tanım 2.3.6 (Konveks Fonksiyonlar Sınıfı)

Kompleks düzlemdeki bir $\mathcal{D}$ bölgesindeki herhangi iki z_1 ve z_2 noktasını birleştiren doğru parçası tümüyle bu bölgede ise bu bölge **konveks bölge** olarak adlandırılır. Diğer bir ifade ile $0 \leq \lambda \leq 1$ için $\lambda z_1 + (1 - \lambda) z_2 \in \mathcal{D}$ ise $\mathcal{D}$ bölgesi **konvektir** denir. Herhangi bir $\mathcal{D}$ bölgesini konveks bir bölgeye görüntüleyen ünivalent bir f fonksiyonu **konveks fonksiyon** olarak adlandırılır ve bu sınıf $\mathcal{K}$ ile sembolize edilir. Aşağıdaki Şekil 2.10 da konveks ve konveks olmayan bölge örnekleri verilmiştir.



Şekil 2.10 Konveks ve Konveks Olmayan Bölge

Tanım 2.3.7 (α – Mertebeli Konveks Fonksiyon)

$\mathcal{U}$ birim diskinde f ünivalent fonksiyonu için $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ olsun.

$$\Re \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > \alpha \quad (0 \leq \alpha \leq 1)$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonuna α -**mertebeli konveks fonksiyon** denir ve $\mathcal{K}(\alpha)$ ile sembolize edilir.

Lemma 2.3.8

$\mathcal{U}$ birim diskinde $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ ve f ünivalent olsun. $f \in \mathcal{K}$ olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\Re \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > 0 \quad (z \in \mathcal{U})$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Konveks ile yıldızlı fonksiyonlar arasındaki ilişkiyi açıklayan aşağıdaki önemli teorem ilk defa 1915 yılında Alexander tarafından verilmiştir.

Teorem 2.3.9 (Alexander Teoremi)

$\mathcal{U}$ birim diskinde $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ ve f analitik fonksiyon olmak üzere

$$f \in \mathcal{K} \Leftrightarrow zf'(z) \in \mathcal{S}^*$$

ifadesi sağlanır (Alexander, 1915).

Analitik fonksiyonlar, normalize edilmiş ünivalent fonksiyonlar, yıldızlı fonksiyonlar ile konveks fonksiyonlar arasında

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{A}$$

kapsama bağıntısı vardır.

Tanım 2.3.10 (Konvekse Yakın Fonksiyon)

$\mathcal{U}$ birim diskinde $f(0)=0$, $f'(0)=1$ ve f analitik olmak üzere

$$\Re\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right) > 0$$

şeklinde konveks bir g fonksiyonu varsa f fonksiyonuna konvekse yakın fonksiyon denir ve bu fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}$ ile sembolize edilir. Konvekse yakon fonksiyonlarsa f fonksiyonunun ünivalent olması ve g fonksiyonunun da normalize şartlarını sağlaması gerekmez. Konvekse yakın fonksiyonların sınıfı yıldızıl fonksiyonları kapsar.

2.4 m -katlı Ünivalent fonksiyonlar

Kompleks düzlemdeki bir $\mathcal{D}$ bölgesinde $\omega = f(z)$ fonksiyonu farklı $\forall \omega$ için en çok m tane sifira sahipse bu fonksiyona **m -mertebeden çok katlı** ya da **m -katlı fonksiyon** denir.

$\mathcal{U}$ birim diskte analitik, $m \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ için $a_m \neq 0$ olmak üzere

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n$$

biçimindeki çok katlı fonksiyonların sınıfı $\mathcal{A}(m)$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.1 (m -Katlı Yıldızıl Fonksiyonlar)

$f \in \mathcal{A}(m)$ için

$$\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonu m -katlı yıldızıl fonksiyon olarak adlandırılır ve bu sınıf $\mathcal{J}^*(m)$ ile sembolize edilir. $\mathcal{J}^*(1) = \mathcal{J}^*$ olduğu açıktır.

Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki “0” yerine α ($0 \leq \alpha < 1$) yazıldığında α - mertebeli m -katlı yıldızıl fonksiyonların sınıfı elde edilir ve $\mathcal{J}^*(m, \alpha)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.4.2 (m -Katlı Konveks Fonksiyonlar)

$f \in \mathcal{A}(m)$ için

$$\Re \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > 0$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonu m -katlı konveks fonksiyon olarak adlandırılır ve bu sınıfı $\mathcal{K}(m)$ ile sembolize edilir. $\mathcal{K}(1) = \mathcal{K}$ olduğu açıktır.

Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki “0” yerine α ($0 \leq \alpha < 1$) yazıldığında α -mertebeli m -katlı konveks fonksiyonların sınıfı elde edilir ve $\mathcal{K}(m, \alpha)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.4.3 (m -Katlı Konvekse Yakın Fonksiyon)

$f \in \mathcal{A}(m)$ için

$$\Re \left(\frac{f'(z)}{g'(z)} \right) > 0$$

eşitsizliğini sağlayan m -katlı konveks analitik bir g fonksiyonu varsa f m -katlı konvekse yakın fonksiyon olarak adlandırılır ve bu sınıf $\mathcal{L}(m)$ ile sembolize edilir.

Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki “0” yerine α ($0 \leq \alpha < 1$) yazıldığında α -mertebeli m -katlı konvekse yakın fonksiyonların sınıfı elde edilir ve $\mathcal{L}(m, \alpha)$ şeklinde gösterilir.

3. MALZEME VE YÖNTEM

Bu bölümde araştırma sonuçlarımıza ulaşmak için kullandığımız tanım, teorem ve diğer bilgiler verilmiştir.

3.1 Harmonik Fonksiyonlar

Tanım 3.1.1:

$\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ ve $u: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Bu bölgede ikinci dereceden sürekli kısmi türevleri bulunan u fonksiyonu için her bir $z \in \mathcal{D}$ olmak üzere

$$\nabla u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

biçimindeki Laplace's denklemini sağlanıyorsa u fonksiyonu $\mathcal{D}$ bölgesinde **reel harmonik fonksiyon** olarak adlandırılır.

$\mathcal{D}$ 'de reel harmonik u ve v fonksiyonları için $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$, $f = u + iv$ ifadesi $\mathcal{D}$ bölgesinde **harmonik fonksiyon** olarak adlandırılır.

İki harmonik fonksiyonun toplamı yine harmonik bir fonksiyondur. Bir harmonik fonksiyonun bir sabitle çarpımı yine harmoniktir. Ancak iki harmonik fonksiyonun çarpımı veya bileşkesi harmonik olmayabilir. f harmonik bir fonksiyon ise f^{-1} veya $\frac{1}{f}$ harmonik olmayabilir.

Örnek olarak

$f = xy + i(x + y)$ ve $g = x + y + ixy$ için $f + g = xy + x + y + i(x + y + xy)$ toplam fonksiyonu Laplace's denklemini sağladığından harmoniktir. Ancak,

$f \cdot g = i \left[x^2 + y^2 + (x + y)^2 \right]$ çarpım fonksiyonu harmonik olmaz. Çünkü

$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ ve $\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 2(x^2 + y^2 + 2) \neq 0$ çıkar. Yani Laplace's denklemini sağlamaz.

$\mathcal{D}$ bölgesindeki bir $f = u + iv$ fonksiyonunun her noktada türevi varsa bu fonksiyonun $\mathcal{D}$ bölgesinde analitik olduğunu biliyoruz. Buradan

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitlikler Cauchy Riemann eşitlikleri olarak adlandırılır. Bu eşitlikler tersine de doğrudur. Yani birinci kısmi türevleri olan ve Cauchy Riemann eşitliklerini sağlayan $f = u + iv$ fonksiyonu bu $\mathcal{D}$ bölgesinde analitiktir.

Cauchy-Riemann eşitliklerinden, analitik olan tüm fonksiyonların harmonik de olduğu görülebilir. Ancak tersi her zaman doğru değildir. Yani harmonik fonksiyonlar analitik olmak zorunda değildir.

Örneğin; $f = x^2 - y^2 - i2xy$ fonksiyonu için reel kısım $u = x^2 - y^2$ ve sanal kısım $v = -2xy$ dir.

Laplace's denklemleri sağlandığından $f = u + iv$ fonksiyonu kompleks düzlemde harmoniktir. Ancak, $u_x = 2x$ ve $v_y = -2x$ olduğundan $u_x \neq v_y$ Cauchy-Riemann denklemleri sağlanmaz. Dolayısıyla $f = u + iv$ fonksiyonu kompleks düzlemde analitik değildir.

Cauchy-Riemann eşitliklerini sağlayan (u, v) fonksiyonları **eşlenik ikili** olarak adlandırılır. v, u 'nun; $-u$ ise v 'nin **harmonik eşleniği** olarak adlandırılır.

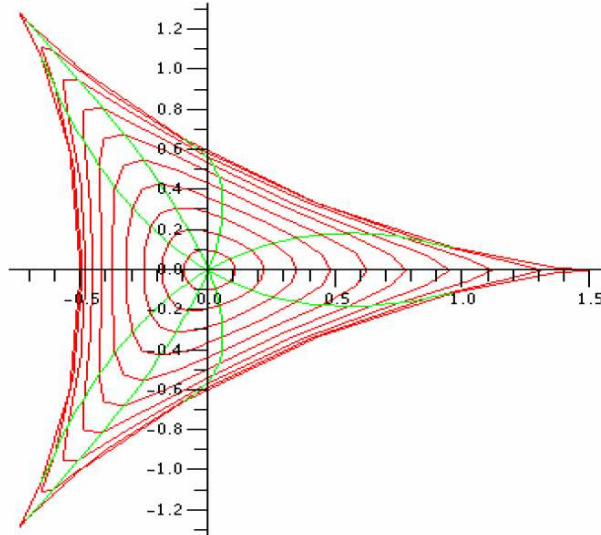
Konform dönüşümler genelleştirildiği zaman harmonik dönüşümler elde edilir. Ancak her harmonik dönüşüm konformal değildir.

Örnek 3.1.2

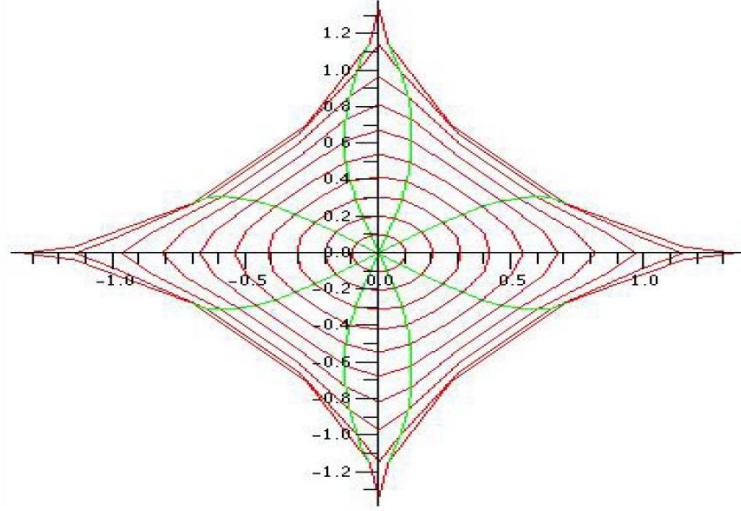
$w = \alpha z + \beta \bar{z} + \gamma$, $\alpha \neq \beta$ şeklindeki afin dönüşümleri, bir harmonik dönüşümdür, ancak konformal değildir. Afin dönüşümler kompleks düzlemi kendi üzerine resmeden tek dönüşümdür.

Konformal olmayan harmonik dönüşümlere $f(z) = z + \frac{1}{2}\bar{z}^n$ örnek verilebilir.

$n=2,3$ değerleri için $f(z)$ fonksiyonunun $\mathcal{U}$ birim diski altındaki görüntüleri aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 3.1 $f(z) = z + \frac{1}{2}\bar{z}^2$ dönüşümünün $\mathcal{U}$ birim diski altındaki görüntüsü



Şekil 3.2 $f(z) = z + \frac{1}{2}\bar{z}^3$ dönüşümünün $\mathcal{U}$ birim diski altındaki görüntüsü

1936 senesinde H. Lewy, analitik f fonksiyonlarının z 'de yerel ünivalent olması için gerekli ve yeterli şartın $J_f(z) \neq 0$ olmasının harmonik fonksiyonlar için de geçerli olduğunu ispatlamıştır.

Analitik ve harmonik fonksiyonlar arasındaki bazı farklılıkları aşağıdaki şekilde sıralayabiliriz;

- Analitik fonksiyonlar harmoniktir, fakat harmonik fonksiyonlar analitik olmayabilir.
- Analitik fonksiyonlar sınıfı $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ bir cebirdir, fakat harmonik fonksiyonlar sınıfı $\mathcal{H}(\mathcal{D})$ bir cebir değildir
- Analitik fonksiyonların sınırdaki davranışı basittir, fakat harmonik fonksiyonların sınırdaki davranışı komplekstir.
- Analitik fonksiyonlar $J_f(z) \neq 0$ durumunda yön koruyandır. Harmonik fonksiyonlar, $J_f(z) > 0$ durumunda yön korur, $J_f(z) < 0$ durumunda ise yön değiştirir.
- Analitik fonksiyonlar bileşke altında korunurlar, fakat harmonik fonksiyonlar korunmazlar.
- f fonksiyonu analitik ise f^{-1} veya f^2 analiktir, fakat f fonksiyonu harmonik ise f^{-1} veya f^2 fonksiyonlarının harmonik olması gerekmez.
- Analitik fonksiyonlarda reel ve sanal kısımlar eşleniktir, fakat harmonik fonksiyonlarda reel ve sanal kısımların eşlenik olması gerekmez.

3.2 Harmonik Ünivalent Fonksiyonlar

Tanım 3.2.1

Basit bağlantılı $\mathcal{D}$ bölgesinde h ile g analitik fonksiyonlar ise harmonik f fonksiyonu

$$f = h + \bar{g}$$

biçiminde ifade edilebilir. Bu ifade f 'in **kanonik gösterimi** olarak adlandırılır. Sabit farkıyla bu ifade tek şekildedir. h , f 'nin analitik, g ise f 'nin ko-analitik kısmıdır. Analitik h ve g fonksiyonları

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad \text{ve} \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \quad (3.1)$$

biçiminde seri açılımlarına sahiptir.

Clunie ve Sheil-Small, ünivalent fonksiyonlarda yapılan tanım ve katsayı tahminlerini harmonik fonksiyonlara yorumlamışlardır. 1984 senesinde Clunie ve Sheil-Small'ın yaptığı araştırma ile bazı kısıtlamalar altında ünivalent fonksiyon sınıfları için yapılan tahmin ve tanımların, harmonik fonksiyon sınıfları için de yapılabileceği gösterilmiştir.

Tanım 3.2.2

$\mathcal{U}$ da analitik ve (3.1) ile gösterilen seri açılımlarına sahip h ve g fonksiyonları için $f = h + \bar{g}$ biçimindeki yön koruyan harmonik ünivalent fonksiyonların sınıfı $\mathcal{H}$ şeklinde ifade edilir.

Eğer $g'(0) = 0$ ise f fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{H}^0$ ile ifade edilir ve

$$\mathcal{H}^0 \subset \mathcal{H}$$

şeklinde yazılabilir.

$\mathcal{S}$ sınıfındaki birçok problemde ekstrem rol oynayan Koebe fonksiyonuna benzer şekilde, Clunie-Sheil Small tarafından $\mathcal{H}^0$ sınıfı için de harmonik Koebe fonksiyonu tanımlanmıştır.

Tanım 3.2.3 (Harmonik Koebe Fonksiyonu)

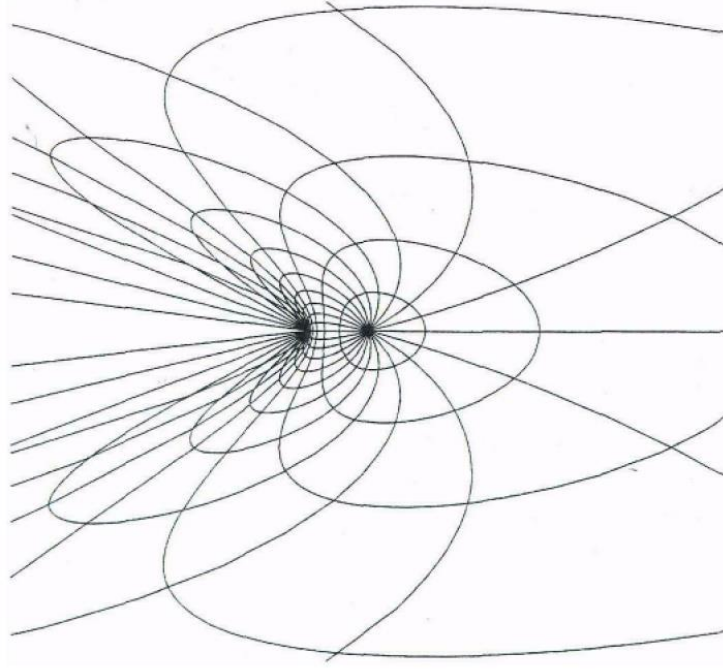
$h(0) = 0$ ve $g(0) = 0$,

$$h(z) = \frac{z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3} \quad \text{ve} \quad g(z) = \frac{\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3}$$

olmak üzere $\mathcal{K} = h + \bar{g}$ fonksiyonu **harmonik Koebe fonksiyonu** olarak adlandırılır.

Aşağıdaki Şekil 3.3'de görüldüğü gibi $\mathcal{K} = h + \bar{g}$ fonksiyonu, $\mathcal{U}$ birim diskini harmonik olarak, $-\infty < t < -1/6$ şeridi dışındaki kompleks düzlemin tamamına

resmeder. $z=1$ dışındaki tüm $\mathcal{U}$ birim diskte, $\forall z$ değeri için $\mathcal{K}(z) = -\frac{1}{6}$ çıkar (Clunie ve Sheil-Small, 1984).



Şekil 3.3 Harmonik Koebe Fonksiyonu

De Branges'in 1984 yılında 69 senelik Bieberbach kestirimini kanıtlamasıyla, $\mathcal{S}$ ve farklı alt sınıfları için elde edilen katsayı kestirimleri $\mathcal{SH}$ ve $\mathcal{SH}^0$ sınıfları için de yapılmaya başlamıştır. Bu araştırmalarda Clunie ve Sheil-Small, bu genişletmenin $\mathcal{S}$ sınıfındaki tahminlere benzer olmadığını, ancak bu kestirimlerin uygun yorumlarla yapılabileceğini ortaya koydular. $\mathcal{SH}$ ve $\mathcal{SH}^0$ sınıflarındaki katsayı kestirimleri için çalışmalar hala sürmektedir.

Teorem 3.2.4

$\mathcal{SH}^0$ sınıfındaki tüm f fonksiyonları için

$$|b_2| \leq \frac{1}{2}$$

eşitsizliği sağlanır. $f \in \mathcal{SH}$ olması durumunda ise

$$|b_2| \leq 1$$

olur.

Teorem 3.2.5

$f \in \mathcal{SH}$ ise

$$|a_2| \leq \frac{96\pi}{\sqrt{27}} - 1 < 57,05$$

eşitsizliği sağlanır (Sheil-Small, 1990).

Teorem 3.2.6

$f \in \mathcal{SH}^0$ ise

$$|f(z)| \geq \frac{1}{4} \frac{|z|}{(1+|z|)^2}$$

biçimindedir. Her $f \in \mathcal{SH}^0$ için $\{\omega \in \mathbb{C} : |\omega| < 1/6\} \subset f(\mathcal{U})$ olur.

Kestirim 3.2.7

Her $f \in \mathcal{SH}^0$ fonksiyonu için

$$\{\omega \in \mathbb{C} : |\omega| < 1/6\} \subset f(\mathcal{U})$$

ifadesi doğrudur (Sheil-Small, 1990).

Bununla birlikte Sheil-Small 1990 yılında $\mathcal{SH}^0$ sınıfı için Bieberbach kestirimini aşağıdaki şekilde tahmin etmiştir.

Kestirim 3.2.8

$f = h + \bar{g} \in \mathcal{SH}^0$ fonksiyonu için

$$\|a_n - b_n\| \leq n \quad n = 2, 3, \dots$$

$$|a_n| \leq \frac{1}{6}(2n+1)(n+1)$$

$$|b_n| \leq \frac{1}{6}(2n-1)(n-1)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Yukarıdaki eşitsizliklerin eşit olma durumu harmonik Koebe fonksiyonu için sağlanır.

Kestirim 3.2.8 daha sonraki yıllarda Sheil-Small tarafından geliştirilmiş ve aşağıdaki kestirim ortaya çıkmıştır.

Kestirim 3.2.9

$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_{-n}} z^n \in \mathcal{SH}$ ise $|n| = 2, 3, \dots$ olmak üzere

$$|a_n| < \frac{2n^2 + 1}{3}$$

eşitsizliği sağlanır.

Günümüzde hala $\mathcal{SH}$ ve $\mathcal{SH}^0$ sınıfları için katsayı tahminleri ile ilgili araştırmalar devam etmektedir. Bu araştırmalarda $|b_2| \leq \frac{1}{2}$ kesin üst sınırı bulunmuştur. $|a_2|$ için $|a_2| < 12,173$ eşitsizliği bulunmuş ancak kesin bir üst sınır hesaplanamamıştır.

Tanım 3.2.10 (Harmonik Yıldızlı Fonksiyonlar)

$\mathcal{U}$ birim diskini orijine göre yıldızlı bir bölgeye görüntüleyen $f \in \mathcal{H}$ fonksiyonu **harmonik yıldızlı fonksiyon** olarak adlandırılır ve bu fonksiyonların sınıfı $\mathcal{H}^*$ ile sembolize edilir.

$\mathcal{H}^*$ sınıfı, $z = re^{i\theta}$, $z \in \mathcal{U}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ve $0 \leq r \leq 1$ olmak üzere

$$f \in \mathcal{H}^* \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} (\arg f(re^{i\theta})) \geq 0$$

biçiminde ifade edilir.

f , analitik fonksiyon ise bu şart

$$\Re \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0, \quad z \in \mathcal{U}$$

biçiminde de yazılabilir.

Teorem 3.2.11

Her $f \in \mathcal{H}^{*,0}$ harmonik yıldızlı fonksiyonları için

$$\|a_n - b_n\| \leq n \quad n = 2, 3, \dots$$

$$|a_n| \leq \frac{1}{6}(2n+1)(n+1)$$

$$|b_n| \leq \frac{1}{6}(2n-1)(n-1)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizlikler kesindir (Sheil-Small, 1984).

Sonuç 3.2.12

$f \in \mathcal{H}^*$ sınıfındaki harmonik yıldızlı fonksiyonların katsayıları

$$|a_n| \leq \frac{1}{3}(2n^2 + 1)$$

$$|b_n| \leq \frac{1}{3}(2n^2 + 1) \quad n = 2, 3, \dots$$

eşitsizliklerini sağlar. Bu eşitsizlikler kesindir.

Sonuç 3.2.13

Her $f \in \mathcal{H}^{*,0}$ fonksiyonu için

$$|f(z)| \leq \frac{1}{3} \frac{3r + r^3}{(1-r)^3}, \quad |z| = r < 1$$

ifadesi sağlanır ve bu eşitsizlik kesindir. Eşit olma durumu ise harmonik Koebe fonksiyonu için doğrudur.

Tanım 3.2.14 (Harmonik Konveks Fonksiyonlar)

$\mathcal{U}$ birim diskini konveks bir bölgeye görüntüleyen $f \in \mathcal{H}$ fonksiyonu **harmonik konveks fonksiyon** olarak adlandırılır ve bu fonksiyonların sınıfı $\mathcal{KH}$ ile sembolize edilir.

Harmonik konveks fonksiyon, $z = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ve $0 \leq r \leq 1$ olmak üzere

$$f \in \mathcal{KH} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \arg \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \arg f(re^{i\theta}) \right) \right\} \geq 0$$

şeklinde ifade edilebilir.

f , analitik fonksiyon ise bu şart

$$\Re \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > 0, \quad z \in \mathcal{U}$$

biçiminde de yazılabilir.

Klasik Koebe 1/4 teoremi $\mathcal{U}$ birim diskte ünivalent ve analitik her

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

fonksiyonu için; $f(\mathcal{U})$ görüntüsünün $|\omega| < \frac{1}{4}$ diskinin tamamını kapsadığını söyler.

Koebe fonksiyonunun, $\mathcal{U}$ birim diskini konform şekilde, $\omega = \frac{1+z}{1-z}$ dönüşümü altında

$-1/4$ 'den ∞ 'a kadar yarı doğru hariç tüm kompleks düzleme dönüştürmesinden ve $|a_n| \leq n$, $n = 2, 3, 4, \dots$ eşitsizliğinden, f fonksiyonunun değer kümesinin konveks olduğu sonucuna varılabilir. $\mathcal{K}$, $\mathcal{U}$ birim diskini konformal olarak bir konveks bölgeye dönüştüren $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ şeklindeki fonksiyonların sınıfı olsun.

$\forall f \in \mathcal{K}$ fonksiyonunun değer kümesi $|\omega| < \frac{1}{2}$ diskini kapsar. Katsayıları için $|a_n| \leq 1$ sınırı sağlanır.

$$\zeta(z) = \frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \dots$$

şeklinde tanımlanan $\zeta(z)$, $\mathcal{U}$ birim diskini $\Re\{\omega\} > -\frac{1}{2}$ yarı düzlemine konform

olarak görüntüler. Bu durumu konveks harmonik fonksiyonlara da genişletebiliriz. $\mathcal{KH}$ sınıfı, $\mathcal{U}$ birim diskini konveks bölgeye görüntüleyen $f = h + \bar{g}$ harmonik dönüşümlerden meydana gelir. Bu dönüşümler yön koruyan ve bu dönüşümler için $J_f(z) > 0$ olduğundan $|g'(0)| < |h'(0)| = 1$ dir.

Konveksliği koruyan

$$\varphi(\omega) = \frac{\omega - \overline{b_1 \omega}}{1 - |b_1|^2}, \quad b_1 = g'(0)$$

yön koruyan afin dönüşümü ile $f = h + \bar{g} \in \mathcal{KH}$ fonksiyonunu bir araya getirerek $g'(0) = 0$ şartına ulaşılabilir. Buradaki sonuçlar ile $\mathcal{KH}^0$ sınıfına ulaşılır. Böylece, $f \in \mathcal{KH}^0$ sınıfında olması f fonksiyonunun, $\mathcal{U}$ birim diskte ünivalent olarak konveks bölgeye dönüştürmesi ve

$$h(z) = z + a_2 z^2 + \dots \quad \text{ve} \quad g(z) = b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots$$

şeklindeki analitik fonksiyonlar olduğu anlamına gelir.

$f \in \mathcal{KH}$ 'dan $f_0 = (\varphi \circ f) \in \mathcal{KH}^0$ 'a olan fonksiyon $f = f_0 + \overline{b_1 f_0}$ ile tersine çevrilebilir.

Teorem 3.2.15

$\forall f \in \mathcal{KH}^0$ fonksiyonu $f(\mathcal{U})$ değer bölgesindeki $|\omega| < \frac{1}{2}$ diskinin tamamını kapsar.

Teorem 3.2.16

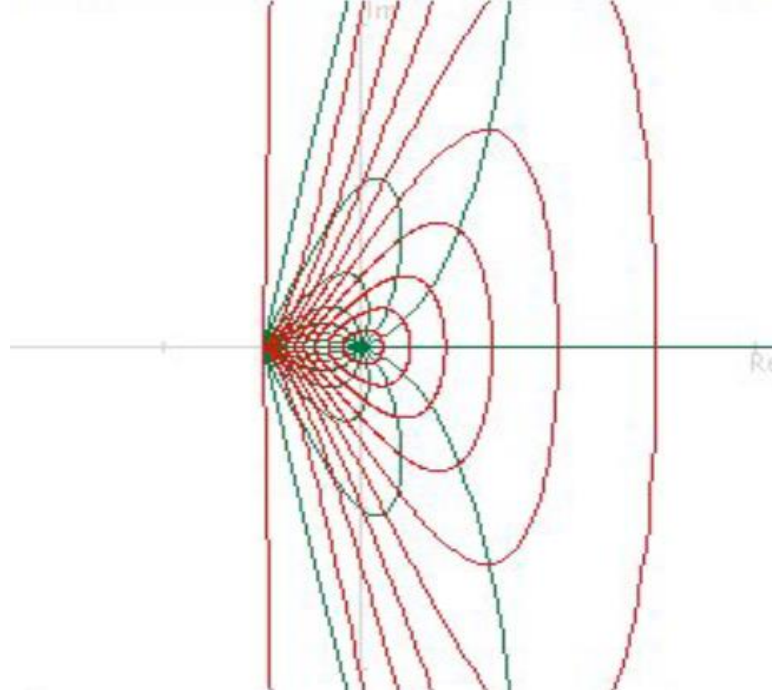
Her bir $f \in \mathcal{KH}^0$ fonksiyonunun katsayıları

$$|a_n| \leq \frac{n+1}{2}, \quad |b_n| \leq \frac{n-1}{2} \quad \|a_n - b_n\| \leq 1 \quad n = 2, 3, \dots$$

kesin eşitsizliklerini sağlar. Eşitlik durumu

$$\mathcal{L}(z) = \Re \left\{ \frac{z}{1-z} \right\} + i \Im \left\{ \frac{z}{(1-z)^2} \right\}$$

için sağlanır (Clunie ve Sheil-Small, 1990).



Şekil 3.4 $\mathcal{L}(z)$ fonksiyonunun $\mathcal{U}$ birim diski altındaki görüntüsü

Sonuç 3.2.17

$f \in \mathcal{KH}$ fonksiyonunun katsayıları $n = 2, 3, \dots$ olmak üzere

$$|a_n| \leq \frac{n+1}{2} + |b_1| \frac{n-1}{2} < n$$

ve

$$|b_n| \leq \frac{n-1}{2} + |b_1| \frac{n+1}{2} < n$$

eşitsizliklerini sağlar.

Tanım 3.2.18 (Konvekse Yakın Harmonik Fonksiyon)

$\mathcal{U}$ birim diskini konvekse yakın bir bölgeye görüntölüyün $f \in \mathcal{SH}$ fonksiyonu **konvekse yakın harmonik fonksiyon** olarak adlandırılır ve bu fonksiyonların sınıfı $\mathcal{CH}$ ile sembolize edilir.

Teorem 3.2.19

$f \in \mathcal{CH}$ ve $n = 2, 3, \dots$ için

$$|a_n| \leq \frac{2n^2 + 1}{3}$$

ve

$$|b_n| \leq \frac{2n^2 + 1}{3}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Eşitlik durumu

$$k(z) = 2i \operatorname{Im} \left(\frac{3z - z^3}{3(1 - iz)^3} \right) \in \partial \mathcal{CH}$$

fonksiyonu için sağlanır.

Aşağıdaki yardımcı teorem Alexander teoreminin harmonik dönüşümlere kısmen genişlemesidir. Harmonik konveks ve harmonik yıldızlı dönüşümler arasındaki ilişkiyi belirtir.

Yardımcı Teorem 3.2.20

$f = h + \bar{g} \in \mathcal{SH}^*$, olmak üzere; H ve G analitik fonksiyonları için

$$zH'(z) = h(z), \quad zG'(z) = -g(z), \quad H(0) = 0 \quad \text{ve} \quad G(0) = 0$$

şartları sağlanıyor ise $F = H + \bar{G} \in \mathcal{KH}$ dır (Sheil-Small, 1990).

Bu teoremin tersi sağlanmadığından harmonik dönüşümlerde, Alexander teoremini tam olarak genelleştiremeyiz.

Tanım 3.2.21 (α -Mertebeli Yıldızlı Harmonik Fonksiyonlar)

$0 \leq \alpha < 1$ ve $|z| = r < 1$ olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\arg f(re^{i\theta}) \right) \geq \alpha$$

eşitsizliğini sağlayan $f = h + \bar{g}$ fonksiyonları α -mertebeli yıldızlı harmonik fonksiyon olarak adlandırılır ve $\mathcal{SH}^*(\alpha)$ ile gösterilir. Ayrıca

$$\mathcal{SH}^*(\alpha) \subset \mathcal{SH} \text{ ve } \mathcal{SH}^*(0) = \mathcal{SH}^*$$

ifadelerinin yazılabileceği açıktır.

$$h(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n$$

ve

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| z^n$$

fonksiyonları için $f = h + \bar{g} \in \mathcal{SH}^*(\alpha)$ fonksiyon sınıfı $\mathcal{TH}^*(\alpha)$ ile sembolize edilir.

Tanım 3.2.22 (α -Mertebeli Konveks Harmonik Fonksiyonlar)

$0 \leq \alpha < 1$ ve $|z| = r < 1$ olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \arg \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \arg f(re^{i\theta}) \right) \right\} \geq \alpha$$

eşitsizliğini sağlayan $f = h + \bar{g}$ fonksiyonları α -mertebeli konveks harmonik fonksiyon olarak adlandırılır ve $\mathcal{KH}(\alpha)$ ile gösterilir. Ayrıca $\mathcal{KH}(0) = \mathcal{KH}$ olduğu açıktır.

3.3 m -Katlı Harmonik Fonksiyonlar**Teorem 3.3.1 (Argument Prensibi)**

f fonksiyonu $\mathcal{D}$ Jordan bölgesinde Γ ile sınırlı ve $\bar{\mathcal{D}}$ bölgesinde sürekli harmonik bir fonksiyon olsun. Γ üzerinde $f(z) \neq 0$ ve f fonksiyonunun ayık sıfırları olmadığını varsayalım. Ayrıca f fonksiyonunun $\mathcal{D}$ bölgesindeki sıfırlarının mertebeleri toplamı ω olsun. z , Γ üzerinde gezerken; $\Delta_{\Gamma} \arg(f(z))$ ifadesi, $f(z)$ 'nin argümentindeki değişimi olmak üzere

$$\Delta_{\Gamma} \arg(f(z)) = 2\pi\omega$$

olur.

Tanım 3.3.2

$m \geq 1$ doğal sayı ve $\mathcal{U}$ birim diskte yön koruyan olmak üzere

$$f(z) = z^m + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n+m-1} z^{n+m-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{b_{n+m-1}} z^{n+m-1}, \quad |b_m| < 1 \quad (3.2)$$

şeklindeki tüm çok değerli harmonik ya da m -katlı harmonik $f = h + \bar{g}$ biçimindeki fonksiyonlar sınıfı $\mathcal{H}(m)$ ile gösterilir.

Tanım 3.3.3

$\mathcal{U}$ birim diskinin $m \geq 1$ tam sayısı için $\mathcal{H}(m)$ fonksiyonu altındaki $f(\mathcal{U})$ görüntüsünü konveks bir bölge üzerine dönüştüren bu fonksiyonların sınıfı m -katlı harmonik konveks fonksiyon sınıfı olarak adlandırılır. Bu fonksiyonların sınıfı $\mathcal{KH}(m)$ ile sembolize edilir.

h ve g fonksiyonları (3.2) eşitliğinde verilen fonksiyonlar, $z = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ve $0 \leq r \leq 1$ olsun. $f = h + \bar{g} \in \mathcal{KH}(m)$ olması için

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \arg \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \arg f(re^{i\theta}) \right) \right\} \geq 0 \quad (3.3)$$

ifadesinin sağlanması yeterli ve gereklidir (Clunie ve Sheil-Small, 1984).

(3.3) eşitsizliğinin sağ tarafındaki “0” yerine “ α ” ($0 \leq \alpha < 1$) alındığında α -mertebe m -katlı harmonik konveks fonksiyonlar sınıfı elde edilir. Bu sınıf $\mathcal{KH}(m, \alpha)$ ile sembolize edilir. Buradan

$$\mathcal{KH}(1, 0) = \mathcal{KH}$$

olduğu açıktır.

Tanım 3.3.4

$m \geq 1$ olmak üzere, $\mathcal{U}$ birim diskini orijine göre yıldızlı bir bölgeye görüntülleyen $f \in \mathcal{H}(m)$ fonksiyonu m -katlı harmonik yıldızlı fonksiyon sınıfı olarak adlandırılır ve bu sınıf kısaca $\mathcal{JH}^*(m)$ ile sembolize edilir.

h ve g fonksiyonları (3.2) eşitliğinde verilen fonksiyonlar, $z = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ve $0 \leq r \leq 1$ olsun. $f = h + \bar{g} \in \mathcal{JH}^*(m)$ olması için

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\arg f(re^{i\theta}) \right) \geq 0 \quad (3.4)$$

eşitsizliğinin sağlanması yeterli ve gereklidir (Sheil-Small, 1990).

(3.4) eşitsizliğinin sağ tarafındaki “0” yerine “ α ” ($0 \leq \alpha < 1$) alındığında α -mertebe m -katlı harmonik yıldızlı fonksiyon sınıfı elde edilir ve $\mathcal{JH}^*(m, \alpha)$ ile sembolize edilir. Bu tanımdan

$$\mathcal{H}^*(1,0) = \mathcal{H}^*$$

yazılabilir.

3.4 Subordinasyon Prensibi

Kompleks kalkülüsde önemli bir yere sahip subordinasyon prensibi; Schwarz fonksiyonunun genelleştirilmesi ile elde edilir. Subordinasyon prensibi geometrik fonksiyonlar teorisinde bir çok önemli sonucun kanıtlanmasına önemli katkılar sağlamıştır. Bu kavram ilk kez 1909 yılında Lindelöf tarafından kullanılmıştır. Daha sonraki dönemlerde Littlewood (1925) ile Rogosinski (1943) önemli araştırmalar yaparak subordinasyon prensibinin temel bağıntılarını ortaya çıkarmışlardır. Son dönemlerde birçok araştırmacı subordinasyon kavramını içeren çalışmalar yapmıştır.

Maksimum prensibinin basit ama önemli sonuçlarından biri Schwarz lemmasıdır.

$\frac{f(z)}{z}$ ifadesine maksimum prensibi uygulanırsa Schwarz lemması elde edilir.

Schwarz lemması basit bağlantılı bölgelerde ekstremal fonksiyon problemlerinin çözümünde kullanılır.

Tanım 3.4.1 (Schwarz Lemması)

ω fonksiyonu, $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik ve $\omega(0)=0$ olmak üzere $|\omega(z)| < 1$ şartı sağlanıyorsa $|\omega'(0)| \leq 1$ ve $|\omega(z)| \leq z$ olur. Eşitlik durumu yalnızca $\theta \in \mathbb{R}$ ve $\omega(z) = e^{i\theta} z$ fonksiyonu için sağlanır.

$\mathcal{U}$ birim diskte Schwarz lemması şartına uyan fonksiyon **Schwarz fonksiyonu** olarak adlandırılır (Ponnusamy ve Silverman, 2006).

Teorem 3.4.2 (Subordinasyon Prensibi)

$\mathcal{U}$ birim diskte g fonksiyonu ünivalent ve analitik, f fonksiyonu da analitik olmak üzere $f \prec g$ olması için yeterli ve gerekli koşul

$$f(z) = g(\omega(z))$$

şartını sağlayan bir ω Schwarz fonksiyonu olmasıdır. Bu durumda f fonksiyonu g fonksiyonuna subordinatedir denir. Bu ifade $f \prec g$ şeklinde gösterilir.

Bu teoremden en önemli durum, subordinate olunan g fonksiyonunun ünivalent olmasıdır. Bu durumda

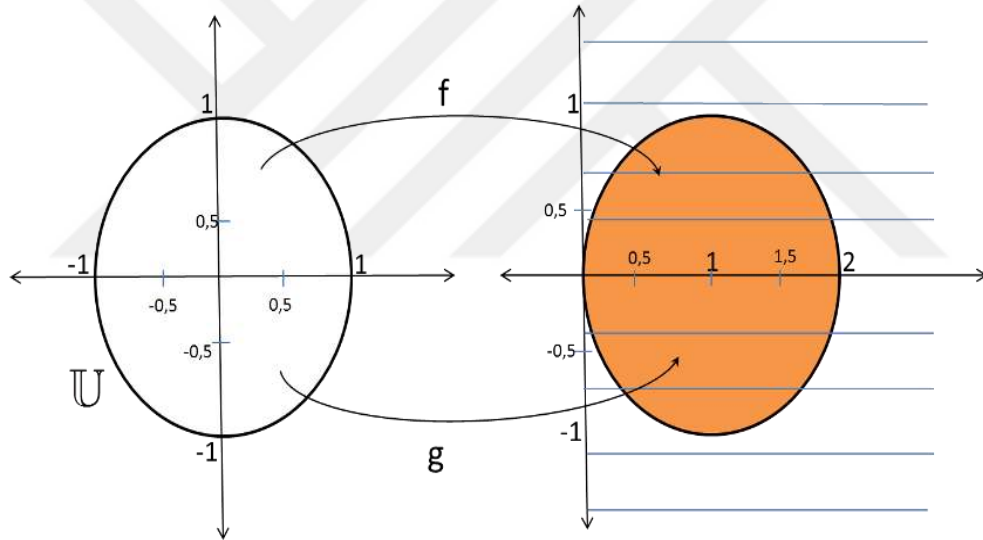
$$f \prec g \Leftrightarrow f(0) = g(0) \text{ ve } f(\mathcal{U}) \subseteq g(\mathcal{U})$$

önermesi sağlanır.

Subordinasyon prensibinde temel amaç, özelliklerini bilmediğimiz bir fonksiyonu araştırabilmektir.

Pozitif kısmı reel olan tüm fonksiyonlar $g(z) = \frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonuna subordinatedir.

Aşağıdaki Şekil 3.5’de $f(z) = 1+z$ fonksiyonunun g fonksiyonuyla subordinasyon ilişkisi gösterilmiştir.



Şekil 3.5 $f(z) \prec g(z)$ Subordinasyonu

Tanım 3.4.3

$\mathcal{U}$ birim diskte f harmonik ünivalent fonksiyon olmak üzere $f(z) = g(\omega(z))$ biçiminde $\omega(0) = 0$ ve $|\omega(z)| < 1$ koşullarını gerçekleştiren ünivalent ve analitik bir ω Schwarz fonksiyonu mevcutsa f fonksiyonu g fonksiyonuna subordinatedir denir. Bu tanım, harmonik fonksiyonlar bileşke işleminde korunmadığı için ancak $\omega(z)$ analitik bir fonksiyon olduğunda tanımlıdır. Analitik fonksiyonlar için sağlayan

$$f(\mathcal{U}) \subseteq g(\mathcal{U}) \Rightarrow f \prec g$$

önermesi harmonik fonksiyonlarda sağlamaz (Miller ve Mocanu, 1981).

3.5 Hadamard Çarpımı (Konvolüsyon)

Konvolüsyon, matematikte iki fonksiyon üzerinden (f ve g) üçüncü bir fonksiyon ($f * g$) üretme işlemidir. Konvolüsyon ifadesi hem sonuç fonksiyonu olur hem de sonucu hesaplama sürecini açıklar. Biri y eksenine etrafında yansıtıldıktan ve kaydırıldıktan sonra iki fonksiyonun çarpımının integrali olarak tanımlanır. Grafikselsel olarak, bir fonksiyonun şeklinin diğeri tarafından nasıl değıştirildiğini ifade eder. Konvolüsyon; olasılık, istatistik, sinyal işleme, görüntü işleme, jeofizik, mühendislik, fizik ve bilgisayar bilimi gibi birçok alanda kullanılmaktadır.

Geometrik fonksiyonlar teorsinde konvolüsyon ile ünivalent ya da harmonik fonksiyonlar oluşturulabilir. Konvolüsyon ile sonuç fonksiyonunun ünivalent ya da harmonik olması garanti edilir.

Geometrik fonksiyonlar teorisinde konvolüsyon ile ilgili ilk çalışmalar 1958 senesinde Polya ve Schoenberg tarafından yapılmıştır. Polya ve Schoenberg çalışmalarında f ve g fonksiyonlarının ($f * g$) fonksiyonunda konveks olduğunu öne sürmüşlerdir. Suffridge, bu konvülosyonun ünivalent olduğunu ispatlamıştır. Ruscheweyh ve Sheil-Small 1973 senesinde, Polya ve Schoenberg'in bu çalışmasını ispatlamışlardır.

Tanım 3.5.5 (Analitik Fonksiyonların Hadamard Çarpımı)

$f_j(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{j_n} z^n$, $j = 1, 2$ biçiminde tanımlanan iki analitik fonksiyonun konvülosyonu

$$f_1(z) * f_2(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_{1_n} a_{2_n} z^n$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanımla konvolüsyon adı çarpma işleminin özelliklerini sağlar.

$f(z) = \frac{z}{1-z}$ konvolüsyon işleminde etkisiz (birim) elemandır. Tüm fonksiyonların $f(z)$ fonksiyonu ile konvolüsyonu kendisine eşittir.

Tanım 3.5.5 (Harmonik Fonksiyonların Hadamard Çarpımı)

$$f_j(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_{j_n} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{b_{j_n}} z^n$$

biçiminde tanımlanan iki harmonik fonksiyonun Hadamard çarpımı

$$f_1(z) * f_2(z) = (f_1 * f_2)(z) + \sum_{n=2}^{\infty} a_{1_n} a_{2_n} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{b_{1_n} b_{2_n}} z^n$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.5.6

$f_1, f_2 \in \mathcal{H}(m)$ fonksiyonları için

$$f_k(z) = z^m + \sum_{n=2}^{\infty} a_{k,n+m-1} z^{n+m-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{b_{k,n+m-1}} z^{n+m-1}, \quad k = 1, 2$$

Hadamard çarpımı

$$(f_1 * f_2)(z) = z^m + \sum_{n=2}^{\infty} a_{1,n+m-1} a_{2,n+m-1} z^{n+m-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{b_{1,n+m-1} b_{2,n+m-1}} z^{n+m-1}$$

biçiminde tanımlanır (Goodman, 1983).

3.6 Salagean Operatörü

1983 yılında Salagean doktora tezinde Salagean operatörünü tanımlamıştır. Daha sonra birçok araştırmacı bu operatörü kullanarak farklı parametrelerle yeni operatörler tanımlamış ve bunların yardımıyla yeni teorem ve sonuçlar bulmuşlardır.

Tanım 3.6.1

Analitik bir f fonksiyonunun Salagean operatörü

$$\mathcal{D}^0 f(z) = f(z)$$

$$\mathcal{D}^1 f(z) = z f'(z)$$

$$\mathcal{D}^2 f(z) = \mathcal{D}(\mathcal{D}f(z)) = \mathcal{D}(zf'(z)) = zf'(z) + z^2 f''(z)$$

.

.

.

$$\mathcal{D}^\rho f(z) = \mathcal{D}(\mathcal{D}^{\rho-1} f(z)), \quad \rho = 1, 2, \dots (m \in \mathbb{N})$$

olmak üzere

$$\mathcal{D}^\kappa f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} n^\kappa a_n z^n$$

biçiminde tanımlanmıştır.

2002 yılında Jahangiri ve ark. $f = h + \bar{g} \in \mathcal{SH}$ için modifiye edilmiş Salagean operatörünü

$$\mathcal{D}^\kappa h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} n^\kappa a_n z^n \quad \text{ve} \quad \mathcal{D}^\kappa g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^\kappa b_n z^n$$

olmak üzere

$$\mathcal{D}^\kappa f(z) = \mathcal{D}^\kappa h(z) + (-1)^\kappa \overline{\mathcal{D}^\kappa g(z)}$$

biçiminde tanımlanmıştır.

h ve g , (3.2) de verilen çok değişkenli harmonik fonksiyonlar olmak üzere $f \in \mathcal{H}(m)$ fonksiyonunun Salagean operatörü benzer biçimde

$$D^\kappa h(z) = z^m + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+m-1}{m} \right)^\kappa a_{n+m-1} z^{n+m-1}$$

ve

$$D^\kappa g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+m-1}{m} \right)^\kappa b_{n+m-1} z^{n+m-1}$$

olmak üzere

$$D^\kappa f(z) = D^\kappa h(z) + (-1)^\kappa \overline{D^\kappa g(z)}; \quad m > \kappa$$

biçiminde yazmak mümkündür.

3.7 q -Benzer

Evrende meydana gelen olaylar sürekli ve kesikli olarak iki şekilde incelenebilir. Sesin yayılması, ışığın yayılması, nüfus değişimi, serbest düşme gibi olaylar sürekli olaylar iken; canlıların üremesi, doğal afetler gibi olaylar ise kesiklidir. Sürekli olaylar matematik ile modelleştirildiğinde farklı türlerde diferansiyel denklemler elde edilir. Bu denklemler sürekli kalkülüsün temel teorisinde limit, türev ve integral yardımıyla incelenir. Kesikli olayların modellenmesinde ise, fark denklemleri oluşur. İşte bu fark denklemlerini oluşturmak için kesikli kalkülüse ihtiyaç vardır. Kesikli kalkülüs diğer adıyla quantum kalkülüsü, kısaca q -kalkülüs adıyla limitsiz kalkülüs olarak da tanımlanır. q -kalkülüsün temelleri 400 yıl öncesine Leonhard Euler'e kadar uzanmaktadır. Ancak modern anlamda q -kalkülüsün başlangıcı 1910 yılında John Jackson'ın q -türev ve q -integrali tanımladığı çalışmalarıdır. Son yıllarda q -kalkülüs birçok alanda kullanılmıştır. Matematikte kombinatorik, sayılar teorisi, ortogonal polinomlar, özel fonksiyonlar, Lie cebirleri gibi daha birçok alanın yanı sıra; fizikte, kuantum mekaniği, kuantum fiziği, genel rölativite, sicim teorisi, kuantum kromodinamiği, moleküler ve nükleer spektroskopi gibi birçok alanda q -kalkülüs yoğun biçimde kullanılmaktadır. Ayrıca q -kalkülüs, bilgisayar bilimleri gibi bazı uygulamalı alanlarda da geniş bir kullanım alanına sahiptir.

Kısaca kalkülüsden, q -kalkülüse geçişi ve tanımları inceleyelim;

f fonksiyonu sürekli ve $z \rightarrow z_0$ iken

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (3.5)$$

ifadesinin limiti f fonksiyonunun $z = z_0$ noktasındaki türevi olarak adlandırılır.

(3.5) ifadesinde $q \neq 1$ ve $h \neq 0$ sabit olmak üzere $z = qz_0$ ya da $z = z_0 + h$ yazıldığında bu ifadenin limiti alınmaz ise q -kalkülüs ve h -kalkülüs alanına geçiş yapmış oluruz.

Buna göre $z = qz_0$ için (3.5) ifadesi

$$D_q f(z_0) = \frac{f(qz_0) - f(z_0)}{(q-1)z_0}$$

biçiminde yazılır. Bu ifade f 'nin q -türevi ya da türevinin q -benzeri olarak adlandırılır.

Eğer f fonksiyonu sürekli ve (3.5) ile verilen ifadenin limiti varsa

$$\lim_{q \rightarrow 1} \mathcal{D}_q f(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{D}_h f(z_0) = \left. \frac{df}{dz} \right|_{z=z_0} = f'(z_0)$$

elde edilir. q -kalkülüsün gelişmesi ile yeni birçok önemli kavram ve sonuçlara ulaşılmıştır.

Örnek olarak; $f_q(z) = (z - z_0)_q''$ fonksiyonunun q -türevi, $f(z) = (z - z_0)''$ fonksiyonunun kalkülüsdeki adi türevi gibi davranır.

$f_q(z) = (z - z_0)_q''$ fonksiyonunun q -binom açılımının incelenmesi sonucu

$$(z - z_0)_q'' = (z - z_0)(z - qz_0)(z - q^2z_0) \dots (z - q^{n-1}z_0)$$

bulunur. $z=1$ için $f_q(1) = (1 - z_0)_q''$ ifadesi kombinasyonda önemli bir role sahiptir.

Bu ifade $(z_0; q)_n$ şeklinde gösterilir.

q -Taylor ifadesi 18. ve 19. yüzyıllarda matematikte önemli birçok kavramı içermektedir. q -üstel fonksiyonlar ile Euler özdeşlikleri, Gauss q -Binom formülü, q -Hipergeometrik fonksiyonlar için Heine formülü bunlardan bazılarıdır. Gauss formülü bütün önemli q -binom katsayılarının kaynağıdır. Euler özdeşlikleriyle Jacobi üçlü çarpım özdeşliği, Heine formülü ile de Ramanujan çarpım formülü elde edilebilir.

1991 yılında R. Chakrabarti ve R. Jagannathan yaptıkları çalışmada q -benzerine benzer şekilde iki parametre ile (p, q) -benzeri tanıtmışlardır. Burban ve Klimyk ise 1992 yılında (p, q) -türev, (p, q) -integrali ve (p, q) -hipergeometrik serileri tanımlamışlardır. Bunun devamında birçok araştırmacı matematik, fizik ve bilgisayar biliminde, q -kalkülüse paralel olarak (p, q) -kalkülüs ile ilgili yeni çalışmalar gerçekleştirmişlerdir.

Tanım 3.7.1

$n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere

$$[n]_q = \frac{1-q^n}{1-q} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$$

ifadesine bir n sayısının q -benzeri denir. Bu ifade $[n, q]$ veya $[n]_q$ şeklinde gösterilir (Kac ve Cheung 2002).

Bu ifade q -analog veya q -genişlemesi olarak da adlandırılmaktadır.

$q \rightarrow 1$ olduğunda $[n]_q \rightarrow n$ olur.

Yukarıdaki tanımda n yerine sırasıyla 0 ve 1 yazıldığında $[0]_q = 0$ ve $[1]_q = 1$ olduğu görülmektedir.

$$n=2 \text{ için } [2]_q = \frac{1-q^2}{1-q} = 1+q \text{ çıkar.}$$

$$n=3 \text{ için } [3]_q = \frac{1-q^3}{1-q} = 1+q+q^2 \text{ çıkar.}$$

Yukarıdaki ifadelerde $q \rightarrow 1$ olduğunda $[2]_1 = 2$ ve $[3]_1 = 3$ olduğu görülmektedir.

q -benzeri ifadesini herhangi reel veya kompleks α sayısı için de tanımlamak mümkündür.

Herhangi bir α sayısının q -benzeri

$$[\alpha]_q = \frac{q^\alpha - 1}{q - 1}$$

şeklinde tanımlanır. Bu eşitlikte $[\alpha]_q$ ifadesi $\alpha \rightarrow \infty$ için

$$[\infty] = \frac{1}{1-q} \text{ şeklinde tanımlanır.}$$

Tanım 3.7.2

$n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere

$$[n]! = \begin{cases} 1 & ; n = 0 \\ [n] \cdot [n-1] \dots [2] \cdot [1] & ; n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

ifadesine $n!$ in q -benzeri denir.

$q \rightarrow 1$ için $\lim_{q \rightarrow 1} [n]_q! = n!$ çıkar.

Tanım 3.7.3 (q -Binom Katsayısı)

$r \in \mathbb{N}$ ve $\binom{n}{r}$ binom katsayısı olmak üzere;

$$\left[\begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right]_q = \frac{[n]_q!}{[r]_q! \cdot [n-r]_q!}$$

ifadesine q -binom katsayısının q -benzeri denir. Yukarıdaki ifadede $q \rightarrow 1$ durumu

$\binom{n}{r}$ binom katsayısına indirgenir.

Tanım 3.7.4 (q -Diferansiyel)

Bir f fonksiyonunun q -diferansiyeli aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$d_q f(z) = f(qz) - f(z)$$

Tanım 3.7.5 (q -Türev)

Bir f fonksiyonunun q -türevi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\mathcal{D}_q f(z) = \frac{f(qz) - f(z)}{(q-1)z}, \quad z \neq 0$$

$z = 0$ noktası için f fonksiyonunun q -türevi $f'(z)$ olarak tanımlanır (Kac ve Cheung 2002).

f diferansiyellenebilir fonksiyonu için $q \rightarrow 1$ iken

$$\lim_{q \rightarrow 1} \mathcal{D}_q f(z) = \frac{df(z)}{dz} = f'(z)$$

olur.

Ayrıca $f \in \mathcal{A}$ olmak üzere, $q \in (0,1)$

$$\mathcal{D}_q f(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} [n]_q a_n z^{n-1}$$

şeklinde de yazılabilir. $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonunun 2. mertebeden türevi ise

$$\mathcal{D}_q^2 = \mathcal{D}_q \left(\mathcal{D}_q f(z) \right) = \sum_{n=2}^{\infty} [n]_q [n-1]_q a_n z^{n-2}$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek olarak; $g(z) = z''$ olsun. g' kalkülüsdeki adi türevi göstermek üzere,

$$\mathcal{D}_q(g(z)) = \mathcal{D}_q(z'') = [n]_q z^{n-1} = g'(z),$$

klasik kalkülüsdeki $n \in \mathbb{N}^+$ sayısı ile q - kalkülüsdeki $[n]_q$ sayısının limiti söz konusu olduğunda aynı rolü oynadığı görülmektedir.

Tanım 3.7.6

Yüksek mertebeden q -türev, $\mathcal{D}_q^{\mathcal{K}}[f(z)]$ şeklinde gösterilir.

$\mathcal{K} = 0$ için $\mathcal{D}_q^0[f(z)] = f(z)$ dir.

$\mathcal{K}$ nin sonraki değerleri için $\mathcal{D}_q^{\mathcal{K}}[f(z)] = \mathcal{D}_q^{\mathcal{K}-1}[\mathcal{D}_q f(z)]$ eşitliği sağlanır.

Herhangi bir f fonksiyonunun $\mathcal{K}$. mertebeden türevi

$$\mathcal{D}_q^{\mathcal{K}}[f(z)] = (q-1)^{-\mathcal{K}} x^{-\mathcal{K}} q^{-\binom{\mathcal{K}}{2}} \sum_{n=0}^{\mathcal{K}} \begin{bmatrix} \mathcal{K} \\ n \end{bmatrix}_q (-1)^n q^{\binom{\mathcal{K}}{2}} f(q^{\mathcal{K}-n} z), \quad \{q^n z, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \mathcal{K}\}$$

şeklinde hesaplanabilir.

Tanım 3.7.7

$(x-c)''$ nin q -benzeri

$$(x-c)''_q = \begin{cases} 1 & ; n = 0 \\ (x-c)(x-qc)(x-q^2c) \dots (x-q^{n-1}c) & ; n \geq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. $z = 1$ alındığında aşağıdaki ifade elde edilir:

$$(x-c)_q^n = \begin{cases} 1 & ; n=0 \\ (c;q)_n & ; n \geq 1. \end{cases}$$

Tanım 3.7.8 (q -Taylor açılımı)

(s,t) aralığında f sürekli bir fonksiyon ve $c \in [s,t]$ olsun. f fonksiyonunun n . dereceden q -Taylor açılımı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_q^n f(c) \frac{(z-c)_q^n}{[n]_q!}$$

(Kac ve Cheung 2002).

Tanım 3.7.9

e^x fonksiyonunun q -Taylor açılımı, aşağıda verildiği gibi iki şekilde gösterilmektedir.

$$e_q^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_q!}$$

$$E_q^x = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n-1)/2} \frac{x^n}{[n]_q!}$$

Tanım 3.7.10

$\mathcal{U}$ birim diskte yerel ünivalent ve yön koruyan $f = h + \bar{g}$ fonksiyonu için $0 < q < 1$ ve $z \in \mathcal{U}$ olmak üzere ω_q ikinci dilatasyonu

$$|\omega_q(z)| = \left| \frac{\mathcal{D}_q g(z)}{\mathcal{D}_q h(z)} \right| < 1$$

eşitsizliğini sağlarsa q -harmonik olarak adlandırılır ve $\mathcal{SH}_q$ ile gösterilir. $\mathcal{SH}_q$ sınıfı için $q \rightarrow 1^-$ ise $\mathcal{SH}$ sınıfı elde edilir.

Tanım 3.7.11

$\mathcal{f} = h + \bar{g}$ fonksiyonu için

$$h(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n \quad \text{ve} \quad g(z) = (-1)^k \sum_{n=2}^{\infty} |b_n| z^n \quad (3.6)$$

şeklindeki $\mathcal{H}_q$ fonksiyonların alt sınıfı $\mathcal{H}_q^s$ ile gösterilir.

3.8 (p, q) -Benzer**Tanım 3.8.1**

$n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere

$$[n]_{p,q} = \frac{p^n - q^n}{p - q} = \sum_{r=0}^{n-1} p^{n-r-1} q^r$$

ifadesine bir n sayısının (p, q) -benzeri denir. $[n]_{p,q}$ şeklinde gösterilir. Bu ifade

(p, q) -analog olarak da adlandırılmaktadır. Tanımdan $\lim_{q \rightarrow 1^-} \lim_{p \rightarrow 1^-} [n]_{p,q} = n$ olduğu açıktır (Sadjang, 2013).

$[0]_{p,q} = 0$ ve $[1]_{p,q} = 1$ olduğu görülmektedir.

Tanım 3.8.2

$n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere

$$[n]_{p,q}! = \begin{cases} 1 & ; n = 0 \\ [n]_{p,q} \cdot [n-1]_{p,q} \cdots [2]_{p,q} \cdot [1]_{p,q} & ; n \in \mathbb{N}^+ \end{cases}$$

ifadesine $n!$ in (p, q) -benzeri denir (Sadjang, 2013).

Tanım 3.8.3

$r \in \mathbb{N}$ ve $\binom{n}{r}$ Binom katsayısı olmak üzere;

$$\left[\begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right]_{p,q} = \frac{[n]_{p,q}!}{[r]_{p,q}! \cdot [n-r]_{p,q}!}$$

ifadesine (p, q) -Binom katsayısının (p, q) -benzeri denir.

Tablo 3.1 (p, q) -Binom katsayısının ilk değerleri

$n \backslash r$	1	2	3	...
1	1			
2	$p^2 + pq + q^2$	$p^2 + pq + q^2$		
3	$p^3 + pq^2 + p^2q + q^3$	$(p^2 + pq + q^2)(p^2 + q^2)$	$p^3 + pq^2 + p^2q + q^3$	...
...	...	...	...	

Tanım 3.8.4

f fonksiyonunun (p, q) -diferansiyeli

$$d_{p,q}f(z) = f(pz) - f(qz)$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 3.8.5

f fonksiyonunun (p, q) -türevi

$$\mathcal{D}_{p,q}f(z) = \frac{d_{p,q}f(z)}{d_{p,q}z} = \frac{f(pz) - f(qz)}{(p - q)z}, \quad z \neq 0$$

biçiminde tanımlanır (Sadjang, 2013).

$z = 0$ noktası için f fonksiyonunun (p, q) -türevi $f'(z)$ olarak tanımlanır.

$p \in (0,1)$ ve $q \in (0,1)$ olmak üzere $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonun 1. türevi

$$\mathcal{D}_{p,q}f(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} [n]_{p,q} a_n z^{n-1}$$

şeklinde bulunur.

$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonun 2. türevi ise

$$\mathcal{D}_{p,q}^2 f(z) = \mathcal{D}_{p,q} \left(\mathcal{D}_{p,q} f(z) \right) = \sum_{n=2}^{\infty} [n]_{p,q} [n-1]_{p,q} a_n z^{n-2}$$

şeklinde yazılabilir. Daha yüksek mertebeden türevler de benzer şekilde bulunabilir.

Tanım 3.8.6

f , (m, n) aralığında sürekli fonksiyon olsun. $c \in [m, n]$ noktasında f fonksiyonunun n . dereceden (p, q) -Taylor açılımı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_{p,q}^n f(c) \frac{(z-c)_{p,q}^n}{[n]_{p,q}!}$$

(Sadjang, 2013).

Tanım 3.8.7

e^x fonksiyonunun (p, q) -Taylor açılımı aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.

$$e_{p,q}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_{p,q}!}$$

Tanım 3.8.8

$f = h + \bar{g}$, $\mathcal{U}$ birim diskte yerel ünivalent ve yön koruyan bir fonksiyon $0 < q < 1$, $0 < p < 1$ ve $z \in \mathcal{U}$ olmak üzere $\omega_{p,q}$ ikinci dilatasyonu

$$\left| \omega_{p,q}(z) \right| = \left| \frac{\mathcal{D}_{p,q} g(z)}{\mathcal{D}_{p,q} h(z)} \right| < 1$$

eşitsizliğini sağlarsa (p, q) -harmonik olarak adlandırılır ve $\mathcal{H}_{p,q}$ ile gösterilir. $\mathcal{H}_{p,q}$ sınıfı için $p \rightarrow 1^-$ ve $q \rightarrow 1^-$ ise $\mathcal{H}$ sınıfı elde edilir.

3.9 Poisson Dağılımı

Poisson dağılımı, belirli bir sayıda olayın belirli bir zaman diliminde meydana gelme olasılığını ölçen ayrık bir dağılımdır. Poisson dağılımı, Poisson süreçlerinin dağılımını temsil eder ve aslında Binom dağılımının sınırlayıcı bir durumudur. Poisson dağılımında süreçte meydana gelen olaylar bağımsızdır. Yani bir olay, başka bir olayın gerçekleşme ihtimalini etkilemez. Süreç içerisinde meydana gelen olay sayısı bilinmektedir. Ayrıca aynı anda iki olay meydana gelmez. Poisson dağılımı aralıklı olarak 0, 1, 2, 3... defada gerçekleşen olayların zaman, mekân, hacim ya da alanda sabit bir ihtimal ile gerçekleşme şeklini alır. Poisson dağılımına şu örnekleri verebiliriz; 1 saat içinde bir kum ocağına gelen kamyon sayısı, her 1 saatte bir çağrı

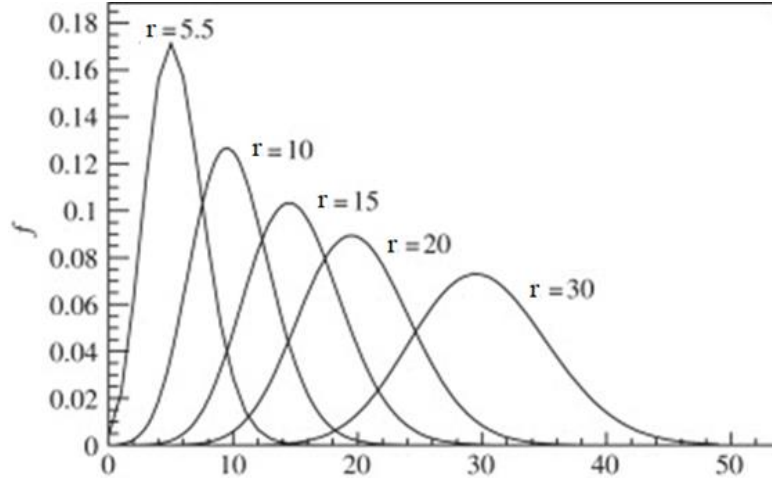
merkezin'e ulaşan arama sayısı, iki saat içerisinde bir web sayfasına yapılan bağlantı sayısı, bir benzinlikten bir saatte yakıt alan taşıt sayısı gibi.

Ayrıca finasta, Poisson dağılımı, piyasaya girilen yeni alış veya satış emirlerinin gelişini veya belirli ticaret yerlerinde emirlerin beklenen gelişini modellemek için kullanılabilir. Bu durumlarda, Poisson dağılımı, beklenen siparişlerin varış oranları etrafındaki güven sınırlarını çevreleyen beklentileri sağlamak için kullanılır. Poisson dağılımları, akıllı sipariş yönlendiricileri ve algoritmik ticaret için çok kullanışlıdır. İş adamları, işin geleceğini, büyümesini ve işin bozulmasını tahmin etmek için kullanırlar. Poisson dağılımı, biyolojide özellikle belirli bir süre sonra mutasyondaki yavru sayısını tahmin etmek için kullanılır.

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir olayın $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ sayıda meydana gelme olasılığı, r olayın ortalama gerçekleşme sayısı olmak üzere

$$P(n, r) = \frac{r^n e^{-r}}{n!}$$

şeklinde'dir. r farklı değerleri için Poisson dağılımının değerleri aşağıdaki Şekil 3.4'de görülmektedir. r değeri büyüdükçe genişlik artmaktadır.



Şekil 3.6 Farklı r değerleri için Poisson dağılımının değerleri

Poisson dağılımı bilgisayar bilimleri, istatistik, mühendislik, biyoloji, fizik, ekonomi, sağlık gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Poisson dağılımının farklı alanlardaki kullanımına aşağıdaki örneği verebiliriz.

Örnek

Batman çayında 50 yılda 1 sel baskını meydana gelmektedir. Poisson dağılımı ile $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ sel baskını meydana gelme olasılıklarını inceleyelim.

50 yılda meydana gelen sel baskını ortalaması 1 yani $r = 1$ dir.

$$P(50 \text{ yıl içerisinde } n \text{ tane sel baskını}) = \frac{r^n e^{-r}}{n!}$$

$$P(50 \text{ yıl içerisinde } 0 \text{ tane sel baskını}) = \frac{r^0 e^{-1}}{0!} \approx 0,368$$

$$P(50 \text{ yıl içerisinde } 1 \text{ tane sel baskını}) = \frac{r^1 e^{-1}}{1!} \approx 0,368$$

$$P(50 \text{ yıl içerisinde } 2 \text{ tane sel baskını}) = \frac{r^2 e^{-1}}{2!} \approx 0,184$$

Tablo 3.2 n değerleri için sel felakatinin gerçekleşme olasılıkları

n	50 yıl içerisinde n tane sel baskını
0	0,368
1	0,368
2	0,184
3	0,061
4	0,015
5	0,003
6	0,0005

Tanım 3.9.1

Bir x değişkeni r parametresi ile $x = 0, 1, 2, 3, \dots$ değerleri için Poisson açılımında sırasıyla e^{-r} , $re^{-r}/1!$, $r^2e^{-r}/2!$, $r^3e^{-r}/3!$, ... olasılıklarını alıyorsa Poisson dağılımı olarak adlandırılır.

Tanım 3.9.2

Her bir katsayısı bir Poisson dağılımının olasılıkları olan bir kuvvet serisi

$$P^r(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r^{n-1} e^{-r}}{(n-1)!} z^n$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.9.3

$$e_q^r = 1 + \frac{r}{[1]_q!} + \frac{r^2}{[2]_q!} + \dots + \frac{r^n}{[n]_q!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{[n]_q!} \quad (3.7)$$

ve r değişkeninin $r=0,1,2,3,\dots$ değerleri için sırasıyla $e_q^{-r}, \frac{r e_q^{-r}}{[1]_q!}, \frac{r^2 e_q^{-r}}{[2]_q!}, \dots$

olasılıklarını alıyorsa q -Poisson dağılımı olarak adlandırılır.

Tanım 3.9.4

Her bir katsayısı bir q -Poisson dağılımının olasılıklarını veren bir kuvvet serisi

$$P_q^r(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r^{n-1} e_q^{-r}}{[n-1]_q!} z^n \quad (z \in \mathcal{U})$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.9.5

Eğer bir r değişkeni $r=0,1,2,3,\dots$ değerleri için sırasıyla

$e_{p,q}^r, \frac{r}{[1]_{p,q}!} e_{p,q}^r, \frac{r^2}{[2]_{p,q}!} e_{p,q}^r, \frac{r^3}{[3]_{p,q}!} e_{p,q}^r$ olasılıklarını alıyorsa buna (p,q) -poisson

dağılımı denir.

$$e_{p,q}^r = 1 + \frac{r}{[1]_{p,q}!} + \frac{r^2}{[2]_{p,q}!} + \dots + \frac{r^n}{[n]_{p,q}!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{[n]_{p,q}!} \quad (3.8)$$

açılımına e^r üstel fonksiyonunun (p,q) -benzeri denir.

Matlab bilgisayar programı kullanılarak p ve q 'nun bazı özel değerleri ve

$r=1,2,3,\dots, 10$ değerleri için aşağıdaki tabloda hesaplamalar yapılmıştır.

Tablo 3.3 Bazı özel değerler için (ρ, q) -Poisson dağılımı

$[n]_{\rho, q}$	$\rho=0.1, q=0.2$	$\rho=0.3, q=0.45$	$\rho=0.5, q=0.35$	$\rho=0.92, q=0.72$
$[1]_{\rho, q}$	1	1	1	1
$[2]_{\rho, q}$	0.3000	0.7500	0.8500	1.6600
$[3]_{\rho, q}$	0.0700	0.4250	0.5475	2.0748
$[4]_{\rho, q}$	0.0150	0.2194	0.3166	2.3140
$[5]_{\rho, q}$	0.0031	0.1068	0.1733	2.4288
$[6]_{\rho, q}$	6.3×10^{-4}	0.0505	0.0919	2.4564
$[7]_{\rho, q}$	1.27×10^{-4}	0.0235	0.0478	2.4241
$[8]_{\rho, q}$	2.55×10^{-5}	0.0108	0.0245	2.3517
$[9]_{\rho, q}$	5.11×10^{-6}	0.0049	0.0125	2.2534
$[10]_{\rho, q}$	1.023×10^{-6}	0.0022	0.0063	2.1397

Tanım 3.9.6

Her bir katsayısı bir (ρ, q) -Poisson dağılımının olasılıklarını veren bir kuvvet serisi

$$P''_{\rho, q}(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\rho^{n-1} e^{-\rho}}{[n-1]_{\rho, q}!} z^n \quad (z \in \mathcal{U})$$

şeklinde tanımlanır.

Kuvvet serisinin katsayıları (ρ, q) -Poisson dağılımındaki olasılıkları verir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Yaptığımız çalışmalarda elde ettiğimiz teorem ve özellikler bu bölümde yer almaktadır.

4.1 Salagean Operatörü ile tanımlanan $\mathcal{SH}_m^{k,\delta}(\mathcal{A}, \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ Sınıfının Özellikleri

Tanım 4.1.1

(3.1) şeklinde verilen $f = h + \bar{g}$ fonksiyonu için Jahangiri tarafından modifiye edilmiş Salagean operatörü $\mathcal{D}_m^k$

$$\mathcal{D}_m^k h(z) = z^m + \sum_{n=m+1}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^k a_n z^n$$

ve

$$\mathcal{D}_m^k g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^k b_n z^n$$

olmak üzere

$$\mathcal{D}_m^k f(z) = \mathcal{D}_m^k h(z) + (-1)^k \overline{\mathcal{D}_m^k g(z)} \quad (m \geq 1, k \in \mathbb{N}_0)$$

biçiminde tanımlanmıştır.

Tanım 4.1.2

$0 \leq \delta, 0 \leq \alpha < 1, 0 \leq \mathcal{A} \leq 1, 0 < m < 1$ ve $-\mathcal{F} \leq \mathcal{L} < \mathcal{F} < 1$ olmak üzere (3.1)

biçimindeki $f \in \mathcal{SH}(m)$ için

$$\frac{\mathcal{D}_m^{k+1} f(z)}{\mathcal{A} \mathcal{D}_m^{k+1} f(z) + (1 - \mathcal{A}) \mathcal{D}_m^k f(z)} \prec \frac{m + [m\mathcal{F} + (m - \alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{F})]z}{1 + \mathcal{F}z} \quad (4.1)$$

şartı sağlanıyorsa $f \in \mathcal{SH}_m^{k,\delta}(\mathcal{A}, \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ olur.

$$h(z) = z^m - \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| z^n$$

ve

$$g(z) = (-1)^k \sum_{n=m}^{\infty} |b_n| z^n, \quad |b_m| < 1 \quad (4.2)$$

olsun. $\mathcal{H}(m)$ sınıfındaki $f = h + \bar{g}$ biçimindeki fonksiyonların alt sınıfı $\mathcal{H}_k(m)$ olmak üzere

$$\overline{\mathcal{H}}_m^{k,\delta}(\mathcal{A}, \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{E}) \equiv \mathcal{H}_m^{k,\delta}(\mathcal{A}, \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{E}) \cap \mathcal{H}_k(m)$$

dir.

Bu çalışmada Dziok'un (2015) yılındaki çalışmasında kullanılan metod yardımıyla, $\overline{\mathcal{H}}_m^{k,\delta}(\mathcal{A}, \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ sınıfına ait gerekli ve yeterli Hadamard çarpım şartlarını, distorsiyon sınırlarını, kompaktlık özelliğini ve ekstrem noktalarını bulacağız. İlk olarak $\mathcal{H}_m^{k,\delta}(\mathcal{A}, \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ sınıfındaki harmonik fonksiyonlar için gerekli ve yeterli Hadamard çarpım şartlarını inceleyelim.

Teorem 4.1.3

$f \in \mathcal{H}(m)$ olmak üzere $f \in \mathcal{H}_m^{k,\delta}(\mathcal{A}, \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} \varphi(z; \zeta) = z^m \frac{m(1 + \mathcal{E}\zeta) - (1 - \mathcal{A} + m\mathcal{A})\{m + [m\mathcal{E} + (m - \alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{E})]\zeta\} + \{(1 - m)(1 + \mathcal{E}\zeta) + (1 - \mathcal{A}m)\{m + [m\mathcal{E} + (m - \alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{E})]\zeta\}\}}{(1 - z)^2} \\ - \bar{z}^m \frac{m(1 + \mathcal{E}\bar{\zeta}) + (1 - \mathcal{A} + m\mathcal{A})\{m + [m\mathcal{E} + (m - \alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{E})]\bar{\zeta}\} + \{(1 - m)(1 + \mathcal{E}\bar{\zeta}) - (1 - \mathcal{A}m)\{m + [m\mathcal{E} + (m - \alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{E})]\bar{\zeta}\}\}}{(1 - \bar{z})^2} \end{aligned}$$

ifadesi için

$$\mathcal{D}_m^k f(z) * \Theta(z; \zeta) \neq 0, \quad (\zeta \in \square, |\zeta| = 1, z \in \mathcal{U} - \{0\})$$

olmasıdır.

İspat:

$f \in \mathcal{H}(m)$ olmak üzere $f \in \mathcal{H}_m^{k,\delta}(\mathcal{A}, \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ olması için gerekli ve yeterli şart (4.1) ifadesinin sağlanması ya da buna denk olarak

$$\frac{\mathcal{D}_m^{k+1} f(z)}{\mathcal{A} \mathcal{D}_m^{k+1} f(z) + (1 - \mathcal{A}) \mathcal{D}_m^k f(z)} \neq \frac{m + [m\mathcal{E} + (m - \alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{E})]\zeta}{1 + \mathcal{E}\zeta} \quad (4.3)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

$$\mathcal{D}_m^k f(z) = \mathcal{D}_m^k f(z) * \left(\frac{z^m}{1 - z} + \frac{\bar{z}^m}{1 - \bar{z}} \right)$$

ve

$$\mathcal{D}_m^{\kappa+1} f(z) = \mathcal{D}_m^{\kappa} f(z) * \left(\frac{z^m [m + (1-m)z]}{(1-z)^2} - \frac{\bar{z}^m [m + (1-m)\bar{z}]}{(1-\bar{z})^2} \right)$$

eşitlikleri (4.3) eşitsizliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & (1 + \mathcal{E}\zeta) \mathcal{D}_m^{\kappa+1} f(z) - \left\{ m + [m\mathcal{E} + (m-\alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{E})] \zeta \right\} \left\{ \mathcal{A} \mathcal{D}_m^{\kappa+1} f(z) + (1 - \mathcal{A}) \mathcal{D}_m^{\kappa} f(z) \right\} \\ &= \mathcal{D}_m^{\kappa} h(z) * \left\{ 1 + \mathcal{E}\zeta - \mathcal{A} \left\{ m + [m\mathcal{E} + (m-\alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{E})] \zeta \right\} \right\} \frac{z^m [m + (1-m)z]}{(1-z)^2} \\ & \quad - (1 - \mathcal{A}) \left\{ m + [m\mathcal{E} + (m-\alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{E})] \zeta \right\} \frac{\bar{z}^m}{1-\bar{z}} \\ & \quad - (-1)^{\kappa} \mathcal{D}_m^{\kappa} \overline{g(z)} * \left\{ 1 + \mathcal{E}\zeta - \mathcal{A} \left\{ m + [m\mathcal{E} + (m-\alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{E})] \zeta \right\} \right\} \frac{\bar{z}^m [m + (1-m)\bar{z}]}{(1-\bar{z})^2} \\ & \quad + (1 - \mathcal{A}) \left\{ m + [m\mathcal{E} + (m-\alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{E})] \zeta \right\} \frac{\bar{z}^m}{1-\bar{z}} \\ &= \mathcal{D}_m^{\kappa} f(z) * \Theta(z; \zeta) \neq 0 \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

Şimdi de $\mathcal{H}_m^{\kappa, \delta}(\mathcal{A}, \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ sınıfı için yeterli katsayı şartını bulalım.

Teorem 4.1.4

$f = h + \bar{g}$ (3.1) formunda verilen bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\varphi_n = (1 - \mathcal{A}m + \mathcal{E})n - (1 - \mathcal{A})m - (\mathcal{A}mn + 1 - \mathcal{A})[m\mathcal{E} + (m - \alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{E})] \quad (4.4)$$

ve

$$\psi_n = (1 - \mathcal{A}m + \mathcal{E})n + (1 - \mathcal{A})m + (\mathcal{A}mn + 1 - \mathcal{A})[m\mathcal{E} + (m - \alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{E})] \quad (4.5)$$

için

$$\sum_{n=m}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^{\kappa} \left(\varphi_n |a_n| + \psi_n |b_n| \right) \leq 2 \left\{ m(\mathcal{A} - \mathcal{A}m + \mathcal{E}) + (\mathcal{A}m^2 + \mathcal{A} - 1)[m\mathcal{E} + (m - \alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{E})] \right\} \quad (4.6)$$

oluyorsa $f \in \mathcal{H}_m^{\kappa, \delta}(\mathcal{A}, \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ olur.

İspat:

Teoremi ispatlamak için (4.6) koşulu sağlandığında $\mathbf{f} \in \mathcal{H}_m^{k,\delta}(\mathcal{d}, \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ olması için gerek ve yeter şart $z \in \mathcal{U}$ için

$$\frac{\mathcal{D}_m^{\kappa+1} \mathbf{f}(z)}{\mathcal{d} \mathcal{D}_m^{\kappa+1} \mathbf{f}(z) + (1-\mathcal{d}) \mathcal{D}_m^{\kappa} \mathbf{f}(z)} \neq \frac{m + [m\mathcal{F} + (m-\alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{F})] \omega(z)}{1 + \mathcal{F} \omega(z)}$$

şeklinde, $\omega(0)=0$ eşitliğini ve $|\omega(z)| < 1$ eşitsizliğini sağlayan kompleks değerli bir $\omega(z)$ fonksiyonunun varlığını ispatlamalıyız. Ya da buna denk olarak

$$\left| \frac{(1-\mathcal{d}m) \mathcal{D}_m^{\kappa+1} \mathbf{f}(z) - (1-\mathcal{d}) m \mathcal{D}_m^{\kappa} \mathbf{f}(z)}{\left\{ \mathcal{d}m [m\mathcal{F} + (m-\alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{F})] - \mathcal{F} \right\} \mathcal{D}_m^{\kappa+1} \mathbf{f}(z) + (1-\mathcal{d}) [m\mathcal{F} + (m-\alpha)(\mathcal{F} - \mathcal{L})] \mathcal{D}_m^{\kappa} \mathbf{f}(z)} \right| < 1 \quad (4.7)$$

olduğunu göstermeliyiz.

(4.7) eşitsizliğinde $\mathcal{D}_m^{\kappa} h$ ve $\mathcal{D}_m^{\kappa} g$ fonksiyonları yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \left| (1-\mathcal{d}m) \mathcal{D}_m^{\kappa+1} \mathbf{f}(z) - (1-\mathcal{d}) m \mathcal{D}_m^{\kappa} \mathbf{f}(z) \right| \\ & - \left| \left\{ \mathcal{d}m [m\mathcal{F} + (m-\alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{F})] - \mathcal{F} \right\} \mathcal{D}_m^{\kappa+1} \mathbf{f}(z) + (1-\mathcal{d}) [m\mathcal{F} + (m-\alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{F})] \mathcal{D}_m^{\kappa} \mathbf{f}(z) \right| \\ & = \left| (1-\mathcal{d}m) \left\{ mz^m + \sum_{n=m+1}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^{\kappa} a_n z^n - (-1)^{\kappa+1} \sum_{n=m}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^{\kappa} \overline{b_n z^n} \right\} \right. \\ & \quad \left. - (1-\mathcal{d}) m \left\{ z^m + \sum_{n=m+1}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^{\kappa} a_n z^n + (-1)^{\kappa+1} \sum_{n=m}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^{\kappa} \overline{b_n z^n} \right\} \right| \\ & - \left| \left\{ \mathcal{d}m [m\mathcal{F} + (m-\alpha)(\mathcal{F} - \mathcal{L}) - \mathcal{F}] \right\} \left\{ mz^m + \sum_{n=m+1}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^{\kappa} a_n z^n - (-1)^{\kappa+1} \sum_{n=m}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^{\kappa} \overline{b_n z^n} \right\} \right. \\ & \quad \left. + (1-\mathcal{d}) [m\mathcal{F} + (m-\alpha)(\mathcal{F} - \mathcal{L}) - \mathcal{F}] \left\{ z^m + \sum_{n=m+1}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^{\kappa} a_n z^n - (-1)^{\kappa+1} \sum_{k=m}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^{\kappa} \overline{b_n z^n} \right\} \right| \\ & \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^{\kappa} \left\{ (1-\mathcal{d}m + \mathcal{F})n - (1-\mathcal{d})m - (\mathcal{d}mn - \mathcal{d} + 1) [m\mathcal{F} + (m-\alpha)(\mathcal{F} - \mathcal{L})] \right\} |a_n| |z^n| \\ & + \sum_{n=m}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^{\kappa} \left\{ (1-\mathcal{d}m + \mathcal{F})n + (1-\mathcal{d})m + (\mathcal{d}mn - \mathcal{d} + 1) [m\mathcal{F} + (m-\alpha)(\mathcal{F} - \mathcal{L})] \right\} |b_n| |z^n| \\ & - \left\{ m(\mathcal{d} - \mathcal{d}m + \mathcal{F}) + (\mathcal{d}m^2 + \mathcal{d} - 1) [m\mathcal{F} + (m-\alpha)(\mathcal{F} - \mathcal{L})] \right\} |z^m| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| z^m \right| \left\{ \sum_{n=m+1}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^k \left\{ (1 - dm + \mathcal{E})n - (1 - d')m - (dmn - d' + 1) [m\mathcal{E} + (m - \alpha)(\mathcal{E} - \mathcal{L})] \right\} |a_n| \left| z^{n-m} \right| \right. \\
& + \sum_{n=m+1}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^k \left\{ (1 - dm + \mathcal{E})n + (1 - d')m + (dmn - d' + 1) [m\mathcal{E} + (m - \alpha)(\mathcal{E} - \mathcal{L})] \right\} |b_n| \left| z^{n-m} \right| \\
& \left. - \left\{ m(d' - dm + \mathcal{E}) + (dm^2 + d' - 1) [m\mathcal{E} + (m - \alpha)(\mathcal{E} - \mathcal{L})] \right\} \right\} < 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=m}^{\infty} |y_n| = 1 \text{ ve } |x_m| = 1$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
f(z) &= z^m + \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{m}{m + (n-m)\delta} \right)^k \frac{m(d' - dm + \mathcal{E}) + (dm^2 + d' - 1) [m\mathcal{E} + (m - \alpha)(\mathcal{E} - \mathcal{L})]}{\varphi_n} x_n z^n \\
&+ \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{m}{m + (n-m)\delta} \right)^k \frac{m(d' - dm + \mathcal{E}) + (dm^2 + d' - 1) [m\mathcal{E} + (m - \alpha)(\mathcal{E} - \mathcal{L})]}{\psi_n} y_n z^n \quad (4.8)
\end{aligned}$$

ile verilen harmonik fonksiyonuna göre (4.6) eşitsizliği ile verilen katsayıların kesin olduğu görülür. (4.8) ile verilen formdaki fonksiyonlar $\overline{\mathcal{H}}_m^{k,\delta}(d', \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ sınıfındadır. Böylece

$$\sum_{n=m}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^k [\varphi_n |a_n| + \psi_n |b_n|] = \left\{ m(d' - dm + \mathcal{E}) + (dm^2 + d' - 1) [m\mathcal{E} + (m - \alpha)(\mathcal{E} - \mathcal{L})] \right\} \sum_{n=m}^{\infty} (|x_n| + |y_n|)$$

olur.

Şimdi de (4.6) ile verilen sınırların $\overline{\mathcal{H}}_m^{k,\delta}(d', \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ sınıfı için de gerekli olduğunu gösterelim.

Teorem 4.1.5

$f = h + \bar{g}$ (4.2) formunda verilen bir fonksiyon olmak üzere $f \in \overline{\mathcal{H}}_m^{k,\delta}(d', \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ olması için gerek ve yeter şart (4.6) eşitsizliğindeki katsayı şartının sağlanmasıdır.

İspat:

Teorem 4.1.4'den eğer (4.6) şartı sağlanmazsa $f \notin \overline{\mathcal{H}}_m^{k,\delta}(d', \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. (4.2) formunda verilen $f = h + \bar{g}$ fonksiyonunun

$\overline{\mathcal{H}}_m^{k,\delta}(\mathcal{A}, \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ sınıfında yer alması için gerek ve yeter şart (4.6) daki katsayı şartının sağlanmasıdır. Buna denk olarak

$$H(z) = z^m m\mathcal{A}(1-m) + \sum_{n=m+1}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^k \left\{ (1 - \mathcal{A}n) - (1 - \mathcal{A})m \right\} |a_n| z^n \\ + \sum_{n=m}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^k \left\{ (1 - \mathcal{A}n) + (1 - \mathcal{A})m \right\} |b_n| \bar{z}^n$$

ve

$$G(z) = z^m \left\{ [m\mathcal{E} + (m - \alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{E})](\mathcal{A}m^2 - \mathcal{A} + 1) - m\mathcal{E} \right\} \\ + \sum_{n=m+1}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^k \left\{ (\mathcal{A}mn + \mathcal{A} - 1)[m\mathcal{E} + (m - \alpha)(\mathcal{E} - \mathcal{L})] + \mathcal{E}n \right\} |a_n| z^n \\ + \sum_{n=m}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^m \left\{ (\mathcal{A}mn - \mathcal{A} + 1)[m\mathcal{E} + (m - \alpha)(\mathcal{E} - \mathcal{L})] + \mathcal{E}n \right\} |b_n| \bar{z}^n$$

olmak üzere

$$\left| \frac{H(z)}{G(z)} \right| < 1$$

olmalıdır.

$z = r < 1$ için,

$$\left\{ m(\mathcal{A} - \mathcal{A}m) + \sum_{n=m+1}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^k \left\{ (1 - \mathcal{A}n) - (1 - \mathcal{A})m \right\} |a_n| z^{n-m} \right. \\ \left. + \sum_{n=m}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^k \left\{ (1 - \mathcal{A}n) + (1 - \mathcal{A})m \right\} |b_n| \bar{z}^{n-m} \right\} \\ \times \left\{ [m\mathcal{E} + (m - \alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{E})](\mathcal{A}m^2 - \mathcal{A} + 1) - m\mathcal{E} \right. \\ \left. + \sum_{n=m+1}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^k \left\{ (\mathcal{A}mn + \mathcal{A} - 1)[m\mathcal{E} + (m - \alpha)(\mathcal{E} - \mathcal{L})] + \mathcal{E}n \right\} |a_n| z^{n-m} \right. \\ \left. + \sum_{n=m}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^k \left\{ (\mathcal{A}mn - \mathcal{A} + 1)[m\mathcal{E} + (m - \alpha)(\mathcal{E} - \mathcal{L})] + \mathcal{E}n \right\} |b_n| \bar{z}^{n-m} \right\}^{-1} < 1 \quad (4.9)$$

olur.

Eğer (4.6) şartı sağlanmazsa, (4.9) şartı 1'e yeteri kadar yakın bir r' değeri için sağlanmaz. Bundan dolayı $(0,1)$ aralığında, (4.9) şartı için 1'den büyük bir $z_0 = r_0$ vardır. Bu da $f \in \overline{\mathcal{H}}_m^{k,\delta}(\mathcal{A}, \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ için gerekli koşul ile çelişir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.6

Eğer $f \in \overline{\mathcal{H}}_m^{k,\delta}(\mathcal{A}, \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ ise $|z| = r' < 1$ için

$$f(z) \leq (1 + |b_m|) r'^m + \left(\frac{m}{m+\delta} \right)^\kappa \frac{m(\mathcal{A}' - dm + \mathcal{E}) + (dm^2 - 1 + \mathcal{A}') [m\mathcal{E} + (m-\alpha)(\mathcal{L}' - \mathcal{E})] - \{m(2 - dm - \mathcal{A}' + \mathcal{E}) + (dm^2 + 1 - \mathcal{A}') [m\mathcal{E} + (m-\alpha)(\mathcal{L}' - \mathcal{E})]\} |b_m|}{1 - dm^2 + \mathcal{E}m + \mathcal{E} - (dm^2 + dm - \mathcal{A}' + 1) [m\mathcal{E} + (m-\alpha)(\mathcal{L}' - \mathcal{E})]} |b_m| r'^{m+1}$$

ve

$$f(z) \geq (1 - |b_m|) r'^m - \left(\frac{m}{m+\delta} \right)^\kappa \frac{m(\mathcal{A}' - dm + \mathcal{E}) + (dm^2 + \mathcal{A}' - 1) [m\mathcal{E} + (m-\alpha)(\mathcal{L}' - \mathcal{E})] - \{m(2 - dm - \mathcal{A}' + \mathcal{E}) + (dm^2 - \mathcal{A}' + 1) [m\mathcal{E} + (m-\alpha)(\mathcal{L}' - \mathcal{E})]\} |b_m|}{1 - dm^2 + \mathcal{E}m + \mathcal{E} - (dm^2 + dm - \mathcal{A}' + 1) [m\mathcal{E} + (m-\alpha)(\mathcal{L}' - \mathcal{E})]} |b_m| r'^{m+1}$$

eşitsizlikleri sağlar.

İspat:

Eşitsizliğin yalnızca sol taraf için ispatını yapalım. Diğer tarafı da benzer şekilde bulunur.

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq (1 - |b_m|) r'^m - \sum_{n=m+1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) r'^n \\ &\geq (1 - |b_m|) - \frac{1}{1 - dm^2 + \mathcal{E}m + \mathcal{E} - (dm^2 + dm - \mathcal{A}' + 1) [m\mathcal{E} + (m-\alpha)(\mathcal{L}' - \mathcal{E})]} \left(\frac{m}{m+\delta} \right)^\kappa \sum_{n=m+1}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^\kappa (\varphi_n |a_n| + \psi_n |b_n|) r'^{n+1} \\ &\geq (1 - |b_m|) r'^m \\ &\quad - \left(\frac{m}{m+\delta} \right)^\kappa \frac{m(\mathcal{A}' - dm + \mathcal{E}) + (dm^2 + \mathcal{A}' - 1) [m\mathcal{E} + (m-\alpha)(\mathcal{L}' - \mathcal{E})] - \{m(2 - dm - \mathcal{A}' + \mathcal{E}) + (dm^2 - \mathcal{A}' + 1) [m\mathcal{E} + (m-\alpha)(\mathcal{L}' - \mathcal{E})]\} |b_m|}{1 - dm^2 + \mathcal{E}m + \mathcal{E} - (dm^2 + dm - \mathcal{A}' + 1) [m\mathcal{E} + (m-\alpha)(\mathcal{L}' - \mathcal{E})]} |b_m| r'^{m+1}. \end{aligned}$$

Teorem 4.1.7

$$h_m(z) = z^m,$$

$$h_n(z) = z^m - \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^\kappa \frac{m(d' - dm + \mathcal{E}) + (dm^2 + d' - 1)[m\mathcal{E} + (m - \alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{E})]}{\varphi_n} z^n, \quad (n = m, m+1, \dots)$$

ve

$$g_n(z) = z^m + (-1)^\kappa \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^\kappa \frac{m(d' - dm + \mathcal{E}) + (dm^2 + d' - 1)[m\mathcal{E} + (m - \alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{E})]}{\psi_n} \bar{z}^n, \quad (n = m, m+1, \dots)$$

olmak üzere $f \in \overline{\mathcal{JH}}_m^{k,\delta}(d', \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ olması için gerek ve yeter şart $x_n > 0$, $y_n > 0$ ve

$\sum_{n=m}^{\infty} (x_n + y_n)$ olmak üzere

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} (x_n h_n(z) + y_n g_n(z)),$$

olmasıdır. Burada $\overline{\mathcal{JH}}_m^{k,\delta}(d', \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ fonksiyonunun ekstrem noktaları $\{h_n\}$ ve $\{g_n\}$ dir.

İspat:

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} (x_n h_n(z) + y_n g_n(z)) \text{ olsun.}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=m}^{\infty} (x_n + y_n) z^m - \sum_{n=m+1}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^\kappa \frac{m(d' - dm + \mathcal{E}) + (dm^2 + d' - 1)[m\mathcal{E} + (m - \alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{E})]}{\varphi_n} x_n z^n \\ &+ \sum_{n=m}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^\kappa \frac{m(d' - dm + \mathcal{E}) + (dm^2 + d' - 1)[m\mathcal{E} + (m - \alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{E})]}{\varphi_n} y_n \bar{z}^n. \end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned} &\sum_{n=m+1}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^\kappa \varphi_n |a_n| + \sum_{n=m}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^\kappa \psi_n |b_n| \\ &= m(d' - dm + \mathcal{E}) + (dm^2 + d' - 1)[m\mathcal{E} + (m - \alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{E})] \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} x_n + \sum_{n=m}^{\infty} y_n \right) \\ &= m(d' - dm + \mathcal{E}) + (dm^2 + d' - 1)[m\mathcal{E} + (m - \alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{E})] (1 - x_m) \\ &\leq m(d' - dm + \mathcal{E}) + (dm^2 + d' - 1)[m\mathcal{E} + (m - \alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{E})] \end{aligned}$$

böylece $f \in \overline{\mathcal{H}}_m^{k,\delta}(\alpha, \mathcal{A}, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ dir. Tersine $f \in \overline{\mathcal{H}}_m^{k,\delta}(\alpha, \mathcal{A}, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ ise

$$|a_n| \leq \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^k \frac{m(\mathcal{A} - dm + \mathcal{E}) + (dm^2 + \mathcal{A} - 1)[m\mathcal{E} + (m - \alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{E})]}{\varphi_n}$$

$$|b_n| \leq \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^k \frac{m(\mathcal{A} - dm + \mathcal{E}) + (dm^2 + \mathcal{A} - 1)[m\mathcal{E} + (m - \alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{E})]}{\psi_n}$$

$$|a_n| \leq \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^k \frac{\varphi_n}{m(\mathcal{A} - dm + \mathcal{E}) + (m^2 \mathcal{A} + \mathcal{A} - 1)[m\mathcal{E} + (m - \alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{E})]} |a_n| \quad (n = m+1, m+2, \dots)$$

$$|b_n| \leq \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^k \frac{\psi_n}{m(\mathcal{A} - dm + \mathcal{E}) + (dm^2 + \mathcal{A} - 1)[m\mathcal{E} + (m - \alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{E})]} |b_n| \quad (n = m, m+1, \dots)$$

olur. Teorem 4.1.4 den

$$0 \leq x_n \leq 1 \quad (n = m+1, m+2, \dots)$$

ve

$$0 \leq y_n \leq 1 \quad (n = m, m+1, \dots)$$

olmak üzere

$$x_m = 1 - \sum_{n=m+1}^{\infty} x_n - \sum_{n=m}^{\infty} y_n$$

şeklinde tanımlayalım. Teorem 4.1.5 den $x_m \geq 0$ dir. Buradan

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} (x_n h_n(z) + y_n g_n(z))$$

olur ve istenilen sonuç elde edilir.

Şimdi de $\overline{\mathcal{H}}_m^{k,\delta}(\mathcal{A}, \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ sınıfının konveks kombinasyonları altında kapalı olduğunu gösterelim.

Teorem 4.1.8

$\overline{\mathcal{H}}_m^{k,\delta}(\mathcal{A}, \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ sınıfı konveks kombinasyon altında kapalıdır.

İspat:

$p = 1, 2, 3, \dots$ için

$$f_p(z) = z^m - \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_{p,n}| z^n + \sum_{n=m}^{\infty} |b_{p,n}| \bar{z}^n$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonlar için $f_p \in \overline{\mathcal{H}}_m^{k,\delta}(\mathcal{A}, \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ olsun. (4.6) dan

$$\sum_{n=m}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^k \left(\varphi_n |a_{p,n}| + \psi_n |b_{p,n}| \right) \leq 2 \left\{ m(\mathcal{A} - dm + \mathcal{F}) + (dm^2 + \mathcal{A} - 1) [m\mathcal{F} + (m - \alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{F})] \right\}$$

elde edilir.

$\sum_{p=1}^{\infty} \mu_p = 1$, ($0 \leq \mu_p \leq 1$) için, f_p nin konveks kombinasyonu

$$\sum_{p=1}^{\infty} \mu_p f_p(z) = z^m - \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} \mu_p |a_{p,n}| \right) z^n + (-1)^n \sum_{n=m}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} \mu_p |b_{p,n}| \right) \bar{z}^n$$

şeklinde yazılabilir.

Burada (4.9) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \sum_{n=m}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^k \left(\varphi_n \left(\sum_{p=1}^{\infty} \mu_p |a_{p,n}| \right) + \psi_n \left(\sum_{p=1}^{\infty} \mu_p |b_{p,n}| \right) \right) \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \mu_p \left(\sum_{n=m}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \delta \right]^k \left[\varphi_n |a_{p,n}| + \psi_n |b_{p,n}| \right] \right) \\ &\leq 2 \left\{ m(\mathcal{A} - dm + \mathcal{F}) + (dm^2 + \mathcal{A} - 1) [m\mathcal{F} + (m - \alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{F})] \right\} \sum_{p=1}^{\infty} \mu_p \\ &= 2 \left\{ m(\mathcal{A} - dm + \mathcal{F}) + (dm^2 + \mathcal{A} - 1) [m\mathcal{F} + (m - \alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{F})] \right\} \end{aligned}$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$\sum_{p=1}^{\infty} \mu_p f_p(z) \in \overline{\mathcal{H}}_m^{k,\delta}(\mathcal{A}, \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{F}) \text{ dir.}$$

4.2 q -operatörü ile Tanımlanan $\mathcal{H}_q^k(\mathcal{A}, \delta, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ Sınıfının Özellikleri

Bu bölümde, Dziok'un 2015 yılındaki çalışmalarında kullanılan metod yardımıyla $\mathcal{TH}_q^k(\mathcal{A}, \delta, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ sınıfına ait gerekli ve yeterli Hadamard çarpım şartlarını, distorsiyon sınırlarını, kompaktlık ve ekstrem noktalarını bulacağız.

Bu bölümde bulduğumuz sonuç ve teoremler "Bulletin of the International Mathematical Virtual Institute" dergisinde yayınlanmıştır (Canbulat ve Ark, 2024).

Tanım 4.2.1

$f \in \mathcal{H}$, $k \in \mathbb{N} \cup 0$, $n \geq 1$, $0 < q < 1$ ve

$$\mathcal{D}_q^k h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} [n]_q^k a_n z^n, \quad \mathcal{D}_q^k g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} [n]_q^k b_n z^n \text{ şeklinde tanımlanan fonksiyonlar}$$

için $f(z) = h + \bar{g}$ fonksiyonunun k . mertebeden türevleri

$$\mathcal{D}_q^0 f(z) = f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$$

$$\mathcal{D}_q^1 f(z) = \mathcal{D}_q^1 h(z) - \overline{\mathcal{D}_q^1 g(z)} = z \partial_q h(z) - \overline{z \partial_q g(z)}$$

.

.

.

$$\mathcal{D}_q^k f(z) = \mathcal{D}_q^k h(z) + (-1)^k \overline{\mathcal{D}_q^k g(z)} = z \partial_q \left(\mathcal{D}_q^{k-1} h(z) \right) + (-1)^k \overline{z \partial_q \left(\mathcal{D}_q^{k-1} g(z) \right)}$$

biçiminde tanımlanabilir.

Tanım 4.2.2

$0 \leq \delta < 1$, $0 \leq \mathcal{A} \leq 1$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < q < 1$, $-\mathcal{F} \leq \mathcal{L} < \mathcal{F} < 1$ ve $\mathcal{K} = 1 + \mathcal{L} + (\mathcal{F} - \mathcal{L})\delta$ olmak üzere (3.1) biçimindeki $f \in \mathcal{H}_q$ fonksiyonu için

$$\frac{\mathcal{D}_q^{k+1} f(z)}{\mathcal{A} \mathcal{D}_q^{k+1} f(z) + (1 - \mathcal{A}) \mathcal{D}_q^k f(z)} \prec (1 - \delta) \frac{1 + \mathcal{L}z}{1 + \mathcal{F}z} + \delta = \frac{1 + [\mathcal{K} + (\mathcal{F} - \mathcal{K})\delta]z}{1 + \mathcal{F}z} \quad (4.10)$$

şartı sağlanıyorsa $f \in \mathcal{H}_q^k(\mathcal{A}, \delta, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ olur. Ayrıca $f = h + \bar{g}$ fonksiyonları (3.6)

da verilen $\mathcal{TH}_q$ fonksiyonlarının alt sınıfı olmak üzere

$$\mathcal{TH}_q^k(\mathcal{A}, \delta, \mathcal{L}, \mathcal{F}) \equiv \mathcal{H}_q^k(\mathcal{A}, \delta, \mathcal{L}, \mathcal{F}) \cap \mathcal{TH}_q$$

biçiminde tanımlanır.

İlk olarak $\mathcal{H}_q^k(\mathcal{A}, \delta, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ sınıfındaki harmonik fonksiyonlara ait gerekli ve yeterli Hadamard çarpım şartlarını inceleyelim.

Teorem 4.2.3

$f \in \mathcal{H}_q$ olsun. $f \in \mathcal{H}_q^k(\mathcal{A}, \delta, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{K} = 1 + \mathcal{L} + (\mathcal{F} - \mathcal{L})\delta$ ve

$$\Theta(z; \zeta) = \frac{(\mathcal{F} - \mathcal{L})(1 - \delta)\zeta z + (1 - \mathcal{A})\{1 + (\mathcal{K} - 1)\zeta\}qz^2}{(1 - z)(1 - qz)} \\ - \frac{\{2 + [\mathcal{L} + \mathcal{F} + (\mathcal{F} - \mathcal{L})\delta]\zeta - 2\mathcal{A}\{1 + (\mathcal{K} - 1)\zeta\}\bar{z} - (1 - \mathcal{A})\{1 + (\mathcal{K} - 1)\zeta\}q\bar{z}^2\}}{(1 - \bar{z})(1 - q\bar{z})}$$

olmak üzere

$$\mathcal{D}_q^k f(z) * \Theta(z; \zeta) \neq 0, \quad (\zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| = 1, z \in U - \{0\})$$

olmasıdır.

İspat:

$f \in \mathcal{H}_q$ olsun. $f \in \mathcal{H}_q^k(\mathcal{A}, \delta, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ olması için gerek ve yeter şart (4.10) ifadesinin sağlanması ya da buna denk olarak

$$\frac{\mathcal{D}_q^{k+1} f(z)}{\mathcal{A} \mathcal{D}_q^{k+1} f(z) + (1 - \mathcal{A}) \mathcal{D}_q^k f(z)} \neq \frac{1 + (\mathcal{K} - 1)\zeta}{1 + \mathcal{F}\zeta} \quad (\zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| = 1, z \in U - \{0\}) \quad (4.11)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

$$\mathcal{D}_q^k f(z) = \mathcal{D}_q^k f(z) * \left(\frac{z}{1 - z} + \frac{\bar{z}}{1 - \bar{z}} \right)$$

ve

$$\mathcal{D}_q^{k+1} f(z) = \mathcal{D}_q^k f(z) * \left(\frac{z}{(1 - z)(1 - qz)} - \frac{\bar{z}}{(1 - \bar{z})(1 - q\bar{z})} \right)$$

eşitlikleri (4.11) ifadesinde yerine yazılırsa, $\mathcal{K} = 1 + \mathcal{L} + (\mathcal{F} - \mathcal{L})\delta$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& (1+\mathcal{F}\zeta)\mathcal{D}_q^{\kappa+1}\mathbf{f}(z)-\{1+(\mathcal{K}-1)\zeta\}\left\{\mathcal{A}\mathcal{D}_q^{\kappa+1}\mathbf{f}(z)+(1-\mathcal{A})\mathcal{D}_q^{\kappa}\mathbf{f}(z)\right\} \\
& =\mathcal{D}_q^{\kappa}\mathbf{f}(z)*\left\{\left(1+\mathcal{F}\zeta\right)-\mathcal{A}\left\{1+(\mathcal{K}-1)\zeta\right\}\frac{z}{(1-z)(1-qz)}-(1-\mathcal{A})\left\{1+(\mathcal{K}-1)\zeta\right\}\frac{z}{1-z}\right\} \\
& \quad -(-1)^{\kappa}\overline{\mathcal{D}_q^{\kappa}\mathbf{f}(z)}*\left\{\left(1+\mathcal{F}\zeta\right)-\mathcal{A}\left\{1+(\mathcal{K}-1)\zeta\right\}\frac{\bar{z}}{(1-\bar{z})(1-q\bar{z})}+(1-\mathcal{A})\left\{1+(\mathcal{K}-1)\zeta\right\}\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}}\right\} \\
& =\mathcal{D}_q^{\kappa}\mathbf{f}(z)*\Theta(z;\zeta)\neq 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi de $\mathcal{SH}_q^k(\mathcal{A},\delta,\mathcal{L},\mathcal{F})$ sınıfı için yeterli katsayı sınırlarını bulalım.

Teorem 4.2.4

$\mathbf{f}$, (3.1) formunda verilen bir fonksiyon olsun. $-\mathcal{F}\leq\mathcal{L}<\mathcal{F}\leq 1$,

$0\leq\delta<1$, $0\leq\mathcal{A}\leq 1$ ve $\mathcal{K}=1+\mathcal{L}+(\mathcal{F}-\mathcal{L})\delta$ olmak üzere;

$$\Phi_n=[n]_q^{\kappa}\left\{[n]_q(1+\mathcal{F}-\mathcal{A}\mathcal{K})-(1-\mathcal{A})\mathcal{K}\right\} \quad (4.12)$$

ve

$$\Psi_n=[n]_q^{\kappa}\left\{[n]_q(1+\mathcal{F}-\mathcal{A}\mathcal{K})+(1-\mathcal{A})\mathcal{K}\right\} \quad (4.13)$$

için

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\Phi_n|a_n|+\Psi_n|b_n|)\leq 2(\mathcal{F}-\mathcal{L})(1-\delta) \quad (4.14)$$

oluyorsa $\mathbf{f}$, $\mathcal{U}$ birim diskte yön koruyan, harmonik, yerel ünivalent olur ve

$\mathbf{f}\in\mathcal{SH}_q^k(\mathcal{A},\delta,\mathcal{L},\mathcal{F})$ dir.

İspat:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{D}_qh(z)| & \geq 1-\sum_{n=2}^{\infty}[n]_q|a_n||z|^{n-1} \\
& > 1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{[n]_q^{\kappa}\left\{[n]_q(1+\mathcal{F}-\mathcal{A}\mathcal{K})-(1-\mathcal{A})\mathcal{K}\right\}}{(\mathcal{F}-\mathcal{L})(1-\delta)}|a_n|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[n]_q^{\kappa} \left\{ [n]_q (1 + \mathcal{F} - d\mathcal{K}) + (1 - d')\mathcal{K} \right\}}{(\mathcal{F} - \mathcal{L})(1 - \delta)} |b_n| \\
&> \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[n]_q^{\kappa} \left\{ [n]_q (1 + \mathcal{F} - d\mathcal{K}) + (1 - d')\mathcal{K} \right\}}{(\mathcal{F} - \mathcal{L})(1 - \delta)} |b_n| |z|^{n-1} \\
&\geq \sum_{n=2}^{\infty} [n]_q |b_n| |z|^{n-1} \geq |\mathcal{D}_q g(z)|
\end{aligned}$$

olduğundan $f \in \mathcal{SH}_q$ dır.

Diğer taraftan $f \in \mathcal{SH}_q^{\kappa}(d', \delta, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ olması için gerek ve yeter şart $z \in \mathcal{U}$ için

$$\frac{\mathcal{D}_q^{\kappa+1} f(z)}{d' \mathcal{D}_q^{\kappa+1} f(z) + (1 - d') \mathcal{D}_q^{\kappa} f(z)} = \frac{\mathcal{K} \omega(z)}{1 + \mathcal{F} \omega(z)}$$

eşitliğini sağlayacak biçimde $\omega(0) = 0$ ve $|\omega(z)| < 1$ şartlarını gerçekleyen kompleks değerli bir ω fonksiyonunun mevcut olmasıdır. Ya da buna denk olarak

$$\left| \frac{(1 - d') (\mathcal{D}_q^{\kappa+1} f(z) - \mathcal{D}_q^{\kappa} f(z))}{(\mathcal{F} - d\mathcal{K}) \mathcal{D}_q^{\kappa+1} f(z) - (1 - d') \mathcal{K} \mathcal{D}_q^{\kappa} f(z)} \right| < 1 \quad (4.15)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

$\mathcal{D}_q h(z)$ ve $\mathcal{D}_q g(z)$ fonksiyonları (4.15) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\left| (1 - d') (\mathcal{D}_q^{\kappa+1} f(z) - \mathcal{D}_q^{\kappa} f(z)) \right| - \left| (\mathcal{F} - d\mathcal{K}) \mathcal{D}_q^{\kappa+1} f(z) - (1 - d') \mathcal{K} \mathcal{D}_q^{\kappa} f(z) \right| \\
&= \left| (1 - d') \sum_{n=2}^{\infty} [n]_q^{\kappa} ([n]_q - 1) a_n z^n - (1 - d') (-1)^{\kappa} \sum_{n=1}^{\infty} [n]_q^{\kappa} ([n]_q + 1) \overline{b_n z^n} \right| \\
&\quad - \left| (\mathcal{F} - \mathcal{L})(1 - \delta) z + \sum_{n=2}^{\infty} [n]_q^{\kappa} \left\{ [n]_q \mathcal{F} - d\mathcal{K} - (1 - d') \mathcal{K} \right\} a_n z^n - (-1)^{\kappa} \sum_{n=1}^{\infty} [n]_q^{\kappa} \left\{ [n]_q \mathcal{F} - d\mathcal{K} + (1 - d') \mathcal{K} \right\} \overline{b_n z^n} \right| \\
&\leq \sum_{n=2}^{\infty} [n]_q^{\kappa} (1 - d') ([n]_q - 1) |a_n| |z|^n + \sum_{n=1}^{\infty} [n]_q^{\kappa} (1 - d') ([n]_q + 1) |b_n| |z|^n - (\mathcal{F} - \mathcal{L})(1 - \delta) \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty} [n]_q^{\kappa} \left\{ (\mathcal{F} - d\mathcal{K}) [n]_q - (\mathcal{F} - d\mathcal{K}) \right\} |a_n| |z|^n + \sum_{n=1}^{\infty} [n]_q^{\kappa} \left\{ (\mathcal{F} - d\mathcal{K}) [n]_q + (\mathcal{F} - d\mathcal{K}) \right\} |b_n| |z|^n \\
&\leq |z| \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \Phi_n |a_n| |z|^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n |b_n| |z|^{n-1} - (\mathcal{F} - \mathcal{L})(1 - \delta) \right\} < 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| = 1$$

olmak üzere

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\mathcal{E} - \mathcal{L})(1 - \delta) x_n}{\Phi_n} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mathcal{E} - \mathcal{L})(1 - \delta) y_n}{\Psi_n} \bar{z}^n \quad (4.16)$$

harmonik fonksiyonu için (4.14) ile verilen katsayılar kesindir. (4.16) ile verilen fonksiyonlar $\mathcal{SH}_q^k(\mathcal{A}, \delta, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ sınıfındadır çünkü

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\Phi_n}{2(\mathcal{E} - \mathcal{L})(1 - \delta)} |a_n| + \frac{\Psi_n}{2(\mathcal{E} - \mathcal{L})(1 - \delta)} |b_n| \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (|x_n| + |y_n|) = 1 \text{ olur.}$$

Şimdi de, (4.14) ile verilen sınırların ayrıca $\mathcal{TSH}_q^k(\mathcal{A}, \delta, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ sınıfı için de gerekli olduğunu gösterelim.

Teorem 4.2.5

$f = h + \bar{g}$ (3.1) formunda verilen bir fonksiyon olsun. $f \in \mathcal{TSH}_q^k(\mathcal{A}, \delta, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ olması için gerekli ve yeterli şart (4.14) ifadesinin sağlanmasıdır.

İspat:

Teorem 4.2.3 den, eğer (4.14) şartı sağlanmazsa, sadece $f \notin \mathcal{TSH}_q^k(\mathcal{A}, \delta, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. (3.1) formunda verilen $f = h + \bar{g}$ fonksiyonunun $\mathcal{TSH}_q^k(\mathcal{A}, \delta, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul (4.14) eşitsizliğindeki katsayı şartının sağlanmasıdır. Buna denk olarak $\mathcal{K} = 1 + \mathcal{L} + (\mathcal{E} - \mathcal{L})\delta$ olmak üzere

$$\left| \frac{(1 - \mathcal{A}) \left(\mathcal{D}_q^{\mathcal{K}+1} f(z) - \mathcal{D}_q^{\mathcal{K}} f(z) \right)}{(\mathcal{E} - \mathcal{A}\mathcal{K}) \mathcal{D}_q^{\mathcal{K}+1} f(z) - (1 - \mathcal{A}) \mathcal{K} \mathcal{D}_q^{\mathcal{K}} f(z)} \right| < 1$$

olmalıdır. $z = r < 1$ için,

$$\frac{(1 - \mathcal{A}) \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} [n]_q^{\mathcal{K}} ([n]_q - 1) |a_n| r^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} [n]_q^{\mathcal{K}} ([n]_q + 1) |b_n| r^{n-1} \right\}}{(\mathcal{E} - \mathcal{L})(1 - \delta) + \sum_{n=2}^{\infty} [n]_q^{\mathcal{K}} \left\{ (\mathcal{E} - \mathcal{A}\mathcal{K}) [n]_q - (1 - \mathcal{A}) \mathcal{K} \right\} |a_n| r^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} [n]_q^{\mathcal{K}} \left\{ (\mathcal{E} - \mathcal{A}\mathcal{K}) [n]_q + (1 - \mathcal{A}) \mathcal{K} \right\} |b_n| r^{n-1}} < 1 \quad (4.17)$$

olur.

Eğer (4.14) şartı sağlanmazsa, (4.17) şartı 1'e yeteri kadar yakın bir r için sağlanmaz. Buradan $(0,1)$ aralığında (4.17) daki oran için 1'den büyük bir $z_0 = r_0$ vardır. Bu da $f \in \mathcal{TH}_q^k(\mathcal{A}, \delta, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ gerekli koşulu ile çelişir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.6

$f \in \mathcal{TH}_q^k(\mathcal{A}, \delta, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ olsun. $|z| = r < 1$ için

$$f(z) \leq (1 + |b_1|)r + \frac{(\mathcal{F} - \mathcal{L})(1 - \delta) - [2 + \mathcal{L} + \mathcal{F} + (\mathcal{F} - \mathcal{L})\delta]|b_1|}{[2]_q^k \left\{ \left\{ 1 + \mathcal{F} - \mathcal{A} [1 + \mathcal{L} + (\mathcal{F} - \mathcal{L})] \right\} q + (\mathcal{F} - \mathcal{L})(1 - \delta) \right\}} r^2$$

ve

$$f(z) \geq (1 - |b_1|)r - \frac{(\mathcal{F} - \mathcal{L})(1 - \delta) - [2 + \mathcal{L} + \mathcal{F} + (\mathcal{F} - \mathcal{L})\delta]|b_1|}{[2]_q^k \left\{ \left\{ 1 + \mathcal{F} - \mathcal{A} [1 + \mathcal{L} + (\mathcal{F} - \mathcal{L})] \right\} q + (\mathcal{F} - \mathcal{L})(1 - \delta) \right\}} r^2$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat:

Eşitsizliğin yalnızca sağ taraf için ispatını yapalım. Diğer tarafta benzer şekilde bulunur.

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq (1 + |b_1|)r + \sum_{n=2}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)r^n \\ &\leq (1 + |b_1|)r + \frac{r^2}{[2]_q^k \left\{ \left\{ 1 + \mathcal{F} - \mathcal{A} [1 + \mathcal{L} + (\mathcal{F} - \mathcal{L})] \right\} q + (\mathcal{F} - \mathcal{L})(1 - \delta) \right\}} \sum_{n=2}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)r^n \\ f(z) &\leq (1 + |b_1|)r + \frac{(\mathcal{F} - \mathcal{L})(1 - \delta) - [2 + \mathcal{L} + \mathcal{F} + (\mathcal{F} - \mathcal{L})\delta]|b_1|}{[2]_q^k \left\{ \left\{ 1 + \mathcal{F} - \mathcal{A} [1 + \mathcal{L} + (\mathcal{F} - \mathcal{L})] \right\} q + (\mathcal{F} - \mathcal{L})(1 - \delta) \right\}} r^2. \end{aligned}$$

Teorem 4.2.7

$$h_1(z) = z, \quad h_n(z) = z - \frac{(\mathcal{F} - \mathcal{L})(1 - \delta)}{\Phi_n} z^n, \quad (n = 2, 3, \dots)$$

ve

$$g_n(z) = z + (-1)^k \frac{(\mathcal{F} - \mathcal{L})(1 - \delta)}{\Psi_n} z^n, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

olmak üzere $f \in \mathcal{TH}_q^k(\mathcal{A}, \delta, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ olur, ancak ve ancak $x_n > 0, y_n > 0$ ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) = 1 \text{ olmak üzere}$$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n h_n(z) + y_n g_n(z))$$

olmasıdır. Burada $\mathcal{TH}_q^k(\mathcal{A}, \delta, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ fonksiyonunun ekstrem noktaları $\{h_n\}$ ve $\{g_n\}$ olur.

İspat:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} (x_n h_n(z) + y_n g_n(z)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\mathcal{F} - \mathcal{L})(1-\delta)}{\Phi_n} x_n z^n + (-1)^k \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\mathcal{F} - \mathcal{L})(1-\delta)}{\Psi_n} y_n \bar{z}^n. \end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \Phi_n |a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n |b_n| &= (\mathcal{L} - \mathcal{F})(1-\delta) \sum_{n=2}^{\infty} x_n + (\mathcal{L} - \mathcal{F})(1-\delta) \sum_{n=1}^{\infty} y_n \\ &= (\mathcal{L} - \mathcal{F})(1-\delta)(1-x_1) \leq (\mathcal{L} - \mathcal{F}) \end{aligned}$$

ve $f \in \mathcal{TH}_q^k(\mathcal{A}, \delta, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ dir. Tersine, eğer $f \in \mathcal{TH}_q^k(\mathcal{A}, \delta, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ ise

$$|a_n| \leq \frac{(\mathcal{F} - \mathcal{L})(1-\delta)}{\Phi_n} \quad \text{ve} \quad |b_n| \leq \frac{(\mathcal{F} - \mathcal{L})(1-\delta)}{\Psi_n},$$

$$x_n = \frac{\Phi_n}{(\mathcal{F} - \mathcal{L})(1-\delta)} |a_n| \quad (n = 2, 3, \dots)$$

ve

$$y_n = \frac{\Psi_n}{(\mathcal{F} - \mathcal{L})(1-\delta)} |b_n| \quad (n = 1, 2, \dots) \text{ olur.}$$

Teorem 4.2.4 den $0 \leq x_n \leq 1$ ($n = 2, 3, \dots$) ve $0 \leq y_n \leq 1$ ($n = 1, 2, \dots$) olmak üzere

$$x_1 = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} x_n - \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

şeklinde tanımlayalım, ayrıca Teorem 2.4.2 den $x_1 \geq 0$ dir. Böylece,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n h_n(z) + y_n g_n(z))$$

istenilen sonuç elde edilir.

Şimdi de $\mathcal{TH}_q^k(\mathcal{A}, \delta, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ sınıfının konveks kombinasyon altında kapalı olduğunu gösterelim.

Teorem 4.2.8

$\mathcal{TH}_q^k(\mathcal{A}, \delta, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ sınıfı konveks kombinasyon altında kapalıdır.

İspat:

$j = 1, 2, 3, \dots$ için

$$f_j(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_{n_j}| z^n + (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} |b_{n_j}| \bar{z}^n$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon olmak üzere $f_j \in \mathcal{TH}_q^k(\mathcal{A}, \delta, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ olsun. (4.14)

eşitsizliğinden

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\Phi_n |a_{n_j}| + \Psi_n |b_{n_j}|) \leq 2(\mathcal{F} - \mathcal{L})(1 - \delta) \text{ dır.}$$

$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j = 1$, $0 \leq \lambda_j \leq 1$ için, f_j nin konveks kombinasyonu

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j f_j(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |a_{n_j}| \right) z^n + (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |b_{n_j}| \right) \bar{z}^n$$

şeklinde yazılabilir. Buradan (4.14) ile

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\Phi_n \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |a_{n_j}| + \Psi_n \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |b_{n_j}| \right) &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\Phi_n |a_{n_j}| + \Psi_n |b_{n_j}|) \right) \\ &\leq 2(\mathcal{F} - \mathcal{L})(1 - \delta) \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \\ &= 2(\mathcal{F} - \mathcal{L})(1 - \delta) \end{aligned}$$

elde edilir ve bu durum (4.14) ün gerektirdiği koşuldur. Buradan

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j f_j(z) \in \mathcal{TH}_q^k(\mathcal{A}, \delta, \mathcal{L}, \mathcal{F}) \text{ dir.}$$

4.3 $\mathcal{SH}_q(\mathcal{A}, \lambda, \beta)$ Sınıfı İçin q -Poisson Seri Açılımları

Bu bölümde verilen sınıfları Poisson ve q -Poisson seri açılımları yardımı ile tanımlayarak q -harmonik olma şartlarını inceleyeceğiz.

Tanım 4.3.1

$r, s > 0, 0 < q < 1$ ve

$$\mathcal{P}_q^r(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r^{n-1} e_q^{-r}}{[n-1]_q!} z^n \quad \text{ve} \quad \mathcal{P}_q^s(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{s^{n-1} e_q^{-s}}{[n-1]_q!} z^n \quad (4.18)$$

analitik fonksiyonları ve $m = 1, 2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_q^{r,s}(z) &= \mathcal{P}_q^r(z) + \overline{\mathcal{P}_q^s(z)} - z \\ \mathcal{T}^m \mathcal{P}_q^{r,s}(z) &= 2z - \mathcal{P}_q^r(z) + (-1)^{m-1} \overline{\mathcal{P}_q^s(z)} \end{aligned} \quad (4.19)$$

harmonik fonksiyonlarını tanımlayalım. $\mathcal{P}_q^{r,s} \in \mathcal{H}$ ve $\mathcal{T}^m \mathcal{P}_q^{r,s} \in \mathcal{T}^m$ olduğu açıktır.

(4.19) daki fonksiyonlarda $q \rightarrow 1^-$ için

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{r,s}(z) &= \mathcal{P}^r(z) + \overline{\mathcal{P}^s(z)} - z \\ \mathcal{T}^m \mathcal{P}^{r,s}(z) &= 2z - \mathcal{P}^r(z) + (-1)^{m-1} \overline{\mathcal{P}^s(z)} \end{aligned} \quad (4.20)$$

harmonik fonksiyonları elde edilir

Tanım 4.3.2 (Shujaat, 2021)

$f = h + \bar{g} \in \mathcal{SH}$ fonksiyonu için $\beta \in [0, 1)$, $\mathcal{A} \in \mathbb{C} - \{0\}$, $\eta \in [0, 1]$ ve $q \in (0, 1)$ olmak üzere

$$\Re \left[1 + \frac{1}{\mathcal{A}} \left\{ (1-\eta) \frac{f(z)}{z} + \eta \left(\partial_q f(z) \right) - 1 \right\} \right] \geq \beta \quad (4.21)$$

şartı sağlanıyorsa $f \in \mathcal{SH}_q(\mathcal{A}, \eta, \beta)$ olur.

$$h(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n \quad \text{ve} \quad g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} |b_n| \bar{z}^n, \quad |b_1| < 1 \quad (4.22)$$

olmak üzere, $\mathcal{SH}$ sınıfının $f = h + \bar{g}$ biçimindeki fonksiyonları içeren alt sınıfları $\mathcal{T}$ ile gösterilir.

$f = h + \bar{g} \in \mathcal{SH}$ fonksiyonları (4.22) şeklinde tanımlanan fonksiyonları içeren $\mathcal{T}$ alt sınıfında olmak üzere

$$\mathcal{TSH}_q(\mathcal{A}, \eta, \beta) = \mathcal{SH}_q(\mathcal{A}, \eta, \beta) \cap \mathcal{T}$$

şeklinde tanımlanır.

$q \rightarrow 1^-$ için $\mathcal{SH}_q(\mathcal{A}, \eta, \beta)$ sınıfı $\mathcal{SH}(\mathcal{A}, \eta, \beta)$ sınıfına dönüşür.

$\beta \in [0, 1)$, $\mathcal{A} \in \mathbb{C} - \{0\}$ ve $\eta \in [0, 1]$ olmak üzere

$$\Re \left[1 + \frac{1}{\mathcal{A}} \left\{ (1 - \eta) \frac{f(z)}{z} + \eta f'(z) - 1 \right\} \right] \geq \beta \quad (4.23)$$

şartı sağlanıyorsa $f \in \mathcal{SH}(\mathcal{A}, \eta, \beta)$ olur.

Ayrıca $\mathcal{SH}(1, \eta, \beta) = \mathcal{SH}(\eta, \beta)$ sınıfı için aşağıdaki şart sağlanır;

$$\Re \left[(1 - \eta) \frac{f(z)}{z} + \eta f'(z) \right] \geq \beta. \quad (4.24)$$

$\mathcal{SH}(1, 1, \beta) = \mathcal{SH}(\beta)$ sınıfı için ise aşağıdaki şart sağlanır

$$\Re \left[\frac{f(z)}{z} + f'(z) \right] \geq \beta.$$

Bu çalışmada yukarıda tanımları verilen sınıfları, Poisson ve q -Poisson seri açılımları ile tanımlayacağız. Bu sınıfların q -harmonik olma şartlarını inceleyeceğiz.

Lemma 4.3.3 (Shujaat, 2021)

(3.1) de verilen $f = h + \bar{g}$ olsun. $0 < q < 1$, $0 \leq \beta < 1$, $0 \leq \eta \leq 1$, $\mathcal{A} \in \mathbb{C} - \{0\}$ olmak üzere

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left(1 + \left([n]_q - 1 \right) \eta \right) \left[|a_n| + |b_n| \right] \right\} \leq (1 - \beta) \mathcal{A} \quad (4.25)$$

şartı sağlanıyorsa $\mathbf{f} \in \mathcal{SH}_q(\mathcal{A}, \eta, \beta)$ olur.

Uyarı 4.3.4 (4.22) de verilen $\mathbf{f} = h + \bar{g}$ olmak üzere $\mathbf{f} \in \mathcal{SH}_q(\mathcal{A}, \eta, \beta)$ olması için gerek ve yeter şart (4.25) eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Lemma 4.3.5 (Shujaat, 2021)

(3.1) de verilen $\mathbf{f} = h + \bar{g}$ olsun. $0 \leq \beta < 1$, $0 \leq \eta \leq 1$ ve $\mathcal{A} \in \mathbb{C} - \{0\}$ olmak üzere

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left(1 + (n-1)\eta \right) \left[|a_n| + |b_n| \right] \right\} \leq (1 - \beta) \mathcal{A} \quad (4.26)$$

şartı sağlanıyorsa $\mathbf{f} \in \mathcal{SH}(\mathcal{A}, \eta, \beta)$ dir.

Uyarı 4.3.6 (4.22) da verilen $\mathbf{f} = h + \bar{g}$ için $\mathbf{f} \in \mathcal{SH}(\mathcal{A}, \eta, \beta)$ olması için gerek ve yeter şart (4.26) eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Lemma 4.3.7 (Shujaat, 2021)

(3.1) de verilen $\mathbf{f} = h + \bar{g}$ olsun. $0 \leq \beta < 1$ ve $0 \leq \eta \leq 1$ ve olmak üzere

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left(1 + (n-1)\eta \right) \left[|a_n| + |b_n| \right] \right\} \leq 1 - \beta \quad (4.27)$$

şartı sağlanıyorsa $\mathbf{f} \in \mathcal{SH}(\eta, \beta)$ dir.

Uyarı 4.3.8 (4.22)'de verilen $\mathbf{f} = h + \bar{g}$ için $\mathbf{f} \in \mathcal{SH}(\eta, \beta)$ olması için gerekli ve yeterli şart (4.27) ifadesinin sağlanmasıdır.

Teorem 4.3.9

$r, s > 0$, $0 < q < 1$, $0 \leq \beta < 1$, $\mathcal{A} \in \mathbb{C} - \{0\}$ ve $0 \leq \eta \leq 1$ olmak üzere

$$\eta(r + s) + \eta e^{-r}(1 - q) + \eta e^{-s}(1 - q) \leq (1 - \beta) \mathcal{A} + 2(1 - \eta) + e^{-r} + e^{-s} \quad (4.28)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $\mathcal{P}_q^{r,s} \in \mathcal{SH}_q(\mathcal{A}, \eta, \beta)$ dir.

İspat:

$r, s > 0$, $0 < q < 1$, $0 \leq \beta < 1$, $\mathcal{A} \in \mathbb{C} - \{0\}$ ve $0 \leq \eta \leq 1$ olsun. Lemma 4.3.3'e göre

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left(1 + ([n]_q - 1)\eta \right) \frac{r^{n-1} e_q^{-r}}{[n-1]_q!} \right\} + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left(1 + ([n]_q - 1)\eta \right) \frac{s^{n-1} e_q^{-s}}{[n-1]_q!} \right\} \leq (1 - \beta) \mathcal{A} \quad (4.29)$$

eşitsizliğinde (4.18) eşitliklerinde verilen $\mathcal{P}_q^r$ ve $\mathcal{P}_q^s$ için $\mathcal{P}_q^{r,s} = \mathcal{P}_q^r(z) + \overline{\mathcal{P}_q^s(z) - z}$ fonksiyonunun $\mathcal{SH}_q(\mathcal{A}, \eta, \beta)$ sınıfında olduğunu göstermek yeterlidir.

(3.6) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left(1 + ([n]_q - 1)\eta \right) \frac{r^{n-1} e_q^{-r}}{[n-1]_q!} + \left(1 + ([n]_q - 1)\eta \right) \frac{s^{n-1} e_q^{-s}}{[n-1]_q!} \right\} \leq (1 - \beta) \mathcal{A} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left(1 + ([n-1]_q + q^{n-1} - 1)\eta \right) \frac{r^{n-1} e_q^{-r}}{[n-1]_q!} + \left(1 + ([n-1]_q + q^{n-1} - 1)\eta \right) \frac{s^{n-1} e_q^{-s}}{[n-1]_q!} \right\} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r^{n-1} e_q^{-r}}{[n-1]_q!} + \eta \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r^{n-1} e_q^{-r}}{[n-2]_q!} + \eta \sum_{n=2}^{\infty} \frac{q^{n-1} r^{n-1} e_q^{-r}}{[n-1]_q!} - \eta \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r^{n-1} e_q^{-r}}{[n-1]_q!} \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{s^{n-1} e_q^{-s}}{[n-1]_q!} + \eta \sum_{n=2}^{\infty} \frac{s^{n-1} e_q^{-s}}{[n-2]_q!} + \eta \sum_{n=2}^{\infty} \frac{q^{n-1} s^{n-1} e_q^{-s}}{[n-1]_q!} - \eta \sum_{n=2}^{\infty} \frac{s^{n-1} e_q^{-s}}{[n-1]_q!} \\ &= e_q^{-r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{[n]_q!} + \eta e_q^{-r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{[n]_q!} + \eta e_q^{-r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n r^n}{[n]_q!} - \eta e_q^{-r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{[n]_q!} \\ &+ e_q^{-s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{[n]_q!} + \eta e_q^{-s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{[n]_q!} + \eta e_q^{-s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n s^n}{[n]_q!} - \eta e_q^{-s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{[n]_q!} \\ &= e_q^{-r} (e_q^r - 1) + \eta e_q^{-r} e_q^r + \eta e_q^{-r} (e_q^q - 1) - \eta e_q^{-r} (e_q^r - 1) + e_q^{-s} (e_q^s - 1) + \eta e_q^{-s} e_q^s + \eta e_q^{-s} (e_q^q - 1) - \eta e_q^{-s} (e_q^s - 1) \\ &2 - 2\eta + \eta(r + s) + \eta e_q^{-r} (1 - q) + \eta e_q^{-s} (1 - q) - e_q^{-r} - e_q^{-s} \leq (1 - \beta) \mathcal{A} \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

Bu da eşitsizlik (4.28) ifadesine denktir. Yani (4.29) eşitsizliği sağlanır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.10

$r, s > 0$, $0 \leq \beta < 1$, $\mathcal{A} \in \mathbb{C} - \{0\}$ ve $0 \leq \eta \leq 1$ olmak üzere

$$2 + \eta(r + s) \leq (1 - \beta)\mathcal{A} + e^{-r} + e^{-s} \quad (4.30)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $\mathcal{P}^{r,s} \in \mathcal{SH}(\mathcal{A}, \eta, \beta)$ olur.

İspat:

$r, s > 0$, $0 \leq \beta < 1$, $\mathcal{A} \in \mathbb{C} - \{0\}$ ve $0 \leq \eta \leq 1$ olsun. Lemma 4.3.5 göre

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left\{ 1 + (n-1)\eta \right\} \frac{r^{n-1} e^{-r}}{(n-1)!} \right\} + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left\{ 1 + (n-1)\eta \right\} \frac{s^{n-1} e^{-s}}{(n-1)!} \right\} \leq (1 - \beta)\mathcal{A} \quad (4.31)$$

eşitsizliğinde (4.20) eşitliğinde verilen $\mathcal{P}^r$ ve $\mathcal{P}^s$ için $\mathcal{P}^{r,s} = \mathcal{P}^r(z) + \overline{\mathcal{P}^s(z) - z}$ fonksiyonunun $\mathcal{SH}_q(\mathcal{A}, \lambda, \beta)$ olduğunu göstermek yeterlidir.

(3.7) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left\{ 1 + (n-1)\eta \right\} \frac{r^{n-1} e^{-r}}{(n-1)!} + \left\{ 1 + (n-1)\eta \right\} \frac{s^{n-1} e^{-s}}{(n-1)!} \right\} \leq (1 - \beta)\mathcal{A} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left\{ 1 + (n-1)\eta \right\} \frac{r^{n-1} e^{-r}}{(n-1)!} + \left\{ 1 + (n-1)\eta \right\} \frac{s^{n-1} e^{-s}}{(n-1)!} \right\} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r^{n-1} e^{-r}}{(n-1)!} + \eta \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r^{n-1} e^{-r}}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{s^{n-1} e^{-s}}{(n-1)!} + \eta \sum_{n=2}^{\infty} \frac{s^{n-1} e^{-s}}{(n-2)!} \\ &= e^{-r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!} + \eta r e^{-r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!} + e^{-s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n!} + \eta s e^{-s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \\ &= e^{-r} (e^r - 1) + \eta r e^{-r} e^r + e^{-s} (e^s - 1) + \eta s e^{-s} e^s \\ &= 1 - e^{-r} + \eta r + 1 - e^{-s} + \eta s \\ &2 + \eta(r + s) - e^{-r} - e^{-s} \leq (1 - \beta)\mathcal{A} \end{aligned}$$

olur. Yani eşitsizlik (4.31) sağlanır. Bu da (4.30) eşitsizliğine denktir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.11

$r, s > 0$, $0 \leq \beta < 1$ ve $0 \leq \eta \leq 1$ olmak üzere

$$1 + \eta(r + s) \leq e^{-r} + e^{-s} - \beta \quad (4.32)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $\mathcal{P}^{r,s} \in \mathcal{SH}(\eta, \beta)$ dır.

İspat:

$r, s > 0$, $0 \leq \beta < 1$ ve $0 \leq \eta \leq 1$ olsun. Lemma 4.3.7 ya göre

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left\{ 1 + (n-1)\eta \right\} \frac{r^{n-1} e^{-r}}{[n-1]!} + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ 1 + (n-1)\eta \right\} \frac{s^{n-1} e^{-s}}{[n-1]!} \leq 1 - \beta \quad (4.33)$$

eşitsizliğinde (4.20) eşitliğinde verilen $\mathcal{P}^r$ ve $\mathcal{P}^s$ için $\mathcal{P}^{r,s}(z) = \mathcal{P}^r(z) + \overline{\mathcal{P}^s(z)} - z$ fonksiyonunun $\mathcal{SH}(\eta, \beta)$ olduğunu göstermek yeterlidir.

(3.7) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ 1 + (n-1)\eta \right\} \frac{r^{n-1} e^{-r}}{(n-1)!} + \left\{ 1 + (n-1)\eta \right\} \frac{s^{n-1} e^{-s}}{(n-1)!} \leq 1 - \beta \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ 1 + (n-1)\eta \right\} \frac{r^{n-1} e^{-r}}{(n-1)!} + \left\{ 1 + (n-1)\eta \right\} \frac{s^{n-1} e^{-s}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r^{n-1} e^{-r}}{(n-1)!} + \eta \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r^{n-1} e^{-r}}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{s^{n-1} e^{-s}}{(n-1)!} + \eta \sum_{n=2}^{\infty} \frac{s^{n-1} e^{-s}}{(n-2)!} \\ &= e^{-r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!} + \eta r e^{-r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!} + e^{-s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n!} + \eta s e^{-s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \\ &= e^{-r} (e^r - 1) + \eta r e^{-r} e^r + e^{-s} (e^s - 1) + \eta s e^{-s} e^s \\ &= 1 - e^{-r} + \eta r + 1 - e^{-s} + \eta s \end{aligned}$$

olur. Yani (4.33) ifadesi sağlanır. Bu da (4.32) eşitsizliğine denktir. Böylece ispat tamamlanır

4.4. $\mathcal{SH}_{\rho,q}(\mathcal{A}, \eta, \beta)$ ve $\mathcal{SH}_{\rho,q}(\mathcal{A}, \varpi, \nu)$ Sınıfları İçin (ρ, q) -Poisson Seri Açılımları

Bu bölümde araştırdığımız teorem ve sonuçlar “Journal of Mathematical Extension” dergisinde yayınlanmıştır (Canbulat ve Sakar, 2023).

Tanım 4.4.1 (Shujaat, 2021)

$f = h + \bar{g} \in \mathcal{H}$ fonksiyonu için

$0 \leq \beta < 1$, $\mathcal{A} \in \mathbb{C} - \{0\}$, $0 \leq \eta \leq 1$, $0 < \rho < 1$ ve $0 < q < 1$ olmak üzere

$$\Re \left[1 + \frac{1}{\mathcal{A}} \left\{ (1-\eta) \frac{f(z)}{z} + \eta \left(\partial_{\rho,q} f(z) \right) - 1 \right\} \right] \geq \beta \quad (4.34)$$

şartı sağlanıyorsa $f \in \mathcal{SH}_{\rho,q}(\mathcal{A}, \eta, \beta)$ dir denir.

Tanım 4.4.2

$$h(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n \quad \text{ve} \quad g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} |b_n| \bar{z}^n, \quad |b_1| < 1 \quad (4.35)$$

olmak üzere $\mathcal{T}$, $\mathcal{H}$ sınıfının $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ şeklindeki fonksiyonları içeren alt sınıfı olmak üzere

$$\mathcal{TSH}_{\rho,q}(\mathcal{A}, \eta, \beta) = \mathcal{SH}_{\rho,q}(\mathcal{A}, \eta, \beta) \cap \mathcal{T}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.4.3

$f \in \mathcal{H}$, $k \in \mathbb{N} \cup 0$, $n \geq 1$, $0 < \rho < 1$, $0 < q < 1$ ve

$$\mathcal{D}_{\rho,q}^k h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} [n]_{\rho,q}^k a_n z^n, \quad \mathcal{D}_{\rho,q}^k g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} [n]_{\rho,q}^k b_n \bar{z}^n \quad \text{olmak üzere } f = h + \bar{g}$$

fonksiyonunun k . mertebeden türevleri

$$\mathcal{D}_{\rho,q}^0 f(z) = f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$$

$$\mathcal{D}_{\rho,q}^1 f(z) = \mathcal{D}_{\rho,q}^1 h(z) - \overline{\mathcal{D}_{\rho,q}^1 g(z)} = z \partial_{\rho,q} h(z) - \overline{z \partial_{\rho,q} g(z)}$$

·
·
·

$$\mathcal{D}_{\rho,q}^{\kappa} f(z) = \mathcal{D}_{\rho,q}^{\kappa} h(z) + (-1)^{\kappa} \overline{\mathcal{D}_{\rho,q}^{\kappa} g(z)} = z \partial_{\rho,q} \left(\mathcal{D}_{\rho,q}^{\kappa-1} h(z) \right) + (-1)^{\kappa} \overline{z \partial_{\rho,q} \left(\mathcal{D}_{\rho,q}^{\kappa-1} g(z) \right)}$$

biçiminde yazılabilir.

Tanım 4.4.4 (Bayram, 2022)

$f = h + \bar{g} \in \mathcal{SH}$ fonksiyonu için

$0 \leq \beta < 1, -1 \leq \nu < 0 < \varpi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1, \mathcal{A} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, 0 < \rho < 1$ ve $0 < q < 1$ olmak

üzere

$$\frac{z \mathcal{D}_{\rho,q} h(z) - \overline{z \mathcal{D}_{\rho,q} g(z)}}{\mathcal{A} \left(z \mathcal{D}_{\rho,q} h(z) - \overline{z \mathcal{D}_{\rho,q} g(z)} \right) + (1 - \mathcal{A})(h(z) + g(z))} \prec \frac{1 + \varpi z}{1 + \nu z}$$

şartı sağlanıyorsa $f \in \mathcal{SH}_{\rho,q}(\mathcal{A}, \varpi, \nu)$ olur.

$\mathcal{TSH}_{\rho,q}(\mathcal{A}, \varpi, \nu) \equiv \mathcal{SH}_{\rho,q}(\mathcal{A}, \varpi, \nu) \cap \mathcal{TSH}_{\rho,q}$ olduğu açıktır.

Tanım 4.4.5

$r > 0, s > 0, 0 < \rho < 1$ ve $0 < q < 1$ için aşağıdaki analitik fonksiyonları tanımlayalım;

$$\mathcal{P}_{\rho,q}^r(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r^{n-1} e^{-r}}{[n-1]_{\rho,q}!} z^n \quad \text{ve} \quad \mathcal{P}_{\rho,q}^s(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{s^{n-1} e^{-s}}{[n-1]_{\rho,q}!} z^n. \quad (4.36)$$

Buradan

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\rho,q}^{r,s} &= \mathcal{P}_{\rho,q}^r(z) + \overline{\mathcal{P}_{\rho,q}^s(z)} - z \quad \text{ve} \\ \mathcal{T}^m \mathcal{P}_{\rho,q}^{r,s}(z) &= 2z - \mathcal{P}_{\rho,q}^r(z) + (-1)^{m-1} \overline{\mathcal{P}_{\rho,q}^s(z)} \end{aligned} \quad (4.37)$$

harmonik fonksiyonları tanımlanabilir.

$\mathcal{P}_{\rho,q}^{r,s} \in \mathcal{SH}$ ve $\mathcal{T}^m \mathcal{P}_{\rho,q}^{r,s} \in \mathcal{T}^m$ olduğu açıktır.

Lemma 4.4.6 (Shujaat, 2021)

(3.1) de verilen $f = h + \bar{g}$ olsun.

$0 \leq \beta < 1$, $0 \leq \eta \leq 1$, $\mathcal{A} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $0 < \rho < 1$ ve $0 < q < 1$ olmak üzere

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left[1 + \left([n]_{\rho,q} - 1 \right) \mathcal{A} \right] \left[|a_n| + |b_n| \right] \right\} \leq (1 - \beta) \mathcal{A} \quad (4.38)$$

şartı sağlanıyorsa $f \in \mathcal{SH}_{\rho,q}(\mathcal{A}, \eta, \beta)$ dır.

Uyarı 4.4.7

(4.35) de verilen $f = h + \bar{g}$ için $f \in \mathcal{SH}_{\rho,q}(\mathcal{A}, \eta, \beta)$ olması için gerek ve yeter şart

(4.38) eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Lemma 4.4.8 (Bayram, 2022)

(3.1) de verilen $f = h + \bar{g} \in \mathcal{SH}_{\rho,q}$ olsun.

$-1 \leq \nu < 0 < \varpi \leq 1$, $0 \leq \mathcal{A} < 1$, $0 < \rho < 1$, $0 < q < 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \varphi_n &= (\varpi \mathcal{A} - \nu) [n]_{\rho,q} + (1 - \mathcal{A}) ([n]_{\rho,q} - 1 + \varpi) \\ \psi_n &= (\varpi \mathcal{A} - \nu) [n]_{\rho,q} + (1 - \mathcal{A}) ([n]_{\rho,q} + 1 - \varpi) \end{aligned} \quad (4.39)$$

için

$$\sum_{n=2}^{\infty} (\varphi_n |a_n| + \psi_n |b_n|) \leq \varpi - \nu$$

şartı sağlanıyorsa $f \in \mathcal{SH}_{\rho,q}(\mathcal{A}, \varpi, \nu)$ dir.

Uyarı 4.4.9

(4.35) de verilen $f = h + \bar{g} \in \mathcal{SH}_{\rho,q}$ için $f \in \mathcal{SH}_{\rho,q}(\mathcal{A}, \varpi, \nu)$ olması için gerekli ve

yeterli koşul (4.39) ifadesinin sağlanmasıdır.

Teorem 4.4.10

Eğer $0 < \rho < 1$, $0 < q < 1$, $r > 0$, $s > 0$, $0 \leq \beta < 1$, $0 \leq \eta \leq 1$, $\mathcal{A} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ve

$$\eta \left(\frac{\rho+q}{2} \right) (r+s) + \frac{\eta}{2} e_{\rho,q}^{-r(1-\rho)} + \frac{\eta}{2} e_{\rho,q}^{-r(1-q)} + \frac{\eta}{2} e_{\rho,q}^{-s(1-\rho)} + \frac{\eta}{2} e_{\rho,q}^{-s(1-q)} \leq (1-\beta) \mathcal{A} + e_{\rho,q}^{-r} + e_{\rho,q}^{-s} + 2(\eta-1)$$

(4.40)

eşitsizliği sağlanıyorsa $\mathcal{P}_{\rho,q}^{r,s} \in \mathcal{SH}_{\rho,q}(\mathcal{A}, \eta, \beta)$ dir.

İspat:

$0 < \rho < 1$, $0 < q < 1$, $r > 0$, $s > 0$, $0 \leq \beta < 1$, $0 \leq \eta \leq 1$, $\mathcal{A} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ olsun. $\mathcal{P}_{\rho,q}^r$ ve $\mathcal{P}_{\rho,q}^s$

(4.36) eşitliğinde verilen fonksiyonlar olmak üzere $\mathcal{P}_{\rho,q}^{r,s} = \mathcal{P}_{\rho,q}^r(\mathcal{Z}) + \overline{\mathcal{P}_{\rho,q}^s(\mathcal{Z})} - \mathcal{Z}$

fonksiyonunun $\mathcal{SH}_{\rho,q}(\mathcal{A}, \eta, \beta)$ sınıfında olduğunu göstermek için Lemma 4.4.6

eşitsizliğini kullanarak

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left(1 + \left([n]_{\rho,q} - 1 \right) \eta \right) \frac{r^{n-1} e_{\rho,q}^{-r}}{[n-1]_{\rho,q}!} \right\} + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left(1 + \left([n]_{\rho,q} - 1 \right) \eta \right) \frac{s^{n-1} e_{\rho,q}^{-s}}{[n-1]_{\rho,q}!} \right\} \leq (1-\beta) \mathcal{A} \quad (4.41)$$

eşitsizliğini sağladığını göstermek yeterlidir. (3.5) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left(1 + \left([n]_{\rho,q} - 1 \right) \eta \right) \frac{r^{n-1} e_{\rho,q}^{-r}}{[n-1]_{\rho,q}!} \right\} + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left(1 + \left([n]_{\rho,q} - 1 \right) \eta \right) \frac{s^{n-1} e_{\rho,q}^{-s}}{[n-1]_{\rho,q}!} \right\} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ 1 + \left(\left(\frac{\rho+q}{2} \right) [n-1]_{\rho,q} + \frac{\rho^{n-1} + q^{n-1}}{2} - 1 \right) \eta \right\} \frac{r^{n-1} e_{\rho,q}^{-r}}{[n-1]_{\rho,q}!} \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ 1 + \left(\left(\frac{\rho+q}{2} \right) [n-1]_{\rho,q} + \frac{\rho^{n-1} + q^{n-1}}{2} - 1 \right) \eta \right\} \frac{s^{n-1} e_{\rho,q}^{-s}}{[n-1]_{\rho,q}!} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r^{n-1} e_{\rho,q}^{-r}}{[n-1]_{\rho,q}!} + \eta \left(\frac{\rho+q}{2} \right) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r^{n-1} e_{\rho,q}^{-r}}{[n-2]_{\rho,q}!} + \frac{\eta}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\rho^{n-1} r^{n-1} e_{\rho,q}^{-r}}{[n-1]_{\rho,q}!} + \frac{\eta}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{q^{n-1} r^{n-1} e_{\rho,q}^{-r}}{[n-1]_{\rho,q}!} - \eta \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r^{n-1} e_{\rho,q}^{-r}}{[n-1]_{\rho,q}!} \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{s^{n-1} e_{\rho,q}^{-s}}{[n-1]_{\rho,q}!} + \eta \left(\frac{\rho+q}{2} \right) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{s^{n-1} e_{\rho,q}^{-s}}{[n-2]_{\rho,q}!} + \frac{\eta}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\rho^{n-1} s^{n-1} e_{\rho,q}^{-s}}{[n-1]_{\rho,q}!} + \frac{\eta}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{q^{n-1} s^{n-1} e_{\rho,q}^{-s}}{[n-1]_{\rho,q}!} - \eta \sum_{n=2}^{\infty} \frac{s^{n-1} e_{\rho,q}^{-s}}{[n-1]_{\rho,q}!} \\ &= e_{\rho,q}^{-r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{[n]_{\rho,q}!} + \eta e_{\rho,q}^{-r} \left(\frac{\rho+q}{2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{[n]_{\rho,q}!} + \frac{\eta}{2} e_{\rho,q}^{-r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n r^n}{[n]_{\rho,q}!} + \frac{\eta}{2} e_{\rho,q}^{-r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n r^n}{[n]_{\rho,q}!} - \eta e_{\rho,q}^{-r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{[n]_{\rho,q}!} \\ &+ e_{\rho,q}^{-s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{[n]_{\rho,q}!} + \eta e_{\rho,q}^{-s} \left(\frac{\rho+q}{2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{[n]_{\rho,q}!} + \frac{\eta}{2} e_{\rho,q}^{-s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n s^n}{[n]_{\rho,q}!} + \frac{\eta}{2} e_{\rho,q}^{-s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n s^n}{[n]_{\rho,q}!} - \eta e_{\rho,q}^{-s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{[n]_{\rho,q}!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e_{\rho,q}^{-r} (e_{\rho,q}^r - 1) + \eta \left(\frac{\rho+q}{2} \right) e_{\rho,q}^{-r} e_{\rho,q}^r + \frac{\eta}{2} e_{\rho,q}^{-r} (e_{\rho,q}^{\rho r} - 1) + \frac{\eta}{2} e_{\rho,q}^{-r} (e_{\rho,q}^{qr} - 1) - \eta e_{\rho,q}^{-r} (e_{\rho,q}^r - 1) \\
&+ e_{\rho,q}^{-s} (e_{\rho,q}^s - 1) + \eta \left(\frac{\rho+q}{2} \right) e_{\rho,q}^{-s} e_{\rho,q}^s + \frac{\eta}{2} e_{\rho,q}^{-s} (e_{\rho,q}^{\rho s} - 1) + \frac{\eta}{2} e_{\rho,q}^{-s} (e_{\rho,q}^{qs} - 1) - \eta e_{\rho,q}^{-s} (e_{\rho,q}^s - 1)
\end{aligned}$$

(4.39) daki eşitsizliğe denk olarak

$$\frac{\eta}{2} e_{\rho,q}^{-r(1-\rho)} + \frac{\eta}{2} e_{\rho,q}^{-s(1-\rho)} + \frac{\eta}{2} e_{\rho,q}^{-r(1-q)} + \frac{\eta}{2} e_{\rho,q}^{-s(1-q)} + \eta \left(\frac{\rho+q}{2} \right) (r+s) \leq (1-\beta) \mathcal{A} + e_{\rho,q}^{-r} + e_{\rho,q}^{-s} - 2 + 2\eta$$

eşitsizliği sağlandığından buna denk olarak (4.40) da sağlanır. Bu da teoreminizi ispatlar.

Teorem 4.4.11

$0 < \rho < 1$, $0 < q < 1$, $r > 0$, $s > 0$, $-1 \leq \nu \leq 0$, $0 < \varpi \leq 1$, $0 \leq \mathcal{A} < 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&(\varpi \mathcal{A} - \mathcal{A} - \nu + 1) \left(\frac{\rho+q}{2} \right) (r+s) + \frac{(\varpi \mathcal{A} - \mathcal{A} - \nu + 1)}{2} e_{\rho,q}^{-r(1-\rho)} + \frac{(\varpi \mathcal{A} - \mathcal{A} - \nu + 1)}{2} e_{\rho,q}^{-s(1-q)} \\
&+ \frac{(\varpi \mathcal{A} - \mathcal{A} - \nu + 1)}{2} e_{\rho,q}^{-r(1-\rho)} + \frac{(\varpi \mathcal{A} - \mathcal{A} - \nu + 1)}{2} e_{\rho,q}^{-s(1-q)} \leq \varpi - \nu + (\varpi - \nu) e_{\rho,q}^{-r} + (2\varpi \gamma - 2\mathcal{A} \zeta - 2 - \varpi - \nu) e_{\rho,q}^{-s}
\end{aligned} \tag{4.42}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $\mathcal{P}_{\rho,q}^{r,s} \in \mathcal{SH}_{\rho,q}(\mathcal{A}, \varpi, \nu)$ dir.

İspat:

$\mathcal{P}_{\rho,q}^r$ ve $\mathcal{P}_{\rho,q}^s$ (4.34) eşitliğinde verilen fonksiyonlar olmak üzere

$\mathcal{P}_{\rho,q}^{r,s} = \mathcal{P}_{\rho,q}^r(\mathcal{Z}) + \overline{\mathcal{P}_{\rho,q}^s(\mathcal{Z}) - \mathcal{Z}}$ fonksiyonunun $\mathcal{SH}_{\rho,q}(\mathcal{A}, \varpi, \nu)$ sınıfında olduğunu

göstermek için Lemma 4.4.8'deki eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left((\varpi \mathcal{A} - \mathcal{A} - \nu + 1) \left([n]_{\rho,q} \right) + (1 - \mathcal{A})(\varpi - 1) \right) \frac{r^{n-1} e_{\rho,q}^{-r}}{[n-1]_{\rho,q}!} \right\} \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left((\varpi \mathcal{A} - \mathcal{A} - \nu + 1) \left([n]_{\rho,q} \right) + (1 - \mathcal{A})(\varpi - 1) \right) \frac{s^{n-1} e_{\rho,q}^{-s}}{[n-1]_{\rho,q}!} \right\} \leq \varpi - \nu
\end{aligned} \tag{4.43}$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir. (3.5) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left((\varpi d' - d' - \nu + 1) \binom{[n]_{\rho, q}}{\rho, q} + (1 - d')(\varpi - 1) \right) \frac{r^{n-1} e^{-r}_{\rho, q}}{[n-1]_{\rho, q}!} \right\} \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left((\varpi d' - d' - \nu + 1) \binom{[n]_{\rho, q}}{\rho, q} + (1 - d')(\varpi - 1) \right) \frac{s^{n-1} e^{-s}_{\rho, q}}{[n-1]_{\rho, q}!} \right\} \\
& = \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left((\varpi d' - d' - \nu + 1) \left(\left(\frac{\rho + q}{2} \right) [n-1]_{\rho, q} + \frac{\rho^{n-1} + q^{n-1}}{2} - 1 \right) + (1 - d')(\varpi - 1) \right) \frac{r^{n-1} e^{-r}_{\rho, q}}{[n-1]_{\rho, q}!} \right\} \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left((\varpi d' - d' - \nu + 1) \left(\left(\frac{\rho + q}{2} \right) [n-1]_{\rho, q} + \frac{\rho^{n-1} + q^{n-1}}{2} - 1 \right) + (1 - d')(\varpi - 1) \right) \frac{s^{n-1} e^{-s}_{\rho, q}}{[n-1]_{\rho, q}!} \right\} \\
& = (\varpi d' - d' - \nu + 1) \left(\frac{\rho + q}{2} \right) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r^{n-1} e^{-r}_{\rho, q}}{[n-2]_{\rho, q}!} + \frac{(\varpi d' - d' - \nu + 1)}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\rho^{n-1} r^{n-1} e^{-r}_{\rho, q}}{[n-1]_{\rho, q}!} \\
& + \frac{(\varpi d' - d' - \nu + 1)}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{q^{n-1} r^{n-1} e^{-r}_{\rho, q}}{[n-1]_{\rho, q}!} + (1 - d')(\varpi - 1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r^{n-1} e^{-r}_{\rho, q}}{[n-1]_{\rho, q}!} \\
& + (\varpi d' - d' - \nu + 1) \left(\frac{\rho + q}{2} \right) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{s^{n-1} e^{-s}_{\rho, q}}{[n-2]_{\rho, q}!} + \frac{(\varpi d' - d' - \nu + 1)}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\rho^{n-1} s^{n-1} e^{-s}_{\rho, q}}{[n-1]_{\rho, q}!} \\
& + \frac{(\varpi d' - d' - \nu + 1)}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{q^{n-1} s^{n-1} e^{-s}_{\rho, q}}{[n-1]_{\rho, q}!} + (1 - d')(\varpi - 1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{s^{n-1} e^{-s}_{\rho, q}}{[n-1]_{\rho, q}!} \\
& = (\varpi d' - d' - \nu + 1) \left(\frac{\rho + q}{2} \right) r e^{-r}_{\rho, q} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{[n]_{\rho, q}!} + \frac{(\varpi d' - d' - \nu + 1)}{2} e^{-r}_{\rho, q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n r^n}{[n]_{\rho, q}!} \\
& + \frac{(\varpi d' - d' - \nu + 1)}{2} e^{-r}_{\rho, q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n r^n}{[n]_{\rho, q}!} + (1 - d')(\varpi - 1) e^{-r}_{\rho, q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{[n]_{\rho, q}!} \\
& + (\varpi d' - d' - \nu + 1) \left(\frac{\rho + q}{2} \right) s e^{-s}_{\rho, q} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{[n]_{\rho, q}!} + \frac{(\varpi d' - d' - \nu + 1)}{2} e^{-s}_{\rho, q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n s^n}{[n]_{\rho, q}!} \\
& + \frac{(\varpi d' - d' - \nu + 1)}{2} e^{-s}_{\rho, q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n s^n}{[n]_{\rho, q}!} + (1 - d')(\varpi - 1) e^{-s}_{\rho, q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{[n]_{\rho, q}!} \\
& = (\varpi d' - d' - \nu + 1) \left(\frac{\rho + q}{2} \right) r + \frac{(\varpi d' - d' - \nu + 1)}{2} e^{-r}_{\rho, q} (e^{\rho r}_{\rho, q} - 1) \\
& + \frac{(\varpi d' - d' - \nu + 1)}{2} e^{-r}_{\rho, q} (e^{q r}_{\rho, q} - 1) + (1 - d')(\varpi - 1) e^{-r}_{\rho, q} (e^r_{\rho, q} - 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(\varpi \mathcal{A} - \mathcal{A} - \nu + 1) \left(\frac{\rho + q}{2} \right)^s + \frac{(\varpi \mathcal{A} - \mathcal{A} - \nu + 1)}{2} e_{\rho, q}^{-s} (e_{\rho, q}^{\rho s} - 1) \\
& + \frac{(\varpi \mathcal{A} - \mathcal{A} - \nu + 1)}{2} e_{\rho, q}^{-s} (e_{\rho, q}^{\rho s} - 1) + (1 - \mathcal{A})(\varpi - 1) e_{\rho, q}^{-s} (e_{\rho, q}^s - 1)
\end{aligned}$$

(4.43) deki eşitsizliğe denk

$$\begin{aligned}
& (\varpi \mathcal{A} - \mathcal{A} - \nu + 1) \left(\frac{\rho + q}{2} \right) (\rho + s) + \frac{(\varpi \mathcal{A} - \mathcal{A} - \nu + 1)}{2} e_{\rho, q}^{-s(1-\rho)} + \frac{(\varpi \mathcal{A} - \mathcal{A} - \nu + 1)}{2} e_{\rho, q}^{-s(1-q)} \\
& + \frac{(\varpi \mathcal{A} - \mathcal{A} - \nu + 1)}{2} e_{\rho, q}^{-s(1-\rho)} + \frac{(\varpi \mathcal{A} - \mathcal{A} - \nu + 1)}{2} e_{\rho, q}^{-s(1-q)} \\
& - (\varpi - \nu) e_{\rho, q}^{-s} - (2\varpi \mathcal{A} - 2\mathcal{A} - 2 - \varpi - \nu) e_{\rho, q}^{-s} \leq \varpi - \nu
\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece (4.42) daki eşitsizlik sağlanır. Bu da teoremimizi ispatlar.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümde tezde yer alan tüm çalışmalarımızda ulaştığımız sonuçlara yer verilmiştir. Tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tez ilgili temel bilgiler verilmiştir. İkinci bölüm olan önceki çalışmalar kısmında; analitik fonksiyonlar, ünivalent fonksiyonlar, ünivalent fonksiyonların bazı alt sınıfları ve m -katlı fonksiyon sınıfların önemli ve temel tanımları ile teoremleri verilmiştir. Tezin üçüncü bölümü olan materyal ve metod kısmında; tezde kullandığımız harmonik fonksiyonlar, Poisson dağılımı, q -benzer ve (p, q) -benzer ile temel ve önemli tanım ve teoremler verilmiştir. Tezin dördüncü kısmı araştırma bulguları bölümünde ise dört ayrı çalışma yer almaktadır.

Birinci çalışmamızda $\mathcal{H}_m^{k,\delta}(\mathcal{A}, \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ sınıfının gerekli ve yeterli Hadamard çarpım şartları, distorsiyon teoremleri, kompaktlık ve ekstrem noktaları gibi bazı özellikleri incelenmiştir. Bu sınıfa ait bazı sonuçlar aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Sonuç 5.1

Uygun parametreler kullanılarak $\mathcal{H}_m^{k,\delta}(\mathcal{A}, \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ sınıfı harmonik fonksiyonların bazı alt sınıflarına indirgenebilir. Bu sınıflardan bazıları aşağıdaki şekildedir;

- $\mathcal{H}_m^{k,1}(0, \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{F}) = \mathcal{H}_{p,k}(\alpha, A, B)$ (Çakmak 2020),
- $\mathcal{H}_1^{0,1}(0, \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{F}) = \mathcal{J}_{\mathcal{H}}^*(\alpha, A, B)$ (Çakmak 2020),
- $\mathcal{H}_1^{k,1}(0, \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{F}) = \mathcal{H}(\mathcal{K}, \alpha, A, B)$ (Altınkaya 2018),
- $\mathcal{H}_1^{k,1}(0, 0, \mathcal{L}, \mathcal{F}) = \mathcal{H}_{\mathcal{K}}(A, B)$ (Dziok 2019),
- $\mathcal{H}_1^{1,0}(0, 0, \mathcal{L}, \mathcal{F}) = \mathcal{J}_{\mathcal{H}}^*(A, B)$ (Dziok 2015),
- $\mathcal{H}_m^{k,1}(0, 0, 2\alpha - 1, 1) = \mathcal{H}_{\rho}(\mathcal{K} + 1, \mathcal{K}, \alpha)$ (Jahangiri 2009),
- $\mathcal{H}_m^{1,1}(0, 0, 2\alpha - 1, 1) = \mathcal{K}_{\mathcal{H}}(\rho, \alpha)$ (Ahuja 2001),
- $\mathcal{H}_m^{0,1}(0, 0, 2\alpha - 1, 1) = \mathcal{J}_{\mathcal{H}}^*(\rho, \alpha)$ (Ahuja 2001, Jahangiri 1999),
- $\mathcal{H}_1^{\mathcal{K},1}(0, 0, 2\alpha - 1, 1) = \mathcal{H}(\mathcal{K}, \alpha)$ (Jahangiri 2002),
- $\mathcal{H}_1^{1,1}(0, 0, 2\alpha - 1, 1) = \mathcal{K}_{\mathcal{H}}(\alpha)$ (Jahangiri 1999),
- $\mathcal{H}_1^{0,1}(0, 0, 2\alpha - 1, 1) = \mathcal{J}_{\mathcal{H}}^*(\alpha)$ (Jahangiri 1999),
- $\mathcal{H}_1^{1,1}(0, 0, -1, 1) = \mathcal{K}_{\mathcal{H}}$ (Silverman 1999),
- $\mathcal{H}_1^{0,1}(0, 0, -1, 1) = \mathcal{J}_{\mathcal{H}}^*$ (Silverman 1998).

Sonuç 5.2

$f = h + \bar{g}$, (3.1) formunda verilen bir fonksiyon olsun. $f \in \overline{\mathcal{SH}}_m^{k,\delta}(\mathcal{A}, \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ ise

$$v(m, k, \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{E}) = (m+1)^k \left\{ 1 - dm^2 + \mathcal{E}m + \mathcal{E} - (dm^2 + dm - d + 1) [m\mathcal{E} + (m - \alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{E})] \right\} \\ - m^k \left\{ m(d - dm + \mathcal{E}) - (dm^2 + d - 1) [m\mathcal{E} + (m - \alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{E})] \right\}$$

ve

$$\mu(m, k, \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{E}) = m^k \left\{ m(2 - dm - d + \mathcal{E}) + (dm^2 - d + 1) [m\mathcal{E} + (m - \alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{E})] \right\} \\ + (m+1)^k \left\{ 1 - d m^2 + \mathcal{E}m + \mathcal{E} - (dm^2 + dm - d + 1) [m\mathcal{E} + (m - \alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{E})] \right\}$$

olmak üzere

$$\left\{ \omega : |\omega| < \frac{v(m, k, \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{E}) + \mu(m, k, \alpha, \mathcal{L}, \mathcal{E}) |b_m|}{1 - dm^2 + \mathcal{E}m + \mathcal{E} - (dm^2 + dm - d + 1) [m\mathcal{E} + (m - \alpha)(\mathcal{L} - \mathcal{E})]} \right\} \subset \mathcal{f}(\mathcal{U})$$

dir.

İkinci çalışmamızda, Dziok'un 2015 yılındaki çalışmalarında kullanılan metod yardımıyla q -operatörü ile tanımladığımız $\mathcal{SH}_q^k(\mathcal{A}, \delta, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ sınıfınının gerekli ve yeterli Hadamard çarpım şartları, distorsiyon sınırları, kompaktlık ve ekstrem noktaları gibi bazı özellikleri incelenmiştir. Bu sınıfa ait bazı sonuçlar aşağıdaki şekilde verilmiştir.

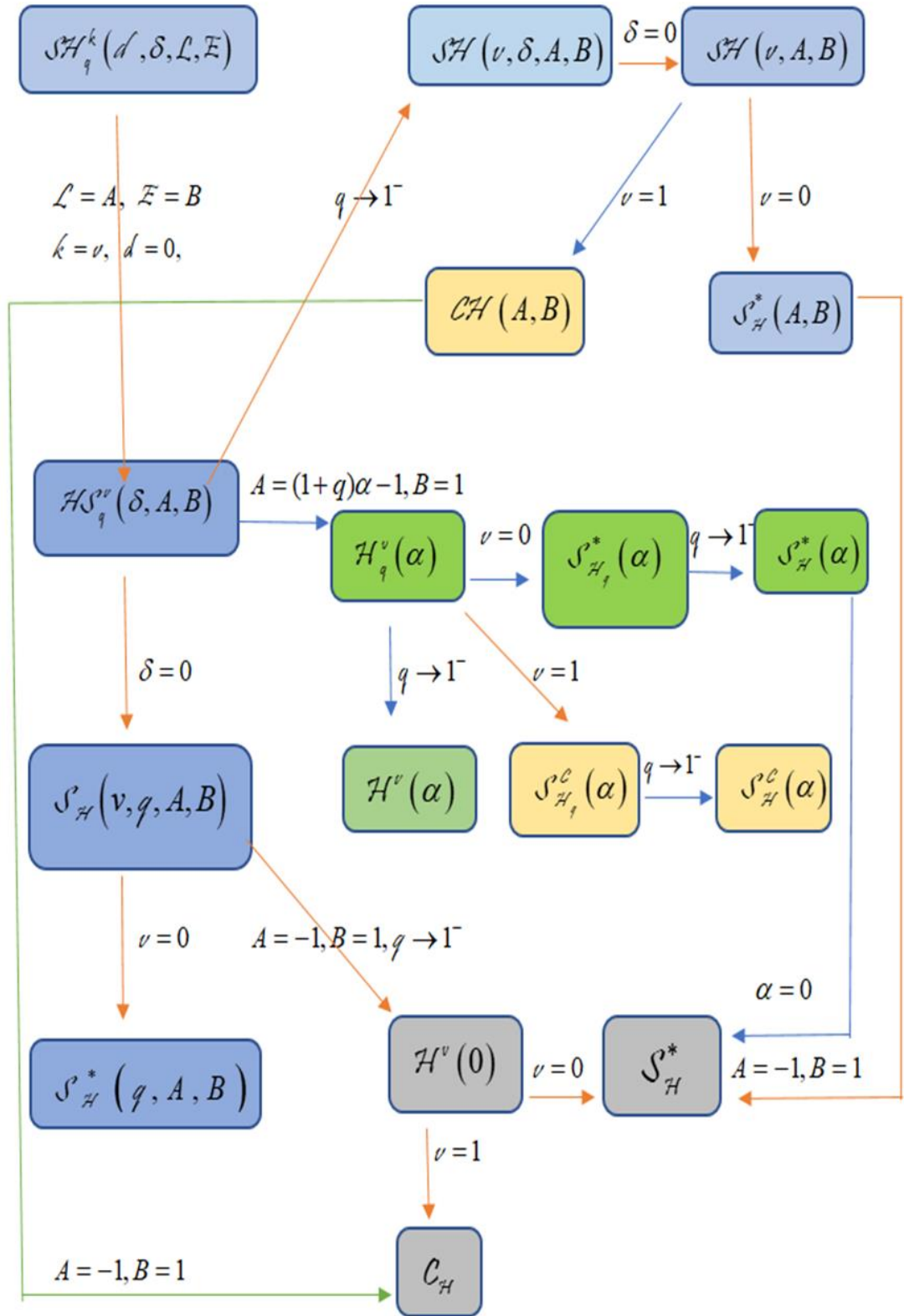
Sonuç 5.3

Uygun parametreler kullanılarak $\mathcal{SH}_q^k(\mathcal{A}, \delta, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ sınıfı harmonik fonksiyonların bazı alt sınıflarına indirgenebilir. Bu sınıflardan bazıları aşağıdaki şekildedir;

- $\mathcal{SH}_q^k(0, \delta, \mathcal{L}, \mathcal{E}) = \mathcal{HS}_q^\nu(\delta, A, B)$ (Yalçın, 2022),
- $\mathcal{SH}_q^k(0, 0, \mathcal{L}, \mathcal{E}) = \mathcal{S}_{\mathcal{H}}(\nu, q, A, B)$ (Sharma, 2020),
- $\mathcal{SH}_q^0(0, 0, \mathcal{L}, \mathcal{E}) = \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^*(q, A, B)$ (Sharma, 2020, Yalçın, 2020),
- $\mathcal{SH}_q^1(0, 0, \mathcal{L}, \mathcal{E}) = \mathcal{CH}_q(A, B)$ (Yalçın, 2020),
- $\mathcal{SH}_q^k(0, 0, (1+q)\alpha - 1, q) = \mathcal{H}_q^\nu(\alpha)$ $0 \leq \alpha < 1$ (Jahangiri, 2018),

- $\mathcal{H}_q^k(0, 0, (1+q)\alpha - 1, q) = \mathcal{H}_q^*(\alpha) \quad 0 \leq \alpha < 1 \quad (\text{Ahuja, 2020}),$
- $\mathcal{H}_q^1(0, 0, (1+q)\alpha - 1, q) = \mathcal{H}_q^{\mathcal{L}}(\alpha) \quad 0 \leq \alpha < 1 \quad (\text{Ahuja, 2019}),$
- $\mathcal{H}_q^k(0, \delta, \mathcal{L}, \mathcal{E}) = \mathcal{H}(\nu, \delta, A, B), \quad q \rightarrow 1^- \quad (\text{Altinkaya, 2018}),$
- $\mathcal{H}_q^k(0, 0, \mathcal{L}, \mathcal{E}) = \mathcal{H}(\nu, A, B), \quad q \rightarrow 1^- \quad (\text{Dziok 2016}),$
- $\mathcal{H}_q^0(0, 0, \mathcal{L}, \mathcal{E}) = \mathcal{H}^*(A, B), \quad q \rightarrow 1^- \quad (\text{Jahangiri 1999, Jahangiri 2018}),$
- $\mathcal{H}_q^1(0, 0, \mathcal{L}, \mathcal{E}) = \mathcal{CH}(A, B), \quad q \rightarrow 1^- \quad (\text{Dziok 2016}),$
- $\mathcal{H}_q^k(0, 0, (1+q)\alpha - 1, q) = \mathcal{H}^v(\alpha), \quad 0 \leq \alpha < 1 \text{ ve } q \rightarrow 1^- \quad (\text{Jahangiri, 2002}),$
- $\mathcal{H}_q^0(0, 0, (1+q)\alpha - 1, q) = \mathcal{H}^*(\alpha), \quad 0 \leq \alpha < 1 \text{ ve } q \rightarrow 1^- \quad (\text{Jahangiri, 1999, Öztürk 2002}),$
- $\mathcal{H}_q^k(0, 0, -1, q) = \mathcal{H}^v(0), \quad q \rightarrow 1^- \quad (\text{Jahangiri, 2002}),$
- $\mathcal{H}_q^0(0, 0, -1, q) = \mathcal{H}^*(\alpha), \quad q \rightarrow 1^- \quad (\text{Silverman, 1999}),$
- $\mathcal{H}_q^1(0, 0, -1, q) = \mathcal{C}_{\mathcal{H}}, \quad q \rightarrow 1^- \quad (\text{Silverman, 1999}).$

$\mathcal{H}_q^k(\mathcal{A}, \delta, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ sınıfının diğer sınıflar ile arasındaki bağlantılar aşağıda Şekil 5.2’de açıkça görülmektedir. Şekilde oklar üzerinde gösterilen parametre değişiklikleri yapıldığında sınıflar arasındaki geçişler görülmektedir.



Şekil 5.2 $\mathcal{SH}_q^k(\mathcal{A}, \delta, \mathcal{L}, \mathbb{E})$ sınıfı ile diğer harmonik alt sınıflar arasındaki bağlantılar

Üçüncü çalışmamızda q -Poisson dağılımları yardımıyla tanımlanan $\mathcal{SH}_q(\mathcal{A}, \eta, \beta)$ sınıfı için q -harmonik olma şartları incelenmiştir. Bu sınıfa ait bazı sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Sonuç 5.4

$r > 0, s > 0, 0 < q < 1, 0 \leq \beta < 1, \mathcal{A} \in \mathbb{C} - \{0\}$ ve $0 \leq \eta \leq 1$ olmak üzere (4.19) ile tanımlanan $\mathcal{TP}_q^{r,s}$ fonksiyonunun $\mathcal{SH}_q(\mathcal{A}, \eta, \beta)$ sınıfında olması için gerek ve yeter şart (4.27)'deki ifadenin sağlanmasıdır.

Sonuç 5.5

$r > 0, s > 0, 0 \leq \beta < 1, \mathcal{A} \in \mathbb{C} - \{0\}$ ve $0 \leq \eta \leq 1$ olmak üzere (4.19) ile tanımlanan $\mathcal{TP}^{r,s}$ fonksiyonunun $\mathcal{SH}(\mathcal{A}, \eta, \beta)$ sınıfında olması için gerek ve yeter şart (4.28)'deki ifadenin sağlanmasıdır.

Sonuç 5.6

$r > 0, s > 0, 0 \leq \beta < 1$ ve $0 \leq \eta \leq 1$ olmak üzere (4.19) ile tanımlanan $\mathcal{TP}^{r,s}$ fonksiyonunun $\mathcal{SH}(\eta, \beta)$ sınıfında olması için gerek ve yeter şart (4.30)'daki ifadenin sağlanmasıdır.

Dördüncü çalışmamızda, (ρ, q) -Poisson dağılımları yardımıyla tanımlanan $\mathcal{SH}_{\rho,q}(\mathcal{A}, \varpi, \nu)$ ve $\mathcal{SH}_{\rho,q}(\mathcal{A}, \eta, \beta)$ sınıflarının (ρ, q) -harmonik olma şartları incelenmiştir. Bu sınıflara ait bazı sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Sonuç 5.7

$r > 0, s > 0, 0 \leq \beta < 1, 0 \leq \eta \leq 1, \mathcal{A} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, 0 < \rho < 1, 0 < q < 1$, olmak üzere (4.37)'deki ifade ile tanımlanan $\mathcal{TP}_q^{r,s}$ fonksiyonunun $\mathcal{SH}_{\rho,q}(\mathcal{A}, \eta, \beta)$ sınıfının elmanı olması için gerek ve yeter koşul (4.41)'deki ifadenin sağlanmasıdır.

Sonuç 5.8

$r > 0, s > 0, 0 < \rho < 1, 0 < q < 1, -1 \leq \nu \leq 0, 0 < \varpi \leq 1, 0 \leq \mathcal{A} < 1$ olmak üzere (4.37)'deki ifade ile tanımlanan $\mathcal{TP}_{\rho,q}^{r,s}$ fonksiyonunun $\mathcal{SH}_{\rho,q}(\mathcal{A}, \varpi, \nu)$ sınıfında olması için gerek ve yeter şart (4.43)'deki ifadenin sağlanmasıdır.

Tezdeki çalışmalarda, Hadamard çarpımı, subordinasyon metodu, Poisson dağılımı, q -Poisson dağılımı (p, q) -Poisson dağılımı, q -kalkülüs gibi kavram ve metodlar kullanılarak harmonik fonksiyonların farklı sınıfları için araştırmalarda bulunuldu. Bu araştırmalarda ulaşılan sonuçların bir kısmı “*Journal of Mathematical Extension*” (Canbulat ve Sakar, 2023) ve “*Bulletin of the International Mathematical Virtual Institute*” (Canbulat ve ark, 2024) dergilerinde yayınlanmıştır. Elde edilen sonuçlara benzer şekilde bundan sonraki çalışmalarda da özellikle son yıllarda geniş bir uygulama alanına sahip olan q -kalkülüs yardımıyla farklı harmonik sınıfları tanımlanabilir. Subordinasyon metodu veya farklı metodlarla gerekli ve yeterli Hadamard çarpım şartları, farklı seri dağılımları gibi bazı özellikler araştırılarak literatüre katkıda bulunulabilir.



KAYNAKLAR

- Ahuja, O.P., Jahangiri, (2001). J.M. Multivalent harmonic starlike functions, Ann Univ Mariae Cruie Sklod Sec A 55(1) 1-13.
- Altinkaya, Ş., Porwal S., Yalçın S. (2019). The Poisson Distribution Series of General Subclasses of Univalent Functions, Acta Universitatis Apulensis, 58-2, 45-52.
- Altinkaya, S., Çakmak S. and Yalçın S. (2018). On a new class of Salagean-type harmonic univalent functions associated with subordination, Honam Mathematical Journal 40(3), 433-446.
- Altinkaya, Ş. Çakmak S and Yalçın S, (2020). A new class of Salagean type multivalent Harmonic Functions Defined by Subordination., Iran J Sci Technol Trans Sci.
- Bieberbach, L., (1916). Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys-Math. Kl. : 940–955
- Branges, L.de., (1984). A proof of the Bieberbach conjecture, preprint E-5-84, Steklov Math. Inst., Leningrad Branch, 1-21
- Canbulat A., Sakar F. M. (2023). A Study on Harmonic Univalent Function with $(p; q)$ -Calculus and Introducing (p,q) -Poisson Distribution Series, Journal of Mathematical Extension, Vol:17, No.4, (5) 1-18
- Canbulat A., Sakar F. M., and Şeker B., (2024). A Study On A Harmonic Univalent Functions In Terms Of Q Difference Operator, Bull. Int. Math. Virtual Inst., 12(2), 001-001
- Caratheodory, C., (1907). Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen Math. Ann., 64, 95-115.
- Clunie J., Sheil-Small T. (1984). Harmonic univalent functions, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 9 3-25
- Duren, P.L., (1983). Univalent Functions, Grundlehren der Math. Wissenschaften 259, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo
- Dziok, J. (2015). Lasses of harmonic functions defined by subordination, Abstr Appl Anal 756928
- Goodman, A. W., (1983). Univalent Functions, Vols. I and II, Polygonal Publishing House, Washington, New Jersey
- Jackson, F. H. (1907). On q -functions and a certain difference operator, Transactions of the Royal Society of Edinburgh, Vol:46 253-281
- Jahangiri, J.M., Şeker, B., Sümer Eker S. (2009). Salagean-type harmonic multivalent functions., Acta Univ Apulensis Math Inform. 18 233-244.

- Jahangiri J.M. (2018). Harmonic univalent functions defined by q - calculus operators, Inter. J. Math. Anal. Appl. 5(2) 39-43
- Ismail M. E. H., Merkes E., Steyr D. (1990). A generalization of starlike functions, Complex Variables Theory Appl. 14(1) 77-84.
- Kac, V. ve Cheung, P. (2002). Quantum Calculus, Universitex, Springer-Verlag, New York.
- Lewin, M., (1967). "On a coefficient problem for bi-univalent functions", Proc. Amer. Math. Soc., (18): 63-68.
- Lakshminarayanan, V., Ramachandran C., Bulboaca T. (2021). Certain subclasses of spirallike univalent functions related to Poisson distribution series., Turkish Journal of Mathematics 45.3 1449-1458
- Miller, S. S., Mocanu, P. T. (1981). Differential subordinations and univalent functions, Michigan Math. J., 28 157-171.
- Ponnusamy, S. and Silverman, H., (2006). Complex Variables with Applications, Birkhauser, Boston.
- Porwal, S. Srivastava D. (2017). Harmonic starlikeness and convexity of integral operators generated by Poisson distribution series, Math. Morav. 21(1) 51-60
- Robertson, M.S., (1936). On the theory of univalent functions, Ann. of Math. (37): 374-408.
- Sadjang, P.N. (2013). On the fundamental theorem of (p, q) -calculus and some (p, q) -Taylor formulas. arXiv, arXiv:1309.3934
- Shujaat, A. S., Asghar A. M., Muhammed A. S., Khalida I. N (2021). On New Subclass of Harmonic Univalent Functions Associated with Modified Q -Operator, Intenational J. of An. and App. 19-6, 826-835,
- Silverman, H. and Silvia, E. M. (1999). Subclasses of harmonic univalent functions, New Zealand J. Math. 28, 275-284.
- Yalçın, S. and Bayram, H. (2021) On Harmonic Univalent Functions Involving q -Poisson Distribution Series, MJPS, Vol. (8), No.(2),
- Yalçın, S. and Bayram, H. (2022). q -Analogue of New Subclass of Salagean-type Harmonic Univalent Functions defined by Subordination, Earthline Journal of Mathematical Sciences, 2581-8147 Volume 9, Number 2, Pages 165-178.
- Yalçın, S. and Bayram, H. (2020). Some properties on q -starlike harmonic functions defined by subordination, Appl. Anal. Optim. 4(3), 299-308

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyad, Ad

CANBULAT, Adnan

Web sayfası

(Research Gate, Academia, vs.)

Eğitim Bilgileri

Derece	Kurum	Mezuniyet Yılı
Yüksek Lisans	Batman Üniversitesi	2019
Lisans	Hacettepe Üniversitesi	2006
Lise	İvriz And. Öğr. Lisesi	2000

İş Deneyimi

Dönem (Yıl)	Şirket, Kurum	Görev
2006-2012	Özel Dersaneler	Öğretmen
2012-...	MEB Batman Lisesi	Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce

Almanca

Yayınlar

1. Sakar F. M., Canbulat A.(2019). Inequalities on coefficients for certain classes of m-fold symmetric and bi-univalent functions equipped with Faber polynomial, Turk. J. Math. 43: 293 – 300
2. Sakar F. M., Canbulat A. (2021). Quasi-subordinations for a subfamily of bi-univalent functions associated with k-analogue of Bessel function, Journal of Mathematical Analysis, Volume 12 Issue 1,Pages 1-12.
3. Canbulat A., Sakar F. M. (2023). A Study on Harmonic Univalent Function with (p; q)-Calculus and Introducing (p,q)-Poisson Distribution Series, Journal of Mathematical Extension, Vol:17, No.4, (5) 1-18
4. Canbulat A., Sakar F. M., and Şeker B. (2024) A Study On a Harmonic Univalent Functions in Terms of Q Difference Operator, Bull. Int. Math. Virtual Inst., 12(2), 001-001

Özel İlgiler

Şiir, psikoloji, teknolojik gelişmeler,

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ BENZERLİK BİLDİRİMİ FORMU

Öğrencinin Adı, Soyadı	Adnan CANBULAT		
Öğrenci No	19804501		
Ana Bilim Dalı	Matematik		
Program Türü	Proje ☐	Yüksek Lisans ☐	Doktora ☒
Tez Danışmanı (Ünvanı, Adı, Soyadı)	Doç. Dr. Fethiye Müge SAKAR		
(Varsa) II. Tez Danışmanı (Ünvanı, Adı, Soyadı)			
Tez Başlığı	Subordinasyon Metodu İle Tanımlanmış Bazı Harmonik Fonksiyon Sınıflarına Ait Özellikler		
RAPOR BİLGİLERİ			
Raporlama Aşaması	Tez Savunma Sınavı Sonrası		
Sayfa Sayısı	92		
Raporlama Tarihi	15/05/ 2024		
Benzerlik Oranı (%)	% 24		

Yukarıda bilgileri verilen tez çalışmamın toplam 92 sayfalık kısmına ilişkin, 15/05/2024 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından Turnitin isimli intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 24 olarak tespit edilmiştir.

Uygulanan filtrelemeler:

- ☐Başlangıç Bölümleri (Kabul ve Onay sayfası, Teşekkür sayfası, Özet/Abstract) hariç
☐Kaynaklar hariç
☐Alıntılar hariç/dâhil
☒Diğer (Herşey dahil)

Tezimin benzerlik oranı, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İntihal Raporu Uygulama Esaslarında belirtilen üst sınır benzerlik oranını aşmamaktadır. Benzerlik oranım üst sınır benzerlik oranının altında olsa dahi aksinin tespit edilmesi durumunda her türlü yasal sorumluluğu kabul ettiğimi ve hukuki sonuçlarına razı olduğumu bildirir, gereğini arz ederim.

Öğrencinin

Adnan CANBULAT

Tarih: 15.05.2024

İmza:

Danışman Doç. Dr. Fethiye Müge SAKAR

Tarih: 15.05.2024

İmza:

Ana Bilim Dalı Başkanı Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY

Tarih: 15.05.2024

İmza: