

**T.C.  
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SÜREKLİ Z-SAYILARI**

**MATEMATİK BÖLÜMÜ  
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**NURGÜL TÜRK**

**AĞUSTOS 2017**

**Sürekli Z-Sayıları**

**Gaziantep Üniversitesi**

**Matematik Bölümü**

**Yüksek Lisans Tezi**

**Danışman**

**Doç. Dr. Necati OLGUN**

**Nurgül TÜRK**

**Ağustos 2017**



©2017[Nurgül TÜRK]

T.C.  
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tezin Adı: Sürekli Z Sayıları

Öğrencinin Adı Soyadı: Nurgül TÜRK

Tez Savunma Tarihi: 06.10.2017

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı:

  
Prof. Dr. A. Necmeddin YAZICI  
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans Tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

  
Prof. Dr. Adil KILIÇ  
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımda okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

  
Doç. Dr. Necati OLGUN  
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans Tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:

Doç. Dr. Memet ŞAHİN

Doç. Dr. Mehmet KULE

Doç. Dr. Necati OLGUN

İmzası  
  
.....  
  
.....  
  
.....

## **ABSTRACT**

### **Some Continuous Z-Numbers**

TÜRK , Nurgül

M. Sc. Thesis, Math Department

Adviser : Doç. Dr. Necati OLGUN

In this thesis some Z numbers and Continuous Z numbers are studied. The first section the preliminaries that are required in this thesis are presented. The second section focuses on the fuzzy logic. In the third section the basic definitions and their properties related to Z numbers. In the fourth section the basic definitions and their properties related to Continuous Z numbers.

In the last section arithmetic on the Z Sayıları are studied.

**Key words:** Fuzzy Logic, Z Numbers , Continuous Z Numbers

**ÖZET**  
**SÜREKLİ Z SAYILARI HAKKINDA**

TÜRK, Nurgül

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Doç. Dr. Necati OLGUN

2017, 51 Sayfa

Bu tezde Z Sayıları ve Sürekli Z Sayıları incelenmiştir.

İlk bölümde bu çalışma ile ilgili ön bilgiler sunulmuştur. İkinci bölümde bulanık mantıktan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde Z sayıları hakkında temel tanım ve özelliklere yer verilmiştir. Dördüncü Bölümde Sürekli Z sayıları hakkında temel tanım ve özelliklere yer verilmiştir.

Son bölümde Sürekli Z sayıları üzerinde aritmetik işlemlere yer verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Bulanık Mantık, Z sayısı , Sürekli Z Sayısı

*Çok Kıymetli Anneme ve Eşime...*

## TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince gösterdiği yol ve yöntemlerle desteğini esirgemeyen Sayın Hocam Doç. Dr. Necati OLGUN'a ve sabırlarıyla destek olan kıymetli aileme ve eşime , maddi manevi desteklerinden dolayı sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.



**İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim**

**Nurgül TÜRK**

## İÇİNDEKİLER

|                                           | Sayfa |
|-------------------------------------------|-------|
| ABSTRACT.....                             | v     |
| ÖZET.....                                 | vi    |
| TEŞEKKÜR.....                             | viii  |
| İÇİNDEKİLER.....                          | x     |
| 1.BÖLÜM: GİRİŞ.....                       | 1     |
| 2.BÖLÜM:BULANIK MANTIK.....               | 3     |
| 2.1.Bulanık Deyim.....                    | 3     |
| 2.2.Bulanık Mantık Özellikleri.....       | 4     |
| 2.3.Bulanık Mantık İşlemcileri.....       | 4     |
| 2.4.Sözel Değişkenler.....                | 4     |
| 2.5.Bulanık Kural.....                    | 5     |
| 2.6.Üçüncünün Olmazlığı İlkesi.....       | 5     |
| 2.7.Küme Kavramları ve Mantık.....        | 5     |
| 2.8.Üyelik Fonksiyonu.....                | 6     |
| 2.9.Kesim Kümesi.....                     | 6     |
| 2.10.Bulanık Mantık.....                  | 6     |
| 2.11.Bulanık Küme.....                    | 7     |
| 2.11.1.Belirsizlikte Bulanık Kümeler..... | 10    |
| 2.11.2.Bulanık Küme Büyüklüğü.....        | 10    |
| 2.11.3.Bulanık Sayı İşlemcileri.....      | 11    |
| 2.11.4.Belirsizlik ve Modelleme.....      | 11    |
| 2.12.Bulanık Teori.....                   | 12    |
| 2.13.Olabilirlik ve Olasılık.....         | 13    |
| 2.13.1.Bulanık Olay ve Olasılık.....      | 14    |
| 2.14.Bulanıklık Ölçümü.....               | 14    |

|                                                     |    |
|-----------------------------------------------------|----|
| 3.BÖLÜM:Z SAYILARI HAKKINDA .....                   | 16 |
| 3.1.Z Sayısı.....                                   | 16 |
| 3.2.Z Sayıları ile Hesaplama.....                   | 21 |
| 4.BÖLÜM:SÜREKLİ Z SAYILARI HAKKINDA.....            | 27 |
| 4.1.Sürekli Z Sayıları Hakkında Temel Bilgiler..... | 27 |
| 4.2.Z Sayıları Üzerinde Dört Aritmetik İşlem.....   | 28 |
| 4.3.Pozitif Z Sayıları.....                         | 29 |
| 4.4.Gizli Z Sayıları.....                           | 31 |
| 5.BÖLÜM:SÜREKLİ Z SAYILARI ÜZERİNDE İŞLEMLER.....   | 32 |
| 5.1.Sürekli Z Sayılarının Eklenmesi.....            | 32 |
| 5.2. Sürekli Z Sayılarının Çıkarılması.....         | 38 |
| 5.3. Sürekli Z Sayılarının Çarpımı.....             | 39 |
| 5.4. Sürekli Z Sayılarının Bölünmesi.....           | 40 |
| 5.5. Sürekli Z Sayılarının Karesi.....              | 41 |
| KAYNAKLAR.....                                      | 51 |

## 1.BÖLÜM

### GENEL BİLGİLER

#### GİRİŞ

Mantık arapça **nutk** kelimesinden köken alır ve yunanca logos kelimesine karşılık gelir. Doğru öncüllerden doğru sonuçlar çıkarmayı inceleyen bilim dalıdır. Mantıklı düşünmek günlük yaşantıda doğru ve düzgün düşündür. En az iki düşünce arasındaki bir ilişkiyi ortaya koymak suretiyle birini diğerinin kanıtlayıcı yaparak yeni bir yargı öne sürmektir.

Mantık kişiler arasındaki anlamlı sözlerin tartışılarak bir sistematığa bağlanması ve saçma sapan olanın malul ve mantıklı olanlardan ayrılmasına yarar.

Geleneksel mantık sistemleri sadece belirli koşullarda oluşan kesin doğruluk değerleri doğru ya da yanlıştan birisine sahip önermelerle ilgilenirler. Belirsizlikle ilgilenmezler. Üçüncü bir durumun gerçekleşmesinin imkansız olduğu varsayılır ve çoğu zaman bu tür durumlar **paradoks** olarak adlandırılır. Diğer bir deyişle doğruluk önermeleri  $\{0,1\}$  kümesinin elemanlarıyla ilişkilendirilen bir küme olarak görülebilir.

Matematik, klasik fizik ve kimya ilkeleri de Aristoteles mantığına göre gelişmiştir. Ancak doğal olaylarla ilgilenen mühendisliklerde durum tamamen bulanık dünya ve mantığa göre olması gerekirken bunların yapılan, varsayım, idealleştirme, lineerleştirme gibi kabullerle insan aklının ikili mantığa göre olayı algılayabileceği seviyeye getirilir.

Tam tarihler belirgin olmasa da (Çin, Hindistan ve Eski Yunanda ) MÖ 4.yüzyılda mantığın ortaya çıktığı düşünülmektedir.

1930'lara kadar süren çalışmalar sonucu iki değerli mantık sistemi yeterli olmayınca 1930'ların başında Polonyalı matematikçi Jan Lukasiewicz ilk üç değerli mantık sistemini geliştirdi. 1930'larda kuantum filozofu Max Black sürekli değerlere

sahip mantığı, eleman düzeyinde kümelere uyguladı. Black, bulanık küme-üyelik fonksiyonlarından bahseden ilk kişi oldu.

Bulanık küme kavramı ilk olarak L.A. Zadeh tarafından 1965 yılında "Fuzzy Sets" adlı çalışmasıyla birlikte ortaya çıkarılmıştır. Bu çalışmayla birlikte Fuzzy kelimesini teknik terimlere dahil etti. Ayrıca bu çalışma ile bilinen Küme Teorisi de genişletilmiştir.

Bulanık mantığın uygulama alanları çok geniştir. Sağladığı en büyük fayda ise "insana özgü tecrübe ile öğrenme" olayının kısaca modellenebilmesi ve belirsiz kavramların bile matematiksel olarak ifade edilmesine olanak tanınmasıdır. Bu şekilde zor ve karışık Aristo mantığı yerine son 40-45 yıldır geliştirilen bulanık mantık ile çok karmaşık sorunların çok basit şekilde çözülebileceğini gösterdi.

Bulanıklık rastgelelik ile aynı şey midir? Hayır, kısaca bulanıklık olaydaki belirsizliği ifade eder. Bir olayın olup olmadığını değil hangi dereceye kadar olduğunu ölçer. Rastgelelik olayın oluşumundaki kesin olmayışlığı ifade eder. Bir olayın olup olmadığı rastgeledir, yani olay olabilir de olmayabilir de. Hangi dereceye kadar olduğu ise bulanıklıktır. Bulanık genel olarak "gereklilik" olmasına rağmen rastgelelik tahminseldir.

## 2.BÖLÜM

### BULANIK MANTIK BİLGİLERİ

Bulanık mantık iki anlam içerir.1. anlam klasik iki değerli mantığın genelleştirilmiş halidir. 2. anlam ise bulanık kümeleri kullanan bütün teorileri ve teknolojileri ifade eder.

Bulanık mantığın temeli bir önermenin doğruluğunun önermelerle kesin doğru ya da kesin yanlış aralığındaki sonsuz değerleri içeren bir kümedeki değerlerdir. Yani önermenin değerini  $[0,1]$  aralığıyla eşleştiren bir fonksiyondur. Bu Zadeh in çalışmasının bir sonucudur.

Bulanık mantığın ayırt edici özelliği kesin doğru ya da kesin yanlış olmamakla birlikte en yaklaşık çıkarımı yapabilmektir. Yani klasik mantıkta bir önerme ya doğru ya yanlıştır. Aynı zamanda hem doğru hem yanlış olamaz. Ama bulanık mantıkta bu üçüncülük ilkesi yer alır. Yani bulanık mantığa göre doğrulukta yanlışlıkta çok değerlidir.

Bulanık mantık karmaşık olayların olduğu ve yeterli bilginin olmadığı yerlerde, kişilerin görüş ve yargılarının olduğu yerlerde ve insan davranışına yorumuna gerek duyulan yerlerde kullanılır.

Bir olayın bulanık mantıkla incelenmesi için belirli tolerans sınırları içinde kalmasına özen gösterilmelidir.

Bulanık mantık ile günlük dildeki sözel konuşmalar modellenenebilir.

#### 2.1Bulanık Deyim

**Tanım 2.1.1.** Bulanık mantığın ifade edildiği deyimlere bulanık deyim denir.

Bulanık deyim fonksiyonu  $f:[0,1] \rightarrow [0,1]$  olan bir fonksiyondur.

Bulanık mantık deyimlerle ifade edilen mantık tipidir. Bu deyimlerin özellikleri şöyle sıralanabilir:

- 1) Doğruluk değerleri  $[0,1]$  aralığındadır.

- 2)  $f$  bir bulanık deyim ise  $\sim f$  de bir bulanık deyimdir.
- 3)  $f$  ve  $g$  bulanık deyimler ise  $f \wedge g$  ve  $f \vee g$  de bir bulanık deyimdir.

## 2.2.Bulanık Mantık Özellikleri

Zadeh e göre bulanık mantığın genel özellikleri;

- 1) Bulanık mantıkta kesin değerler yerine yaklaşık değerlere göre düşünce sistemi kullanılır.
- 2) Bulanık mantıkta herşey  $[0,1]$  aralığında belirli bir derece ile gösterilir.
- 3) Bulanık mantıkta bilgi; büyük, küçük, az ,çok ,çok az gibi kavramlarla ifade edilir.
- 4) Bulanık çıkarım işlemi sözel ifadeler arasında tanımlanan kurallar ile yapılır.
- 5) Her mantıksal sistem bulanık olarak ifade edilebilir.
- 6) Bulanık mantık matematiksel modeli çok zor elde edilen sistemler için uygundur.

## 2.3.Bulanık Mantık İşlemcileri

Bulanık mantığın doğruluk tabloları ve çıkarım değerleri belirsizlik içerir. Bulanık işlemciler;

$a \wedge b = E_k(a,b)$  tümel evetleme

$a \vee b = E_b(a,b)$

$1-a$  değilleme

Çelişmezlik ve üçüncünün olmazlığı ilkesi bulanık mantıkta geçerli değildir.

## 2.4.Sözel Değişkenler

**Tanım 2.4.1** Bir değişkene sözel terim atandığında bu sözel terime sözel değişken denir.

**Tanım 2.4.2** Sözel değişkenler 2 çeşittir. Birincil terime bulanık yüklem, bunu niteleyen kelimelere de bulanık sıfat denir.

Bir bulanık yüklem “xP dir “ şeklinde ise ;

- 1)  $P(x)$  bulanık bir kümedir. P kümesinde x in üyelik fonksiyonu  $\mu_{P(x)}$  dir
- 2)  $\mu_{P(x)}$  P özelliğinin yerine getirilme derecesidir. Bundan dolayı bulanık kümenin doğruluk değeri üyelik fonksiyonu  $\mu_{P(x)}$  ile tanımlıdır.

**Tanım 2.4.3**  $T=\{\text{doğru, çok doğru, biraz doğru, kesin doğru,...,yanlış ,biraz yanlış, kesin yanlış}\}$  kümesinin elemanlarına bulanık niceleyiciler denir.

## 2.5 Bulanık Kural

$P(x)$  bir bulanık küme olduğunda  $\mu_{P(x)}$  bu kümenin üyelik fonksiyonu olur. Bulanık bağıntı bulanık küme gibi olduğundan  $R(x)=P$  şeklinde bir bulanık küme bağıntısı tanımlayabiliriz.

Eğer ise kuralında;

Eğer  $x A(x)$  ise,  $y B(y)$  dir ifadesini bağıntıda gösterirsek ;

$R(x,y) : A(x) \rightarrow B(y)$  dir.

## 2.6 Üçüncünün Olmazlığı İlkesi

Üç değerli mantık sisteminde doğru ya da yanlış dışında birde belirsizlik kavramı vardır. Bu üç değerli sistem üçüncünün olmazlığı ilkesini geçersiz kılar.

1920 ler Werner Heisenberg belirsizlik kavramını ortaya atar. Kuantum dünyasında da 3 değerli mantık sistemi kullanılmaktadır. Kurt Gödel bilgilerinde eksiklik konuların belirsiz cümlelerle açıklanabileceğini ileri sürmüştür.

## 2.7 Küme Kuramları ve Mantık

Küme kuramı aritmetiğin ve mantığın temelini oluşturur. Temel küme işlemleri ile temel mantıksal işlemler arasında sıkı bir bağ vardır.

Diğer teorilerden farklı olarak küme teorisi George Cantor un çalışmalarıyla ortaya atılmıştır. Bu teoriyi sayı teorisi ve sonsuzluk çalışmalarında bulmuştur. Cantor kendisinin bir kısmı ile birebir ilişki içine sokulabilen sonsuz kümeyi herhangi bir nesneler topluluğu olarak tanımlar . Cantor sonsuzluk için sonsuzluğa ait daha büyük ve daha küçük kavramları sonlu ötesi sayılar ve son ötesi aritmetik olarak ortaya atar.

**Tanım 2.7.1** Cantor a göre iki sonsuz küme birbirine karşılık görüyorsa eşittir. Bunlara sayılabilir sonsuz küme denir ve üye sayısı alef sıfırdır.

Sayılamayan sonsuz kümeleri C harfi ile gösterir.

Cantor un çalışmaları bizi tüm kümelerin kümesi olan evrensel kümeye götürür. Cantor daki sonsuzluk kavramı fiili değil potansiyeldir.

## 2.8 Üyelik Fonksiyonu

**Tanım 2.8.1** Bir x elemanının A kümesinin elemanı olup olmadığını ifade etmek için kullanılan fonksiyona üyelik fonksiyonu denir.

**Örnek 2.8.1** Klasik bir A kümesinin elemanlarını 0 ve 1 değerini alan üyelik fonksiyonu

$$\mu_{A(x)} : E \rightarrow \{0,1\}$$

İle gösterebiliriz.

## 2.9 Kesim Kümesi

**Tanım 2.9.1** Üyelikleri  $\alpha$  dan az olmayan üyelerden oluşan kümelere kesim kümesi denir.  $A_\alpha$  ile gösterilir.

$$A_\alpha = \{x \in E \mid \mu_{A(x)} \geq \alpha\}$$

olarak ifade edilir.

## 2.10 Bulanık Mantık

Geleneksek yani klasik küme teorisinde kesin sınırlı küme kavramı kullanılır. Yani bir nesne bir kümenin ya elemanıdır ya da değildir.

Bulanık küme 1960 larda Zadeh in klasik yöntemlerin insanların günlük hayatındaki karmaşayı ifade etmede ,belirsizlikleri ifade etmede yetersiz kalmasından doğdu. Zadeh ikili (ya var ya yok ) üyelik fonksiyonları yerine üyelik dereceleri ile ifade edilen bulanık kümeler tanımlamasını buldu.

Çok değerli küme kavramı olan bulanık küme belirsizliğin formülleştirilmesidir. Yani eleman ya üyedir ya da değildir yerine bir dereceye kadar üye olarak görülebilir.

Bulanık küme kavramı gerçek hayat problemlerine duyarlılığın arttırılması açısından iki değerli üyelik fonksiyonlarını çok değerliliğe taşır.

Bulanık küme çeşitli üyelik derecesindeki öğelerin topluluğu da olabilir. 0 üye olmama 1 üye olma iken (0,1) arasındaki değerler kısmen üye olmayı gösterir.

Bir bulanık küme öğesi aynı özelliğe sahip başka bir kümesinde öğesi olabilir.

**Örnek 2.10.1** Elinizde bir elma olsun. Elinizdeki elmanın bir parçasını ısırın ve karşınızdakine şu soruyu sorun; “elimdeki nedir?” yanıt “elma” olacaktır. Bir parça daha alın ve yine aynı soruyu sorun. Yanıt belki yine elma olacaktır ama içinizden aslında artık pay alınmış bir elma olduğu geçebilir. Birkaç ısırık daha aldığınızda artık elinizdeki bir elmaya benzemeyecektir. Yemeye devam ettiğinizde elma yok olacak ve yalnız çöpü kalacaktır. Buradaki elma ve geriye kalan elmaya benzemeyen çöp bize bulanık mantığın mantığını anlatır. İşte buradaki bulanık mantık “elmadan elma olmamaya çöp olmaya” geçiştir.

## 2.11 Bulanık Küme Kavramı

Şimdiye kadar bir kümenin belirtilmesini bu kümenin iyi tanımlanmış olması koşuluna bağladık. Başka bir deyişle A kümesinin tanımlı olması için evrensel kümeden seçtiğimiz bir x elemanı A kümesinin elemanı mıdır? Sorusuna kesinlikle evet ya da hayır dememiz gerekirdi. Bunu  $X \neq \emptyset$  bir küme olmak üzere A kümesinin

$$\forall x \in X \text{ için } \mu_{A(x)} = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

İle tanımlı  $\mu_A : X \rightarrow \{0,1\}$  üyelik fonksiyonu ile ifade ediyorduk. Zadeh’in de ortaya koyduğu aşağıdaki tanıma göre  $0 \leq r \leq 1$  olmak üzere  $x \in X$  elemanı A kümesinin üyelik derecesi r olan bir elemanı olmaktadır.

**Tanım 2.11.1.**  $X = \{x: x \in X\}$  kümesi verilmiş olsun.  $\forall x \in X \text{ için } \mu_{A(x)} \in [0,1]$  olmak üzere

$$\mu_A: X \rightarrow [0,1]$$

kümesine X in A bulanık kümesi denir.  $\mu_A$  fonksiyonuna A bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu,  $\mu_A(x)$  değerine x in üyelik derecesi ve  $\mu_A(x)$  kümesine de A bulanık kümesine ait elemanların üyelik derecelerinin kümesi denir.

0 ve 1 sayıları  $[0,1]$  aralığının elemanları olduğundan her kümeyi bir bulanık küme olarak düşünebiliriz.

Eğer;

$$\sup \mu_A(x) = 1$$

ise bulanık kümeye normal denir.

**Tanım 2.11.2.** Eğer  $\forall x \in X$  için  $\mu_{A(x)} \leq \mu_{B(x)}$  oluyorsa  $A \subset B$  denir.

**Tanım 2.11.3.** Bulanık kümelerde birleşme işlemi  $A \cup B$  "V" verilen bulanık kümelerin en büyük işlemi olmak üzere aşağıdaki biçimde tanımlanır;

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_{A(x)} \vee \mu_{B(x)}$$

**Tanım 2.11.4.** Bulanık kümelerde birleşme işlemi  $A \cap B$  "∧" verilen bulanık kümelerin en büyük işlemi olmak üzere aşağıdaki biçimde tanımlanır;

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_{A(x)} \wedge \mu_{B(x)}$$

Benzer biçimde eğer  $\{A_t : t \in T\}$  bulanık kümelerinin bir sınıfı ise  $\bigcup_{t \in T} A_t$  ve  $\bigcap_{t \in T} A_t$  bulanık kümeleri de aynı üyelik fonksiyonları kullanılarak

$$\sup \mu_{A_t}(x) \text{ ve } \inf \mu_{A_t}(x)$$

ile bulunur.

**Tanım 2.11.5.** A bir bulanık küme olsun. A'nın tümleyeni aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_{A(x)}$$

**Teorem 2.11.1.** Bulanık kümelerde birleşim kesişim ve tümleyen aşağıdaki özelliklere sahiptir:

Tek kuvvet

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

Değişme

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Tümleme

$$\bar{\bar{A}} = A$$

Yutma

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

Evrensel ve Boş kümede yutma

$$A \cup X = X$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

Özdeşlik

$$A \cap X = A$$

$$A \cup \emptyset = A$$

Birleşme

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

**Örnek 2.11.1.**  $X=\{a,b\}$  ve A,B bulanık kümelerin üyelik fonksiyonları için bulanık küme işlemleri aşağıdaki gibidir:

$$\mu_{A(x)} = \begin{cases} 0,3 & x = a \\ 0,8 & x = b \end{cases}$$

$$\mu_{B(x)} = \begin{cases} 0,9 & x = a \\ 1 & x = b \end{cases}$$

$$\mu_{A \cup B(x)} = \begin{cases} 0,9 & x = a \\ 1 & x = b \end{cases}$$

$$\mu_{A \cap B(x)} = \begin{cases} 0,3 & x = a \\ 0,8 & x = b \end{cases}$$

**Tanım 2.11.6.** Dışbükey normalleştirilmiş sınırlı sürekli üyelik fonksiyonu olan ve gerçel sayılarda tanımlanmış bulanık kümelere bulanık sayı denir.

Normalleştirme en yüksek üyelik derecesinin 1 olmasını vurgular. Yani  $\exists x \in R$  için  $\mu_{A(x)} = 1$  dir.

Bulanık kümeler kendi üyelik fonksiyonlarıyla tanımlandığından bulanık sayılarda kendi üyelik fonksiyonlarıyla aynı kavramdadırlar.

Gerçek sayılarda tanımlı  $[a]$  bulanık sayısı  $[a_1, a_2]$  şeklinde de tanımlanabilir. Burada  $a_1 : [0,1] \rightarrow R$  alt sınırı,  $a_2 : [0,1] \rightarrow R$  üst sınırı yani sol tarafı göstermektedir.

Görüldüğü gibi bulanık kümelerde öğeler arası geçiş yumuşak ve sürekli dir. Öğeler bulanık kümeye kısmi olarak aittir. Klasik kümedeki  $\mu_A : E \rightarrow \{0,1\}$  fonksiyonu yerini üyelik fonksiyonu olan  $\mu_A : E \rightarrow [0,1]$  e bırakır.

Üyelik fonksiyonunda  $x$  üyeleri  $y$  üyelerin derecelerini gösterir.  $A$  bulanık küme  $\mu_{A(x)}$  üyelik fonksiyonu ve  $\mu_{A(x)}$  üyelik derecesi olmak üzere ;

$A = \{(\mu_{A(x)}, x)\}$  dir.

Bu durumda bulanık küme olan  $A$ ;

$$A = \{(\mu_{A(x)}, x)\} = \{ \mu_{A(x)} / x \}$$

$$A = \{ \mu_{A(x_1)} / x_1 + \mu_{A(x_2)} / x_2 + \dots + \mu_{A(x_n)} / x_n \}$$

$$A = \{ \sum_i^n \mu_{A(x_i)} / x_i \} \text{ olarak gösterilebilir.}$$

**Tanım 2.11.7.** Üyelik fonksiyonu alt olma kavramının karışık bir şekilde öğelere yayılmasını temsil eder. Öğeler ile üyelik dereceleri arasında birebir karşılıklık olmasına bulanık tekillik denir

### 2.11.1. Belirsizlikte Bulanık Kümeler

Belirsizlik durumlarındaki en uygun yöntem küme elemanlarına değişik üyelik dereceleri verme ile sağlanır. Her bir bulanık eleman için 3 özellik sağlanmalıdır:

- 1) Bulanık küme normal olmalıdır. En azından bir eleman 1 e sahip olmalıdır
- 2) Bulanık küme monoton olmalıdır. Yeni 0 a eşit olan elemanın sağında 1 e yakın elemanlar olmalıdır.
- 3) Bulanık küme simetrik olmalıdır. 0 ın sağ ve 1 in solundakilerin üyelik dereceleri eşit olmalıdır.

### 2.11.2. Bulanık Küme Büyüklüğü

Skaler nicelik elde edilirken ;

$$|A| = \sum_{x \in E} \mu_{A(x)}$$

Bağıl nicelik elde edilirken ;

$$\|A\| = \frac{|A|}{|E|}$$

hesaplanır.

Kesim kümesi  $A_\alpha$  ,eleman sayısı  $|A_\alpha|$  olmak üzere bulanık nicelik hesaplanırken

$\mu_A(|A_\alpha|) = \alpha$  olur.

**Tanım 2.11.8** Bulanık bir kümenin bir elemanının değeri kesin olmayan fakat sınırlandırılmış bir aralık  $[a_1, a_2]$  şeklinde gösterilebilir. Buna bulanık aralık veya güven aralığı denir.

### 2.11.3.Bulanık Sayı İşlemcileri

Bulanık sayı çıktıları bulanık küme olduğundan sonuçlar üyelik fonksiyonu olarak yazılabilir.

Toplama :  $\forall x \in A, y \in B, z \in A + B$  olmak üzere ;

$$\mu_{A+B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

toplamı yapılırken elemanlar toplanır, elemanların üyelik derecelerinin küçük olanı yani bulanık sayıya üyelik derecesi tayin edilir.

Çıkarma :  $\forall x \in A, y \in B, z \in A - B$  olmak üzere ;

$$\mu_{A-B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Yapılırken öğeler Kartezyen çarpımı gibi eşleştirilip farkı alınır. Daha sonra üyelik derecelerinden büyük olan tayin edilir.

Çarpma :  $\forall x \in A, y \in B, z \in A.B$  olmak üzere ;

$$\mu_{A.B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \text{ olur.}$$

**Tanım 2.11.8.f:**  $A \rightarrow B$  bir fonksiyon olsun. Eğer  $\mu_A(x) \leq \mu_B(f(x))$  koşulunu yerine getiren A ve B bulanık kümeleri varsa bu fonksiyona A bulanık tanım kümesine ve B bulanık görüntü kümesine sahip olan bir fonksiyon denir.

Bulanık genişleme fonksiyonu bağımlı değişkenlere bağımsız değişkenlerin belirsizliğini yayan fonksiyondur.

### 2.11.4.Belirsizlik ve Modelleme

Gerçek dünya ideal dünyadan sapmalar gösterdiği için tüm sistem modellerinde karmaşıklık ,belirsizlik vardır.

Birçok sistem doğrusal değildir, doğrusallığı kabul etmek içinse belirsizlikler gözönüne alınır. Buna gerek kalmadan hesaplama yapılabilmesi için belirsizlik ilkeleri kullanılmalıdır.

Bir karar verme durumuyla karşılaşan kişi sorunun çözümü olabilecek olabilirliklerin tümünün olabilirlik uzayını incelemelidir.

Bilimde belirsizliği istenmeyen durum olarak gören ve bundan kaçan geleneksel anlayıştan, belirsizliği yaşamın doğal durumu olarak kabullenip bilimin bundan kaçmasının mümkün olmadığını iddia eden alternatif bir bakış açısına doğru bir geçiş vardır.

Genel olarak rastgelelik o olayın meydana gelmesindeki belirsizliğin sayısal ölçütüdür.

Sözel belirsizlikler bulanıklık adını alır.. bulanıklık incelenen konunun inceleyen kişi tarafından tam kesin bilinmemesi durumunda sahip olunan eksik ve belirsiz bilgilerin tümüdür.

Rastgelelik olayın olmayışındaki kesinliği ifade ederken bulanıklık olayın olup olmadığını değil ne dereceye kadar olduğunu ifade eder.

Sayısal hesaplamalar belirsizlik kaynağına ölçüm kesinsizliği olarak bakar.

Belirsizlik ve düzensizliğin artmasıyla beraber bunları kontrol edebilecek belirsizlik yöntemleri ihtiyacı artmıştır.

Deneyimsel kurallar uzmanlarca belirlenen kurallar.

Bayes tarafından koşullu olasılık teorisinde istatistiksel çözümlere dayanan bir yöntem geliştirilmiştir.( bir olay ortaya çıktığında herhangi bir olay oluşacaktır.)

Dempster şafer yönteminde başlangıçta hiç bilgi olmadan varsayımlara eşit olasılıklarla yola çıkılır. Bayes yönteminde ise başlangıçta oluşmuş ve oluşacak olayın lehine ve aleyhine kanıtlar elde edilmiş olmalıdır.

Eğer ise kuralları insan deneyimlerini temel aldığından doğrulukları her zaman söz konusu olmayabilir. Bu yüzden – lisi doğru olmamayı + lısı doğru olmayı temsil eder.

Geçmişteki belirsizlikler incelenirken karmaşık yöntemlerin çözümünde olasılık yöntemleriyle cevap bulunamayınca yaklaşık karar verme yöntemleri kullanılmaya başlanmıştır.

İki durumlu mantıkla çözülemeyen problemlerde devreye bulanık mantık ve problemleri girer.

Sürekli veya dereceli bir biçimde doğruluk yani bulanık doğruluk sıradan doğruluk kavramıyla benzerdir, fakat daha geniş daha geneldir.

## 2.12.Bulanık Teori

Bulanık mantığın temelini oluşturan bulanık teori belirsiz kavramların matematiksel ifade edilmesidir. Bulanık olmadan önce belirsizlik olasılıkla ifade ediliyordu. Olasılıktaki belirsizlik belirli bir dağılıma göre gerçekleşme ihtimali ile ilgilenirken bulanık teorideki belirsizlik küme sınırlarının belirlenmesi ile tanımlanır.

Bulanık teori ölçmeye dayalı bilgi yerine algıya dayalı bilgi kullanır. Olasılık teorisinde algıya dayalı bilgi gösterilmez. Çünkü bunu işleyecek mekanizma, ifade edebilecek sayı yoktur.

Algıya dayalı bilgi ölçmeye dayalı bilgidен daha geneldir. Çünkü değişken değerlerinin ölçülemediği durumlarda, bilgilerin, ölçmelerin yetersiz kaldığı durumlarda algıya dayalı bilgi kullanılır. Yani bulanık teori olayları daha gerçekçi ve dilsel değişkenlerle ifade edilebilir hale getirir.

## 2.13.Olabilirlik ve Olasılık

Olasılık teorisi evrensel kümedeki bir eleman için olasılığı değerlendirir.

Olasılık gelecekte yaşanması muhtemel bir olay için kişilerin beklentilerinin bir ölçüsüdür.

Bir örnek uzayın elemanlarının olasılıkları toplamı 1 dir

Evrensel kümede tanımlanan A bulanık kümesinin her elemanı  $[0,1]$  üyelik derecesine sahip olmak üzere

$x \in A$  için  $\mu_A > 0$ , diğer durumlarda  $\mu_A = 0$

Olur. Bu durumda  $\mu_A$  üyelik fonksiyonu evrensel kümedeki her A kümesi için olabilirlik dağılımı olarak tanımlanır.

\*olasılık dağılımının olasılıklar toplamı 1 iken olabilirlik dağılımı toplamı için bir sınır yoktur.

\*Olabilirlik olasılığın üst sınırıdır diyebiliriz.

### Olasılık ve Olabilirlik Karşılaştırılması

|                | Olabilirlik                  | Olasılık                            |
|----------------|------------------------------|-------------------------------------|
| Tanım kümesi   | Evrensel küme                | Örnek bir S uzayı                   |
| Görüntü kümesi | [0,1]                        | [0,1]                               |
| Kısıtlama      | Yok                          | $\sum_i P(A_i) = 1$                 |
| Birleşim       | $\mu(\cup A_i) = EB\mu(A_i)$ | $P(\cup A_i) = \sum_i P(A_i)$       |
| Kesişim        | $\mu(\cap A_i) = EK\mu(A_i)$ | $P(\cap A_i) = P(A_1) \dots P(A_n)$ |

#### 2.13.1.Bulanık Olay ve Olasılık

**Tanım 2.13.1.1.**Sınırları kesin olmayan olasılığa bulanık olasılık denir. Bulanık olasılıkta P bir olayın olasılığı olmak üzere;

$$P(A) = \sum_{x \in A} P(x)$$

olur. A nın üyelik fonksiyonu  $\mu_A(x)$  olsun .  $\mu_A(x)$  olasılığı  $E_p(\mu_A)$ :

$$P(A) = \int \mu_A \cdot dp = E_p(\mu_A)$$

olur.

Ayrık elemanlar için

$$P(A) = \sum_{x \in A} \mu_A(x) \cdot P(x)$$

olur

S örnek uzayındaki bulanık olay  $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in S\}$  , olayın  $\alpha$  kesimi ise

$A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$  olarak gösterilir. Bu durumda  $\alpha$  olayının olasılığı şöyledir.

$$P(A_\alpha) = \sum_{x \in A_\alpha} P(x)$$

$\alpha$  kesim olayının olasılığı “ $A_\alpha$  kümesinin olasılığının olabilirliği  $P(A_\alpha)_\alpha$  dır”

$P(A)$  bulanık olasılığı da  $P(A) = \{P(A_\alpha), \alpha: \alpha \in [0,1]\}$  olarak ifade edilir.

## 2.14. Bulanıklık Ölçümü

Bulanık belirsizlik derecesini temsil ederken kullanılan kavramdır.  $f$  ölçüm olmak üzere  $f: P(E) \rightarrow R$  dir.

Kesin kümelerin bulanıklık ölçümü 0 dır.

A belirsizliği B den az olursa  $f(A) \leq f(B)$  olur.

Bulanıklık max olduğunda  $f(B)$  ölçümü en büyük değeridir.

$\mu_A(x)$  üyelik fonksiyonu ile verilen A bulanık kümesinin belirsizliklerinin toplamı:

$$f(A) = \sum_{x \in E} [\mu_A(x) \cdot \log_2 \mu_A(x) + (1 - \mu_A(x)) \cdot \log_2 (1 - \mu_A(x))]$$

İle hesaplanır.

O halde bulanık mantıkla ilgili şunları düşünebiliriz:

- İki değişik olgu arasında ilişki kurma akıl yürütmedir.
- Akıl yürütmede düşünce, düşünce sınıflandırılmasında mantık, mantıktada elimizdeki önermelerden çıkarmalar yapmak söz konusudur.
- Nesneler zihinde kavramlar, dilde sözler ve yazıda semboller halinde ifade edilir.
- Mantık sınıflandırmalar yaparak kıyaslamalar yaparak yeni bilgiler oluşturmaya yarayan zihinsel edilir.
- Önermeler yargılarımızı dile getiren cümlelerdir.
- Bulanık mantık bulanık küme teorisine dayanır. Bulanık mantığa bulanık küme ve mantığı kullanan sonsuz değerli mantıkta diyebiliriz.
- Bulanık küme değişik üyelik derecesinde elemanları olan topluluktur.
- Klasik kümedeki ikili üyelik kavramı bulanık kümede kısmi üyeliğe dönüşür.
- Bulanık kümede bir değişken aynı özellikteki başka bir kümenin de elemanı olabilir, bu bulanık küme sınırlandırılır.
- Üyelik dereceleri arasındaki geçiş yumuşak ve süreklidir.
- Sözel ifadeden sayısal bir ifadeye geçişte bulanık küme bir köprüdür.
- Normal bulanık kümede üyelik derecesi 1 olan en az 1 tane öge vardır.
- Bulanık sayılar normalleştirilmiş, sınırlı sürekli üyelik fonksiyonu olan bulanık kümelerdir.
- Bulanık sayı çıktısı bulanık küme biçiminde olduğundan sonuç üyelik fonksiyonudur.
- Bulanıklık belirsizlik derecesi temsil edilirken kullanılan terimdir.

### 3.BÖLÜM

#### Z SAYILAR ÜZERİNE

Bu bölümde Sürekli Z sayılarına hazırlık olarak Z sayıları hakkında genel tanımlar ve genel bilgiler verilmiştir.

##### 3.1. Z Sayısı

**Tanım 3.1.1.**  $Z=(A,B)$  olsun. Birinci bileşen bir gerçek değerli belirsiz değişkenin değerleri üzerinde sınırlama, İkinci bileşen B ilk bileşenin güvenirliliğinin bir ölçüsü ise bu durumda  $Z=(A,B)$  ikilisine bir Z sayısı denir.

Günlük hayatta verdiğimiz kararlar bilgi merkezlidir. Kullanışlı olması için bilgi güvenilir olmalıdır. Temel olarak Z sayılarda bilgiden çok güvenilir konu kavramı alınır. Bir Z sayısı birçok uygulama için potansiyeldir. Özellikle ekonomi dünyasında, karar analizlerinde risk değerlendirme de tahmin yürütmede, bazı fonksiyonların düzenlenmesinin merkezi yönetiminde kullanılır.

Gerçek dünyada belirsizlik yaygındır. Alınan kararların hangisinde bilgi çoksa belirsizlik merkezi oradadır. İnsanların rasyonel kararları kayda değer kabiliyet olarak gördüğü bilginin merkezinde belirsizlik özensizlik ya da eksiklik vardır. Bu kabiliyetin biçimlendirilmesi bazı derecelerin az derecedeki zor tartışmalara meydan okumasıdır. Bu durum bu nottaki fikirleri özetler ve kavramları harekete geçirir.

Daralma konsepti (restriction), sınırlama konseptinden (constrain) daha geniştir. Bir olasılık dağılımı daralmadır. Fakat kısıtlama değildir. Bir daralma genelleştirilmiş kısıtlamanın gözden geçirilmiş halidir. Bu notta daralma ve kısıtlama şartları yer değiştirerek kullanılmıştır.

$$R(X) A \text{ dır.} : \rightarrow Poss(X = u) = \mu_A(u)$$

$\mu_A$  nın A nın üyelik fonksiyonu olduğu yerde u, X in genel değeridir.  $\mu_A$  belki  $R(x)$  ile birleşmiş olan bir sınırlama olarak görülebilir.  $\mu_A$  nın anlamı sınırlamanın tatmin edici derecede olmasıdır.

X rastgele değişken olduğunda X in olasılık dağılımı X üzerinde bir olası daralma olarak rol oynar. A olası dağılımı şöyle ifade edebiliriz:

$$R(X): X, p \text{ dir.}$$

P nin olduğu yer X in olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Bu durumda

$$R(X): X, p \text{ dir.} \rightarrow \text{Prob}(u \leq X \leq u + du) = p(u).du$$

Genellikle *Restriction* terimi X deki R ye uygundur. Ara sıra R olarak kullanılır. *Restriction* un anlamı içerikteki belirsizliği gidermektir.

Düzenli (X,A,B) üçlüsü bir Z değerlendirmesi kadar kabul görür. Bu üçlü şunu ihtiva eder: X (A,B) dir.

Hesaplama değişken değerleri değil değişken değerlerinin sınırlarıdır. Bu metinde, tam tersi belirtilmediği sürece, X rastgele değişken olarak kabul edilmektedir. Kolaylık sağlaması için A, X'in değeri olarak ifade edilmektedir, yani daha doğrusu, A X'in bir değeri değil X'in alabileceği değerlerin sınırını temsil etmektedir. İkinci bileşen B kesinliği ifade etmektedir. Kesinlikle alakalı diğer kavramlar emin olma, kani, güvenilirlik, inanç gücü, olasılık, olabilirlik vs.dir. X bir rastgele değişken ise, kesinlik olasılığa eşit olabilir.

Bir diğer deyişle, B şu soruya verilecek bir cevap olarak yorumlanabilir: X'in A olduğuna ne kadar eminsin?

Genellikle, A ve B algıya dayalıdır ve doğal dilde tanımlanır. Z değerlerinin A toplamı Z bilgisini ifade etmektedir. Gün içerisinde yaptığımız düşünme ve karar verme süreçlerimizin çoğunun Z bilgisine ilişkin olduğu aklımızda tutulmalıdır. Hesaplama yapmak için, A ve B doğal dile tanımlandığında, A ve B'nin anlamı sırasıyla  $\mu_A$  ve  $\mu_B$  üyelik fonksiyonları ile bağlantılı şekilde derecelendirilmektedir.

A'nın üyelik fonksiyonu,  $\mu_A$ , birbirini takip eden bir dizi sorunun sorulmasıyla bulunabilir: bu sayının derecesi nedir, a, A algımıza uyuyor mu? Örneğin: 50 dakika 45 dakika için algına ne derece uyabilir? Aynı durum B için de geçerlidir. Bulanık küme, A, X'in olasılık dağılımı olarak yorumlanabilir. Z sayısı kavramı çeşitli yollarla genelleştirilebilir. Özellikle, X R'nin değerlerini aldığı farz

edilebilir, bu durumda A bulanık sayıların Kartezyen çarpımıdır. Z-değerlendirmelerine verilecek basit birkaç örnek:

“Hava sıcaklığı yarın 11 derece olabilir, muhtemel.”

“trafiğe takılmazsa 15 dk da burada olabilir, muhtemel”

X bir rastgele değişken ise, X R’de, yani gerçel doğrudan, bulanık bir durumu temsil eden A’dır. Bu durumun olasılığı, p, şu şekilde gösterilebilir:

$$p = \int_R \mu_A(u) p_X(u) du$$

olur.

X ,p’nin X’in gizli olasılık yoğunluğuna karşılık geldiği durumdur. Aslında Z değeri(X,A,B), X’in sınırı (genelleştirilmiş sınırlama) olarak görülebilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

*Prob(X A ise B dir)*

*Prob: olasılık*

Burada, Z sayısında, (A,B), gizli olasılık dağılımının, p(x), bilinmediği vurgulanmalıdır. Bilinen X, p’nin sınırıdır ve şu şekilde ifade edilebilir:

$$p = \int_R \mu_A(u) p_X(u) du$$

Buradaki önemli nokta, B’nin A’nın olasılığının değil A’nın olasılık ölçümünün sınırı olmasıdır. Diğer bir yandan ise, B, A’nın olasılık ölçümünün değil A’nın olasılığının sınırı ise, (A,B) bir Z sayısı değildir.

Aslında, bir Z sayısı  $P_X$ ’in özeti olarak görülebilir. Günlük hayatımızdaki karar verme sürecimizin bu bilgilerin özetine dayandığını gerçeğini unutmamalıyız. Bir Z-sayıyı bir özet olarak görmek gerçekliğe uygundur.

Karar analizleri uygulamalarında, Z sayılarının sıralamasıyla ilişkili şekilde artan temel bir problem bulunmaktadır. Örneğin: (Yaklaşık 100, muhtemel), (yaklaşık 90, çok muhtemel)’den büyük müdür? Bu mantıklı bir soru mudur?

$P_X$  ve  $B$  arasındaki ilişkinin doğrudan bir sonucu birbirini takip eder.  $Z=(A,B)$  ise  $Z' = (A', 1-B)$  dir.  $A'$ ,  $A$  ve  $Z$  'nin tamamlayıcısı olarak  $Z$  'nin tamamlayıcısı rolündedir.  $1-B$  is  $B$  'nin zıttı. Örneğin:  $Z=(A; \text{muhtemel})$ ,  $Z'=(A \text{ olmayan}; \text{muhtemel olmayan})$  'nin tamamlayıcısıdır.

Bir  $Z$  sayısının önemli bir nitel özelliği bilgilendirici olmasıdır. Genel olarak, fakat her zaman değil, değeri yüksek özgüllükte ise  $Z$  sayısı bilgilendiricidir, bu demek oluyor ki, sınırları net bir şekilde belirlidir ve kesinliği yüksektir. Bilgilendiricilik,  $Z$  sayısı bir kararın temeli konumundaysa önemli bir gerekliliktir. Temel soru şudur: Bir  $Z$  sayısının bilgilendiriciliği ne zaman mantıklı bir kararın temeli olarak sunulmak için yeterlidir?

$Z$  sayısı kavramı, bulanıklık granülü kavramında dayanmaktadır. Bir  $Z$  sayısı kavramının olasılık teorisindeki güven aralığı kavramından daha genel olduğu not edilmelidir.  $Z$  sayısı kavramı, bulanık rastgele sayısı kavramı ve bulanık rastgele değişken arasında bazı bağlantılar vardır. Farklı bir yorumla  $Z$  sayısı kavramı, bulanık küme değerli rastgele değişkene dayanabilir. Bu yorum sonrasındakiler için geçerli değildir.

$Z$  sayısı kavramıyla yakından ilişkili bir diğer kavram  $Z^+$  sayısı kavramıdır. Temel olarak, bir  $Z^+$  sayısı,  $Z^+$ , bulanık bir sayının birleşimidir,  $A$ , ve rastgele bir sayı,  $R$ , sıralı ikili  $Z^+=(A,R)$  olarak yazılır. Bu ikilide,  $A$ ,  $Z$  sayısındaki aynı roldedir, ve  $R$  ise rastgele sayının olasılık dağılımıdır. Aynı şekilde  $R$ ,  $Z$  değerinde  $X$  'in gizli olasılık dağılımı olarak görülebilir  $(X, A, B)$ . Buna alternatif olarak,  $Z^+$  sayısı  $(A, P_X)$  veya  $(\mu_A, P_X)$  olarak ifade edilebilir, bu durumda  $\mu_A$   $A$  'nın üyelik fonksiyonudur.  $Z^+$  değeri,  $(X, A, P_X)$  olarak veya buna denk olan  $(X, \mu_A, P_X)$  şeklinde ifade edilebilir, bu durumda  $X$   $p$ ,  $X$  'in olasılık dağılımıdır.

$$\int_R u p_X(u) du = \frac{\int_R u \mu_A(u) du}{\int_R \mu_A(u) du}$$

$\mu_A$  ve  $p_X$   $\mu_A \cdot p_X$  skaler çarpımı,  $A$  'nın  $P_A$  olasılık ölçümüne karşılık gelir. Daha somut bir şekilde belirtmek gerekirse,

$$\mu_A \cdot p_x = P_A = \int_R \mu_A(u) \cdot p_x(u) \cdot du$$

olur. İşte bu bir Z sayısı kavramını, bir  $Z^+$  sayısına bağlayan ilişkidir. Daha somut bir şekilde belirtmek gerekirse,

$$Z ( A, B) = Z^+ (A, \mu_A \cdot p_x \text{ is } B).$$

Burada vurgulanması gereken,  $p_x$  olarak değil  $p_x$ 'nin sınırları olarak bilinen bir Z sayısının şu şekilde ifade edilmesidir:  $\mu_A \cdot p_x$ , B'dir. Doğası gereği, bir  $Z^+$  sayısı bir Z sayısından daha fazla bilgi taşır. Bu, neden bir  $Z^+$  sayısı olarak sınıflandırdığının nedenidir. Soncunda görüldüğü gibi,  $Z^+$  sayıları işle yapılan ölçüm Z sayıları ile yapılan ölçüme giden bir bağlantı niteliğindedir.

U'nun bir sonlu küme  $U=\{u_1, \dots, u_n\}$  olarak varsayalım. X olasılık dağılımı,  $\mu$  ve olasılık dağılımı p ile bağlantı kurabilir ve şu şekilde ifade edebiliriz:

$$\mu = \mu_1/u_1 + \dots + \mu_n/u_n$$

$$p = p_1/u_1 + \dots + p_n/u_n$$

bu durumda,  $\mu_i/u_i$ , ( i =1,...,n)  $\mu_i$ 'nin  $X=u_i$  olabilirliği olduğu anlamına gelmektedir. Aynı şekilde,  $p_i/u_i$ ,  $p_i$ 'nin  $X=u_i$  olasılığı olduğu anlamına gelmektedir.

Olabilirlik dağılımı  $\mu$  ile olasılık dağılımı p, birleşme olarak ifade edilebilir. Daha somut bir şekilde belirtmek gerekirse

$$\mu : p = (\mu_1, p_1)/u_1 + \dots + (\mu_n, p_n)/u_n$$

olur. Daha önce belirtildiği gibi,  $\mu \cdot p$  olarak ifade edilen skaler çarpım, A'nın olasılık ölçümüdür. İki tepeli dağılım açısından, X ile bağlantılı  $Z^+$  değeri ve Z değeri aşağıda gibi ifade edilebilir:

$$(X, A, p_x)$$

$$(X, A, B), \mu_A \cdot p_x \text{ B'dir.}$$

A ve B'nin bulanık sayılar olması koşuluyla, X, A ise, Y, B'dir. Bu kural şu şekilde tanımlanır:

$$X, A \text{ ise, } Y, B' \text{ dir} \rightarrow (X, Y), A \times B' \text{ dir.}$$

Bunun, temel eğer-ise kuralının, Z değerleri açısından Z sayılarına genelleştirilmesi olarak tanımlanması uygundur. Daha somut bir şekilde belirtmek gerekirse,

$$(X, A_x, B_x) \text{ ise } (Y, A_y, B_y) \text{ ' dir.}$$

### 3.1.1. Örnekler:

- 1) Bir işyerinin kazancı iyiye bu işyerinden bir tane daha açılabilir.
- 2) Bir öğrenci çalışkansa sınavlardan yüksek alabilir.
- 3) Bir öğretmenin performansı iyiye öğrencileri daha iyi anlayabilir.
- 4) Bir işyerinde bütçe açığı fazlaysa işçi çıkarma olasılığı yükselir.
- 5) Ders saati az olan branşın fazla öğretmeni varsa bazı öğretmenlerin norm fazlası olma olasılığı yükselir.
- 6) Ödev yapmayan öğrencinin derse gelmeme olasılığı yüksektir.
- 7) Kar yağdığında sebze meyve fiyatları artabilir.

Önemli bir soru Z kuralları ve  $Z^+$  kurallarının anlamıyla ilişkilidir.  $Z^+$  kuralının aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$(X, A_x, p_x) \text{ ise } (Y, A_y, p_y) \text{ ' dir} \rightarrow (X, Y), (A_x \times A_y, p_x \cdot p_y) \text{ ' dir}$$

Z kuralları, karar analizleri ve karmaşık sistemlerin modellenmesi ve özellikle ekonomi alanındaki önemli uygulamalar için potansiyele sahiptir.

Özellikle bulanık kontrol alanında olmak üzere bulanık mantık uygulamalarında önemli bir rol oynayan problem interpolasyondur. Daha somut bir şekilde ifade etmek gerekirse, interpolasyon problemi aşağıdaki gibi formüle edilebilir. Formun birçok bulanık eğer-ise kuralını düşünün:

$$X, A_i, \text{ ise } Y, B_i, \text{ , } i = 1, \dots, n \text{ ' dir.}$$

### 3.2. Z-sayıları ile Hesaplama

Z sayıları ile hesaplamanın ne olduğunu bir örnek üzerinden açıklamaya çalışalım:

**Örnek 3.2.1.** Gaziantep ten Tokat'a geçtiğimizi düşünelim. Toplamda Kaç saat sürer? Bu durumda, iki Z sayısının toplamıyla ilgileniyoruz Gaziantep ten Kayseri ye oradan Tokat'a geçeriz. Gaziantep kayseri ortalama yaklaşık (genellikle) 6 saat 20 dakika, Kayseri den Tokat a yaklaşık (genellikle )1 saat 45 dakika olduğundan Gaziantep tokat arası muhtemelen 8 saat 5 dakika sürebilir. Genellikle, Z sayıları ile hesaplama çok bilinmeyen bir alandır. Aşağıdaki tanım, bu bilinmeyen alanı tanımamız için sadece bir ön adımdır.

$Z^+$  sayılarıyla hesaplama yapmak Z sayıları yapılan hesaplamadan çok daha kolaydır.  $*$ 'ın bir ikili işlem olduğunu düşünün:

$Z^+$  sayıları,  $Z^+_x = (A_x, R_x)$  ve  $Z^+_y = (A_y, R_y)$ . Yani,

$$Z^+_x * Z^+_y = (A_x * A_y, R_x * R_y)$$

Bu durumda,  $R_x * R_y$ 'deki  $*$ 'ın anlamı,  $A_x * A_y$ 'in anlamıyla aynı değildir. Bu ifadede,  $A_x * A_y$ 'deki  $*$ 'ın işlemleri bulanık sayılarıdır;  $R_x * R_y$ 'deki  $*$ 'ın işlemleri olasılık dağılımlarıdır.

**Örnek 3.2.2.**  $*$ 'ın toplama olduğunu farz edin. Bu durumda  $A_x + A_y$  şu şekilde tanımlanır:

$$\mu_{A_x+A_y}(v) = \sup \left( \mu_{A_x}(u) \wedge \mu_{A_y}(v-u) \right) \quad \wedge = \min$$

Benzer şekilde,  $R_x$  ve  $R_y$ 'nin birbirlerinden farklı olduğunu,  $R_x * R_y$ 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonunun  $R_x$  ve  $R_y$ 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonunun konvolüsyonu olduğunu,  $\circ$ , farz edin.  $p_{R_x}$  ve  $p_{R_y}$  olarak bu olasılık yoğunluk fonksiyonunu göstermek için, sırasıyla:

$$p_{R_x+R_y}(v) = \int_R p_{R_x}(u) \cdot p_{R_y}(v-u) \cdot du$$

Ve böylece

$$Z_X^+ + Z_Y^+ = (A_x + A_y, p_{R_x} \circ p_{R_y})$$

Daha fazla genellersek,  $Z_X * Z_Y$ 'i hesaplamak için gereken, bulanık mantığın büyüme ilkesidir. Temelde, büyüme ilkesi, bilinenlerin argümanların değerleri değil argümanların değerlerinin sınırları olduğu zaman fonksiyonun değerlendirilmesi için gerekli kuraldır. Başka bir şekilde ifade etmek gerekirse, argümanların değerlerine ilişkin daha az bilgiyle fonksiyon değerinin değerlendirilmesini içeren bir kuraldır.

Aslında, “büyüme ilkesi” kavramı, sayılardan bulanık sayılara bir fonksiyon tanımının işlev bölgesinin genişlemesini sağlayan kuralın tanımlanmasıdır. Bu metinde, “büyüme ilkesi” kavramının daha genel bir kavramı vardır bu da sınırlar açısından belirtilmiştir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta, daha genelleştirecek olursak, argüman değerlerinin eksiksiz bilgisinin, fonksiyonlara ve özellikle de eğer-ise kuralları olarak tanımlanan fonksiyonlara ilişkin eksiksiz bilgiyi de içerdiğiidir.

Büyüme ilkesinin birçok farklı versiyonu bulunmaktadır. En temel versiyonda büyüme ilkesi şu şekilde tanımlanabilir:

$$Y = f(X)$$

$$\frac{R(X): A \text{ dır } (u \text{ nun kısıtlanmış } \mu_A(u))}{R(Y): \mu_Y(v) = \sup_u \mu_A(u) (f(A) = R(Y))}$$

Şuna bağlıdır:

$$v = f(u),$$

Bu durumda sırasıyla A bir bulanık kümedir,  $\mu_A$ , A'nın üyelik fonksiyonudur,  $\mu_Y$ , Y'nin üyelik fonksiyonudur ve u ve v ise X ve Y'nin değerinin eşdeğeridir.

Bu durumda, argümanların birleştirilmiş sınırları, minimum olarak yorumlanan  $\wedge$  ile sınırlarının konjonksiyonu olarak ifade edilmektedir. Aslında, büyüme ilkesi uygulaması, fonksiyonel optimizasyonda bir problemin  $P_Z$  hesabını azaltmaktadır. Burada önemli olan nokta, çözümün  $P_Z$  değeri değil,  $P_X$  ve  $P_Y$ 'nin sınırlarıyla uygun olarak  $P_Z$ 'nin değerlerinin sınırları olmasıdır.

Bu noktada, bulunduğumuz konumu durdurmak ve özetlemek bize yardımcı olacaktır.  $Z^+$  sayılarıyla uğraşıyormuşuz gibi ilerlersek,  $P_X$  ve  $P_Y$ 'nin fonksiyonu olarak  $P_Z$  için bir ifadeye ulaşırız. Bu ifadeyi kullanarak ve büyüme ilkesini uygulayarak,  $P_X$  ve  $P_Y$ 'nin sınırları ile oluşan  $P_Z$ 'nin sınırını hesaplayabiliriz.  $P_Z$ 'nin uygun değerleri,  $P_Z$ 'nin bu değerlerinden oluşmaktadır ve ölçü açısından uyumluluk anlayışıyla verilen bilgiyle uyumludur.

İkinci adım bulanık olayın olasılığının hesaplanmasını içermektedir,  $Z$ ,  $A_Z$ 'dir,  $P_Z$  olarak verilir. Daha önce belirtildiği gibi, bulanık mantıkta bulanık olayın olasılık hesabında  $X$ ,  $A$ 'dır, bu durumda  $A$  bir bulanık kümedir ve  $P_X$  olasılık yoğunluğu ile  $X$  bir rastgele değişkendir. Şu şekilde tanımlanır:

$$\int_R \mu_A(u) p_x(u) du$$

Bu ifadeyi kullanarak,  $A_Z$ 'nin olasılık ölçümü şu şekilde ifade edebiliriz:

$$B_Z = \int_R \mu_{A_Z}(u) p_Z(u) du$$

Aşağıdaki olduğu durumda tabi:

$$\mu_{A_Z}(u) = \sup_v (\mu_{A_x}(v) \wedge \mu_{A_y}(u - v)).$$

$P_Z$  bilinen olasılık yoğunluğu olduğunda,  $B_Z$ 'nin bir sayı olduğu akılda tutulmalıdır. Çünkü bilmemiz gereken,  $p_Z$ 'nin kendi olasılık dağılımı olduğu,  $\mu_{p_Z}(p_Z)$ ,  $B_Z$ 'nin üyelik fonksiyonu ile bir bulanık küme,  $\mu_{B_Z}$  olduğudur. Büyüme ilkesini uyguladığımızda,  $\mu_{B_Z}$  için bir ifadeye ulaşıyoruz.

$$\mu_{B_Z}(w) = \sup \mu_{p_Z}(p_Z)$$

Burada

$$w = \int_R \mu_{A_Z}(u) p_Z(u) du$$

olur. Bu durumda,  $\mu_{p_Z}(p_Z)$  ilk adımın sonucudur. Temelde, bu  $Z$  sayıları  $Z_x$  ve  $Z_y$ 'nin toplam hesabını tamamlamaktadır.

Aynı şekilde,  $Z$  sayısının çeşitli fonksiyonlarını hesaplayabiliriz. Bu hesaplamaları vurgulayan temel fikir aşağıdaki gibi özetlenebilir.  $Z_x$  ve  $Z_y$  'nin  $Z$  sayıları,  $Z_x = (A_x, B_x)$  ve  $(A_y, B_y)$  ve  $f(Z_x, Z_y) = (A_z, B_z)$  iken  $f = (Z_x, Z_y)$  'nin hesaplandığı bir problem farz edin. Şunu düşünerek başlayacağız, gizli olasılık dağılımları  $p_x$  ve  $p_y$  bilinmektedir.

Buna ulaşmış olmak,  $Z^+$  sayıları olan sınırlara uygulanan büyüme ilkesi versiyonunun kullanımıyla yapılabilen  $f(Z_x^+, Z_y^+)$  'nin hesaplanması için  $f(Z_x, Z_y)$  'nin hesaplanmasını azaltmaktadır. Bu noktada, bildiğimiz şeyin  $p_x$  ve  $p_y$  değil,  $p_x$  ve  $p_y$  'nin sınırları olduğunu fark ediyoruz.

Olasılıksal sınırlamalarla ilişkili büyüme ilkesi versiyonunu uygulayarak  $f = (Z_x, Z_y)$  'ye ulaşıyoruz.  $f = (A_y, B_y)$  ve  $f(p_x, p_y)$  'nin skaler çarpımındaki sınırları,  $B_z$ , hesaplayabiliriz. Çünkü  $A_z = f(A_x, B_x)$   $B_z$  'nin hesaplanması,  $f = (Z_x, Z_y)$  'nin hesabını tamamlamaktadır.

Büyüme ilkesi versiyonunu özet olarak ifade etmek işinize yarayacaktır. Daha somut bir şekilde ifade edecek olursak, şu şekilde yazabiliriz:

$$Z = f(X, Y)$$

$X$  is  $(A_x, B_x)$  ( $X$  in sınırları)

$Y$  is  $(A_y, B_y)$  ( $Y$  'nin sınırları)

$Z$  is  $(A_z, B_z)$  ( $Z$  'nin sınırları)

$A_z = f(A_x, A_y)$  (bulanık sayılar için büyüme ilkesinin uygulanması)

$$B_z = \mu_{A_z} \cdot f(p_x, p_y)$$

Bu durumda,  $p_x$  ve  $p_y$  şu şekilde sınırlandırılmaktadır:

$$\int_R \mu_{A_x}(u)p_x(u)du \quad B_x \text{ dir.}$$

$$\int_R \mu_{A_y}(u)p_y(u)du \quad B_y \text{ dir.}$$

$B_x$  ve  $B_y$ 'nin üyelik fonksiyonları açısından, bu sınırlamalar şu şekilde ifade edilebilir:

$$\mu_{B_x} \left( \int_R \mu_{A_x}(u)p_x(u)du \right)$$

$$\mu_{B_y} \left( \int_R \mu_{A_y}(u)p_y(u)du \right)$$

$p_y$  ve  $p_x$  in ek sınırlamaları:

$$\int_R p_x(u)du = 1$$

$$\int_R p_y(u)du = 1$$

$$\int_R up_x(u)du = \frac{\int_R u\mu_{A_x}(u)du}{\int_R \mu_{A_x}(u)du}$$

$$\int_R up_y(u)du = \frac{\int_R u\mu_{A_y}(u)du}{\int_R \mu_{A_y}(u)du}$$

Sonuç olarak , bir önceki sonuçlara bakarak şunu yazabiliriz:

$$\mu_{p_z}(p_z) = \sup(\mu_{B_x} \left( \int_R \mu_{A_x}(u)p_x(u)du \right) \wedge \mu_{B_y} \left( \int_R \mu_{A_y}(u)p_y(u)du \right))$$

Bu durum şunlara bağlıdır:

$$p_z = p_x \circ p_y$$

$$\int_R p_x(u) du = 1$$

$$\int_R p_y(u) du = 1$$

$$\int_R u p_x(u) du = \frac{\int_R u \mu_{A_x}(u) du}{\int_R \mu_{A_x}(u) du}$$

$$\int_R u p_y(u) du = \frac{\int_R u \mu_{A_y}(u) du}{\int_R \mu_{A_y}(u) du}$$

Akılda tutulması gereken A ve B'nin, birçok kısım için, algı odaklı olduğu ve bunun dolayısıyla kesin olmadığıdır. A ve B'nin kesin olmayışı, Z sayıları ile hesaplamanın karmaşıklığını azaltmak ve hesap sonucunun bilgilendiriciliğini arttırmak amacıyla A ve B varsayımlarının sadeleştirme varsayımıyla basitleştirilmesini sağlamaktadır. Bunun gibi iki varsayım örnekleri aşağıda taslak olarak verilmiştir. Kısaca, gerçekçi basitleştirme varsayımında  $p_x$  ve  $p_y$  parametrik dağılımlardır, özellikle de sırasıyla  $\mu_x, \sigma_x^2$  ve  $\mu_y, \sigma_y^2$  parametreleri ile Gaussian dağılımıdır. Uygunluk koşulları  $\mu_x$  ve  $\mu_y$  koşullarını sabitlemektedir. Sonuç olarak,  $b_x$  ve  $b_y$  kesinliğin numarasal ölçütleri ise,  $b_x$  ve  $b_y$  sırasıyla  $p_x$  ve  $p_y$  yi belirlemektedir. Böylelikle,  $b_x$  ve  $b_y$ 'yi bildiğimiz varsayımı  $p_x$  ve  $p_y$ 'Yİ bildiğimiz varsayımına eşittir.  $Z^+$  sayılarının fonksiyonunu hesaplanmasını yönlendiren kuralları uygulayarak,  $B_Z$ 'yi  $b_x$  ve  $b_y$ 'nin bir fonksiyonu olarak hesaplayabiliriz. Bu noktada,  $B_x$  ve  $B_y$ 'nin sırasıyla  $b_x$  ve  $b_y$ 'nin sınırları olduğunu görüyoruz. Büyüme ilkesinin genel versiyonunu uygulayarak  $B_Z$ 'ye ulaşır ve hesaplama sürecini tamamlarız. Bu yöntem Z-sayıları ile hesaplama yapmanın en etkin yoludur.

A ve B'nin kesin olmayışını konusunda bize yarar sağlayacak bir diğer etkin yöntem ise,  $A_b$ 'nin A'nın bant genişliği olduğu aralıklı üyelik fonksiyonu,  $A_b$ , ile A'nın

yamuk üyelik fonksiyonunun varsayımını içermektedir. Çünkü A bir kesin kümedir, bunu şu şekilde yazabiliriz:

$$(A_x^b, B_x) * (A_y^b, B_y) = (A_x^b * A_y^b, B_x \times B_y)$$

Bu durumda,  $B_x \times B_y$  bulanık sayılar olan  $B_x$  ve  $B_y$ 'nin ürünüdür. Bu ifadenin geçerliliği aralık değerli üyelik fonksiyonunun ne kadar bir yamuk üyelik fonksiyonu varsayımı sağladığına bağlıdır.



## 4.BÖLÜM

### SÜREKLİ Z SAYILARI

Bu bölümde Z sayıları hakkındaki bilgilerimizi genişleterek sürekli Z sayılarını tanıyacağız.

#### 4.1. Sürekli Z sayıları Temel Bilgiler

**Tanım 4.1.1** Bir devamlı Z sayısı bir sıralı çifttir.  $Z=(A,B)$ . Burada A devamlı belirsiz bir sayı olup bir X rastgele değişkenin alabileceği değerler üzerinde bir bulanık kısıt rolü oynamaktadır.

X A dır B de bulanık bir sayı olup üyelik fonksiyonu  $\mu_B = [0,1] \rightarrow [0,1]$  şeklindedir ve A nın olabirlik ölçümü üzerinde bir belirsiz kısıt rolü oynamaktadır.

$P(A)$  B dir.

Bir devamlı  $Z^+$  sayısının A kavramı devamlı Z sayısının kavramına yakından ilişkilidir. Devamlı bir Z sayısı durumunda  $Z(A,B)$  ,  $Z^+$  sayısı devamlı bir bulanık sayı olan A yı içeren ve rastgele bir sayı olan R den oluşan çifttir:

$Z^+=(A,R)$

Burada A devamlı bir Z sayısında oynadığı rolün aynısını oynar.  $Z=(A,B)$  ,R ise olabirlik dağılım rolünü oynar, p bu durumda;

$$P(A) = \int_R \mu_A(u)p_R(u), \quad P(A) \in \text{supp}(B)$$

Bu bölümde +,-, . , : olmak üzere dört aritmetik işlem dahilindeki Z sayılarının cebirsel özelliklerine değineceğiz. Bu işlemler uzatma ilkesi ile tanımlanır. Devamlı belirsiz sayıların özelliklerine (104) de bakacağız. Bu özellikler bir Z sayısının ilk kısmı (A kısmı) için kullanılabilir.

Rastgele değişkenler şu özelliklere sahiptirler:

- İki rastgele değişkenin toplamı rastgele bir değişkendir
- İki rastgele değişkenin sonucu rastgele değişkendir.
- Rastgele değişkenlerin toplamı ve çarpımının her ikisi de değişmelidir.

Tüm değişkenler için;  $X$  in sabit bir sayı olması durumunda  $(XY)^* = X^*Y^*$  koşulunu yerine getiren rastgele değişkenlerin birleşmesi  $X, Y$  kompleks birleşmeye denk gelir.

Sonuç olarak rastgele değişkenler karmaşık cebirler oluşturmaktadır. Bu nedenle dört aritmetik işlemle birleştirilmiş kümeleme ve kesişme dahilindeki  $Z$  sayılarının aşağıdaki özelliklerini elde etmiş olduk.

$Z_Y = (A_Y, B_Y)$  ve  $Z_x = (A_x, B_x)$  olsun ve  $*$  işlemi  $R$  de tanımlanan ikili bir işlem olsun. Bu durumda  $*$  işlemi  $A$  ve  $B$  olan  $Z$  sayılarına genişletme ilkesi ile genişletilebilir.

#### 4.2 Z Sayıları Üzerinde Dört Aritmetik İşlem

$f(X, Y) = X^*Y$  olsun . burada  $*$  işlemi dört aritmetik işlem olan  $+, -, \cdot, :$  ile değiştirilebilir. Ardından  $Z$  sayıları üzerindeki işlemleri şöyle tanımlayabiliriz:

$Z$  sayıları  $(A_Y, B_Y)$  ve  $(A_x, B_x)$  nın toplamı:

$$(A_z, B_z) = (A_x, B_x) + (A_y, B_y)$$

$$\mu_{A_z=A_x+A_y}(v) = \sup(\mu_{A_x}(u) \wedge \mu_{A_y}(v-u))$$

$$P_{R_x+R_y}(v) = \int_R P_{R_x}(u) \cdot P_{R_y}(v-u) \cdot du$$

$$\mu_{p_z}(p_z) = \sup \left( \mu_{B_x} \left( \int_R \mu_{A_x}(u) p_x(u) du \right) \wedge \mu_{B_y} \left( \int_R \mu_y(u) p_y(u) du \right) \right) \quad (*)$$

$$\mu_{B_z}(w) = \sup(\mu_{p_z}(p_z))$$

$$w = \int_R \mu_{A_z}(u) p_z(u) du$$

Z sayıları  $(A_Y, B_Y)$  ve  $(A_x, B_x)$  nın çıkarması:

$$(A_z, B_z) = (A_x, B_x) - (A_y, B_y)$$

$$\mu_{A_z=A_x-A_y}(v) = \sup(\mu_{A_x}(u) \wedge \mu_{A_y}(v+u))$$

$$P_{R_x-R_y}(v) = \int_R P_{R_x}(u).P_{R_y}(v+u).du$$

$$\mu_{p_z}(p_z) = \sup \left( \mu_{B_x} \left( \int_R \mu_{A_x}(u) p_x(u) du \right) \wedge \mu_{B_y} \left( \int_R \mu_y(u) p_y(u) du \right) \right)$$

$$\mu_{B_z}(w) = \sup(\mu_{p_z}(p_z))$$

$$w = \int_R \mu_{A_z}(u) p_z(u) du$$

Z sayıları  $(A_Y, B_Y)$  ve  $(A_x, B_x)$  nın çarpımı:

$$(A_z, B_z) = (A_x, B_x). (A_y, B_y)$$

$$\mu_{A_z=A_x.A_y}(v) = \sup(\mu_{A_x}(u) \wedge \mu_{A_y}(v/u))$$

$$P_{R_x.R_y}(v) = \int_R P_{R_x}(u).P_{R_y}(v/u).du$$

$$\mu_{p_z}(p_z) = \sup \left( \mu_{B_x} \left( \int_R \mu_{A_x}(u) p_x(u) du \right) \wedge \mu_{B_y} \left( \int_R \mu_y(u) p_y(u) du \right) \right)$$

$$\mu_{B_z}(w) = \sup(\mu_{p_z}(p_z))$$

$$w = \int_R \mu_{A_z}(u) p_z(u) du$$

Z sayıları  $(A_y, B_y)$  ve  $(A_x, B_x)$  nın bölümü:

$$(A_z, B_z) = (A_x, B_x) / (A_y, B_y)$$

$$\mu_{A_z=A_x/A_y}(v) = \sup(\mu_{A_x}(u) \wedge \mu_{A_y}(v.u))$$

$$P_{R_x/R_y}(v) = \int_R P_{R_x}(u) . P_{R_y}(v.u) . du$$

$$\mu_{p_z}(p_z) = \sup \left( \mu_{B_x} \left( \int_R \mu_{A_x}(u) p_x(u) du \right) \wedge \mu_{B_y} \left( \int_R \mu_y(u) p_y(u) du \right) \right)$$

$$\mu_{B_z}(w) = \sup(\mu_{p_z}(p_z))$$

$$w = \int_R \mu_{A_z}(u) p_z(u) du$$

### 4.3 Pozitif Z Sayıları

**Tanım 4.3.1** Eğer  $A_x$  in  $[a_1, a_2]$  aralığı için  $0 \leq a_1 \leq a_2$  oluyorsa bir Z numbersın  $(A_x, B_x)$  pozitif olduğu söylenebilir.  $A_x$  bir pozitif gerçel doğrudur. Benzer şekilde  $A_x$  in  $[a_1, a_2]$  aralığı için  $a_1 \leq 0 \leq a_2$  ve  $a_1 \leq a_2 \leq 0$  oluyorsa bir Z  $(A_x, B_x)$  sayısı negatiftir.

Aşağıda Z sayılarının 4 işlem dahilindeki cebirsel özelliklerine bakalım:

Herhangi bir Z  $(X, Y, Z)$  sayısı için aşağıdaki özellikleri elde edebiliriz:

$((A_x, B_x) + (A_y, B_y) + (A_z, B_z)) = (A_x, B_x) + ((A_y, B_y) + (A_z, B_z))$  (birleşme özelliği)

$(A_x, B_x) + (A_y, B_y) = (A_y, B_y) + (A_x, B_x)$  (değişme özelliği)

$(A_x, B_x) \times (A_y, B_y) = (A_y, B_y) \times (A_x, B_x)$  (değişme özelliği)

$$(A_x, B_x) + 0 = (A_x, B_x) \quad (\text{Eşitlik yasası})$$

$$(A_x, B_x) \times 1 = (A_x, B_x) \quad (\text{Eşitlik yasası})$$

Burada 0 ve 1, sıfır ve reel doğrunun birleşimidir. Bu durumda herhangi bir Z number için Hukuhara farklılık durumunda ;

$$(A_x, B_x) - h(A_x, B_x) = 0 \text{ kuralı geçerlidir.}$$

Genelde herhangi bir Z sayısı için aşağıdaki koşullar sağlanmaz:

$$(A_x, B_x) + (A_x, B_x)' = 0$$

$$(A_x, B_x) \times (A_x, B_x)'' = 1$$

Burada  $(A_x, B_x)'$  ve  $(A_x, B_x)''$  + ve \* altındaki ters Z sayılarıdır.

$(A_x, B_x)$  ,  $(A_y, B_y)$  ,  $(A_z, B_z)$  bulanık kısıtlı sayıları için aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$(A_x, B_x) \pm ((A_y, B_y) \cup (A_z, B_z)) = (((A_x, B_x) \cup (A_y, B_y)) \pm ((A_x, B_x) \cup (A_z, B_z)))$$

$$(A_x, B_x) \pm ((A_y, B_y) \cap (A_z, B_z)) = (((A_x, B_x) \cap (A_y, B_y)) \pm ((A_x, B_x) \cap (A_z, B_z)))$$

Bu dağılma özelliği aşağıdaki kartesyen çarpımda geçerli değildir:

$$(A_x, B_x) \times ((A_y, B_y) + (A_z, B_z)) = (((A_x, B_x) \times (A_y, B_y)) + ((A_x, B_x) \times (A_z, B_z)))$$

Şimdi t-normu ve t-konormu altında +, -, :, . aritmetik işlemleriyle birlikte Z sayılarının özellikleri ile Z sayılarının  $\cup$  ve  $\cap$  ini inceleyeceğiz.

$(A_x, B_x)$  ve  $(A_y, B_y)$  nin birleşimi  $(A_z, B_z)$  olup uzatma ilkesiyle ;

$$(A_z, B_z) = (A_x, B_x) \cup (A_y, B_y)$$

$$(A_z = A_x \cup A_y, B_z = B_x \oplus B_y) \quad (\oplus \text{ cebirsel toplama})$$

Kesişimi şu şekildedir;

$$(A_z, B_z) = (A_x, B_x) \cap (A_y, B_y)$$

$$(A_z = A_x \cap A_y, B_z = B_x \cdot B_y)$$

Pozitif konveks kısıtları olan bir Z sayısı için aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$(A_x, B_x) \times ((A_y, B_y) \cup (A_z, B_z)) = (((A_x, B_x) \times (A_y, B_y)) \cup ((A_x, B_x) \times (A_z, B_z)))$$

$$(A_x, B_x) \times ((A_y, B_y) \cap (A_z, B_z)) = (((A_x, B_x) \times (A_y, B_y)) \cap ((A_x, B_x) \times (A_z, B_z)))$$

$$(A_x, B_x) \div ((A_y, B_y) \cup (A_z, B_z)) = (((A_x, B_x) \div (A_y, B_y)) \cup ((A_x, B_x) \div (A_z, B_z)))$$

$$(A_x, B_x) \div ((A_y, B_y) \cap (A_z, B_z)) = (((A_x, B_x) \div (A_y, B_y)) \cap ((A_x, B_x) \div (A_z, B_z)))$$

$$((A_y, B_y) \cup (A_z, B_z)) \div (A_x, B_x) = (((A_y, B_y) \div (A_x, B_x)) \cup ((A_z, B_z) \div (A_x, B_x)))$$

$$((A_y, B_y) \cap (A_z, B_z)) \div (A_x, B_x) = (((A_y, B_y) \div (A_x, B_x)) \cap ((A_z, B_z) \div (A_x, B_x)))$$

#### 4.4. Gizli Z Sayıları

**Tanım 4.4.1.** Bir gizli Z sayısı sıralı bir çift olup  $Z=(A,B)$  şeklindedir. Buradan A gizli bir bulanık sayı olup X rastgele değişkeninin alabileceği değerler üzerinde bulanık kısıt rolünü oynamaktadır.

X A dır ve B belirsiz bir bulanık sayı olup üyelik fonksiyonu şöyledir:

$$\mu_B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \rightarrow [0,1] \quad \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subset [0,1]$$

Üyelik fonksiyonu A'nın olabilirlik ölçüsü üzerinde bulanık kısıt rolünü oynar.

$P(A)$  B dir.

Gizli  $Z^+$  sayısı kavramı gizli Z sayısı kavramı ile yakından ilişkilidir. Örneğin gizli bir Z sayısı  $Z=(A,B)$  şeklindeyken  $Z^+$  sayısı bir A bulanık sayısı ve R rastgele sayısından oluşan çift olduğu için gizli  $Z^+$  sayısı

$Z^+ = (A, R)$  şeklindedir.

Burada A bir gizli Z sayısında oynadığı rolün aynısını oynar ve R , p olabilirlik dağılımı rolünü oynar.

$$P(A) = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) p(x_i) \quad , \quad P(A) \in \text{supp} (B)$$

$\text{MIN}(Z_1, Z_2)$  ve  $\text{Max}(Z_1, Z_2)$  olarak gösterilenler belirsiz Z sayılarıdır.

$Z_1, Z_2, Z_3 \in Z$  den herhangi biri için aşağıdakiler sağlanır:

- 1)  $Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_1$  (değişme özelliği)
- 2)  $(Z_1 + Z_2) + Z_3 = Z_1 + (Z_2 + Z_3)$  (birleşme özelliği)
- 3)  $Z + 0^Z = Z$  ( $0^Z = \text{sıfır } Z \text{ sayısıdır.}$ )

## BÖLÜM 5

### SÜREKLİ Z SAYILARI ÜZERİNDE İŞLEMLER

#### 5.1. Devamlı Z sayılarının Eklenmesi

$Z_1 = (A_1, B_1)$  ve  $Z_2 = (A_2, B_2)$  devamlı Z sayıları olsun ve  $X_1, X_2$  rastgele değişkenleri hakkında bazı bilgiler tanımlansın.

$Z_{12} = Z_1 + Z_2$ , Z sayıları ile hesaplama  $Z^+$  sayıları ile hesaplama ile başlar.  $Z^+$  sayısı  $Z_{12}^+ = Z_1^+ + Z_2^+$  olarak tanımlanır :

$$Z_1^+ + Z_2^+ = (A_1 + A_2, R_1 + R_2)$$

Genel olarak olasılık dağılımının geniş ailesini  $R_1$  ve  $R_2$  olarak alıyoruz. Daha basit olması için normal dağılımları dikkate alalım:

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1}} \cdot e^{\frac{(x-\mu_1^2)}{2\sigma_1^2}} \quad (3,1)$$

$$p_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2}} \cdot e^{\frac{(x-\mu_2^2)}{2\sigma_2^2}} \quad (3,2)$$

Belirsiz Z sayılarının  $A_1 + A_2$  eklentisinin tanımlanması :

$$(A * B)^a = A^a * B^a$$

$$A * B = \bigcup_{a \in [0,1]} a (A * B)^a$$

$A^a = [a_1^a, a_2^a]$  ve  $B^a = [b_1^a, b_2^a]$  ise bu durumda ;

$$A^a + B^a = [a_1^a, a_2^a] + [b_1^a, b_2^a] = [a_1^a + b_1^a, a_2^a + b_2^a]$$

$$A^a = \{x/\mu_A(x) \geq a\} : B^a = \{x/\mu_B(x) \geq a\}$$

Şeklinde yapılır ve  $R_1 + R_2$  bir  $p_{12} = p_1 \circ p_2$  işlemi devamlı olasılık dağılımıdır.

$$p_{12} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \exp \left[ \frac{x - (\mu_1 + \mu_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \right] \quad (3,3)$$

Bu durumda  $Z_{12}^+ = (A_1 + A_2, p_{12})$  ye sahip olacağız. Bu da  $Z^+$  sayılarının hesaplanmasının  $Z$  sayıları ile hesaplanmasının ilk adımı olmasından kaynaklanır.

Bir sonraki aşamada  $Z$  sayılarında  $Z_1 = (A_1, B_1)$  ve  $Z_2 = (A_2, B_2)$  doğru olasılık dağılımları  $p_1$  ve  $p_2$  nin tam olarak bilinmediği gerçektir. Mevcut bilgilerde belirsiz kısıtlamalarla temsil edilmektedir.

$$\int_R \mu_{A_1}(x) p_{R_1}(x_1) dx_1 \quad B_1 \text{ dir.} \quad (3,4)$$

$$\int_R \mu_{A_2}(x) p_{R_2}(x_2) dx_2 \quad B_2 \text{ dir.} \quad (3,5)$$

Bunların üyelik fonksiyonlarını şöyle temsil edebiliriz:

$$\mu_{B_1} \left( \int_R \mu_{A_1}(x) p_{R_1}(x_1) dx_1 \right) \quad (3,6)$$

$$\mu_{B_2} \left( \int_R \mu_{A_2}(x) p_{R_2}(x_2) dx_2 \right) \quad (3,7)$$

Bu kısıtlamalar  $p_1$  ve  $p_2$  nin olabilirlik dağılımının bulanık bir küme gibi aşağıdaki üyelik fonksiyonlarıyla tanımlanır.

$$\mu_{p_{R_1}}(p_{R_1}) = \mu_{B_1} \left( \int_R \mu_{A_1}(x) p_{R_1}(x_1) dx_1 \right)$$

$$\mu_{p_{R_2}}(p_{R_2}) = \mu_{B_2} \left( \int_R \mu_{A_2}(x) p_{R_2}(x_2) dx_2 \right)$$

Bu nedenle  $B_j$  bulanık bir sayıdır.  $A_j$  olasılık ölçümünün bir değeri üzerinde esnek bir kısıt rolü oynamaktadır.

Burada (3,6) (3,7) nin gizli versiyonunu kullanalım:

Bu durumda temel değerler  $b_{jl} \in \text{supp}(B_j)$   $j=1,2 \quad l=1,2,\dots,m$  gizli belirsiz sayı durumunda  $B_j, A_j, b_{jl} = P(A_j)$  nin olasılık ölçümünün değerleridir. Bu nedenle  $b_{jl}$  için  $p_{jl}$  açısından aşağıdaki koşulu sağlayan olasılık dağılımını bulmalıyız:

$$b_{jl} = \mu_{A_j}(x_{j1})P_{jl}(x_{j1}) + \mu_{A_j}(x_{j2})P_{jl}(x_{j2}) + \dots + \mu_{A_j}(x_{jn_j})P_{jl}(x_{jn_j})$$

Aynı zamanda  $P_{jl}$  aşağıdaki koşulu karşılamalıdır.

$$\sum_{k=1}^{n_j} P_{jl}(x_{jk}) = 1 \quad P_{jl}(x_{jk}) \geq 0$$

Bu nedenle aşağıdaki hedef programlama problemi  $P_j$  yi bulacak şekilde çözülmelidir:

$$\mu_{A_j}(x_{j1})P_{jl}(x_{j1}) + \mu_{A_j}(x_{j2})P_{jl}(x_{j2}) + \dots + \mu_{A_j}(x_{jn_j})P_{jl}(x_{jn_j}) \rightarrow b_{jl} \quad (3,8)$$

Bu durum şuna bağlıdır:

$$P_{jl}(x_{j1}) + P_{jl}(x_{j2}) + \dots + P_{jl}(x_{jn_j}) = 1$$

$$P_{jl}(x_{j1}), P_{jl}(x_{j2}), \dots, P_{jl}(x_{jn_j}) \geq 0$$

Şimdi  $C_k = \mu_{A_j}(x_{jk})$  ve  $v_k = p_j(x_{jk})$   $k=1,2,3,\dots,n$  olur.  $C_k$  ve  $b_{jl}$  bilinen sayılar ve  $v_k$  bilinmeyen karar değişkeni olduğundan, problemin hedef lineer programlama probleminden ibaret olduğunu görebiliriz:

$$C_1v_1 + C_2v_2 + \dots + C_nv_n \rightarrow b_{jl} \quad (3,8a)$$

Aşağıdakine bağlıdır:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = 1$$

$$v_1, v_2, \dots, v_n \geq 0$$

(3,8a) ve (3,9a) probleminin  $v_k$ ,  $k=1,2,\dots,n$  çözümü ile her bir  $l=1,2,\dots,m$ ,  $v_k = P_{jl}(x_{jk})$  olduğunu hatırlıyoruz. Bu nedenle olabilirlik dağılımı  $p_{jl}$  elde edilir. İstenen derece ;

$$\mu_{p_{jl}}(p_{jl}) = \mu_{B_j}(b_{jl}) \quad j = 1,2 \text{ olup bu da ;}$$

$$\mu_{p_{jl}}(p_{jl}) = \mu_{B_j} \left( \sum_{k=1}^{n_j} \mu_{A_j}(x_{jk}) \cdot P_{jl}(x_{jk}) \right) \quad \text{dır.}$$

Bu nedenle  $p_j$  olabilirlik dağılımlarının bir bulanık kümesini oluşturmak için n basit hedef lineer programlama problemine ihtiyaç vardır. Normal rastgele değişkenler için bu problem  $\sigma$  tek parametrelili optimizasyon problemine indirgenmiş olur.

Normal bir dağılımla hesaplanan  $P_{jl}(x_{jk})$  nın yaklaştırmasından elde edilen  $p_1$  ve  $p_2$  olasılık dağılımlarının bulanık kümeleri  $p_{12s}, s = 1,2, \dots, m^2$  konvolüsyonlarının bulanık kümelerini tetiklemekte ve bu durumda üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi olmaktadır:

$$\mu_{p_{12}}(p_{12}) = \max_{p_1, p_2} [\mu_{p_1} \wedge \mu_{p_2}]$$

Aşağıda  $A_{12} = A_1 + A_2$  nin olabilirlik ölçümünün hesabı nı yapalım:

X bulanık olayının  $P(A_{12})$  olabilirlik ölçümünün hesabı  $A_{12}$  dir:

$$P(A_{12}) = \int_R \mu_{A_{12}}(u) p_{12}(u) du \quad (3.12)$$

Bu yüzden  $p_{12}$  bilindiğinde  $P(A_{12})$ ,  $P(A_{12}) = b_{12}$  şeklinde bir sayıya eşit olur. Fakat bilinen tek şey  $\mu_{p_{12}}$  üyelik fonksiyonundaki  $p_{12}$  bulanık sınırlamasıdır. Bu nedenle  $P(A_{12})$ ,  $B_{12}$  şeklinde bir bulanık küme olacaktır.  $B_{12}$  nin üyelik fonksiyonu  $\mu_{B_{12}}$  aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\mu_{B_{12}}(b_{12}) = \sup(\mu_{p_{12s}}(p_{12s}))$$

Şuna bağlıdır:

$$b_{12s} = \int_R \mu_{A_{12}}(x) p_{12s}(x_k) dx \quad (3.14)$$

Sonuç olarak  $Z_{12} = Z_1 + Z_2$ ,  $Z_{12} = (A_{12}, B_{12})$  olarak tanımlanır.

**Örnek 5.1.1.** TFNS bileşenleri olarak aşağıdaki devamlı Z sayılarını alalım:

$Z_1 = ((1,2,3)(0.7,0.8,0.9))$ ,  $Z_2 = ((7,8,9)(0.4,0.5,0.6))$   $Z_{12} = Z_1 + Z_2$  nin toplamını elde edelim:

Bu durumda pdf ler ele alınan Z sayılarının altında olduğunda normal pdf ler olarak ele alalım:

Öncelikle  $Z^+$  sayısı  $Z_{12}^+ = (A_{12}, R_1 + R_2)$  olarak ele alınmalıdır.

$$Z_{12}^+ = (A_1 + A_2, R_1 + R_2)$$

Burada  $R_1$  ve  $R_2$  normal pdf leri aşağıdaki gibidir:

$$p_1 = N(2,0.217)$$

$$p_2 = N(8,0.77)$$

(2.59) (2.60) ve (2.62) ye göre  $A_{12} = A_1 + A_2$   $A_{12} = (8,10,12)$  olarak hesaplanır. Sırasıyla (3,3) e göre  $R_1 + R_2$  aşağıdaki pdf ile açıklanacaktır.

$$p_{12} = (10,0.8)$$

Bu nedenle  $Z_{12}^+ = (A_1 + A_2, R_1 + R_2) = (A_1 + A_2, p_{12})$  elde edilir. Üçüncü adımda gerçek olasılık dağılımları olan  $p_1$  ve  $p_2$  nin bilinmediğini fark ediyoruz. Fakat sadece  $\mu_{p_1}()$  ve  $\mu_{p_2}()$  bulanık kısıtlamaları  $p_1$  ve  $p_2$  için mevcut olup bunlarda  $B_1$  ve  $B_2$  tarafından sağlanır.  $B_j$  ( $j = 1,2$ ) altındaki  $p_j$  ( $j = 1,2$ ) şeklindeki dağılımları çıkarmalıyız. (Bir  $p_j$  dağılımının bulanık kümesinin  $B_j$  nin altında olduğunu belirtmeliyiz. ) Bu şekilde  $\mu_{p_j}(p_j)$   $j=1,2$  yi hesaplamalıyız.

$p_j = (\mu_j, \sigma_j)$  tespitinin  $\mu_j$  uyumluluk nedeniyle sabit olduğunu dikkate alarak  $\sigma_j$  açısından aşağıdaki nonlinear optimizasyon problemi şeklinde temsil edilir.

$$\int_R \mu_{A_1}(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1}} \cdot e^{\frac{(x-\mu_1^2)}{2\sigma_{j1}^2}} \cdot dx \rightarrow b_{j1} \quad (3.15)$$

$$\text{Şuna bağlıdır: } \sigma_{jl} \geq \epsilon \geq 0 \quad (3.16)$$

Bu problem Newton yöntemiyle rahatça çözülebilir. Bu problemi  $B_j$  için çözüp aşağıdaki sonuçları elde edebiliriz:

|               |      |      |      |      |      |
|---------------|------|------|------|------|------|
| $b_{1l}$      | 0.7  | 0.76 | 0.8  | 0.84 | 0.9  |
| $\sigma_{1l}$ | 0.39 | 0.31 | 0.26 | 0.22 | 0.15 |
| $b_{2l}$      | 0.4  | 0.46 | 0.5  | 0.54 | 0.6  |
| $\sigma_{2l}$ | 0.91 | 0.77 | 0.68 | 0.61 | 0.52 |

(3.6a) ve (3.7a) ya dayalı olarak  $\mu_{p_1}(p_1)$  ve  $\mu_{p_2}(p_2)$  üyelik derecelerinin tespitine dikkat edelim:

Örneğin yukarıda dikkate alınan  $p_1$  ve  $p_2$  dağılımları için aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\int_R \mu_{A_1}(x) \cdot \frac{1}{0.217\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{(x-2^2)}{2 \cdot 0.217^2}} \cdot dx_1 \sim 0.84$$

$$\int_R \mu_{A_2}(x) \cdot \frac{1}{0.77\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{(x-8^2)}{2 \cdot 0.77^2}} \cdot dx_2 \sim 0.46$$

Buradan  $\mu_{p_1}(p_1) = \mu_{B_1}(0.84) = 0.6$  ve  $\mu_{p_2}(p_2) = \mu_{B_2}(0.46) = 0.6$  olur.

Benzer şekilde dikkate alınan tüm  $p_1$  ve  $p_2$  için üyelik derecelerini hesapladık.

Dördüncü adımda ise  $\mu_{p_1}()$  ve  $\mu_{p_2}()$  için dikkate alına tüm  $p_1$  ve  $p_2$  den (3,3) ün bazında elde edilen tüm  $p_{12}$  konvolüsyonları üzerinden  $\mu_{p_{12}}()$  belirsiz kısıtlamasını elde etmeliyiz.

Örneğin bu belirsiz kısıtlamasının üyelik derecesi  $p_{12}$  konvolüsyonu için aşağıdaki gibidir:

$$\mu_{p_{12}}(p_{12}) = [\mu_{p_1}(p_1) \wedge \mu_{p_2}(p_2)] = 0.6 \wedge 0.6$$

Benzer şekilde dikkate alınan  $p_{12}$  için tüm dereceleri hesapladık.(belirtmeliyiz ki  $p_1$  dağılımının bir bulanık kümesi ve  $p_2$  dağılımının bir bulanık kümesi  $p_{12}$  nin bir bulanık kümesini sağlamaktadır.)

Beşinci adımda (3.13) ve (3.14) e dayalı olarak  $P(A_{12})$  olabilirlik ölçümünün esnek bir kısıtı olarak  $B_{12}$  nin yapılandırmasını yaptık. Öncelikle  $p_{12}$  konvolüsyonlarını elde etmek için  $P(A_{12})$  olabilirlik ölçümünün değerlerini hesaplamalıyız. Örneğin yukarıda dikkate alınan  $p_{12}=(10,0.8)$  açısından hesaplanan  $P(A_{12})$  aşağıdaki gibidir:

$$P(A_{12}) = \int_R \mu_{A_{12}}(x_2) \cdot \frac{1}{0.8\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-10^2)}{2 \cdot 0.8^2}} \cdot dx_{12} \sim 0.69$$

Hesaplanan  $P(A_{12})$  yapılandırılacak olan  $B_{12}$  bulanık kısıtlaması içerisinde olası bir değerdir ve söyleyebiliriz ki  $B_{12}$  nin bir tane temel değeri  $b_{12}=0.69$  olarak bulunmuştur.(3,13) ve (3,14) ü hatırlayarak yazabiliriz ki :

$$\mu_{B_{12}}(b_{12}) = \int_R \mu_{A_{12}}(x_{12}) p_{12}(x_{12}) dx_{12} = \mu_{p_{12}}(p_{12})$$

Daha sonra  $\mu_{p_{12}}(p_{12} = (10,0.8))=0.6$  olduğunu dikkate alarak

$$b_{12} = \int_R \mu_{A_2}(x_2) \cdot \frac{1}{0.8\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-10^2)}{2 \cdot 0.8^2}} \cdot dx_2$$

İçin  $\mu_{B_{12}}(b_{12} = 0.69) = 0.6$  yı elde ediyoruz. Benzer hesaplamalar yaparak  $B_{12}$  yi oluşturduk. Elde edilen sonuç üçgensel bir sayı gibi aşağıdaki gibidir:

$$B_{12} = (0.62, 0.72, 0.79)$$

Bu durumda  $Z_{12}=(A_{12}, B_{12})$  eklemesinin sonucu elde edilmiştir.

## 5.2. Sürekli Z sayılarının Çıkarılması

$Z_1=(A_1, B_1)$  ve  $Z_2=(A_2, B_2)$  şeklinde Z sayılarının standart çıkarması  $Z_{12}=Z_1 - Z_2$  yi dikkate alalım:

İlk olarak bir gizli  $Z^+$  sayısı ( $Z_{12}^+=Z_1^+ - Z_2^+$ ) tespit edelim:

$$Z_1^+ - Z_2^+ = (A_1 - A_2, R_1 - R_2)$$

Burada  $R_1$  ve  $R_2$  (3.1) ve (3.2) olasılık dağılımları tarafından temsil edilmektedir.

Bulanık sayıların  $A_1 - A_2$  farkı ,  $R_1 - R_2$  nin aşağıdaki gibi tanımlanan normal olabilirlik dağılımlarına ve  $p_1 \circ p_2$  konvolüsyonlarına göre tanımlanır:

$$p_{12} = \frac{e^{-\left[\frac{x-(\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right]}}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \quad (3.17)$$

(burada  $\mu_1 - \mu_2 = \mu_{12}$        $\sigma_{12} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$  )

Bu yüzden  $Z_{12}^+=(A_1 - A_2, p_{12})$  olup biz  $Z_{12}^+$  ya sahip olacağız. Bu da Z sayılarının standart çıkarma işleminin birinci adımı olan  $Z^+$  sayılarının standart çıkarma işleminin bir sonucudur.

Bir sonraki aşamada (3.8a)ve(3.9a)yı çözerek  $\mu_{p_{jl}}(p_{jl})$      $j = 1,2$

$l = 1, ..m$  bulanık kümelerini oluşturuyoruz. Ardından ise  $p_{12s}$      $s = 1,2 ... m^2$

Konvolüsyonunun bulanık kümesi (3.10) ve (3.11) in çözümü tarafından oluşturulan üyelik fonksiyonuyla yapılandırılır.( konvolüsyon 3.17 ye göre hesaplanır.)

Son adımda ise  $B_{12}$  nin oluşturulmasına devam edeceğiz. Öncelikle  $p_{12}$  yi dikkate alıp  $A_{12} = A_1 - A_2$  olabilirlik ölçümünü hesaplamamız gerekiyor. Örneğin

x belirsiz olayının olabilirlik hesabı (3.12) bazına göre  $A_{12}$  dir. Son olarak (3.13) ve (3.14) e göre  $B_{12}$  bulanık kümesini hesaplayacağız. Sonuç olarak  $Z_{12} = Z_1 - Z_2$  ,  $Z_{12} = (A_{12}, B_{12})$  olarak elde edilmektedir.

**Örnek 5.2.1. :** önceki örnekte verilen  $Z_{12} = Z_1 - Z_2$  hesaplamasını dikkate alalım:

Öncelikle  $Z^+$  sayısı  $Z_{12}^+ = (A_{12}, R_1 - R_2)$  tespit edilmelidir.

$A_{12} = A_1 - A_2$  (2.59) (2,60) (2,64) bazında bulunur.

$$A_{12} = (4,6,8)$$

$R_1 - R_2$  önceki örnekte dikkate alınan pdf ler için (3.17) bazında hesaplanan bir  $p_{12}$  konvolusyonudur.

$$p_{12} = (6,0,8)$$

Bu nedenle  $Z_{12}^+ = (A_1 - A_2, R_1 - R_2) = (A_1 - A_2, p_{12})$  elde edilir.

Daha sonra  $p_1$  ve  $p_2$  dağılımlarını oluşturmamız ve (3,6a) (3,7a) bulanık kısıtlamaları için  $\mu_{p_1}(p_1)$  ve  $\mu_{p_2}(p_2)$  üyelik derecelerini hesaplamamız gerekir. Bu dağılımlar ve üyelik dereceleri önceki örnekte tespit edilmiştir.

Dördüncü adımda  $p_{12}$  konvolusyonlarının  $\mu_{p_{12}}(p_{12})$  üyelik derecelerini hesaplıyoruz.  $\mu_{p_{12}}(p_{12})$  nin elde edildiği  $p_1$  ve  $p_2$  dağılımlarının sadece  $\mu_{p_1}(p_1)$  ve  $\mu_{p_2}(p_2)$  derecelerine bağlı olduğunu belirtmeliyiz ki bu belirli bir aritmetik işlem tipine bağlı değildir. Bu nedenle ekleme durumuna benzer şekilde elde edilecektir. Benzer şekilde yukarıda elde edilen  $p_{12}$  nin üyelik derecesi aşağıdaki gibidir:

$$\mu_{p_{12}}(p_{12}) = 0.6$$

Beşinci adımda  $B_{12}$  nin yapılandırılmasını sağlıyoruz. İlk olarak  $p_{12}$  konvolusyonlarından elde edilen  $P(A_{12})$  olabilirlik ölçümünün değerini hesaplıyoruz. Örneğin  $P(A_{12})$  yukarıda dikkate alınan  $p_{12}$  bazında hesaplandığı taktirde aşağıdaki gibi olur:

$$P(A_{12}) = \int_R \mu_{A_2}(x_2) \cdot \frac{1}{0.8\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{(x-6)^2}{2 \cdot (0.8)^2}} \cdot dx_1 \sim 0.69$$

Bu nedenle  $B_{12}$  nin bir temel değeri  $b_{12} = 0.69$  olarak bulunur ve bu durumda  $\mu_{B_{12}}(b_{12} = 0.69) = 0.8$  olur.

Son aşamada ise (3.13) ve (3.14) e göre  $B_{12}$  yi yapılandırıyoruz. Yapılandırılan  $B_{12}$ :

$$B_{12} = (0.62, 0.72, 0.79)$$

Olur.

Bu nedenle çıkarmanın sonucu olarak  $Z_{12} = (A_{12}, B_{12})$  elde edilir.

### 5.3. Sürekli Z Sayıları Çarpımı

$Z_1 = (A_1, B_1)$  ve  $Z_2 = (A_2, B_2)$  nin  $Z_{12} = Z_1 \cdot Z_2$  çarpımını ele alalım. öncelikle  $Z_{12}^+ = Z_1^+ \cdot Z_2^+$  tespit edilmelidir.

$$Z_1^+ \cdot Z_2^+ = (A_1 \cdot A_2, R_1 \cdot R_2)$$

Burada  $R_1$  ve  $R_2$  (3.1) ve (3.2) olasılıkları tarafından temsil edilir. bulanık sayıların  $A_1 \cdot A_2$  çarpımı sonucu (2.59) (2.60) (2.66) ya göre tanımlanır ve  $R_1 \cdot R_2$  (2.30) (2.31) e göre tanımlanan  $p_{12} = p_1 \circ p_2$  olasılık dağılımlarının bir konvolusyonudur.

Bu nedenle  $Z_{12}^+ = (A_1 \cdot A_2, p_{12})$  yi elde edeceğiz. Daha sonra bölüm 3.1 e benzer şekilde  $\mu_{p_{jl}}(p_{jl})$  bulanık setlerini ve  $p_{12s}, s = 1, \dots, m^2$  konvolusyonlarının bulanık kümesini (3.10) (3.11) i çözerek tanımlanan üyelik fonksiyonuyla birlikte yapılandırıyoruz.

Son olarak (3,13) ve (3,14) e göre bir  $B_{12}$  belirsiz seti oluşturulur. Sonuç olarak  $Z_{12} = Z_1 \cdot Z_2$   $Z_{12} = (A_{12}, B_{12})$  şeklinde oluşturulur.

**Örnek 5.3.1.** önceki örnekte verilen Z sayıları için  $Z_{12} = Z_1 \cdot Z_2$  hesabını dikkate alalım. öncelikle  $Z^+$  sayısı  $Z_{12}^+ = (A_{12}, R_1 \cdot R_2)$  tespit edilmelidir. Buradan  $A_{12} = A_1 \cdot A_2$  bulunur.  $R_1 \cdot R_2$  önceki örnekte dikkate alınan dağılımların bir  $p_{12}$  konvolusyonu olup  $p_{12} = (16, 5.5)$  olarak bulunur.

Sonraki adımda  $p_1$  ve  $p_2$  dağılımlarının  $\mu_{p_1}(p_1)$  ve  $\mu_{p_2}(p_2)$  üyelik derecelerinin hesaplanması gereklidir. Bu dağılımlar ve üyelik dereceleri bir önceki örnekte tespit edilmiştir.

Dördüncü adımda  $p_{12}$  konvolusyonlarının üyelik dereceleri  $\mu_{p_1}(p_1)$  ve  $\mu_{p_2}(p_2)$  e dayalı olarak ekleme ve çıkarma durumlarına benzer şekilde elde edilir. Aynı şekilde yukarıda elde edilen  $\mu_{p_{12}}(p_{12})$  değeri  $\mu_{p_{12}}(p_{12}) = 0.6$  dır.

Beşinci adımda  $B_{12}$  yi hesaplıyoruz. Bunun için  $p_{12}$  konvolusyonları açısından  $P(A_{12})$  olabilirlik ölçümünün değerlerini hesaplıyoruz. Örneğin yukarıda dikkate alınan  $p_{12}$  için  $P(A_{12})$  şöyledir:

$$P(A_{12}) = b_{12} = 0.67$$

Son aşamada  $B_{12}$  yi yapılandırıyoruz. Bu durumda

$$\mu_{B_{12}}(b_{12} = 0.67) = 0.8 \text{ olur.}$$

#### 5.4. Sürekli Z Sayıları Standart Bölünmesi

$Z_1 = (A_1, B_1)$  ve  $Z_2 = (A_2, B_2)$  nin standart bölünmesini  $Z_{12} = Z_1/Z_2$  olarak kabul edelim. ( burada  $0 \notin \text{supp}(A_2)$ ) bu durumda öncelikle  $Z_{12}^+ = (A_{12}, p_{12})$  tespit edilmelidir. O halde devamlı belirsiz Z sayıların standart bölünmesi  $A_{12} = A_1/A_2$  şeklindedir ve  $p_1, p_2$  olabilirlik dağılımlarının  $p_{12} = p_1 \circ p_2$  konvolusyonu ile tanımlanır.

Daha sonra bölüm 3,1 e benzer şekilde  $\mu_{p_{jl}}(p_{jl})$   $j=1,2$   $l=1,2,\dots,m$  bulanık kümelerini ve (3.10) ve (3.11) in çözülmesiyle tanımlanan üyelik fonksiyonuyla birlikte  $p_{12s}, s = 1, \dots, m^2$  bulanık konvolusyon kümesini yapılandırıyoruz.

Bir sonraki adımda (3,12) ye dayalı olarak bir  $A_{12}$  olabilirlik ölçümü hesaplanır. Son olarak ise (3.13) ve (3.14) e göre bir  $B_{12}$  bulanık kümesi oluşturulur. Sonuç olarak  $Z_{12} = Z_1/Z_2$   $Z_{12} = (A_{12}, B_{12})$  şeklindedir.

**Örnek 5.4.1.** önceki örnekte verilen Z sayıları için  $Z_{12} = Z_1/Z_2$  hesaplamasını dikkate alalım:

Öncelikle  $Z^+ \text{ sayısı } Z_{12}^+ = (A_{12}, R_1 / R_2)$  bulunmalıdır. Bu durumda

$A_{12} = A_1 / A_2$  bulunur.  $R_1 / R_2$  ise önceki örneklerde dikkate alınan dağılımlar için bulunan bir  $p_{12}$  konvolusyonudur.

$$p_{12} = (4, 0.34)$$

Daha sonra  $\mu_{p_1}(p_1)$  ve  $\mu_{p_2}(p_2)$  üyelik derecelerinin hesaplanması gerekir. Bu dağılımlar ve üyelik derecelerini bir önceki örnekte tespit ettik.

Dördüncü adımda  $p_{12}$  konvolusyonlarının üyelik dereceleri  $\mu_{p_1}(p_1)$  ve  $\mu_{p_2}(p_2)$  e dayalı olarak ekleme ve çıkarma durumlarına benzer şekilde elde edilir. Aynı şekilde yukarıda elde edilen  $\mu_{p_{12}}(p_{12})$  değeri  $\mu_{p_{12}}(p_{12}) = 0.6$  dır.

Beşinci adımda  $B_{12}$  yi hesaplıyoruz. Bunun için  $p_{12}$  konvolusyonları açısından  $P(A_{12})$  olabilirlik ölçümünün değerlerini hesaplıyoruz. Örneğin yukarıda dikkate alınan  $p_{12}$  için  $P(A_{12})$  şöyledir:

$$P(A_{12}) = b_{12} = 0.77 \text{ dir}$$

Son aşamada  $B_{12}$  yi yapılandırıyoruz. Bu durumda

$$\mu_{B_{12}}(b_{12} = 0.77) = 0.6 \text{ olur}$$

### 5.5 Sürekli Bir Z sayının Karesi

$Z_y = Z_x^2$  hesaplamasını dikkate alalım.  $Z_x^+ = (A_x, R_x)$  olsun. Burada  $R_x$  (3.1 ) olarak tespit edilsin. Bu durumda devamlı  $Z^+$  sayısı yani  $Z_y^+$  sayısı aşağıdaki gibi tespit edilir:

$$Z_y^+ = (A_y, R_y)$$

Burada  $A_y = A_x^2$  deki  $A_x^2$  tespit edilir. Şu anda  $\mu_{p_x}(p_x)$  üyelik fonksiyonu  $p_x$  olabilirlik dağılımlarının bulanık kümesinin doğal bir şekilde üyelik fonksiyonuna tabi olmak üzere  $\mu_{p_x}(p_{xj}) = \mu_{p_y}(p_{yj})$  şeklinde tanımlanan  $p_{yj}$  olabilirlik dağılımlarının bulanık kümesini tetiklediğini görebiliyoruz.

Sonraki adımda (3.12 ) bazında  $p_y$  ile birlikte  $A_y$  nin olabilirlik ölçüsünü hesaplıyoruz. Son olarak  $\mu_{p_y}$  üyelik fonksiyonu tarafından tanımlanan  $p_y$  üzerindeki bir bulanık kısıtlama nedeni ile (3.13) (3.14) ü çözerek bir  $B_y$  bulanık kümesi oluşturuyoruz. Sonuç olarak  $Z^2 = (A_x, B_y)$  şeklinde elde edilir.

## KAYNAKLAR

- [1] Ulucay, V., Oztekin, O., Sahin, M., Olgun, N., & Kargin, A. (2016). Soft representation of soft groups. *New Trends in Mathematical Sciences*, 2, 23-29.
- [2] Ulucay, V., Sahin, M., Olgun, N., Oztekin, O., & Emniyet, A. (2016). Generalized Fuzzy  $\sigma$ -Algebra and Generalized Fuzzy Measure on Soft Sets. *Indian Journal of Science and Technology*, 9(4).
- [3] Uluçay, V., Şahin, M., Olgun, N., & Kılıçman, A. On Soft Expert Metric Spaces.
- [4] Zadeh, L. A. (2011). A note on Z-numbers. *Information Sciences*, 181(14), 2923-2932.
- [5] Kang, B., Wei, D., Li, Y., & Deng, Y. (2012). A method of converting Z-number to classical fuzzy number. *Journal of Information and Computational Science*, 9(3), 703-709.
- [6] Yager, R. R. (2012). On Z-valuations using Zadeh's Z-numbers. *International Journal of Intelligent Systems*, 27(3), 259-278.
- [7] Bart Kosko.(1993) Fuzzy Thinking : *The New Science of Fuzzy Logic*, New York : Hyperion
- [8] Baykal N. Timur B. (2004) *Bulanık Mantık İlke ve Temelleri*, Bıçakçılar Kitabevi
- [9] Kosko B. (1992) *Neural Network and Fuzzy Systems*, Prentice Hall,Englewood Cliffts
- [10] Klir G.J. and Floger T.A. (1998) ,*Fuzzy Set ,Uncertainly and İnformation*, Prentice Hall,Englewood Cliffts
- [11] Lee C.C. (1990) *Fuzzy Logic in Control Sistems: Fuzzy Logic Controller*. Part 1 and 2

- [12] Munakata T. Jani Y. (1994) *Fuzzy Sistems: An Overview* Communications of the ACM
- [13] Nguyen H.T. and Walker E.A. (2000) *A first Coursa In Fuzzy Logic*, Boca Raton London, New york.
- [14] Prade H. (1980 ) *Fuzzy Set And Sistems*, Academic Press New York
- [15] Zadeh L. A. (1965) *Fuzzy Sets* , Information and Control.
- [16] Zadeh L. A. (1968) *Fuzzy Algorithms* , *ibid.*
- [17] Zadeh L. A. (1968) *Probability Measure Of Fuzzy Events* : *J. Math. Anal. Appl.*
- [18] Zimmerman H.J. (1985) *Fuzzy Set Theory and Applications*
- [19] Rafik A. Aliev , Oleg H. Huseynov ,Rashad R. Aliyev , Akif A. Alizadeh. *The Arithmetic of Z numbers: Theory and Applications*. World Scientific.