



**T.C.  
AMASYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SÜREKSİZLİK NOKTASI VE GEÇİŞ ŞARTLARI BULUNDURAN  
STURM-LIOUVİLLE PROBLEMİNİN BAZI SPEKTRAL  
ÖZELLİKLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**MURAT KÜÇÜK**

**HAZİRAN**

**SÜREKSİZLİK NOKTASI VE GEÇİŞ ŞARTLARI BULUNDURAN STURM-  
LIOUVILLE PROBLEMİNİN BAZI SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ**

**Murat KÜÇÜK**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**Danışman**

**Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR**

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HAZİRAN 2025**

## Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Murat KÜÇÜK tarafından hazırlanan “Süreksizlik Noktası Ve Geçiş Şartları Bulunduran Sturm-Liouville Probleminin Bazı Spektral Özellikleri” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

**Danışman :** Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

**Başkan :** Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU

Matematik Anabilim Dalı, Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

**Üye :** Dr. Öğr. Üyesi Tahir COŞGUN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Tez Savunma Tarihi: 18/06/2025

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

## ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Murat KÜÇÜK

18.06.2025

# SÜREKSİZLİK NOKTASI VE GEÇİŞ ŞARTLARI BULUNDURAN STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNİN BAZI SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Murat KÜÇÜK

AMASYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2025

## ÖZET

Bu Yüksek Lisans tez çalışmasında ikinci mertebeden homojen olmayan bir diferensiyel denklem ile homojen olmayan sınır şartlarından oluşan bir sınır değer problemi göz önüne alınmıştır. Problem, diferensiyel denkleminde ikinci dereceden özdeğer parametresi bulundurmakta ve denklemde bulunan katsayılar tanım aralığının bir iç noktasında süreksiz olan fonksiyonlardır. Göz önüne alınan problemin tanım aralığı bir tane süreksizlik noktası bulundurduğundan problem, iki aralıklı bir sınır değer problemi şeklindedir.

Problemin sınır şartları, tanım aralığının uç noktalarında göz önüne alınan sınır şartlarıyla birlikte süreksizlik noktasında dikkate alınan şartlardan oluşmaktadır. Süreksizlik noktasında göz önüne alınan şartlar geçiş şartları olarak adlandırılmaktadır. Problemin sınır şartlarına geçiş şartlarının da ilave edilmesiyle problem dört tane sınır şartına sahip bir problem olmuştur. Ayrıca problemin sınır şartlarında lineer fonksiyonellerde bulunmaktadır. Bütün bu özellikler ve şartlar dikkate alındığında çalışılan problem; ikinci mertebeden, süreksiz katsayılı, özdeğer parametrelili, fonksiyonel, geçiş şartlı bir sınır değer problemidir.

Bu çalışmanın temel esasları özellikleri ve şartları yukarıda belirtilen problemin ürettiği diferensiyel operatörün tanımlanması ve bazı özelliklerinin araştırılmasıdır. Söz konusu diferensiyel operatör, problemin tanım aralıklarına ait Sobolev uzaylarının direkt toplam uzayında tanımlıdır. Bu diferensiyel operatör, aynı direkt toplam uzayına, sınır şartlarının değerlendirildiği dört boyutlu kompleks uzaylarında ilave edilmesiyle oluşan Sobolev uzaylarının direkt toplam uzayında değerlendirilmektedir.

Bu tez; Giriş, Literatür Özeti, Ölçülebilir Uzaylar ve Ölçülebilir Fonksiyonlar, Normlu Uzaylar, Lineer Operatörler, Sınır Değer Problemleri ve Geçiş Şartlı Süreksiz Sturm-Liouville Probleminin koersitivliği ve izomorfizmi bölümlerinden oluşmaktadır.

Son bölüm, bu tez çalışmasının orijinal kısmı olup bu kısımda probleme ait diferensiyel operatörün koersitivliği, izomorfizm ve Fredholm operatörü olma özellikleri araştırılmıştır.

Sayfa Adedi : 103  
Anahtar Kelimeler : Sınır değer problemi, Süreksiz problem, Geçiş şartları, İzomorfizm, Koersitivlik, Fredholm operatörü  
Danışman : Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR

# SOME SPECTRAL PROPERTIES OF THE STURM-LIOUVILLE PROBLEM WITH DISCONTINUITY POINT AND TRANSITION CONDITIONS

(M. Sc. Thesis)

Murat KÜÇÜK

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2025

## ABSTRACT

In this Master's thesis, a boundary value problem consisting of a second-order nonhomogeneous differential equation and nonhomogeneous boundary conditions is considered. The problem has a second-order eigenvalue parameter in its differential equation and the coefficients in the equation are functions that are discontinuous at an interior point of the definition range. Since the definition range of the problem under consideration has one discontinuity point, the problem is in the form of a two-interval boundary value problem.

The boundary conditions of the problem consist of the boundary conditions considered at the end points of the definition interval and the conditions considered at the discontinuity point. The conditions considered at the discontinuity point are called transmission conditions. By adding the transmission conditions to the boundary conditions of the problem, the problem has become a problem with four boundary conditions. In addition, there are linear functionals in the boundary conditions of the problem. When all these properties and conditions are taken into account, the problem studied is a second-order, discontinuous coefficient, eigenvalue parameter, functional, transmission condition boundary value problem.

The essence of this study is to define the differential operator generated by the problem whose properties and conditions are stated above and to investigate some of its properties. The differential operator in question is defined in the direct total space of Sobolev spaces belonging to the definition intervals of the problem. This differential operator is evaluated in the direct total space of Sobolev spaces formed by adding the four-dimensional complex spaces where the boundary conditions are evaluated to the same direct total space.

This thesis consists of the following sections; Introduction, Summary of Literature, Measurable Spaces and Measurable Functions, Normed Spaces, Linear Operators, Boundary Value Problems and Coercivity and Isomorphism of the Discontinuous Sturm-Liouville Problem with Transmission Conditions.

The last section is the original part of this thesis and in this section, the coercivity, isomorphism and Fredholm operator properties of the differential operator belonging to the problem are investigated.

Number of pages : 103

Keywords : Boundary value problem, Discontinuous problem, Transmission conditions, Isomorphism, Coercivity, Fredholm operator

Supervisor : Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR

## ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Tez sürecimde bilgi ve tecrübesini esirgemeyen, birlikte çalışmaktan onur duyduğum, karşılaştığım problemlere çözüm üreten, motive eden ayrıca göstermiş olduğu sabır ve hoşgöründen dolayı tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR'e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tez çalışmam sürecimde bilgi ve birikimlerini benimle paylaşan zamanını ve fikirlerini esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Kadriye AYDEMİR'e teşekkürlerimi sunarım.

Destegini hayatım boyunca yanımda hissettiğim annem Naciye KÜÇÜK'e ve yaşadığı sürece bana destek olan rahmetli babam Ahmet KÜÇÜK'e teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim sürecinde karşılaştığım her zorlukta yardımını ve desteğini esirgemeyen eşim Esma KÜÇÜK'e, varlığı ve sevgisiyle bana her zaman yaşama sevinci veren biricik kızım Beren KÜÇÜK'e ve biricik oğlum Göktuğ KÜÇÜK'e teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

### sayfa

|                                                         |     |
|---------------------------------------------------------|-----|
| ÖZET .....                                              | iv  |
| ABSTRACT.....                                           | v   |
| ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR.....                                 | vi  |
| İÇİNDEKİLER .....                                       | vii |
| SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ .....                    | ix  |
| 1. GİRİŞ .....                                          | 1   |
| 2. LİTERATÜR ÖZETİ.....                                 | 3   |
| 3. ÖLÇÜLEBİLİR UZAYLAR VE ÖLÇÜLEBİLİR FONKSİYONLAR..... | 6   |
| 3.1. Ölçüler.....                                       | 6   |
| 3.2. Ölçü Uzayları .....                                | 7   |
| 3.3. Dış Ölçü .....                                     | 15  |
| 3.4. Lebesgue Ölçüsü .....                              | 16  |
| 3.5. Ölçülebilir Fonksiyonlar .....                     | 19  |
| 3.6. Lebesgue İntegrali .....                           | 27  |
| 4. NORMLU UZAYLAR .....                                 | 31  |
| 4.1. Normlu Uzay .....                                  | 31  |
| 4.2. Banach Uzayları .....                              | 34  |
| 4.3. $L^p \Omega$ Uzayları .....                        | 37  |
| 4.4. $L^\infty \Omega$ Uzayları.....                    | 40  |
| 4.5. İç Çarpım Uzayı .....                              | 47  |
| 4.6. Hilbert Uzayı.....                                 | 50  |
| 4.7. Sobolev Uzayları .....                             | 52  |

|                                                                                                                                  |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5. BAZI LİNEER OPERATÖRLER .....                                                                                                 | 59  |
| 5.1. Kompakt Operatörler ve Kompakt Gömülmeler.....                                                                              | 61  |
| 5.2. Fredholm Operatörü .....                                                                                                    | 63  |
| 5.3. İntegral Operatörü .....                                                                                                    | 63  |
| 5.4. Rezolvent Operatörü .....                                                                                                   | 64  |
| 5.5. Pozitif Operatörler.....                                                                                                    | 65  |
| 5.6. İzomorfizma .....                                                                                                           | 66  |
| 6. SINIR DEĞER PROBLEMLERİ .....                                                                                                 | 68  |
| 6.1. Diferansiyel Denklemler .....                                                                                               | 68  |
| 6.2. Sınır Değer Problemleri .....                                                                                               | 71  |
| 6.3. Özdeğer Parametrelili Sınır Değer Problemleri .....                                                                         | 75  |
| 6.4. Sturm-Liouville Sınır Değer Problemleri.....                                                                                | 79  |
| 7. GEÇİŞ KOŞULLU SÜREKSİZ STURM-LİOUVILLE PROBLEMLERİNİN<br>KOERSİTİVLİĞİ VE İZOMORFİZMİ .....                                   | 81  |
| 7.1. Giriş.....                                                                                                                  | 81  |
| 7.2. Ön Hazırlıklar.....                                                                                                         | 83  |
| 7.3. Homojen Denklemler İçin Homojen Olmayan Sınır Geçiş Koşullarına Sahip<br>Problemlerin Çözülebilirliği ve Koersitivliği..... | 85  |
| 7.4. Genel Fonksiyonel Geçiş Şartlı Problemin Fredholm Olma Özelliği.....                                                        | 91  |
| 7.5. Ana Problemin Esas Kısımının İzomorfizmi ve Koersitivliği .....                                                             | 94  |
| 7.6. Ana Problemin Çözülebilirliği ve Koersitivliği .....                                                                        | 96  |
| 7.7. Sonuç.....                                                                                                                  | 98  |
| KAYNAKLAR .....                                                                                                                  | 100 |
| ÖZGEÇMİŞ .....                                                                                                                   | 103 |

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

| Simgeler            | Açıklama                                                             |
|---------------------|----------------------------------------------------------------------|
| h.h.h               | hemen hemen her yerde                                                |
| $\mathbb{R}$        | reel sayılar kümesi                                                  |
| $\mathbb{N}$        | doğal sayılar kümesi                                                 |
| $\mathbb{Z}$        | tam sayılar kümesi                                                   |
| $\mathbb{Q}$        | rasyonel sayılar kümesi                                              |
| $\mathbb{C}$        | kompleks sayılar kümesi                                              |
| $Ax$                | $A(x)$ 'in daha sade gösterimi                                       |
| $\text{coker}(T)$   | $T$ operatörünün kokerneli                                           |
| $C(\Omega)$         | Sürekli fonksiyonlar uzayı                                           |
| $C_A(\Omega)$       | Sürekli ve sınırlı fonksiyonlar uzayı                                |
| $C^m(\Omega)$       | $m$ . mertebeye kadar türevli ve sürekli fonksiyonlar uzayı          |
| $C_A^m(\Omega)$     | $m$ . mertebeye kadar türevli, sürekli ve sınırlı fonksiyonlar uzayı |
| $D^a(f)$            | $f$ fonksiyonunun $a$ . mertebeden zayıf türevi                      |
| $D_A$               | $A$ 'nın tanım kümesi                                                |
| $\ker(T)$           | $T$ operatörünün çekirdeği                                           |
| $L$                 | diferansiyel operatör                                                |
| $L^*$               | $L$ 'nin adjoint (eşlenik) operatörü                                 |
| $L_{loc}^1(\Omega)$ | $\Omega$ 'da lokal integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı             |
| $L_{loc}^p(\Omega)$ | $\Omega$ 'da tanımlı bütün ölçülebilir fonksiyonlar uzayı            |

|                                   |                                                            |
|-----------------------------------|------------------------------------------------------------|
| $L^\infty(\Omega)$                | $\Omega$ bölgesinde h.h.h sınırlı fonksiyonlar uzayı       |
| $L^1(\Omega)$                     | $\Omega$ üzerinde lebesgue integrallenebilir fonkçsiyonlar |
| $\mu$                             | ölçü fonksiyonu                                            |
| $\mu^*$                           | dış ölçü fonksiyonu                                        |
| $\langle x, y \rangle$            | $x$ ile $y$ nin iç çarpımı                                 |
| $(X, \mathcal{F}, \mu)$           | ölçü uzayı                                                 |
| $P(x)$                            | kuvvet kümesi                                              |
| $R_A$                             | $A'$ nın değer kümesi                                      |
| $\ x\ $                           | $x$ 'in normu                                              |
| $esssup_{x \in \Omega}  u(x) $    | $\Omega$ üzerinde $ u $ fonksiyonunun esas supremumu       |
| $W_p^k(\Omega) = W^{p,k}(\Omega)$ | Sobolev Uzayı                                              |
| $W_q^n(\Omega) + W_q^n(\Omega)$   | Sobolev Uzaylarının direkt toplamı                         |

## 1. GİRİŞ

Bütün mekanik problemler ve doğal olayların modellenmesi neticesinde türevli denklemlerin elde edilmesi nedeniyle, diferansiyel denklemler fizik ve mühendislik alanları ile doğrudan ilgilidir.

Diferansiyel denklemlerde değişkenlere ayırma yöntemi kullanıldıktan sonra sınır değer problemleri incelenmeye başlanmıştır. Fizik ve mühendislik alanlarında uygulanan kimi yöntemler adi diferansiyel denklemlerde sınır değer problemlerinin spektral özelliklerinin çalışılmasını gerektirmektedir.

Makine ve havacılık mühendisliğinde yapıların doğal frekanslarını ve mod şekillerini incelemek için de Sturm-Liouville teorisinden yararlanılmaktadır. Ayrıca termal mühendislikte, özellikle de ısı ve kütle transferi problemleri Sturm-Liouville problemleri biçiminde ifade edilir. Böyle problemlerin çözümü ise verimli ısı eşanjörleri tasarlamak, soğutma süreçlerini anlamak ve çeşitli endüstriyel uygulamalar için gereklidir.

Örneğin; Kuantum mekaniğinden bilindiği üzere, özdeğerler ve özvektörler, diferansiyel denklem içeren denklem sistemlerinin çözümlerinde ve sınır değer problemlerinin araştırılmasında görülmektedir. Bu tür denklemlere, kuantum ve akışkanlar mekaniğinde, elektriksel bir potansiyel içinde bulunan bir parçacığın enerjisini hesaplamada, elastik çarpışma problemlerinde ve hızlı salınım yapmakta olan cisimlerin hareketlerinde sıklıkla görülmektedir. Dalga mekaniğinde sicimlerin ve zarların titreşimi ve ses ve elektromanyetik dalgaların yayılımı dahil olmak üzere birçok problemin çözümü Sturm-Liouville problemlerine indirgenmektedir. Böyle dalga problemlerinin çözümü müzik aletlerinden gelişmiş iletişim sistemlerine kadar çok çeşitli cihazları tasarlamak ve analiz etmek için önemlidir.

Matematiksel fizik problemlerinin istenilen kadar küçük hata ile yaklaşık çözümlerinin bulunabilmesi için ise öz fonksiyonlar sisteminin en azından tam sistem olduğunu göstermek gerekir. Bu durumlarda matematiksel fizik problemlerinin çözümü öz fonksiyonlar sistemi üzerine açılmış seri biçiminde elde edilir. En basit matematiksel fizik problemleri için bu seri klasik Fourier serisi biçiminde elde edilir, yani öz fonksiyonlar trigonometrik

fonksiyonlar biçiminde bulunur. Diğer bazı fizik problemleri için ise öz fonksiyonlar sistemi Bessel fonksiyonları, Hermite polinomları ve bu biçimde özel fonksiyonlar olarak elde edilir bu nedenle özel fonksiyonlar teorisi Sturm-Liouville teorisi esasında oluşmuş ve gelişmiştir. Sturm-Liouville teorisinde fizik ve mühendislik biliminin hatta diğer doğa bilimlerinin kısmi diferansiyel denklemler biçiminde modellenen problemlerinin çözümü için etkin yöntemler geliştirilmiştir.

Sınır değer problemleri fizik ve mühendislik alanlarında oldukça fazla konu ile yakından ilişkilidir. Sınır değer problemleri fizik alanından jeofizik bilim dalı ve mühendislik alanından su mühendisliği uygulamaları için oldukça önemli yer tutar. Yer altı madenlerinin çıkarılmasında da sınır değer problemleri ile karşılaşmak mümkündür. Sıvı dinamiğinin temel denklemleri ve bilgisayar programlarında yapay zekâ ile ilgili çalışmalar sınır değer problemleriyle yakından ilgilidir.

Sınır değer problemleri günlük hayatımızda önemli bir yere sahip olan ısı alışverişi ve hava sirkülasyonu gibi konularda önemli bir yer tutmaktadır. Bu tür denklemlerin çözümleri sayesinde sıvı veya gaz dinamiğinde akışın parametrelerini ve diğer kısımlarla olan ilişkilerini gözlemlemek mümkündür.

## 2. LİTERATÜR ÖZETİ

Sınır değer problemleri aynı zaman da farklı fiziksel ve mekanik özellikleri bulunan cisimler arasındaki ısı ve madde iletiminde kullanıldığı görülmektedir. (Kandemir, Mukhtarov ve Yakubov, 2009).

Isı iletim probleminin çözümünde karşımıza çıkan özdeğer parametresine bağlı adi diferansiyel denklemler için sınır değer problemi ilk defa Charles Sturm ve Joseph Liouville tarafından araştırılmaya başlanmıştır. C. Sturm ve J. Liouville çalışmalarında matematiksel fizik alanında ısı iletimi tipinden problemlerle ilgili olarak Fourier yöntemini araştırmışlardır.

Yakubov ve Yakubov, diferansiyel operatör denklemlerinde, kısmi diferansiyel denklemlere uygulamaları ile yüksek mertebeden diferansiyel-operatör denklemleri teorisine sistematik bir çözüm sunmuşlardır. Hem regüler hem de irregüler diferansiyel problemlere uygulamaya izin veren bir teori inşa etmişlerdir. Özellikle bilinen yöntemlerle çözülemeyen problemler üzerinde çalışmışlardır. (Yakubov ve Yakubov, 1999)

Mukhtarov ve Yakubov Ağırlıklı Sobolev Uzaylarında, adi diferansiyel-operatör denklemi için geçiş şartları içeren bir sınır değer fonksiyonel problemini araştırmışlardır. Problemin kök fonksiyonları sisteminin Abel bazı olma özelliğini spektral parametreye göre koersitivliğini ve izomorfizmlüğünü ispatlamışlardır. (Mukhtarov ve Yakubov, 2002)

Kandemir ve arkadaşları çalışmalarında süreksiz katsayılı ve spektral parametre içeren adi diferansiyel denklemler için Birkhoff-irregüler sınır değer problemini ele almışlardır. Bu probleme süreksizlik noktasında, sınır şartlarına ilave olarak geçiş şartları adı verilen sınır şartları eklemişlerdir. Özdeğer parametresi, diferansiyel denklemde ikinci dereceden ve sınır şartlarında birinci dereceden parametre olarak alınmıştır. Bu problem için izomorfizm, koersitivlik özelliklerini ispatlamışlardır. Ayrıca problemin defektlilik durumlarını incelemişlerdir. (Kandemir, Mukhtarov ve Yakubov, 2009)

O. Muhtaraoglu çalışmalarında Sturm-Liouville sınır değer problemleri, diferansiyel denklemde operatör içeren sınır değer problemleri gibi birçok sınır değer problemini

incelemiştir. Ayrıca süreksiz katsayılı sınır değer problemlerinin sınır şartlarına süreksizlik noktasında geçiş şartları eklemiştir. Böylece geçiş şartları bulunan süreksiz katsayılı sınır değer problemlerinin spektral özellikleri ile ilgili birçok problem üzerinde çalışmış ve bu problemlerin çözülebilirliği ile ilgili sonuçlar elde etmiştir. (Mukhtarov, 1994).

G. D. Birkhoff 1908 yılında özdeğer parametresine bağlı olarak adi diferansiyel denklemleri incelemiştir. Bu denklemlerin temel çözüm sisteminde yer alan çözümler için, regüler sınır şartlarını tanımlamıştır. Elde ettiği regüler sınır değer problemi için öz fonksiyonlar ve öz fonksiyonlara bağlı fonksiyonlar sisteminin tamlığı ile ilgili teoremi ispatlamıştır.

J. Walter 1973, makalesinde sınır şartlarında özdeğer parametresi bulunduran bir regüler Sturm-Liouville problemini Hilbert uzayında tanımlı olan diferansiyel operatör şeklinde ifade etmiş ve daha sonra lineer diferansiyel operatörler teorisinden iyi bilinen Hilbert-Schmidt teoreminden de yararlanmakla öz fonksiyonlar sistemi için Fourier açılımını elde etmiştir (Walter, 1973).

Aydemir, çalışmasında iki aralıklı bir Sturm-Liouville denkleminin spektral parametreye lineer bağımlı olan iki tane sınır şartından ve süreksizlik (iletim) noktasında tanımlı geçiş şartlarından oluşmuş Sturm-Liouville problemini incelemek için bu problemi  $L_2[a, b] \oplus \mathbb{C}^n$  biçiminde bir Hilbert uzayında tanımlı olan lineer diferansiyel operatör denklemine indirgemıştır ve diferansiyel operatör teorisinden de yararlanarak verilmiş Sturm-Liouville probleminin bazı önemli spektral özelliklerini incelemiştir (Aydemir, 2014).

Mukhtarov, Aydemir ve Olğar çalışmalarında parametre bağımlı bir süreksiz Sturm-Liouville problemlerinin operatör teoremi yorumunu vermişlerdir. Bu çalışmada araştırılan Sturm-Liouville probleminin özdeğer ve öz fonksiyonlarının asimptotik davranışları için bir formül elde etmişlerdir (Mukhtarov ve Aydemir, 2015; Olğar ve Mukhtarov, 2024)

Matematiksel fiziğin çoğu problemlerinde sınır değer problemleri kullanılmaktadır. Bu tip problemler de zaman değişkenine göre kısmi türev sadece diferansiyel denklemde değil aynı zamanda sınır şartlarında da görülmektedir.. Bu tip problemlere uygun olan spektral problemlerde özdeğer parametresi sadece diferansiyel denklemde değil aynı zamanda sınır şartlarında da bulunmaktadır (Lang, 1983).

Muhtarov ve Aydemir, Klasik periyodik Sturm-Liouville problemlerinin bazı önemli spektral özelliklerini, daha önce çalışılmamış olan, iç etkileşim noktasında ek iletim koşullarına sahip iki bağlantılı periyodik problemlere genelleştirmişlerdir (Mukhtarov ve Aydemir, 2021).

Shkalikov çalışmasında, diferansiyel denklemin katsayı fonksiyonlarında özdeğer parametresine yer vermiş ve de sınır şartlarında polinom tipinde self- adjoint olmayan sınır değer problemlerinin araştırılması için lineerleştirme yöntemi geliştirmiştir (Shkalikov, 1983).

Yakubov ve Yakubov sınır şartlarında spektral parametre içeren sınır değer problemlerinin soyut bir teorisini kurmuşlardır. Bunun yanı sıra sürekli katsayılı sınır değer problemlerinin izomorfizm olma ve koersitivliği ile ilgili çok sayıda çalışmalarıyla öncülük etmişlerdir. Fredholm operatörü olma özellikleriyle ilgili kitapları mevcuttur. (Yakubov ve Yakubov, 1999).

### 3. ÖLÇÜLEBİLİR UZAYLAR VE ÖLÇÜLEBİLİR FONKSİYONLAR

Bu bölümde ölçüler, ölçü uzayları, dış ölçü, lebesgue ölçüsü, ölçülebilir fonksiyonlar ve lebesgue integrali hakkında bilgi verilecektir.

#### 3.1. Ölçüler

3.1.1. Tanım  $I$  bir indis kümesi ve her bir  $k \in I$  elemanına karşılık bir  $A_k$  kümesi bulunsun.  $\{A_k | k \in I\}$  kümesine  $A_k$  kümelerinin indislenmiş ailesi denir. Kısaca elemanları kümelerden oluşan kümeler, kümeler ailesi olarak adlandırılır.

3.1.2. Tanım  $X$  boş olmayan bir küme olmak üzere

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \{A | A \subset X\} \\ &= \{A_k | k \in I, I \in \mathbb{Z}^+\} \\ &= \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_k, \dots\}\end{aligned}$$

olsun. Bu aile  $P(X)$  kuvvet kümesinin bir alt ailesidir. Ayrıca bu aile boş olmayan bir ailedir.

3.1.3. Tanım  $X$  sıradan bir küme ve  $\mathcal{F} \subset P(X)$  olsun. Bu durumda

1.  $X \in \mathcal{F}$
2.  $\forall A \in \mathcal{F}$  için  $A^c \in \mathcal{F}$
3.  $\forall A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \in \mathcal{F}$  için  $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{F}$
4.  $\forall A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \in \mathcal{F}$  için  $\bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{F}$

koşulları gerçekleşiyorsa  $\mathcal{F}$  ailesine  $X$  üzerinde bir cebirdir denir. (Cohn, 2013)

3.1.4. Tanım  $X$  sıradan bir küme ve  $\mathcal{F} \subset P(X)$  olsun. Bu durumda

1.  $X \subset \mathcal{F}$
2.  $\forall A \in \mathcal{F}$  için  $A^c \in \mathcal{F}$
3.  $A_k \in \mathcal{F}$  ve  $k \in \mathbb{Z}^+$  için  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$
4.  $A_k \in \mathcal{F}$  ve  $k \in \mathbb{Z}^+$  için  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$

koşulları gerçekleşiyorsa  $\mathcal{F}$  ailesine  $X$  üzerinde bir  $\sigma$ -cebiri denir. (Cohn, 2013)

3.1.5. Tanım  $X$  herhangi bir küme ve  $\mathcal{F}$  de  $X$  kümesi üzerinde bir  $\sigma$ -cebiri olsun. Bu durumda  $(X, \mathcal{F})$  çiftine ölçülebilir uzay denir.  $\mathcal{F}$ 'de bulunan her bir kümeye de ölçülebilir küme adı verilir.

3.1.6. Tanım  $(X, \mathcal{F})$  ölçülebilir bir uzay olsun.

$$\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$$

biçiminde tanımlı bir  $\mu$  fonksiyonu için

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2.  $\mathcal{F}$  ailesinin her ayrık  $(B_k)$  dizisi için

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$$

şartlarını sağlanıyorsa  $\mu$  fonksiyonuna  $\mathcal{F}$  üzerinde bir ölçü denir.

## 3.2. Ölçü Uzayları

3.2.1. Tanım  $\mu$  fonksiyonu  $\mathcal{F}$  ailesi üzerinde bir ölçü olmak üzere  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  ölçüsüne bir ölçü uzayı denir.

3.2.2. Tanım  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  bir ölçü uzayı olmak üzere  $\mu(x) < \infty$  ise  $\mu$  ye sonlu ölçü denir. Dolayısıyla  $\mu$  sonlu olduğunda  $\mathcal{F}$  aileleride sonlu ölçümlüdür. Kısacası  $X \in \mathcal{F}$  kümesi sonlu ölçümlü ise  $\mathcal{F}$  ailesindeki kümeler sonlu ölçümlüdür.

3.2.3. Tanım  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  bir ölçü uzayı olmak üzere  $\mathcal{F}$  ailesinin her ayrık  $(B_k)$  dizisi için

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$$

koşuluna  $\sigma$ -toplamsal denir. Ayrıca bu  $\sigma$ -toplamsal ölçü veya  $\sigma$ -ölçü olarak da ifade edilir.

$\sigma$ -toplamsal ölçü bir ölçünün sonlu bir ölçüden ayırt edilmesi bakımından ölçü yerine kullanılır. Eğer;

$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = X$  ve  $\forall k \in \mathbb{Z}^+$  için  $\mu(B_k) < \infty$  ise  $\mu$  ye  $\sigma$ -sonlu ölçü denir.

$\mu(X) = 1$  ise bu ölçüye olasılık ölçüsü denir.

3.2.1. Örnek  $\bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{ \theta \mid \frac{1}{m+1} \leq \theta < \frac{1}{m} \right\}$  kümesinin ölçümü 1 dir.

$m \in \mathbb{Z}^+$  için

$$I_m = \left\{ \theta \mid \frac{1}{m+1} \leq \theta < \frac{1}{m} \right\}$$

olsun. Bu durumda

$$I_1 = \left\{ \theta \mid \frac{1}{2} \leq \theta < 1 \right\}$$

$$I_2 = \left\{ \theta \mid \frac{1}{3} \leq \theta < \frac{1}{2} \right\}$$

.

.

$$I_m = \left\{ \theta \mid \frac{1}{m+1} \leq \theta < \frac{1}{m} \right\}$$

yazılır. Bütün  $I_m$  aralıkları ayrık olduğundan

$$\begin{aligned} \mu \left( \bigcup_{m=1}^k I_m \right) &= \sum_{m=1}^k u(I_m) \\ &= \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\mu \left( \bigcup_{m=1}^{\infty} I_m \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu \left( \bigcup_{m=1}^k I_m \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{k+1} \right) = 1$$

bulunur.

3.2.4. Tanım  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  bir ölçü uzayı olmak üzere  $B, \mathcal{F}$  küme ailesinin bir alt kümesi ve  $\mu(B) < \infty$  olsun.  $C \subset B$  ve  $0 < \mu(C) < \infty$  eşitsizliğini sağlayacak bir  $C \in \mathcal{F}$  varsa  $\mu$  ye yarı sonlu ölçü adı verilir.

3.2.5. Tanım  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  bir ölçü uzayı olmak üzere  $B, \mathcal{F}$  küme ailesinin bir alt kümesi ve  $\mu(B) < \infty$  ise  $B$  kümesine sonlu  $\mu$ -ölçümlü küme denir.

3.2.6. Tanım  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  bir ölçü uzayı olmak üzere,  $B \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$  ve  $\forall t \in \mathbb{Z}^+$  için  $\mu(B_t) < \infty$  eşitsizliğini sağlayacak biçimde  $\forall t \in \mathbb{Z}^+, B_t \in \mathcal{F}$  koşulu sağlanırsa  $B \in \mathcal{F}$  kümesine  $\sigma$ -sonlu-  $\sigma$ -ölçümlü küme denir.

3.2.7. Tanım  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  bir ölçü uzayı olmak üzere  $B, \mathcal{F}$  küme ailesinin bir alt kümesi ve  $\mu(B) = 0$  ise  $B$  kümesine sıfır ölçümlü küme adı verilir.

Şimdide ölçü uzaylarının özelliklerini gösteren bazı teoremleri inceleyeceğiz.

3.2.1. Teorem  $A$  ve  $B$ ,  $\mathcal{F}$  küme ailesinin birer elemanı olsun.  $A \subset B$  ve  $\mu(B) < \infty$  ise

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$$

olur.

*İspat*  $A \subset B$  olduğundan  $B = A \cup (B \setminus A)$  olup

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$$

eşitliği yazılır.

3.2.2. Teorem (Monotonluk Özelliği)  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  bir ölçü uzayı olmak üzere  $A$  ve  $B$ ,  $\mathcal{F}$  küme ailesinin bir elemanı olsun. Bu durumda

$$A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$$

olur.

*İspat*  $A \subset B$  olduğundan  $B = A \cup (B \setminus A)$  olur. Buradan

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$$

olur. Bu ise  $\mu(A) \leq \mu(B)$  olduğunu gerçekler.

3.2.3. Teorem ( $\sigma$ -alt toplamsal özelliği)  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k \dots \in \mathcal{F}$  olmak üzere

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

olur.

*İspat*  $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$  birleşimi yerine

$$\begin{aligned} K_1 &= A_1 \\ K_2 &= A_2 \setminus A_1 \\ K_3 &= A_3 \setminus (A_1 \cup A_2) \\ K_4 &= A_4 \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

ayrık kümelerin birleşimini alabiliriz. Dolayısıyla

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n \cup \dots = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup \dots \cup K_n \cup \dots$$

şeklinde yazabiliriz.  $K_j \subset A_j$  ve buradan  $\mu(K_j) \leq \mu(A_j)$  olacağından

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(K_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

olduğu görülür.

3.2.4. Teorem  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k \dots \in \mathcal{F}$  ve  $\forall n \in \mathbb{N}^+$  için  $\mu(A_n) = 0$  ise  $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$ 'dır.

*İspat*  $\sigma$ -alt toplamsal özelliği dikkate alınırsa

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0$$

ve tanımdan

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq 0$$

olduğu dikkate alınırsa istenilen sonuç elde edilir.

3.2.5. Teorem (Ölçünün alttan süreklilik özelliği)  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k \dots \in \mathcal{F}$  ve her  $n = 1, 2, 3, \dots$  için  $A_n \subset A_{n+1}$  yani  $(A_n)$  dizisi artan ise

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

olur. Diğer bir ifadeyle  $(A_n)$  bir artan dizi ve  $A_0 \in \mathcal{F}$  ise

$$(A_n) \rightarrow A_0 \Rightarrow \mu(A_n) \rightarrow \mu(A_0)$$

olur.

*İspat*  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k, \dots$  kümeleri için

$$K_1 = A_1$$

$$K_2 = A_2 \setminus A_1$$

$$K_3 = A_3 \setminus A_2$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot$$

olacak şekilde  $n = 1, 2, 3, \dots$  için  $K_n$  kümeleri ayrık olacak ve

$$K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup \dots \cup K_n = A_n \quad (3.2.1)$$

olacaktır. Ayrıca  $(A_n)$  dizisi artan olduğu için

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n) \quad (3.2.2)$$

olacaktır.  $K_n$  kümelerinin de ayrık olduğunu göz önüne alınırsa

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(K_n) \quad (3.2.3)$$

eşitlikleri görülebilir. (3.2.2) ve (3.2.3) den

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \quad (3.2.4)$$

olacaktır. (2.2.3) dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(K_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \mu(K_j) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\mu(K_1) + \mu(K_2) + \dots + \mu(K_n)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\mu(K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_n)] \quad (\mu, \text{toplamsal}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \quad ((1) \text{ den}) \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

elde edilir. (3.2.4) ve (3.2.5) den

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

olur. Sonuç olarak  $(A_n)$  bir artan dizi ve  $A_0 \in \mathcal{F}$  ise

$$(A_n) \rightarrow A_0 \Rightarrow \mu(A_n) \rightarrow \mu(A_0)$$

elde edilir.

3.2.6. Teorem (Ölçünün üstten sürekliliği)  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k, \dots \in \mathcal{F}$  ve  $\forall n \in \mathbb{N}^+$  için  $A_n \supset A_{n+1}$  yani  $(A_n)$  dizisi azalan ve  $\mu(A_1) < \infty$  ise

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

olur. Diğer bir deyişle  $(A_n)$  dizisi azalan,  $A_0 \in \mathcal{F}$  ve  $\mu(A_1) < \infty$  olmak üzere

$$(A_n) \rightarrow A_0 \Rightarrow \mu(A_n) \rightarrow \mu(A_0)$$

sağlanır.

*İspat*  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k, \dots$  kümeleri için  $K_1 = A_1 \setminus A_1, K_2 = A_1 \setminus A_2, K_3 = A_1 \setminus A_3, \dots, K_n = A_1 \setminus A_n$  biçiminde yazılırsa  $K_n \subset K_{n+1}$  olacağından  $(K_n)$  dizisi artandır. O halde Teorem 3.2.1 ve Teorem 3.2.4 göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \mu\left[A_1 \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right)\right] \\ &= \mu(A_1) - \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right) \\ &= \mu(A_1) - \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n)\right) \\ &= \mu(A_1) - \mu\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (A_1 \setminus A_n)\right) \\ &= \mu(A_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_1 \setminus A_n) \\ &= \mu(A_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(A_1) - \mu(A_n)) \\ &= \mu(A_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_1) + \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \\ &= \mu(A_1) - \mu(A_1) + \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

bulunur. Ayrıca  $(A_n)$  dizisi azalan olduğundan ve azalan diziler için daha önceden bildiğimiz

$$\left( \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n)$$

eşitliği göz önüne alınırsa

$$\mu \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \mu \left( \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

bulunur. Sonuç olarak  $(A_n)$  dizisi azalan,  $A_0 \in \mathcal{F}$  ve  $\mu(A_1) < \infty$  olmak üzere

$$(A_n) \rightarrow A_0 \Rightarrow \mu(A_n) \rightarrow \mu(A_0)$$

olduğu görülür.

3.2.8 Tanım  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  bir ölçü uzayı olmak üzere  $B, \mathcal{F}$  küme ailesinin bir alt kümesi ve  $\mu(B) = 0$  olsun.  $B$  kümesinin (Sıfır ölçümlü kümelerin) bütün alt kümeleri yine  $\mathcal{F}$  küme ailesinde bulunuyorsa  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  ölçü uzayına tam ölçü uzayı denir.

### 3.3. Dış Ölçü

3.3.1 Tanım  $X$  herhangi bir küme ve  $P(X)$  de  $X$  in bir kuvvet kümesi olmak üzere

$$\mu^*: P(X) \rightarrow [0, \infty]$$

biçiminde ifade edilen  $\mu^*$  fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlaması durumunda  $X$  kümesi üzerinde bir dış ölçü olarak adlandırılır.

1.  $\mu^*(\emptyset) = 0$
2.  $D \subseteq E \subseteq X$  için  $\mu^*(D) \leq \mu^*(E)$
3.  $X$  in alt kümesi bütün  $(D_n)$  dizileri için

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(D_n)$$

### 3.4. Lebesgue Ölçüsü

3.4.1. Tanım  $\mathbb{R}^n$  nin alt kümelerinden oluşan bir  $\mathcal{F}$  ailesi aşağıdaki şartları sağlayan bir  $\sigma$ -cebiri olsun.

1.  $\mathbb{R}^n$  deki her bir açık küme  $\mathcal{F}$  ailesinin bir elemanıdır.
2.  $A \subset B, B \in \mathcal{F}$  ve  $\mu(B) = 0$  ise  $A \in \mathcal{F}$  ve  $\mu(A) = 0$
3.  $A = \{x \in \mathbb{R}^n : a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1, 2, \dots, n\}$  ise

$$A \in \mathcal{F} \text{ ve } \mu(A) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$$

4.  $x \in \mathbb{R}^n$  ve  $A \in \mathcal{F}$  ise  $x + A = \{x + y : y \in A\} \in \mathcal{F}$  ve  $\mu(x + A) = \mu(A)$

Yukarıda verilen koşulları sağlayan  $\mathcal{F}$  ailesinin elemanlarına  $\mathbb{R}^n$  nin (Lebesgue) ölçülebilir alt kümeleri denir ve  $\mu$  fonksiyonu  $\mathbb{R}^n$  deki Lebesgue ölçüsü olarak adlandırılır. (Adams, 1975)

3.4.1. Teorem Ölçülebilir kümelerin sonlu birleşimi de ölçülebilirdir.

*İspat* İlk olarak  $E_1$  ve  $E_2$  ölçülebilir iki kümenin birleşiminin ölçülebilir olduğunu göstereceğiz.  $A$  herhangi bir küme olsun. Önce  $E_1$  in ölçülebilirliği, sonrada  $E_2$  nin ölçülebilirliği kullanarak

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1') \\ &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*([A \cap E_1'] \cap E_2) + \mu^*([A \cap E_1'] \cap E_2') \end{aligned}$$

elde edilir.

$$[A \cap E'_1] \cap E'_2 = A \cap [E_1 \cup E_2]'$$

ve

$$[A \cap E] \cup [A \cap E'_1] = A \cap [E_1 \cup E_2]$$

küme özdeşliklerinden ve dış ölçünün alt toplamsal özelliğinden

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*([A \cap E'_1] \cap E_2) + \mu^*([A \cap E'_1] \cap E'_2) \\ &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*([A \cap E'_1] \cap E_2) + \mu^*(A \cap [E_1 \cup E_2]') \\ &\geq \mu^*(A \cap [E_1 \cup E_2]) + \mu^*(A \cap [E_1 \cup E_2]') \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla  $E_1 \cup E_2$  ölçülebilirdir.

Şimdi  $n \in \mathbb{Z}^+$  ve  $\{E_k\}_{k=1}^n$  ölçülebilir kümelerin herhangi bir sonlu kümesi olsun.  $\bigcup_{k=1}^n E_k$  birleşiminin ölçülebilirliğini tümevarım yoluyla ispatlayacağız. Bu  $n = 1$  için aşıkardır. Bunun  $n - 1$  için doğru olduğunu varsayalım.

$$\bigcup_{k=1}^n E_k = \left[ \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k \right] \cup E_n$$

şeklinde yazarsak iki ölçülebilir kümenin birleşimi de ölçülebilir olduğundan  $\bigcup_{k=1}^n E_k$  kümesi ölçülebilirdir. (Royden ve Fitzpatrick, 2010)

3.4.2. Teorem A herhangi bir küme ve  $\{E_k\}_{k=1}^n$  ölçülebilir kümelerin sonlu ayık bir kümesi olsun. Bu durumda

$$\mu^* \left( A \cap \left[ \bigcup_{k=1}^n E_k \right] \right) = \sum_{k=1}^n \mu^*(A \cap E_k)$$

özellikle de

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu^*(E_k)$$

olur.

*İspat* Tümevarım yoluyla ispat yapılacaktır.  $n = 1$  için eşitliklerin sağlandığı açıkça görülmektedir. Bunun  $n - 1$  için doğru olduğunu varsayalım.  $\{E_k\}_{k=1}^n$  kümeleri ayrık olduğundan

$$A \cap \left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) \cap E_n = A \cap E_n$$

ve

$$A \cap \left[\bigcup_{k=1}^n E_k\right] \cap E'_n = A \cap \left[\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k\right]$$

dolayısıyla  $E$  nin ölçülebilirliği ve tümevarım varsayımına göre

$$\begin{aligned} \mu^*\left(A \cap \left[\bigcup_{k=1}^n E_k\right]\right) &= \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*\left(A \cap \left[\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k\right]\right) \\ &= \mu^*(A \cap E_n) + \sum_{k=1}^{n-1} \mu^*(A \cap E_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \mu^*(A \cap E_k) \end{aligned}$$

$A_k$  kümeleri ölçülebilir ve sayılabilir olmak üzere  $\{A_k\}_{k=1}^\infty$  kümesini alalım.  $A'_1 = A_1$  olarak tanımlayalım ve  $\forall k \geq 2$  için

$$A'_k = A_k - \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$$

ölçülebilir küme topluluğu bir cebir olduğundan  $\{A'_k\}_{k=1}^{\infty}$  birleşimi  $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$  birleşimine eşit olan ölçülebilir kümelerin ayrık bir (collection) topluluğudur. (Royden ve Fitzpatrick, 2010)

3.4.1. *Örnek*  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x: 0 < x < \frac{1}{7^k}\right\}$  ve  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k$  tanımlansın.

$$H_1 = \left(0, \frac{1}{7}\right), H_2 = \left(0, \frac{1}{7^2}\right), \dots, H_k = \left(0, \frac{1}{7^k}\right), \dots$$

ve buradan her  $k$  için  $H_k \supset H_{k+1}$  dir.

$$K_1 = H_1 \setminus H_2, K_2 = H_2 \setminus H_3, K_3 = H_3 \setminus H_4, \dots, K_l = H_l \setminus H_{l+1}$$

ikişer ikişer ayrık kümeleridir ve

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k = \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$\mu^*(E) = \mu^*\left(\bigcup_{l=1}^{\infty} K_l\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n l(H_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{7^{n+1}}\right) = \frac{1}{7}$$

bulunur.

### 3.5. Ölçülebilir Fonksiyonlar

3.5.1. Tanım  $\mathcal{H}$  ölçülebilir bir küme ve  $f$  ise  $\mathcal{H}$  dan genişletilmiş reel sayılar kümesine tanımlı bir fonksiyon olsun.

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ için } \{x \in \mathcal{H}: f(x) > \alpha\}$$

kümesini oluşturalım. Bu küme ölçülebilir olduğu takdirde  $f$  fonksiyonu da ölçülebilirdir.  $f$  fonksiyonuna da ölçülebilir fonksiyon denir.

Bu bölümde ele alınan tüm fonksiyonlar genişletilmiş gerçel sayılarda yani  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  kümesinde tanımlı olacaktır. Bir özelliğin  $E/E_0$  üzerinde geçerli olması koşuluyla ölçülebilir bir  $E$  kümesi üzerinde hemen hemen her yerde (h.h.h olarak kısaltılacaktır) geçerli olduğu söylenir. Burada  $E_0, E$  nin  $\mu(E) = 0$  olan alt kümesidir.

3.5.1. Teorem  $E$  ölçülebilir kümesi üzerinde  $f$  fonksiyonu ölçülebilir olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

1. Her reel  $c$  sayısı için  $\{x \in E: f(x) > c\}$  kümesi ölçülebilirdir.
2. Her reel  $c$  sayısı için  $\{x \in E: f(x) \geq c\}$  kümesi ölçülebilirdir.
3. Her reel  $c$  sayısı için  $\{x \in E: f(x) < c\}$  kümesi ölçülebilirdir.
4. Her reel  $c$  sayısı için  $\{x \in E: f(x) \leq c\}$  kümesi ölçülebilirdir.

Bu özelliklerin her biri  $\forall c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  için  $\{x \in E: f(x) = c\}$  kümesi ölçülebilirdir.

*İspat* (1) ve (4) kümeleri  $E$  de birbirlerinin tümleyeni olduğu gibi (2) ve (3) kümeleri de  $E$  de birbirlerinin tümleyenidir.  $E$  nin ölçülebilir bir alt kümesinin  $E$  deki tümleyeni ölçülebilir olduğundan (1) ve (4) eşdeğerdir.

Şimdi (1) ile (2) nin aynı ifade olduğunu gösterelim.

$$\{x \in E: f(x) \geq c\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{x \in E: f(x) > c - \frac{1}{k}\right\}$$

ve ölçülebilir kümelerin sayılabilir bir kümeler ailesinin kesişimi de ölçülebilirdir. Benzer şekilde (1) ve (2)

$$\{x \in E: f(x) > c\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x \in E: f(x) \geq c + \frac{1}{k}\right\}$$

ve ölçülebilir kümelerin sayılabilir bir kümeler ailesinin birleşimi de ölçülebilirdir. Böylece

(1) ve (4) ifadeleri eşdeğerdir. Şimdi bunlardan birinin ve dolayısıyla hepsinin geçerli olduğunu varsayalım. Eğer  $c$  bir reel sayıysa

$$\{x \in E: f(x) = c\} = \{x \in E: f(x) \geq c\} \cap \{x \in E: f(x) \leq c\}$$

olur. Dolayısıyla  $f^{-1}(c)$  ölçülebilirdir çünkü iki ölçülebilir kümenin kesişimidir. Öte yandan  $c = \infty$  ise

$$\{x \in E: f(x) = \infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in E: f(x) > k\}$$

olur. Dolayısıyla ölçülebilir kümelerin sayılabilir bir ailesinin kesişimi olan  $f^{-1}(\infty)$  ölçülebilirdir. (Royden ve Fitzpatrick, 2010)

3.5.2. Tanım  $E$  üzerinde tanımlı gerçekteğerli bir  $f$  fonksiyonunun tanım kümesi  $E$  ölçülebilir olduğu ve Teorem 2.5.1. deki dört ifadeden birini sağladığı takdirde Lebesgue Ölçülebilir veya basitçe ölçülebilir olduğu söylenir.

3.5.2. Teorem Ölçülebilir bir  $E$  kümesi üzerinde  $f$  fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda  $f$  fonksiyonunun ölçülebilir olması için gerek yeter şart her açık  $\mathcal{D}$  kümesi için  $f^{-1}(\mathcal{D}) = \{x \in E: f(x) \in \mathcal{D}\}$  kümesinin ölçülebilir olmasıdır.

*İspat* Her bir açık kümenin ters görüntüsü ölçülebilir ise, her  $(c, \infty)$  aralığı açık olduğundan  $f$  fonksiyonu ölçülebilirdir.

Tersine  $f$  nin ölçülebilir olduğunu varsayalım ve  $\mathcal{D}$  açık olsun. O zaman  $\mathcal{D}$  yi, her biri  $I_k$  nın  $B_k \cap A_k$  olarak ifade edileceği açık ve sınırlı  $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$  aralıklarının sayılabilir bir ailesinin birleşimi olarak ifade edebiliriz. Burada  $B_k = (-\infty, b_k)$  ve  $A_k = (a_k, \infty)$  dur.  $f$  ölçülebilir bir fonksiyon olduğundan her  $f^{-1}(B_k)$  ve  $f^{-1}(A_k)$  ölçülebilir kümelerdir. Diğer taraftan ölçülebilir kümeler bir  $\sigma$ -cebirdir ve bu nedenle  $f^{-1}(\mathcal{D})$  ölçülebilirdir. Çünkü

$$f^{-1}(\mathcal{D}) = f^{-1}\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \cap A_k\right] = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(B_k) \cap f^{-1}(A_k)$$

dır. (Royden ve Fitzpatrick, 2010)

3.5.3. Teorem Tanım kümesi ölçülebilir bir reel değerli fonksiyon ölçülebilirdir.

*İspat*  $f$  fonksiyonunun ölçülebilir bir  $E$  kümesi üzerinde sürekli olduğunu varsayalım.  $\mathcal{D}$  açık bir küme olsun.  $f$  sürekli olduğundan  $f^{-1}(\mathcal{D}) = E \cap \mathcal{U}$  olacak şekilde bir  $\mathcal{U}$  açık kümesi vardır. Dolayısıyla  $f^{-1}(\mathcal{D})$  iki ölçülebilir kümenin kesişimi olduğundan ölçülebilirdir. Teorem 3.5.1. den  $f$  fonksiyonunun ölçülebilir olduğu sonucu çıkar.

3.5.4. Teorem Bir aralıkta tanımlanan monoton bir fonksiyon ölçülebilirdir.

3.5.5. Teorem  $f$  fonksiyonu  $E$  üzerinde genişletilmiş reel değerli bir fonksiyon olsun.

1. Eğer  $E$  üzerinde  $f$  fonksiyonu ölçülebilir ve h.h.h  $f = g$  oluyorsa  $g$  fonksiyonu  $E$  üzerinde ölçülebilirdir.
2.  $\mathcal{D}$ ,  $E$  nin ölçülebilir bir alt kümesi olsun.  $f$  fonksiyonunun sadece  $\mathcal{D}$  ve  $E/\mathcal{D}$  kısıtlamaları ölçülebilirse  $f$  fonksiyonu  $E$  üzerinde ölçülebilirdir.

*İspat*  $f$  fonksiyonu ölçülebilir olsun. ve  $A = \{x \in E: f(x) \neq g(x)\}$  kümesini tanımlayalım.

$$\{x \in E: g(x) > c\} = \{x \in A: g(x) > c\} \cup [\{x \in E: f(x) > c\} \cap [E/A]]$$

$E'$  nin h.h.h  $f = g$  olduğundan  $\mu(A) = 0$  dır. Bu nedenle  $\{x \in A: g(x) > c\}$  kümesi ölçülebilirdir. Çünkü ölçüsü sıfır olan bir kümenin alt kümesidir.  $f$ ,  $E$  üzerinde ölçülebilir olduğundan  $\{x \in E: f(x) > c\}$  kümeside ölçülebilirdir. Hem  $E$  kümesi hem de  $A$  kümesi ölçülebilir kümeler olduğundan ve ölçülebilir kümeler bir cebir olduğundan

$$\{x \in E: g(x) > c\}$$

kümesi ölçülebilirdir. (2) yi doğrulamak için herhangi bir  $c \in \mathbb{R}$  için

$$\{x \in E: f(x) > c\} = \{x \in \mathcal{D}: f(x) > c\} \cup \{x \in E/\mathcal{D}: f(x) > c\}$$

olduğunu ve ölçülebilir kümelerin bir cebir olduğunu göz önüne alalım.

Ölçülebilir iki genişletilmiş reel değerli  $f$  ve  $g$  fonksiyonunun  $f + g$  nin zıt işaretli sonsuz değerler aldığı noktalarda düzgün bir şekilde tanımlanmaz.  $E$  kümesinin hemen hemen her yerinde  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının sonlu olduğunu varsayalım.  $E_0$ ,  $E$  de  $f$  ve  $g$  nin sonlu olduğu noktalar kümesi olarak tanımlayalım. Eğer  $f + g$  nin  $E_0$  ile sınıflandırılması ölçülebilir ise Teorem 2.2.5 e göre  $f + g$  nin gerçek değerli bir fonksiyon olarak tüm  $E$  ye genişletilmesi de ölçülebilirdir. Buradan h.h.h sonlu olan iki ölçülebilir fonksiyonun toplamının da ölçülebilir olduğunu kolayca görebiliriz. Benzer açıklamalar çarpım durumu için de geçerlidir. (Royden ve Fitzpatrick, 2010)

3.5.6. Teorem  $f$  ve  $g$ ,  $E$  üzerinde h.h.h ölçülebilir ve sonlu fonksiyonlar olsun. Herhangi bir  $\alpha$  ve  $\beta$  için

1.  $\alpha f + \beta g$ ,  $E$  üzerinde ölçülebilirdir. (Doğrusallık)
2.  $f \cdot g$ ,  $E$  üzerinde ölçülebilirdir. (Çarpım)

*İspat* Yukarıdaki açıklamalardan yola çıkarak  $f$  ve  $g$  nin,  $E$  nin tamamında sonlu olduğunu varsayabiliriz. Eğer  $\alpha \neq 0$  ise bir  $c \in \mathbb{R}$  için

$$\{x \in E: \alpha f(x) > c\} = \left\{x \in E: f(x) > \frac{c}{\alpha}\right\} \Rightarrow \alpha > 0$$

ve

$$\{x \in E: \alpha f(x) > c\} = \left\{x \in E: f(x) < \frac{c}{\alpha}\right\} \Rightarrow \alpha < 0$$

dır. Bu nedenle  $f$  fonksiyonunun ölçülebilirliği  $\alpha \cdot f$  fonksiyonunun ölçülebilirliğini de gerektirir. Bu nedenle doğrusallığı tesis etmek için  $\alpha = \beta = 1$  durumunu göz önünde bulundurmak yeterlidir.

$x \in E$  için eğer  $f(x) + g(x) < c$  ise  $f(x) < c - g(x)$  olur. Böylece  $\mathbb{R}$  deki  $\mathbb{Q}$  rasyonel sayılar kümesi yoğun olduğundan bir  $q$  rasyonel sayısı vardır ki ;

$$f(x) < q < c - g(x)$$

olur. Buradan

$$\{x \in E : f(x) + g(x) < c\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{x \in E : g(x) < c - q\} \cap \{x \in E : f(x) < q\}$$

elde edilir.

Ölçülebilir fonksiyonların çarpımının ölçülebilir olduğunu göstermek için

$$f \cdot g = \frac{1}{2}[(f + g)^2 - f^2 - g^2]$$

eşitliğini ele alalım. Doğrusallığı sağladığımıza göre iki ölçülebilir fonksiyonun çarpımının ölçülebilir olduğunu göstermek için , ölçülebilir bir fonksiyonun karesinin ölçülebilir olduğunu göstermek yeterlidir.

$$c \geq 0 \text{ için } \{x \in E : f^2(x) > c\} = \{x \in E : f(x) > \sqrt{c}\} \cup \{x \in E : f(x) < -\sqrt{c}\}$$

$$c < 0 \text{ için } \{x \in E : f^2(x) > c\} = E$$

olur. Bundan dolayı  $f^2$  ölçülebilirdir.

Temel analizde ele alınan fonksiyonların birçok özelliği süreklilik ve türevlenebilirlik dahil, fonksiyonların birleşimi işlemi adı altında korunur. Ancak ölçülebilir fonksiyonların birleşimi ölçülebilir olmayabilir. (Royden ve Fitzpatrick, 2010)

3.5.3. Tanım  $\{f_n\}$  fonksiyon dizisi  $E$  üzerinde tanımlı olsun.  $E$  üzerinde tanımlı  $f$  fonksiyonu ve  $A \subseteq E$  için aşağıdaki ifadeler söylenebilir.

1.  $\{f_n\}$  dizisi  $A$  üzerinde noktasal olarak  $f$  ye yakınsar. Yani

$$\forall x \in A, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

2.  $\{f_n\}$  dizisi  $A - B$  üzerinde  $f$  ye noktasal olarak yakınsaması ve  $\mu(B) = 0$  olması koşuluyla  $A$  üzerinde h.h.h  $f$  ye noktasal olarak yakınsar.
3.  $\{f_n\}$  dizisi her  $\varepsilon > 0$  için bir  $N$  indisi olması koşuluyla  $A$  üzerinde  $f$  ye yakınsar.  $A$  üzerinde  $\forall n \geq N$  için  $|f - f_n| < \varepsilon$  dir.

$\{f_n\}$  fonksiyon dizilerini ve bunların bir  $f$  fonksiyonuna yakınsamasını ele alırken genellikle tüm fonksiyonların ortak bir tanım kümesine sahip olduğunu varsayabiliriz.  $\{f_n\}$  dizisinin  $A$  üzerinde  $f$  ye noktasal olarak yakınsadığını belirtmek için “  $\{f_n\} \rightarrow f$  ,  $A$  üzerinde noktasal olarak” yazarız ve düzgün yakınsama içinde benzer bir gösterim kullanırız.

Sürekli fonksiyonların noktasal limiti sürekli olmayabilir. Riemann integrallenebilir fonksiyonların noktasal limiti Riemann integrallenebilir olmayabilir.

3.5.7. Teorem  $\{f_n\}$ ,  $E$  üzerinde h.h.h  $f$  fonksiyonuna noktasal yakınsayan  $E$  üzerinde ölçülebilir fonksiyonlar dizisi olsun. Bu durumda  $f$  ölçülebilirdir.

*İspat*  $E_0$ 'ın  $\mu(E) = 0$  koşulunu sağlayan ve koşulunu sağlayan ve  $\{f_n\}$  nin  $E - E_0$  üzerinde  $f$  ye noktasal olarak yakınsadığı  $E$  nin bir alt kümesi olduğunu varsayalım.  $\mu(E) = 0$  ve Teorem (3.5.5.) den  $f$  nin ancak ve ancak  $E - E_0$  kısıtlaması ölçülebilir ise ölçülebilir olduğu sonucu çıkar. Bu nedenle  $E$  yi  $E - E_0$  ile değiştirerek dizinin  $E$  nin tamamında noktasal olarak yakınsadığını varsayabiliriz.

$c$  sabit bir reel sayı olsun.  $\{x \in E | f(x) < c\}$  nin ölçülebilir olduğunu göstermeliyiz. Bir  $x \in E$  noktası için  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ ,

$$f(x) < c \Leftrightarrow \forall j > k \text{ için } f_j(x) < c - \frac{1}{n} \text{ ve } n, k \in \mathbb{N}.$$

Ancak herhangi bir  $n$  ve  $j$  doğal sayıları için  $f$  fonksiyonu ölçülebilir olduğundan  $\{x \in E : f_j(x) < c - \frac{1}{n}\}$  kümesi ölçülebilirdir. Dolayısıyla herhangi bir  $k$  için

$$\bigcap_{j=k}^{\infty} \left\{ x \in E : f_j(x) < c - \frac{1}{n} \right\}$$

kesişimi ayrıca ölçülebilirdir. Sonuç olarak ölçülebilir kümelerden oluşan sayılabilir kümelerin birleşimi ölçülebilir olduğundan

$$\{x \in E : f(x) < C\} = \bigcup_{1 \leq k, n < \infty} \left[ \bigcap_{j=k}^{\infty} \left\{ x \in E : f_j(x) < C - \frac{1}{n} \right\} \right]$$

ölçülebilirdir.

3.5.4. Tanım Bir  $\mathcal{A}$  kümesi için

$$\chi_{\mathcal{A}} = \begin{cases} 1, & x \in \mathcal{A} \\ 0, & x \notin \mathcal{A} \end{cases}$$

şeklinde ifade edilen  $\chi_{\mathcal{A}}$  fonksiyonuna  $\mathcal{A}$  nın karakteristik fonksiyonu denir.  $\chi_{\mathcal{A}}$  fonksiyonunun ölçülebilir olması için  $\mathcal{A}$  kümesinin ölçülebilir olması gerekir. Dolayısıyla ölçülemez bir kümenin varlığı, ölçülemez bir fonksiyonun varlığını ima eder. (Royden ve Fitzpatrick, 2010)

3.5.1. *Örnek*  $\chi_{\mathcal{A}}$  fonksiyonunun ölçülebilir olması için  $\mathcal{A}$  fonksiyonunun ölçülebilir olması gerekir.

$$\{x \in \mathcal{X} : \chi_{\mathcal{A}}(x) > \theta\} = \begin{cases} \mathcal{X}, & \theta < 0 \\ \mathcal{A}, & 0 \leq \theta < 1 \\ \emptyset, & 1 \leq \theta \end{cases}$$

olduğundan dolayı her  $\theta$  reel sayısı için

$$\{x \in \mathcal{X} : \chi_{\mathcal{A}} > \theta\} \in \mathcal{F}.$$

### 3.6. Lebesgue İntegrali

2.6.1. Tanım  $S = \sum_{j=1}^n a_j X_{A_j}$  basit fonksiyonu verilsin. Burada  $A_j \subset A$  olmak üzere  $A_j$  ölçülebilirdir. O zaman

$$\int_A s(x) dx = \sum_{j=1}^n a_j \mu(A_j) \quad (3.6.1)$$

$f$  ölçülebilir ve negatif olmayan değerler alıyorsa

$$\int_A f(x) dx = \sup \int_A s(x) dx \quad (3.6.2)$$

olarak tanımlanır.  $s$  üzerinden alınan ölçüler basit fonksiyonların supremumu  $A$  dışında 0 ve  $A$  da  $0 \leq s(x) \leq f(x)$  koşulunu sağlar. Eğer  $f$  negatif olmayan basit bir fonksiyonsa (3.6.1) ve (3.6.2) ile verilen  $\int_A f(x) dx$  in tanımı ile çelişir. Negatif olmayan bir fonksiyonun integralinin  $+\infty$  olabileceğini de unutmamak gerekir.

Eğer  $f$  ölçülebilir ve gerçek değerliyse  $f = f^+ - f^-$  yazabiliriz. Burada  $f^+ = \max(f, 0)$  ve  $f^- = -\min(f, 0)$  dır ve ikisi de ölçülebilirdir.  $f^+$  ve  $f^-$  negatif değerli değildir. Buradan

$$\int_A f(x) dx = \int_A f^+(x) dx - \int_A f^-(x) dx$$

eşitliğini sağdaki integrallerden en az biri sonlu olmak üzere yazabiliriz. Her iki integralde sonluysa  $f$  nin  $A$  üzerinde Lebesgue İntegrallenebilir fonksiyonları  $L^1(A)$  ile göstereceğiz. (Adams ve Fournier, 2003)

3.6.1. Teorem Aşağıda verilen tüm fonksiyonlar ve kümeler ölçülebilir olsunlar. Bu durumda

1.  $f, A$  üzerinde sınırlı ve  $\mu(A) < \infty$  ise  $f \in L^1(A)$  olur.
2.  $a \leq f(x) \leq b$  ve  $\forall x \in A$  için  $\mu(A) < \infty$  ise

$$a\mu(A) \leq \int_A f(x) dx \leq \int_A b \mu(A).$$

3.  $\forall x \in A$  için  $f(x) < g(x)$  ve her iki integralde mevcutsa

$$\int_A f(x) dx \leq \int_A g(x) dx.$$

4.  $f, g \in L^1(A)$  olduğunda  $f + g \in L^1(A)$  ve

$$\int_A (f + g)(x) dx = \int_A f(x) dx + \int_A g(x) dx.$$

5.  $f \in L^1(A)$  ve  $c \in \mathbb{R}$  olsun. Bu durumda  $|f| \in L^1(A)$  ve

$$\left| \int_A f(x) dx \right| \leq c \int_A |f(x)| dx$$

6.  $f \in L^1(A)$  ve  $B \subset A$  olsun. Bu durumda  $f \in L^1(B)$  olur. Eğer ek olarak  $\forall x \in A$  için  $f(x) \geq 0$  ise

$$\int_B f(x) dx \leq \int_A f(x) dx.$$

7.  $\mu(A) = 0$  ise  $\int_A f(x) dx$  olur.

8.  $f \in L^1(A)$  ve  $\forall B \subset A$  için  $\int_B f(x) dx = 0$  ise  $A$  üzerinde h.h.h  $f(x) = 0$  dır.

(Adams, 1975)

3.6.2. Teorem  $f$  fonksiyonu  $L^1(\mathbb{R}^n)$  nin bir elemanıysa veya  $\mathbb{R}^n$  üzerinde ölçülebilir ve  $f(x) \geq 0$  ise

$$\lambda(A) = \int_A f(x) dx$$

sayılabilir toplamsaldır. Dolayısıyla  $\mathbb{R}^n$  nin Lebesgue ölçülebilir alt kümeleri  $\sigma$ -cebri üzerinde bir ölçüdür. (Adams, 1975)

### 3.6.3. Teorem (Monoton Yakınsaklık Teoremi)

$A \subset \mathbb{R}^n$  ölçülebilir ve  $\{f_n\}$  her  $x \in A$  için  $0 \leq f(x_1) \leq f(x_2) \leq \dots$  koşulunu sağlayan ölçülebilir fonksiyonlar dizisi olsun. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \int_A f_n(x) dx$$

dir. (Adams ve Fournier, 2003)

3.6.4. Teorem (Fatou Lemması)  $A \subset \mathbb{R}^n$  ölçülebilir ve  $\{f_n\}$  negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonlar dizisi olsun. Bu durumda

$$\int_A \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \inf f_n(x) \right) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \int_A f_n(x) dx$$

olur. (Adams ve Fournier, 2003)

3.6.5. Teorem (Baskın Yakınsaklık Teoremi)  $A \subset \mathbb{R}^n$  ölçülebilir ve  $\{f_n\}$ ,  $A$  üzerinde nokta nokta bir limite yakınsayan ölçülebilir fonksiyonlar dizisi olsun. Her  $n$  ve  $x \in A$  için  $|f_n(x)| \leq g(x)$  olacak şekilde bir  $g \in L^1(A)$  fonksiyonu varsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) dx = \int_A \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx$$

dir. (Adams, 1975)

3.6.6. Teorem (Lebesgue Yakınsaklık Teoremi)  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  bir ölçü uzayı olmak üzere  $X$  üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel sayılar üzerinde değerli integrallenebilen bir  $g$

fonksiyonu olsun.  $f_1, f_2, f_3, \dots$  fonksiyonları da  $X$  üzerinde  $\mathcal{F}$  ölçülebilir, genişletilmiş reel değerli olsunlar. Bu durumda neredeyse bütün  $x$  ler için aşağıdaki koşullar gerçekleşir.

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$
2.  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $|f_n(x)| \leq g(x)$  ise  $f$  ve  $f_n$  fonksiyonları integrallenebilirdir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_x f_n d\mu = \int_x f d\mu$$

olur.

## 4. NORMLU UZAYLAR

Bu bölümde Normlu Uzay, Banach Uzayı,  $L^p(\Omega)$  Uzayları,  $L^\infty(\Omega)$  Uzayları, İç Çarpım Uzayları, Hilbert Uzayı ve Sobolev Uzayları incelenecektir.

### 4.1. Normlu Uzay

4.1.1. Tanım  $(T, \oplus)$  değişmeli grup  $(T, +, \cdot)$  bir cisim olsun.

$$\odot: U \times T \rightarrow T, \quad (r, a) \rightarrow r \odot a$$

dış işlemi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa  $T$  ye  $(U, +, \cdot)$  cismi üzerinde vektör uzayı denir.

1.  $\forall r \in U$  ve  $\forall a \in T$  için  $r \odot a \in T$  dir.
2.  $\forall r \in U$  ve  $\forall a, b \in T$  için  $r \odot (a \oplus b) = (r \odot a) \oplus (r \odot b)$  dir
3.  $\forall r, s \in U$  ve  $\forall a \in T$  için  $(r + s) \odot a = (r \odot a) \oplus (s \odot a)$
4.  $\forall r, s \in U$  ve  $\forall a \in T$  için  $(r \cdot s) \odot a = r \odot (s \odot a)$
5.  $1 \in U$  ve  $\forall a \in T$  için  $1 \odot a = a$

$(U, +, \cdot)$  cismi üzerindeki  $T$  vektör uzayı  $((a, \oplus), (U, +, \cdot), \odot)$  şeklinde gösterilir. Burada  $U = \mathbb{R}$  ise  $T$  uzayı reel vektör uzayı,  $U = \mathbb{C}$  ise kompleks vektör uzayı denir.

4.1.2. Tanım  $T$  bir vektör uzayı olsun. Bu durumda  $\emptyset \neq D \subset T$  olarak verilsin.  $A, T$  de vektör uzayı belirtiyorsa  $A$  uzayına  $T$  nin alt vektör uzayı denir.

4.1.3. Tanım  $T$  bir vektör uzayı olsun.  $\|\cdot\|: T \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu tanımlayalım. Bu fonksiyon

1.  $\forall a, b \in T$  için  $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$
2.  $\forall a \in T$  ve  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  için  $\|\alpha a\| = |\alpha| \cdot \|a\|$

$$3. \quad a \neq 0, \forall a \in T \text{ için } \|a\| > 0$$

$$4. \quad \|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

özelliklerini sağlarsa  $\|\cdot\|$  fonksiyonuna  $X$  üzerinde bir norm ve  $(T, \|\cdot\|)$  ikilisi de normlu uzay (normlu vektör uzayı) olarak adlandırılır.

4.1.1. *Örnek*  $u, v$  pozitif değerli ve  $a \in \mathbb{C}^2$  olsun.  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2$  için  $\|a\| = u \cdot (a_1) + v \cdot |a_2|$  ile tanımlı  $\|\cdot\|$  fonksiyonu  $\mathbb{C}^2$  üzerinde bir normdur.

1.  $a = (a_1, a_2)$  verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|a\| = 0 &\Leftrightarrow u \cdot |a_1| + v \cdot |a_2| = 0 \\ &\Leftrightarrow |a_1| = |a_2| = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 0 \text{ dir.} \end{aligned}$$

2.  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2$  için  $\|a\| = u \cdot (a_1) + v \cdot |a_2| \geq 0$  dir.

3.  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2$ ,  $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{C}^2$  ise  $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$  dir.

Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \|a + b\| &= u \cdot |a_1 + b_1| + v \cdot |a_2 + b_2| \\ &\leq u \cdot |a_1| + u \cdot |a_2| + v \cdot (a_1) + v \cdot |a_2| \xi_x \\ &= \|a\| + \|b\| \text{ dir.} \end{aligned}$$

$\|\cdot\|$  fonksiyonu norm özelliklerini sağlar.

4.  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2$  ve  $\xi \in \mathbb{C}$  için  $\xi a = (\xi a_1, \xi a_2)$  dir. Bundan ötürü

$$\begin{aligned} \|\xi a\| &= u_1 |\xi a_1| + v \cdot |\xi a_2| \\ &= u \cdot |\xi| \cdot |a_1| + v \cdot |\xi| \cdot |a_2| \\ &= |\xi| \cdot \|a\| \text{ dir.} \end{aligned}$$

4.1.1. Teorem  $a, b, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in T$  olsun.  $T$  ise normlu bir vektör uzayı belirtsin. O halde

1.  $\|a\| - \|b\| \leq \|a - b\|$
2.  $\left\| \sum_{j=1}^n a_j \right\| \leq \sum_{j=1}^n \|a_j\|$

olur.

4.1.4. Tanım  $(T, \|\cdot\|)$  normlu vektör uzayı üzerinde tanımlanan

$$d: T \times T \rightarrow \mathbb{R}^+, d(a_1, b_1) = \|a_1 - b_1\|$$

fonksiyonuna  $\|\cdot\|$  normu tarafından üretilen metrik denir.

4.1.2. Teorem  $T$  normlu uzayı üzerindeki bir norm tarafından üretilen bir  $d$  metriği aşağıdaki özellikleri sağlar.

1.  $\forall a, b, \beta \in X$  için  $d(a + \beta, b + \beta) = d(a, b)$
2.  $\forall a, b \in T, u \in \mathbb{R}$  için  $d(ua, ub) = |u| \cdot d(a, b)$

*İspat*

1.  $d(a + \beta, b + \beta) = \|a + \beta - (b + \beta)\| = \|a - b\| = d(a, b)$
2.  $d(ua, ub) = \|ua - ub\| = |u| \cdot \|a - b\| = |u| \cdot d(a, b)$  (Kreyszig, 1978)

4.1.5. Tanım  $(T, \|\cdot\|)$  normlu uzay ve  $(u_s)$ ,  $T$  de bir dizi olsun.  $\forall \varepsilon > 0$  ve  $\forall r, s > n_0$  için

$$\|u_r - u_s\| < \varepsilon$$

olacak şekilde  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  pozitif sayısı varsa  $(u_s)$  dizisine  $T$  de bir Cauchy Dizisi denir.

## 4.2. Banach Uzayları

4.2.1. Tanım Tam bir normlu uzaya Banach Uzayı denir. Dolayısıyla  $X$  teki her Cauchy dizisi yakınsak ise  $X$  normlu uzayı bir Banach uzayıdır. (Efimov, 1985)

4.2.1. Teorem  $X$  normlu uzayının tam olabilmesi için gerek ve yeter şart normlu yakınsak her serinin yakınsak olmasıdır.

4.2.1. Örnek Reel sayılar,  $\lambda \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $\|\lambda\| = |\lambda|$  normuyla tanımlanmışsa reel bir normlu uzay olur. Yani  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  için

$$\|x\| = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

dir. O zaman  $\mathbb{R}^n$  reel bir Banach uzayı olur. Benzer şekilde benzer normla tanımlanmış  $\mathbb{C}^n$  nin de bir Banach Uzayı olduğu görülür. (Efimov, 1985)

4.2.2. Örnek  $[0,1]$  aralığındaki sürekli karmaşık değerli fonksiyonların lineer uzayı olan  $C([0,1])$  norm özelliklerini sağlasın.

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$$

olsun. Dolayısıyla  $C([0,1])$  bir Banach uzayı olur. Bu norma supremum norm denir ve sıklıkla  $\|\cdot\|_\infty$  ile gösterilir. Bu norma göre yakınsamanın tam olarak  $[0,1]$  aralığındaki fonksiyonların düzgün yakınsaması olduğunu görmüş oluruz.

4.2.3. Örnek  $C([0,1])$  üzerinde

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$$

normu verilsin. Bu norma göre  $C([0,1])$  uzayı Banach Uzayı değildir . Fakat fonksiyon aşağıdaki şekilde verilmişse

$$h_n(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ n\left(x - \frac{1}{2}\right) & , \frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1 & , \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

$h_n$  nin  $\|\cdot\|_1$  normuna göre bir Cauchy dizisi olduğu görülür.  $(C([0,1]), \|\cdot\|_1)$  de  $h_n \rightarrow h$  ve  $n \rightarrow \infty$  olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |h(x)| dx = \int_0^{\frac{1}{2}} |h(x) - h_n(x)| dx \leq \|h - h_n\|_1 \rightarrow 0$$

böylece  $h$  fonksiyonunun  $[0,1]$  aralığında sıfıra eşit olduğunu görürüz. Benzer şekilde herhangi bir  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$  ve  $n \rightarrow \infty$  için

$$\int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 |h(x) - 1| dx = \|h - h_n\|_1 \rightarrow 0$$

olduğu görülür. Dolayısıyla  $h$  ,  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$  ve  $\left[\frac{1}{2} + \varepsilon, 1\right]$  aralığında 1 e eşit olduğu anlamına gelir. Ancak böyle bir  $h$  fonksiyonu sürekli değildir. Bu nedenle  $C([0,1])$  in  $\|\cdot\|_1$  normuna göre tam olmadığı sonucuna varırız. (Efimov, 1985)

**4.2.4. Örnek**  $S$  boştan farklı herhangi bir küme olsun.  $X$  in de  $S$  üzerindeki sınırlı karmaşık değerli fonksiyonların kümesini gösterdiğini varsayalım. O zaman  $X$ ,  $\|f\| = \sup\{|f(s)|: s \in S\}$  normu ile sağlandığında bir Banach Uzayı olur.

Özellikle  $S = \mathbb{N}$  alınırsa  $X$ , sınırlı karmaşık dizilerin lineer uzayıdır. Bu banach uzayı  $l^\infty$  (veya bazen  $l^\infty(\mathbb{N})$  ) olarak gösterilir. (Efimov, 1985)

4.2.2. Tanım Banach Uzayı, normla ilişkili metrik altında tam olan bir normlu vektör uzayıdır. (Rynne ve Youngson, 2008)

#### 4.2.2. Teorem

1. Herhangi bir sonlu boyutlu normlu vektör uzayı bir Banach Uzayıdır.
2. Eğer  $X$  kompakt bir metrik uzay ise  $C_{\mathbb{R}}(X)$  bir Banach Uzayıdır.
3. Eğer  $(X, \Sigma, \mu)$  bir ölçüm uzayı ise o zaman  $L^p(X)$ ,  $1 < p \leq \infty$  için bir Banach Uzayıdır.
4.  $l^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  için bir Banach Uzayıdır.
5. Eğer  $X$  bir Banach uzayı ve  $Y$  de  $X$  in lineer bir alt uzayı ise  $Y$  ancak ve ancak  $Y$ ,  $X$  içerisinde kapalı ise bir Banach Uzayıdır. (Rynne ve Youngson, 2008)

4.2.3. Tanım  $X$  bir normlu uzay ve  $\{x_n\}$  nin  $X$  te bir dizi olduğunu varsayalım.  $\forall n \in \mathbb{Z}^+$  için dizinin  $n$ . kısmi toplamı  $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$  olsun.  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  serisinin eğer  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$   $X$  te varsa yakınsadığı söylenir. Bu durumda

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

olarak tanımlarız. (Rynne ve Youngson, 2008)

4.2.3. Teorem  $X$  in bir Banach uzayı ve  $\{x_n\}$  nin  $X$  de bir dizi olduğunu varsayalım.  $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$  serisi yakınsıyorsa  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  serisi de yakınsar.

*İspat*  $\varepsilon > 0$  ve  $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$  dizinin  $n$ . kısmi toplamı olsun.  $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$  nin kısmi toplamları bir Cauchy dizisi oluşturur. Dolayısıyla  $n > n \geq \mathbb{N}$  olduğunda

$$\|s_m - s_n\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|x_k\| < \varepsilon$$

olur. Bundan dolayı  $\{s_n\}$  bir couchy dizisidir ve  $X$  tam olduğunda yakınsar. Bu nedenle  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  yakınsar. (Rynne ve Youngson, 2008)

### 4.3. $L^p(\Omega)$ Uzayları

4.3.1 Tanım  $\Omega$ ,  $\mathbb{R}^n$  de tanımlı ve  $p$  pozitif bir reel sayı olsun.  $\Omega$  üzerinde tanımlanan ve

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty \quad (4.3.1)$$

olan tüm ölçülebilir fonksiyonların sınıfı  $L^p(\Omega)$  ile gösterilir.

$L^p(\Omega)$  da,  $\Omega$  nın hemen hemen her yerinde eşit olan fonksiyonları tanımlarız. Bu nedenle  $L^p(\Omega)$  elemanları (4.3.1) i sağlayan ölçülebilir fonksiyonların denklik sınıflarıdır. Dolayısıyla iki fonksiyon  $\Omega$  içinde hemen hemen her yerde eşit ise denktir. Kolaylık olması açısından biz bu ayrımı göz ardı ediyoruz ve  $u$  (4.3.1) i sağlıyorsa  $u \in L^p(\Omega)$  ve  $\Omega$  nın hemen hemen her yerinde  $u(x) = 0$  ise  $L^p(\Omega)$  da  $u = 0$  yazarız.  $u \in L^p(\Omega)$  ve  $c \in \mathbb{C}$  ise  $cu \in L^p(\Omega)$  olduğu açıktır.  $L^p(\Omega)$  nın bir vektör uzayı olduğunu doğrulamak için  $u, v \in L^p(\Omega)$  ise  $u + v \in L^p(\Omega)$  olduğunu göstermeliyiz. Bu daha sonrada faydalı olacağı kanıtlanacak aşağıdaki eşitsizliğin doğrudan bir sonucudur. (Adams ve Fournier, 2003)

4.3.1. Lemma  $1 \leq p < \infty$  ve  $a, b \geq 0$  olduğunda

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p) \quad (4.3.2)$$

eşitsizliği sağlanır.

*İspat* Eğer  $p = 1$  ise (4.3.2) nin sağlandığı açıktır.  $p > 1$  için  $t^p$  fonksiyonu  $[0, \infty)$  aralığında dışbükeydir. Yani grafiği  $(a, a^p)$  ve  $(b, b^p)$  noktalarını birleştiren doğrunun altında yer alır. Böylece

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{a^p + b^p}{2}$$

olur ki buradan (4.3.2) kolayca elde edilir. Eğer  $u, v \in L^p(\Omega)$  ise

$$|u(x) + v(x)|^p \leq (|u(x)| + |v(x)|)^p \leq 2^{p-1}(|u(x)|^p + |v(x)|^p)$$

eşitsizliğini  $\Omega$  üzerinden birleştirmek  $u + v \in L^p(\Omega)$  olduğunu gösterir. (Adams ve Fournier, 2003)

#### 4.3.2. Tanım ( $L_p$ Normu) Şimdi

$$\|u\|_p = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

tarafından tanımlanan fonksiyonel  $\|\cdot\|_p$  nin  $1 \leq p < \infty$  sağlandığı takdirde  $L_p(\Omega)$  üzerinde bir normdur. Bunu göstereceğiz. ( $0 < p < 1$  ise norm değildir.) İfadelerin karışabileceği durumlarda  $\|\cdot\|_{p,\Omega}$  yerine  $\|\cdot\|_{p'}$  kullanacağız.  $L^p(\Omega)$  da sade ve sadece  $u = 0$  ise  $\|u\|_p > 0$  ve  $\|u\|_p = 0$  olduğu açıktır. Dahası

$$\|cu\|_p = |c| \cdot \|u\|_p, c \in \mathbb{C}$$

olur. Dolayısıyla Minkowski Eşitsizliği olarak bilinen

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$$

üçgen eşitsizliğini doğruladığımızda  $\|\cdot\|_p$  nın  $L^p(\Omega)$  üzerinde bir norm olduğunu göstermiş olacağız. Fakat bunun için bazı teorem ve açıklamaları yapmamız gerekiyor. (Adams ve Fournier, 2003)

#### 4.3.1. Teorem (Hölder Eşitsizliği) $p, q > 1$ alalım ve $q$ ise

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

şeklinde tanımlansın..  $u$  ve  $v$   $\Omega$  da integrallenebilir fonksiyonlar olsun.

$$\int_{\Omega} |u(x) \cdot v(x)| dx \leq \|u\|_p \cdot \|v\|_q \quad (4.3.3)$$

eşitsizliği sağlanır. (Adams ve Fournier, 2003)

4.3.2. Teorem (Minkowski Eşitsizliği)  $1 < p < \infty$  olduğu zaman

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p \quad (4.3.5)$$

olur.

*İspat*  $p = 1$  ise (4.3.5) eşitsizliği kesinlikle vardır. Çünkü

$$\int_{\Omega} |u(x) + v(x)| dx \leq \int_{\Omega} |u(x)| dx + \int_{\Omega} |v(x)| dx$$

dir.  $1 < p < \infty$  ve  $w \geq 0$ ,  $\|w\|_{p'} \leq 1$  için Hölder eşitsizliğine göre,

$$\int_{\Omega} (|u(x)| + |v(x)|) \cdot w(x) dx \leq \int_{\Omega} |u(x)|w(x) dx + \int_{\Omega} |v(x)|w(x) dx \leq \|u\|_p + \|v\|_p$$

olur. Dolayısıyla Hölder Eşitsizliğinin tersine göre

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$$

elde edilir.

4.3.3. Teorem (İntegraller için Minkowski Eşitsizliği)  $1 < p < \infty$  alalım.  $f$  nin  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  üzerinde ölçülebilir olduğunu,  $f(\cdot, y) \in L^p(\mathbb{R}^m)$  nin hemen hemen her yerinde  $y \in \mathbb{R}^n$  için  $L^p(\mathbb{R}^m)$  olduğunu ve  $y \rightarrow \|f(\cdot, y)\|_{p, \mathbb{R}^m}$  fonksiyonunun  $L^1(\mathbb{R}^n)$  ait olduğunu varsayalım. Bu durumda  $x \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy$  fonksiyonu  $L^p(\mathbb{R}^m)$  e ait olur ve

$$\left( \int_{\mathbb{R}^m} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy \right|^p dx \right)^{1/p} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} |f(x, y)|^p dx \right)^{1/p} dy$$

olur. Yani

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot, y) dy \right\|_{p, \mathbb{R}^m} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f(\cdot, y)\|_{p, \mathbb{R}^m} dy$$

olur.

*İspat*  $f \geq 0$  olsun.  $p = 1$  olduğunda yukardaki eşitsizlikler Fubini Teoreminde verilen eşitlikler haline gelir.  $p > 1$  olduğunda Minkowski Eşitsizliğindeki gibi  $L^p(\Omega)$  nın bir kümesinde negatif olmayan bir  $\|w\|$  kullanalım. Fubini Teoremi ve Hölder Eşitsizliğine göre

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^m \mathbb{R}^n} f(x, y) dy w(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x, y) w(x) dx dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \|w\|_{p', \mathbb{R}^m} \|f(\cdot, y)\|_{p, \mathbb{R}^m} dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f(\cdot, y)\|_{p, \mathbb{R}^m} dy \end{aligned}$$

Bu durum Lemma 4.3.2. yi takip eder. Yukardaki gibi genel bir  $f$  fonksiyonu için  $f$  yi reel ve imajiner parçalara ayırılım ve bunları hipotezleri sağlayan negatif olmayan fonksiyonların farkları olarak bölelim. Buradan  $x$  i  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy$  ile eşleyen fonksiyonun  $L^p(\mathbb{R}^m)$  ye ait olduğu sonucu çıkar. Norm tahminini elde etmek için  $f$  yi  $|f|$  ile değiştiririz.

#### 4.4. $L^\infty(\Omega)$ Uzayları

$\Omega$  üzerinde ölçülebilen bir  $u$  fonksiyonunun  $\Omega$  üzerinde hemen hemen her yerde  $|u(x)| \leq K$  olacak şekilde bir  $K$  sabiti varsa  $|u|$  fonksiyonuna  $\Omega$  üzerinde esaslı sınırlı denir. Bu tür sabitlerin en büyük alt sınırı  $K$ ,  $|u|$  nun  $\Omega$  üzerinde esaslı üst sınırı olarak adlandırılır ve  $x \in \Omega$  olmak üzere  $\text{esssup}|u(x)|$  ile gösterilir.  $\Omega$  üzerinde esaslı sınırlı olan tüm  $u$

fonksiyonlarının vektör uzayı  $L^\infty(\Omega)$  ile gösterilir. Fonksiyonlar  $\Omega$  üzerinde hemen hemen her yerde eşit iseler bir kez daha özdeş kabul edilirler.

$$\|u\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|$$

ile tanımlanan  $\|\cdot\|$  fonksiyonunun  $L^\infty(\Omega)$  üzerinde bir norm olduğu kolayca elde edilir. Ayrıca Hölder Eşitsizliği

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| \, dx \leq \|u\|_p \cdot \|v\|_{p'}$$

ve özelliklerini  $p = 1, p' = \infty$  ve  $p = \infty, p' = 1$  durumlarını kapsayacak biçimde genişler. (Adams ve Fournier, 2003)

4.4.1. Teorem (Enterpolasyon Eşitsizliği)  $1 \leq p < q < r$  ve  $0 < \theta < 1$  için

$$\frac{1}{q} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{r}$$

olsun. Eğer  $u \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$  ise

$$u \in L^q(\Omega) \text{ ve } \|u\|_q \leq \|u\|_p^\theta \cdot \|u\|_r^{1-\theta}$$

olur.

*İspat*  $s = \frac{p}{\theta \cdot q}$  olsun. Eğer  $r < \infty$  ise o zaman  $s \geq 1$  ve  $s = \frac{s}{s-1} = \frac{r}{(1-\theta) \cdot q}$  olur. Bu durumda Hölder Eşitsizliğine göre

$$\begin{aligned} \|u\|_q^q &= \int_{\Omega} |u(x)|^{\theta q} \cdot |u(x)|^{(1-\theta)q} \, dx \\ &\leq \left( \int_{\Omega} |u(x)|^{\theta q s} \, dx \right)^{1/s} \cdot \left( \int_{\Omega} |u(x)|^{(1-\theta)q s'} \, dx \right)^{1/s'} \end{aligned}$$

$$= \|u\|_p^{\theta q} \cdot \|u\|_r^{(1-\theta)q}$$

olur ve sonuca hemen ulaşırız.  $r = \infty$  ise ispat benzer şekilde yapılır. (Adams ve Fournier, 2003)

4.4.2. Teorem (Ters Hölder Eşitsizliği)  $0 < p < 1$  olsun. Bu durumda  $p' = \frac{p}{p-1} < 0$  olur.

Eğer

$$f \in L^p(\Omega) \text{ ve } 0 < \int_{\Omega} |g(x)|^{p'} dx < \infty$$

olduğunda

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \geq \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \cdot \left( \int_{\Omega} |g(x)|^{p'} dx \right)^{1/p'} \quad (4.4.1)$$

olur.

*İspat*  $f, g \in L^1(\Omega)$  olduğunu varsayalım. Aksi takdirde (4.4.1) in sol tarafı sonsuz olur.  $\phi = |g|^{-p}$  ve  $\psi = |f \cdot g|^p$  olsun. O halde  $\phi\psi = |f|^p$  olur. O zaman  $\psi \in L^q(\Omega)$  olmak üzere  $q = 1$ ,  $p > 1$  ve  $p' = -p \cdot q'$ ,  $q' = q / q - 1$  olduğunda  $\phi \in L^{q'}(\Omega)$  elde edilir. Hölder eşitsizliğinin (4.3.3) e göre

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x)|^p dx &= \int_{\Omega} \phi(x)\psi(x) dx \leq \|\psi\|_q \cdot \|\phi\|_q \\ &= \left( \int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \right)^p \cdot \left( \int_{\Omega} |g(x)|^{p'} dx \right)^{1-p} \end{aligned}$$

$p$ . kökü alınıp sağ taraftaki son çarpana bölerek (4.4.1) elde edilir. (Adams ve Fournier, 2003)

4.4.3. Teorem (Ters Minkowski Eşitsizliği)  $0 < p < 1$  ve  $u, v \in L^p(\Omega)$  olduğunda

$$\| |u| + |v| \|_p \geq \|u\|_p + \|v\|_p \quad (4.4.2)$$

olur.

*İspat*  $L^p(\Omega)$  da  $u = v = 0$  ise (4.4.2) nin sağ tarafı sıfırdır. Aksi takdirde sol tarafından büyük kalır ve

$$\begin{aligned} \| |u| + |v| \|_p^p &= \int_{\Omega} \left( (|u(x)| + |v(x)|)^{p-1} \cdot (|u(x)| + |v(x)|) \right) dx \\ &\geq \left( \int_{\Omega} (|u(x)| + |v(x)|)^p dx \right)^{1/p} \cdot (\|u\|_p + \|v\|_p) \\ &= \| |u| + |v| \|_p^{p/p'} \cdot (\|u\|_p + \|v\|_p) \end{aligned}$$

yi elde etmek için (4.4.1) i uygulayabiliriz ve (4.4.2) yi elde ederiz. (Adams ve Fournier, 2003)

4.4.4. Teorem (  $L^p(\Omega)$  Uzayları için Gömülme Teoremi)  $vol(\Omega) = \int_{\Omega} 1 dx < \infty$  ve  $1 \leq p \leq q \leq \infty$  olduğunu varsayalım. Eğer  $u \in L^q(\Omega)$  ise  $u \in L^p(\Omega)$  ve

$$\|u\|_p \leq (vol(\Omega))^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \cdot \|u\|_q \quad (4.4.3)$$

dolayısıyla

$$L^q(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega) \quad (4.4.4)$$

olur. Eğer  $u \in L^\infty(\Omega)$  ise

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|u\|_p = \|u\|_\infty \quad (4.4.5)$$

olur. Eğer  $u \in L^p(\Omega)$  ve  $1 \leq p < \infty$  ise her  $p$  için

$$\|u\|_p \leq K \quad (4.4.6)$$

olacak şekilde bir  $K$  sabiti aldığımız zaman  $u \in L^\infty(\Omega)$  ve

$$\|u\|_\infty \leq K \quad (4.4.7)$$

olur.

*İspat* Eğer  $p = q$  veya  $q = \infty$  ise (4.4.3) ve (4.4.4) aşıkardır. Eğer  $1 \leq p < q < \infty$  ve  $u \in L^q(\Omega)$  ise Hölder eşitsizliğinden

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \leq \left( \int_{\Omega} |u(x)|^q dx \right)^{p/q} \cdot \left( \int_{\Omega} 1 dx \right)^{1-(p/q)}$$

elde edilir. Buradan (4.4.3) ve (4.4.4) kolayca elde edilir. Eğer  $u \in L^\infty(\Omega)$  ise (4.4.3) den

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|u\|_p \leq \|u\|_\infty \quad (4.4.8)$$

elde edilir. Öte yandan herhangi bir  $\varepsilon > 0$  için eğer  $x \in A$  ise  $\|u(x)\| \geq \|u\|_\infty - \varepsilon$  olacak şekilde pozitif, ölçüsü  $\mu(A)$  olan bir  $A \subset \Omega$  kümesi vardır. Dolayısıyla

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \geq \int_A |u(x)|^p dx \geq \mu(A)(\|u\|_\infty - \varepsilon)^p$$

olur. Buradan  $\|u\|_p \geq (\mu(A))^{1/p} \cdot (\|u\|_\infty - \varepsilon)$  çıkar ve

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \|u\|_p \geq \|u\|_\infty \quad (4.4.9)$$

elde edilmiş olur.

Şimdi (4.4.6) nın  $1 < p < \infty$  için geçerli olduğunu varsayalım. Eğer  $u \notin L^\infty(\Omega)$  veya (4.4.7) geçerli değilse o zaman sabit bir  $K_1 > K$  ve  $\mu(A) > 0$  olan bir  $A \subset \Omega$  kümesi bulabiliriz ve

$x \in A$  içinde  $|u(x)| \geq K_1$  olur. (4.4.9) u elde etmek için kullanılan aynı argüman şimdi

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \|u\|_p \geq K_1$$

olduğunu gösterir ki bu da (4.4.6) ile çelişir.

4.4.5. Teorem (Ficher Riesz)  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  aralığındaki herhangi bir  $p$  için Banach Uzayıdır.

*İspat*  $p = \infty$  ve  $1 \leq p < \infty$  durumlarını ayrı ayrı inceleyeceğiz.

1.Durum ( $p = \infty$ ) olması :  $(f_n)$  nin  $L^\infty$  olan bir couchy dizisi olduğunu varsayalım.  $k \geq 1$  alındığında  $m, n \geq N_k$  için  $\|f_m - f_n\|$  olacak şekilde bir tamsayı  $N_k$  vardır. Dolayısıyla

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}, \forall x \in \Omega/E_k, \forall m, n \geq N_k \quad (4.4.10)$$

olacak şekilde bir  $E_k$  boş kümesi vardır.  $E = \bigcup_k E_k$  yazarsak böylece  $E$  boş bir küme olur ve tüm  $x \in \Omega / E$  için  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  dir.  $m \rightarrow \infty$  iken (4.4.10) daki limite geçerse şu elde ederiz;

$$\forall x \in \Omega/E, \forall n \geq N_k \text{ için } |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}$$

olur. Biz buradan  $f \in L^\infty$  ve  $\|f - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k}, \forall n \geq N_k$  sonucuna varılır. Dolayısıyla  $L^\infty$  da  $f_n \rightarrow f$  olur.

2.Durum ( $1 \leq p < \infty$ ) olması :  $(f_n)$  nin  $L^p$  de bir couchy dizisi olduğunu varsayalım. İspat için bir alt dizinin  $L^p$  de yakınsadığını göstermek yeterli olur.  $(f_{n_k})$  alt dizisini Şu şekilde alalım:

$$\forall k \geq 1 \text{ için } \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \frac{1}{2^k}$$

[Şu şekilde ilerlenir:  $\|f_m - f_n\|_p \leq \frac{1}{2}$ ,  $\forall m, n \geq n_1$  olacak şekilde  $n_1$  seçilir. Sonra  $\|f_m - f_n\| \leq \frac{1}{2^2}$ ,  $\forall m, n \geq n_2$  olacak şekilde  $n_2$  seçilir.]

$f_{n_k}$  nın  $L^p$  de yakınsadığını iddia ediyoruz. Gösterimi basitleştirmek için  $f_{n_k}$  yerine  $f_k$  yazacağız. Böylece

$$\forall k \geq 1 \text{ için } \|f_{k+1} - f_k\|_p \leq \frac{1}{2^k}. \quad (4.4.11)$$

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^n |f_{k+1} - f_k|,$$

böylece

$$\|g_n\|_p \leq 1$$

elde edilir. Monoton yakınsama teoreminin bir sonucu olarak  $g_n(x)$  in,  $g \in L^p$  ile  $\Omega$  üzerinde hemen hemen her yerde  $g(x)$  gibi sonlu bir limiti yakınsar. Diğer taraftan  $m > n \geq 2$  için

$$n \geq 2 \text{ için } |f(x) - f_n(x)| \leq g(x) \quad (4.4.12)$$

ve özellikle  $f \in L^p$  dir. Son olarak baskın yakınsama ile  $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$  sonucuna varıyoruz. Çünkü  $|f_n(x) - f(x)|^p \rightarrow 0$  dir. Hatta neredeyse her yerde 0 ve  $|f_n - f|^p \leq g^p \in L^1$  dir. (Brezis, 2011)

4.4.6. Teorem (Young Eşitsizliği) Daima artan, sürekli ve  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \infty$  olacak şekilde bir  $\lambda: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu alınsın ve  $\lambda^{-1} = \xi$  olsun.  $\forall x \in \mathbb{R}$  için

$$\lambda(x) = \int_0^x \lambda(u) du, \quad \xi(x) = \int_0^x \xi(u) du$$

alınırsa  $\forall m, n \in [0, \infty)$  için

$$m \cdot n \leq \lambda(m) + \xi(n)$$

olur. Eşitlik sadece  $n = \lambda(m)$  olması koşuluyla geçerlidir.

#### 4.5. İç Çarpım Uzayı

4.5.1. Tanım  $X$  bir vektör uzayı olsun.  $\forall a, b, c \in X$  ve  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  için  $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlaması durumunda  $X$  üzerinde bir iç çarpımdır.

1.  $\langle a, a \rangle \geq 0$
2.  $\langle a, a \rangle = 0 \Leftrightarrow a = 0$
3.  $\langle \alpha a + \beta b, c \rangle = \alpha \cdot \langle a, c \rangle + \beta \cdot \langle b, c \rangle$
4.  $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$

4.5.2. Tanım  $X$  bir vektör uzayı olsun.  $\forall a, b, c \in X$  ve  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  için  $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{C}$  fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlaması durumunda  $X$  üzerinde bir iç çarpımdır.

1.  $\langle a, a \rangle \in \mathbb{R}$  ve  $\langle a, a \rangle \geq 0$
2.  $\langle a, a \rangle = 0 \Leftrightarrow a = 0$
3.  $\langle \alpha a + \beta b, c \rangle = \alpha \cdot \langle a, c \rangle + \beta \cdot \langle b, c \rangle$
4.  $\langle a, b \rangle = \overline{\langle b, a \rangle}$

4.5.1. Lemma (Cauchy Schwartz Eşitsizliği)  $a, b \in X$  ve  $X$  bir iç çarpım uzayı olsun. Bu durumda

1.  $|\langle a, b \rangle| \leq \langle a, a \rangle \cdot \langle b, b \rangle$  ;  $a, b \in X$
2.  $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $\|a\| = \langle a, a \rangle^{1/2}$  ile tanımlanır ve  $X$  üzerinde bir normdur.

### İspat

1. Eğer  $a = 0$  veya  $b = 0$  ise sonuç doğrudur. Dolayısıyla bir  $x$  ve  $y$  nin sıfırdan farklı olduğunu varsayıyoruz. Lemma 4.5.1. in (3) kısmına  $\alpha = -\langle a, b \rangle / \langle b, b \rangle$  ve  $\beta = 1$  yazarsak

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \langle \alpha a + b, \alpha a + b \rangle \\
 &= \left| \frac{\langle a, b \rangle}{\langle a, a \rangle} \right|^2 \cdot \langle a, a \rangle - \frac{\overline{\langle a, b \rangle} \langle a, b \rangle}{\langle a, a \rangle} - \frac{\langle a, b \rangle \cdot \langle b, a \rangle}{\langle a, a \rangle} + \langle b, b \rangle \\
 &= \frac{|\langle a, b \rangle|^2}{\langle a, a \rangle} - \frac{|\langle a, b \rangle|^2}{\langle a, a \rangle} - \frac{|\langle a, b \rangle|^2}{\langle a, a \rangle} + \langle b, b \rangle \\
 |\langle a, b \rangle|^2 &\leq \langle a, a \rangle \cdot \langle b, b \rangle
 \end{aligned}$$

elde edilir.

2. İç çarpım özelliklerini kullanarak şimdi  $\|x\|$  in verilen tanımının bir normun tüm tanımlayıcı özelliklerini sağladığını doğrulayabiliriz.

i.  $\|a\| = \langle a, a \rangle^{1/2} \geq 0$

ii.  $\|a\| = 0 \Leftrightarrow \langle a, a \rangle^{1/2} = 0 \Leftrightarrow a = 0$

iii.  $\|\alpha a\| = \langle \alpha a, \alpha a \rangle^{1/2} = \langle \alpha, \bar{\alpha} \rangle^{1/2} \cdot \langle a, a \rangle^{1/2}$

iv.  $\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + 2 \Re \langle a, b \rangle + \|b\|^2$  (Lemma 4.5.1. de (3) de  $\alpha = \beta = 1$  alınırsa)

$$\begin{aligned}
 &\leq \|a\|^2 + 2\|a\|\|b\| + \|b\|^2 \\
 &= (\|a\| + \|b\|)^2
 \end{aligned}$$

Ayrıca (1) kısmındaki eşitsizlik

$$|\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \cdot \|b\|$$

olarak yazılabilir. Bu lemma da  $X$  üzerinde tanımlanan iç çarpım uzayı  $\|a\| = \langle a, a \rangle^{1/2}$  normunun  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  iç çarpımı tarafından türetildiği söylenir. Lemma türetilmiş normu kullanarak her iç çarpım uzayının bir normlu uzay olarak kabul edilebileceğini gösterir.

4.5.1. Teorem  $X$ , iç çarpımı  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ve türetilmiş normu  $\|\cdot\|$  olan bir iç çarpım uzayı olsun. O zaman  $\forall a, b \in X$  için

i.  $\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$  (Paralel Kenar Kuralı)

ii. Eğer  $X$  reel ise

$$4\langle a, b \rangle = \|a + b\|^2 - \|a - b\|^2$$

iii. Eğer  $X$  kompleks ise

$$4\langle a, b \rangle = \|a + b\|^2 - \|a - b\|^2 + i\|a + ib\|^2 - i\|a - ib\|^2 \quad (\text{Kutupsal Özdeşlik})$$

Bir vektör uzayının belirli bir normunun bir iç çarpım tarafından oluşturulmadığını göstermenin bir yolu onun paralel kenar kuralını sağlamadığını göstermektir. (Rynne ve Youngson, 2008)

4.5.1. Örnek  $C[0,1]$  uzayındaki standart norm, bir iç çarpım tarafından oluşturulmaz.

Çözüm  $f(x) = 1$ ,  $g(x) = x$  ve  $x \in [0,1]$  ile tanımlanan  $f, g \in C[0,1]$  fonksiyonlarını ele alalım.  $C[0,1]$  üzerindeki standart norm tanımından

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 4 + 1 = 5$$

$$2(\|f\|^2 + \|g\|^2) = 2 \cdot (1 + 1) = 4$$

elde ederiz. Bu nedenle paralel kenar kuralı geçerli değildir ve norm bir iç çarpımla türetilemez.

## 4.6. Hilbert Uzayı

4.6.1. Tanım İç çarpımla oluşan normla ilişkili metriğe göre  $((X, \langle \cdot, \cdot \rangle))$  iç çarpım uzayına ve  $\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}$  normuna göre) tam olan iç çarpım uzayları Hilbert Uzayı olarak adlandırılır.

### 4.6.1. Örnek

1. Her sonlu boyutlu iç çarpım uzayı bir Hilbert Uzayıdır.
2. Standart iç çarpımı olan  $L^2(X)$  bir Hilbert Uzayıdır.
3.  $\ell^2$  dizi uzayı standart iç çarpımı bir Hilbert Uzayıdır.

(Rynne ve Youngson, 2008)

4.6.2. Örnek  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  bir ölçü uzayı ve  $\mathcal{H} := L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$  iç çarpımlı olsun. Bu durumda

$$\langle f, g \rangle = \int_X f \bar{g} d\mu$$

bir Hilbert Uzayıdır. (Driver, 2003)

4.6.3. Örnek  $\langle \cdot, \cdot \rangle: I_2 \times I_2 \rightarrow \mathcal{H}$ ,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$$

fonksiyonu  $I_2$  üzerinde bir iç çarpımdır.  $I_2$  ise bir Hilbert Uzayıdır.

4.6.4. Örnek  $C[u, v]$  üzerinde

$$\langle f, g \rangle = \int_u^v f(x) \overline{g(x)} dx \text{ ve } \|f\|_{L_2}^2 = \langle f, f \rangle$$

şeklinde ifade edilirse  $C[u, v]$  bir iç çarpım olmasına rağmen Hilbert uzayı değildir.

4.6.2. Tanım (Hardy Hilbert Uzayı) En çok bilinen Hilbert Uzayı  $\ell^2$  olarak adlandırılır ve karmaşık sayıların kare- toplanabilir dizilerinin topluluğundan oluşur. Yani

$$\ell^2 = \{\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, |a_n|^2 < \infty\}.$$

Vektörlerin toplanması ve vektörlerin karmaşık sayılarla çarpılması bileşen bazında gerçekleştirilir.  $\{a_n\} = 0$  vektörünün normu

$$\|\{a_n\}_{n=0}^{\infty}\| = \left( \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2}$$

ve  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  ve  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  vektörlerinin iç çarpımı

$$\langle \{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n} \text{ dir.}$$

$\mathcal{H}^2$  olarak gösterilecek olan Hardy Hilbert Uzayı kare-toplanabilir karmaşık katsayılarla ve kuvvet serisi gösterimlerine sahip tüm analitik fonksiyonlardan oluşur. Yani

$$\mathcal{H}^2 = \left\{ f: f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ ve } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\} \text{ dir.}$$

$\mathcal{H}^2$  üzerindeki iç çarpım ise şu şekilde tanımlanır :

$$(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}$$

için

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ ve } g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \text{ dir.}$$

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  vektörünün normu

$$\|f\| = \left( \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2} \text{ dir.}$$

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eşlemesi açıkça  $\ell^2$  den  $\mathcal{H}^2$  ye bir izomorfizmdir. Bu nedenle özellikle  $\mathcal{H}^2$  bir Hilbert uzayıdır. (Martinez ve Rosenthal, 2007)

#### 4.7. Sobolev Uzayları

4.7.1. Tanım ( $L^p_{loc}(\Omega)$  Uzayı)  $\Omega$ ,  $\mathbb{R}^n$  de bir bölge ve  $\Omega$  bölgesinde ölçülebilen ve herbiri kompakt olan alt kümelerden biri  $\mathcal{A}$  olsun. O halde

$$\int_{\mathcal{A}} |f|^p dx < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların uzayı  $L^p_{loc}(\Omega)$  ile gösterilir. Yani

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{t | t \in L_p(\mathcal{A}), \forall \mathcal{A} \subset \Omega\}$$

şeklinde yazabiliriz.

4.7.1. Teorem Herhangi bir  $\Omega$  bölgesinde  $1 \leq p \leq \infty$  için

$$L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$$

olur.

4.7.1. Örnek  $1/x$  fonksiyonu  $L^1_{loc}(0,1)$  uzayının elemanıdır. Fakat  $L^1(0,1)$  veya  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$  uzaylarının elemanı değildir.

4.7.2. Tanım  $L^1_{loc}(\Omega)$  lokal integrallenebilir fonksiyonların en geniş uzayını oluşturur.

4.7.2. Örnek  $\Omega = (2,3)$  bölgesinde  $t(x) = \frac{1}{x-2}$  fonksiyonunun  $L^1_{loc}(\Omega)$  uzayına ait olduğunu fakat  $L^1(\Omega)$  uzayına ait olmadığını gösterelim :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |t(x)| dx &= \int_2^3 \left| \frac{1}{x-2} \right| dx \\ &= \ln(x-2) \Big|_2^3 \\ &= \infty \end{aligned}$$

olur. Bu durumda  $t$ ,  $L^1(\Omega)$  uzayına ait değildir. Fakat  $(m,n) \subseteq (2,3)$  aralığını  $2 < m < n < 3$  olacak şekilde kullanırsak

$$\begin{aligned} \int_m^n |t(x)| dx &= \int_m^n \left| \frac{1}{x-2} \right| dx \\ &= \ln(x-2) \Big|_m^n \\ &= \ln \left| \frac{n-2}{m-2} \right| < \infty \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla  $t$ ,  $L^1_{loc}(\Omega)$  uzayına ait olur.

4.7.3. Tanım  $\Omega$  y1,  $\mathbb{R}^n$  de bir bölge olarak alalım.  $m \in \mathbb{Z}$  ve  $m > 0$  için  $\Omega$  bölgesinde  $0 \leq \alpha \leq m$  olacak şekilde  $D^\alpha u$  kısmi türevleri sürekli olan fonksiyonlardan oluşan vektör uzayı  $C^m(\Omega)$  ile gösterilir.

4.7.4. Tanım  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  bir küme ve  $\zeta$  kompakt ve her mertebeden türevi bulunan bir fonksiyon olsun.  $\zeta: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  şeklinde tanımlanan  $\zeta$  fonksiyonuna test (veya düzgün (smooth)) fonksiyonu denir.

$$D(\Omega) = \{\zeta \in C^\infty(\Omega, \mathbb{C}) : \text{supp}(\zeta) = \{x : \zeta(x) \neq 0\} \subset \Omega\}$$

şeklinde test fonksiyonlarının kümesi gösterilir.

4.7.5. Tanım  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  olsun. Eğer  $\forall \zeta \in C^\infty_c(\Omega)$  için

$$\int_{\Omega} v(x) \zeta(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) \zeta^{(\alpha)}(x) dx$$

eşitliğini sağlayacak  $v \in L^1_{loc}(\Omega)$  varsa bu fonksiyona  $u$  nun Zayıf Türevi (Genelleştirilmiş Türevi) denir. “ $D^\alpha u$ ” ile gösterilir.

4.7.3. Örnek  $1 \leq p < \infty$  için  $D(\Omega)$ ,  $L^p(\Omega)$  da yoğundur, yani  $(\overline{D(\Omega)}) = L^p(\Omega)$  dır.

4.7.4. Örnek  $-1 \leq \Omega \leq 1$  ve  $u(x) = 1 - |x|$  alalım. Aşağıdaki fonksiyon

$$v := \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$$

$D^1 u$  nun zayıf türevidir. Bunu doğrulamak için aralığımızı  $u$  nun düzgün olduğu  $-1 \leq \Omega \leq 0$  ve  $0 \leq \Omega \leq 1$  aralıkları şeklinde yeniden revize edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 u(x) \zeta'(x) dx &= \int_{-1}^0 u(x) \zeta'(x) dx + \int_0^1 u(x) \zeta'(x) dx \\ &= u \cdot \zeta|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 (+1) \zeta(x) dx + u \cdot \zeta|_0^1 - \int_0^1 (-1) \zeta(x) dx \\ &= - \int_{-1}^1 u(x) \zeta(x) dx + u(0-) \zeta(0-) - u(0+) \zeta(0+) \end{aligned}$$

elde edilir.  $u$  fonksiyonumuz 0 da sürekli olduğundan buradan

$$= - \int_{-1}^1 v(x) \zeta(x) dx$$

elde edilmiş olur.

4.7.6 Tanım (Sobolev Normları)  $m$  pozitif bir tamsayı ve  $1 \leq p \leq \infty$  için  $\|\cdot\|$  yı aşağıdaki gibi gösterelim :

$$\|u\|_{m,p} = \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty \quad (4.7.1)$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty \quad (4.7.2)$$

Burada  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$  ve  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N$  olmak üzere

$$D^\alpha u = \frac{\partial_u^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdot \partial_{x_2}^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$$

notasyonu kullanılır.

$\|\cdot\|$ , eşitliğin sağ tarafındaki uygun bir  $u$  fonksiyonu için  $L^p(\Omega)$  üzerinde bir normdur. Etki alanlarının karışabileceği bazı durumlarda  $\|u\|_{m,p}$  yerine  $\|u\|_{m,p,\Omega}$  kullanacağız. Açıkça (4.7.1) ve (4.7.2) sağ tarafının sonlu değer aldığı fonksiyonların herhangi bir vektör uzayında bir norm tanımlar. Eğer fonksiyonlar uzayda h.h.h  $\Omega$  da eşitse norm tanımlanır. (Adams ve Fournier, 2003)

4.7.7 Tanım (Sobolev Uzayı)  $m$  herhangi bir pozitif tamsayı olsun.  $1 \leq p \leq \infty$  için  $\|\cdot\|_{m,p}$  nin norm olduğu üç vektör uzayını ele alalım.

1.  $\mathcal{H}^{m,p}(\Omega) = \{u \in C^m(\Omega): \|u\|_{m,p} < \infty\}$  normuna göre  $\|\cdot\|_{m,p}$  nin tam olması
2.  $W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega): D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$

### 3. $W_0^{m,p}(\Omega)$ , $C_0^\infty(\Omega)$ nın $W^{m,p}(\Omega)$ uzayındaki kapanışı

Bunlardan uygun bir norm (4.7.1) veya (4.7.2) ile donatılanlara Sobolev Uzayları denir. (Adams ve Fournier, 2003)

4.7.2. Teorem  $1 \leq p \leq \infty$  ve  $m \geq 0$  için  $W^{m,p}(\Omega)$  Sobolev Uzayı bir Banach Uzayıdır.

*İspat*  $u_n$ ,  $W^{m,p}(\Omega)$  da bir Cauchy dizisi olsun. Yani  $\forall \varepsilon > 0$  için öyle bir  $n(\varepsilon)$  vardır ki  $n, n' \geq n(\varepsilon)$  için  $\|u_n - u_{n'}\|_{m,p} \leq \varepsilon$  olur.  $|\alpha| \leq m$  olan her çoklu-endeks  $\alpha$  için  $\|D^\alpha u_n - D^\alpha u_{n'}\| < \varepsilon$  yani  $D^\alpha u_n$  nin  $L^p(\Omega)$  da bir Cauchy dizisi olduğu ve  $L^p(\Omega)$  da tam olduğu (Riesz Fischer Teoreminin uygulandığı Lebesgue ölçüsünün kullanılması nedeniyle) için  $D^\alpha u_n \rightarrow f_\alpha$  nin  $L^p(\Omega)$  da  $n \rightarrow \infty$  olarak güçlü olduğu anlamına varılır. Daha sonra  $f_\alpha = D^\alpha f_0$  olduğunu ve  $u_n$  nin  $W^{m,p}(\Omega)$  da  $f_0$  a eğilimli olduğunu kanıtlamak gerekir. Bunun için türev dağılımlar anlamında kullanılır ve tüm  $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$  ve  $|\alpha| \leq m$  olan tüm çoklu endeksler için şunu elde ederiz :

$$\begin{aligned} \langle D^\alpha f_0, \zeta \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle f_0, D^\alpha \zeta \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, D^\alpha \zeta \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle D^\alpha f_n, \zeta \rangle = \langle f_\alpha, \zeta \rangle \end{aligned}$$

buda bize  $D^\alpha f_0 = f_\alpha$  olduğunu gösterir. Böylece  $f_0 \in W^{m,p}(\Omega)$  ve  $D^\alpha u_n \rightarrow D^\alpha f_0$  in  $L^p(\Omega)$  da  $|\alpha| \leq m$  için geçerli olduğunu gösterir.  $n' \rightarrow \infty$  limitini alarak  $n \geq n(\varepsilon)$  için  $\|u_n - f_0\|_{m,p} \leq \varepsilon$  olur, yani  $u_n \rightarrow f_0$  in  $W^{m,p}(\Omega)$  da olduğunu bulmuş oluruz. (Tartar, 2007)

4.7.3. Teorem  $W^{m,p}(\Omega)$  Sobolev Uzayında  $p = 2$  ve  $m \geq 0$  için  $W^{m,2}(\Omega)$ ,  $\mathcal{H}^m(\Omega)$  ile gösterilir ve

$$((u, v)) = \int_{\Omega} \left( \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u \cdot \overline{D^\alpha v} \right) dx$$

için bir Hilbert uzayıdır. (Tartar, 2007)

4.7.4. Teorem  $C_c^\infty$  uzayı  $W_p^k(\mathbb{R}^n)$  uzayında yoğundur.  $\Omega$ ,  $\mathbb{R}^n$  nin açık bir alt kümesi ise  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  uzayı  $\bar{W}_p^k(\mathbb{R}^n)$  uzayında yoğundur. Ayrıca  $\Omega$  düzgün bir bölge ise  $C^\infty(\bar{\Omega})$  uzayı  $W_p^k(\Omega)$  uzayında yoğundur.

4.7.5. Teorem  $(W^{m,p}(\Omega))$  nin Duali)  $1 \leq p < \infty$  olsun. Her  $L \in (W^{m,p}(\Omega))'$  için  $v \in L^{p'}(\Omega^{(m)})$  elemanları vardır. Böylece  $v$  nin  $\Omega_\alpha$  ya olan kısıtlaması  $v_\alpha$  ise tüm  $u \in W^{m,p}(\Omega)$  için

$$L(u) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, v_\alpha \rangle \quad (4.7.3)$$

olur. Böylece

$$\|L; (W^{m,p}(\Omega))'\| = \inf \|v; L^{p'}(\Omega^{(m)})\| = \min \|v; L^{p'}(\Omega^{(m)})\| \quad (4.7.4)$$

her  $u \in W^{m,p}(\Omega)$  için (4.7.4) ün geçerli olduğu tüm  $v \in L^{p'}(\Omega^{(m)})$  kümesi üzerinde alınan ve ulaşılan infimumdur. Eğer  $1 < p < \infty$  ise (4.7.3) ve (4.7.4) ü sağlayan  $v \in L^{p'}(\Omega^{(m)})$  elemanı benzersizdir. (Adams ve Fournier, 2003)

4.7.6 Teorem  $\mathbb{R}^m$  de düzgün, sınırlı ve açık bir bölge  $\Omega$  olsun.  $t^*$ ,  $t$  nin Sobolev eşleniği ve  $t < m$  olsun. Yani

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^*}$$

kabul edelim.  $k \in W_t^1(\mathbb{R}^m)$  olduğunda  $k \in L^{t^*}(\mathbb{R}^m)$  olur. Yani

$$\|k\|_{L^{t^*}(\mathbb{R}^m)} \leq C \|\nabla k\|_{L_t(\mathbb{R}^m)}$$

eşitsizliğini gerçekleştirecek  $C = C(t, m)$  vardır. Öte yandan  $k \in W_t^1(\Omega)$  ve  $1 \leq s \leq t^*$  alınırsa  $k \in L^s(\Omega)$  olur. Yani

$$\|t\|_{L^s(\Omega)} \leq C \|\nabla_t\|_{W_t^1(\Omega)}$$

eşitsizliğini gerçekleştirecek  $C \in \mathcal{C}(t, m, \Omega)$  vardır.

4.7.8. Tanım  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  açık bir küme ve  $\ell \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq \infty$  olsun. Eğer  $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ ,  $\Omega$  üzerinde  $|\alpha| = \ell$  ve

$$\|f\|_{W_p^\ell(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=\ell} \|D_w^\alpha f\|_{L_p(\Omega)} < \infty$$

sağlayan tüm  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  için  $D_w^\alpha f$  zayıf türevlerine sahipse  $f$  fonksiyonu  $W_1^p(\Omega)$  yarı-normlu Sobolev Uzayına aittir. (Burenkov, 1998)

4.7.7. Teorem (Sobolev Uzayları için Minkowski Eşitsizliği)  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  açık bir küme ve  $A \subseteq \mathbb{R}^m$  ölçülebilir bir küme olsun.  $\ell \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq \infty$  alalım. Ayrıca  $f$  nin  $\Omega \times A$  üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon olduğunu ve hemen hemen her yerde  $y \in A$  için  $f(\cdot, y) \in W_p^\ell(\Omega)$  olduğunu varsayalım. O halde

$$\left\| \int_A f(x, y) dy \right\|_{W_p^\ell(\Omega)} \leq \int_A \|f(x, y)\|_{W_p^\ell(\Omega)} dy$$

(norm  $\|f(x, y)\|_{W_p^\ell(\Omega)}$ ,  $x$  e göre hesaplanır). (Burenkov, 1998)

## 5. BAZI LİNEER OPERATÖRLER

Lineer operatörler, genellikle daha önceden çözülmüş problemlerden elde edilen çözümleri veya en uygun hale getirilmiş fonksiyonları tanımlamakta kullanılır. Bir matematiksel problemin teorik çözümünü inceleyebilmek için, bu çözümde yer alan operatörlerin sahip olduğu özellikleri bilmek önemlidir. Bu bağlamda, çalışmamızda lineer olmayan operatörler ayrıntılı olarak ele alınmayacak, bunun yerine lineer operatörlerle ilgili bazı temel kavramlar ve sonuçlar üzerinde durulacaktır.

5.1. Tanım  $D$  doğrusal uzayı  $R$  de bir alt küme olsun.  $D$  nin her  $x$  elemanına  $R$  nin her bir elemanını  $x' = A(x)$  atayan bir  $A$  fonksiyonuna  $R$  uzayında bir operatör denir. Burada  $D$ ,  $A$  fonksiyonunun (operatörünün) tanım kümesidir. Bunu göstermek içinde  $D_A$  yazarız. Karışıklığa mahal olmayacak durumlarda  $A(x)$  yerine  $Ax$  yazacağız.

Tüm  $Ax$ ,  $x \in D_A$  vektörlerinin kümesine  $A$  operatörünün değer kümesi denir ve  $R(A)$  veya  $R_A$  ile gösterilir. Yani

$$R(A) = \{y | y \in Ax, x \in D_A\}.$$

5.2. Tanım  $D_A$  bir alt uzay olsun. Keyfi  $x, y \in D_A$  vektörleri ve herhangi bir  $\lambda$  sayısı için

$$\begin{aligned} A(\lambda x) &= \lambda A(x) \\ A(x + y) &= A(x) + A(y) \end{aligned}$$

bağıntıları geçerli ise bir  $A$  operatörünün lineer olduğu söylenir.

5.3. Tanım  $\mathbb{R}$  uzayında  $A$  ve  $B$  operatörleri ancak ve ancak aynı tanım kümeleri  $D$  üzerinde tanımlanmışlarsa tüm  $x \in D$  için  $A(x) = B(x)$  ise eşit kabul edilir.

5.4. Tanım  $D_A \subset D_B$  operatörleri  $D_B$  de eşitse  $A$  operatörüne  $B$  operatörünün uzantısı denir. Yani tüm  $x \in D_B$  için  $A(x) = B(x)$  ise  $A \subset B$  veya  $B \subset A$  yazarız. Böyle bir durumda  $B$  operatörüne  $A$  operatörünün  $D_B$  ye kısıtlaması denir. (Naimark, 1967)

5.5. Tanım  $A: D \rightarrow R$  bir operatör  $b \in R$  olmak üzere  $\forall x \in D$  için  $Ax = b$  ise  $A$  operatörüne sabit operatör denir.

5.6. Tanım  $A: D \rightarrow R$  bir operatör olsun. Eğer  $Ax = R$  ise  $A$  ya örten operatör, aksi takdirde içine operatör denir.

5.7. Tanım  $A: D \rightarrow R$  bir operatör olsun.  $\forall x_1, x_2 \in D$  için

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow Ax_1 \neq Ax_2$$

ise  $A$  operatörüne bire-bir operatör denir.

5.8. Tanım  $D$  ve  $R$  normlu uzaylar olmak üzere  $A: D \rightarrow R$  bir operatör olsun.  $\forall \varepsilon > 0$  ve  $\forall x \in B(x_0, \xi) \subset D_A$  için  $\|x - x_0\| < \xi$  olduğunda  $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $\xi(\varepsilon) > 0$  sayısı varsa  $A$  ya sürekli operatör denir.

5.9. Tanım  $X$  ve  $Y$  normlu uzaylar olmak üzere  $A: D_A \subset X \rightarrow R_A \subset Y$  operatörü alınsın.  $A$  operatörü  $D_A$  daki her sınırlı alt kümeyi  $R_A$  nın sınırlı bir alt kümesine eşliyorsa  $A$  ya sınırlı operatör denir.

5.10. Tanım  $A: D \rightarrow R$  tanımlı bir lineer operatör olsun.  $\forall x \in D_A$  için

$$\|Ax\| \leq T\|x\| \tag{5.1}$$

sağlayacak şekilde  $T$  pozitif sayısı varsa  $A$  operatörüne  $D_A$  da sınırlı lineer operatör denir.  $A: D \subset X \rightarrow R$  sınırlı lineer operatör ve  $\forall x \in D_A$  için (5.1) eşitsizliğini sağlayan en küçük  $T$  pozitif sayısına  $A$  operatörünün normu denir ve

$$\|A\| = \sup \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \mid x \neq 0, x \in D_A \right\}$$

şeklinde ifade edilir.

5.11. Tanım  $A: D_A \subset X \rightarrow R_A \subset Y$  operatörü birebir ve lineer olsun.  $A^{-1}$  operatörüne  $A$  nın ters operatörü denir ve

$$A^{-1}: R_A \rightarrow D_A, Ax = y \Leftrightarrow A^{-1}y = x$$

şeklinde gösterilir.

5.12. Tanım  $A: D_A \subset X \rightarrow Y$  operatörü lineer olsun.

$$\text{Çek}A = \{x \in D_A: Ax = \theta\}$$

kümesine  $A$  operatörünün çekirdeği denir.

5.13. Tanım  $A: D_A \subset X \subset Y$  operatöründe  $Y = \mathbb{C}$  veya  $Y = \mathbb{R}$  alınırsa  $A$  operatörüne fonksiyonel operatör denir. Burada  $A$  operatörümüz lineer ise  $A$  operatörüne Lineer Fonksiyonel Operatör denir.

## 5.1. Kompakt Operatörler ve Kompakt Gömülmeler

5.1.1. Tanım  $X$  ve  $Y$  normlu uzaylar olsunlar.  $T \in L(X, Y)$  lineer dönüşümü  $X$  teki herhangi bir  $\{a_n\}$  sınırlı dizisi için  $Y$  de ki kompakt dönüşümler kümesi  $K(X, Y)$  ile gösterilecektir. (Rynne ve Youngson, 2008)

5.1.1. Teorem  $X, Y$  normlu uzaylar ve  $T \in K(X, Y)$  olsun. Bu durumda  $T$  sınırlıdır. Dolayısıyla  $K(X, Y) \subset B(X, Y)$  olur.

*İspat*  $T$  nin sınırlı olmadığını varsayalım. O zaman her  $n \geq 1$  tamsayısı için  $\|Tx_n\| \geq n$  olacak şekilde bir  $x_n$  birim vektörü vardır.  $\{x_n\}$  dizisi sınırlı olduğundan  $T$  nin kompaktlığıyla yakınsayan bir  $\{Tx_{n(r)}\}$  alt dizisi vardır. Ancak bu  $\{Tx_{n(r)}\} \geq n(r)$  ile çelişir. Bu yüzden  $T$  sınırlı olmamalıdır. (Rynne ve Youngson, 2008)

5.1.2 Teorem  $X, Y, Z$  normlu uzaylar olsun.

1. Eğer  $S, T \in K(X, Y)$  ve  $\alpha_1 \beta \in \mathcal{C}$  ise o zaman  $\alpha S + \beta T$  kompaktır. Dolayısıyla  $K(X, Y)$ ,  $B(X, Y)$  nin lineer bir alt uzayıdır.
2. Eğer  $S \in B(X, Y)$  ,  $T \in B(Y, Z)$  ve  $S, T$  operatörlerinden en az biri kompakt ise  $TS \in B(X, Z)$  kompaktır.

*İspat*

1.  $\{x_n\}$ ,  $X$  te sınırlı bir dizi olsun.  $S$  kompakt olduğundan  $\{Sx_{n(r)}\}$  nin yakınsadığı bir  $\{x_{n(r)}\}$  alt dizisi vardır. Sonra  $\{x_{n(r)}\}$  sınırlı ve  $T$  kompakt olduğundan  $\{x_{n(r)}\}$  dizisinin  $\{x_{n(r(s))}\}$  şeklinde öyle bir alt dizisi vardır ki  $\{Tx_{n(r(s))}\}$  yakınsaktır. Buradan  $\{\alpha Sx_{n(r(s))} + \beta Tx_{n(r(s))}\}$  dizisinin yakınsadığı sonucu çıkar. Böylece  $\alpha S + \beta T$  kompaktır.
2.  $\{x_n\}$ ,  $X$  te sınırlı bir dizi olsun. Eğer  $S$  kompakt ise  $\{x_{n(r)}\}$  nin öyle bir  $\{Sx_{n(r)}\}$  alt dizisi vardır ki bu alt dizi yakınsaktır.  $T$  sınırlı olduğundan (ve dolayısıyla sürekli olduğundan),  $\{TSx_{n(r)}\}$  dizisi yakınsaktır. Dolayısıyla  $TS$  kompaktır. Eğer  $S$  sınırlı ancak kompakt değilse  $\{Sx_n\}$  dizisi sınırlıdır. O zaman  $T$  kompakt olmak zorunda olduğundan  $\{TSx_{n(r)}\}$  dizisinin yakınsadığı bir  $\{Sx_{n(r)}\}$  alt dizisi vardır ve  $TS$  kompaktır. (Rynne ve Youngson, 2008)

5.1.2. Tanım  $E$  ve  $G$  Banach uzayları  $K: E \rightarrow G$  operatörü ile birebir ve cebirsel işlemleri sağlıyorsa  $E, G$  ye gömülmüştür denir.  $K$  operatörüne burada Gömülme Operatörü denir.  $K(E)$  ile  $E$  aynı uzaylar olarak değerlendirilirler. Gösterim olarak  $E \subset G$  kullanılır. (Kreyszig, 1989)

5.1.3. Tanım  $K: E \rightarrow G$  bir gömülme operatörü olmak üzere

1.  $K$ , kompakt ise  $E \subset G$  gömülmesine Kompakt Gömülme denir.
2.  $K$  sürekli ise  $E \subset G$  gömülmesine Sürekli Gömülme denir.
3.  $K(E)$  görüntü kümesi  $G$  nin bütün bölgesinde yoğun ise  $E \subset G$  gömülmesine Her yerde yoğundur denir. (Triebel, 1978)

## 5.2. Fredholm Operatörü

5.2.1. Tanım  $G$  ve  $H$  birer Banach Uzayı olsunlar.  $D_A \subset G$  olacak şekilde  $A: G \rightarrow H$  operatörünü ele alalım.

$$Av = 0$$

homojen denkleminin çözümlerinin kümesine  $A$  operatörünün çekirdeği denir ve  $KerA$  ile gösterilir. Yani

$$kerA = \{v | v \in D_A, Av = 0\}.$$

5.2.2. Tanım  $G$  ve  $H$  birer Banach Uzayı,  $A: G \rightarrow H$  şeklinde tanımlı bir operatör ve  $H^*$  ise  $H$  uzayının eşlenik uzayı olsun.  $D_A \subset G$  olmak üzere  $A$  operatörünün görüntü kümesi  $R_A$  üzerinde  $H^*$  uzayından 0 a eşit olan fonksiyonlar ailesine  $A$  operatörünün Cokernel i denir ve  $cokerA$  şeklinde gösterilir. Yani

$$cokerA = \{u^* | u^* \in H^* \text{ ve } \forall u \in D_A \text{ için } u^*(Tu) = 0\}.$$

5.2.3 Tanım  $G$  ve  $H$  birer Banach Uzayı ve  $A: G \rightarrow H$  tanımlı bir lineer operatör olsun. Eğer  $A$  operatörü aşağıdaki koşulları sağlarsa Fredholm Operatörü olarak adlandırılır.

1.  $R_A$  görüntü kümesi  $H$  içinde kapalıdır.
2.  $kerA$  ve  $cokerA$  kümeleri sırasıyla  $G$  ve  $H^*$  içinde sonlu boyutlu alt uzaylardır
3.  $dimkerA = dimcokerA$

## 5.3. İntegral Operatörü

5.3.1. Tanım Bir integral operatörü olan  $A: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$  yı

$$y = Ax$$

burada

$$y(t) = \int_0^1 k(t, \tau) x(\tau) d\tau$$

şeklinde tanımlarız. Burada  $k$ ,  $A$  nın çekirdeği olarak adlandırılan ve  $t\tau$  düzleminde  $J = [0,1]$  olmak üzere kapalı kare  $G = J \times J$  üzerinde sürekli olduğu varsayılan bir fonksiyondur. Bu operatör lineerdir.  $A$  operatörü sınırlıdır.

5.3.2. Tanım  $h(x)$  sürekli fonksiyonu için

$$A^{-1}(h(x)) = \int_a^b k(x, \tau) h(\tau) d\tau$$

şeklinde tanımlanan  $A^{-1}$  operatörüne çekirdeği  $k(x, \tau)$  green fonksiyonu olan bir İntegral Operatörü denir.

## 5.4. Rezolvent Operatörü

5.4.1 Tanım  $H$  bir Banach Uzayı ve  $A: D_A \subset H \rightarrow R_A \subset H$  lineer operatör olsun.

$$Ah - \delta h = k, \quad \forall h \in D_A, \quad k \in H$$

homojen olmayan denklemini ele alalım. Buradan çözüm yapılırsa

$$(A - \delta I)h = k, \quad h \in D_A, \quad k \in H$$

$$h = (A - \delta I)^{-1} \cdot k$$

$$h = R_\delta(A) \cdot k$$

bulunur. Burada  $R_\delta(A)$  Rezolvent Operatörü olarak adlandırılır.

5.4.2. Tanım Diferansiyel operatörlerin rezolvent operatörleri aynı zamanda integral operatörleridir. Bu operatörlerin çekirdekleri Green Fonksiyonu olarak adlandırılır.

## 5.5. Pozitif Operatörler

5.5.1. Tanım  $\mathcal{H}$  hilbert uzayı ve  $A, H$  uzayından  $D_A \subset \mathcal{H}$  olan bir operatör olsun.  $\forall u, v \in \mathcal{H}$  bu uzayda  $\langle u, v \rangle$  skaler çarpımı verilsin. Eğer burada  $\forall u \in D_A$  için

$$\langle Au, u \rangle \geq 0$$

koşulu sağlanıyorsa  $A$  operatörüne Pozitif Operatör adı verilir.

5.5.1. Örnek  $\mathcal{H}$  karmaşık bir Hilbert Uzayı,  $R, S \in B(\mathcal{H})$  pozitif  $T \in B(\mathcal{H})$  ve  $\alpha$  pozitif bir reel sayı olsun

1.  $0$  ve  $I$  (birim operatör) pozitif operatörlerdir.
2.  $T^*T$  pozitifdir.
3.  $R + S$  ve  $\alpha S$  pozitifdir.

*Çözüm*

1. Birim operatör  $I$  kendi kendine eşleniktir. Biz  $0$  ın kendi kendine eşlenik olduğunu gösterelim. Eğer  $x \in \mathcal{H}$  ise

$$(Ix, x) = (x, x) \geq 0 \text{ ve } (0x, x) = (0, x) = 0.$$

Dolayısıyla  $0$  ve  $I$  pozitifdir.

2.  $T^*T$  kendi kendine eşleniktir. Eğer  $x \in \mathcal{H}$  ise

$$(T^*Tx, x) = (Tx, Tx) \geq 0$$

dır. Dolayısıyla  $T^*T$  pozitifdir.

3.  $R + S$  ve  $\alpha S$  kendi kendine eşleniktir. Eğer  $x \in \mathcal{H}$  ise

$$((R + S)x, x) = (Rx, x) + (Sx, x) \geq 0$$

ve

$$((\alpha S)x, x) = \alpha(Sx, x) \geq 0$$

dır. Dolayısıyla  $R + S$  ve  $\alpha S$  pozitifdir.

## 5.6. İzomorfizma

5.6.1. Tanım  $G$  ve  $H$  normlu lineer uzay olsun. Eğer  $A \in B(G, H)$  tersinir bir operatörü varsa o zaman  $G$  ve  $H$  izomorfiktir ve  $A$  bir İzomorfizmadır. ( $G$  ve  $H$  arasında)  $A \in B(G, H)$  bir izomorfizma ise  $A^{-1} \in B(H, G)$  de bir izomorfizmadır. (Rynne ve Youngson, 2008)

5.6.1. Örnek Herhangi bir  $h \in C[0,1]$  için  $T_h \in B(L^2[0,1])$  in

$$(T_h u)(t) = h(t) \cdot u(t), \quad u \in L^2[0,1]$$

ile tanımlandığını varsayalım. Eğer  $f \in C[0,1]$ ,  $f(t) = 1 + t$  ile tanımlanıyorsa  $T_f$  tersinirdir.

Çözüm Herhangi bir  $h \in C[0,1]$  için  $T_h$  sınırlıdır.  $g(t) = 1 + t$  alalım. O zaman  $g \in C[0,1]$  ve  $\forall t \in [0,1]$  için

$$(T_g T_f u)(t) = (T_g(fu))(t) = g(t)f(t)u(t) = u(t)$$

dir. Dolayısıyla  $\forall u \in L^2[0,1]$  için  $(T_g T_f)u = u$  olur. Buradan  $T_g T_f = I$  olur. Benzer şekilde  $T_f T_g = I$  olur. Dolayısıyla  $T_f, T_f^{-1} = T_g$  ile tersinirdir. (Rynne ve Youngson, 2008)

5.6.1. Teorem  $G$  bir Banach Uzayı olsun. Eğer  $A \in B(G)$ ,  $\|A\| < 1$  olan bir operatör ise  $I - A$  nın tersi vardır ve

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

şeklinde gösterilir.



## 6. SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Sınır değer problemleri, diferansiyel denklemlerde bir sistemin uç noktalarında belirli koşullara uyan çözümü bulmak için kullanılır. Genellikle uzayda dağılan, statik, ya da durağan sistemler için kullanılır. Fizik, mühendislik ve uygulamalı matematikte yaygın bir yer tutar. Bunların yanında ekonomide dinamik sistemlerde uzun vadeli davranış analizi yapmada da kullanılır. Bu bölümde diferansiyel denklem ve sınır değer problemleri hakkında bilgi verilecektir.

Bu bölümdeki içerikler Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR'in (Diferansiyel Denklemler, Pegem Akademi Yayıncılık, Ankara, 2021) kitabından alınarak oluşturulmuştur.

### 6.1. Diferansiyel Denklemler

6.1.1. Tanım  $\mathbb{R}$  veya  $\mathbb{C}$  kümesini  $\mathbb{F}$  ile belirtelim.  $\mathbb{F}^m$  üzerindeki norm Euclid normu olsun ve

$$f: D \subseteq \mathbb{R} \times (\mathbb{F}^m)^{n+1} \rightarrow \mathbb{F}^m, m \geq 1, n \geq 1 (m, n \in \mathbb{N})$$

fonksiyonu aracılığıyla belirtilen

$$f(x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad (6.1.1)$$

denklemine adi diferansiyel denklem denir. Buradan adi diferansiyel denklem bir bağımlı değişken, bir bağımsız değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevlerini içeren bir denklemdir.

$$y: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{F}^m$$

biçiminde tanımlanan  $y(x)$  fonksiyonu  $n$ -yinci mertebeden türevlere sahip olmak şartıyla (6.1.1) denklemini gerçeklerse bu fonksiyon denklemin çözümü olarak adlandırılır. Ancak (6.1.1) denkleminden  $y^{(n)}$  açık olarak çözülebiliyorsa bu denklem

$$y^{(n)}(x) = \varphi(x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad (6.1.2)$$

şeklinde ifade edilebilir. (6.1.2) de geçen  $\varphi$

$$\varphi: \Omega \subseteq \mathbb{R} \times (\mathbb{F}^m)^n \rightarrow \mathbb{F}^m \quad (6.1.3)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon süreklidir.  $m > 1$  alınması durumunda  $y(x) \in \mathbb{P}^m$  fonksiyonu vektör değerlidir. Aynı zamanda  $y$  ve türevlerinin  $1 \times m$  tipinde bir vektör ifade ettiği anlaşılmaktadır. Bu durumda  $m > 1$  için (6.1.2) denklemi bir diferansiyel denklem sistemini göstermektedir. (6.1.1) denklemi,

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

veya

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x), a_n \neq 0$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada  $a_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$  katsayılarının sabit veya  $x$  in fonksiyonu olup olmasına göre bu denklem sabit katsayılı veya değişken katsayılı diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Yine bu denkleme,  $f(x) = 0$  ise homojen (ikinci tarafsız),  $f(x) \neq 0$  ise homojen olmayan (ikinci taraflı) diferansiyel denklem adı verilir. Dikkat edilirse homojen sabit katsayılı denklem sadece bağımlı değişken ve türevlerini bulunduran bir denklemdir.

6.1.2. Tanım  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon ve  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in D$  olsun.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_k + h, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{h}$$

limiti varsa bu limite  $f$  fonksiyonunun  $x_k$  değişkenine göre  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  noktasındaki kısmi türevi denir ve

$$\frac{\partial f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{\partial x_k} \text{ veya } f_{x_k}(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

şeklinde gösterilir.

6.1.3. Tanım En az iki bağımsız değişkenin etkisi altında tanımlanan bir veya daha fazla fonksiyonun, bu değişkenlere göre alınan kısmi türevlerini içeren diferansiyel denklemlere kısmi türevli diferansiyel denklemler denir.

6.1.4. Tanım  $\mathbb{R}$  veya  $\mathbb{C}$  kümesini  $\mathbb{F}$  ile gösterelim.  $\mathbb{F}^m$  üzerindeki norm Euclid normu olsun ve

$$f: \Omega \subseteq (\mathbb{F}^m)^{N^k} \times (\mathbb{F}^m)^{N^{k-1}} \times \dots \times (\mathbb{F}^m)^N \times \mathbb{F}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{F}^m \quad m \geq 1, n \geq 2, (m, n \in \mathbb{N})$$

fonksiyonu aracılığıyla oluşturulan

$$f(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0 \quad (6.1.4)$$

denklemini  $m$  tane bağımlı değişken ve  $n$  tane bağımsız değişken içeren  $k$ -yüncü mertebeden bir kısmi türevli diferansiyel denklemdir. Burada  $u(x)$  bilinmeyen fonksiyonu

$$u: K \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{F}^m, u(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x))$$

şeklinde tanımlı bir fonksiyon,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  ve  $k$  pozitif bir tam sayıdır.

(6.1.4) denklemindeki  $D^k u(x)$  ifadesi  $u(x)$  in  $k$  yüncü mertebeden bütün türevlerinin kümesini gösterir.

6.1.5. Tanım  $f: \Omega \subseteq (\mathbb{F})^{N^k} \times (\mathbb{F})^{N^{k-1}} \times \dots \times (\mathbb{F})^N \times \mathbb{F} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{F}, n \geq 2, (m, n \in \mathbb{N})$  fonksiyonu aracılığıyla yazılan

$$f(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0$$

denklemini bir tane bağımlı değişken ve  $n$  tane bağımsız değişken içeren  $k$ -yüncü mertebeden bir kısmi türevli diferansiyel denklemdir. Burada  $u(x)$  bilinmeyen fonksiyonu



sistemini dikkate alalım ve daha anlaşılır olarak bu sistemi

$$L_k(y) = 0, k = 1, 2, \dots, m \quad (6.2.4)$$

biçiminde ifade edebiliriz.

6.2.1. Tanım (6.2.3) veya (6.2.4) sistemine (6.2.1) denkleminin sınır şartları denir. Bu sistemdeki her bir denklem bir sınır şartı ve  $L_1, L_2, \dots, L_m$  lineer birleşimleri de sınır formları veya sınır değer ifadeleri olarak adlandırılır. (6.2.1) homojen denklemi ile bu denkleme ait (6.2.4) sınır şartları birlikte ele alındığında homojen sınır değer problemi aşağıdaki

$$\begin{cases} L(y) = 0 \\ L_k(y) = 0, k = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (6.2.5)$$

problemi biçiminde gösterilir.

6.2.2. Tanım  $f(x)$ ,  $[a, b]$  aralığında sürekli bir fonksiyon ve  $f_k$  sabit sayılar olmak üzere

$$\begin{cases} L(y) = f(x) \\ L_k(y) = f_k, k = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

sistemine homojen olmayan sınır değer problemi denir.

Diferansiyel denklem

$$y'' = f(x, y, y'), a \leq x \leq b$$

olmak üzere

$$y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

sınır şartlarına Dirichlet sınır şartlar,

$$y'(a) = \alpha, y'(b) = \beta$$

sınır şartlarına Neumann sınır şartları,

$$A_1 y(a) + A_2 y'(a) = \alpha, B_1 y(b) + B_2 y'(b) = \beta$$

sınır şartlarına karışık (mixed) sınır şartları,

$$y(a) = y(b), y'(a) = y'(b)$$

sınır şartlarına da periyodik sınır şartları adı verilir.

6.2.3. Tanım Homojen sınır değer probleminin daima bir  $y = 0$  çözümü vardır. Bu çözüme problemin aşıkâr çözümü denir. Problemin aşıkâr olmayan çözümleri ise problemin sıfırdan farklı olan çözümleridir

(6.2.2) genel çözümü (6.2.3) sınır şartlarında yerine yazılırsa,  $c_1, c_2, \dots, c_n$  elde edilmesi gereken sabitler olmak üzere  $m$ -tane denklemden oluşan

$$\begin{aligned} c_1 L_1(y_1) + c_2 L_1(y_2) + \dots + c_n L_1(y_n) &= 0 \\ c_1 L_2(y_1) + c_2 L_2(y_2) + \dots + c_n L_2(y_n) &= 0 \\ &\vdots \\ c_1 L_m(y_1) + c_2 L_m(y_2) + \dots + c_n L_m(y_n) &= 0 \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

homojen denklem sistemi ortaya çıkar. (6.2.6) sisteminin katsayılar matrisinin

$$\Delta = \begin{pmatrix} L_1(y_1) & L_1(y_2) & \dots & L_1(y_n) \\ L_2(y_1) & L_2(y_2) & \dots & L_2(y_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ L_m(y_1) & L_m(y_2) & \dots & L_m(y_n) \end{pmatrix} \quad (6.2.7)$$

olduğu tespit edilmektedir.

6.2.4. Tanım  $\mathcal{L}y = (L(y), L_1(y), L_2(y), \dots, L_m(y)) = u$  biçiminde gösterilen  $\mathcal{L}$  operatörüne,  $L(y)$  diferansiyel ifadesi ve (6.2.4) sınır şartları tarafından üretilen diferansiyel operatör denir. Dolayısıyla (6.2.5) sınır değer problemi ile  $\mathcal{L}$  diferansiyel operatörü eşdeğer olup

$$\mathcal{L}y = 0$$

biçiminde gösterilebilir

O halde bir diferansiyel ifade farklı sınır şartları ile farklı diferansiyel operatör üretir.  $L(y)$  diferansiyel ifadesinin ürettiği en geniş lineer diferansiyel operatör sınır şartlarının olmadığı durumdur. O halde bu operatör  $\mathcal{L}_1$  ile gösterilen ve

$$\mathcal{L}_1: C^{(n)}[a, b] \rightarrow C^{(n)}[a, b], D(\mathcal{L}_1) = C^{(n)}[a, b], \mathcal{L}_1 y = L(y)$$

biçiminde gösterilen operatördür.  $L(y)$  diferansiyel ifadesinin ürettiği en dar lineer diferansiyel operatör sınır ifadelerinin tümünün sıfır olduğu yani

$$y(a) = y'(a) = \dots = y^{(n-1)}(a) = y(b) = y'(b) = \dots = y^{(n-1)}(b) = 0$$

durumunda ürettiği operatördür. O halde bahsi geçen operatör de  $\mathcal{L}_0$  ile ifade edilen ve

$$\mathcal{L}_0: C^{(n)}[a, b] \rightarrow C^{(n)}[a, b] + \mathbb{C}^m$$

$D(\mathcal{L}_0) = \{y \in C^{(n)}[a, b] \mid y(a) = y'(a) = \dots = y^{(n-1)}(a) = y(b) = y'(b) = \dots = y^{(n-1)}(b) = 0\}$  biçiminde tanımlanan bir operatördür. Buna göre (6.2.5) sınır değer probleminin ürettiği diğer tüm diferansiyel operatörler  $\mathcal{L}_0$  ve  $\mathcal{L}_1$  operatörleri arasındadır yani

$$\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{L}_1$$

olmaktadır.

6.2.1. Örnek  $y'' + 2y' - 3y = 0$ ,

$$L_1(y) = y(0) = 0$$

$$L_2(y) = y'(1) = 0$$

sınır değer probleminin çözümünü elde etmeye çalışalım (6.2.1) denkleminin lineer bağımsız çözümleri

$$y_1 = e^{-3x} \text{ ve } y_2 = e^x$$

olduğundan genel çözümü

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{-3x} + c_2 e^x$$

ve türevi

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2' = -3c_1 e^{-3x} + c_2 e^x$$

şeklinde bulunur. (6.2.3) ve (6.2.4) fonksiyonlarını sınır şartlarında yerine yazarsak

$$\begin{aligned} L_1(y) = y(0) &= 0 \\ c_1 L_2(y_1) + c_2 L_2(y_2) &= 0 \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ -3c_1 e^{-3} + c_2 e &= 0 \end{aligned}$$

olacağından  $c_1$  ve  $c_2$  sabitlerine göre

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3e^{-3} & e \end{vmatrix} = e + 3e^{-3} \neq 0$$

olduğu için (6.2.1)-(6.2.2) sınır değer probleminin yalnız aşıkâr çözümü ( $y = 0$ ) vardır.

### 6.3. Özdeğer Parametrelî Sınır Değer Problemleri

$$L(y) = a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y$$

ve kompleks veya reel değerli bir  $\lambda$  parametresi alınmak koşuluyla

$$L(y) = \lambda y \quad (6.3.1)$$

$$U_k(y) = 0, k = 1, 2, \dots, m \quad (6.3.2)$$

sınır değer problemini dikkate alalım. Bu sınır değer probleminin ürettiği  $\mathcal{L}$  diferansiyel operatörüne göre (6.3.1)-(6.3.2) problemi

$$\mathcal{L}y = \lambda y \text{ veya } (\mathcal{L} - \lambda I)y = 0$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada  $(\mathcal{L} - \lambda I)y = 0$  denkleminin sıfırdan farklı bir çözümünün olmasını sağlayan  $\lambda$  sayısına  $\mathcal{L}$  operatörünün özdeğeri denir.

6.3.1. Tanım  $\mathcal{L}$ , (6.3.1)-(6.3.2) sınır değer probleminin ürettiği diferansiyel operatör olsun.  $\mathcal{L}$  operatörün özdeğerine problemin özdeğeri ve bu özdeğere karşılık gelen sıfırdan farklı  $y(y \neq 0)$  fonksiyonlarına da bu problemin özfonksiyonları denir.

6.3.2. Tanım (6.3.1)-(6.3.2) şeklinde verilen bir sınır değer problemine diferansiyel denkleminde özdeğer parametresi bulunan özdeğer parametrelili homojen sınır değer problemi adı verilir.

6.3.1. Teorem  $\lambda$  özdeğerine karşılık gelen  $y_1$  ve  $y_2$  özfonksiyonlarının lineer birleşimi de bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon olur.

*İspat*  $y_1$  ve  $y_2$  özfonksiyon ise

$$\mathcal{L}(y_1) = \lambda y_1 \text{ ve } \mathcal{L}(y_2) = \lambda y_2$$

olduğundan  $c_1$  ve  $c_2$  herhangi skaler olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(c_1 y_1 + c_2 y_2) &= \mathcal{L}(c_1 y_1) + \mathcal{L}(c_2 y_2) \\ &= c_1 \mathcal{L}(y_1) + c_2 \mathcal{L}(y_2) \\ &= c_1 \lambda y_1 + c_2 \lambda y_2 \\ &= \lambda (c_1 y_1 + c_2 y_2) \end{aligned}$$

olur. Buradan  $c_1y_1 + c_2y_2$  nin özfonksiyon olduğunu tespit edilir. Aşağıda verilen durumları inceleyerek özdeğerlerin tespitini yapalım.

A)  $m \neq n$  olsun.

(6.3.1) denkleminin lineer bağımsız çözümleri

$$y_1(x, \lambda), y_2(x, \lambda), \dots, y_n(x, \lambda) \quad (6.3.3)$$

olsun, Bu çözümler sistemi, (6.4.1) denkleminin çözümlerinin temel sistemi şeklinde de adlandırılır, (6.3.3) çözümleri  $\lambda$  parametresine göre analitik fonksiyonlardır. Buna göre (6.3.1) denkleminin genel çözümü

$$y(x, \lambda) = c_1y_1(x, \lambda) + c_2y_2(x, \lambda) + \dots + c_ny_n(x, \lambda) \quad (6.3.4)$$

biçimindedir. (6.3.4) genel çözümü (6.3.2) sınır şartlarında yazılırsa

$$\begin{aligned} L_1(y(x, \lambda)) &= c_1L_1(y_1(x, \lambda)) + c_2L_1(y_2(x, \lambda)) + \dots + c_nL_1(y_n(x, \lambda)) = 0 \\ L_2(y(x, \lambda)) &= c_1L_2(y_1(x, \lambda)) + c_2L_2(y_2(x, \lambda)) + \dots + c_nL_2(y_n(x, \lambda)) = 0 \end{aligned}$$

sistemini bulunmuş olur.  $c_i (i = 1, 2, \dots, n)$  bilinmeyenlerine göre bu sistemin katsayılar matrisi

$$\Delta(\lambda) = \begin{pmatrix} L_1(y_1(x, \lambda)) & L_1(y_2(x, \lambda)) & \dots & L_1(y_n(x, \lambda)) \\ L_2(y_1(x, \lambda)) & L_2(y_2(x, \lambda)) & \dots & L_2(y_n(x, \lambda)) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ L_m(y_1(x, \lambda)) & L_m(y_2(x, \lambda)) & \dots & L_m(y_n(x, \lambda)) \end{pmatrix} \quad (6.3.5)$$

şeklindedir.  $\text{rank}\Delta(\lambda) = r$  olmak üzere:

a) (6.3.1)-(6.3.2) sınır değer probleminin sıfırdan farklı çözümünün olması için gerek ve yeter şart  $r < n$  olmasıdır.

b)  $m < n$  alındığında  $r < n$  gerçekleşeceğinden (6.3.1)-(6.3.2) sınır değer problemi  $\lambda$  nın rastgele bir değeri için bir aşık olmaya çözüm içerir. Buna göre  $m < n$  olması halinde

$\lambda$  nın tüm değerleri bir özdeğerdir.

c)  $m \geq n$  alındığında  $r < n$  eşitsizliğinin gerçekleşmesi için gerek ve yeter şart  $\Delta(\lambda)$  matrisinin tüm  $n$ -yinci mertebeden minörlerinin sıfır olmasıdır. Bu durumda:

i.  $\Delta(\lambda)$  matrisinin bütün  $n$ -yinci mertebeden minörleri özdeş olarak sıfır ise  $r < n$  olacağından  $\lambda$  nın her bir değeri bir özdeğerdir.

ii.  $\Delta(\lambda)$  matrisinin en az bir  $n$ -yinci mertebeden minörü sıfırdan farklı ise  $n$  yinci mertebeden minörlerini sıfır yapan bütün  $\lambda$  değerleri bir özdeğerdir.

B)  $m = n$  olsun.

O halde (6.3.1)-(6.3.2) sınır değer problemi

$$L(y) = \lambda y \quad (6.3.6)$$

$$L_k(y) = 0, k = 1, 2, \dots, n \quad (6.3.7)$$

şeklinde olup (6.4.5) matrisi de

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} L_1(y_1(x, \lambda)) & L_1(y_2(x, \lambda)) & \cdots & L_1(y_n(x, \lambda)) \\ L_2(y_1(x, \lambda)) & L_2(y_2(x, \lambda)) & \cdots & L_2(y_n(x, \lambda)) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ L_n(y_1(x, \lambda)) & L_n(y_2(x, \lambda)) & \cdots & L_n(y_n(x, \lambda)) \end{pmatrix} \quad (6.3.8)$$

biçimindedir.

6.3.3. Tanım  $\mathcal{L}$  , (6.3.6)-(6.3.7) sınır değer probleminin ürettiği diferansiyel operatör olsun.

$$\Delta(\lambda) = \det(M(\lambda)) = \begin{vmatrix} L_1(y_1(x, \lambda)) & L_1(y_2(x, \lambda)) & \cdots & L_1(y_n(x, \lambda)) \\ L_2(y_1(x, \lambda)) & L_2(y_2(x, \lambda)) & \cdots & L_2(y_n(x, \lambda)) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ L_n(y_1(x, \lambda)) & L_n(y_2(x, \lambda)) & \cdots & L_n(y_n(x, \lambda)) \end{vmatrix}$$

determinantına  $\mathcal{L}$  operatörünün ( $\mathcal{L}y = 0$  sınır değer probleminin) karakteristik determinanı denir.  $\mathcal{L}$  operatörünün özdeğerleri  $\Delta(\lambda)$  determinantının sıfırlarıdır. Ayrıca  $\lambda$  özdeğeri  $\Delta(\lambda)$  nın katı bir sıfırı olması mümkündür.

#### 6.4. Sturm-Liouville Sınır Değer Problemleri

Bu kısımda Sturm-Liouville sınır değer problemi olarak bilinen ikinci mertebeden bir denkleme sahip bir özdeğer problemini göz önüne alacağız.

6.4.1. Tanım  $p(x), p'(x), q(x)$  ve  $r(x)$  fonksiyonları bir  $[a, b]$  reel aralığında sürekli,  $[a, b]$  aralığının her bir noktasında  $p(x) > 0, r(x) > 0$  ve  $\lambda, x$  değişeninden bağımsız bir parametre olmak üzere

$$(p(x)y')' + (q(x) + \lambda r(x))y = 0, a \leq x \leq b \quad (6.4.1)$$

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0,$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0, \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0 \quad (6.4.2)$$

biçiminde ifade edilen probleme regüler Sturm-Liouville sınır değer problemi denir. Sturm-Liouville diferansiyel denklemi söylendiğinde (6.4.1) denkleminin anlatılmak istendiği açıktır. Sınır şartlarında yer alan  $\alpha_1$  ve  $\alpha_2$  değerlerinden en az biri sıfıra eşit değildir ve  $\beta_1$  ve  $\beta_2$  değerlerinden en az biri sıfıra eşit değildir. Bu sebeple (6.4.2) sınır şartları  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$  ve  $\beta_2$  katsayılarının sıfır veya sıfıra eşit olmamasına göre farklı şekillerde yazılabilir. Bu durumda farklı sınır şartlarına göre değişik Sturm-Liouville sınır değer problemi elde edilmesi olasıdır.

#### 6.4.2. Tanım Eğer

$$y(a) = y(b) \text{ ve } y'(a) = y'(b)$$

ise (6.4.2) sınır şartlarına periyodik sınır şartları sebebiyle (6.4.1)-(6.4.2) problemi de periyodik Sturm-Liouville problemi olarak adlandırılır.

6.4.3. Tanım  $p(x)$ ,  $q(x)$  veya  $r(x)$  fonksiyonlarından birinin bir  $x = x_0$  noktasında singüler olması halinde (6.4.1) denkleminde bu noktada singüler Sturm-Liouville denklemi, (6.4.1)-(6.4.2) problemine de singüler Sturm-Liouville problemi denir. Dolayısıyla aşağıdaki koşullardan en az biri gerçekleşiyorsa (6.4.1)-(6.4.2) problemi bir singüler Sturm-Liouville problemidir.

1. Herhangi bir  $x \in [a, b]$  için  $p(x) = 0$  veya  $r(x) = 0$ .
2.  $p(x)$ ,  $q(x)$  veya  $r(x)$  katsayı fonksiyonlarından en az biri,  $a$  ve  $b$  noktalarının en az birinde  $\infty$ .
3.  $(a, b)$  aralığı sınırsız, yani  $(-\infty, b)$ ,  $(a, \infty)$  veya  $(-\infty, \infty)$ .

6.4.1. Teorem  $p_2, p_1, p_0$  ve  $r_0$  bir  $[a, b]$  aralığında sürekli,  $p_2 > 0$  ve  $r_0 > 0$  olmak üzere

$$p_2 y'' + p_1 y' + p_0 y + \lambda r_0 y = 0$$

denklemi

$$(p(x) \cdot y')' + (q(x) + \lambda r(x))y = 0$$

biçiminde ifade edilebilir.

## 7. GEÇİŞ KOŞULLU SÜREKSİZ STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİNİN KOERSİTİVLİĞİ VE İZOMORFİZMİ

Bu bölümde süreksiz Sturm-Liouville sınır değer problemini (SDP), Sobolev Uzaylarının direkt toplamında fonksiyonelleri ve geçiş koşulları olan iki aralık üzerinde incelemektedir. Ayrıca, bu bölümde araştırılan problem tarafından üretilen diferansiyel operatörü vereceğiz. Bu operatörün tanım uzayı, Sobolev Uzaylarının doğrudan toplamıdır ve operatörün değer uzayı, sınır koşullarının Sobolev Uzaylarının doğrudan toplamı hakkında değerlendirildiği karmaşık uzayların eklenmesiyle elde edilen uzaydır. Bu bölümde, problemin çözülebilirliğini ve operatörün izomorfizm, Fredholmness ve spektral parametrelerle ilgili zorlayıcılık gibi bazı önemli spektral özelliklerini belirlenecektir. Ek olarak, son kısımda farklı orijinal problemlerin nasıl üretilebileceğini tartışır.

### 7.1. Giriş

Sürekli olmayan diferansiyel operatör problemleri, fizikteki potansiyel uygulamaları nedeniyle son zamanlarda teorik araştırmacıların dikkatini çekmiştir. Örneğin, sürekli olmayan problemler ve ek iletim koşulları, katı mekaniği, manyetostatik ve elektrostatik dahil olmak üzere çeşitli disiplinlerde yaygın olarak görülmektedir (Tutex ve Yakubov, 1997; Kandemir ve Mukhtarov, 2020; Muhtarov ve Yakubov, 2002). Birçok araştırmacı, yerel olmayan Sturm-Liouville problemlerinin çözülebilirliğini ve belirli spektral özelliklerini araştırmıştır. (Kandemir ve Mukhtarov, 2017; Kandemir ve Yakubov, 2010; Mukhtarov, 1994; Mukhtarov ve Aydemir, 2015). Son yıllarda, fizik bilimleri ve uygulamalı matematikteki potansiyel uygulamaları nedeniyle, sıradan doğrusal diferansiyel denklemler için klasik sınır değer problemlerinin genelleştirilmesine olan ilgi artmıştır.

Fonksiyonel sınır değer problemi, genelleştirilmiş sınır değer problemlerinin önemli ve bir özel durumudur. Çok sayıda yazar bu sorunları ele almıştır. (Mukhtarov ve Yakubov, 2017; Kandemir ve Yakubov, 2010; Likov ve Mikhailov, 1963; Kandemir, Mukhtarov ve Yakubov, 2009). Klasik olmayan problemleri analiz ederken ortaya çıkan bazı sınır değer geçiş problemleri, klasik sınır değer problemlerini çözmek için kullanılan tipik yöntemler kullanılarak çözülemez. Sıradan diferansiyel denklemler için sınır değer problemleri, klasik teoride genellikle sürekli katsayılarla ve yalnızca ele alınan aralığın uç noktalarını içeren sınır

koşullarına sahip denklemler için incelenir. Ancak bu bölümdeki çalışma, yalnızca ele alınan aralığın uç noktalarını değil aynı zamanda bir süreksizlik noktasını ve lineer fonksiyonelleri de içeren süreksiz katsayılara ve sınır koşullarına sahip ikinci dereceden sıradan bir diferansiyel denklem için klasik olmayan bir sınır değer problemini ele almaktadır.

Yani  $[-1,0) \cup (0,1]$  aralığında tanımlanmış aşağıdaki şekilde verilen bir Sturm-Liouville kırımını ele alıyoruz.

$$L(\lambda)u = \tau(x)u''(x) + (\sigma(x) - \lambda^2)u(x) = f(x) \quad (7.1.1)$$

fonksiyonel sınır geçiş koşulları ise  $k \in \{1,2,3,4\}$  için

$$L_k u = a_k u^{(m_k)}(-1) + \beta_k u^{(m_k)}(-0) + \eta_k u^{(m_k)}(+0) + \delta_k u^{(m_k)}(1) + \mathcal{F}_k = f_k \quad (7.1.2)$$

Burada  $\tau(x), x \in [-1,0)$  için  $\tau(x) = \tau_1$  olacak şekilde parçalı sabit bir fonksiyondur. Burada  $\tau_1 \neq 0$  ve  $x \in (0,1]$  için  $\tau(x) = \tau_2$ ,  $\tau_2 \neq 0$  ve  $\lambda$  karmaşık parametre olmak üzere  $i \in \{1,2\}$  ve  $k \in \{1,2,3,4\}$  için  $\tau_i, \alpha_k, \beta_k, \delta_k, f_k$  kompleks sayılar ve  $f(x)$  kompleks değerli fonksiyondur.  $k \in \{1,2,3,4\}$ ,  $m_k$  negatif olmayan tamsayılar ve  $\sigma(x)$   $[-1,0) \cup (0,1]$  üzerinde integrallenebilir bir fonksiyondur. Biz  $|\alpha_k| + |\beta_k| + |\eta_k| + |\delta_k| \neq 0$  olduğunu ve  $f_k$  nın  $L_q(-1,1)$  uzayında lineer bir fonksiyonel olduğunu varsayalım. Tutex, Yakubov, Muhtarov, Alves, Rivera, Sepulveda ve Villagran değişkenlerin ayrılması yönteminin ısı ve kütle transferi problemlerini araştırdı (Tutex ve Yakubov, 1997; Muhtarov ve Yakubov, 2002; Mukhtarov, 1994; Alves, Rivera, Sepulveda ve Villagran, 2011). Agronovich kırımın problemlerini; Likov, Mikhailov, Kandemir, Mukhtarov, Yakubov, Alves, Rivera, Sepulveda, Villagran ve Stikonas titreşen sicim problemlerini (sicim ek olarak nokta kütleleriyle yüklendiğinde) araştırdı (Likov ve Mikhailov, 1963; Kandemir, Mukhtarov ve Yakubov, 2009; Alves, Rivera, Sepulveda ve Villagran, 2011; Agronovich, 1977; Stikonas, 2007). Yakubov ve Mukhtarov ele alınan sınır değer problemi (7.1.1)-(7.1.2)'nin bazı özel durumları gibi çeşitli fiziksel problemlere uygulanmasından sonra, mekanikte iletim koşullarıyla süreksizlik problemlerini araştırdı (Muhtarov ve Yakubov, 2002; Mukhtarov, 1994). Triebel, Yakubov ve Yakubov, Imanbaev ve Sadybekov, Shakhmurov, Aliyev ve Rasulov diferansiyel operatör denklemleri için bazı yerel olmayan sınır değer problemlerinin çeşitli spektral özelliklerini inceledi. (Triebel, 1978; Yakubov ve Yakubov, 1999; Imanbaev

ve Sadybekov, 2014; Shakhmurov, 2013; Aliyev, 2010; Rasulov, 1997). Kandemir, Yakubov, Aydemir, Mukhtarov, Saydbekov, Turmetov, Torebek ve Kadakal'ın yerel olmayan sınır koşullarıyla sınır değerlerine ilişkin bazı yeni sorunları araştırdığı belirtilmelidir. (Kandemir ve Yakubov, 2017; Aydemir, 2014; Aydemir ve Mukhtarov, 2015; Kadakal ve Mukhtarov, 2006; Kandemir, 2012; Saydbekov, Turmetov ve Torebek, 2014)

## 7.2. Ön Hazırlıklar

Bu bölümde, sonraki bölümlerde ihtiyaç duyulacak bazı özellikler sunulmaktadır.

7.2.1. Teorem  $T \in (X, Y)$  yarı Fredholm olsun. Eğer  $A$ ,  $X$  ten  $Y$  ye bir  $T$ -kompakt operatör ise, o zaman  $S = T + A \in (X, Y)$  aynı zamanda  $\text{ind} S = \text{ind} T$  ile yarı Fredholm'dür.

(Kato , 1966)

7.2.1. *Not* Sabit katsayılı ve tüm ekseninde ağırlığı 1 olan sıradan bir diferansiyel denklemi ele alalım.

$$L_0(\lambda)u := \lambda^m u(x) + \lambda^{m-1} u'(x) + \dots + a_m u^m(x) = f(x) \quad (7.2.1)$$

burada  $a_k$  karmaşık sayılardır. denklemin köklerini sıralarsak

$$a_m w^m + a_{m-1} w^{m-1} + \dots + 1 = 0 \quad (7.2.2)$$

$w_j, j \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ .  $w_j$  sayıları  $p$ -ayrılmış olsun.

$$\underline{w} := \min\{\arg w_1, \dots, \arg w_p, \arg w_{p+1} + \pi, \dots, \arg w_m + \pi\}$$

$$\overline{w} := \max\{\arg w_1, \dots, \arg w_p, \arg w_{p+1} + \pi, \dots, \arg w_m + \pi\}$$

ve  $\arg w_j$  değeri  $2\pi$  nin katlarına kadar seçilir böylece  $\overline{w} - \underline{w} < \pi$ . (Yakubov ve Yakubov, 1999)

7.2.2. Teorem  $m \geq 1, a_m \neq 0$  olsun ve (7.2.2) nin kökleri  $p$ -ayrılmış olsun. Sonra herhangi bir  $\varepsilon > 0$  ve  $\frac{\pi}{2} - \underline{w} + \varepsilon < \arg \lambda < \frac{3\pi}{2} - \overline{w} - \varepsilon$  nu sağlayan tüm kompleks sayılar  $\lambda$  için,

$L_0(\lambda): u \rightarrow L_0(\lambda)u$  operatörü  $W_{q,\gamma}^l(\mathbb{R})$  den  $W_{q,\gamma}^{l-m}(\mathbb{R})$  ye tanımlansın. Burada  $l \geq m$ ,  $q \in (1, \infty)$ ,  $-\frac{1}{q} < \gamma < \frac{1}{q}$  tamsayısı bir izomorfizmdir ve bu  $\lambda$  için (7.2.1) in çözümüyle ilgili aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir.

$$\sum_{k=0}^l |\lambda|^{l-k} \|u\|_{W_{q,\gamma}^l(\mathbb{R})} \leq C(\varepsilon) \left( \|f\|_{W_{q,\gamma}^{l-m}(\mathbb{R})} + |\lambda|^{l-m} \|f\|_{L_{q,\gamma}(\mathbb{R})} \right), u = 1, 2$$

$$\sum_{k=0}^l |\lambda|^{m-k} \|u^{(k+p)}\|_{L_{q,\gamma}(\mathbb{R})} \leq C(\varepsilon) \|f^{(p)}\|_{L_{q,\gamma}(\mathbb{R})}, 0 < p < l - m$$

(Yakubov ve Yakubov, 1999)

7.2.3. Teorem Aşağıdaki koşulların karşılandığını varsayalım:

- i.  $\{E_0, E_1\}$  bir interpolasyon çiftidir.
- ii.  $\gamma_0, \gamma_1$  gerçekte sayılardır,  $l \in \{1, 2, 3, \dots\}$  ve  $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$
- iii.  $s$  tam sayıdır  $0 \leq s \leq l - 1$ ,  $\gamma_0 + s + \frac{1}{p_0} > 0$ , ve  $\gamma_1 + s + \frac{1}{p_1} < l$
- iv.  $\theta = \frac{\gamma_0 + s + \frac{1}{p_0}}{l + \gamma_0 - \gamma_1 + \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}}$  ve  $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$

O halde  $u \in W^l(p_0, \gamma_0, E_0; p_1, \gamma_1, E_1)$  için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\|u^{(s)}(0)\|_{(E_0, E_1)_{\theta, p}} \leq C \left( \|u\|_{L_{p_0, \gamma_0}((0,1); E_0)} + \|u\|_{L_{p_1, \gamma_1}^{(l)}((0,1); E_1)} \right)$$

7.2.4. Teorem Bir önceki teorem koşulları altında  $u \in W^l(p_0, \gamma_0, E_0; p_1, \gamma_1, E_1), \mathbb{C}$ , ve  $|\lambda| \rightarrow \infty$  için aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir:

$$\begin{aligned} \text{i. } |\lambda|^{l-s} \|u^{(s)}(0)\|_{(E_0, E_1)_{\theta, p}} &\leq C \left( |\lambda|^{l+\gamma_0+\frac{1}{p_0}} \|u\|_{L_{p_0, \gamma_0}((0,1), E_0)} \right. \\ &\quad \left. + |\lambda|^{\gamma_1+\frac{1}{p_1}} \|u\|_{L_{p_1, \gamma_1}((0,1), E_1)} \right) \end{aligned}$$

$$\text{ii. } |\lambda|^{l-s+\gamma+\frac{1}{p}} \|u^{(s)}\|_{L_{p,\gamma}((0,1);(E_0,E_1)_{\theta,p})} \leq C \left( |\lambda|^{l+\gamma_0+\frac{1}{p_0}} \|u\|_{L_{p_0,\gamma_0}((0,1),E_0)} + |\lambda|^{\gamma_1+\frac{1}{p_1}} \|u^l\|_{L_{p_1,\gamma_1}((0,1),E_1)} \right)$$

burada  $\gamma > -\frac{1}{p}$  dir. (Yakubov ve Yakubov, 1999)

### 7.3. Homojen Denklemler İçin Homojen Olmayan Sınır Geçiş Şartlarına Sahip Problemlerin Çözülebilirliği ve Koersitivliği

Bu bölüm öncelikle homojen diferansiyel denklem için aşağıdaki sınır değer problemini ele alır.

$$L_0(\lambda)u := \tau(x)u''(x) - \lambda^2 u(x) = 0 \quad (7.3.1)$$

yerel olmayan ve homojen olmayan sınır şartlarıyla birlikte,  $k \in \{1,2,3,4\}$  için,

$$L_{k0}u := \alpha_k u^{(m_k)}(-1) + \beta_k u^{(m_k)}(-0) + \eta_k u^{(m_k)}(+0) + \delta_k u^{(m_k)}(1) = f_k \quad (7.3.2)$$

Kolaylık olması açısından aşağıdaki gösterimleri kullanınız :

$$\omega_1 := -\tau_1^{-\frac{1}{2}}, \omega_2 := \tau_1^{-\frac{1}{2}}, \omega_3 := -\tau_2^{-\frac{1}{2}}, \omega_4 := \tau_2^{-\frac{1}{2}}$$

$$\underline{\omega} := \min\{\arg \tau_1, \arg \tau_2\}, \bar{\omega} := \max\{\arg \tau_1, \arg \tau_2\}$$

$$\theta := \begin{vmatrix} \alpha_1 \omega_1^{m_1} & \beta_1 \omega_2^{m_1} & \eta_1 \omega_3^{m_1} & \delta_1 \omega_4^{m_1} \\ \alpha_2 \omega_1^{m_2} & \beta_2 \omega_2^{m_2} & \eta_2 \omega_3^{m_2} & \delta_2 \omega_4^{m_2} \\ \alpha_3 \omega_1^{m_3} & \beta_3 \omega_2^{m_3} & \eta_3 \omega_3^{m_3} & \delta_3 \omega_4^{m_3} \\ \alpha_4 \omega_1^{m_4} & \beta_4 \omega_2^{m_4} & \eta_4 \omega_3^{m_4} & \delta_4 \omega_4^{m_4} \end{vmatrix}$$

ve

$$B_\varepsilon(\underline{\omega}, \bar{\omega}) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \pi + \bar{\omega} + \varepsilon < \arg \lambda < 3\pi + \underline{\omega} - \varepsilon\}$$

$\varepsilon > 0$  gerçel değeri için yeterince küçüktür.

Bir  $k \geq 0$  tamsayısı ve  $q > 1$  gerçeli için,  $W_q^k(-1,0) + W_q^k(0,1)$  Sobolev Uzaylarının doğrudan toplamı,  $[-1,0) \cup (0,1]$  üzerinde tanımlı  $u = u(x)$  karmaşık değerli fonksiyonların Banach uzayı olarak tanımlanır ve sırasıyla  $(-1,0)$  ve  $(0,1)$  aralıklarında  $W_q^k(-1,0)$  ve  $W_q^k(0,1)$  e ait olup normu aşağıdaki gibidir.

$$\|u\|_{W_q^k(-1,0) \cup (0,1)} = \|u\|_{W_q^k(-1,0)} + \|u\|_{W_q^k(0,1)}$$

Burada,  $W_q^k(a,b)$  bir Sobolev Uzayıdır, yani  $(a,b)$  aralığında  $k$ . mertebeye kadar genelleştirilmiş türevleri olan ve sonlu norma sahip tüm ölçülebilir  $u(x)$  fonksiyonlarından oluşan uzay Banach Uzayıdır

$$\|u\|_{W_q^k(a,b)} = \sum_{i=0}^k \left( \int_a^b |u^{(i)}(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

$W_q^0(a,b) = L_q(a,b)$  olduğu gözlemlenebilir.

7.3.1. Teorem Eğer  $\theta \neq 0$  ise, o zaman  $\varepsilon > 0$  için, öyle bir  $R_\varepsilon > 0$  vardır ki,  $|\lambda| > R_\varepsilon$  ve  $\lambda \in B_\varepsilon(\underline{\omega}, \bar{\omega})$  olan her  $\lambda$  için (7.3.1)-(7.3.2) probleminin  $W_q^n(-1,0) + W_q^n(0,1)$  uzayına ait benzersiz bir çözümü  $u(x, \lambda)$  vardır. Burada  $n \geq \max\{2, \max\{m_1, m_2, m_3, m_4\} + 1\}$  olmak üzere keyfi bir  $n$  seçilebilir. Bu  $\lambda$  değerleri için aşağıdaki koersiv eşitsizliği geçerlidir.

$$\sum_{k=0}^n |\lambda|^{n-k} \|u\|_{W_q^k(-1,0) \cup (0,1)} \leq C(\varepsilon) \sum_{j=1}^4 |\lambda|^{n-m_j-\frac{1}{q}} |f_j| \quad (7.3.3)$$

*İspat*  $i \in \{1,2,3,4\}$  için, (7.3.1) in  $u_i = u_i(x, \lambda)$  şeklinde verilen dört temel çözümünü tanımlayalım

$$u_i(x, \lambda) = \begin{cases} e^{\omega_i \lambda (x - \xi_i)}, & x \in I_i \\ 0, & x \notin I_i \end{cases}$$

Burada  $\xi_1 = -1, \xi_2 = \xi_3 = 0, \xi_4 = 1, I_1 = I_2 = [-1, 0)$  ve  $I_3 = I_4 = (0, 1]$ . (7.3.1) in genel çözümünün aşağıdaki formda yazılabileceği gözlemlenebilir.

$$\sum_{k=0}^n |\lambda|^{n-k} \|u\|_{W_q^k(-1,0) \cup (0,1)} \leq C(\varepsilon) \sum_{j=1}^4 |\lambda|^{n-m_j-\frac{1}{q}} |f_j| \quad (7.3.4)$$

(7.3.4)'ü (7.3.2) de yerine koyduğumuzda,  $C_1, C_2, C_3$  ve  $C_4$  değişkenlerine ilişkin doğrusal homojen denklemler sistemi aşağıdaki gibi verilir

$$\begin{aligned} f_k = & C_1(\omega_1\lambda)^{m_k}(\alpha_k + \beta_k e^{\omega_1\lambda}) + C_2(\omega_2\lambda)^{m_k}(\alpha_k e^{-\omega_2\lambda} + \beta_k) \\ & + C_3(\omega_3\lambda)^{m_k}(\eta_k + \delta_k e^{\omega_3\lambda}) + C_4(\omega_4\lambda)^{m_k}(\eta_k e^{-\omega_4\lambda} + \delta_k) \end{aligned} \quad (7.3.5)$$

öyle ki  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$  için

$$\begin{aligned} f_1 = & C_1(\omega_1\lambda)^{m_1}(\alpha_1 + \beta_1 e^{\omega_1\lambda}) + C_2(\omega_2\lambda)^{m_1}(\alpha_1 e^{-\omega_2\lambda} + \beta_1) \\ & + C_3(\omega_3\lambda)^{m_1}(\eta_1 + \delta_1 e^{\omega_3\lambda}) + C_4(\omega_4\lambda)^{m_1}(\eta_1 e^{-\omega_4\lambda} + \delta_1) \\ f_2 = & C_1(\omega_1\lambda)^{m_2}(\alpha_2 + \beta_2 e^{\omega_1\lambda}) + C_2(\omega_2\lambda)^{m_2}(\alpha_2 e^{-\omega_2\lambda} + \beta_2) \\ & + C_3(\omega_3\lambda)^{m_2}(\eta_2 + \delta_2 e^{\omega_3\lambda}) + C_4(\omega_4\lambda)^{m_2}(\eta_2 e^{-\omega_4\lambda} + \delta_2) \\ f_3 = & C_1(\omega_1\lambda)^{m_3}(\alpha_3 + \beta_3 e^{\omega_1\lambda}) + C_2(\omega_2\lambda)^{m_3}(\alpha_3 e^{-\omega_2\lambda} + \beta_3) \\ & + C_3(\omega_3\lambda)^{m_3}(\eta_3 + \delta_3 e^{\omega_3\lambda}) + C_4(\omega_4\lambda)^{m_3}(\eta_3 e^{-\omega_4\lambda} + \delta_3) \\ f_4 = & C_1(\omega_1\lambda)^{m_4}(\alpha_4 + \beta_4 e^{\omega_1\lambda}) + C_2(\omega_2\lambda)^{m_4}(\alpha_4 e^{-\omega_2\lambda} + \beta_4) \\ & + C_3(\omega_3\lambda)^{m_4}(\eta_4 + \delta_4 e^{\omega_3\lambda}) + C_4(\omega_4\lambda)^{m_4}(\eta_4 e^{-\omega_4\lambda} + \delta_4) \end{aligned} \quad (7.3.6)$$

elde edilir.  $\lambda \in B_\varepsilon(\underline{\omega}, \bar{\omega})$  olduğundan aşağıdaki sonuç çıkar:

$$\frac{\pi + \varepsilon}{2} < \arg(\omega_i \lambda) < \frac{3\pi - \varepsilon}{2}, i \in \{1, 3\}$$

ve

$$-\frac{\pi - \varepsilon}{2} < \arg(\omega_i \lambda) < \frac{\pi - \varepsilon}{2}, i \in \{2, 4\}$$

Sonuç olarak, bu  $\lambda$  lar için ve keyfi bir  $\varepsilon > 0$  için yeterince küçüktür,

$$(-1)^{k+1} \operatorname{Re}(\omega_k \lambda) \leq -|\lambda| |\omega_k| \sin \frac{\varepsilon}{2}, k \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Dolayısıyla (7.3.6) nın determinanı şu şekildedir:

$$\Delta \lambda = \begin{vmatrix} C_1(\omega_1 \lambda)^{m_1} (\alpha_1 + \beta_1 e^{\omega_1 \lambda}) & C_2(\omega_2 \lambda)^{m_1} (\alpha_1 e^{-\omega_2 \lambda} + \beta_1) \\ C_1(\omega_1 \lambda)^{m_2} (\alpha_2 + \beta_2 e^{\omega_1 \lambda}) & C_2(\omega_2 \lambda)^{m_1} (\alpha_1 e^{-\omega_2 \lambda} + \beta_1) \\ C_1(\omega_1 \lambda)^{m_3} (\alpha_3 + \beta_3 e^{\omega_1 \lambda}) & C_2(\omega_2 \lambda)^{m_3} (\alpha_3 e^{-\omega_2 \lambda} + \beta_3) \\ C_1(\omega_1 \lambda)^{m_4} (\alpha_4 + \beta_4 e^{\omega_1 \lambda}) & C_2(\omega_2 \lambda)^{m_4} (\alpha_4 e^{-\omega_2 \lambda} + \beta_4) \\ C_3(\omega_3 \lambda)^{m_1} (\eta_1 + \delta_1 e^{\omega_3 \lambda}) & C_4(\omega_4 \lambda)^{m_1} (\eta_1 e^{-\omega_4 \lambda} + \delta_1) \\ C_3(\omega_3 \lambda)^{m_2} (\eta_2 + \delta_2 e^{\omega_3 \lambda}) & C_4(\omega_3 \lambda)^{m_2} (\eta_2 e^{-\omega_4 \lambda} + \delta_2) \\ C_3(\omega_3 \lambda)^{m_3} (\eta_3 + \delta_3 e^{\omega_3 \lambda}) & C_4(\omega_4 \lambda)^{m_3} (\eta_3 e^{-\omega_4 \lambda} + \delta_3) \\ C_3(\omega_3 \lambda)^{m_4} (\eta_4 + \delta_4 e^{\omega_3 \lambda}) & C_4(\omega_4 \lambda)^{m_4} (\eta_4 e^{-\omega_4 \lambda} + \delta_4) \end{vmatrix}$$

Buradan  $\lambda^{m_1}, \lambda^{m_2}, \lambda^{m_3}, \lambda^{m_4}$  çekilirse

$$\Delta \lambda = \lambda^{m_1} \cdot \lambda^{m_2} \cdot \lambda^{m_3} \cdot \lambda^{m_4} \cdot \begin{vmatrix} C_1(\omega_1)^{m_1} (\alpha_1 + \beta_1 e^{\omega_1 \lambda}) & C_2(\omega_2)^{m_1} (\alpha_1 e^{-\omega_2 \lambda} + \beta_1) \\ C_1(\omega_1)^{m_2} (\alpha_2 + \beta_2 e^{\omega_1 \lambda}) & C_2(\omega_2)^{m_1} (\alpha_1 e^{-\omega_2 \lambda} + \beta_1) \\ C_1(\omega_1)^{m_3} (\alpha_3 + \beta_3 e^{\omega_1 \lambda}) & C_2(\omega_2)^{m_3} (\alpha_3 e^{-\omega_2 \lambda} + \beta_3) \\ C_1(\omega_1)^{m_4} (\alpha_4 + \beta_4 e^{\omega_1 \lambda}) & C_2(\omega_2)^{m_4} (\alpha_4 e^{-\omega_2 \lambda} + \beta_4) \\ C_3(\omega_3)^{m_1} (\eta_1 + \delta_1 e^{\omega_3 \lambda}) & C_4(\omega_4)^{m_1} (\eta_1 e^{-\omega_4 \lambda} + \delta_1) \\ C_3(\omega_3)^{m_2} (\eta_2 + \delta_2 e^{\omega_3 \lambda}) & C_4(\omega_3)^{m_2} (\eta_2 e^{-\omega_4 \lambda} + \delta_2) \\ C_3(\omega_3)^{m_3} (\eta_3 + \delta_3 e^{\omega_3 \lambda}) & C_4(\omega_4)^{m_3} (\eta_3 e^{-\omega_4 \lambda} + \delta_3) \\ C_3(\omega_3)^{m_4} (\eta_4 + \delta_4 e^{\omega_3 \lambda}) & C_4(\omega_4)^{m_4} (\eta_4 e^{-\omega_4 \lambda} + \delta_4) \end{vmatrix}$$

olur. Buradan

$$\Delta \lambda = \lambda^{m_1+m_2+m_3+m_4} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 \omega_1^{m_1} & \beta_1 \omega_2^{m_1} & \eta_1 \omega_3^{m_1} & \delta_1 \omega_4^{m_1} \\ \alpha_2 \omega_1^{m_2} & \beta_2 \omega_2^{m_2} & \eta_2 \omega_3^{m_2} & \delta_2 \omega_4^{m_2} \\ \alpha_3 \omega_1^{m_3} & \beta_3 \omega_2^{m_3} & \eta_3 \omega_3^{m_3} & \delta_3 \omega_4^{m_3} \\ \alpha_4 \omega_1^{m_4} & \beta_4 \omega_2^{m_4} & \eta_4 \omega_3^{m_4} & \delta_4 \omega_4^{m_4} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \beta_1 \omega_1^{m_1} e^{\omega_1 \lambda} & \alpha_1 \omega_2^{m_1} e^{-\omega_2 \lambda} & \delta_1 \omega_3^{m_1} e^{\omega_3 \lambda} & \eta_1 \omega_4^{m_1} e^{-\omega_4 \lambda} \\ \beta_2 \omega_1^{m_2} e^{\omega_1 \lambda} & \alpha_2 \omega_2^{m_2} e^{-\omega_2 \lambda} & \delta_2 \omega_3^{m_2} e^{\omega_3 \lambda} & \eta_2 \omega_4^{m_2} e^{-\omega_4 \lambda} \\ \beta_3 \omega_1^{m_3} e^{\omega_1 \lambda} & \alpha_3 \omega_2^{m_3} e^{-\omega_2 \lambda} & \delta_3 \omega_3^{m_3} e^{\omega_3 \lambda} & \eta_3 \omega_4^{m_3} e^{-\omega_4 \lambda} \\ \beta_4 \omega_1^{m_4} e^{\omega_1 \lambda} & \alpha_4 \omega_2^{m_4} e^{-\omega_2 \lambda} & \delta_4 \omega_3^{m_4} e^{\omega_3 \lambda} & \eta_4 \omega_4^{m_4} e^{-\omega_4 \lambda} \end{vmatrix}$$

elde edilir.  $e^{\omega_1 \lambda}, e^{-\omega_2 \lambda}, e^{\omega_3 \lambda}, e^{-\omega_4 \lambda}$  çekilirse

$$\Delta \lambda = \lambda^{\sum_{i=1}^4 m_i} \left( \begin{vmatrix} \alpha_1 \omega_1^{m_1} & \beta_1 \omega_2^{m_1} & \eta_1 \omega_3^{m_1} & \delta_1 \omega_4^{m_1} \\ \alpha_2 \omega_1^{m_2} & \beta_2 \omega_2^{m_2} & \eta_2 \omega_3^{m_2} & \delta_2 \omega_4^{m_2} \\ \alpha_3 \omega_1^{m_3} & \beta_3 \omega_2^{m_3} & \eta_3 \omega_3^{m_3} & \delta_3 \omega_4^{m_3} \\ \alpha_4 \omega_1^{m_4} & \beta_4 \omega_2^{m_4} & \eta_4 \omega_3^{m_4} & \delta_4 \omega_4^{m_4} \end{vmatrix} \right. \\ \left. + e^{\omega_1 \lambda} \cdot e^{-\omega_2 \lambda} \cdot e^{\omega_3 \lambda} \cdot e^{-\omega_4 \lambda} \begin{vmatrix} \beta_1 \omega_1^{m_1} & \alpha_1 \omega_2^{m_1} & \delta_1 \omega_3^{m_1} & \eta_1 \omega_4^{m_1} \\ \beta_2 \omega_1^{m_2} & \alpha_2 \omega_2^{m_2} & \delta_2 \omega_3^{m_2} & \eta_2 \omega_4^{m_2} \\ \beta_3 \omega_1^{m_3} & \alpha_3 \omega_2^{m_3} & \delta_3 \omega_3^{m_3} & \eta_3 \omega_4^{m_3} \\ \beta_4 \omega_1^{m_4} & \alpha_4 \omega_2^{m_4} & \delta_4 \omega_3^{m_4} & \eta_4 \omega_4^{m_4} \end{vmatrix} \right)$$

elde edilir. Buradan

$$\Delta \lambda = \lambda^{\sum_{i=1}^4 m_i} \left( \begin{vmatrix} \alpha_1 \omega_1^{m_1} & \beta_1 \omega_2^{m_1} & \eta_1 \omega_3^{m_1} & \delta_1 \omega_4^{m_1} \\ \alpha_2 \omega_1^{m_2} & \beta_2 \omega_2^{m_2} & \eta_2 \omega_3^{m_2} & \delta_2 \omega_4^{m_2} \\ \alpha_3 \omega_1^{m_3} & \beta_3 \omega_2^{m_3} & \eta_3 \omega_3^{m_3} & \delta_3 \omega_4^{m_3} \\ \alpha_4 \omega_1^{m_4} & \beta_4 \omega_2^{m_4} & \eta_4 \omega_3^{m_4} & \delta_4 \omega_4^{m_4} \end{vmatrix} \right. \\ \left. + e^{\lambda \sum_{i=1}^4 (-1)^{i+1} \omega_i} \begin{vmatrix} \beta_1 \omega_1^{m_1} & \alpha_1 \omega_2^{m_1} & \delta_1 \omega_3^{m_1} & \eta_1 \omega_4^{m_1} \\ \beta_2 \omega_1^{m_2} & \alpha_2 \omega_2^{m_2} & \delta_2 \omega_3^{m_2} & \eta_2 \omega_4^{m_2} \\ \beta_3 \omega_1^{m_3} & \alpha_3 \omega_2^{m_3} & \delta_3 \omega_3^{m_3} & \eta_3 \omega_4^{m_3} \\ \beta_4 \omega_1^{m_4} & \alpha_4 \omega_2^{m_4} & \delta_4 \omega_3^{m_4} & \eta_4 \omega_4^{m_4} \end{vmatrix} \right) \\ = \lambda^m (\theta + r(\lambda))$$

bulunur. Burada  $m = \sum_{i=1}^4 m_i$ .  $\lambda \in B_\varepsilon(\underline{\omega}, \bar{\omega})$  ve  $r(\lambda) \rightarrow 0$  ise  $|\lambda| \rightarrow \infty$  olduğu görülebilir.  $\theta \neq 0$  olduğundan  $\lambda \in B_\varepsilon(\underline{\omega}, \bar{\omega})$  ve  $|\lambda| > \iota_\varepsilon$  sağlayan tüm kompleks sayılar  $\lambda$  için  $\Delta(\lambda) \neq 0$  olacak şekilde bir  $\iota_\varepsilon > 0$  vardır. Bu nedenle, bu  $\lambda$  değerleri için (7.3.5)'in benzersiz bir çözümü vardır.

$$C_i(\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \sum_{k=1}^4 \Delta_{ik}(\lambda) f_k, i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

burada  $\Delta_{ik}(\lambda)$ , determinant  $\Delta(\lambda)$ 'nın  $(i,k)$ 'inci elemanının cebirsel tamamlayıcısını ifade eder.

Determinantın gösterimi şu şekildedir:

$$\Delta_{ik}(\lambda) = (\theta_{ik} + r_{ik}(\lambda))\lambda^{\sum_{j \neq k} (m - m_j)}$$

burada  $\theta_{ik}$  karmaşık sayılardır ve  $r_{ik} \rightarrow 0$  iken  $B_\varepsilon(\underline{\omega}, \bar{\omega})$  açısında  $|\lambda| \rightarrow \infty$  olur.

$$C_i(\lambda) = \sum_{k=1}^4 \lambda^{-m_k} \frac{\theta_{ik} + r_{ik}(\lambda)}{\theta + r(\lambda)} f_k, i \in \{1,2,3,4\}$$

Dolayısıyla, (7.3.1)-(7.3.2)'nin çözümü şu şekildedir:

$$u(x, \lambda) = \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 \lambda^{-m_k} \frac{\theta_{ik} + r_{ik}(\lambda)}{\theta + r(\lambda)} f_k u_i(x, \lambda)$$

Buradan, her  $n \geq 0$  tamsayısı için

$$\|u^{(n)}\|_{L_q(-1,1)} \leq C \sum_{k=1}^4 \left( |\lambda|^{(n-m_k)} |f_k| \sum_{i=1}^4 \|u_i(\cdot, \lambda)\|_{L_q(I_i)} \right) \quad (7.3.7)$$

Ayrıca (7.3.4) ile,

$$\begin{aligned} \|u_1(x, \lambda)\|_{L_q(-1,0)}^q &= \int_{-1}^0 e^{q \operatorname{Re}(\omega_1 \lambda)(x+1)} dx \\ &\leq \int_{-1}^0 e^{-q|\lambda||\omega_1| \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)(x+1)} dx \\ &= \left(-q|\lambda||\omega_1| \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)^{-1} \left(e^{-q|\lambda||\omega_1| \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} - 1\right) \\ &\leq C(\varepsilon)|\lambda|^{-1} \end{aligned}$$

$\lambda \in B_\varepsilon(\underline{\omega}, \bar{\omega})$  açısında  $|\lambda| \rightarrow \infty$  olarak. Benzer bir şekilde

$$\|u_i(x, \lambda)\|_{L_q(I_i)} \leq C(\varepsilon)|\lambda|^{-1}, i \in \{2,3,4\}$$

$\lambda \in B_\varepsilon(\underline{\omega}, \bar{\omega})$  açısında  $|\lambda| \rightarrow \infty$  olarak. Bu eşitsizlikleri (7.3.7)'de yerine koyduğumuzda,

$$\|u^{(n)}\|_{L_q(-1,1)} \leq C(\varepsilon) \sum_{k=1}^4 |\lambda|^{(n-m_k-1/q)} |f_k|$$

elde edilir ki bu da bize gerekli tahmini (7.3.3)'ü sağlar.

#### 7.4. Genel Fonksiyonel Geçiş Şartlı Problemin Fredholm Olma Özelliği

Bu bölümde problemin diferansiyel operatörü olan Fredholm operatörünün özelliğini inceleyeceğiz.  $E$  ve  $F$  'nin Banach uzayları ve  $F^*$  'nin  $F$ 'nin eşleniği olduğunu varsayalım. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa lineer operatör  $T: E \rightarrow F$ , Fredholm operatörü olarak adlandırılır:

- i.  $R(T) = \{Tu: u \in D(T)\}$  aralığı  $F$ 'de kapalıdır.
- ii.  $\ker T = \{u \in D(T): Tu = 0\}$  and coker  $T = \{u^* \in F^*: u^*(Tu) = 0, \text{ tüm } u \in D(T)\}$  sırasıyla  $E$  ve  $F^*$  'de sonlu boyutlu alt uzaylardır.
- iii.  $\dim \ker T = \dim \text{coker } T$

$n \geq \max\{2, \max\{m_1, m_2, m_3, m_4\} + 1\}$  olduğunu varsayalım ve  $W_q^n(-1,0) + W_q^n(0,1)$  den  $W_q^{n-2}(-1,0) + W_q^{n-2}(0,1) + \mathbb{C}^4$ 'e şeklinde lineer bir  $L$  operatörü tanımlayalım.

$$\mathcal{L}: u \rightarrow \mathcal{L}u := (L(\lambda)u, L_1u, L_2u, L_3u, L_4u)$$

7.4.1. Teorem Aşağıdaki koşulların sağlandığını varsayalım:

- i.  $\tau(x) = \tau_1, x \in [-1,0); \tau(x) = \tau_2, x \in (0,1]; \tau_1 \neq 0, \tau_2 \neq 0, m_k \geq 0$ , ve  $\theta \neq 0$ .
- ii.  $\sigma(x), [-1,0) \cup (0,1]$  üzerinde ölçülebilir bir fonksiyondur.

iii.  $k \in \{1,2,3,4\}$  için  $W_q^n(-1,0) + W_q^n(0,1)$  içindeki  $\mathcal{F}_k$  fonksiyonelleri süreklidir.

O zaman lineer operatör :

$$\mathcal{L}: u \rightarrow \mathcal{L}u := (\tau(x)u''(x) + \sigma(x)u, L_1u, L_2u, L_3u, L_4u)$$

$W_q^n(-1,0) + W_q^n(0,1)$  den  $W_q^{n-2}(-1, d_1) + W_q^{n-2}(0,1) + \mathbb{C}^4$  üzerine sınırlandırılmış ve fredholm'dür.

*İspat*  $\mathcal{L}$  operatörü  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$  biçiminde yeniden yazılabilir. Burada

$$\mathcal{L}_1u = (\tau(x)u''(x), u(-1), u'(-1), u(-0) - u(+0), u'(-0) - u'(+0))$$

ve

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2u = & (\sigma(x), L_1u - u(-1), L_2u - u'(-1), L_3u - u(-0) + u(+0), L_4u - u'(-0) \\ & + u'(+0)) \end{aligned}$$

$f \in L_q(-1,1)$  olsun. O halde,  $i$  ve  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  koşullarından

$$\tau^{-1}(x)f(x) \in L_1(-1,1) \cap L_q(-1,1)$$

sonucu çıkar. Schwartz eşitsizliğine göre,

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\tau^{-1}(x)f(x)|dx & \leq \left( \int_0^1 x^{-p}(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^1 x^q(x)|f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq C x^{\frac{1}{p}-1} \Big|_0^1 \left( \int_0^1 x^q(x)|f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq C \|f\|_{L_q(0,1)} \end{aligned} \tag{7.4.1}$$

Sonuç olarak, problemin çözümü

$$\begin{aligned}\tau(x)u''(x) &= f(x), x \in (-1,0) \cup (0,1), u(-1) = h_1 \\ u'(-1) &= h_2, u(-0) - u(+0) = h_3, u'(-0) - u'(+0) = h_4\end{aligned}$$

şu forma sahiptir :

$$u(x) = \begin{cases} \int_{-1}^x (x-y)\tau^{-1}(y)f(y)dy + n_1 + n_2x, & x \in (-1,0) \\ \int_0^x (x-y)\tau^{-1}(y)f(y)dy + n_3 + n_4x, & x \in (0,1) \end{cases}$$

Buna göre problemin çözümü şu şekilde elde edilir:

$$u(x) = \begin{cases} \int_{-1}^x (x-y)\tau^{-1}(y)f(y)dy + h_1 + (x+1)h_2, & x \in (0,-1) \\ \int_{-1}^0 (x-y)\tau^{-1}(y)f(y)dy \\ + \left( \int_{-1}^0 (x-y)\tau^{-1}(y)f(y)dy + h_2 - h_4 \right)x & x \in (0,1) \\ + \int_0^x (x-y)\tau^{-1}(y)f(y)dy + h_1 + h_2 - h_3 & \end{cases} \quad (7.4.2)$$

Eğer  $f \in W_q^{n-2}(-1,0) + W_q^{n-2}(0,1)$  ise, (7.4.2) şu anlama gelir:

$$u''(x) = \tau^{-1}(x)f(x) \quad \text{ve} \quad u^{(t+2)}(x) = \tau^{-1}(x)f^{(t)}(x)$$

öyle ki  $t \in \{0,1,2, \dots, n-2\}$ .

Böylece, i koşulundan (7.4.1) ve Teorem 7.3.1.'den,  $W_q^n(-1,0) + W_q^n(0,1)$  den  $W_q^{n-2}(-1,0) + W_q^{n-2}(0,1) + \mathbb{C}^4$ 'e olan  $\mathcal{L}_1$ operatörünün izomorfizma olduğunu elde ederiz. Ayrıca, lineer operatör  $\mathcal{L}_2$ 'nin  $W_q^n(-1,0) + W_q^n(0,1)$  den  $W_q^{n-2}(-1,0) + W_q^{n-2}(0,1) + \mathbb{C}^4$  'e kompakt bir şekilde etki ettiği gözlemlenebilir. Sonuç olarak, Teorem 7.2.1.'i  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$  operatörüne uygulayabiliriz; bundan da  $\mathcal{L}$  operatörünün Fredholm olduğu sonucu çıkar. Ayrıca  $\mathcal{L}$  operatörünün sınırlı olduğu açıktır.

### 7.5. Ana Problemin Esas Kısımının İzomorfizmi ve Koersitivliği

Fonksiyoneller olmadan (7.1.1)-(7.1.2)'yi, yani aşağıdaki problemi ele alalım

$$L_0(\lambda)u := \tau(x)u''(x) - \lambda^2 u(x) = f(x) \quad (7.5.1)$$

$$L_{k0}u := \alpha_k u^{(m_k)}(-1) + \beta_k u^{(m_k)}(0) + \eta_k u^{(m_k)}(+0) + \delta_k u^{(m_k)}(1) = f_k, \quad (7.5.2)$$

$$k \in \{1,2,3,4\}$$

Bu probleme karşılık gelen operatör

$$\tilde{L}_0 u = (L_0(\lambda)u, L_{10}u, L_{20}u, L_{30}u, L_{40}u)$$

7.5.1. Teorem  $\theta \neq 0$  ve  $n \geq \max\{2, \max\{m_1, m_2, m_3, m_4\} + 1\}$  olsun. Sonra, tüm  $\varepsilon > 0$  için,  $\frac{\pi}{2} + \frac{\bar{\omega}}{2} + \varepsilon < \arg \lambda < \frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{2} - \varepsilon, |\lambda| > \iota_\varepsilon$  'yi sağlayan tüm kompleks sayılar  $\lambda$  için,  $W_q^n(-1,0) + W_q^n(0,1)$ 'den  $W_q^{n-2}(-1,0) + W_q^{n-2}(0,1) + \mathbb{C}^4$  'e  $\tilde{L}_0(\lambda)$  operatörü bir izomorfizmdir ve aşağıdaki koersitiv eşitsizliği (7.3.1)-(7.3.2) çözümü için sağlanır.

$$\sum_{k=0}^n |\lambda|^{n-k} \|u\|_{W_q^k} \leq C(\varepsilon) \left( \|f\|_{W_q^{n-2}} + |\lambda|^{n-2} \|f\|_{L_q} + \sum_{j=1}^4 |\lambda|^{n-m_j-\frac{1}{q}} |f_j| \right) \quad (7.5.3)$$

*İspat*  $\tilde{L}_0(\lambda)$  lineer operatörünün  $W_q^n(-1,0) + W_q^n(0,1)$ 'den  $W_q^{n-2}(-1,0) + W_q^{n-2}(0,1) + \mathbb{C}^4$  'e sürekli olduğu açıktır.

$(f(x), f_1, f_2, f_3, f_4) \in W_q^{n-2}(-1,0) + W_q^{n-2}(0,1) + \mathbb{C}^4$  olan bir eleman olsun. (7.5.1)-(7.5.2) denkleminin  $u(x, \lambda)$  çözümünü  $u(x, \lambda) = u_1(x, \lambda) + u_2(x, \lambda)$  toplamı biçiminde aşağıdaki gibi arıyoruz.  $f(x)$  'in  $I_j$  aralığındaki kısıtlamasını,  $I_1 = (-1,0)$  ve  $I_2 = (0,1)$  olmak üzere  $j \in \{1,2\}$  olacak şekilde  $f_j(x)$  ile gösteriyoruz.  $\tilde{f}_j \in W_q^{n-2}(\mathbb{R})$ ,  $f_j \in W_q^{n-2}(I_j)$  'nin bir genişletilmiş olsun; öyle ki,  $W_q^{n-2}(I_v)$ 'den  $W_q^{n-2}(\mathbb{R})$  'ye genişletilmiş operatörü  $S_j f_j := \tilde{f}_j$ ,  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$  olmak üzere  $j \in \{1,2\}$  için sınırlıdır. Öncelikle  $j \in \{1,2\}$  için

$$\tau_j(x)\tilde{u}''(x) - \lambda^2 \tilde{u}(x) = \tilde{f}_j(x), x \in \mathbb{R}$$

denklemlerini ele alalım. Teorem 7.2.3'e göre, bu denklemin  $\tilde{u}_{1v} = \tilde{u}_{1v}(\cdot, \lambda) \in W_q^n(\mathbb{R})$  şeklinde tek bir çözümü vardır ve  $u_{1j}(x, \lambda)$  için,  $\tilde{u}_{1j}(x, \lambda)$ 'nin  $I_j$  aralığındaki kısıtlaması,

$$\sum_{k=0}^n |\lambda|^{n-k} \|u_{1j}\|_{W_q^k(I_j)} \leq C(\varepsilon) \left( \|f\|_{W_q^{n-2}(I_j)} + |\lambda|^{n-2} \|f\|_{L_q(I_j)} \right), j \in \{1, 2\} \quad (7.5.4)$$

eşitsizliğinin  $\lambda \in B_\varepsilon(\underline{\omega}, \bar{\omega})$  koşulunu sağlayan tüm  $\lambda$  karmaşık sayıları için geçerlidir. Sonuç olarak,  $u_1(x, \lambda) \in W_q^n(-1, 0) + W_q^n(0, 1)$  şu şekilde tanımlanır:

$$u_1(x, \lambda) = \begin{cases} u_{11}(x, \lambda), & x \in (-1, 0) \\ u_{12}(x, \lambda), & x \in (0, 1) \end{cases}$$

ve (7.5.1)'i sağlar. Bu çözümü kullanarak, aşağıdaki sınır değer problemini oluşturuyoruz.

$$\begin{aligned} \tau(x)u''(x) - \lambda^2 u(x) &= 0, x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \\ L_{k0}u &= f_k - L_{k0}u_1(\cdot, \lambda), k \in \{1, 2, 3, 4\} \end{aligned}$$

Teorem 7.3.1'e göre, modül olarak yeterince büyük olan tüm  $\lambda \in B_\varepsilon(\underline{\omega}, \bar{\omega})$  için bu problemin  $W_q^n(-1, 0) + W_q^n(0, 1)$  'e ait olan benzersiz bir çözümü  $u_2 = u_2(x, \lambda)$  vardır ve bu  $\lambda$  'ler için

$$\sum_{k=0}^n |\lambda|^{n-k} \|u_2\|_{W_q^k} \leq C(\varepsilon) \sum_{j=1}^4 |\lambda|^{n-m_j-\frac{1}{q}} (|L_{j0}u_1| + |f_j|) \quad (7.5.5)$$

eşitsizliği sağlanır. Teorem 7.3.1'e göre ve Teorem 7.2.4'ü göz önünde bulundurarak, tüm  $\lambda \in B_\varepsilon(\underline{\omega}, \bar{\omega})$  ve  $n \geq \max\{2, \max\{m_1, m_2, m_3, m_4\} + 1\}$  için aşağıdaki eşitsizliğe sahibiz :

$$\begin{aligned} |\lambda|^{n-m_j-\frac{1}{q}} |L_{j0}u_1| &\leq C |\lambda|^{n-m_j-\frac{1}{q}} \sum_{j=1}^2 \|u_{1j}\|_{C^{m_j}(I_j)} \\ &\leq C(\varepsilon) \left( \|f\|_{W_q^{n-2}} + |\lambda|^{n-2} \|f\|_{L_q} \right) \end{aligned} \quad (7.5.6)$$

Böylece, (7.5.5) ve (7.5.6)'dan,

$$\sum_{k=0}^n |\lambda|^{n-2} \|u_2\|_{W_q^k} \leq C(\varepsilon) \left( \|f\|_{W_q^{n-2}} + |\lambda|^{n-2} \|f\|_{L_q} + \sum_{j=1}^4 |\lambda|^{l-m_j-\frac{1}{q}} |f_j| \right) \quad (7.5.5)$$

elde edilir. Ayrıca,  $u(x, \lambda) = u_1(x, \lambda) + u_2(x, \lambda)$  şeklinde tanımlanan  $u(x, \lambda)$  fonksiyonu (7.5.1)-(7.5.2)'nin çözümüdür. (7.5.4) ve (7.5.7) dikkate alındığında, bu çözüm için gerekli (7.5.3) varsayımı geçerlidir. Ayrıca (7.5.3)'ten çözümün benzersizliği çıkar. Ayrıca, Teorem 7.4.1'e göre,  $\tilde{L}_0$  operatörü,  $W_q^n(-1,0) + W_q^n(0,1)$ 'den  $W_q^{n-2}(-1,0) + W_q^{n-2}(0,1) + \mathbb{C}^4$ 'e giden Fredholm operatörüdür. Bu operatörün izomorfik olması, onun bir Fredholm operatörü ve bire-bir operatör olmasından kaynaklanmaktadır.

## 7.6. Ana Problemin Çözülebilirliği ve Koersitivliği

Bu bölümde ana problem (7.1.1)-(7.1.2) araştırılmaktadır.

7.6.1. Teorem  $\theta \neq 0, n \geq \max\{2, \max\{m_1, m_2, m_3, m_4\} + 1\}$  ve  $W_q^{m_j}(-1,0) + W_q^{m_j}(0,1)$  içindeki  $\mathcal{F}_v$  fonksiyonelleri sürekli olsun. O zaman, tüm  $\varepsilon > 0$  için, öyle bir  $\iota_\varepsilon > 0$  vardır ki,  $\frac{\pi}{2} + \frac{\bar{\omega}}{2} + \varepsilon < \arg \lambda < \frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{2} - \varepsilon, |\lambda| > \iota_\varepsilon$ , operatörünü sağlayan tüm  $\lambda$  karmaşık sayıları için

$$\tilde{L}(\lambda)u = (L(\lambda)u, L_1u, L_2u, L_3u, L_4u)$$

$W_q^n(-1,0) + W_q^n(0,1)$ 'den  $W_q^{n-2}(-1,0) + W_q^{n-2}(0,1) + \mathbb{C}^4$  'e bir izomorfizmdir ve bu  $\lambda$  'lar için (7.1.1)-(7.1.2) 'nin çözümü için aşağıdaki koersitiv eşitsizliği sağlanır.

$$\sum_{k=0}^n |\lambda|^{n-k} \|u\|_{W_q^k} \leq C(\varepsilon) \left( \|f\|_{W_q^{n-2}} + |\lambda|^{n-2} \|f\|_{L_q} + \sum_{j=1}^4 |\lambda|^{l-m_j-\frac{1}{q}} |f_j| \right) \quad (7.6.1)$$

Burada  $C(\varepsilon)$  sadece  $\varepsilon$ 'ye bağlı bir sabittir.

*İspat*  $(f(x), f_1, f_2, f_3, f_4)$ ,  $W_q^{n-2}(-1,0) + W_q^{n-2}(0,1) + \mathbb{C}^4$ 'ün bir elemanı olsun. Bu elemana karşılık gelen (7.1.1)-(7.1.2)'nin  $u = u(x, \lambda)$  çözümünün var olduğunu varsayalım. O zaman, bu çözüm şu eşitlikleri sağlar :

$$L_0(\lambda)u = L(\lambda)u - \sigma(x)u \quad (7.6.2)$$

ve

$$L_{k0}u = L_k u - \mathcal{F}_k u, k \in \{1,2,3,4\} \quad (7.6.3)$$

Teorem 7.5.1.'i (7.6.2)-(7.6.3)'e uygulayarak, bu çözüm için aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğunu elde ederiz:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n |\lambda|^{n-k} \|u\|_{W_q^k} &\leq C(\varepsilon) \left( \|L(\lambda)u - \sigma(x)u\|_{W_q^k} + |\lambda|^{n-2} \|L(\lambda)u\| \right. \\ &\quad \left. - \sigma(x)u\|_{L_q} + \sum_{j=1}^4 |\lambda|^{n-m_j-\frac{1}{q}} |L_j u - \mathcal{F}_j u| \right) \\ &\leq C(\varepsilon) \left( \|f\|_{W_q^{n-2}} + |\lambda|^{n-2} \|f\|_{L_q} + \|\sigma(x)u\|_{W_q^{n-2}} \right. \\ &\quad \left. + |\lambda|^{n-2} \|\sigma(x)u\|_{L_q} + \sum_{v=1}^4 |\lambda|^{n-m_j-\frac{1}{q}} |f_j| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^4 |\lambda|^{n-m_j-\frac{1}{q}} (|\mathcal{F}_j u|) \right) \end{aligned} \quad (7.6.4)$$

(Yakubov ve Yakubov, 1999)'a bakıldığında, tüm  $\zeta > 0$  için

$$\|u\|_{W_q^k} \leq \zeta \|u\|_{W_q^{k+1}} + C(\zeta) \|u\|_{L_q} \quad (7.6.5)$$

(O. V. Besov, V. P. Il'in and S. M. Nikol'skii, 1978)'e göre,  $u \in W_q^n(-1,0) + W_q^n(0,1)$  için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$|\lambda|^{n-m_j-\frac{1}{q}} \|u\|_{C[-1,1]}^{(m_j)} \leq C \left( \|u\|_{W_q^k} + |\lambda|^n \|u\|_{L_q} \right) \quad (7.6.6)$$

Teorem 7.5.1, (7.6.5)-(7.6.6) ve (Yakubov ve Yakubov, 1999) koşullarından şu sonuç çıkar:

$$\|\sigma(x)u\|_{W_q^{n-2}} + |\lambda|^{n-2} \|\sigma(x)u\|_{L_q} + \sum_{j=1}^4 |\lambda|^{n-m_j-\frac{1}{q}} (|\mathcal{F}_v u|)$$

$$\begin{aligned}
&\leq C(\varepsilon) \left( \|f\|_{W_q^{n-2}} + |\lambda|^{n-2} \|f\|_{Lq} \right) + \zeta \left( \|u\|_{W_q^n} + |\lambda|^{n-2} \|u\|_{Lq} \right) \\
&\quad + \sum_{j=1}^4 |\lambda|^{n-m_j-\frac{1}{q}} \|u\|_{W_q^k} \\
&\leq C(\varepsilon) \left( \|f\|_{W_q^{n-2}} + |\lambda|^{n-2} \|f\|_{q,0} \right) + |\lambda|^{-\frac{1}{q}} \sum_{k=0}^4 |\lambda|^{n-k} \|u\|_{W_q^k}
\end{aligned}$$

Burada aşağıdaki eşitsizliği kullanıyoruz:

$$|\lambda|^{n-2} \|u\|_{Lq} \leq C |\lambda|^{-1} |\lambda|^{n-1} \|u\|_{W_q^k}$$

(7.6.6)'yı (7.6.4)'e yerine koyarsak,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n |\lambda|^{n-2} \|u\|_{q,k} &\leq C(\varepsilon) \left( \|f\|_{\|u\|_{W_q^{n-2}}} + |\lambda|^{n-2} \|f\|_{Lq} + \sum_{j=1}^4 |\lambda|^{n-m_j-\frac{1}{q}} |f_j| \right) \\
&\quad + |\lambda|^{-\frac{1}{q}} \sum_{k=0}^4 |\lambda|^{n-k} \|u\|_{\|u\|_{W_q^k}}
\end{aligned}$$

Böylece,  $\lambda \in B_\varepsilon(\underline{\omega}, \bar{\omega})$  modülünün yeterince büyük olması durumunda, (7.6.1) eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlikten, (7.1.1)-(7.1.2) çözümünün benzersizlik özelliği, yani  $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$  operatörünün birebir operatör olduğu sonucu çıkar. Ayrıca, Teorem 7.4.1.'e göre,  $W_q^n(-1,0) + W_q^n(0,1)$ 'den  $W_q^{n-2}(-1,0) + W_q^{n-2}(0,1) + \mathbb{C}^4$ 'e giden  $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$  operatörü Fredholm'dur. Sonuç olarak, bir çözümün varlığı onun benzersizliğiyle sonuçlanır.

## 7.7. Sonuç

Bu çalışmada, süreksiz katsayılı diferansiyel denklemlere sahip Sturm-Liouville sınır değer problemi ve süreksizlik noktasının sınır koşullarındaki fonksiyonların geçiş koşulları ele alınmıştır. Bu problemin çözülebilirliği ve probleme ait diferansiyel operatörün koersitivliği, izomorfizm ve Fredholm operatörü olma gibi spektral özellikleri incelenmiştir. Daha sonra bu problemin spektral özellikleri ile ilgili teoremler ispatlanmıştır. Bu çalışmadaki problem, diferansiyel denkleme lineer bir operatör veya eliptik bir operatör eklenmesi, sınır koşullarına iç noktaların konulması, diferansiyel denklemin daha yüksek bir mertebeye alınması, birden fazla süreksizlik noktası alınması gibi farklı şekillerde oluşturulabilir.

Ayrıca, bahsedilen problemlerin her biri için, problemin özdeğerlerinin asimptotik dağılımlarının bulunması konusu çalışılabilir. Söz konusu problemlerin her biri özgün problemler olacağından, her birinden tamamen yeni tezler ve yeni makaleler türetilabilir.



## KAYNAKLAR

- Adams, R. A. and Fournier, J. J. F. (2003). *Sobolev Spaces* (Second Edition). Canada: Elsvier Ltd., 15-63.
- Adams, R.A. (1975). *Sobolev spaces.*, New York: Academic Press.,13-15.
- Agranovich, M. S. (1977). *Spectral properties of diffraction problems*. Wiley-VCH(Berlin 1999)(trans.). Voitovich, N. N., Kazenelenbaum, B. Z. and A. N. Sivov (Eds.). Moscow: Nauka.
- Aliyev, Z. S. (2010). Basic properties of fourth order differential operator with spectral parameter in the boundary condition. *Central European Journal of Mathematics*, 8(2), 378-388.
- Alves, M. S., Rivera, J. E. M., Sepulveda, M. and Villagran, O. V. (2011). Transmission problem in thermoelasticity. *Hindawi*, 2011(190548), 1-33.
- Aydemir, K. (2014). Boundary value problems with eigenvalue depending boundary and transmission conditions, *Boundary Value Problems*, 2014(131), 1-11.
- Aydemir, K. and Mukhtarov, O. Sh. (2015). Specturm and Green's function of a many interval Sturm-Liouville problem, *Zeitschrift Naturforsch*, 70(5), 301-308.
- Besov, O. V., Il'in, V. P. and Nikol'skii, S. M. (1978). *Integral representation of functional and imbedding theorems* (First Edition). New York: V. H. Winston, the University of Michigan.
- Brezis, H. (2011). *Functional analysis Sobolev Spaces and partiel differeantil equations*. Newyork: Springer Science +Business Media, LLC, 93-95.
- Burenkow, V. I. (1998). *Sobolev Spaces on domains* (First Edition). Almany: Winkler-Druck GmbH,Grafenhainichen, 31-36.
- Driver, B. K. (2003). *Analysis tools with applications* (First Edition). Newyork: Springer, 348-350.
- Efimov, A. V. (1985). *Mathematical analysis: Application of Some Methods of Mathematical and Functional Analysis* (First Edition). Moskova: Mir Publishers 280-380.
- Imanbaev, N. S. and Sadybekov, M. A. (2014). Characteristic determinant of the spectral problem for the ordinary differential operator with the boundary load. *International Conference on Analysis and Applied Mathematics*, 1611(1), 261-265.
- Kadakil, M. and Mukhtarov, O. Sh. (2006). Discontinuous Sturm-Liouville problems containing eigenparameter in the boundary conditions, *Acta Mathematica Sinica* 22(5) 1519-1528.

- Kandemir, M. (2012). Irregular boundary value problems for elliptic differential-operator equations with discontinuous coefficients and transmission conditions, *Kuwait Journal of Science and Engineering* 39(1), 71-97.
- Kandemir, M. (2021). *Diferansiyel Denklemler* (2. Baskı). Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık
- Kandemir, M. and Mukhtarov, O. Sh. (2017). Nonlocal Sturm-Liouville problems with integral terms in the boundary conditions, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2017(11), 1-12.
- Kandemir, M. and Mukhtarov, O. Sh. (2020). Many point boundary value problems for elliptic differentialoperator equations with interior singularities, *Mediterranean Journal of Mathematics* , 17(35), 1-21.
- Kandemir, M. and Yakubov, Y. (2010). Regular boundary value problems with a discontinuous coefficient, functional-multipoint conditions and a linear spectral parameter, *Israel Journal of Mathematics* 180(1), 255-270.
- Kandemir, M., Mukhtarov, O. Sh. and Yakubov, Y. (2009). Irregular boundary value problems with discontinuous coefficients and the eigenvalue parameter, *Mediterranean Journal of Mathematics* , 6(3), 317-338.
- Kato, T. (1966). *Perturbation theory for linear operators, classics in Mathematics* (First Edition). New York: Siproinger-Verlag
- Kreyszig, E. (1991). *Introductory functional analysis with applications* (Vol. 17). Amerika: John Wiley and Sons, 94-95.
- Lang. (1983). *Undergraduate Analysis* (Second Edition), Springer – Verlag, New York 1-15.
- Likov, A.V. and Mikhailov, Y. A. (1963) *The theory of heat and mass transfer*, Russian: Qosenergaizdat
- Martinez, R. A. and Rosenthal, P. (2007). *An introduction to operators on the hardy-hilbert space* (First Edition). Newyork: Springer Science +Business Media, LLC, 2-3.
- Muhtarov, O. and Yakubov, S. (2002). Problems for ordinary differential equations with transmission conditions. *Applicable Analysis*, 81(5), 1033-1064.
- Mukhtarov, O. Sh. (1994). Discontinuous boundary value problem with spectral parameter in boundary conditions. *Turkish Journal of Mathematics* 18(2), 183-192.
- Mukhtarov, O. Sh. and Aydemir, K. (2015). Eigenfunction expansion for Sturm-Liouville problems with transmission conditions at one interior point. *Acta Mathematica Scientia* 35(3), 639-649.
- Naimark, M. A. (1967) , *Linear Differential Operators, Part 1: Elementary Theory of Linear Differential Operators*, Moscow: Mir Publishers, 2-4.

- Olğar, H. and Muhtaroglu, O. (2024). The basis property of generalized eigenfunctions for one boundary value problem with discontinuities at two interior points. *Journal of New Results in Science*, 13(3), 221-231.
- Rasulov, M. L. (1997). *Application of contour integral method* (in Russian), Moskow:Navka.
- Royden, H. L. and Fitzpatrick, P. (2010). *Real analysis* (Vol. 4). China: Machine Press, 35-60.
- Rynne, B. P. and Youngson, M. A. (2008). *Lineer functional analysis* (Second Edition). Londra: Springer -Verlag London Limited, 48-205.
- S. Yakubov, S. and Yakubov, Y. (1999). *Differential-operator equation ordinary and partial differential equation*. Wiley-VCH(1999) (trans.). Jeffrey, A., Brezis, H. and Douglas R. G. (Eds.). Boca Raton London:Chapman and Hall/CRC.
- Sadybekov, M. A., Turmetov, B. Kh. and Torebek, B. T. (2014). Solvability of nonlocal boundary-value problems for the Laplace equation in the ball, *Electronic Journal of Differential Equations* , 2014(157), 1-14.
- Shakhmurov, V. B. (2013). Linear and nonlinear abstract elliptic equations with VMO coefficients and applications. *Fixed Point Theory and Applications*, 6(1), 1-21
- Shkalikov, A.A.(1983). Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations with a Parameter in Boundary Conditions. *Trudy Seminara Imeny Ivan Georgievich Petrovskogo*, 9(1), 190-229.
- Stikonas, A. (2007). The Sturm-Liouville problem with a nonlocal boundary condition *Lithuanian Mathematical Journal*, 47(3), 336-351.
- Tartar, L. (2007). *An introduction to Sobolev Spaces and interpolation spaces* (Vol. 3). Londra: Springer Science and Business Media., 22-23.
- Titeux, I., Yakubov, Y. (1997). Completeness of root functions for the thermal condition in a strip with piecewise continuous coefficients, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 7(7), 1035-1050.
- Triebel, H. (1978). *Interpolation theory, Function spaces, Differential Operators*. Amsterdam: North Holland Publishing Company.

## ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Murat KÜÇÜK

### Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

1-) KÜÇÜK, M. and KANDEMİR M. (2024). Coerciveness and isomorphism of discontinuous Sturm-Liouville problems with transmission conditions. Journal of New Results in Science, 13 (3), 175-185

