



T.C.

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SÜREKSİZLİK ŞARTLARI İÇEREN BİR PERİYODİK
STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜMMÜGÜLSÜM ESEN

KASIM

**SÜREKSİZLİK ŞARTLARI İÇEREN BİR PERİYODİK
STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ**

Ümmügülsüm ESEN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman

Prof. Dr. Kadriye AYDEMİR

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

KASIM 2024

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Ümmügülsüm ESEN tarafından hazırlanan “Süreksizlik Şartları İçeren Bir Periyodik Sturm-Liouville Probleminin Bazı Özellikleri” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Kadriye AYDEMİR

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan: Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU

Matematik Anabilim Dalı, Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Prof. Dr. B. Nafi ÖRNEK

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Doç. Dr. Zehra ÖZDEMİR

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 13/11/2024

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

(İmza)

Ümmügülsüm ESEN

(Tarih)

SÜREKSİZLİK ŞARTLARI İÇEREN BİR PERİYODİK STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Ümmügülsüm ESEN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Kasım 2024

ÖZET

Bu çalışmada iki ayrık aralıkta verilmiş olan periyodik Sturm-Liouville sınır-değer probleminin bazı özellikleri araştırılmıştır. $(L_2[-\pi, 0) \oplus L_2(0, \pi]) \oplus \mathbb{C}$ direkt toplam uzayında yeni bir iç çarpım tanımlanarak, çalışılan periyodik Sturm-Liouville sınır-değer-geçiş probleminin kendine eşlenik olduğu, özdeğerlerinin reel olduğu, farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonların ortogonal olduğu ispatlanmıştır. Çoğu özdeğer problemi açıkça çözülemediğinden, hem özdeğerlerin hem de özfonksiyonların nitel davranışını dikkatlice ele almak ve bunları analiz etmek gerekiyor. Bu nedenle, özdeğerlerin ve karşılık gelen özfonksiyonların nitel özelliklerinin incelenmesi için etkili bir teknik sunduk. Burada araştırılan problemin diğer problemlerden farkı geçiş şartlarında λ parametresi içeren bir periyodik Sturm-Liouville problemi olmasıdır.

Sayfa Adedi
Anahtar Kelimeler

: 42
: Sturm-Liouville problemi, Periyodik sınır şartı, Özdeğer parametresi, Geçiş şartı

Danışman

: Prof. Dr. Kadriye AYDEMİR

SOME PROPERTIES OF A PERIODIC STURM-LIOUVILLE PROBLEM WITH DISCONTINUITY CONDITIONS

(M. Sc. Thesis)

Ümmügülsüm ESEN

AMASYA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

November 2024

ABSTRACT

In this study, some properties of the periodic Sturm-Liouville boundary-value problem given on two disjoint intervals are investigated. In order to demonstrate that the eigenvalues of the periodic Sturm-Liouville boundary-value-transition issue are real, the eigenfunctions corresponding to various eigenvalues are orthogonal, and the problem is self-adjoint, we defined a new inner product in the $(L_2[-\pi, 0) \oplus L_2(0, \pi]) \oplus \mathbb{C}$ direct sum space. Most of eigenvalue problems require extensive consideration, analysis, and a close examination of the qualitative behavior of both the eigenvalues and the eigenfunctions since they cannot be solved explicitly. Therefore, we presented a useful method for examining the qualitative characteristics of eigenvalues and their corresponding eigenfunctions. The difference between the problem investigated here from other problems is that it is a periodic Sturm-Liouville problem that includes the parameter λ in the transition conditions.

Page Number	: 42
Keywords	: Sturm-Liouville problem, Periodic boundary condition, Eigenvalue parameter, Transmission condition
Supervisor	: Prof. Dr. Kadriye AYDEMİR

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Tez sürecimde bilgi ve tecrübesini esirgemeyen, karşılatığım problemlere çözüm üreten ve süreçte motive eden tez danışmanım ve değerli hocam Prof. Dr. Kadriye AYDEMİR'e en içten saygı ve sevgilerimi sunarım.

Ayrıca tez çalışmam boyunca bilgi birikimlerini benimle paylayan Matematik bölümündeki hocalarıma ve süreçte zamanını ve fikirlerini esirgemeyen Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR ve Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Tüm öğrenim yaşantımda olduğu gibi bu süreçte de desteklerini esirgemeyen sevgili annem-babam Selime-Ruhi ÖZEN'e, bu yoğun süreçte hep destek olan, bilimsel hatıra bırakacağım kızım İrem Bilge ESEN ve sevgili eşim Kemal Ersin ESEN'e teşekkür ederim.

Son olarak Yüksek Lisans öğrenimimde “TÜBİTAK Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığı (BİDEB) 2211-Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı” kapsamında burs desteği sağlayan, TÜBİTAK'a teşekkürlerimi iletirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	x
1. GİRİŞ	1
2. LİTERATÜR ÖZETİ	5
3. GENEL BİLGİLER	8
4. BULGULAR	15
4.1. Sınır Değer Probleminin İfadesi	15
4.2. Sınır - Değer -Geçiş Problemine Uygun Hilbert Uzayının Kurulması	15
4.3. Probleme Uygun Diferansiyel Opratörün Kurulması	19
4.4. Problemin Ürettiği $\mathcal{A}$ Operatörünün Simetrikliği	25
4.5. Sol ve Sağ Aralıkta Tanımlı Temel Çözümler	28
4.5.1. (4.1)-(4.5) Süreksizlik noktası içeren periyodik sınır-değer problemi- nin karakteristik fonksiyonu	29
4.5.2. Sol ve sağ temel çözümler için integral denklemler ve asimptotik eşitlikler	32
4.5.3. Karakteristik fonksiyonun asimptotik davranışı	35
4.5.4. Özdeğerlerin asimptotik davranışı	36
5. SONUÇ ve ÖNERİLER	39

KAYNAKLAR	40
ÖZGEÇMİŞ	42



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil	Sayfa
Şekil 3.1. $f(t)$ fonksiyonunun grafiği.	13
Şekil 3.2. $g(t)$ fonksiyonunun grafiği.	13



SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
$L_2[a, b]$	2. kuvvetten Lebesgue anlamında integrallenebilen $[a, b]$ üzerinde ölçülebilir fonksiyonların kümesi
L	Lineer diferensiyel operatör
L^*	L 'nin eşleniği
$\langle u_1, u_2 \rangle$	u_1 ve u_2 nin iç çarpımı
$\ u\ $	u vektörünün normu

1. GİRİŞ

Matematiksel fiziğin bir çok problemini değişkenlerine ayırma yöntemi ile çözerken, genelde Sturm-Liouville problemi elde edilir. Sturm-Liouville problemi kompleks parametre (buna ayırma parametresi veya spektral parametre de denir) içeren

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}y\right) + q(x)y = \lambda \omega(x)y, \quad a < x < b \quad (1.1)$$

ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemden ve (a, b) aralığının sınır noktalarında tanımlanmış

$$\mu_1 y(a) + \mu_2 y(a) = 0 \quad (1.2)$$

$$\gamma_1 y(b) + \gamma_2 y(b) = 0 \quad (1.3)$$

sınır şartlarından oluşmuş bir sınır değer problemidir; burada p , q ve ω reel değerli fonksiyonlardır ve her biri $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli (yani, p , q ve $\omega \in \mathbb{C}[a, b]$, $\mu_1, \mu_2, \gamma_1, \gamma_2$ reel katsayılar, λ ise kompleks özdeğer parametresidir). Doğal olarak $\mu_1^2 + \mu_2^2 \neq 0$ ve $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0$ şartlarının sağlandığını kabul ediyoruz. Ayrıca $\forall x \in [a, b]$ için $p(x) > 0$ ve $\omega(x) > 0$ şartlarının sağlandığı kabul edilir. Bu şartlar sağlandığı durumda (1.1)-(1.3) problemine reguler(düzgün) Sturm-Liouville problemi (SLP) denir. Eğer λ parametresinin bir $\lambda = \lambda_0$ değeri için (1.1)-(1.3) Sturm-Liouville problemini sağlayan ve aşık olmaya $y(x)$ çözümü varsa λ_0 değerine (1.1)-(1.3) Sturm-Liouville probleminin özdeğeri, $y_0(x)$ çözümüne ise bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyonu denir.

Matematiksel fizik problemlerini değişkenlerine ayırma yöntemi ile çözebilmek için genelde uygun Sturm-Liouville probleminin sayılabilir sonsuz sayıda özdeğerinin mevcut olduğunu ve bu özdeğerlere uygun maksimal sayıda ortonormalleştirilmiş özfonksiyonlar sisteminin uygun Hilbert uzayında (genelde $L_2[a, b]$ uzayında) ortonormal baz oluşturduğunu göstermek gerekir.

Matematiksel fizik problemlerinin istenilen kadar küçük hata ile yaklaşık çözümlerinin bulunabilmesi için ise özfonksiyonlar sisteminin en azından tam sistem olduğunu göstermek gerekir. Bu durumlarda matematiksel fizik problemlerinin çözümü özfonksiyonlar sistemi üzerine açılmış seri biçiminde elde edilir. En basit matematiksel fizik problemleri için bu seri klasik Fourier serisi biçiminde elde edilir, yani özfonksiyonlar trigonometrik fonksiyonlar biçiminde bulunur. Diğer bazı fizik problemleri için ise özfonksiyonlar sistemi Bessel fonksiyonları, Hermite polinomları ve bu biçimde özel fonksiyonlar olarak elde edilir bu nedenle özel fonksiyonlar teorisi Sturm-Liouville teorisi esasında oluşmuş ve gelişmiştir. Sturm-Liouville teorisinde fizik ve mühendislik biliminin hatta diğer doğa bilimlerinin kısmi diferansiyel denklemler biçiminde modellenen problemlerinin çözümü için etkin yöntemler

geliştirilmiştir.

Örneğin, Kuantum mekaniğinde Sturm-Liouville problemleri çeşitli potansiyel problemleri içeren Schrödinger denklemlerinin çözümü için önemlidir. Özdeğerler kuantum sistemlerinin enerji seviyelerini temsil eder, özfonksiyonlar ise parçacıkların durum fonksiyonlarına karşılık gelir. Dalga mekaniğinde sicimlerin ve zarların titreşimi ve ses ve elektromanyetik dalgaların yayılımı dahil olmak üzere bir çok problemin çözümü Sturm-Liouville problemlerine indirgenmektedir. Böyle dalga problemlerinin çözümü müzik aletlerinden gelişmiş iletişim sistemlerine kadar çok çeşitli cihazları tasarlamak ve analiz etmek için önemlidir.

Makine ve havacılık mühendisliğinde yapıların doğal frekanslarını ve mod şekillerini incelemek için de Sturm-Liouville teorisinden yararlanılmaktadır. Ayrıca termal mühendislikte, özellikle de ısı ve kütle transferi problemleri Sturm-Liouville problemleri biçiminde ifade edilir. Böyle problemlerin çözümü ise verimli ısı eşanjörleri tasarlamak, soğutma süreçlerini anlamak ve çeşitli endüstriyel uygulamalar için gereklidir.

Hem Sturm-Liouville teorisinin iç talepleri hem de matematiksel fizikte ortaya çıkan yeni problemlerin çözümü ihtiyacı Sturm-Liouville teorisinin hem güncelliğini korumasında hem de yeni teorilere temel oluşturmada etkin rol oynamaktadır. Son yıllarda Sturm-Liouville teorisi farklı yönlerde genelleştirilmiş ve geliştirilmiştir. Özellikle de sadece denkleminde değil hem de sınır şartlarında özdeğer parametresi bulunduran ve/veya sonlu sayıda ayırık aralıkta tanımlı olan Sturm-Liouville problemleri (böyle problemlere çok aralıklı sınır değer problemleri denir) yoğun bir biçimde araştırılmaktadır (Daci, Alfred, Saimir Tola ve Ndrçim Çepa, 2023).

Örneğin aşağıdaki matematiksel fizik problemi sadece diferansiyel denkleminde değil hem de sınır şartlarında özdeğer parametresi bulunduran Sturm-Liouville problemine indirgenir.

Kenarları $x = 0$, $x = 1$, $z = 0$ ve $z = 1$ olan kare şeklindeki levhanın $U(x, z)$ kararlı durum sıcaklıklarını araştıralım. $x = 0$ noktasındaki kenar sıfır sıcaklığında ve $z = 0$ noktasındaki kenarın her noktası $F(x)$ sıcaklığında tutulsun. $x = 1$ noktasındaki kenarın, iletkenlik katsayısı x yönünde z yönüne göre çok daha büyük olan ince bir anizotropik malzeme şeridi ile bir termal temas halinde olduğunu varsayalım, böylece şeritteki sıcaklıklar tek başına z noktasının bir fonksiyonu olarak kabul edilebilir. Benzer bir durumun $z = 1$ noktasındaki kenar için de geçerli olduğunu varsayalım, böylece bu şeritteki sıcaklıklar tek başına x noktasının bir fonksiyonu olarak kabul edilebilir. Yüzeylerde ısı, doğrusal bir yasaya göre sıfır sıcaklığında bir dış ortama aktarılırsa ve ısı transfer katsayısı $r(x)$ sürekli bir fonksiyon ise, sınır değer problemi şu şekilde yazılabilir

$$U_{zz} + U_{xx} - cr(x)U = 0,$$

$$U(0, z) = 0,$$

$$U_x(1, z) - k_1 U_{zz}(1, z) = 0,$$

$$U(x, 0) = F(x),$$

$$U(x, 1) - k_2 U_{xx}(x, 1) = 0.$$

Problemin bu ifadesinde $\frac{1}{c}$ levhanın iletkenliğidir, $k_1 = cq_1$, $k_2 = cq_2$, burada q_1 ve q_2 sırasıyla z ve x yönlerinde $x = 1$ ve $z = 1$ boyunca şeritlerin iletkenlik katsayılarıdır.

Problemin çözümünde, $x = 1$ ve $z = 1$ noktalarındaki sınır koşulları ve diferansiyel denklemdaki sabit olmayan katsayı nedeniyle, sonlu bir Fourier dönüşümünün veya Laplace dönüşümünün kullanılması daha az sonuç verdiğinden, değişkenlerin ayrılması için klasik yönteme yönlendiriliriz. $U(x, z) = y(x)w(z)$ formundaki homojen koşulların çözümlerini türetirken,

$$y''(x) + [\lambda - cr(x)]y(x) = 0,$$

$$y(0) = 0,$$

$$ck_1 r(1)y(1) - y'(1) - k_1 y''(1) = 0$$

özdeğer problemini elde ederiz. Bu problemin sınır şartları daha genel olan

$$U_0[y] \equiv a_1 y(0) + a_2 y'(0) + a_3 y''(0) = 0,$$

$$U_1[y] \equiv b_1 y(1) + b_2 y'(1) + b_3 y''(1) = 0$$

sınır şartlarının bir özel durumudur.

Burada a ve b sayıları gerçel sabitlerdir. Bu sınır koşulları

$$U_{\lambda_0}[y] \equiv \{a_1 - a_3[\lambda + p(0)]\}y(0) + a_2 y'(0) = 0,$$

$$U_{\lambda_1}[y] \equiv \{b_1 - b_3[\lambda + p(1)]\}y(1) + b_2 y'(1) = 0$$

biçiminde alternatif formda da yazılabilir. Böylece özdeğer parametresini hem denklemden hem de sınır şartlarında bulunduran Sturm-Liouville problemi elde edilir (Bauer, 1953).

Bu Yüksek Lisans tez çalışmamızda bir çok açıdan klasik Sturm-Liouville problemlerinden farklı olan yeni bir sınır değer problemi incelenmiştir. Araştırdığımız problem klasik regüler Sturm-Liouville problemlerinden aşağıdaki yönleri ile farklıdır.

- i) Sturm-Liouville denklemi tek bir $[-\pi, \pi]$ aralığında değilde iki ayrık $[-\pi, 0)$ ve $(0, \pi]$ aralıklarında tanımlıdır.
- ii) Sınır şartları ayrılmış sınır şartları değil, aralığın her iki uç noktasında tanımlı olan periyodik sınır şartlarıdır.
- iii) Sınır şartlarının dışında geçiş şartları olarak adlandırılan iki ilave şart da mevcuttur; bu şartlar $x = 0$ iletim noktasında (aralıkların ortak uç noktasında) tanımlanmıştır.
- iv) Özdeğer parametresi sadece diferansiyel denklemde değil hem de geçiş şartlarında bulunmaktadır.

Araştırdığımız Sturm-Liouville problemi literatürde ilk olarak bu tez çalışmasında incelenmiştir.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Sturm-Liouville problemleri, J. Sturm (1803 – 1855) ve J. Liouville'nin (1809 – 1889) çalışmalarından başlayarak günümüze kadar yoğun bir biçimde araştırılmış ve araştırılmaya devam edilmektedir. Bu konuda literatürde çok sayıda kitap ve binlerce makale bulunmaktadır. Bu bölümde sadece tez konumuzla yakından ilgili olan bazı çalışmalardan bahsedilecektir.

Kandemir ve Mukhtarov 2017 yılında, iki ayrık $[-1, 0)$ ve $(0, 1]$ aralığındaki

$$p(x)u''(x) + (q(x) - \lambda)u = f(x)$$

diferansiyel denklemden

$$\begin{aligned} & \alpha_k u^{(m_k)}(-1) + \beta_k u^{(m_k)}(-0) + \eta_k u^{(m_k)}(+0) + \gamma_k u^{(m_k)} \\ & + \sum_{j=1}^{n_k} \delta_k j u^{(m_k)}(x_{kj}) + \sum_{v=1}^2 \sum_{j=0}^{m_k} \int_{\Omega v} K_k v j(t) u^{(j)}(t) dt = f(x), \quad k = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

singüler sınır geçiş şartlarından oluşan bir Sturm-Liouville problemini incelemişlerdir. Bu problemin Fredholmlik çözülebilirlik ve izomorfizm gibi önemli özelliklerini incelemişlerdir (Kandemir ve Mukhtarov, 2017).

Kandemir ve Mukhtarov, çalışmalarında iki ayrık aralıkta bir eliptik diferansiyel operatör denklemini sınır geçiş şartları ile araştırmışlardır. Bu çalışmalarında problemin kök fonksiyonları sisteminin Abel bazı oluşturduğunu ispatlamışlardır (Kandemir ve Mukhtarov, 2020).

Aydemir ve Mukhtarov 2017 çalışmalarında özparametrenin sadece denklemden değil, aynı zamanda sınır ve iletim koşullarında da ortaya çıktığı iki ayrık aralıkta yeni bir sınıf Sturm-Liouville problemini araştırmışlardır. Özdeğerlerin ve bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonların bazı spektral özelliklerini inceleyip özdeğerlerin ve karşılık gelen özfonksiyonların asimptotik davranışı üzerinde çalışmışlardır (Aydemir ve Mukhtarov, 2017).

Mukhtarov ve Aydemir, iki ayrık aralıkta tanımlanmaları ayrıca sol ve sağ aralıklar arasındaki etkileşimi tanımlayan ek transfer koşulları içermeleri bakımından klasik problemlerden farklı olan yeni bir tipteki sınır değer problemlerinin bazı karşılaştırma ve salınım özelliklerini incelemişlerdir (Mukhtarov ve Aydemir, 2021).

Mukhtarov ve arkadaşları 2004 yılında çalışmalarında iki ayrık aralıkta tanımlı olan bir Sturm-Liouville denkleminin özparametresine bağımlı sınır şartlarından ve ayrık aralıklarına ortak uç noktasında tanımlanmış iki tane ek geçiş şartlarından oluşmuş bir Sturm-Liouville probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarının bir çok temel özelliklerini araştırmışlardır (Mukhtarov ve arkadaşları, 2004).

tarov, Kadakal ve Muhtarov, 2004).

Aydemir, çalışmasında iki aralıklı bir Sturm-Liouville denkleminde spektral parametreye lineer bağımlı olan iki tane sınır şartından ve süreksizlik (iletim) noktasında tanımlı geçiş şartlarından oluşmuş Sturm-Liouville problemini incelemek için bu problemi $L_2[a, b] \oplus \mathbb{C}^n$ biçiminde bir Hilbert uzayında tanımlı olan lineer diferansiyel operatör denklemine indirgemiştir ve diferansiyel operatör teorisinden de yararlanarak verilmiş Sturm-Liouville probleminin bazı önemli spektral özelliklerini incelemiştir (Aydemir, 2014).

Mukhtarov ve Aydemir, çalışmalarında parametre bağımlı bir süreksiz Sturm-Liouville probleminin operatör teoremi yorumunu vermişlerdir. Bu çalışmada araştırılan Sturm-Liouville probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarının asimptotik davranışları için bir formül elde etmişlerdir (Mukhtarov ve Aydemir, 2015).

J.Walter 1973, makalesinde sınır şartlarında özdeğer parametresi bulunduran bir regüler Sturm-Liouville problemini Hilbert uzayında tanımlı olan diferansiyel operatör şeklinde ifade etmiş ve daha sonra lineer diferansiyel operatörler teorisinden iyi bilinen Hilbert-Schmidt teorisinden de yararlanmakla özfonksiyonlar sistemi için Fourier açılımını elde etmiştir (Walter, 1973).

Binding ve arkadaşları özdeğer parametresini rasyonel ifade biçiminde bulunduran bir Sturm-Liouville problemini araştırarak özdeğerlerin mevcudluğu ve özfonksiyonların salınım özelliklerini araştırmışlardır (Binding, Browne ve Watson, 2002).

Yılmaz ve arkadaşları

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, x \in [a, c) \cup (c, b]$$

denkleminde,

$$y(a) = y(b), y'(a) = y'(b)$$

periyodik sınır şartlarından ve $x = c$ süreksizlik noktasındaki,

$$y(+c) = \alpha y(c-), y'(c+) = y'(c-)$$

geçiş şartlarından oluşan periyodik Sturm-Liouville sınır-değer-geçiş probleminin spektral özelliklerini incelemiştir (Yılmaz, Kandemir ve Aydemir, 2019).

Zhang ve Li 2020 yılında özparametreye bağımlı sınır koşulları ile ilgili regüler Sturm-Liouville problemleri üzerinde çalışmış, özdeğerlerin sadece sürekli değil, aynı zamanda problemin parametrelerine bağlı sınır koşulu matrisine düzgün bir şekilde bağlı olduğunu elde etmişlerdir (Zhang ve Li, 2020).

Chu ve arkadaşları 2023 çalışmalarında genel bir Sturm-Liouville probleminin en küçük pozitif periyodik özdeğeri ve tüm Dirichlet özdeğerleri için keskin tahminleri elde etmek için analitik bir yaklaşım geliştirmişlerdir (Chu, Meng ve Zhang, 2023).

Muhtarov ve Aydemir, Klasik periyodik Sturm-Liouville problemlerinin bazı önemli spektral özelliklerini, daha önce çalışılmamış olan, iç etkileşim noktasında ek iletim koşullarına sahip iki bağlantılı periyodik problemlere genelleştirmişlerdir (Mukhtarov ve Aydemir, 2021).

Zhang ve arkadaşları 2023 çalışmalarında özdeğer parametresine rasyonel olarak bağlı sınır şartları ve geçiş şartları içeren yeni iç çarpım altında operatör teorik formülasyonu kullanılarak, bu operatörün kendine eşlenikliğini kanıtlamışlardır (Zhang, Chen ve Ao, 2023).

Esen ve arkadaşları, çalışmalarında süreksizlik noktasına sahip bir Sturm-Liouville denklemini araştırmışlardır. Bu çalışmada problem periyodik sınır şartlarından ve süreksizlik noktasında verilen geçiş şartlarından oluşan;

$$\mathfrak{E}u := -u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$$

Sturm-Liouville denkleminde $x = 0$ iç tekil noktasında verilen

$$\mathfrak{E}_1 u := u(-0) - \gamma u(+0) = 0$$

$$\mathfrak{E}_2 := u'(-0) - \delta u'(+0) = 0$$

geçiş şartlarından ve de uç noktalarda verilen

$$\mathfrak{E}_3 := u(-1) - u(1) = 0$$

$$\mathfrak{E}_4 := u'(-1) - u'(1) = 0$$

periyodik sınır şartlarından oluşan sınır değer problemini ele almışlardır (Esen, Aydemir ve Mukhtarov, 2023).

Zhang ve arkadaşları 2024 çalışmalarında Sturm-Liouville operatörünü periyodik koşul ve sonlu sayıda süreksizlik ile incelemişler ve teklik teoremini iki spektrum ve işaret kümeleri ile kanıtlayıp ve yeniden yapılandırma algoritmasını oluşturmuşlardır (Zhang, Wang ve Yang, 2024).

3. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde fonksiyonel analizden iyi bilinen ve tezimizde kullanılan bazı kavramlardan bahsedilmiştir (Kandemir, 2021 ve Kreyszig, 1991).

3.1 Tanım Bir $X \neq \emptyset$ verilsin. Eğer her sıralı $v, \vartheta \in X$ eleman çiftine bir $d(v, \vartheta)$ reel sayısı karşılık getirilmişse ve $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$d(v, \vartheta) > 0, \quad (v \neq \vartheta \text{ olacak biçimde her } v, \vartheta \in X \text{ için})$$

$$d(v, \vartheta) = 0 \Leftrightarrow v = \vartheta,$$

$$d(v, \vartheta) = d(\vartheta, v) \quad (\text{her } v, \vartheta \in X \text{ için})$$

$d(\vartheta, \omega) \leq d(\vartheta, v) + d(v, \omega)$ (üçgen aksiyomu) (her $v, \vartheta, \omega \in X$ için) koşulları sağlanıyorsa, d fonksiyonuna metrik fonksiyonu denir ve üzerinde d fonksiyonu tanımlanmış $X \neq \emptyset$ kümesine metrik uzay denir ve (X, d) simgesi ile gösterilir.

3.2 Tanım $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ cismi üzerinde tanımlı V doğrusal uzayı verilsin. Eğer her $v \in V$ elemanına $\|v\|$ reel sayısı karşılık getirilmişse ve $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}, v \rightarrow \|v\|$ fonksiyonu

$$\|\vartheta\| > 0, \quad \text{her } \vartheta \neq 0 \text{ için } (\vartheta \in V)$$

$$\|0\| = 0,$$

$$\|\alpha\vartheta\| = |\alpha|\|\vartheta\|, \text{ her } \alpha \in \mathbb{K} \text{ ve } \forall \vartheta \in V \text{ için}$$

$\|v + \vartheta\| \leq \|v\| + \|\vartheta\| \quad (v, \vartheta \in V \text{ için})$ (üçgen eşitsizliği) koşullarını sağlıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna norm fonksiyonu denir, üzerinde norm tanımlanan doğrusal uzayına normlu uzay denir ve $(V, \|\cdot\|)$ simgesi ile gösterilir, $\|v\|$ reel sayısına ise $v \in V$ elemanının normu denir, normlu uzayın elemanlarına vektör de denir.

3.3 Tanım Normlu V doğrusal uzayında bir $\{a_i\}$ dizisi verilsin. Eğer

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|a_i - a\| = 0$$

eşitliğini sağlayan en az bir $a \in V$ elemanı mevcut ise, $\{a_i\}$ dizisine yakınsak dizi denir, a elemanına ise onun limiti denir ve

$$\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a$$

biçiminde gösterilir.

Bilinmektedir ki, her normlu V doğrusal uzayında

$$d(v, \vartheta) = \|v - \vartheta\|$$

eşitliği bir metrik tanımlar. Bu anlamda her $(V, \|\cdot\|)$ uzayı aynı zamanda bir metrik uzaydır.

3.4 Tanım Normlu V doğrusal uzayında $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ vektörler dizisi verilsin. Eğer $\forall i, j > n_0$

için

$$\lim_{i, j \rightarrow \infty} \|a_i - a_j\| = 0$$

olacak şekilde bir $n_0 > 0$ sayısı varsa bu diziye Cauchy dizisi denir.

3.5 Tanım $(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayı tam ise, yani bu uzayda her Cauchy dizisi yakınsak ise, bu normlu uzaya Banach uzayı denir.

3.6 Tanım $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ cismi üzerinde tanımlı olan V doğrusal uzayı verilsin. Eğer bu uzayın her sıralı v, ϑ eleman çiftine (yani, $\forall (v, \vartheta) \in V \times V$ elemanına) $\langle v, \vartheta \rangle$ ile gösterilen bir $\langle v, \vartheta \rangle \in \mathbb{K}$ sayısı karşılık gelmişse ve $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}, (v, \vartheta) \rightarrow \langle v, \vartheta \rangle$ fonksiyonu (bu fonksiyona iç çarpım fonksiyonu da denir)

$$\langle v, v \rangle > 0 \quad (\text{her } v \neq 0, \quad v \in V \text{ için})$$

$$\langle v, v \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow v = 0$$

$$\langle v, \vartheta \rangle = \overline{\langle \vartheta, v \rangle} \quad (\text{her } v, \vartheta \in V \text{ için})$$

$$\langle v_1 + v_2, \vartheta \rangle = \langle v_1, \vartheta \rangle + \langle v_2, \vartheta \rangle \quad (\text{her } v_1, v_2, \vartheta \in V)$$

$\langle \alpha v, \vartheta \rangle = \alpha \langle v, \vartheta \rangle$ (her $\alpha \in \mathbb{K}$ ve $v, \vartheta \in V$ için) şartlarını sağlıyorsa, $\langle v, \vartheta \rangle$ sayısına (reel veya kompleks) ise v ve ϑ vektörlerinin iç-çarpımı denir. Üzerinde iç-çarpım fonksiyonu tanımlanan doğrusal uzaya ise iç-çarpım uzayı denir ve $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ şeklinde gösterilir.

Bilinmelidir ki, her iç-çarpım uzayında

$$\|v\| = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}$$

eşitliği bir norm tanımlar.

Sonuç Her iç-çarpım uzayında

$$d(x, y) = \|x - y\| = \langle x - y, x - y \rangle^{\frac{1}{2}}$$

eşitliği bir metrik tanımlar.

3.7 Tanım Tam iç-çarpım uzayına Hilbert uzayı denir ve genelde $\mathcal{H}$ simgesi ile gösterilir.

3.8 Tanım Bir $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ iç-çarpım uzayının $f, g \in V$ elemanları için

$$\langle f, g \rangle = 0$$

oluyorsa, bu vektörler ortogonaldir (diktir) denir ve $f \perp g$ şeklinde gösterilir.

3.1 Teorem (**Rouche Teoremi**)

Kompleks düzlemde basit ve kapalı bir eğrisi ile sınırlı olan $D \subset \mathbb{C}^2$ bölgesi verilsin. $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonlarıyla D bölgesinde ve onun sınırında analitik fonksiyonlar olsun ve kabul edelim ki, D bölgesinin sınırındaki her z noktası için $|g(z)| < |f(z)|$ şartı sağlansın. O halde D bölgesinde $f(z)$ fonksiyonu ile $f(z) + g(z)$ fonksiyonlarının sıfır yerlerinin sayısı (her sıfır yeri katı sayıda hesaplanmak kaydı ile) eşittir (Adan, Van Leeuwaarden ve Winands, 2006).

3.9 Tanım $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı olan $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları verilsin. Eğer öyle $K \geq 0$ ve $\delta > 0$ sayıları varsa ki

$$0 < |z - z_0| < \delta$$

olacak biçimde her $z \in \mathbb{C}$ için

$$|f(z)| \leq K|g(z)|$$

eşitliği sağlansın. O halde $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının komşuluğunda $g(z)$ fonksiyonu tarafından asimptotik olarak sınırlanmıştır denir ve bu durumda

$$f(z) = O(g(z)), \quad z \rightarrow z_0$$

yazılır.

3.10 Tanım $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı olan $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları verilsin. Eğer z_0 noktasının bir komşuluğunda tanımlı olan ve $\lim_{z \rightarrow z_0} \alpha(z) = 0$ şartını sağlayan en az bir $\alpha(z)$ fonksiyonu varsa ki, z_0 noktasının en az bir komşuluğunda

$$f(z) = \alpha(z)g(z)$$

eşitliği sağlansın o halde $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının komşuluğunda $g(z)$ fonksiyonundan asimptotik olarak küçüktür denir ve

$$f(z) = o(g(z)), \quad z \rightarrow z_0$$

biçiminde yazılır. Bir başka ifade ile, eğer $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının en az bir $0 < |z - z_0| < \delta$ delinmiş komşuluğunda sıfırdan farklı ve

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 0$$

ise, bu durum

$$f(z) = o(g(z)), \quad z \rightarrow z_0$$

biçiminde gösterilir.

3.11 Tanım $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonlarının $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının bir $0 < |z - z_0| < \delta$ delinmiş komşuluğunda tanımlı ve her ikisi sıfırdan farklı olduğunu kabul edelim. Eğer

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 1$$

eşitliği sağlanırsa, o halde $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları, z_0 noktasının komşuluğunda asimptotik olarak eşittir ve denktir denir ve durum

$$f(z) \sim g(z), \quad z \rightarrow z_0$$

biçiminde gösterilir. Kolayca görülür ki, $f(z) \sim g(z)$, $z \rightarrow z_0$ olması için gerek ve yeter şart

$$f(z) - g(z) = o(g(z)), \quad z \rightarrow z_0$$

veya

$$f(z) = g(z) + o(g(z)), \quad z \rightarrow z_0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Örnekler:

- $f(z) = O(1)$, $z \rightarrow z_0$ eşitliği $f(z)$ fonksiyonun z_0 noktasının en az bir komşuluğunda sınırlı olduğu anlamına gelir.

$$f(z) = o(1), \quad z \rightarrow z_0$$

ifadesi

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0$$

eşitliği ile eşdeğerdir.

- $f(t) = 5t^2 + t + 3$ fonksiyonu için $f(z) = o(z^n)$, $z \rightarrow \infty$ asimptotik eşitliği her $n \geq 3$ doğal sayısı için sağlanır. Aynı fonksiyon için aşağıdaki asimptotik eşitlikler de sağlanır.
- $f(z) = O(z^2)$, $z \rightarrow \infty$
- $f(z) \sim 5z^2$, $z \rightarrow \infty$
- $f(z) = O(1)$, $z \rightarrow 0$

Not: Benzer yöntem ile reel değerli fonksiyonlar için de benzer asimptotik eşitlikler tanımlanabilir.

Not: Benzer yöntem ile reel veya kompleks diziler için de asimptotik eşitlikler tanımlanabilir. Örneğin reel değerli fonksiyonlar ve reel diziler için aşağıdaki asimptotik eşitlikler geçerlidir.

- $t^{1000} = o(e^t), \quad t \rightarrow \infty$
- $\cos t = O(1), \quad t \rightarrow \infty$
- $t^2 = o(t), \quad t \rightarrow 0$
- $\sin t \sim t, \quad t \rightarrow 0$
- $\cos t \sim 1 - \frac{t^2}{2}, \quad t \rightarrow 0$
- $\sin \frac{1}{t} = O(1), \quad t \rightarrow 0$
- $e^{-\frac{1}{t}} = o(1), \quad t \rightarrow \infty$
- $X_n = 3n^2 - 7n + 8$ reel sayılar dizisi için $n \rightarrow \infty$ olduğundan

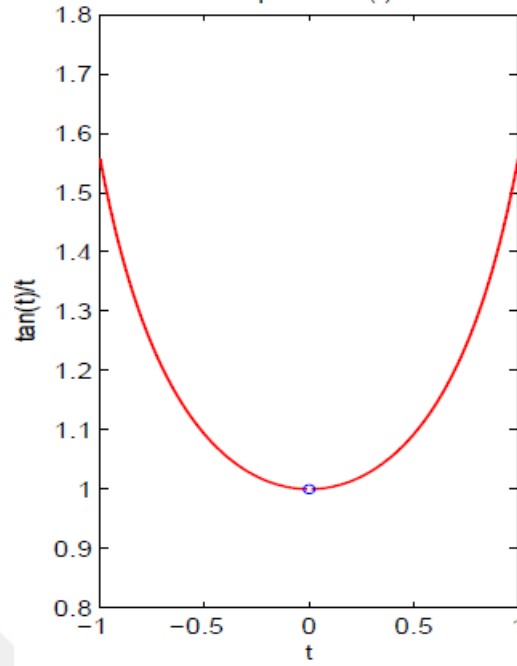
$$X_n = o(n^3), \quad X_n = o(n^4)$$

ve genel olarak $X_n = o(n^K), \quad K > 3$ için

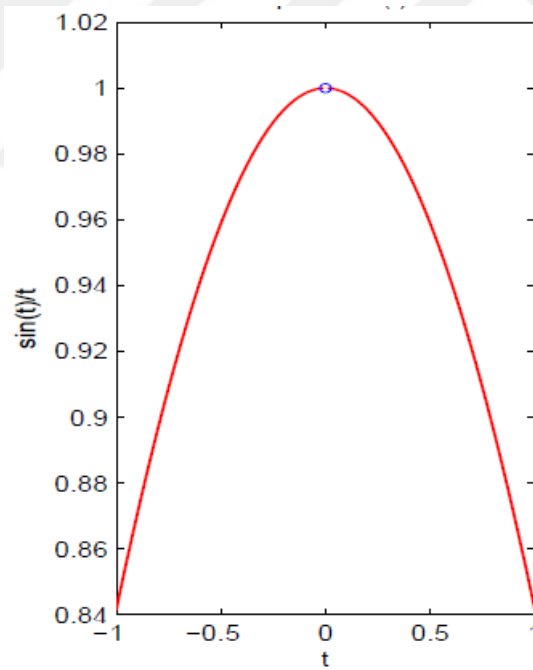
$$X_n = O(n^2), \quad n \rightarrow \infty$$

$$X_n \sim 3n^2, \quad n \rightarrow \infty$$

- $f(t) = \frac{\tan t}{t}$ ve $g(t) = \frac{\sin t}{t}$ fonksiyonlarını alalım.



Şekil 3.1. $f(t)$ fonksiyonunun grafiği.



Şekil 3.2. $g(t)$ fonksiyonunun grafiği.

$$\tan t \sim t, \quad t \rightarrow 0 \quad \text{ve} \quad \sin t \sim t, \quad t \rightarrow 0 \quad (t \in \mathbb{R})$$

olduğu için $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları $t = 0$ noktasında tanımsızdır; ancak $t \rightarrow 0$ iken bu fonksiyonların her ikisi de 1 değerine yaklaşır. Soldan ve sağdan limit değeri sıfırdır (Malham, 2005).

3.12 Tanım $p'(x)$, $p(x)$, $q(x)$ ve $r(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ reel aralığında sürekli ve aralığın her bir noktasında $p(x) > 0$, $r(x) > 0$ ve λ , x değişkenlerinden bağımsız bir parametre olmak üzere

$$(p(x)y')' + (q(x) + \lambda r(x))y = 0, \quad a \leq x \leq b \quad (3.1)$$

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \quad (3.2)$$

$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$ olarak tanımlanmış probleme regüler Sturm-Liouville sınır değer problemi ya da Sturm-Liouville sistemi denir (Kandemir, 2021).

3.13 Tanım Eğer (3.1) ve (3.2) sınır şartları yerine

$$y(a) = y(b) \quad (3.3)$$

$$y'(a) = y'(b) \quad (3.4)$$

sınır şartları yazılırsa, bu sınır şartlarına periyodik sınır şartları dolayısıyla (3.1)-(3.4) problemine de periyodik Sturm -Liouville problemi denir (Kandemir, 2021).

3.14 Tanım Aşağıdaki durumlardan en az biri sağlanıyorsa (3.1)-(3.2) ile ifade edilen problem bir singüler Sturm-Liouville problemidir (Kandemir, 2021).

- 1) Herhangi bir $x \in [a, b]$ için $r(x) = 0$ veya $p(x) = 0$
- 2) $p(x)$, $q(x)$ veya $r(x)$ katsayı fonksiyonlarından en az biri, a ve b noktalarından en az birinde sınırsızsa.
- 3) (a, b) aralığında sınırsız, $\left((-\infty, b), (a, \infty) \text{ veya } (-\infty, \infty) \right)$

3.15 Tanım Herhangi iki $h, g \in C^1$ fonksiyonu verildiğinde

$$W(h, g)(x) = \begin{vmatrix} h(x) & g(x) \\ h'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = h(x)g'(x) - g(x)h'(x)$$

determinantı h ve g fonksiyonlarının Wronskian fonksiyonu olarak adlandırılır.

4. BULGULAR

4.1. Sınır Değer Probleminin İfadesi

Tez çalışmamızda $(L_2[-\pi, 0] \oplus L_2(0, \pi]) \oplus \mathbb{C}$ Hilbert uzayında

$$L\phi := -\phi''(x) + q(x)\phi(x) = \lambda\phi(x), \quad x \in [-\pi, 0] \cup (0, \pi] \quad (4.1)$$

diferansiyel denkleminde;

$$\phi(-\pi) = \phi(\pi) \quad (4.2)$$

$$\phi'(-\pi) = \phi'(\pi) \quad (4.3)$$

periyodik sınır şartlarından ve

$$\phi'(0^-) = \lambda\alpha\phi(0^-) \quad (4.4)$$

$$\phi(0^+) = \beta\phi'(0^+) \quad (4.5)$$

geçiş şartlarından meydana gelen sınır değer-geçiş problemini inceleyeceğiz. Burada λ kompleks özdeğer parametresidir $\alpha > 0$, $\beta \neq 0$; reel değerli $q(x)$ fonksiyonu $[-\pi, 0] \cup (0, \pi]$ aralıklarında süreklidir ve $q(0^\pm) = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} q(x)$ sonlu limitleri mevcuttur.

4.2. Sınır - Değer -Geçiş Problemine Uygun Hilbert Uzayının Kurulması

4.1 Tanım (4.1) – (4.5) ile tanımlanan sınır-değer probleminin $\lambda = \lambda_0$ değeri için aşıkâr olmayan $\phi(x)$ çözümü mevcut ise $\lambda = \lambda_0$ değerini (4.1) – (4.5) sınır - değer probleminin özdeğeri olarak adlandıracağız.

Bu aşamada (4.1) – (4.5) ile tanımlanan sınır -değer problemine uygun özel bir Hilbert uzayı tanımlanacak ve bu uzayda verilmiş sınır-değer-geçiş problemi ile aynı özdeğerlere sahip olan lineer operatör kurulacaktır.

$$U(x) \in (L_2[-\pi, 0] \oplus L_2(0, \pi]) \oplus \mathbb{C}, \quad U(x) = \begin{pmatrix} v(x) \\ v_1(x) \end{pmatrix} \text{ olmak üzere}$$

$$H_\alpha = \{U(x) | v \in L_2[-\pi, 0] \oplus L_2(0, \pi], \quad v \in \mathbb{C}\} \text{ doğrusal uzayında}$$

$$U = \begin{pmatrix} v(x) \\ v_1(x) \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v(x) \\ v_1(x) \end{pmatrix}$$

biçiminde olan elemanların iç çarpımını

$$\langle U, V \rangle = \int_{-\pi}^{0^-} v(x) \overline{v(x)} dx + \int_{0^+}^{\pi} v(x) \overline{v(x)} dx + \frac{1}{\alpha} v_1 \overline{v_1} \quad (4.6)$$

eşitliği ile tanımlayalım.

4.1 Yardımcı Teorem (4.6) eşitliği H_α lineer uzayda bir iç çarpım fonksiyonu tanımlar.

Kanıt $\langle, \rangle : \{L_2[-\pi, 0) \oplus L_2(0, \pi] \oplus \mathbb{C}\} \times \{L_2[-\pi, 0) \oplus L_2(0, \pi] \oplus \mathbb{C}\} \longrightarrow \mathbb{K}$ dönüşümü ile tanımlayalım.

1.) $\forall U \in \{L_2[-\pi, 0) \oplus L_2(0, \pi] \oplus \mathbb{C}\}$ için

$$\begin{aligned}\langle U, U \rangle &= \int_{-\pi}^{0^-} v(x) \overline{v(x)} dx + \int_{0^+}^{\pi} v(x) \overline{v(x)} dx + \frac{1}{\alpha} v_1 \overline{v_1} \\ &= \langle v, v \rangle = \int_{-\pi}^{0^-} |v(x)|^2 dx + \int_{0^+}^{\pi} |v(x)|^2 dx + \frac{1}{\alpha} |v_1(x)|^2 \geq 0\end{aligned}$$

olduğu açıktır.

2.) $\forall U \in \{L_2[-\pi, 0) \oplus L_2(0, \pi] \oplus \mathbb{C}\}$ için

$$\begin{aligned}\langle U, U \rangle = 0 &\iff \int_{-\pi}^{0^-} |v(x)|^2 dx + \int_{0^+}^{\pi} |v(x)|^2 dx + \frac{1}{\alpha} |v_1|^2 = 0 \\ &\iff \int_{-\pi}^{0^-} |v(x)|^2 dx = 0, \int_{0^+}^{\pi} |v(x)|^2 dx = 0, \frac{1}{\alpha} |v_1|^2 = 0 \\ &\iff |v(x)| \equiv 0, \quad v_1 = 0 \\ &\iff V = 0\end{aligned}$$

sağlanır.

3.) $\forall U, V, W \in \{L_2[-\pi, 0) \oplus L_2(0, \pi] \oplus \mathbb{C}\}, \forall a, b \in \mathbb{K}$ için

$$\begin{aligned}\langle aU + bV, W \rangle &= \int_{-\pi}^{0^-} (av + b\vartheta) \overline{w} dx + \int_{0^+}^{\pi} (av + b\vartheta) \overline{w} dx + (av_1 + b\vartheta_1) \cdot \overline{w_1} \\ &= a \int_{-\pi}^{0^-} v \overline{w} dx + a \int_{0^+}^{\pi} v \overline{w} dx + \frac{1}{\alpha} av_1 \overline{w_1} + b \int_{-\pi}^{0^-} \vartheta \overline{w} dx + b \int_{0^+}^{\pi} \vartheta \overline{w} dx + \frac{1}{\alpha} b\vartheta_1 \overline{w_1} \\ &= a(U, W) + b(V, W)\end{aligned}$$

olduğu görülür.

4.) $\forall U, V \in \{L_2[-\pi, 0) \oplus L_2(0, \pi] \oplus \mathbb{C}\}$ için

$$\langle U, V \rangle = \int_{-\pi}^{0^-} v \bar{\vartheta} dx + \int_0^{\pi} v \bar{\vartheta} dx + \frac{1}{\alpha} u_1 \bar{\vartheta}_1$$

$$\overline{\langle U, V \rangle} = \overline{\int_{-\pi}^{0^-} v \bar{\vartheta} dx + \int_0^{\pi} v \bar{\vartheta} dx + \frac{1}{\alpha} u_1 \bar{\vartheta}_1}$$

$$= \int_{-\pi}^{0^-} \bar{v} \vartheta dx + \int_0^{\pi} \bar{v} \vartheta dx + \frac{1}{\alpha} \bar{v}_1 \vartheta_1$$

eşitliği elde edilir ve buradan $\langle v, \vartheta \rangle = \overline{\langle \vartheta, v \rangle}$ olduğu görülür. O halde $\langle, \rangle$, $L_2[-\pi, 0) \oplus L_2(0, \pi] \oplus \mathbb{C}$ üzerinde bir iç çarpımdır. $\square$

4.2 Yardımcı Teorem $H_\alpha := L_2[-\pi, 0) \oplus L_2(0, \pi] \oplus \mathbb{C}$ doğrusal uzayı üzerinde tanımlanan $(H_\alpha, \langle, \rangle)$ iç çarpım uzayı Hilbert uzayıdır.

Kanıt İspat için H_α uzayından seçilen herhangi bir Cauchy dizisinin uzay içinde bir noktaya yakınsak olduğunu göstermek yeterlidir.

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi H_α de bir Cauchy dizisi olsun.

$$U_n = \begin{pmatrix} u_{1n}(x) \\ u_{2n} \end{pmatrix} \in H_\alpha, \quad U_m = \begin{pmatrix} u_{1m}(x) \\ u_{2m} \end{pmatrix} \in H_\alpha, \quad u_{1n}(x), u_{1m}(x) \in L_2[-\pi, 0) \oplus L_2(0, \pi],$$

$u_{2n}, u_{2m} \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n, m \geq n_0(\varepsilon)$

için $\|U_n - U_m\|_{H_\alpha} < \varepsilon$ yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned}
\|U_n - U_m\|_{H_\alpha}^2 &= \langle U_n - U_m, U_n - U_m \rangle_{H_\alpha} \\
&= \langle u_{1n} - u_{1m}, u_{1n} - u_{1m} \rangle_{L_2[-\pi, 0)} + \langle u_{1n} - u_{1m}, u_{1n} - u_{1m} \rangle_{L_2(0, \pi]} \\
&\quad + \frac{1}{\alpha} \langle u_{2n} - u_{2m}, u_{2n} - u_{2m} \rangle_{\mathbb{C}} \\
&= \int_{-\pi}^{0^-} (u_{1n} - u_{1m}) \overline{(u_{1n} - u_{1m})} dx + \int_{0^+}^{\pi} (u_{1n} - u_{1m}) \overline{(u_{1n} - u_{1m})} dx \\
&\quad + \frac{1}{\alpha} (u_{2n} - u_{2m}) \overline{(u_{2n} - u_{2m})} \\
&= \int_{-\pi}^{0^-} |u_{1n} - u_{1m}|^2 dx + \int_{0^+}^{\pi} |u_{1n} - u_{1m}|^2 dx + \frac{1}{\alpha} |u_{2n} - u_{2m}|^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\|U_n - U_m\|_{H_\alpha}^2 = \|u_{1n} - u_{1m}\|_{L_2[-\pi, 0)}^2 + \|u_{1n} - u_{1m}\|_{L_2(0, \pi]}^2 + \frac{1}{\alpha} |u_{2n} - u_{2m}|_{\mathbb{C}}^2 < \varepsilon^2$$

yazabiliriz. Buradan

$$\|u_{1n} - u_{1m}\|_{L_2[-\pi, 0)}^2 < \varepsilon^2, \quad \|u_{1n} - u_{1m}\|_{L_2(0, \pi]}^2 < \varepsilon^2, \quad \frac{1}{\alpha} |u_{2n} - u_{2m}|_{\mathbb{C}}^2 < \varepsilon^2 \alpha$$

elde edilir. Bu ise $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin $L_2[-\pi, 0)$, $L_2(0, \pi]$ ve $\mathbb{C}$ kümesinde bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

$L_2[-\pi, 0)$, $L_2(0, \pi]$ ve $\mathbb{C}$ uzayları tam olduklarından buradaki uzaylardan seçilen bir Cauchy dizisi aynı uzayda bir noktaya yakınsar. O halde öyle $u_1^*(x) \in L_2[-\pi, 0)$, $L_2(0, \pi]$ ve $u_2^* \in \mathbb{C}$ mevcuttur ki,

$$\|u_{1n} - u_1^*\|_{L_2[-\pi, 0) \oplus L_2(0, \pi]} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

ve

$$u_{2n} \rightarrow u_2^* \quad (n \rightarrow \infty)$$

sağlanır. Bu limitler yardımı ile

$$\tilde{U} := \begin{pmatrix} u_1^*(x) \\ u_2^* \end{pmatrix} \in H_\alpha$$

elemanını tanımlayalım. O halde

$$\|U_n - \tilde{U}\|_{H_\alpha}^2 = \|u_{1n} - u_1^*\|_{L_2[-\pi,0] \oplus L_2(0,\pi]}^2 + \frac{1}{\alpha} |u_{2n} - u_2^*|$$

eşitliğinin sağ tarafı $n \rightarrow \infty$ olduğunda sıfıra yakınsadığından sol tarafı da $n \rightarrow \infty$ olduğunda sıfıra yakınsar. Yani (U_n) Cauchy dizisinin $\tilde{U} \in H_\alpha$ noktasına yakınsak olduğu ispat edilmiş olur. Böylece H_α -nın tam uzay, yani Hilbert uzayı olduğu da ispatlanmış olur. $\square$

Şimdi bu uzayda verilen (4.1)-(4.5) problemi ile aynı özdeğerlere sahip lineer operatör kurulacaktır.

4.3. Probleme Uygun Diferansiyel Operatörün Kurulması

(4.1)-(4.5) sınır değer probleminin ürettiği

$$\mathcal{A} : H_\alpha \longrightarrow H_\alpha \quad (4.7)$$

lineer operatörün tanım bölgesini

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ U = \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \phi_1 \end{pmatrix} \in H_\alpha \mid \phi(x) \text{ ve } \phi'(x) \text{ fonksiyonları } [-\pi, 0) \text{ ve } (0, \pi] \text{ aralıklarında mutlak süreklidirler; } \phi'' + q(x)\phi \in L_2[-\pi, 0) \oplus L_2(0, \pi]; \text{ sonlu } \lim_{x \rightarrow 0^\mp} \phi' = \phi'(\pm 0) \text{ değerleri mevcuttur; } \phi(-\pi) = \phi(\pi), \phi'(-\pi) = \phi'(\pi), \phi(0^+) = \beta \phi'(0^+), \phi_1 = \alpha \phi(0^-) \} \right.$$

eşitliği ile tanımlayalım. $\mathcal{A} : H_\alpha \longrightarrow H_\alpha$ operatörünü ise bu tanım bölgesinde

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} -\phi''(x) + q(x)\phi(x) \\ \phi'(0^-) \end{pmatrix}$$

eşitliği ile tanımlayalım. Yani, $\mathcal{A}$ operatörü

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \phi_1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -\phi''(x) + q(x)\phi(x) \\ \alpha \phi(0^-) \end{pmatrix}$$

eşitliği ile tanımlanır. O halde

$$AU = \lambda U$$

eşitliği

$$\begin{pmatrix} -\phi''(x) + q(x)\phi(x) \\ \phi'(0^-) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \phi_1 \end{pmatrix}, \quad \phi \in D(\mathcal{A})$$

biçiminde yazılabilir. Buradan

$$-\phi''(x) + q(x)\phi(x) = \lambda\phi(x) \quad (4.8)$$

$$\phi'(0^-) = \lambda\alpha\phi(0^-), \quad \alpha > 0 \quad (4.9)$$

$$\phi(-\pi) = \phi(\pi) \quad (4.10)$$

$$\phi'(-\pi) = \phi'(\pi) \quad (4.11)$$

$$\phi(0^+) = \beta\phi'(0^+), \quad (4.12)$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece (4.8), (4.9), (4.10), (4.11), (4.12) eşitlikleri bir arada kullanılırsa $AU = \lambda U$ eşitliği ile eşdeğer olan (4.1)-(4.5) problemi elde edilir. Yani (4.1)-(4.5)

$$\left(U = \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \phi_1(x) \end{pmatrix} \right) \in D(\mathcal{A})$$

olmak üzere $\mathcal{A}U = \lambda U$ operatör denklem biçiminde yazılabilir.

4.3 Teorem (4.1)-(4.5) eşitlikleri ile verilen sınır-değer geçiş probleminde bütün özdeğerler reeldir.

Kanıt (4.1)-(4.5) sınır-değer geçiş probleminde λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu ϕ olsun. ϕ özfonksiyonunun eşleniği $\bar{\phi}$, λ değerinin eşleniği $\bar{\lambda}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere (4.1)-(4.5) ve

$$-\bar{\phi}''(x) + q(x)\bar{\phi}(x) = \bar{\lambda}\bar{\phi}(x) \quad (4.13)$$

$$\bar{\phi}(-\pi) = \bar{\phi}(\pi) \quad (4.14)$$

$$\bar{\phi}'(-\pi) = \bar{\phi}'(\pi) \quad (4.15)$$

$$\bar{\phi}'(0^-) = \lambda\alpha\bar{\phi}(0^-) \quad (4.16)$$

$$\bar{\phi}(0^+) = \beta\bar{\phi}'(0^+) \quad (4.17)$$

eşitlikleri sağlanır. (4.1) denklemi $\bar{\phi}$ ile (4.13) denklemi ϕ ile çarpılırsa, sırası ile

$$-\phi''\bar{\phi} + q(x)\phi\bar{\phi} = \lambda\phi\bar{\phi} \quad (4.18)$$

ve

$$-\phi\bar{\phi}'' + q(x)\phi\bar{\phi} = \bar{\lambda}\phi\bar{\phi} \quad (4.19)$$

eşitlikleri elde edilir. (4.18) ve (4.19) taraf tarafa çıkartılırsa

$$\phi \bar{\phi}'' - \phi'' \bar{\phi} = (\lambda - \bar{\lambda}) \phi \bar{\phi} \quad (4.20)$$

elde edilir ve

$$\phi \bar{\phi}'' - \phi'' \bar{\phi} = (\phi \bar{\phi}' - \phi' \bar{\phi})'$$

olduğundan

$$(\phi \bar{\phi}' - \phi' \bar{\phi})' = (\lambda - \bar{\lambda}) \phi \bar{\phi} \quad (4.21)$$

yazılabilir. (4.21) $-\pi$ noktasından 0^- noktasına integrallenirse

$$\int_{-\pi}^{0^-} (\phi \bar{\phi}' - \phi' \bar{\phi})' dx = \int_{-\pi}^{0^-} (\lambda - \bar{\lambda}) \phi \bar{\phi} dx$$

$$(\phi \bar{\phi}' - \phi' \bar{\phi})|_{-\pi}^{0^-} = \int_{-\pi}^{0^-} (\lambda - \bar{\lambda}) \phi \bar{\phi} dx$$

$$\phi(0^-) \bar{\phi}' - \phi'(0^-) \bar{\phi}(0^-) - \phi(-\pi) \bar{\phi}'(-\pi) + \phi'(-\pi) \bar{\phi}(-\pi) = \int_{-\pi}^{0^-} (\lambda - \bar{\lambda}) \phi \bar{\phi} dx \quad (4.22)$$

eşitlikleri elde edilir. (4.4) ve (4.16) eşitlikleri (4.22) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \phi(0^-) \bar{\lambda} \alpha \bar{\phi}(0^-) - \lambda \alpha \phi(0^-) \bar{\phi}(0^-) - \phi(-\pi) \bar{\phi}'(-\pi) + \phi'(-\pi) \bar{\phi}(-\pi) = \\ \int_{-\pi}^{0^-} (\lambda - \bar{\lambda}) \phi \bar{\phi} dx \end{aligned} \quad (4.23)$$

ifadesi elde edilir. Aynı şekilde (4.21) eşitliği 0^+ noktasından π noktasına integrallenirse

$$\int_{0^+}^{\pi} (\phi \bar{\phi}' - \phi' \bar{\phi})' dx = \int_{0^+}^{\pi} (\lambda - \bar{\lambda}) \phi \bar{\phi} dx$$

$$(\phi \bar{\phi}' - \phi' \bar{\phi})|_{0^+}^{\pi} = \int_{0^+}^{\pi} (\lambda - \bar{\lambda}) \phi \bar{\phi} dx$$

$$\phi(\pi) \bar{\phi}'(\pi) - \phi'(\pi) \bar{\phi}(\pi) - \phi(0^+) \bar{\phi}'(0^+) + \phi'(0^+) \bar{\phi}(0^+) = \int_{0^+}^{\pi} (\lambda - \bar{\lambda}) \phi \bar{\phi} dx \quad (4.24)$$

eşitlikleri elde edilir. (4.4)-(4.5) ve (4.16)-(4.17) geçiş şartları kullanılarak ve $\alpha \neq 0$ olmak

üzere

$$\begin{aligned}\phi(-\pi) &= \phi(\pi) \\ \phi'(-\pi) &= \phi'(\pi) \\ \phi'(0^-) &= \lambda \alpha \phi(0^-) \\ \phi(0^+) &= \beta \phi'(0^+)\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitlikler (4.24) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}\phi(\pi)\overline{\phi'}(\pi) - \phi'(\pi)\overline{\phi}(\pi) - \beta\phi'(0^+)\overline{\phi'}(0^+) + \phi'(0^+)\beta\overline{\phi'}(0^+) \\ = \int_{0^+}^{\pi} (\lambda - \overline{\lambda})\phi\overline{\phi}dx\end{aligned}\quad (4.25)$$

elde edilir. (4.23) ile (4.25) taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned}(\lambda - \overline{\lambda}) \left[\int_{-\pi}^{0^+} \phi\overline{\phi}dx + \int_{0^-}^{\pi} \phi\overline{\phi}dx \right] &= (\lambda - \overline{\lambda})\alpha\phi(0^-)\overline{\phi}(0^-) \\ (\lambda - \overline{\lambda}) \left[\int_{-\pi}^{0^+} |\phi|^2dx + \int_{0^-}^{\pi} |\phi|^2dx + \alpha|\phi(0^-)|^2 \right] &= 0\end{aligned}\quad (4.26)$$

eşitliği elde edilir. ϕ özfonksiyonu sıfırdan farklı olduğundan dolayı parantez içindeki ifade sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla (4.26) eşitliğinden

$$\lambda - \overline{\lambda} = 0$$

$$\lambda = \overline{\lambda}$$

elde edilir. λ keyfi bir özdeğer olduğundan dolayı verilen problemin bütün özdeğerleri reeldir. $\square$

4.4 Yardımcı Teorem (4.1)-(4.5) periyodik sınır-değer geçiş problemi verilsin. O halde (4.1)-(4.5) sınır geçiş şartlarını sağlayan her $\phi(x)$, $\psi(x)$ fonksiyonları için

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{0^-} \phi(x)L(\psi(x))dx + \int_{0^+}^{\pi} \phi(x)L(\psi(x))dx &= \int_{-\pi}^{0^-} L(\phi(x))\psi(x)dx + \int_{0^+}^{\pi} L(\phi(x))\psi(x)dx \\ &\quad - W(\phi, \psi; 0^-)\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır; burada $L(\phi) := -\phi'' + q(x)\phi$ diferansiyel ifadedir.

Kanıt

$$L(\phi) = -\phi'' + q(x)\phi$$

ve

$$L(\psi) = -\psi'' + q(x)\psi$$

eşitlikleri sırası ile $\phi(x)$ ve $\psi(x)$ fonksiyonları ile çarptıktan sonra taraf tarafa çıkarırsak

$$\phi L(\psi) - \psi L(\phi) = -(\phi \psi'' - \psi \phi'')$$

eşitliği elde edilir. Yani

$$\phi L(\psi) - \psi L(\phi) = -\frac{d}{dx}W(\phi, \psi)$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlik sırası ile $[-\pi, 0)$ ve $(0, \pi]$ aralıklarında integrallenir ise

$$\int_{-\pi}^{0^-} (\phi L(\psi) - \psi L(\phi)) dx = \phi(-\pi) \psi'(-\pi) - \phi'(-\pi) \psi(-\pi) - \phi(0^-) \psi'(0^-) + \phi'(0^-) \psi(0^-)$$

ve

$$\int_{0^+}^{\pi} (\phi L(\psi) - \psi L(\phi)) dx = \phi(0^+) \psi'(0^+) - \phi'(0^+) \psi(0^+) - \phi(\pi) \psi'(\pi) + \phi'(\pi) \psi(\pi)$$

eşitlikleri bulunur. Sonuncu iki eşitliği taraf tarafa topladıktan sonra

$$\phi(-\pi) = \phi(\pi), \quad \psi(-\pi) = \psi(\pi)$$

$$\phi'(-\pi) = \phi'(\pi), \quad \psi'(-\pi) = \psi'(\pi)$$

periyodik sınır şartlarından yararlanılırsa

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{0^-} (\phi L(\psi) - \psi L(\phi)) dx + \int_{0^+}^{\pi} (\phi L(\psi) - \psi L(\phi)) dx &= -\phi(0^-) \psi'(0^-) + \phi'(0^-) \psi(0^-) \\ &+ \phi(0^+) \psi'(0^+) - \phi'(0^+) \psi(0^+) \end{aligned} \quad (4.27)$$

eşitliği bulunur.

$$\phi(0^+) = \beta \phi'(0^+)$$

ve

$$\psi(0^+) = \beta \psi'(0^+)$$

eşitlikleri gereği

$$\begin{aligned}\phi(0^+)\psi'(0^+) - \phi'(0^+)\psi(0^+) &= (\beta\phi'(0^+))\psi'(0^+) - \phi'(0^+)(\beta\psi'(0^+)) \\ &= 0\end{aligned}\quad (4.28)$$

eşitliği bulunur. (4.28) eşitliğini (4.27) eşitliğinde yerine yazarsak istenen eşitliği elde ederiz. $\square$

4.5 Teorem (4.1)-(4.5) sınır değer probleminde iki farklı λ_m ve λ_n özdeğerlerine uygun olan ϕ_m ve ϕ_n özfoksiyonları için

$$\int_{-\pi}^{0^-} \phi_m(x)\phi_n(x)dx + \int_{0^+}^{\pi} \phi_m(x)\phi_n(x)dx + \alpha\phi_n(0^-)\phi_m(0^-) = 0$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt ϕ_m ve ϕ_n özfoksiyon olduğu için

$$-\phi_m'' + q(x)\phi_m = \lambda_m\phi_m \quad (4.29)$$

ve

$$-\phi_n'' + q(x)\phi_n = \lambda_n\phi_n \quad (4.30)$$

eşitlikleri sağlanır. Buradan (4.29) eşitliği ϕ_n , (4.30) eşitliği ϕ_m ile çarpılırsa ve denklemler taraf tarafa çıkarılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$(\phi_n'\phi_m - \phi_m'\phi_n)' = (\lambda_m - \lambda_n)\phi_m\phi_n$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin $-\pi$ noktasından π noktasına integrali alınırsa

$$\begin{aligned}[\lambda_m - \lambda_n] \left[\int_{-\pi}^{0^-} \phi_m(x)\phi_n(x)dx + \int_{0^+}^{\pi} \phi_m(x)\phi_n(x)dx \right] &= (\phi_n'\phi_m - \phi_m'\phi_n)'|_{0^+}^{\pi} + (\phi_n'\phi_m - \phi_m'\phi_n)'|_{0^-}^{-\pi} \\ &= [\phi_n'(0^-)\phi_m(0^-) - \phi_n'(0^-)\phi_m(0^-)] \\ &\quad - [\phi_n'(-\pi)\phi_m(-\pi) - (\phi_m)'(-\pi)\phi_n(-\pi)] \\ &\quad + [\phi_n'(0^+)\phi_m(0^+) - \phi_m'(0^+)\phi_n(0^+)] \\ &\quad - [\phi_n'(\pi)\phi_m(\pi) - \phi_m'(\pi)\phi_n(\pi)]\end{aligned}\quad (4.31)$$

$\phi_n(x)$ ve $\phi_m(x)$ özfonksiyonları (4.2)-(4.5) periyodik sınır şartlarını sağladıkları için

$$\phi'_n(-\pi)\phi_m(-\pi) - \phi'_m(-\pi)\phi_n(-\pi) = \phi'_n(\pi)\phi_m(\pi) - \phi'_m(\pi)\phi_n(\pi) \quad (4.32)$$

eşitliği sağlanır.

Bu özfonksiyonlar (4.5) geçiş şartlarını sağladıkları için

$$\begin{aligned} \phi'_n(0^+)\phi_m(0^+) - \phi'_m(0^+)\phi_n(0^+) &= \phi'_n(0^+)(\beta\phi_m(0^+)) - \phi'_m(0^+)(\beta\phi_n(0^+)) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca ϕ_n ve ϕ_m özfonksiyonları (4.4) parametre-bağımlı geçiş şartlarını sağladıkları için

$$\begin{aligned} \phi'_n(0^-)\phi_m(0^-) - \phi'_m(0^-)\phi_n(0^-) &= \lambda_n\alpha\phi_n(0^-)\phi_m(0^-) - \lambda_m\alpha\phi_m(0^-)\phi_n(0^-) \\ &= \alpha(\lambda_n - \lambda_m)\phi_n(0^-)\phi_m(0^-) \end{aligned} \quad (4.34)$$

eşitliği sağlanır. Elde edilen (4.32)-(4.33) ve (4.34) eşitlikleri (4.31) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$(\lambda_m - \lambda_n) \left[\int_{-\pi}^{0^-} \phi_m(x)\phi_n(x)dx + \int_{0^+}^{\pi} \phi_m(x)\phi_n(x)dx + \alpha\phi_n(0^-)\phi_m(0^-) \right] = 0$$

eşitliği elde edilir. $\lambda_m \neq \lambda_n$ olduğu için buradan

$$\int_{-\pi}^{0^-} \phi_m(x)\phi_n(x)dx + \int_{0^+}^{\pi} \phi_m(x)\phi_n(x)dx + \alpha\phi_n(0^-)\phi_m(0^-) = 0$$

eşitliği bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

4.4. Problemin Ürettiği $\mathcal{A}$ Operatörünün Simetrikliği

4.6 Teorem $H_\alpha := L_2[-\pi, 0) \oplus L_2(0, \pi] \oplus \mathbb{C}$ Hilbert uzayında tanımlı $\mathcal{A}$ operatörü simetriktir. Yani

$\mathcal{A} : H_\alpha \longrightarrow H_\alpha$ lineer operatörü için,

$$\langle \mathcal{A}U, V \rangle_{H_\alpha} = \langle U, \mathcal{A}V \rangle_{H_\alpha}; \quad U, V \in D(\mathcal{A}) \quad \text{bağıntısı sağlanır.}$$

Kanıt

Keyfi $U = \begin{pmatrix} v(x) \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \vartheta(x) \\ \vartheta_1 \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A})$ elemanları verilsin.

$D(\mathcal{A})$ tanım bölgesinin tanımı gereği, bu durumda

$$\begin{aligned} v_1 &= \alpha v(0^-) \\ \vartheta_1 &= \alpha \vartheta(0^-) \quad \text{olur.} \end{aligned}$$

Bu nedenle, U ve V elemanları $D(\mathcal{A})$ kümesinin elemanları oldukları için

$$U = \begin{pmatrix} v(x) \\ \alpha v(0^-) \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \vartheta(x) \\ \alpha \vartheta(0^-) \end{pmatrix} \text{ biçimindedir.}$$

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} -v''(x) + q(x)v(x) \\ v'(0^-) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}V = \begin{pmatrix} -\vartheta''(x) + q(x)\vartheta(x) \\ \vartheta'(0^-) \end{pmatrix}$$

tanımları dikkate alarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, V \rangle_{H_\alpha} &= \left\langle \begin{pmatrix} -v''(x) + q(x)v(x) \\ v'(0^-) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \vartheta(x) \\ \alpha \vartheta(0^-) \end{pmatrix} \right\rangle_{H_\alpha} \\ &= \int_{-\pi}^{0^-} \left(-v''(x) + q(x)v(x) \right) \overline{\vartheta(x)} dx + \int_{0^+}^{\pi} \left(-v''(x) + q(x)v(x) \right) \overline{\vartheta(x)} dx \\ &\quad + \frac{1}{\alpha} v'(-0) \alpha \overline{\vartheta}(-0) \\ &= \int_{-\pi}^{0^-} \left(-v''(x) \overline{\vartheta(x)} \right) dx + \int_{-\pi}^{0^-} q(x)v(x) \overline{\vartheta(x)} dx + \int_{0^+}^{\pi} \left(-v''(x) \overline{\vartheta(x)} \right) dx \\ &\quad + \int_{0^+}^{\pi} q(x)v(x) \overline{\vartheta(x)} dx + v'(0^-) \overline{\vartheta}(0^-) \end{aligned}$$

İki kere kısmi integrasyon uygulanırsa aşağıdaki eşitlik bulunur.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, V \rangle_{H_\alpha} &= - \int_{-\pi}^{0^-} v''(x) \overline{\vartheta(x)} dx + \int_{-\pi}^{0^-} q(x)v(x) \overline{\vartheta(x)} dx - \int_{0^+}^{\pi} v''(x) \overline{\vartheta(x)} dx \\ &\quad + \int_{0^+}^{\pi} q(x)v(x) \overline{\vartheta(x)} dx + w(v, \overline{\vartheta}, 0^-) - w(v, \overline{\vartheta}, -\pi) \\ &\quad + w(v, \overline{\vartheta}, \pi) - w(v, \overline{\vartheta}, 0^+) + v'(0^-) \overline{\vartheta}(0^-) \end{aligned} \tag{4.35}$$

Diğer taraftan H_α uzayındaki iç çarpım gereği;

$$\begin{aligned}
 \langle U, \mathcal{A}V \rangle_{H_\alpha} &= \left\langle \begin{pmatrix} v(x) \\ \alpha v(0^-) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\vartheta''(x) + q(x)\vartheta(x) \\ \vartheta'(0^-) \end{pmatrix} \right\rangle_{H_\alpha} \\
 &= \int_{-\pi}^{0^-} v(x) \overline{-\vartheta''(x) + q(x)\vartheta(x)} dx + \int_{0^+}^{\pi} v(x) \overline{-v''(x) + q(x)\vartheta(x)} dx + \frac{1}{\alpha} v(x) \overline{\alpha \vartheta'(0^-)} \\
 &= - \int_{-\pi}^{0^-} v(x) \overline{\vartheta''(x)} dx + \int_{-\pi}^{0^-} v(x) \overline{q(x)\vartheta(x)} dx - \int_{0^+}^{\pi} v(x) \overline{\vartheta''(x)} dx + \int_{0^+}^{\pi} v(x) \overline{q(x)\vartheta(x)} dx \\
 &\quad + v(0^-) \overline{\vartheta'(0^-)}
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

(4.35) ve (4.36) taraf tarafa çıkarılırsa;

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{A}U, V \rangle_{H_\alpha} - \langle U, \mathcal{A}V \rangle_{H_\alpha} &= W(v, \overline{\vartheta}; 0^-) - W(v, \overline{\vartheta}; -\pi) + W(v, \overline{\vartheta}; \pi) - W(v, \overline{\vartheta}; 0^+) \\
 &\quad + v'(0^-) \overline{\vartheta}(0^-) - v(0^-) \overline{\vartheta'}(0^-)
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

eşitliği elde edilir. $v(x)$ ve $\vartheta(x)$ fonksiyonları periyodik sınır şartlarını sağladıkları için

$$W(v, \overline{\vartheta}; -\pi) - W(v, \overline{\vartheta}; \pi) = 0 \tag{4.38}$$

eşitliği sağlanır. Diğer taraftan v ve ϑ fonksiyonları (4.5) geçiş şartlarını sağladıkları için

$$\begin{aligned}
 W(v, \overline{\vartheta}; 0^+) &= v(0^+) \overline{\vartheta'}(0^+) - v'(0^+) \overline{\vartheta}(0^+) \\
 &= (\beta v'(0^+)) \overline{\vartheta'}(0^+) - v'(0^+) (\beta \overline{\vartheta'}(0^+)) \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

elde edilir. (4.38) ve (4.39) eşitlikleri gereği (4.37) eşitliğinin sağ tarafı sıfıra eşittir. Dolayısı ile $\forall U, V \in D(\mathcal{A})$ için

$$\langle \mathcal{A}U, V \rangle_{H_\alpha} = \langle U, \mathcal{A}V \rangle_{H_\alpha}$$

eşitliği elde edilir. □

4.5. Sol ve Sağ Aralıkta Tanımlı Temel Çözümler

Bu bölümde verilmiş iki aralıklı diferansiyel denklemin genel çözümünü kuracağız. Bunun için ilk önce sol ve sağ aralıklarda tanımlı temel çözümleri tanımlayacağız.

4.7 Teorem λ kompleks özdeğer parametresinin her bir değeri için (4.1) diferansiyel denkleminin $[-\pi, 0)$ yarı açık aralığında tanımlı olan ve

$$\phi(-\pi) = 1, \quad \phi'(-\pi) = 0 \quad (4.40)$$

başlangıç şartlarını sağlayan bir tek $\phi_l(x, \lambda)$ çözümü mevcuttur ve bu çözüm $\forall x \in [-\pi, 0)$ için $\lambda \in \mathbb{C}$ değişkenine göre tüm kompleks düzlemde diferansiyellenebilirler, yani λ değişkenine göre tam fonksiyondur (Titchmarsh, 1962).

4.8 Teorem $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için (4.1) denkleminin $[-\pi, 0)$ aralığında tanımlı ve

$$\phi(-\pi) = 0, \quad \phi'(-\pi) = 1 \quad (4.41)$$

başlangıç koşullarını sağlayan bir tek $\psi_l(x, \lambda)$ çözümü mevcuttur. Bu çözüm $\forall x \in [-\pi, 0)$ için λ değişkenine göre tam fonksiyondur (Titchmarsh, 1962).

4.9 Teorem $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için (4.7 Teorem) ve (4.8 Teorem) ile tanımlanan $\phi_l(x, \lambda)$ ve $\psi_l(x, \lambda)$ çözümleri $[-\pi, 0)$ aralığında lineer bağımsızdır.

Kanıt $\lambda \in \mathbb{C}$ 'nin her bir değeri için $W(\phi_l, \psi_l; x)$ Wronskian determinanı x değişkeninden bağımsız olduğu için

$$\begin{aligned} W(\phi_l, \psi_l; x) &= W(\phi_l, \psi_l; -\pi) \\ &= \phi_l(-\pi, \lambda) \psi_l'(-\pi, \lambda) - \phi_l'(-\pi, \lambda) \psi_l(-\pi, \lambda) \\ &= 1 - 0 = 1 \neq 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

elde edilir. Wronskian sıfırdan farklı olduğundan $\phi_l(x, \lambda)$ ve $\psi_l(x, \lambda)$ çözümleri lineer bağımsızdır. $\square$

4.10 Teorem $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için (4.1) diferansiyel denklemi için $(0, \pi]$ sağ aralığında

$$\phi(\pi) = 1, \quad \phi'(\pi) = 0 \quad (4.43)$$

başlangıç şartlarını sağlayan bir tek $\varphi_r(x, \lambda)$ çözümü mevcuttur ve bu çözüm $\forall x \in (0, \pi]$ için λ değişkeninin tam fonksiyonudur (Titchmarsh, 1962).

4.11 Teorem $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için (4.1) diferansiyel denklemi için $(0, \pi]$ sağ aralığında

$$\phi(\pi) = 0, \quad \phi'(\pi) = 1 \quad (4.44)$$

başlangıç şartlarını sağlayan bir tek $\psi_r(x, \lambda)$ çözümü mevcuttur ve bu çözüm $\forall x \in (0, \pi]$ için λ değişkeninin tam fonksiyonudur (Titchmarsh, 1962).

4.12 Teorem $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için (4.10 Teorem) ve (4.11 Teorem) ile tanımlanan $\varphi_r(x, \lambda)$ ve $\psi_r(x, \lambda)$ çözümleri $(0, \pi]$ aralığında lineer bağımsızdır.

Kanıt $\lambda \in \mathbb{C}$ 'nin her bir değeri için $W(\varphi_r, \psi_r; x)$ Wronskian determinanı x değişkeninden bağımsız olduğu için

$$\begin{aligned} W(\varphi_r, \psi_r; x) &= W(\varphi_r, \psi_r; \pi) \\ &= \varphi_r(\pi, \lambda) \psi_r'(\pi, \lambda) - \varphi_r'(\pi, \lambda) \psi_r(\pi, \lambda) \\ &= 1 - 0 = 1 \neq 0 \end{aligned} \quad (4.45)$$

elde edilir. Wronskian sıfırdan farklı olduğundan $\varphi_r(x, \lambda)$ ve $\psi_r(x, \lambda)$ çözümleri lineer bağımsızdır. $\square$

Sonuç 1 : İki aralıklı (4.1) denkleminin genel çözümü

$$u(x, \lambda) = \begin{cases} C_l \varphi_l(x, \lambda) + D_l \psi_l(x, \lambda), & x \in [-\pi, 0) \\ C_r \varphi_r(x, \lambda) + D_r \psi_r(x, \lambda), & x \in (0, \pi] \end{cases} \quad (4.46)$$

biçiminde ifade edilebilir; burada C_l, D_l, C_r, D_r keyfi sabitlerdir.

4.5.1. (4.1)-(4.5) Süreksizlik noktası içeren periyodik sınır-değer probleminin karakteristik fonksiyonu

Bu bölümde (4.1)-(4.5) iki aralıklı periyodik sınır-değer probleminin karakteristik fonksiyonunu tanımlayacağız.

Kabul edelim ki, $\lambda = \lambda_0 \in \mathbb{R}$ değeri (4.1)-(4.5) iki aralıklı periyodik sınır-değer probleminin

bir özdeğeri olsun. Bu özdeğere uygun olan özfonksiyonu $\phi_0(x, \lambda)$ ile gösterelim. O halde Sonuç 1 gereği $\phi_0(x, \lambda)$ özfonksiyonu

$$U_0(x, \lambda) = \begin{cases} A_l \phi_l(x, \lambda) + B_l \psi_l(x, \lambda), & x \in [-\pi, 0) \\ A_r \phi_r(x, \lambda) + B_r \psi_r(x, \lambda), & x \in (0, \pi] \end{cases} \quad (4.47)$$

biçiminde yazılabilir; burada

$$(A_l, B_l, A_r, B_r) \neq (0, 0, 0, 0) \quad (4.48)$$

$\phi_0(x, \lambda_0)$ fonksiyonu özfonksiyon olduğu için (4.2)-(4.5) şartlarını sağlar; yani

$$\phi_0(-\pi, \lambda_0) = \phi_0(\pi, \lambda_0) \quad (4.49)$$

$$\phi'_0(-\pi, \lambda_0) = \phi'_0(\pi, \lambda_0) \quad (4.50)$$

$$\phi'_0(0^-, \lambda_0) = \lambda_0 \alpha \phi_0(0^-, \lambda_0) \quad (4.51)$$

ve

$$\phi_0(0^+, \lambda_0) = \beta \phi'_0(0^+, \lambda_0) \quad (4.52)$$

eşitlikleri sağlanır. (4.47) ifadesini (4.49) ifadesinde yerine yazarsak

$$A_l \phi_l(-\pi, \lambda) + B_l \psi_l(-\pi, \lambda) = A_r \phi_r(\pi, \lambda) + B_r \psi_r(\pi, \lambda) \quad (4.53)$$

eşitliği elde edilir. ϕ_l , ψ_l , ϕ_r ve ψ_r çözümlerinin tanımı gereği (yani 2.17 Teorem, 2.18 Teorem, 2.20 Teorem ve 2.21 Teorem gereği) (4.53) eşitliğinden

$$A_l = A_r \quad (4.54)$$

eşitliği elde edilir. Benzer biçimde (4.47) ifadesi (4.50) eşitliğinde yerine yazarsak

$$B_l = B_r \quad (4.55)$$

eşitliği elde edilir. Aşağıda

$$\phi_0(x, \lambda) = \begin{cases} \phi_l(x, \lambda), & x \in [-\pi, 0) \\ \phi_r(x, \lambda), & x \in (0, \pi] \end{cases} \quad \psi_0(x, \lambda) = \begin{cases} \psi_l(x, \lambda), & x \in [-\pi, 0) \\ \psi_r(x, \lambda), & x \in (0, \pi] \end{cases} \quad (4.56)$$

$$A_0 := A_l = A_r, \quad B_0 := B_l = B_r \quad (4.57)$$

gösterimlerinden yararlanacağız. Böylece aşağıdaki teorimi elde etmiş oluruz.

4.13 Teorem (4.1)-(4.5) iki aralıklı periyodik sınır-değer probleminin

$$\phi(-\pi) = \phi(\pi),$$

$$\phi'(-\pi) = \phi'(\pi)$$

periyodik sınır şartlarını sağlayan her çözümü

$$\phi(x, \lambda) = C\varphi(x, \lambda) + D\psi(x, \lambda) \quad (4.58)$$

biçiminde yazılabilir; burada C ve D keyfi sabitlerdir.

Sonuç 2 : $\phi_0(x, \lambda_0)$ özfonksiyonu

$$\phi_0(x, \lambda_0) = A_0\varphi_0(x, \lambda_0) + B_0\psi_0(x, \lambda_0) \quad (4.59)$$

biçiminde ifade edilir. Burada $(A_0, B_0) \neq (0, 0)$ şartı sağlanır. $\phi_0(x, \lambda_0)$ özfonksiyon olduğu için aşağıdaki teorem elde edilir.

4.14 Teorem Bir önceki teoremin ispatında tanımlanan φ_0 ve ψ_0 fonksiyonları için

$$A_0\varphi_0'(0^-, \lambda_0) + B_0\psi_0'(0^-, \lambda_0) = \lambda_0\alpha(A_0\varphi_0(0^-, \lambda_0) + B_0\psi_0(0^-, \lambda_0)) \quad (4.60)$$

$$A_0\varphi_0(0^+, \lambda_0) + B_0\psi_0(0^+, \lambda_0) = \beta(A_0\varphi_0'(0^+, \lambda_0) + B_0\psi_0'(0^+, \lambda_0)) \quad (4.61)$$

eşitlikleri sağlanır.

Kanıt Sonuç 2 gereği (4.59) ifadesini (4.51) ve (4.52)'de yerine yazarsak (4.60) ve (4.61) elde edilir. Böylece teorem kanıtlanmış oldu. $\square$

4.2 Tanım Aşağıdaki eşitlik ile tanımlı $\omega(\lambda)$ fonksiyonuna (4.1)-(4.5) iki aralıklı periyodik sınır-değer probleminin karakteristik fonksiyonunu denir.

$$\omega(\lambda) = \begin{vmatrix} \varphi_0'(0^-, \lambda) - \lambda\alpha\varphi_0(0^-, \lambda) & \psi_0'(0^-, \lambda) - \lambda\alpha\psi_0(0^-, \lambda) \\ \varphi_0(0^+, \lambda) - \beta\alpha\varphi_0'(0^+, \lambda) & \psi_0(0^+, \lambda) - \beta\alpha\psi_0'(0^+, \lambda) \end{vmatrix} \quad (4.62)$$

4.15 Teorem (4.1)-(4.5) periyodik sınır-değer probleminin özdeğerleri $\omega(\lambda)$ karakteristik fonksiyonunun sıfır yerlerinden ibarettir; yani özdeğerler kümesi ile $\omega(\lambda)$ fonksiyonunun sıfır yerleri kümesi çakışıkır.

Kanıt (4.60) ve (4.61) eşitliklerin A_0 ve B_0 değişkenlerine göre lineer homojen denklemler sistemidir ve bu denklemler sisteminin determinantı $\omega(\lambda_0)$ fonksiyonuna eşittir. Buradan

$$(A_0, B_0) \neq (0, 0)$$

olduğu için

$$\omega(\lambda_0) = 0 \quad (4.63)$$

eşitliğini elde ederiz. Bu nedenle her bir özdeğer $\omega(\lambda)$ karakteristik fonksiyonunun sıfır yeridir. Bunun tersinin de doğru olduğu apaçıktır. Gerçekten $\omega(\lambda_0) = 0$ olduğunu kabul edersek, (4.60) ve (4.61) lineer homojen denklem sisteminin $(A_0, B_0) \neq (0, 0)$ çözümü bulunur. Bu durumda (4.59) eşitliği ile tanımlı $u_0(x, \lambda_0)$ fonksiyonu (4.1)-(4.5) iki aralıklı periyodik sınır-değer probleminin denklemini ve sınır şartlarını sağlar; yani özfonksiyonu olur. $\square$

4.5.2. Sol ve sağ temel çözümler için integral denklemler ve asimptotik eşitlikler

Titchmarsh (1962) kitabındaki yöntemi uygulanırsa tamamen benzer biçimde aşağıdaki teorem ispat edilir.

4.16 Teorem φ_l , ψ_l , φ_r ve ψ_r temel çözüm fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki integral denklemlerini sağlar.

$$y(x, \lambda) = \cos(\sqrt{\lambda}(x + \pi)) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\pi}^x \sin(\sqrt{\lambda}(x - \xi)) q(\xi) y(\xi, \lambda) d\xi, \quad (4.64)$$

$$y(x, \lambda) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda}(x + \pi)) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\pi}^x \sin(\sqrt{\lambda}(x - \xi)) q(\xi) y(\xi, \lambda) d\xi, \quad (4.65)$$

$$y(x, \lambda) = \cos(\sqrt{\lambda}(x - \pi)) - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_x^{\pi} \sin(\sqrt{\lambda}(x - \xi)) q(\xi) y(\xi, \lambda) d\xi, \quad (4.66)$$

$$y(x, \lambda) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda}(x - \pi)) - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_x^{\pi} \sin(\sqrt{\lambda}(x - \xi)) q(\xi) y(\xi, \lambda) d\xi. \quad (4.67)$$

4.17 Teorem $\sqrt{\lambda} = \sigma + i\xi$ olmak üzere φ_l , ψ_l , φ_r ve ψ_r fonksiyonları için

$$\varphi_l(x, \lambda) = O(e^{|\xi|(x+\pi)}), \quad x \rightarrow \infty \quad (4.68)$$

$$\psi_l(x, \lambda) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{|\xi|(x+\pi)}\right), \quad x \rightarrow \infty \quad (4.69)$$

$$\varphi_r(x, \lambda) = O(e^{|\xi|(\pi-x)}), \quad x \rightarrow \infty \quad (4.70)$$

$$\psi_r(x, \lambda) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{|\xi|(\pi-x)}\right), \quad x \rightarrow \infty \quad (4.71)$$

asimptotik eşitlikler sağlanır.

Kanıt 4.16 Teorem gereği

$$\varphi_l(x, \lambda) = \cos(\sqrt{\lambda}(x + \pi)) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\pi}^x \sin(\sqrt{\lambda}(x - \xi)) q(\xi) y(\xi, \lambda) d\xi \quad (4.72)$$

eşitliği sağlanır. Her iki tarafı $e^{-|\xi|(x+\pi)}$ ile çarptıktan sonra

$$\Phi_l(x, \lambda) := e^{-|\xi|(x+\pi)} \cdot \varphi_l(x, \lambda) \quad (4.73)$$

ile gösterirsek

$$\Phi_l(x, \lambda) = e^{-|\xi|(x+\pi)} \cos(\sqrt{\lambda}(x + \pi)) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\pi}^x \sin(\sqrt{\lambda}(x - \xi)) e^{-|\xi|(x+\pi)} q(\xi) \Phi_l(\xi, \lambda) d\xi \quad (4.74)$$

eşitliği elde edilir.

$$K_l(\lambda) := \max_{x \in [-\pi, 0]} |\Phi_l(x, \lambda)| \quad (4.75)$$

gösterirsek (4.74) eşitliğinden

$$K_l(\lambda) \leq 1 + \frac{K_l(\lambda)}{|\sqrt{\lambda}|} \int_{-\pi}^x |q(\xi)| d\xi \quad (4.76)$$

elde edilir. Burada $|\sqrt{\lambda}|$ ifadesinin yeteri kadar büyük değeri için

$$K_l(\lambda) \leq \left(1 - \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \int_{-\pi}^0 |q(\xi)| d\xi\right)^{-1} \quad (4.77)$$

elde edilir. Sonuncu eşitlikten

$$K_l(x, \lambda) = O(1), \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (4.78)$$

asimptotik eşitliğini elde ederiz. (4.76) ve (4.78) eşitliklerinden

$$\Phi_l(x, \lambda) = O(1), \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (4.79)$$

asimptotik eşitliği elde edilir. (4.79) ve (4.73) eşitliklerinden istenen

$$\varphi_l(x, \lambda) = O(e^{|\xi|(x+\pi)}) \quad (4.80)$$

asimptotik eşitliği bulunur. Böylece (4.68) asimptotik eşitliğinin ispatı tamamlanmış oldu.

Diğer (4.69) ve (4.71) asimptotik eşitlikleri tamamen benzer biçimde ispat edilir. $\square$

4.18 Teorem $\sqrt{\lambda} = \sigma + i\xi$ olmak üzere

$$\int_{-\pi}^x \sin(\sqrt{\lambda}(x - \xi)) q(\xi) \varphi_l(\xi, \lambda) d\xi = O(e^{|\xi|(x+\pi)}) , \lambda \rightarrow \infty \quad (4.81)$$

$$\int_{-\pi}^x \sin(\sqrt{\lambda}(x - \xi)) q(\xi) \psi_l(\xi, \lambda) d\xi = O\left(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} e^{|\xi|(x+\pi)}\right) , \lambda \rightarrow \infty \quad (4.82)$$

$$\int_x^{\pi} \sin(\sqrt{\lambda}(x - \xi)) q(\xi) \varphi_r(\xi, \lambda) d\xi = O(e^{|\xi|(\pi-x)}) , \lambda \rightarrow \infty \quad (4.83)$$

$$\int_x^{\pi} \sin(\sqrt{\lambda}(x - \xi)) q(\xi) \psi_r(\xi, \lambda) d\xi = O\left(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} e^{|\xi|(\pi-x)}\right) , \lambda \rightarrow \infty \quad (4.84)$$

asimptotik eşitlikleri sağlanır.

Kanıt (4.68)-(4.71) eşitlikleri sırası ile (4.81)-(4.84) ifadelerinin sol taraflarındaki integral ifadelerde yerine yazarsak, istenen (4.81)-(4.84) asimptotik eşitliklerini elde ederiz. $\square$

(4.16 Teorem) ve (4.18 Teorem) gereği direkt olarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3 : $\sqrt{\lambda} = \sigma + i\xi$ olmak üzere aşağıdaki asimptotik eşitlikler sağlanır.

$$\varphi_l(x, \lambda) = \cos(\sqrt{\lambda}(x + \pi)) + O\left(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} e^{|\xi|(x+\pi)}\right), \lambda \rightarrow \infty \quad (4.85)$$

$$\psi_l(x, \lambda) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda}(x + \pi)) + O\left(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} e^{|\xi|(x+\pi)}\right), \lambda \rightarrow \infty \quad (4.86)$$

$$\varphi_r(x, \lambda) = \cos(\sqrt{\lambda}(x - \pi)) + O\left(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} e^{|\xi|(x-\pi)}\right), \lambda \rightarrow \infty \quad (4.87)$$

$$\psi_r(x, \lambda) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda}(x - \pi)) + O\left(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} e^{|\xi|(x-\pi)}\right), \lambda \rightarrow \infty \quad (4.88)$$

Benzer biçimde aşağıdaki teorem ispat olunur.

4.19 Teorem $\sqrt{\lambda} = \sigma + i\xi$ olmak üzere

$$\varphi'_l(x, \lambda) = -\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}(x + \pi)) + O(e^{|\xi|(x+\pi)}), \lambda \rightarrow \infty \quad (4.89)$$

$$\psi'_l(x, \lambda) = -\cos(\sqrt{\lambda}(x + \pi)) + O\left(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} e^{|\xi|(x+\pi)}\right), \lambda \rightarrow \infty \quad (4.90)$$

$$\varphi'_r(x, \lambda) = -\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}(x - \pi)) + O(e^{|\xi|(x-\pi)}), \lambda \rightarrow \infty \quad (4.91)$$

$$\psi'_r(x, \lambda) = -\cos(\sqrt{\lambda}(x - \pi)) + O\left(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} e^{|\xi|(x-\pi)}\right), \lambda \rightarrow \infty \quad (4.92)$$

asimptotik eşitlikleri sağlanır.

Sonuç 3 ve (4.19 Teorem) gereği sırası ile aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$\sqrt{\lambda} = \sigma + i\xi$ olmak üzere aşağıdaki asimptotik eşitlikler sağlanır.

$$\varphi_l(0^-, \lambda) = \cos(\sqrt{\lambda}\pi) + O\left(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}e^{|\xi|\pi}\right), \lambda \rightarrow \infty \quad (4.93)$$

$$\psi_l(0^-, \lambda) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda}\pi) + O\left(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}e^{|\xi|\pi}\right), \lambda \rightarrow \infty \quad (4.94)$$

$$\varphi_r(0^+, \lambda) = \cos(\sqrt{\lambda}\pi) + O\left(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}e^{|\xi|\pi}\right), \lambda \rightarrow \infty \quad (4.95)$$

$$\psi_r(0^+, \lambda) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda}\pi) + O\left(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}e^{|\xi|\pi}\right), \lambda \rightarrow \infty \quad (4.96)$$

Sonuç 4 : $\sqrt{\lambda} = \sigma + i\xi$ olmak üzere

$$\varphi'_l(0^-, \lambda) = -\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\pi) + O(e^{|\xi|\pi}), \lambda \rightarrow \infty \quad (4.97)$$

$$\psi'_l(0^-, \lambda) = -\cos(\sqrt{\lambda}\pi) + O\left(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}e^{|\xi|\pi}\right), \lambda \rightarrow \infty \quad (4.98)$$

$$\varphi'_r(0^+, \lambda) = \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\pi) + O(e^{|\xi|\pi}), \lambda \rightarrow \infty \quad (4.99)$$

$$\psi'_r(0^+, \lambda) = -\cos(\sqrt{\lambda}\pi) + O\left(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}e^{|\xi|\pi}\right), \lambda \rightarrow \infty \quad (4.100)$$

asimptotik eşitlikleri sağlanır.

4.5.3. Karakteristik fonksiyonun asimptotik davranışı

Önceki kesimlerde elde edilen asimptotik eşitliklerden yararlanarak karakteristik fonksiyonun karakteristik davranışını elde edebiliriz.

4.20 Teorem $\sqrt{\lambda} = \sigma + i\xi$ olmak üzere $\omega(\lambda)$ karakteristik fonksiyonu için aşağıdaki asimptotik eşitlik sağlanır.

$$\omega(\lambda) = -\lambda\alpha\beta \cos(2\sqrt{\lambda}\pi) + O\left(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}e^{|\xi|\pi}\right) \quad (4.101)$$

Kanıt Sonuç 3 ve Sonuç 4 gereği ω karakteristik fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
\omega(\lambda) &= \begin{vmatrix} \varphi'_0(0^-, \lambda) - \lambda \alpha \varphi_0(0^-, \lambda) & \psi'_0(0^-, \lambda) - \lambda \alpha \psi_0(0^-, \lambda) \\ \varphi_0(0^+, \lambda) - \beta \varphi'_0(0^+, \lambda) & \psi_0(0^+, \lambda) - \beta \psi'_0(0^+, \lambda) \end{vmatrix} \\
&= \varphi'_0(0^-, \lambda) - \lambda \alpha \varphi_0(0^-, \lambda) (\psi_0(0^+, \lambda) - \beta \psi'_0(0^+, \lambda)) \\
&\quad - \psi'_0(0^-, \lambda) - \lambda \alpha \psi_0(0^-, \lambda) (\varphi_0(0^+, \lambda) - \beta \varphi'_0(0^+, \lambda)) \\
&= (-\lambda \alpha \cos(\sqrt{\lambda} \pi) + O(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} e^{|\xi| \pi})) (\beta \cos(\sqrt{\lambda} \pi) + O(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} e^{|\xi| \pi})) \\
&\quad - (-\lambda \alpha (\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda} \pi)) + O(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} e^{|\xi| \pi})) (-\beta \alpha \sin(\sqrt{\lambda} \pi) + O(e^{|\xi| \pi})) \\
&= (-\lambda \alpha \beta \cos^2(\sqrt{\lambda} \pi) + O(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} e^{|\xi| \pi})) + (\lambda \alpha \beta \sin^2(\sqrt{\lambda} \pi) + O(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} e^{|\xi| \pi})) \\
&= -\lambda \alpha \beta \cos(2\sqrt{\lambda} \pi) + O(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} e^{|\xi| \pi}) \tag{4.102}
\end{aligned}$$

asimptotik eşitliği elde edilir. □

4.5.4. Özdeğerlerin asimptotik davranışı

Bu bölümde karakteristik fonksiyonun asimptotik formülünden yararlanarak özdeğerler için asimptotik formül elde edeceğiz. Bir önceki bölümde elde ettiğimiz $\omega(\lambda)$ karakteristik fonksiyonun asimptotik ifadesindeki esas kısmını $\omega_0(\lambda)$ ile yani

$$\omega_0(\lambda) := -\lambda \alpha \beta \cos(2\sqrt{\lambda} \pi) \tag{4.103}$$

gösterelim. Bu ifadedeki asimptotik kısmı ise $\omega_1(\lambda)$ ile yani

$$\omega_1(\lambda) := \omega(\lambda) - \omega_0(\lambda)$$

gösterelim. O halde

$$\omega_1(\lambda) = O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{|\xi| \pi}), \quad \lambda \rightarrow \infty \tag{4.104}$$

asimptotik formülü sağlanır; burada $\xi := \operatorname{Im} \sqrt{\lambda}$ gösterilmişti. Şimdi

$$\omega(\lambda) = \omega_0(\lambda) + \omega_1(\lambda) \tag{4.105}$$

biçiminde ifade ettiğimiz $\omega(\lambda)$ fonksiyonunun sıfır yerlerinin asimptotiğini elde etmek için Rouché teoreminden yararlanacağız.

$\omega_0(\lambda)$ fonksiyonunun sıfır yerleri

$$\lambda_0 = 0, \quad \sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi}{4} + \frac{n}{2}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.106)$$

noktalarıdır.

$\mu = \sqrt{\lambda}$ gösterelim ve $\omega(\mu^2)$, $\omega_0(\mu^2)$ ve $\omega_1(\mu^2)$ fonksiyonlarını sırası ile $\tilde{\omega}(\mu)$, $\tilde{\omega}_0(\mu)$ ve $\tilde{\omega}_1(\mu)$ ile gösterelim. O halde $\tilde{\omega}(\mu)$ fonksiyonunun μ -kompleks düzlemindeki sıfır yerleri

$$\mu_0 = 0, \quad \mu_n = \frac{\pi}{4} + \frac{n}{2}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.107)$$

biçiminde yazılabilir. Kompleks μ -düzleminde

$$\left\{ \mu = \sigma + it \quad \mid \quad |\sigma| \leq \frac{1}{4}(\pi + 2n + 1), \quad |t| \leq \frac{1}{4}(\pi + 2n + 1) \right\}$$

bölgenin sınırını γ_n ile gösterelim. Kompleks analizden iyi bilinen

$$|\cos \mu| \sim \frac{1}{2} e^{|Im \mu|}, \quad |Im \mu| \rightarrow \infty \quad (4.108)$$

asimptotik eşitliğinden yararlanılırsa, kolayca görebiliriz ki, öyle bir n_0 doğal sayısı mevcuttur ki, $\forall n \geq n_0$ için γ_n eğrisi üzerinde

$$|\tilde{\omega}_0(\mu)| > |\tilde{\omega}_1(\mu)| \quad (4.109)$$

eşitliği sağlanır. O halde her sıfır yeri katı sayıda hesaplanmak kaydı ile $\tilde{\omega}_0(\mu)$ ve $\tilde{\omega}(\mu)$ fonksiyonlarının $\forall n \leq n_0$ için γ_n eğrisi içinde kalan sıfır yerleri sayısı eşit olur.

O halde yeteri kadar büyük n -ler için γ_n ve γ_{n+1} eğrileri arasında $\tilde{\omega}(\mu)$ fonksiyonunun pozitif sıfırlarının sayısı 1 değerine eşit olur. Bu sıfır yerini μ_n ile gösterirsek

$$\frac{\pi}{4} + \frac{2n+1}{4} < \mu_n < \frac{\pi}{4} + \frac{2n+3}{4} \quad (4.110)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan yeteri kadar büyük n -ler için

$$|\mu_n - (\frac{\pi}{4} + \frac{n}{2})| < \frac{1}{2} \quad (4.111)$$

eşitsizliği elde edilir. Yani

$$\begin{aligned} \mu_n &= \frac{\pi}{4} + \frac{n}{2} + O(1) \\ &= \frac{n}{2} + O(1) \end{aligned} \quad (4.112)$$

asimptotik eşitliği bulunur. O halde $\omega(\lambda)$ -nın sıfır yerleri için

$$\lambda_n = \frac{n^2}{4} + O(n) \quad (4.113)$$

asimptotik eşitliği bulunur.



5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada $(L_2[-\pi, 0) \oplus L_2(0, \pi]) \oplus \mathbb{C}$ direkt toplam uzayında yeni bir iç çarpım tanımlanarak, çalışılan periyodik Sturm-Liouville sınır-değer-geçiş probleminin kendine eşlenik olduğu, özdeğerlerinin reel olduğu, farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonların ortogonal olduğu ispatlanmıştır.

Çoğu özdeğer problemi açıkça çözülemediğinden, hem özdeğerlerin hem de özfonksiyonların nitel davranışını dikkatlice ele almak ve bunları analiz etmek gerekir. Aynı sebepten dolayı, özdeğerlerin ve karşılık gelen özfonksiyonların nitel özelliklerinin incelenmesi için etkili bir teknik sunuldu. Devamında da bu problemin karakteristik denklemi tanımlanmıştır.

Yüksek mertebeden diferansiyel denklemler ve daha genel sınır şartları içeren sınır değer geçiş problemleri için bu çalışmada kullanılan yöntem, uygulanabilir.

KAYNAKLAR

- Adan, I. J., van Leeuwaarden, J. S. and Winands, E. M. (2006). On the application of Rouché's theorem in queueing theory. *Operations Research Letters*, 34(3), 355-360.
- Aydemir, K. and Mukhtarov, O. S. (2017). Class of Sturm-Liouville problems with eigenparameter dependent transmission conditions. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 38(10), 1260-1275.
- Aydemir, K. (2014). Boundary value problems with eigenvalue-dependent boundary and transmission conditions. *Boundary value problems*, 2014, 1-11.
- Bauer, W. F. (1953). Modified Sturm-Liouville systems. *Quarterly of Applied Mathematics*, 11(3), 273-283.
- Binding, P. A., Browne, P. J. and Watson, B. A. (2002). Sturm-Liouville problems with boundary conditions rationally dependent on the eigenparameter. *I. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 45(3), 631-645.
- Chu, J., Meng, G. and Zhang, Z. (2023). Minimizations of positive periodic and Dirichlet eigenvalues for general indefinite Sturm-Liouville problems. *Advances in Mathematics*, 432, 109272.
- Daci, A., Tola, S. and Çepa, N. (2023). Application of Sturm-Liouville problem in the wave equation. *International Scientific Journal "Mathematical Modeling"*, 7, 76-79.
- Esen, Ü., Aydemir, K. and Mukhtarov, O. İç Tekil Noktası Bulunan Bir Periyodik Sturm-Liouville Probleminin Bazı Nitel Özellikleri. *Gaziosmanpaşa Bilimsel Araştırma Dergisi*, 12(3), 236-243.
- Kandemir, M. and Mukhtarov, O. (2017). Nonlocal Sturm-Liouville problems with integral terms in the boundary conditions. *Electronic Journal Of Differential Equations*, 1-12. (Yayın No: 3519056) [SCI-Expanded].
- Kandemir, M. and Mukhtarov, O. S. (2020). Manypoint Boundary Value Problems for Elliptic Differential-Operator Equations with Interior Singularities. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 17, 1-21.
- Kandemir, M. (2021). *Diferensiyel denklemler* Ankara: Pegem Akademi (2. Baskı).
- Kreyszig, E. (1991). *Introductory functional analysis with appliccations* (Vol. 17). John Wiley and Sons.
- MacCluer, B. D. (2009). *Elementary functional analysis* (Vol. 253). New York: Springer.
- Malham, S. J. (2005). An introduction to asymptotic analysis. *University lectures*.

- Mukhtarov, O. S. and Aydemir, K. (2015). Eigenfunction expansion for Sturm-Liouville problems with transmission conditions at one interior point. *Acta Mathematica Scientia*, 35(3), 639-649.
- Mukhtarov, O. S. and Aydemir, K. (2021). Oscillation properties for non-classical Sturm-Liouville problems with additional transmission conditions. *Mathematical Modelling and Analysis*, 26(3), 432-443.
- Mukhtarov, O. S. and Aydemir, K. (2021). Two-linked periodic Sturm-Liouville problems with transmission conditions. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 44(18), 14664-14676.
- Mukhtarov, O. S., Kadakal, M. and Muhtarov, F. S. (2004). On discontinuous Sturm-Liouville problems with transmission conditions. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 44(4), 779-798.
- Titchmarsh, E. C. (1962). *Eigenfunction expansions associated with second order differential equations i*. London: Oxford Univ.
- Walter, J. (1973). Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary condition. *Mathematische Zeitschrift*, 133, 301-312.
- Yılmaz, O., Kandemir, M. and Aydemir, K. (2019). Eigenvalues and eigenfunctions of the Periodic Sturm-Liouville Problems with discontinuities. *Journal of New Results in Science*, 8(2), 37-41.
- Zhang, H., Chen, Y. and Ao, J. J. (2023). A generalized discontinuous Sturm-Liouville problem with boundary conditions rationally dependent on the eigenparameter. *Journal of Differential Equations*, 352, 354-372.
- Zhang, M. and Li, K. (2020). Dependence of eigenvalues of Sturm-Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions. *Applied Mathematics and Computation*, 378, 125214.
- Zhang, R., Wang, K. and Yang, C. F. (2024). Uniqueness and reconstruction of the periodic Sturm-Liouville operator with a finite number discontinuities. *Applied Mathematics Letters*, 147, 108853.
- Zhao, Y., Sun, J. and Zettl, A. (2016). Self-adjoint Sturm-Liouville problems with an infinite number of boundary conditions. *Mathematische Nachrichten*, 289(8-9), 1148-1169.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Ümmügülsüm ESEN

Eğitim Derecesi **Okul/Program** **Mezuniyet Yılı**

Lisans : Amasya Üniversitesi 2013

Yabancı Dil

İngilizce

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

Yayınlar

Esen, Ü., Aydemir, K. ve Mukhtarov, O. İç Tekil Noktası Bulunan Bir Periyodik Sturm-Liouville Probleminin Bazı Nitel Özellikleri. *Gaziosmanpaşa Bilimsel Araştırma Dergisi*, 12(3), 236-243.

Bildiriler