



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**SUZUKİ TİPTEN GENİŞLEMİYEN DÖNÜŞÜMLER İÇİN BAZI SABİT
NOKTA TEOREMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Esra KILIÇ

DANIŞMAN

Doç. Dr. Yunus ATALAN

AKSARAY, 2021

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 182342404 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Esra KILIÇ tarafından hazırlanan **SUZUKİ TİPTEN GENİŞLEMİYEN DÖNÜŞÜMLER İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ** adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Yunus ATALAN

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Yıldız Teknik Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Samet MALDAR

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 16/06/2021

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Mehmet Ali HINIS

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinalliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Esra KILIÇ

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım süresince zamanını, bilgi ve tecrübelerini esirgemeyen danışman hocam Sayın Doç. Dr. Yunus ATALAN'a teşekkür ederim.

Tez jürimde bulunan saygıdeğer hocalarıma teşekkür ederim.

Ayrıca hayatım boyunca maddi ve manevi desteğini esirgemeyen beni yalnız bırakmayan aileme sonsuz teşekkürler.



Esra KILIÇ
AKSARAY, 2021

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER	4
2.1 Analiz ve Fonksiyonel Analize Ait Bazı Kavramlar	4
2.2 Sabit Nokta Teorisine Ait Bazı Kavramlar	7
3. İTERASYON YÖNTEMLERİ İÇİN YAKINSAKLIK ANALİZİ	13
3.1 Bazı İterasyon Yöntemleri	13
3.2 Yeni Dört Adımlı İterasyon Yöntemi İçin Bazı Sabit Nokta Teoremleri.....	18
4. SUZUKİ TIPTEN GENİŞLEMİYEN DÖNÜŞÜMLER İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ.....	32
4.1 Bazı Önemli Tanımlar ve Notasyonlar	32
4.2 Suzuki Genelleştirilmiş Genişlemeyen Dönüşümler İçin Kuvvetli ve Zayıf Yakınsaklık Teoremleri	34
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	49
KAYNAKLAR.....	50
ÖZGEÇMİŞ	55

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SUZUKİ TIPTEN GENİŞLEMİYEN DÖNÜŞÜMLER İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Esra KILIÇ

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Yunus ATALAN

ÖZET

Sabit nokta teorisinin temel amacı, bir dönüşümün sabit noktaya sahip olabilmesi için dönüşüm üzerine veya dönüşümün tanımlı olduğu uzay üzerine konulacak uygun şartları belirlemektir. Sabit noktanın varlığı garanti altına alındıktan sonra iterasyon yöntemleri kullanılarak bu sabit noktaya nasıl ulaşılacağı belirlenebilir. Bu yaklaşım altında, birçok yazar tarafından yeni iterasyon yöntemleri tanımlanması ve bu yöntemlerin belirli dönüşüm sınıfları için incelenmesiyle çok sayıda sabit nokta teoremi ispatlanmıştır. Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, sabit nokta teorisi, önemi, kullanım alanları ve daha önce yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, literatürde mevcut olan bazı iterasyon yöntemleri verilmiş, yeni iterasyon yöntemi tanıtılmış ve bu iterasyon yöntemi için yakınsaklık, yakınsaklık hızı ve kararlılık sonuçları elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, yeni tanımlanan iterasyon yöntemi kullanılarak Suzuki genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümler için kuvvetli ve zayıf yakınsaklık teoremleri ispatlanmış ve bu dönüşümler için nümerik örnek verilmiştir.

Son bölümde ise bu tez çalışmasından elde edilen sonuçlar özetlenmiş ve ileride yapılabilecek çalışmalar ifade edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Suzuki Genelleştirilmiş Genişlemeyen Dönüşüm, Kuvvetli Yakınsaklık, Zayıf Yakınsaklık, Yakınsaklık Hızı, Sabit Nokta.

Haziran, 2021; 55 sayfa

M.Sc. THESIS

SOME FIXED POINT THEOREMS FOR SUZUKI TYPE NONEXPANSIVE MAPPINGS

Esra KILIÇ

**Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Yunus ATALAN

ABSTRACT

The main purpose of fixed point theory is to determine the appropriate conditions to be put on the mapping or on the space where the mapping is defined in order for the mapping to have a fixed point. After the existence of the fixed point is guaranteed, it can be determined how to reach this fixed point using iteration methods. Under this approach, many fixed point theorems have been proved by defining new iteration methods by many authors and examining these methods for certain mappings classes. This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, fixed point theory, its importance, usage areas and previous studies are mentioned.

In the second chapter, basic definitions and theorems that will be used in the following chapters are given.

In the third chapter, some iteration methods available in the literature are given, the new iteration method is introduced and convergence, rate of convergence, and stability results are obtained for this iteration method.

In the fourth chapter, strong and weak convergence theorems have been proved for Suzuki generalized nonexpansive mappings using the newly defined iteration method, and a numerical example is given for these mappings.

In the last chapter, the results obtained from this thesis are summarized and studies that can be done in the future are expressed.

Keywords: Suzuki Generalized Nonexpansive Mapping, Strong Convergence, Weakly Convergence, Rate of Convergence, Fixed Point.

June, 2021; 55 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Örnek 3.2.4 ile verilen T dönüşümünün (2.7) şartını sağladığını gösteren grafik	24
--	----



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1. Bazı iterasyon yöntemlerinin yakınsama davranışı.....	25
Çizelge 3.2. Bazı iterasyon yöntemlerinin yakınsama davranışı.....	26
Çizelge 3.3. Bazı iterasyon yöntemlerinin yakınsama davranışı.....	26
Çizelge 3.4. Bazı iterasyon yöntemlerinin yakınsama davranışı.....	27
Çizelge 3.5. Bazı iterasyon yöntemlerinin yakınsama davranışı.....	28
Çizelge 3.6. Bazı iterasyon yöntemlerinin yakınsama davranışı.....	28
Çizelge 4.1. Bazı iterasyon yöntemlerinin Suzuki tipten genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümler için yakınsama davranışı.	47
Çizelge 4.2. Bazı iterasyon yöntemlerinin Suzuki tipten genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümler için yakınsama davranışı.	47
Çizelge 4.3. Bazı iterasyon yöntemlerinin Suzuki tipten genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümler için yakınsama davranışı.	48

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif Reel Sayılar Kümesi
(X, d)	Metrik Uzay
$(X, \ \cdot\)$	Normlu uzay
$B(x_0, r)$	x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$\bar{B}(x_0, r)$	x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar
$r_\alpha(\cdot, \{x_n\})$	$\{x_n\}$ dizisinin kümeye göre asimptotik çapı
$Z_\alpha(\cdot, \{x_n\})$	$\{x_n\}$ dizisinin kümeye göre asimptotik merkezi
$T: X \rightarrow Y$	X kümesinden Y kümesine tanımlı T dönüşümü
$F(T)$	T 'nin sabit noktalarının kümesi
$T^n(x)$	x in T altındaki n . iterasyonu



1. GİRİŞ

Sabit nokta teorisi; Analiz, Geometri ve Topoloji gibi matematiğin birçok dalının arakesitinde yer alan, çalışmaları 19. yüzyıla kadar dayanan, geniş uygulamalara sahip bir alandır. Sabit nokta teorisi, adi diferansiyel denklemlerin çözümünün varlığını ve tekliğini göstermek amacıyla ortaya çıkmıştır. Bu teori, fonksiyonel analiz, yaklaşım teorisi, varyasyonel ve lineer eşitsizlikler, kontrol sistemleri ve optimizasyon gibi birçok alanda karşılaşılan problemlerin çözümünde önemli rol oynamaktadır. Matematikte doğrudan kullanılmasının yanı sıra, sabit nokta teorisinin fizik, kimya, biyoloji, tıp, mühendislik, haberleşme ve ekonomi gibi çeşitli disiplinlerde de uygulamaları mevcuttur [1-7].

Sabit nokta teorisi çalışmaları normlu uzaylardan metrik uzaylara kadar birçok matematiksel yapı üzerinde yürütülmektedir. Normlu uzaylarda sabit nokta teorisine dair çalışmalar 20. yy.'ın ilk çeyreğinde Brouwer [8] ile başlamıştır. Brouwer, $\mathbb{R}^n$ uzayında kapalı bir yuvarda tanımlı kendi üzerine bir dönüşümün en az bir sabit noktaya sahip olduğunu göstermiştir.

1930 yılında Schauder [9] Brouwer sabit nokta teoreminde $\mathbb{R}^n$ uzayı yerine bir Banach uzayı alarak bu uzayın kompakt ve konveks bir alt kümesinde tanımlı kendi üzerine bir dönüşümün en az bir sabit noktaya sahip olduğunu ispatlamış ve Brouwer sabit nokta teoreminin bir genellemesini ortaya koymuştur.

Tam metrik uzaylar üzerinde sabit nokta teorisi çalışmaları ise Stephan Banach ile başlamıştır. 1922 yılında Banach [10], “daralma prensibi” olarak da bilinen, bir sabit noktanın varlığını ve tekliğini garanti altına alan Banach sabit nokta teoreminde, tam metrik uzayda tanımlı kendi üzerine bir daraltan (contraction) dönüşümün bir tek sabit noktaya sahip olduğunu ispatlamıştır.

Bu teorem ayrıca daraltan bir dönüşümün teklikle belirli olan sabit noktasının nasıl hesaplanacağına dair bir yöntem sunmaktadır. Adına iterasyon denilen bu yöntem ardışık yaklaşımlarla bir dizi üretmekte ve bu dizi daraltan dönüşümün tek olan sabit noktasına yakınsamaktadır. Bu yaklaşım aracılığıyla matematikteki birçok varlık probleminin çözümünde Banach sabit nokta teoremi etkin bir araç olarak kullanılmaktadır.

Sabit nokta teorisinde en iyi bilinen teoremlerden bir olan Banach sabit nokta teoreminde kullanılan Picard iterasyon yöntemi [11], daraltan dönüşüm yerine genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm alındığında sözü edilen sabit noktaya ulaşamadığından araştırmacılar daha genel metrik uzayları, farklı türden dönüşüm sınıflarını ve yeni iterasyon yöntemlerini kullanarak bu teoremin çok sayıda genelleştirmelerini elde etmiştir. [12-21].

İterasyon yöntemleri geniş ve dinamik bir literatüre sahip olmakla birlikte bu yöntemler için yapılan çalışmalar genel olarak belirli dönüşüm sınıflarının kullanılmasıyla elde edilecek dizinin hangi şartlar altında yakınsak olduğunun belirlenmesi, yakınsama hızlarının karşılaştırılması ve kararlılık analizi yapılması şeklinde sıralanabilir.

2008 yılında Suzuki [22], (C) koşulu olarak adlandırılan ve genişlemeyen dönüşümlerden daha genel bir dönüşüm sınıfı tanımlayarak bazı yakınsaklık teoremlerini ispatladı. 2009 yılında Dhomphongsa ve ark. [23], Suzuki tarafından elde edilen sonuçları farklı özelliklere sahip Banach uzaylarına taşıyarak genişletmiştir. Uddin ve Imdad [24-26], $CAT(0)$ uzaylarında ve Hadamard uzaylarında Suzuki tipten genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümler aracılığıyla bazı sabit nokta teoremleri elde etmiştir. Ali ve ark. [27] ve Ullah ve Arshad [28], üç adımli bir iterasyon yöntemi kullanarak bu dönüşüm sınıfı için düzgün konveks Banach uzaylarında bazı kuvvetli ve zayıf yakınsaklık teoremlerini ispatlamışlardır.

Özellikle uygulamalı matematikte bir problemin çözümünün elde edilmesinin yanında, bu çözüme en kolay ve en hızlı şekilde nasıl ulaşılabilceğinin belirlenmesi önem arz etmektedir. Bu nedenle söz konusu problemin çözümünde kullanılan bir iterasyon yönteminin aynı dönüşümle inşa edilmiş diğer iterasyonlara göre hızının karşılaştırılması gerekmektedir. Bu düşünceden hareketle Rhoades [29], Mann ve Ishikawa iterasyon yöntemlerinin yakınsama hızları arasındaki farkı artan ve azalan fonksiyonlar için incelemiştir. 2007 yılında Agarwal ve ark. [30] tanımladıkları iterasyonun daraltan dönüşümlerin sabit noktasına Picard iterasyonu ile aynı yakınsama hızında, Mann iterasyonundan ise daha hızlı ulaştığını göstermişlerdir. 2014 yılında Abbas ve Nazir [31] tanımladıkları iterasyonun daraltan dönüşümlerin sabit noktasına, Picard, Mann ve Agarwal iterasyonuna kıyasla daha hızlı yakınsadığını ispatlamışlardır. Thakur ve ark. [32], tanımladıkları iterasyon

yönteminin, Suzuki tipten genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümler için Mann, Ishikawa, Agarwal ve ark., Noor, Abbas ve Nazir iterasyonlarına göre daha hızlı olduğunu nümerik olarak göstermişlerdir.

Kararlılık kavramı farklı türden birçok matematiksel yapı üzerinde çalışılmaktadır. Bu kavram, üzerinde çalışılan yapıda uygulanacak küçük değişimlerin, yapının işleyişini boz(a)maması şeklinde düşünülebilir. Kararlılık üzerine yapılan ilk çalışma 1956 yılında Urabe tarafından sunulmuştur [33]. 1967 yılında Ostrowski [34] metrik uzaylarda Picard iterasyonunun kararlılığı üzerine çalışmış fakat genel anlamda iterasyon yöntemleri için kararlılık kavramını 1988 yılında Harder ve Hicks [35] tanımlamış ve belirli dönüşüm sınıflarını kullanarak Picard ve Mann iterasyon yöntemleri için bazı kararlılık teoremlerini ispatlamışlardır. Daha sonra birçok yazar tarafından bu kavram incelenerek geniş bir literatür oluşturulmuştur [36-40].

2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1 Analiz ve Fonksiyonel Analize Ait Bazı Kavramlar

Tanım 2.1.1 (Metrik Uzay) X boş olmayan bir küme ve $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in X$ için;

1) $d(x, y) \geq 0$

2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

3) $d(x, y) = d(y, x)$

4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

şartlarını sağlayan d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik veya uzaklık fonksiyonu, (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir [41].

Tanım 2.1.2 (Yakınsak Dizi) X bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda, $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa, $\{x_n\}$ dizisine $x \in X$ noktasına yakınsaktır denir [41].

Tanım 2.1.3 (Cauchy Dizisi) $X = (X, d)$ herhangi bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa, $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir [41].

Tanım 2.1.4 (Tam Metrik Uzay) X bir metrik uzay olsun. Bu uzaydaki her $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Cauchy dizisi yakınsak ise, X uzayına tam metrik uzay denir [42].

Tanım 2.1.5 (Süreklili Dönüşüm) (X, d) ve (Y, ρ) iki metrik uzay, $f: X \rightarrow Y$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için, $d(x, x_0) < \delta$ olduğunda $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, f ye x_0 noktasında süreklidir denir. f , X in her noktasında sürekli ise f ye X te süreklidir denir [43].

Tanım 2.1.6 (Vektör Uzay) V boş olmayan bir küme ve $\mathbb{F}$ bir cisim olsun. $+: V \times V \rightarrow V$ ve $\cdot: \mathbb{F} \times V \rightarrow V$ işlemleri tanımlansın. Eğer her $x, y, z \in V$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa, V ye $\mathbb{F}$ cismi üzerinde vektör uzayı denir.

1. $x + y \in V$

2. $x + (y + z) = (x + y) + z$

3. $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in V$ vardır,

4. $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in V$ vardır,

5. $x + y = y + x$

6. $\alpha \cdot x \in V$

7. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

8. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

9. $(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$

10. $1 \cdot x = x$

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ise V ye reel vektör uzayı, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ise V ye kompleks vektör uzay adı verilir [44].

Tanım 2.1.7 (Konveks Küme) X bir vektör uzay ve $A \subset X$ olsun. Her $x, y \in A$ için

$$B = \{z \in X: z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \quad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subset A$$

ise A kümesine konvektir denir [43].

Tanım 2.1.8 (Düzgün Konveks Uzay) X bir Banach uzayı olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ şartını sağlayan her $x, y \in X$ için

$$\frac{1}{2} \|x + y\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

olacak şekilde $\delta(\varepsilon) \geq 0$ sayısı varsa, X e düzgün (uniformly) konveks uzay adı verilir [45].

Bu tanım, $x, y \in B_x = \{x \in X: \|x\| \leq 1\}$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon > 0$ için $(x + y)/2$ orta noktasının $S_x = \{x \in X: \|x\| = 1\}$ den δ -kadar uzaklıkta ve B_x kapalı birim yuvar içinde olduğunu ifade eder.

Tanım 2.1.9 (Normlu Uzay) X bir vektör uzay olsun ve $\mathbb{F}$ cismi $\mathbb{R}$ olmak üzere, $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{F}$ fonksiyonunun x noktasındaki değeri $\|x\|$ ile verilsin. Bu fonksiyon

$$1) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$2) \text{ Her } \alpha \in K \text{ ve her } x \in X \text{ için } \|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$$

$$3) \text{ Her } x, y \in X \text{ için } \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

şartlarını sağlıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm, $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir [46].

Tanım 2.1.10 (Banach Uzayı) X normlu uzay ve $x, y \in X$ olsun. Eğer X uzayı, $d(x, y) = \|x - y\|$ norm metriğine göre tam ise X 'e Banach uzayı denir.

X 'in reel veya kompleks vektör uzay oluşuna göre Banach uzayı da reel veya kompleks Banach uzayı olarak adlandırılır [47].

Tanım 2.1.11 (Fonksiyonel, Lineer Fonksiyonel) $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ olmak üzere L, F üzerinde bir vektör uzayı olsun. $f: L \rightarrow \mathbb{F}$ operatörüne fonksiyonel denir. Burada L reel vektör uzay ise $\mathbb{F} = \mathbb{R}$; kompleks vektör uzay ise $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ dir. Şayet f lineer ise f ye lineer fonksiyonel denir [41].

Tanım 2.1.12 (Normlu Dual) X bir normlu uzay olsun. X de tanımlı tüm sürekli ve reel değerli lineer fonksiyonellerin kümesini $C(X, \mathbb{R})$ ile gösterelim. Yani $C(X, \mathbb{R}) = \{T: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineer ve sürekli}\}$ olsun. Her $x \in X$ ve $T_1, T_2 \in C(X, \mathbb{R})$ için

$$\begin{cases} (T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x) \\ (\alpha T_1)(x) = \alpha T_1(x) \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa $C(X, \mathbb{R})$ bir vektör uzay oluşturur. Bu $C(X, \mathbb{R})$ uzayına X in normlu duali denir ve X^* ile gösterilir.

Burada X^* , $\|T\| = \sup\{|T(x)|: \|x\| \leq 1\}$ normuna göre normlu uzaydır. Ayrıca $\mathbb{R}$ tam olduğu için X tam olmasa bile X^* daima bir Banach uzaydır. Bu X^* uzayına bazen X in eşi veya eşleniği adı verilir [41].

Tanım 2.1.13 (Kuvvetli Yakınsaklık) X , bir normlu uzay ve $\{x_n\}$ de X de bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, $\{x_n\}$ dizisi x e kuvvetli yakınsaktır (veya norma göre yakınsaktır) denir ve bu durum $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ şeklinde ya da kısaca $x_n \rightarrow x$ ile gösterilir. Buradaki x noktasına $\{x_n\}$ dizisinin kuvvetli limiti adı verilir [41].

Tanım 2.1.14 (Zayıf Yakınsaklık) X normlu uzay ve $\{x_n\}$, X te bir dizi olsun. Eğer her $f \in X^*$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa $\{x_n\}$ dizisi x noktasına zayıf yakınsaktır denir ve bu durum $x_n \xrightarrow{z} x$ veya $x_n \rightharpoonup x$ şeklinde gösterilir. Buradaki x noktasına $\{x_n\}$ dizisinin zayıf limiti adı verilir [41].

2.2 Sabit Nokta Teorisine Ait Bazı Kavramlar

Tanım 2.2.1 (Sabit Nokta) X boş olmayan bir küme ve $T: X \rightarrow X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer

$$Tx = x \tag{2.1}$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T 'nin sabit noktası denir ve T 'nin tüm sabit noktalarının kümesi F_T , $F(T)$ veya $Fix(T)$ ile gösterilir [11].

Örnek 2.2.2

(1) Eğer $X = \mathbb{R}^-$ ve $T: X \rightarrow X$, $Tx = \frac{5}{3}\left(x - \frac{2}{x}\right)$ ise $F_T = \{-\sqrt{5}\}$.

(2) Eğer $X = [0,1]$ ve $T: X \rightarrow X$, $Tx = x^2$ ise $F_T = \{0,1\}$.

(3) Eğer $X = \mathbb{R}$ ve $T: X \rightarrow X$, $Tx = x - 35$ ise $F_T = \emptyset$.

(4) Eğer $X = \mathbb{R}$ ve $T: X \rightarrow X$, $Tx = \tan x + x$ ise $F_T = \{k\pi: k \in \mathbb{Z}\}$.

(5) Eğer $X \neq \emptyset$ ve $I: X \rightarrow X$ şeklinde ise I bir özdeş dönüşümdür ve X in her noktası bir sabit noktadır. Yani $F_T = \mathbb{R}$.

Tanım 2.2.3 (Lipschitzian Dönüşüm) X bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda \cdot d(x, y)$$

olacak şekilde bir $\lambda > 0$ sayısı mevcut ise T 'ye bir Lipschitzian dönüşüm denir [11].

Tanımdan da görüldüğü üzere, her T Lipschitzian dönüşümü düzgün süreklidir.

Örnek 2.2.4 $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: X \rightarrow X$, $Tx = 7x$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$d(Tx, Ty) = |7x - 7y| = 7|x - y| = 7d(x, y)$$

elde edilir. Böylece $\lambda \geq 7$ için T dönüşümü Lipschitzian dönüşüm şartını sağlar.

Tanım 2.2.5 (Daraltan (Contraction) Dönüşüm) X bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir Lipschitzian dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda \cdot d(x, y) \tag{2.2}$$

olacak şekilde en az bir $\lambda \in [0,1)$ sayısı bulunabiliyorsa T 'ye daraltan dönüşüm denir [11].

Örnek 2.2.2 ve Örnek 2.2.4'ten de görüldüğü gibi bir dönüşümün sabit noktası tek olabilir, birden fazla olabilir veya hiç olmayabilir. Bu durumda bir dönüşümün hangi şartlar altında sabit noktasının var olduğu ve bu sabit noktanın tek olup olmadığının belirlenmesi önem arz etmektedir. Adına varlık ve teklik teoremleri diyebileceğimiz teoremler bir dönüşümün sabit noktasının varlığını veya tekliğini göstermek için ihtiyaç duyulan uygun şartları belirler. Sabit nokta teorisinde çok iyi bilinen Banach Sabit Nokta Teoremi söz konusu sabit noktanın varlığını ve tekliğini şu şekilde garanti eder:

Teorem 2.2.6 (Banach Sabit Nokta Teoremi) X bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir daraltan dönüşüm olsun. Bu durumda

(i) T, X 'te bir tek x sabit noktasına sahiptir;

(ii) Herhangi bir $x_0 \in X$ için

$$x_{n+1} = Tx_n, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

ile tanımlı Picard iterasyonu tarafından üretilen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ iterasyon dizisi x noktasına yakınsar [10].

İspat. Herhangi bir $x_0 \in X$ için $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu, dolayısıyla $x \in X$ noktasına yakınsadığı ve bu x 'in $Tx = x$ denkleminin bir tek çözümü olduğu gösterilmelidir. O halde $n \geq 1$ ve $p \geq 1$ için (2.3) şartından

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &= d(T^{n+p-1}x_0, T^{n-1}x_0) \\ &\leq \lambda d(x_{n+p-1}, x_{n-1}) = \lambda d(T^{n+p-1}x_0, T^{n-1}x_0) \leq \lambda^2 d(x_{n+p-2}, x_{n-2}) \leq \dots \\ &\leq \lambda^n d(x_{n+p-n}, x_{n-n}) = \lambda^n d(x_p, x_0) \\ &\leq \lambda^n (d(x_p, x_{p-1}) + d(x_{p-1}, x_0)) \\ &\leq \lambda^n (\lambda d(x_{p-1}, x_{p-2}) + d(x_{p-1}, x_{p-2}) + d(x_{p-2}, x_0)) \\ &= \lambda^n (d(x_{p-2}, x_0) + d(x_{p-1}, x_{p-2}) + \lambda d(x_{p-1}, x_{p-2})) \\ &\leq \lambda^n [d(x_{p-2}, x_0) + \lambda d(x_{p-2}, x_{p-3}) + \lambda^2 d(x_{p-2}, x_{p-3})] \\ &\vdots \\ &\leq \lambda^n [d(x_1, x_0) + \lambda d(x_1, x_0) + \lambda^2 d(x_1, x_0) + \dots] \\ &= \lambda^n d(x_1, x_0) (1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots) \end{aligned}$$

$$= \lambda^n d(x_1, x_0) \left(\frac{1}{1-\lambda} \right)$$

bulunur. Yani

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq \left(\frac{\lambda^n}{1-\lambda} \right) d(x_1, x_0)$$

olduğu elde edilir. $0 \leq \lambda < 1$ olduğundan $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $d(x_{n+m}, x_n) \rightarrow 0$ olur. Bu da $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. (X, d) uzayı tam olduğundan $x_n \rightarrow x$ dolayısıyla da $x_{n+1} \rightarrow x$ yazılabilir. T dönüşümü sürekli olduğundan dizisel süreklidir, yani $Tx_n \rightarrow Tx$ olup $x_{n+1} = Tx_n$ denkleminde $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $x = Tx$ elde edilir.

Şimdi bu sabit noktanın tek olduğu gösterilmelidir. $\lambda \in [0,1)$ olmak üzere T dönüşümünün y gibi başka bir sabit noktası olsun. O halde

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq \lambda \cdot d(x, y) \Rightarrow (1 - \lambda)d(x, y) \leq 0$$

olduğu elde edilir ki bu da bir çelişkidir. Dolayısıyla T bir tek sabit noktaya sahiptir.

Tanım 2.2.7 (Genişlemeyen (Nonexpansive) Dönüşüm) (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) \tag{2.4}$$

ise, T ye genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir [11].

Örnek 2.2.8 X Banach uzayı olsun. $T: X \rightarrow X$ dönüşümü, $T(x) = \frac{x}{3} + a$, ($a \neq 0$) şeklinde tanımlansın. O zaman T genişlemeyen bir dönüşümdür.

Çözüm: Gerçekten de her $x, y \in X$ ve $y \neq 0$ için

$$\|T(x) - T(y)\| = \left\| \frac{x}{3} + a - \left(\frac{y}{3} + a \right) \right\| = \left\| \frac{x}{3} - \frac{y}{3} \right\| = \frac{\|x-y\|}{3} \leq \|x - y\|.$$

Örnek 2.2.9 $T: [0,3] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$T(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 3 \\ 1, & x = 3 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Açık olarak T dönüşümü $x = 0$ noktasında bir sabit noktaya sahiptir. Eğer $x = 2.4$, $y = 3$ alınırsa $\|T(x) - T(y)\| = 1 \not\leq 0.6 = \|x - y\|$ yazılabilir. Buradan T dönüşümünün sürekli olmadığı görülür. Dolayısıyla T genişlemeyen dönüşüm de değildir.

Örnek 2.2.10 $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $Tx = x - 3$ olsun. O halde

$$d(Tx, Ty) = |x - 3 - (y - 3)| = |x - y| = d(x, y)$$

olduğundan her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ şartı sağlanır. Dolayısıyla T genişlemeyen bir dönüşümdür. Fakat bu dönüşümün bir sabit noktası yoktur.

Yukarıdaki örnekten görüleceği gibi, herhangi bir Banach uzayda tanımlanan genişlemeyen dönüşümlerin her zaman sabit noktaları olmayabilir. Bu nedenle uzay üzerine veya dönüşüm üzerine bazı ek şartlar konulmalıdır. 1965 yılında Browder [48], düzgün konveks bir Banach uzayının kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesi üzerinde tanımlı genişlemeyen bir dönüşümün sabit noktaya sahip olduğunu ispatlamıştır

Tanım 2.2.11 (Quasi Genişlemeyen Dönüşüm) X bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $p \in F(T) \neq \emptyset$ ve her $x \in X$ için

$$d(Tx, p) \leq d(x, p) \tag{2.5}$$

ise T ye quasi genişlemeyen dönüşüm denir [49].

Sonuç 2.2.12 En az bir sabit noktaya sahip olan genişlemeyen bir dönüşüm quasi genişlemeyen bir dönüşümdür. Fakat tersi doğru değildir.

Örnek 2.2.13 T , $[0, 2]$ üzerinde bir dönüşüm olmak üzere,

$$T(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Açık olarak T dönüşümü $x = 0$ noktasındada bir sabit noktaya sahiptir. $\forall x \in [0,2]$ için $\|Tx\| \leq \|x\|$ olduğundan, T quasi genişlemeyen dönüşümdür. Fakat T sürekli olmadığından genişlemeyen dönüşüm değildir.

Tanım 2.2.14 (Contractive-Like Dönüşüm)

X bir Banach uzayı ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için,

$$\|Tx - Ty\| \leq \delta \|x - y\| + \varphi[\|x - Tx\|] \quad (2.6)$$

olacak şekilde bir $\delta \in [0,1)$ sabiti ve $\varphi(0) = 0$ şartını sağlayan bir $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ monoton artan fonksiyonu varsa, T ye bir contractive-like dönüşüm denir [50].

Bu dönüşümün her zaman sabit noktası olmayabilir. Ancak bu dönüşümün p gibi bir sabit noktası varsa (2.6) eşitsizliği kullanılarak

$$\|Tx - p\| \leq \delta \|x - p\| \quad (2.7)$$

elde edilir. Ayrıca (2.7) şartından,

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\| &\leq \|Tx - p\| + \|p - Ty\| \\ &\leq \delta \|x - p\| + \delta \|y - p\| \\ &\leq \delta \|x - y\| + 2\delta \|y - p\| \end{aligned} \quad (2.8)$$

yazılabilir.

3. İTERASYON YÖNTEMLERİ İÇİN YAKINSAKLIK ANALİZİ

Bu bölümde bazı iterasyon yöntemleri verildikten sonra, yeni tanımlanan iterasyon yöntemi için (2.6) ile verilen contractive-like dönüşüm sınıfları kullanılarak kuvvetli yakınsama, yakınsaklık hızı ve kararlılık teoremleri ispatlanacaktır.

3.1 Bazı İterasyon Yöntemleri

Bu kısımda X bir normlu uzay, $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm ve $x_0, u_0 \in X$ olarak alınacaktır.

Tanım 3.1.1 (Picard iterasyon yöntemi)

$$x_{n+1} = Tx_n = T^n x_0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanan iterasyona Picard iterasyon yöntemi denir [11].

Tam metrik uzayda tanımlı daraltan dönüşümlerin sabit noktalarına ulaşmak için kullanılan iterasyonlardan biri de Picard iterasyonudur. Aşağıda verilen örnekten görüleceği üzere daraltan dönüşüm yerine farklı sınıftan bir dönüşüm alınırsa Picard iterasyonu bu dönüşümün sabit noktasına yakınsamayabilir.

Örnek 3.1.2 $X = [0,1]$ olmak üzere $T: [0,1] \rightarrow [0,1]$, $Tx = 1 - x$ olsun. T genişlemeyen bir dönüşüm ve $F(T) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ dir. Herhangi bir $x_0 = a \neq \frac{1}{2}$ noktası için (3.1) ile verilen Picard iterasyonu kullanılarak

$$x_1 = Tx_0 = 1 - a$$

$$x_2 = Tx_1 = T^2 x_0 = a$$

$$x_3 = Tx_2 = T^2 x_1 = T^3 x_0 = 1 - a$$

$\vdots$

$$x_n = Tx_{n-1} = T^2 x_{n-2} = \dots = T^n x_0$$

$\vdots$

yazılabilir. Buradan $(a, 1 - a, a, 1 - a, \dots)$ dizisi elde edilir. Bu dizi $a \neq \frac{1}{2}$ için yakınsak olmadığından Picard iterasyonu verilen dönüşümün sabit noktasına yakınsamaz [11].

Tanım 3.1.3 (Mann iterasyon yöntemi)

$\{\alpha_n\} \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$x_n = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanan iterasyon yöntemine Mann iterasyon yöntemi denir [51].

Tanım 3.1.4 (Noor iterasyon yöntemi)

$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T z_n \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n, n = 0,1,2, \dots \end{cases} \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlanan iterasyon yöntemine Noor iterasyonu denir [52].

Tanım 3.1.5 (Agarwal-S iterasyonu)

$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\begin{cases} u_{n+1} = (1 - \alpha_n)T u_n + \alpha_n T v_n \\ v_n = (1 - \beta_n)u_n + \beta_n T u_n \end{cases} \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlanan iterasyona Agarwal-S-iterasyonu denir [30].

Tanım 3.1.6 (Picard-Mann iterasyonu)

$\{\alpha_n\} \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = T y_n \\ y_n = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n \end{cases} \quad (3.5)$$

şeklinde tanımlanan iterasyona Picard-Mann-iterasyonu denir [53].

Tanım 3.1.7 (SP iterasyonu)

$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\begin{cases} u_{n+1} = (1 - \alpha_n)v_n + \alpha_n T v_n \\ v_n = (1 - \beta_n)w_n + \beta_n T w_n \\ w_n = (1 - \gamma_n)u_n + \gamma_n T u_n \end{cases} \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlanan iterasyona SP iterasyonu denir [54].

Tanım 3.1.8 (CR iterasyonu)

$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)y_n + \alpha_n T y_n \\ y_n = (1 - \beta_n)T x_n + \beta_n T z_n \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n \end{cases} \quad (3.7)$$

şeklinde tanımlanan iterasyona CR iterasyonu denir [55].

Tanım 3.1.9 (Abbas ve Nazir iterasyonu)

$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)T y_n + \alpha_n T z_n \\ y_n = (1 - \beta_n)T x_n + \beta_n T z_n \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n \end{cases} \quad (3.8)$$

şeklinde tanımlanan iterasyona Abbas-Nazir iterasyonu denir [31].

2014 yılında Gürsoy ve Karakaya [56], Picard-S iterasyonunu aşağıdaki şekilde tanımlayarak, bu iterasyonun daraltan dönüşümler için Mann, Noor, SP, CR, Abbas-Nazir, Picard-Mann ve Agarwal-S iterasyonlarından daha hızlı olduğunu göstermişlerdir:

Tanım 3.1.10 (Picard-S iterasyonu)

$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ty_n \\ y_n = (1 - \alpha_n)Tx_n + \alpha_n Tz_n \\ z_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n Tx_n \end{cases} \quad (3.9)$$

2016 yılında Thakur ve ark. [32] aşağıdaki iterasyonu tanımlayarak bu iterasyonun Suzuki genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümler için Mann, Ishikawa, Noor, Abbas-Nazır ve Agarwal-S iterasyonlarından daha hızlı olduğunu nümerik olarak göstermişlerdir:

Tanım 3.1.11 (Thakur iterasyonu)

$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ty_n \\ y_n = T[(1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n z_n] \\ z_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n Tx_n \end{cases} \quad (3.10)$$

Ullah ve Arshad [57], 2018 yılında K^* iterasyonunu aşağıdaki şekilde tanımlayarak bu iterasyonun Suzuki genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümler için Agarwal-S ve Picard-S iterasyonlarından daha hızlı olduğunu nümerik olarak göstermişlerdir:

Tanım 3.1.12 (K^* iterasyonu)

$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ dizisi $[0,1]$ aralığında olmak üzere,

$$\begin{cases} u_{n+1} = Tv_n \\ v_n = T[(1 - \alpha_n)w_n + \alpha_n Tw_n] \\ w_n = (1 - \beta_n)u_n + \beta_n Tu_n \end{cases} \quad (3.11)$$

2018 yılında, Hussain ve ark. [58], K iterasyon yöntemini aşağıdaki şekilde tanımlayarak bu iterasyonun daraltan dönüşümler için Agarwal-S ve Picard-S iterasyonlarından daha hızlı olduğunu nümerik örnekler üzerinden göstermişlerdir

Tanım 3.1.13 (K iterasyonu)

$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ty_n \\ y_n = T[(1 - \alpha_n)Tx_n + \alpha_n Tz_n] \\ z_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n Tx_n \end{cases} \quad (3.12)$$

Tanım 3.1.14 (Karakaya iki adımlı iterasyonu)

$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ dizisi $[0,1]$ aralığında olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = T[(1 - \alpha_n)Tx_n + \alpha_n Ty_n] \\ y_n = T[(1 - \beta_n)x_n + \beta_n Tx_n] \end{cases} \quad (3.13)$$

şeklinde tanımlanan iterasyona Karakaya-iki adımlı iterasyonu denir [59].

Yukarıda verilen bilgiler ışığında tanımlamış olduğumuz yeni iterasyon yöntemi ise şu şekildedir:

Tanım 3.1.15 (Yeni dört adımlı iterasyon yöntemi)

$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ dizileri $[0,1]$ aralığında olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = T[(1 - \alpha_n)Ty_n + \alpha_n Tz_n] \\ y_n = T[(1 - \beta_n)Tx_n + \beta_n Tz_n] \\ z_n = T[(1 - \gamma_n)w_n + \gamma_n Tw_n] \\ w_n = T[(1 - \mu_n)x_n + \mu_n Tx_n] \end{cases} \quad (3.14)$$

Bu iterasyon yöntemi yardımıyla elde edilecek olan bazı sabit nokta teoremlerinin ispatında kullanılacak lemma ve tanımlar aşağıda verilmiştir:

Lemma 3.1.16 $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$, her $n \in \mathbb{N}$ için $\beta_n \in [0,1)$ olacak şekilde negatif olmayan bir reel sayı dizisi olsun. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \infty$ ise, bu durumda $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \beta_n) = 0$ dır [60].

Tanım 3.1.17 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ aynı p noktasına yakınsayan iki dizi olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(a_n, p)}{d(b_n, p)} = 0$$

ise $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi p noktasına $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinden daha hızlı yakınsar denir [61].

Tanım 3.1.18 (X, d) bir metrik uzay, $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Picard iterasyon yönteminden elde edilen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin T 'nin p ile gösterilen sabit noktasına yakınsadığını kabul edelim. $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, X uzayında keyfi bir dizi olmak üzere

$$\varepsilon_n = d(y_{n+1}, f(T, y_n)), n = 0, 1, 2, \dots$$

olarak alalım. Bu iterasyon yönteminin T – kararlı (veya T 'ye göre kararlı) olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = p$$

olmasıdır [62].

Lemma 3.1.19 $\delta \in [0, 1)$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ eşitsizliğini sağlayan ve negatif olmayan $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ sayı dizisini göz önüne alalım. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$u_{n+1} \leq \delta u_n + \varepsilon_n$$

şartını sağlayan herhangi bir $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ pozitif sayı dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ dır [11].

3.2 Yeni Dört Adımlı İterasyon Yöntemi İçin Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda (2.7) şartını sağlayan bir contractive-like dönüşüm kullanılarak inşa edilen (3.14) ile tanımlı yeni iterasyon yönteminden elde edilen dizi için kuvvetli yakınsaklık, yakınsaklık hızı ve kararlılık sonuçları irdelenecektir.

Teorem 3.2.1 C kümesi X Banach uzayının boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi olmak üzere $T: C \rightarrow C$ (2.7) şartını sağlayan bir contractive-like dönüşüm olsun. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ (3.14) numaralı iterasyondan elde edilen bir dizi ve $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ kontrol dizileri $[0, 1]$ aralığına ait olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ şartı sağlansın. Bu durumda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi T dönüşümünün p sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat. $n \rightarrow \infty$ için $x_n \rightarrow p$ olduğu gösterilecektir. (2.7) ve (3.14) kullanılarak;

$$\begin{aligned} \|w_n - p\| &= \|T[(1 - \mu_n)x_n + \mu_n T x_n] - p\| \\ &\leq \delta \|(1 - \mu_n)x_n + \mu_n T x_n - p\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \delta(1 - \mu_n)\|x_n - p\| + \mu_n\delta\|Tx_n - p\| \\
&\leq \delta(1 - \mu_n)\|x_n - p\| + \mu_n\delta^2\|x_n - p\| \\
&\leq \delta[1 - \mu_n(1 - \delta)]\|x_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.15}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|z_n - p\| &= \|T[(1 - \gamma_n)w_n + \gamma_nTw_n] - p\| \\
&\leq \delta\|(1 - \gamma_n)w_n + \gamma_nTw_n - p\| \\
&\leq \delta(1 - \gamma_n)\|w_n - p\| + \gamma_n\delta\|Tw_n - p\| \\
&\leq \delta(1 - \gamma_n)\|w_n - p\| + \gamma_n\delta^2\|w_n - p\| \\
&\leq \delta[1 - \gamma_n(1 - \delta)]\|w_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.16}$$

eşitsizlikleri elde edilir. (3.15) eşitsizliği (3.16)' da yerine yazılırsa;

$$\|z_n - p\| \leq \delta^2[1 - \gamma_n(1 - \delta)][1 - \mu_n(1 - \delta)]\|x_n - p\| \tag{3.17}$$

olur ve

$$\begin{aligned}
\|y_n - p\| &= \|T[(1 - \beta_n)Tx_n + \beta_nTz_n] - p\| \\
&\leq \delta\|(1 - \beta_n)Tx_n + \beta_nTz_n - p\| \\
&\leq \delta^2(1 - \beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n\delta^2\|z_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.18}$$

buradan (3.17) eşitsizliği (3.18)' de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\|y_n - p\| &\leq \delta^2\{(1 - \beta_n)\|x_n - p\| \\
&\quad + \beta_n\delta^2[1 - \gamma_n(1 - \delta)][1 - \mu_n(1 - \delta)]\|x_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.19}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\|x_{n+1} - p\| = \|T[(1 - a_n)Ty_n + a_nTz_n] - p\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \delta \|(1 - a_n)Ty_n + a_nTz_n - p\| \\
&\leq \delta(1 - a_n)\|Ty_n - p\| + a_n\delta\|Tz_n - p\| \\
&\leq \delta^2(1 - \alpha_n)\|y_n - p\| + \alpha_n\delta^2\|z_n - p\| \tag{3.20}
\end{aligned}$$

(3.17) ve (3.19) eşitsizliği (3.20) de yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &\leq \delta^3(1 - \alpha_n)\{(1 - \beta_n)\delta\|x_n - p\| \\
&\quad + \beta_n\delta^3[1 - \gamma_n(1 - \delta)][1 - \mu_n(1 - \delta)]\}\|x_n - p\| \\
&\quad + \alpha_n\delta^4[1 - \gamma_n(1 - \delta)][1 - \mu_n(1 - \delta)]\|x_n - p\|
\end{aligned}$$

olur. $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{\mu_n\} \in [0,1]$ ve $\delta \in (0,1)$ olduğu göz önüne alınır ve yukarıdaki eşitsizlik düzenlenirse

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \delta^3[1 - \alpha_n(1 - \delta)]\|x_n - p\| \tag{3.21}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte tümevarım uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
\|x_n - p\| &\leq \delta^3[1 - \alpha_{n-1}(1 - \delta)]\|x_{n-1} - p\| \\
\|x_{n-1} - p\| &\leq \delta^3[1 - \alpha_{n-2}(1 - \delta)]\|x_{n-2} - p\| \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\|x_2 - p\| \leq \delta^3[1 - \alpha_1(1 - \delta)]\|x_1 - p\|$$

olur ve buradan

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \|x_1 - p\|\delta^{3n} \prod_{i=1}^n [1 - \alpha_i(1 - \delta)] \tag{3.23}$$

elde edilir. $\{\alpha_n\} \in [0,1]$ ve $\delta \in (0,1)$ olduğundan $[1 - \alpha_n(1 - \delta)] \leq 1$ olur. Ortalama Değer Teoremi'nden her $x \in [0,1]$ için $1 - x \leq e^{-x}$ eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla (3.23) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &\leq \|x_1 - p\| \delta^{3n} \prod_{i=1}^n e^{-(1-\delta)\alpha_i} \\
&= \|x_1 - p\| \delta^{3n} e^{-(1-\delta)\sum_{i=1}^n \alpha_i}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

elde edilir. (3.24)'de $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $x_n \rightarrow p$ olduğu görülür. Böylelikle ispat tamamlanır.

Bu teoremden verilen $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ şartına gerek kalmaksızın $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = 0$ olduğu aşağıda verilen teoremden görülebilir:

Teorem 3.2.2 C, X ve T Teorem 3.2.1'de olduğu gibi tanımlansın. Bu durumda (3.14) ile verilen iterasyon yönteminden elde edilen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi T operatörünün p sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat. (3.21) ile verilen $\|x_{n+1} - p\| \leq \delta^3 [1 - \alpha_n(1 - \delta)] \|x_n - p\|$ eşitsizliğini göz önüne alalım. $[1 - \alpha_n(1 - \delta)] \leq 1$ olduğu için

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \delta^3 \|x_n - p\|$$

yazılabilir. Bu eşitsizlik kullanılarak $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = 0$ elde edilir.

Teorem 3.2.3 p sabit noktasına sahip T dönüşümü ile C kümesi Teorem 3.2.1'deki gibi tanımlansın. $x_1 = u_1 \in C$ olmak üzere (3.14) ile verilen yeni iterasyon yönteminden elde edilen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi ve (3.11) ile verilen K^* iterasyon yönteminden elde edilen $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi göz önüne alınsın. $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ dizileri $[0,1]$ aralığında olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için (i) $\alpha_1 \leq \alpha_n \leq 1$ şartı sağlansın. Bu durumda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi p sabit noktasına $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinden daha hızlı yakınsar.

İspat. Teorem 3.2.1'de

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \|x_1 - p\| \delta^{3n} \prod_{i=1}^n [1 - \alpha_i(1 - \delta)] \tag{3.25}$$

eşitsizliği elde edilmişti. Benzer şekilde (3.11) ile verilen iterasyon yöntemi kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|w_n - p\| &\leq (1 - \beta_n)\|u_n - p\| + \delta\beta_n\|u_n - p\| \\
&= [1 - \beta_n(1 - \delta)]\|u_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.26}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|v_n - p\| &\leq \delta(1 - \alpha_n)\|w_n - p\| + \delta\alpha_n\|w_n - p\| \\
&\leq \delta[1 - \alpha_n(1 - \delta)]\|w_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.27}$$

ve

$$\|u_{n+1} - p\| \leq \delta\|v_n - p\| \tag{3.28}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Sırasıyla (3.26), (3.27)'de ve (3.27) eşitsizliği de (3.28)'de yerine yazılıp $[1 - \beta_n(1 - \delta)] \leq 1$ olduğu göz önüne alınırsa;

$$\|u_{n+1} - p\| \leq \delta^2[1 - \alpha_n(1 - \delta)]\|u_n - p\|$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte tümevarım uygulanırsa,

$$\|u_{n+1} - p\| \leq \delta^{2n} \prod_{i=1}^n [1 - \alpha_i(1 - \delta)] \|x_1 - p\| \tag{3.29}$$

elde edilir. (i) kabulü sırasıyla (3.25) ve (3.29) eşitsizliklerine uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &\leq \delta^{3n} \prod_{i=1}^n [1 - \alpha_1(1 - \delta)] \|x_1 - p\| \\
&= \delta^{3n} [1 - \alpha_1(1 - \delta)]^n \|x_1 - p\|
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1} - p\| &\leq \delta^{2n} \prod_{i=1}^n [1 - \alpha_1(1 - \delta)] \|u_1 - p\| \\
&= \delta^{2n} [1 - \alpha_1(1 - \delta)]^n \|u_1 - p\|
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$a_n = \delta^{3n}[1 - \alpha_1(1 - \delta)]^n \|x_1 - p\|$$

$$b_n = \delta^{2n}[1 - \alpha_1(1 - \delta)]^n \|s_1 - p\|$$

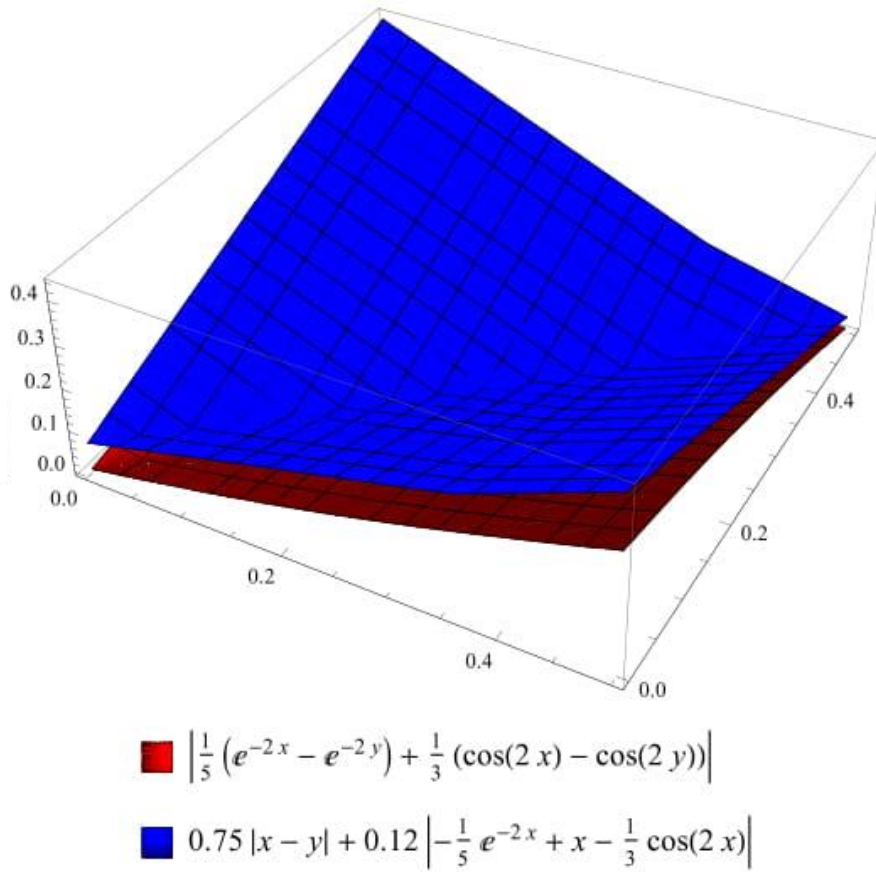
şeklinde seçilsin ve $\phi_n = \frac{a_n}{b_n}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\phi_n &= \frac{a_n}{b_n} = \frac{\|x_1 - p\| \delta^{3n} [1 - \alpha_1(1 - \delta)]^n}{\|u_1 - p\| \delta^{2n} [1 - \alpha_1(1 - \delta)]^n} \\ &= \delta^n\end{aligned}$$

elde edilir. $\delta \in (0,1)$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = 0$ olur. Tanım 3.1.17'den $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi p sabit noktasına $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisine göre daha hızlı yakınsar.

Şimdi bu sonucu destekleyen örnekleri verelim:

Örnek 3.2.4 $X = \mathbb{R}$ ve $C = [0,1]$ olmak üzere $T: C \rightarrow C$, $T(x) = \frac{1}{5}e^{-2x} + \frac{1}{3}\cos 2x$ şeklinde seçilirse bu dönüşümün $\delta = 0.75$ ve $\psi(t) = \frac{3t}{25}$ için (2.7) şartını sağlayan bir contractive-like dönüşüm olduğu Şekil 3.1'den görülebilir:



Şekil 3.1. Örnek 3.2.4 ile verilen T dönüşümünün (2.7) şartını sağladığını gösteren şekil

Bu dönüşümün sabit noktasının $p = 0,35261795533135$ olduğu görülebilir. $x_1 = 0,99$ başlangıç noktasıyla birlikte $\alpha_n = \beta_n = \gamma_n = \mu_n = \frac{1}{4}$ olsun. Aşağıda verilen çizelgeler, (3.14) ile tanımlanan yeni iterasyon yönteminin Noor (3.3), Agarwal-S (3.4), Picard-Mann (3.5), SP (3.6), CR (3.7), Abbas-Nazır (3.8), Picard-S (3.9), Thakur (3.10), K^* (3.11), K (3.12) ve Karakaya-iki adım (3.13) iterasyonlarından daha hızlı olduğunu göstermektedir:

Çizelge 3.1.'den görülmektedir ki, (3.14) ile tanımlı yeni iterasyon yöntemi 16. adımda sabit noktaya ulaşırken, K^* (3.11) iterasyonu 18. adımda, Abbas-Nazır (3.8) iterasyonu 20. adımda ve K (3.12) iterasyonu 23. adımda sabit noktaya ulaşmaktadır.

Çizelge 3.1. Bazı iterasyon yöntemlerinin yakınsama davranışı.

x_n	Yeni İterasyon	K*	Abbas-Nazır	K
x_1	0,99	0,99	0,99	0,99
x_2	0,41706233263467	0,43575190477400	0,43944871615998	0,21435139142803
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{15}	0,35261795533136	0,35261795533195	0,35261795534296	0,35261795581020
x_{16}	0,35261795533135	0,35261795533143	0,35261795533337	0,35261795522394
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{18}		0,35261795533135	0,35261795533141	0,35261795532594
x_{19}		$\vdots$	0,35261795533136	0,35261795533256
x_{20}			0,35261795533135	0,35261795533107
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
x_{22}				0,35261795533133
x_{23}				0,35261795533135

Çizelge 3.2.'den görülmektedir ki, Karakaya-iki adımlı iterasyon yöntemi (3.13) 18. adımda sabit noktaya ulaşırken, CR (3.7) iterasyonu 33. adımda, SP (3.6) iterasyonu 22. adımda ve Thakur (3.10) iterasyonu 32. adımda sabit noktaya ulaşmaktadır.

Çizelge 3.2. Bazı iterasyon yöntemlerinin yakınsama davranışı.

x_n	Karakaya-İki adım	CR	SP	Thakur
x_1	0,99	0,99	0,99	0,99
x_2	0,44444626305663	0,09717346826313	0,47296654454298	0,55568990364746
x_{17}	0,35261795533136	0,35261797249511	0,35261795533823	0,35261799432552
x_{18}	0,35261795533135	0,35261794957888	0,35261795533278	0,35261796922018
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{22}		0,35261795525877	0,35261795533135	0,35261795555487
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{32}	0,35261795533135	0,35261795533134	0,35261795533135	0,35261795533135
x_{33}		0,35261795533135		

Çizelge 3.3.'ten görülmektedir ki, Picard-S (3.9) iterasyon yöntemi 32. adımda sabit noktaya ulaşırken, Agarwal-S (3.4) iterasyonu 61. adımda, Picard-Mann (3.5) iterasyonu 35. adımda ve Noor (3.3) iterasyonu 74. adımda sabit noktaya ulaşmaktadır.

Çizelge 3.3. Bazı iterasyon yöntemlerinin yakınsama davranışı.

x_n	Picard-S	Agarwal-S	Picard-Mann	Noor
x_1	0,99	0,99	0,99	0,99
x_2	0,55469942149991	-0,0553351828157933	0,09369660014021	0,75655163907365
$\vdots$				
x_{32}	0,35261795533135	0,35261794255326	0,35261795533131	0,35261875839071
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{35}		0,35261795764331	0,35261795533135	0,35261817243994
$\vdots$				
x_{61}		0,35261795533135		0,35261795533394
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{74}				0,35261795533135

Örnek 3.2.5 $X = \mathbb{R}$ ve $C = [0,1]$ olmak üzere $T: C \rightarrow C$, $T(x) = \frac{1}{25} \ln(x^3 + 3) - \frac{1}{14} \sin(x - 0,5)$ şeklinde seçilirse bu dönüşümün $\delta = 0.1$ ve $\psi(t) = \frac{t}{28}$ için (2.7) şartını sağlayan $p = 0,07349891805968$ sabit noktasına sahip bir contractive-like dönüşüm olduğu görülebilir. $x_1 = 0,5$ başlangıç noktasıyla birlikte $\alpha_n = \frac{n+1}{n+4}$, $\beta_n = \frac{n+2}{n+8}$, $\gamma_n = \frac{n+3}{n+12}$ ve $\mu_n = \frac{n+4}{n+16}$ olsun. Aşağıda verilen çizelgeler, (3.14) ile tanımlanan yeni iterasyon yönteminin Noor (3.3), Agarwal-S (3.4), Picard-Mann (3.5), SP (3.6), CR (3.7), Abbas-Nazır (3.8), Picard-S (3.9), Thakur (3.10), K^* (3.11), K (3.12) ve Karakaya-iki adım (3.13) iterasyonlarından daha hızlı olduğunu göstermektedir:

Çizelge 3.4.'ten görülmektedir ki, (3.14) ile tanımlı yeni iterasyon yöntemi 4. adımda sabit noktaya ulaşırken, K^* (3.11) iterasyonu 6. adımda, Abbas-Nazır (3.8) iterasyonu 10. adımda ve K (3.12) iterasyonu 5. adımda sabit noktaya ulaşmaktadır.

Çizelge 3.4. Bazı iterasyon yöntemlerinin yakınsama davranışı.

x_n	Yeni İterasyon	K^*	Abbas-Nazır	K
x_1	0,5	0,5	0,5	0,5
x_2	0,07350336826499	0,07417311353063	0,06687163818334	0,07339837003193
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_4	0,07349891805968	0,07349891870492	0,07349651688275	0,07349891805544
x_5	$\vdots$	0,07349891806010	0,07349896711350	0,07349891805968
x_6		0,07349891805968	0,07349891705236	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{10}			0,07349891805968	

Çizelge 3.5.'ten görülmektedir ki, Karakaya-iki adımlı iterasyon yöntemi (3.13) 6. adımda sabit noktaya ulaşırken, CR (3.7) iterasyonu 9. adımda, SP (3.6) iterasyonu 12. adımda ve Thakur (3.10) iterasyonu 7. adımda sabit noktaya ulaşmaktadır.

Çizelge 3.5. Bazı iterasyon yöntemlerinin yakınsama davranışı.

x_n	Karakaya-İki adım	CR	SP	Thakur
x_1	0,5	0,5	0,5	0,5
x_2	0,07417546856131	0,05917754125575	0,17948291982852	0,07505460051806
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_6	0,07349891805968	0,07349891634410	0,07350944786085	0,07349891805979
x_7		0,07349891807938	0,07349940893220	0,07349891805968
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_9		0,07349891805968	0,07349891855031	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{12}			0,07349891805968	

Çizelge 3.6.'dan görülmektedir ki, Picard-S (3.9) iterasyon yöntemi 7. adımda sabit noktaya ulaşırken, Agarwal-S (3.4) iterasyonu 12. adımda, Picard-Mann (3.5) iterasyonu 10. adımda ve Noor (3.3) iterasyonu 22. adımda sabit noktaya ulaşmaktadır.

Çizelge 3.6. Bazı iterasyon yöntemlerinin yakınsama davranışı.

x_n	Picard-S	Agarwal-S	Picard-Mann	Noor
x_1	0,5	0,5	0,5	0,5
x_2	0,07504981555882	0,04945973404553	0,05728402642091	0,32203488227597
$\vdots$				
x_7	0,07349891805968	0,07349892175066	0,07349891814348	0,07503285056463
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{10}		0,07349891805955	0,07349891805968	0,07351836160577
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{12}		0,07349891805968		0,07349962855550
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{22}				0,07349891805968

Teorem 3.2.6 X bir normlu lineer uzay, $T: X \rightarrow X$ dönüşümü (2.7) şartını sağlayan bir contractive like dönüşüm ve $\phi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu, $\phi(0) = 0$ şartını sağlayan bir monoton artan fonksiyon olsun. (3.14) iterasyon yöntemi tarafından üretilen dizi $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ olmak üzere, T 'nin bir p sabit noktasına sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda (3.14) iterasyon yöntemi T -kararlıdır.

İspat. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, X uzayında herhangi bir dizi olsun. $\varepsilon_n = \|x_{n+1} - f(T, x_n)\|$ için

$$y_n = T[(1 - \beta_n)Tx_n + \beta_nTz_n], \quad z_n = T[(1 - \gamma_n)w_n + \gamma_nTw_n],$$

$w_n = T[(1 - \mu_n)x_n + \mu_nTx_n]$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$ olduğu gösterilecektir:

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\| &\leq \|x_{n+1} - T[(1 - \alpha_n)Ty_n + \alpha_nTz_n]\| \\ &\quad + \|T[(1 - \alpha_n)Ty_n + \alpha_nTz_n] - p\| \\ &\leq \varepsilon_n + \delta\|(1 - \alpha_n)Ty_n + \alpha_nTz_n - p\| \quad (3.30) \\ &\leq \varepsilon_n + \delta(1 - \alpha_n)\|Ty_n - p\| + \delta\alpha_n\|Tz_n - p\| \\ &\leq \varepsilon_n + \delta^2(1 - \alpha_n)\|y_n - p\| + \delta^2\alpha_n\|z_n - p\| \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \|y_n - p\| &= \|T[(1 - \beta_n)Tx_n + \beta_nTz_n] - p\| \\ &\leq \delta\|(1 - \beta_n)Tx_n + \beta_nTz_n - p\| \\ &\leq \delta^2(1 - \beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n\delta^2\|z_n - p\| \quad (3.31) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \|z_n - p\| &= \|T[(1 - \gamma_n)w_n + \gamma_nTw_n] - p\| \\ &\leq \delta(1 - \gamma_n)\|w_n - p\| + \gamma_n\delta^2\|w_n - p\| \\ &\leq \delta[1 - \gamma_n(1 - \delta)]\|w_n - p\| \quad (3.32) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|w_n - p\| &= \|T[(1 - \mu_n)x_n + \mu_n T x_n] - p\| \\
&\leq \delta(1 - \mu_n)\|x_n - p\| + \mu_n \delta^2 \|x_n - p\| \\
&\leq \delta[1 - \mu_n(1 - \delta)]\|x_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.33}$$

elde edilir. (3.33) eşitsizliği (3.32) eşitsizliğinde yerine yazılırsa;

$$\|z_n - p\| \leq \delta^2[1 - \gamma_n(1 - \delta)][1 - \mu_n(1 - \delta)]\|x_n - p\| \tag{3.34}$$

olur. (3.34) eşitsizliği (3.31) de yerine yazılırsa;

$$\|y_n - p\| \leq \delta^2\{1 - \beta_n(1 - \delta^2)[1 - \gamma_n(1 - \delta)][1 - \mu_n(1 - \delta)]\}\|x_n - p\| \tag{3.35}$$

elde edilir. Ayrıca (3.35) ve (3.34) eşitsizlikleri (3.30) da yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &\leq \varepsilon_n + \delta^4\{1 - \beta_n(1 - \delta^2)(1 - \alpha_n)[1 - \gamma_n(1 - \delta)][1 - \mu_n(1 - \delta)] \\
&\quad + \alpha_n[1 - \gamma_n(1 - \delta)][1 - \mu_n(1 - \delta)]\}\|x_n - p\|
\end{aligned}$$

$\delta \in [0,1)$ ve $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \mu_n \in [0,1]$ olduğu için,

$$\begin{aligned}
&\delta^4\{1 - \beta_n(1 - \delta^2)(1 - \alpha_n)[1 - \gamma_n(1 - \delta)][1 - \mu_n(1 - \delta)] \\
&\quad + \alpha_n[1 - \gamma_n(1 - \delta)][1 - \mu_n(1 - \delta)]\} < 1
\end{aligned}$$

olup buradan,

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \delta\|x_n - p\| + \varepsilon_n$$

yazılabilir. Lemma 3.1.19'dan $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$ olur.

Tersine $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$ olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ olduğu gösterilecektir:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n &= \|x_{n+1} - f(T, x_n)\| \\
&\leq \|x_{n+1} - p\| + \|T[(1 - \alpha_n)Ty_n + \alpha_n Tz_n] - p\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|x_{n+1} - p\| + \delta\|(1 - \alpha_n)Ty_n + \alpha_nTz_n - p\| \\
&\leq \|x_{n+1} - p\| + \delta^2(1 - \alpha_n)\|y_n - p\| + \delta^2\alpha_n\|z_n - p\|
\end{aligned}$$

(3.35) ve (3.34) eşitsizlikleri yukarıda elde edilen eşitsizlikte yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n &= \|x_{n+1} - p\| + \delta^4\{1 - \beta_n(1 - \delta^2)(1 - \alpha_n)[1 - \gamma_n(1 - \delta)][1 - \mu_n(1 - \delta)] \\
&\quad + \alpha_n[1 - \gamma_n(1 - \delta)][1 - \mu_n(1 - \delta)]\}\|x_n - p\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ elde edilir.

Dolayısıyla (3.14) ile tanımlanan yeni iterasyon yöntemi T – kararlıdır.



4. SUZUKİ TIPTEN GENİŞLEMİYEN DÖNÜŞÜMLER İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu bölümde, Suzuki tipten genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümler için (3.14) ile verilen iterasyon yönteminden elde edilen dizinin kuvvetli ve zayıf yakınsaklıkları ispatlanacak ve bu dizinin yakınsamasının daha hızlı olduğu nümerik olarak gösterilecektir.

4.1 Bazı Önemli Tanımlar ve Notasyonlar

Tanım 4.1.1 (Suzuki Genelleştirilmiş Genişlemeyen Dönüşüm)

X bir Banach uzayı ve K , X 'in boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in K$ için

$$\frac{1}{2} \|x - Tx\| \leq \|x - y\| \Rightarrow \|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \quad (4.1)$$

ise T dönüşümüne K üzerinde (C) şartını sağlar denir.

(C) şartını sağlayan T dönüşümü Suzuki genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümdür [22]. Ayrıca (C) şartını sağlayan dönüşümler genişlemeyen dönüşümlerden daha geneldir.

Örnek 4.1.2 $T: [0,3] \rightarrow [0,3]$ bir dönüşüm ve

$$T(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 3 \\ 1, & x = 3 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Eğer $x < y$ ve $x \in ([0,3] \times [0,3]) \setminus ((2,3) \times \{3\})$ ise, $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ sağlanır. Eğer $x \in (2,3)$ ve $y = 3$ ise,

$$\frac{1}{2} \|x - Tx\| = \frac{x}{2} > 1 > \|x - y\| \text{ ve } \frac{1}{2} \|y - Ty\| = 1 > \|x - y\|$$

şeklinde olup T dönüşümü (C) koşulunu sağlar. Fakat T sürekli olmadığından genişlemeyen dönüşüm değildir.

Tanım 4.1.3 (Demiclosed Özelliği) K , X Banach uzayının boştan farklı bir alt kümesi ve $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm olsun. $\forall x \in K$ ve $y \in X$ için K kümesindeki $\{x_n\}$ dizisi x noktasına zayıf ve $\{Tx_n\}$ dizisi y noktasına kuvvetli yakınsadığında $Tx = y$ oluyorsa T dönüşümüne y noktasında demiclosed denir [63].

Tanım 4.1.4 (Opial Şartı) X Banach uzayında $x_n \rightharpoonup x$ zayıf yakınsaması $y \neq x$ olmak üzere her $y \in X$ için

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| < \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\|$$

olmasını gerektiriyorsa, bu durumda X , Opial şartını sağlıyor denir [64].

Bu eşitsizlikteki “limsup” ifadeleri “liminf” ile yer değiştirirse, benzer bir şart elde edilir.

Tanım 4.1.5 (Asimptotik Yarıçap ve Asimptotik Merkez) K , X Banach uzayının boştan farklı kapalı konveks bir alt kümesi ve $\{x_n\}$, X de sınırlı bir dizi olsun. $x \in K$ olmak üzere

$$r_\alpha(x, \{x_n\}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|$$

kuralı ile verilen $r_\alpha(\cdot, \{x_n\}): X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu göz önüne alınsın. K kümesinde tanımlı $r_\alpha(\cdot, \{x_n\})$ fonksiyonunun infimumuna $\{x_n\}$ dizisinin K ya göre asimptotik çapı denir ve $r_\alpha(K, \{x_n\})$ ile gösterilir. Yani asimptotik yarıçap

$$r_\alpha(K, \{x_n\}) = \inf\{r_\alpha(x, \{x_n\}): x \in K\}$$

şeklindedir.

$z \in K$ olmak üzere

$$r_\alpha(z, \{x_n\}) = \inf\{r_\alpha(x, \{x_n\}): x \in K\} = r_\alpha(K, \{x_n\})$$

oluyorsa bu $z \in K$ noktasına $\{x_n\}$ dizisinin K ya göre asimptotik merkezi denir. $\{x_n\}$ dizisinin K ya göre asimptotik merkezlerinin sınıfı $Z_\alpha(K, \{x_n\})$ ile gösterilir. Yani asimptotik merkez

$$Z_\alpha(K, \{x_n\}) = \{z \in K : r_\alpha(z, \{x_n\})\} = r_\alpha(K, \{x_n\})$$

şeklindedir [65].

$Z_\alpha(K, \{x_n\})$ boş küme olabildiği gibi tek ya da çok elemanlı da olabilir. Aşağıdaki teoremlerde bir düzgün konveks Banach uzayında $Z_\alpha(K, \{x_n\})$ nin tek elemanlı bir küme olduğu gösterilmiştir.

Teorem 4.1.6 X düzgün konveks bir Banach uzay, K bu uzayın boştan farklı kapalı konveks bir alt kümesi ve $\{x_n\}$, X te sınırlı bir dizi olsun. Bu durumda $Z_\alpha(K, \{x_n\})$ tek elemanlı bir kümedir [65].

Teorem 4.1.7 K, X düzgün konveks Banach uzayının boştan farklı kapalı konveks bir alt kümesi olsun. X teki her sınırlı $\{x_n\}$ dizisi K ya göre bir tek asimptotik merkeze sahiptir. Yani

$$Z_\alpha(K, \{x_n\}) = \{z\}$$

ve $x \neq z$ olmak üzere

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| < \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|$$

şeklindedir [65].

4.2 Suzuki Genelleştirilmiş Genişlemeyen Dönüşümler İçin Kuvvetli ve Zayıf Yakınsaklık Teoremleri

Önerme 4.2.1 K, X Banach uzayının boştan farklı bir altkümesi ve $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm olsun.

- i. Eğer T genişlemeyen dönüşüm ise o zaman T dönüşümü (C) şartını sağlar.
- ii. Bir sabit noktaya sahip olan ve (C) şartını sağlayan her dönüşüm quasi genişlemeyen dönüşümdür.
- iii. Eğer T dönüşümü (C) şartını sağlıyorsa, o zaman

$$\|x - Ty\| \leq 3\|Tx - x\| + \|x - y\|, \forall x, y \in K$$

şeklindedir [22].

Lemma 4.2.2 K, X Banach uzayının boştan farklı bir alt kümesi ve $T: K \rightarrow K$ Opial şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. T nin (C) şartını sağladığı kabul edilsin. Eğer $\{x_n\}$ dizisi z ye zayıf yakınsak ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$ ise o zaman $Tz = z$ dir. Yani $I - T$ sıfırda demiclosed olur [22].

Lemma 4.2.3 K, X düzgün konveks Banach uzayının zayıf kompakt konveks bir alt kümesi ve $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm olsun. T nin (C) şartını sağladığı kabul edilsin. O zaman T bir sabit noktaya sahiptir [22].

Lemma 4.2.4 X bir düzgün konveks Banach uzayı ve bütün pozitif tamsayılar için $0 < a \leq s_n \leq b < 1$ olsun. Ayrıca $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$, X de bazı $d \geq 0$ için

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq d, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| \leq d$$

ve

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|s_n x_n + (1 - s_n) y_n\| = d$$

şartlarını sağlayan iki dizi olsun. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$ olur [66].

Lemma 4.2.5 K, X düzgün konveks Banach uzayının boştan farklı, kapalı konveks bir alt kümesi ve $F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere $T: K \rightarrow K$ bir Suzuki genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümü olsun. $\{x_n\}$ dizisi (3.14) iterasyon yöntemi ile tanımlanan bir dizi olsun. O zaman tüm $p \in F(T)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ mevcuttur.

İspat. $p \in F(T)$ ve $x \in K$ olsun. T dönüşümü (C) şartını sağladığından Önerme 4.2.1 (ii)'den T quasi genişlemeyen dönüşümdür. Yani

$$\|Tx - p\| \leq \|x - p\|$$

şeklindedir. (3.14) iterasyon yöntemi kullanılarak

$$\|w_n - p\| = \|T[(1 - \mu_n)x_n + \mu_n Tx_n] - p\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|(1 - \mu_n)x_n + \mu_nTx_n - p\| \\
&\leq (1 - \mu_n)\|x_n - p\| + \mu_n\|Tx_n - p\| \\
&\leq (1 - \mu_n)\|x_n - p\| + \mu_n\|x_n - p\| \\
&= \|x_n - p\|
\end{aligned} \tag{4.2}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|z_n - p\| &= \|T[(1 - \gamma_n)w_n + \gamma_nTw_n] - p\| \\
&\leq \|(1 - \gamma_n)w_n + \gamma_nTw_n - p\| \\
&\leq (1 - \gamma_n)\|w_n - p\| + \gamma_n\|Tw_n - p\| \\
&\leq (1 - \gamma_n)\|w_n - p\| + \gamma_n\|w_n - p\| \\
&= \|w_n - p\| \\
&= \|x_n - p\|
\end{aligned} \tag{4.3}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|y_n - p\| &= \|T[(1 - \beta_n)Tx_n + \beta_nTz_n] - p\| \\
&\leq \|(1 - \beta_n)Tx_n + \beta_nTz_n - p\| \\
&\leq (1 - \beta_n)\|Tx_n - p\| + \beta_n\|Tz_n - p\| \\
&\leq (1 - \beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n\|z_n - p\| \\
&\leq (1 - \beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n\|x_n - p\| \\
&= \|x_n - p\|
\end{aligned} \tag{4.4}$$

ve

$$\|x_{n+1} - p\| = \|T[(1 - a_n)Ty_n + a_nTz_n] - p\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|(1 - a_n)Ty_n + a_nTz_n - p\| \\
&\leq (1 - a_n)\|Ty_n - p\| + a_n\|Tz_n - p\| \\
&\leq (1 - a_n)\|y_n - p\| + a_n\|z_n - p\| \\
&\leq (1 - a_n)\|x_n - p\| + a_n\|x_n - p\| \\
&= \|x_n - p\|
\end{aligned} \tag{4.5}$$

elde edilir. Böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - p\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ olur. Buradan tüm $p \in F(T)$ için $\{\|x_n - p\|\}$ sınırlı ve artmayan dizi olur. Böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ vardır.

Lemma 4.2.6 K, X düzgün konveks Banach uzayının boştan farklı, kapalı konveks bir alt kümesi ve $T: K \rightarrow K$ Suzuki genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümü olsun. $\{x_n\}$ dizisi (3.14) iterasyon yöntemi ile tanımlanan bir dizi olsun. O zaman $F(T) \neq \emptyset$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\{x_n\}$ dizisinin sınırlı ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$ olmasıdır.

İspat. Lemma 4.2.5'ten $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ mevcut ve $\{x_n\}$ sınırlıdır. Burada,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = r \tag{4.6}$$

olduğunu kabul edelim. (4.2) ve (4.6)'dan,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|w_n - p\| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| \leq r \tag{4.7}$$

olur. T Suzuki genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm olduğundan Önerme 4.2.1 (ii)'den sabit noktaya sahip olan ve (C) şartını sağlayan her dönüşüm quasi genişlemeyen dönüşümdür. O halde,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - p\| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| \leq r \tag{4.8}$$

olur. Ayrıca

$$\|x_{n+1} - p\| = \|T[(1 - a_n)Ty_n + a_nTz_n] - p\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|(1 - a_n)Ty_n + a_nTz_n - p\| \\
&\leq (1 - a_n)\|y_n - p\| + a_n\|z_n - p\| \\
&\leq (1 - a_n)\|T[(1 - \beta_n)Tx_n + \beta_nTz_n] - p\| + a_n\|z_n - p\| \\
&\leq (1 - a_n)\|(1 - \beta_n)Tx_n + \beta_nTz_n - p\| + a_n\|z_n - p\| \\
&\leq (1 - a_n)(1 - \beta_n)\|x_n - p\| + (1 - a_n)\beta_n\|z_n - p\| + a_n\|z_n - p\| \\
&\leq (1 - a_n)(1 - \beta_n)\|x_n - p\| + (1 - a_n)\beta_n\|w_n - p\| + a_n\|w_n - p\| \\
&\leq (1 - a_n)(1 - \beta_n)\|x_n - p\| + (1 - a_n)\beta_n\|x_n - p\| + a_n\|w_n - p\| \\
&\leq (1 - a_n)\|x_n - p\| + a_n\|w_n - p\| \\
&\leq \|x_n - p\| - \alpha_n\|x_n - p\| + \alpha_n\|w_n - p\|
\end{aligned}$$

olup, buradan

$$\frac{\|x_{n+1} - p\| - \|x_n - p\|}{\alpha_n} \leq [\|w_n - p\| - \|x_n - p\|] \quad (4.9)$$

elde edilir. $\alpha_n \in (0,1)$ olduğundan yukarıdaki eşitsizlikten

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| - \|x_n - p\| &\leq \frac{\|x_{n+1} - p\| - \|x_n - p\|}{\alpha_n} \\
&\leq \|w_n - p\| - \|x_n - p\|
\end{aligned}$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \|w_n - p\| \quad (4.10)$$

olur. Son eşitsizlikte $\liminf$ 'a geçilirse,

$$\begin{aligned}
r = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - p\| &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|w_n - p\| \\
r &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|z_n - p\| \quad (4.11)
\end{aligned}$$

Böylece (4.7) ve (4.11)'den dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - p\| = r$$

elde edilir. Bu eşitlik kullanılarak,

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - p\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|T[(1 - \mu_n)x_n + \mu_n Tx_n] - p\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \mu_n)x_n + \mu_n Tx_n - p\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \mu_n)(x_n - p) + \mu_n(Tx_n - p)\| \end{aligned} \quad (4.12)$$

(4.6), (4.8), (4.12) ve Lemma 4.2.4'ten,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$$

elde edilir.

Tersine $\{x_n\}$ sınırlı ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$ olsun. $p \in A(K, \{x_n\})$ olsun.

Önerme 4.2.1 (iii) ve asimptotik merkez kavramından,

$$\begin{aligned} r(Tp, \{x_n\}) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tp\| \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (3\|Tx_n - x_n\| + \|x_n - p\|) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| \\ &= r(p, \{x_n\}) = r(K, \{x_n\}) \end{aligned}$$

Buradan $Tp \in A(K, \{x_n\})$ elde edilir. X düzgün konveks olduğundan $A(K, \{x_n\})$ tek elemana sahiptir. O halde $Tp = p$ dir.

Teorem 4.2.7 K, X düzgün konveks Banach uzayının boştan farklı, kapalı konveks bir alt kümesi ve $F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere $T: K \rightarrow K$ bir Suzuki genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm olsun. $\{x_n\}$ dizisi (3.14) ile verilen iterasyon yönteminden elde edilen bir dizi ve X Opial şartını sağlasın. O zaman $\{x_n\}$, $F(T)$ kümesinin bir noktasına zayıf yakınsar.

İspat. $p \in F(T)$ olduğundan Lemma 4.2.5'ten dolayı $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ vardır. $\{x_n\}$ dizisinin $F(T)$ de bir tek zayıf alt dizisel limite sahip olduğu gösterilecektir. $\{x_{n_j}\}$ ve $\{x_{n_k}\}$ dizileri $\{x_n\}$ nin alt dizileri olmak üzere zayıf limitleri sırasıyla x ve y olsun. Lemma 4.2.6'dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$ ve Lemma 4.2.2'den $I - T$ sıfırda demicloseddir. Bu ise $(I - T)x = 0$ ve $x = Tx$ anlamına gelir. Benzer şekilde $Ty = y$ olduğu görülebilir. Şimdi bu limitin tek olduğunu gösterelim. Bunun için $x \neq y$ olduğunu kabul edelim. Opial şartından,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| &= \lim_{n_j \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - x\| \\ &< \lim_{n_j \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - y\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\| \\ &= \lim_{n_k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - y\| \\ &< \lim_{n_k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - x\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| \end{aligned}$$

Bu bir çelişkidir. O zaman $x = y$ dir. Sonuç olarak $\{x_n\}$ dizisi $F(T)$ nin bir noktasına zayıf yakınsar.

Teorem 4.2.8 K, X düzgün konveks Banach uzayının boştan farklı, kapalı, konveks bir alt kümesi ve $T: K \rightarrow K$ bir Suzuki genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm olsun. $\{x_n\}$ dizisi (3.14) iterasyon yöntemi ile tanımlanan bir dizi olsun. $d(x_n, F(T)) = \{\inf \|x_n - p\|, p \in F(T)\}$ olmak üzere $\{x_n\}$ dizisinin $F(T)$ nin bir

noktasına yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T)) = 0$ ya da $\limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T)) = 0$ olmasıdır.

İspat. Gereklik aşıkardır.

Yeterlilik için $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T)) = 0$ olsun. Lemma 4.2.5'ten $\forall p \in F(T)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ vardır. Bu yüzden hipotez gereği $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T)) = 0$ dır. $\{x_n\}$ in K de bir Cauchy dizisi olduğunu göstereceğiz.

$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T)) = 0$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall n \geq m_0$ olduğunda

$$d(x_n, F(T)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ve

$$\inf\{\|x_n - p\| : p \in F(T)\} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $m_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $n = m_0$ seçilirse

$$\inf\{\|x_{m_0} - p\| : p \in F(T)\} < \frac{\varepsilon}{2}$$

yazılabilir. Bu nedenle

$$\|x_{m_0} - p\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $p \in F(T)$ vardır. $m, n \geq m_0$ için,

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - x_n\| &\leq \|x_{n+m} - p\| + \|x_n - p\| \\ &\leq \|x_{m_0} - p\| + \|x_{m_0} - p\| \\ &= 2\|x_{m_0} - p\| < \varepsilon \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ise $\{x_n\}$ in K kümesinde bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. K kapalı olduğundan, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = q$ olacak şekilde bir $q \in K$ noktası vardır. $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T)) = 0$ olduğundan $d(q, F(T)) = 0$ olur. Dolayısıyla $q \in F(T)$ elde edilir.

Teorem 4.2.9 K, X düzgün konveks Banach uzayının boştan farklı, kompakt, konveks bir alt kümesi ve $T: K \rightarrow K$ bir Suzuki genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm olsun. $\{x_n\}$ dizisi (3.14) iterasyon yöntemi ile tanımlanan bir dizi olmak üzere $\{x_n\}$, T nin bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat. Lemma 4.2.3'ten $F(T) \neq \emptyset$ ve Lemma 4.2.6'dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - x_n\| = 0$ elde edilir. K kompakt olduğundan, $\{x_n\}$ dizisinin bir $\{x_{n_j}\}$ alt dizisi vardır öyle ki bazı $p \in K$ için $x_{n_j} \rightarrow p$ kuvvetli yakınsaması mevcuttur. Önerme 4.2.1 (iii)'den,

$$\|x_{n_j} - Tp\| \leq 3 \|Tx_{n_j} - x_{n_j}\| + \|x_{n_j} - p\|, \forall j \geq 1$$

olur. Bu eşitsizlikte limite geçilirse,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - Tp\| = 0$$

elde edilir. Böylece $Tp = p$ olur yani $p \in F(T)$ dir. Ayrıca Lemma 4.2.5'ten $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ mevcut olduğundan $\{x_n\}$ dizisi p ye kuvvetli yakınsar.

Tanım 4.2.10 ((A) Şartı)

K, X Banach uzayının boştan farklı, konveks bir alt kümesi, $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. $d(x, F(T)) = \inf\{d(x, p): p \in F(T)\}$ olmak üzere $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $\forall r > 0$ için $f(r) > 0$, $f(0) = 0$ şeklinde tanımlı, azalmayan bir f fonksiyonu mevcut ve her $x \in K$ için $\|x - Tx\| \geq f(d(x, F(T)))$ oluyor ise, T ye (A) şartını sağlar denir [67].

Teorem 4.2.11 K, X düzgün konveks Banach uzayının boştan farklı, kapalı konveks bir alt kümesi ve $F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere $T: K \rightarrow K$ dönüşümü (A) şartını sağlayan bir Suzuki genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm olsun. Bu durumda (3.14)

iterasyon yöntemi ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi T 'nin bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat. Lemma 4.2.5'ten $\forall p \in F(T)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ vardır ve böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T))$ vardır. $\delta \geq 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = \delta$ olduğunu kabul edelim. Eğer

$\delta = 0$ ise sonuç bulunur. $\delta > 0$ olduğunu kabul edelim. Hipotezden ve (A) şartından

$$f(d(x_n, F(T))) \leq \|Tx_n - x_n\| \quad (4.13)$$

elde edilir. $F(T) \neq \emptyset$ olduğundan Lemma 4.2.6'dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - x_n\| = 0$ elde edilir.

Bu ise $\lim_{n \rightarrow \infty} f(d(x_n, F(T))) = 0$ olduğunu verir. f azalmayan bir fonksiyon olduğundan $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T)) = 0$ elde edilir. Böylece $\forall i \in \mathbb{N}$ için

$$\|x_{n_i} - y_i\| < \frac{1}{2^i} \quad (4.14)$$

olacak şekilde $\{x_n\}$ dizisinin bir $\{x_{n_i}\}$ alt dizisini ve $\{y_i\} \subset F(T)$ dizisini elde ederiz. (4.14) eşitliğinden,

$$\|x_{n_{i+1}} - y_i\| \leq \|x_{n_i} - y_i\| < \frac{1}{2^i}$$

$$\|y_{i+1} - y_i\| \leq \|y_{i+1} - x_{i+1}\| + \|x_{i+1} - y_i\|$$

$$\leq \frac{1}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^i}$$

$$< \frac{1}{2^{i-1}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

Böylece $\{y_i\}$ dizisi $F(T)$ içinde bir Cauchy dizisidir ve bu dizi bir p noktasına yakınsar. Dolayısıyla $p \in F(T)$ olur ve $\{x_{n_i}\}$ dizisi p noktasına kuvvetli yakınsar.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ mevcut olduğundan $\{x_n\} \rightarrow p$ elde edilir.

Örnek 4.2.12 $T: [0,1] \rightarrow [0,1]$ bir dönüşüm olmak üzere,

$$T(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in \left[0, \frac{1}{8}\right) \\ \frac{x+3}{4}, & x \in \left[\frac{1}{8}, 1\right] \end{cases} \quad (4.15)$$

şeklinde tanımlansın. T dönüşümü Suzuki tipten genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümüdür fakat bir genişlemeyen dönüşüm değildir.

Eğer $x = \frac{1}{9}$ ve $y = \frac{1}{8}$ alınırsa,

$$\|x - y\| = \left\| \frac{1}{9} - \frac{1}{8} \right\| = \left| -\frac{1}{72} \right| = 0,013$$

ve

$$\|Tx - Ty\| = \left\| 1 - x - \frac{y+3}{4} \right\| = \left\| 1 - \frac{1}{9} - \frac{\frac{1}{8}+3}{4} \right\| = \left| \frac{31}{288} \right| = 0,107$$

olup $\|Tx - Ty\| > \|x - y\|$ dir. O halde T genişlemeyen dönüşüm değildir.

Şimdi T nin bir Suzuki'nin genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm olduğunu gösterelim:

Durum I. Eğer $x, y \in \left[0, \frac{1}{8}\right)$ veya $x, y \in \left[\frac{1}{8}, 1\right]$ ise, her iki durumda da T dönüşümü genişlemeyen bir dönüşüm olup buradan T 'nin Suzuki genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm olduğu görülebilir.

Durum II. $x \in \left[0, \frac{1}{8}\right)$ olsun. O zaman

$$\frac{1}{2} \|x - Tx\| = \frac{1}{2} \|x - (1-x)\| = \frac{1-2x}{2} \in \left(\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right]$$

$\frac{1}{2} \|x - Tx\| \leq \|x - y\|$ eşitsizliği için $\frac{1-2x}{2} \leq y - x \Rightarrow y \geq \frac{1}{2}$ olur. Bu nedenle $y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ yazılabilir. Ayrıca,

$$\|Tx - Ty\| = \left\| \frac{y+3}{4} - (1-x) \right\| = \left| \frac{y+3-4+4x}{4} \right| = \left| \frac{y+4x-1}{4} \right| < \frac{1}{8}$$

ve

$$\|x - y\| = |x - y| > \left| \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \right| = \frac{3}{8} > \frac{1}{8}$$

olup buradan

$$\frac{1}{2} \|x - Tx\| \leq \|x - y\| \Rightarrow \|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

eşitsizliği sağlanır.

Durum III. $x \in \left[\frac{1}{8}, 1\right]$ olsun. O zaman

$$\frac{1}{2} \|x - Tx\| = \frac{1}{2} \left\| x - \frac{x+3}{4} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \frac{3x-3}{4} \right\| = \frac{3-3x}{8} \in \left[0, \frac{21}{64}\right]$$

$\frac{1}{2} \|x - Tx\| \leq \|x - y\|$ eşitsizliği için $\frac{3-3x}{8} \leq |x - y|$ sağlanmalıdır. Bunun için ise iki durum vardır:

(a) $x < y$ ise $\frac{3-3x}{8} \leq y - x$ olup $\frac{5x+3}{8} \leq y \Rightarrow y \in \left[\frac{29}{64}, 1\right] \subset \left[\frac{1}{8}, 1\right]$. Böylece

$$\|Tx - Ty\| = \left\| \frac{x+3}{4} - \frac{y+3}{4} \right\| = \frac{1}{4} \|x - y\| \leq \|x - y\|$$

olup buradan

$$\frac{1}{2} \|x - Tx\| \leq \|x - y\| \Rightarrow \|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

elde edilir.

(b) $x > y$ ise $\frac{3-3x}{8} \leq x - y$ olup $y \leq \frac{11x-3}{8} \Rightarrow y \geq -\frac{13}{64}$ ve $y \leq 1$, böylece $y \in [0, 1]$

elde edilir. $y \in [0, 1]$ olduğundan $y \leq \frac{11x-3}{8} \Rightarrow \frac{8y+3}{11} \leq x$ olur. Buradan $x \in \left[\frac{3}{11}, 1\right]$

elde edilir. $x \in \left[\frac{3}{11}, 1\right]$ ve $y \in \left[\frac{1}{8}, 1\right]$ olması halinde Durum I deki koşullar geçerli

olacağından T bir Suzuki genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm olur. $x \in \left[\frac{3}{11}, 1\right]$ ve

$y \in \left[0, \frac{1}{8}\right]$ için incelersek,

$$\|Tx - Ty\| = \left\| \frac{x+3}{4} - (1-y) \right\| = \left\| \frac{x+4y-1}{4} \right\| < \frac{1}{8}$$

ve

$$\|x - y\| = |x - y| > \left| \frac{3}{11} - \frac{1}{8} \right| = \frac{13}{88} > \frac{1}{8}$$

bulunur. Buradan

$$\frac{1}{2}\|x - Tx\| \leq \|x - y\| \Rightarrow \|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece T , Suzuki genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümüdür. $x_1 = 0,75$ başlangıç noktasıyla birlikte $\alpha_n = 0.81$, $\beta_n = 0.71$, $\gamma_n = 0.61$ ve $\mu_n = 0.51$ olsun. MATLAB R2019a programı yardımıyla elde edilen aşağıdaki çizelgeler, (3.14) ile tanımlanan yeni iterasyon yönteminin (4.15) ile verilen Suzuki genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümü için Noor (3.3), Agarwal-S (3.4), Picard-Mann (3.5), SP (3.6), CR (3.7), Abbas-Nazır (3.8), Picard-S (3.9), Thakur (3.10), K^* (3.11), K (3.12) ve Karakaya-iki adım (3.13) iterasyonlarından daha hızlı olduğunu göstermektedir:

Çizelge 4.1.'den görülmektedir ki, (3.14) ile tanımlı yeni iterasyon yöntemi 6. adımda sabit noktaya ulaşırken, K^* (3.11) iterasyonu 9. adımda, Thakur (3.10) iterasyonu 11. adımda ve K (3.12) iterasyonu 8. adımda sabit noktaya ulaşmaktadır.

Çizelge 4.1. Bazı iterasyon yöntemlerinin Suzuki tipten genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümler için yakınsama davranışı.

x_n	Yeni İterasyon	K^*	Thakur	K
x_1	0,75	0,75	0,75	0,75
x_2	0,99967844789692	0,99713291015625	0,9911144531250	0,99777861328125
x_6	1,00000000000000	0,9999999995040	0,99999998582051	0,9999999998615
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_8		0,99999999999999	0,9999999998209	1,00000000000000
x_9		1,00000000000000	0,9999999999936	$\vdots$
x_{10}		$\vdots$	0,9999999999998	
x_{11}		$\vdots$	1,00000000000000	

Çizelge 4.2.'den görülmektedir ki, Karakaya-iki adımlı iterasyon yöntemi (3.13) 9. adımda sabit noktaya ulaşırken, Picard-S (3.9) iterasyonu 11. Adımda, CR (3.7) iterasyonu 13. adımda ve SP (3.6) iterasyonu 16. adımda sabit noktaya ulaşmaktadır.

Çizelge 4.2. Bazı iterasyon yöntemlerinin Suzuki tipten genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümler için yakınsama davranışı.

x_n	Karakaya-İki adım	Picard-S	CR	SP
x_1	0,75	0,75	0,75	0,75
x_2	0,99713291015625	0,99111445312500	0,98343711328125	0,97511366015625
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_9	1,00000000000000	0,9999999999936	0,9999999990721	0,99999999758949
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{11}		1,00000000000000	0,9999999999959	0,9999999997611
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{13}			1,00000000000000	0,9999999999976
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{16}				1,00000000000000

Çizelge 4.3.'ten görülmektedir ki, Picard-Mann (3.5) iterasyon yöntemi 15. adımda sabit noktaya ulaşırken, Abbas-Nazır (3.8) iterasyonu 16. adımda, Agarwal-S (3.4) iterasyonu 18. adımda ve Noor (3.3) iterasyonu 25. adımda sabit noktaya ulaşmaktadır.

Çizelge 4.3. Bazı iterasyon yöntemlerinin Suzuki tipten genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümler için yakınsama davranışı.

x_n	Picard-Mann	Abbas-Nazır	Agarwal-S	Noor
x_1	0,75	0,75	0,75	0,75
x_2	0,97546875000000	0,97053151171875	0,96445781250000	0,93294387890625
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{15}	1,00000000000000	0,99999999999998	0,99999999999966	0,99999999750588
x_{16}		1,00000000000000	0,99999999999995	0,99999999933102
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{18}			1,00000000000000	0,99999999995187
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{25}				1,00000000000000

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezin birinci bölümünde sabit nokta teorisine ait literatür bilgisi verildikten sonra ikinci bölümde tezde ortaya konulan problemlerin çözümüne temel teşkil edecek tanım, teorem lemma ve bazı örneklere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, yeni iterasyon aracılığıyla contractive-like dönüşümler için kuvvetli yakınsama, yakınsaklık hızı ve kararlılık sonuçları elde edilerek, yakınsama hızı sonucuna ek olarak iki adet örnek verilmiş ve böylece yeni tanımlanan iterasyon yönteminin literatürdeki birçok iterasyon yöntemine göre daha iyi bir yakınsama hızına sahip olduğu nümerik olarak ta gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde, Suzuki tipten genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümler kullanılarak yeni iterasyon yöntemi yardımıyla bazı kuvvetli ve zayıf yakınsama teoremleri elde edilmiş ve bu dönüşümler için yeni tanımlanan iterasyon yönteminin diğer yöntemlere göre daha hızlı olduğu bir örnek üzerinden gösterilmiştir.

Araştırmacılar bu tezde tanımlanmış olan iterasyon yöntemini farklı dönüşüm sınıfları için yeniden inşa ederek bazı sabit nokta teoremleri elde edebilir ve çeşitli türden diferansiyel-integral denklemlere uygulamasını irdeleyebilir.

KAYNAKLAR

1. Argyros, I.K. ve Hilout, S., 2013. Computational Methods in Nonlinear Analysis, Efficient Algorithms, Fixed Point Theory and Applications, World Scientific Publishing Company Incorporated.
2. Borwein, J. ve Sims, B., 2011. The Douglas Rachford Algorithm in the Absence of Convexity, H.H. Bauschke Burachik, R.S. Combettes, P.L. Elser, V. Luke, D.R. and Wolkowicz, H., ed. Fixed Point Algorithms for Inverse Problems in Science and Engineering, Springer New York, 93-109.
3. Ceng, L.-C., Ansari, Q. ve Yao, J.-C., 2011. Some iterative methods for finding fixed points and for solving constrained convex minimization problems, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, 74, 5286-5302.
4. Chen, M., Lu, W., Chen, Q., Ruchala, K.J. ve Olivera, G.H., 2008. A simple fixed point approach to invert a deformation field, Medical physics, 35, 81.
5. Ok, E.A., 2007. Real analysis with economic applications, Princeton University Press, Princeton.
6. Radde, N., 2010. Fixed point characterization of biological networks with complex graph topology, Bioinformatics, 26, 2874-2880.
7. Somarakis, C. ve Baras, J.S., 2013. Fixed point theory approach to exponential convergence in LTV continuous time consensus dynamics with delays, SIAM CT.
8. Brouwer, L. E. J., 1912. Über Abbildung der Mannigfaltigkeiten, Mathematische Annalen, 71, 97-115.
9. Schauder, J., 1930. Der Fixpunktsatz in Functional räumen, Studia Math., 2, 171-180.
10. Banach, S., 1922. Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrales, Fund. Math., 3, 133-181.
11. Berinde, V., 2006. Iterative Approximation of Fixed Points, Lecture Notes in Math., Springer.
12. Arshad, M. Azam, A. ve Vetro, P., 2009. Some Common Fixed Point Results in Cone Metric Spaces, Fixed Point Theory and Applications, 2009, 1-11.
13. Caristi, J. ve Kirk, W.A., 1975. Geometric Fixed Point Theory and Inwardness Conditions, in The Geometry of Metric and Linear Spaces 74-83. Springer, Berlin.
14. Ćirić, L.B., 1974. A Generalization of Banach's Contraction Principle, Proceedings of the American Mathematical Society, 45 (2), 267-273.

15. Ekeland, I., 1979. Nonconvex Minimization Problems 1, American Mathematical Society, 1 (3), 443-474.
16. Hardy, G.E. ve Rogers, T., 1973. A Generalization of a Fixed Point Theorem of Reich, Canadian Mathematical Bulletin, 16 (2), 201-206.
17. Kannan, R., 1968. Some Results on Fixed Points, Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, 60 (1-2), 71-76.
18. Kirk, W.A., 2003. Fixed Points of Asymptotic Contractions, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 277 (2), 645-650.
19. Suzuki, T., 2001. Generalized Distance and Existence Theorems in Complete Metric Spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 253 (2), 440-458.
20. Suzuki, T., 2004. Several Fixed Point Theorems Concerning Distance, Fixed Point Theory and Applications, 2004 (3), 1-15.
21. Zamfirescu, T., 1972. Fix Point Theorems in Metric Spaces, Archiv der. Mathematik, 23 (1), 292-298.
22. Suzuki, T., 2008. Fixed point theorems and convergence theorems for some generalized non-expansive mappings. J. Math. Anal. Appl. 2008, 340, 1088-1095.
23. Dhomphongsa, S., Inthakon, W. ve Kaewkhao A., 2009. Edelstein's method and fixed point theorems for some generalized non-expansive mappings., J. Math. Anal. Appl., 350(1), 12–17.
24. Uddin I. ve Imdad M., 2015. Some convergence theorems for a hybrid pair of generalized nonexpansive mappings in CAT(0) spaces., J. Nonlinear Convex Anal. 16(3), 447–457.
25. Uddin I. ve Imdad M., 2015. On certain convergence of S-iteration scheme in CAT(0) spaces, Kuwait J. Sci., 42(2), 93–106.
26. Uddin I. ve Imdad M., 2018. Convergence of SP-iteration for generalized nonexpansive mapping in Hadamard spaces., Hacet. J. Math. Stat. 47(6), 1595–1604.
27. Ali J., Ali F. ve Kumar P., 2019. Approximation of fixed points for Suzuki's generalized non-expansive mappings., Mathematics, 7(6), 522.
28. Ullah, K. ve Arshad, M., 2018. Numerical Reckoning Fixed Points for Suzuki's Generalized Nonexpansive Mappings via New Iteration Process, Filomat, 32, 1, 187-196.
29. Rhoades, B. E., 1976. Comments on two fixed point iteration methods. J. Math. Anal. Appl., 56 (3), 741-750.

30. Agarwal R.P., Regan D. O., Sahu D.R., 2007. Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings, *J. Nonlinear Convex Analysis* 8(1), 61–79.
31. Abbas M. ve Nazir T., 2014. A new faster iteration process applied to constrained minimization and feasibility problems, *Mat. Vesnik* 66(2), 223–234.
32. Thakur, B. S., Thakur, D. ve Postolache, M., 2016. A new iterative scheme for numerical reckoning fixed points of Suzuki's generalized nonexpansive mappings, *App. Math. Comp.* 275, 2016, 147–155.
33. Urabe, M., 1956. Convergence of numerical iteration in solution of equations. *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A*, 19, 479-489.
34. Ostrowski, A., 1967. The Round off Stability of Iterations. *ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 47, 77-81.
35. Harder, A.M., ve Hicks, T.L., 1988. Stability results for fixed point iteration Procedures. *Math. Japonica*, 33 (5), 693-70.
36. Atalan, Y. ve Karakaya, V., 2017. Stability of nonlinear Volterra-Fredholm integro differential equation, A fixed point approach, *Creat. Math. Inform.*, 26(3), 247-254.
37. Khan, A. R., Gürsoy, F., ve Kumar, V., 2016. Stability and data dependence results for the Jungck-Khan iterative scheme. *Turkish Journal of Mathematics*, 40(3), 631-640.
38. Gürsoy, F., Khan, A.R., Ertürk, M. Ve Karakaya, V., 2019. Weak w^2 -stability and data dependence of Mann iteration method in Hilbert spaces. *Racsam* 113, 11–20.
39. Doğan, K., ve Karakaya, V., 2014. On the convergence and stability results for a new general iterative process. *The Scientific World Journal*.
40. Doğan, K., Gürsoy, F., Karakaya, V. ve Khan, S. H., 2020. Some new results on convergence, stability and data dependence in n -normed spaces. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 69(1), 112-122.
41. Kreyszig, E., 1989. *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley New York.
42. Maddox, I.J., 1988. *Elements of Functional Analysis*, CUP Archive.
43. Brown, A.L. ve Page, A., 1970. *Elements of Functional Analysis*, Van Nostrand-Reinhold.

44. Pugachev, V.S. ve Sinitsyn, I.N., 1999. Lectures on Functional Analysis and Applications, World Scientific.
45. Aksoy, A. G. ve Khamsi, M. A., 1990. Nonstandard Methods in Fixed Point Theory. ISBN 0-387-97364-8.
46. Moore, R.E. ve Cloud, M.J., 2007. Computational Functional Analysis, Elsevier.
47. Curtain, R.F. ve Pritchard, A.J., 1977. Functional Analysis in Modern Applied Mathematics, Academic Press.
48. Browder, FE., 1965. Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space. Proc. Natl. Acad. Sci. ABD 54, 1041-1044.
49. Petryshyn, W. V. ve Williamson, T. E., 1973. Strong and weak convergence of the sequence of successive approximations for quasi-nonexpansive mappings. J. Math. Anal. Appl., 43, 459-497.
50. Şoltuz, S.M. ve Grosan, T., 2008. Data Dependence for Ishikawa Iteration When Dealing with Contractive-like Operators, Fixed Point Theory and Applications, 2008 (1), 1-7.
51. Mann, W. R., 1953. Mean value methods in iteration, Proceedings of the American Mathematical Society, 4, 506-510.
52. Noor, M. A., 2000. New approximation schemes for general variational inequalities, J. Math. Anal. Appl., 251, 217-229.
53. Khan, S.H., 2013. A Picard-Mann Hybrid Iterative Process, Fixed Point Theory and Applications, 2013 (69), 1-10.
54. Phuengrattana, W. ve Suantai, S., 2011. On the Rate of Convergence of Mann, Ishikawa, Noor and SP-Iterations for Continuous Functions on an Arbitrary Interval, Journal of Computational and Applied Mathematics, 235 (9), 3006-3014.
55. Chugh, R. Kumar, V. ve Kumar, S., 2012. Strong Convergence of a New Three Step Iterative Scheme in Banach Spaces, American Journal of Computational Mathematics, 2, 345-357.
56. Gürsoy, F. ve Karakaya, V., 2014. A Picard-S hybrid type iteration method for solving a differential equation with retarded argument. arXiv preprint arXiv, 1403.2546.
57. Ullah, K. ve Arshad, M., 2018. New three-step iteration process and fixed point approximation in Banach spaces, Journal of Linear and Topological Algebra 7, 02 87-100.
58. Hussain, N., Ullah, K. ve Arshad, M., 2018. Fixed Point Approximation of Suzuki Generalized Nonexpansive Mappings Via New Faster Iteration

Process, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 19(8), 1383-1393.

59. Karakaya, V., Atalan, Y., Doğan, K. ve Bouzara, N. E. H., 2016. Daha Hızlı Yeni Bir İterasyon Metodu İçin Yakınsaklık Analizi. İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, 15(30), 35-53.
60. Şoltuz, S.M., 2004. Data Dependence for Ishikawa Iteration, Lecturas Matemáticas, 25 (2), 149-155.
61. Phuengrattana, W. ve Suantai, S., 2012. Comparison of the Rate of Convergence of Various Iterative Methods for the Class of Weak Contractions in Banach Spaces, Thai Journal of Mathematics, 11 (1), 217-226.
62. Berinde, V., 2002. On the stability of some fixed point procedures, Bul. Ştiinţ., Univ. Baia Mare, Ser. B, Matematică-Informatică, XVIII 2002, No. 1, 7-14.
63. Khan, A. R., Akbar, F. ve Sultana, N., 2008. Random coincidence points of subcompatible multivalued maps with applications, Carpathian J. Math., Vol. 24, No.2, 63-71.
64. Opial, Z., 1967. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings, Bull. Amer. Math. Soc., 591-597.
65. Agarwal, R.P., O'Regan, D. ve Sahu, D.R., 2009. Fixed point theory for Lipschitzian type mappings with applications, doi 10.1007/978-0-387-75818-3.
66. Schu, J., 1991. Weak and strong convergence to fixed points of asymptotically non-expansive mappings. Bull. Aust. Math. Soc., 43, 153-159.
67. Senter, H.F., ve Dotson, W.G., 1974. Approximating fixed points of non-expansive mappings. Proc. Am. Math. Soc., 44, 375-380.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Esra KILIÇ

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Ahi Evran Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2011-2016

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, 2018-

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Makaleler

1. Kılıç, E. ve Atalan, Y., 2021. Some Convergence Theorems in Fixed Point Theory, 4th International E-Conference on Mathematical Advances and Applications, ICOMAA 2021, 26-29 May 2021, Yıldız Technical University Istanbul, Turkey.