

**SYLOW ALTGRUPLARI CHERNİKOV OLAN LOKAL SONLU
GRUPLAR**

Yasemin KIYMAZ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK EĞİTİMİ**

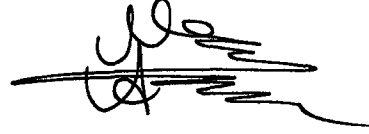
**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

**Mayıs - 2001
ANKARA**

114635

Yasemin KIYMAZ tarafından hazırlanan SYLOW ALTGRUPLARI
CHERNİKOV OLAN LOKAL SONLU GRUPLAR adlı bu tezin Yüksek
Lisans Tezi olarak uygun olduğunu onaylarım



Yrd. Doç. Dr. Ahmet ARIKAN

Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından MATEMATİK EĞİTİMİ Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Seref MİRASYEDİOĞLU

Üye : Doç. Dr. Nuri GİMEN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ahmet ARIKAN

Üye :

Üye :

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına
uygundur.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SEMBOLLER LİSTESİ.....	iv
1. GİRİŞ.....	1
2. BAZI HAZIRLIK TANIM VE SONUÇLARI.....	5
3. BAZ ALTGRUPLAR.....	27
4. HİPERSONLU GRUPLAR.....	37
5. BAER'İN İDDİASININ İKİ FARKLI İSPATI.....	43
KAYNAKLAR.....	59
ÖZGEÇMİŞ.....	61

SYLOW ALTGRUPLARI CHERNIKOV OLAN LOKAL SONLU GRUPLAR

(Yüksek Lisans Tezi)

Yasemin KIYMAZ

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Mayıs – 2001

ÖZET

Bu çalışmada B. Hartley'in 1994 Grup Konferansındaki "Locally finite groups whose Sylow subgroups are Chernikov" adlı bildirisi ; M.R. Dixon ve M. J. Tomkinson'ın "The local conjugacy of some Sylow bases in a class of locally finite groups" adlı makalesi ve ayrıca S. D. Bell'in "Uncountable locally finite groups with Chernikov Sylow subgroups" adlı çalışmasının bir bölümü incelendi. Baer'in iddiası olan "Bir G , sayılabilir K -grubunun öz baz altgrubunun olması için gerek ve yeter şart G nin hipersonlu olmamasıdır" teoremi için V. V. Belyaev'in ispatı ve S. D. Bell'in ispatının özeti verildi.

Bilim Kodu : 4030100

Anahtar Kelimeler : Lokal Sonlu Grup, Hipersonlu Grup, Min-p Şartı,
Co-Hopfian, Baz Altgrup.

Sayfa Adedi : 61

Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Ahmet ARIKAN

**LOCALLY FINITE GROUPS WHOSE SYLOW SUBGROUPS ARE
CHERNIKOV**

(Master Thesis)

Yasemin KIYMAZ

**GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

May – 2001

ABSTRACT

In this work we have considered the B. Hartley's paper entitled "Locally finite groups whose Sylow subgroups are Chernikov" which was introduced in the Group Theory Conference in 1994 in Ravello, Italy; M.R. Dixon and M. J. Tomkinson's paper entitled "The local conjugacy of some Sylow bases in a class of locally finite groups" and a part of preprint of S. D. Bell's Ph.D. thesis entitled "Uncountable locally finite groups with Chernikov Sylow subgroups". Bear's conjecture "Let G be a countable K -group. Then G has a proper basis subgroup if and only if G is not hyperfinite." is proved by V.V. Belyaev and S.D.Bell independently, in some cases. We give the complete proof of V.V. Belyaev and a summary of the proof of S.D.Bell.

Science Code : 4030100

Key Words : Locally Finite Group, Hyperfinite Group, Min-p
Condition, Co-Hopfian, Basis Subgroup.

Page Number : 61

Supervisor : Yrd. Doç. Dr. Ahmet ARIKAN

TEŐEKKÖR

Yüksek Lisans çalışmalarım boyunca her adımda bilgi ve hoşgörülerinden yararlandığım, tez çalışmamın her safhasında emeği olan, değerli ilgi ve yardımlarını benden esirgemeyen, tecrübesi ile beni yönlendiren ve kendisinden bir çok şey öğrendiğim Sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Ahmet ARIKAN'a en derin saygılarımla teşekkür ederim.



SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı semboller anlamları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Sembol	Anlam
G/H	G nin H ile bölüm grubu
$ G:H $	H nin G içindeki indeksi
$\langle H, K \rangle$	H ve K tarafından üretilen grup
$ G $	G nin mertebesi
X^g	$g^{-1}xg$
$H \text{ char } G$	H, G nin karakteristik altgrubu
M^G	$\langle M^g : g \in G \rangle$
$[H, K]$	H ve K nin komütatörü
$\mathbb{P}$	Tüm asal sayıların kümesi
$O_\pi(G)$	G nin maksimal normal π -altgrubu
G^0	G grubunun köklü kısmı
$\text{Aut } G$	G nin otomorfizmalarının grubu
$\text{min-}p$	p -altgrupları üzerinde minimal şartı
$C_G(A)$	A nın G içindeki merkezleyeni
$Z(G)$	G nin merkezleyeni
$\pi(G)$	G nin elemanlarının mertebelerini bölen asal sayıların kümesi
$\text{Core}_G(H)$	H nin G deki içi
$\text{Syl}_\pi G$	G nin Sylow π -altgruplarının kümesi
$\text{FC}(G)$	G nin FC-merkezi
$\phi(G)$	G nin Frattini altgrubu
$A \text{ wr } B$	A ile B nin çelenk çarpımı
$A \rtimes B$	A ile B nin yarıdirekt çarpımı

1. GİRİŞ

G bir grup olsun. IP bütün asal sayıların kümesini göstereyin ve her p asal sayısı için $Syl_p(G)$, G nin bütün Sylow p -altgruplarının kümesi olsun. Her p asal sayısı için G nin bir tane Sylow p -altgrubunu içeren bir kümeye Sylow p -altgruplarının bir tam kümesi denir.

G sonlu bir grup ise G , Sylow p -altgruplarının bir tam kümesi tarafından üretilir. Yani

$$G = \langle S_p : p \in IP \rangle \quad (1)$$

dir. Burada sonlu tanesi dışında her p asal sayısı için $S_p=1$ dir. G nin sonlu olma şartı yerine, Sylow altgrupların sonuç vermesini garanti edecek bazı şartlar konursa acaba (1) eşitliği doğru olur mu? Bu soru Baer'in bir makalesinde incelenmiştir. O makalede Baer Sylow altgrupları sonlu olan periyodik lokal çözülebilir grupları göz önüne almıştır. P ve Q , periyodik lokal çözülebilir bir G grubunun sonlu Sylow p -altgrupları ise bunlar $\langle P, Q \rangle$ grubu içinde eşleniktir ve böylece bu tür gruplar için Sylow Teoremlerinin bir uyarlaması vardır. Bununla beraber $p_1, p_2, \dots$ farklı asal sayıların sonsuz bir dizisi olmak üzere

$$W = \dots (C_{p_3} \text{ wr } (C_{p_2} \text{ wr } C_{p_1}))$$

sonsuz çelenk çarpımında bir öz altgrubu üreten Sylow altgruplarının bir tam kümesini seçmek mümkündür. W grubunu sayılamayan periyodik lokal çözülebilir bir $\tilde{W}$ nin içine, W nun her Sylow altgrubu $\tilde{W}$ nin bir Sylow altgrubu olacak şekilde gömmek mümkündür. Böylece sayılabilir W grubu, sayılamayan $\tilde{W}$ grubunun Sylow altgruplarının bir tam kümesi tarafından üretilir.

Şimdi G , sonlu Sylow altgruplarına sahip, sayılabilir periyodik lokal çözülebilir bir grup olsun. Baer, “Hangi koşullar altında G nin Sylow altgruplarının her tam kümesi G yi üretir?” sorusunu sormuştur. Belki de bu soruyu daha genel lokal sonlu gruplarda cevaplandırmak daha önemlidir. Bununla beraber Baer, ele alınan gruplar için “Sylow altgruplarının her tam kümesinin G yi üretmesi için gerek ve yeter şart G nin hipersonlu olmasıdır” iddiasını öne sürmüştür. Bu 1988 de Belyaev tarafından Sylow altgrupları Chernikov olan periyodik lokal çözülebilir grupların daha genel bir sınıfı için ispatlanmıştır. Bu aynı zamanda farklı bir yöntem ile Bell tarafından da ispatlanmıştır. Bell’in çalışması lokal çözülebilirliği varsaymaz ve sonlu grupların karakter teorisinden ilginç metotlar içerir. Ayrıca bu ispat, her Sylow altgrubu Chernikov olan lokal sonlu grupların ve bu türdeki sayılamaz grupların altgrup yapılarının diğer yönlerine ışık tutar.

Şimdi Baer’in inşasının detaylarını ve makalesindekileri genişleterek vereceğiz.

Lemma . A ve H aşıkır olmayan sonlu gruplar ve K , H nin bir altgrubu olsun. H nin regüler permütasyon temsiline karşılık gelen çelenk çarpımı $L=A \wr H$ olsun. Böylece $L=\overline{A}H$, $\overline{A}$ baz grup olmak üzere yarıdirekt çarpımdır. Bu durumda $H^a \cap H=K$ olacak şekilde bir $a \in \overline{A}$ vardır.

Bunu aşağıdaki şekilde gösterebiliriz.

$1 \neq b \in A$ olmak üzere $a \in \overline{A}$ fonksiyonunu

$$a(h) = \begin{cases} b & , h \in K \\ 1 & , h \notin K \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım.

$x \in H^a \cap H$ olsun. $x = a^{-1}ha$ olacak şekilde $h \in H$ vardır. $a^{-1}ha = a^{-1}a^h h \in H$ yani $a^{-1}a^h \in H \cap \bar{A} = 1$ dir . Böylece $a^{-1}a^h = 1$ yani $a^h = a$ dır. $k \in K$ olmak üzere $a^h(k) = a(k)$ buradan $a(kh^{-1}) = b$ ve böylece $kh^{-1} \in K$ dır. Dolayısıyla $h \in K$ dır. O halde $x = a^{-1}a^h h = h \in K$ dır. Böylece $H^a \cap H \leq K$ olur.

Öte yandan, $k \in K$ olmak üzere $a^{-1}a^k(h) = a^{-1}(h)a(hk^{-1})$ dir. Burada $h \in K$ ise $a^{-1}a^k(h) = b^{-1}b = 1$ ve $h \notin K$ ise $a^{-1}a^k(h) = 1$ dir. Yani $a^{-1}a^k = 1$ dir. Böylece $a^{-1}ka = a^{-1}a^k k = k$ olduğundan $k \in H^a \cap H$ dır. Bundan dolayı $H^a \cap H = K$ elde edilir.

$p_1, p_2, \dots$ farklı asal sayıların sonsuz bir dizisi olsun. A_i mertebesi p_i olan bir devirli grup olsun. $B_1 = A_1$ ve $i > 1$ için $B_i = A_i \text{ wr } B_{i-1}$ olsun. B_i yi B_{i+1} in bir altgrubu olarak düşünerek

$$B_1 < B_2 < \dots$$

kulesi elde edilir. $W = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, bir sayılabilir lokal çözülebilir gruptur ve W nun Sylow altgrupları sonludur. Lemmayı $B_3 = A_3 \text{ wr } B_2$, $B_3 = \bar{A}_3 B_2$ ye uygularsak öyle bir $a \in \bar{A}_3$ vardır ki $B_2^a \cap B_2 = B_1$ dir. $B_2^* = B_2^a$ dersek o zaman B_2^*, B_2 ile eşleniktir. Böylece B_2^*, B_3 ün Sylow p_1 - ve Sylow p_2 -altgruplarını içerir. Eğer B_n^*, B_n nin B_{n+1} içinde $B_n^* \cap B_2 = B_1$ olacak şekilde bir eşleniği ise o zaman B_{n+1} in B_{n+2} içinde $B_{n+1}^* \cap B_{n+1} = B_n^*$ olacak şekilde bir eşleniği B_{n+1}^* vardır. Buradan $B_{n+1}^* \cap B_2 = B_1$ elde edilir. Bu durumda eğer $W^* = \bigcup_{i=2}^{\infty} B_i^*$ alırsak $W^* \cap B_2 = B_1$ dir. Aşıkarak W^*, W nun bir öz altgrubudur. Ayrıca W^*, W nun Sylow altgruplarının bir tam kümesini içerir. Böylece Lemma 3.6 dan dolayı $W^* \cong W$ dur.

Bunun anlamı her biri W ya izomorfik olan doğal sayılar ile indekslenmiş grupların bir

$$W = W_1 < W_2 < \dots$$

Kulesini inşa edebiliriz demektir. $W_\omega = \cup W_i$ olsun. Bu durumda W_ω nun her sonlu p -altgrubu herhangi bir W_i tarafından içerilir ve böylece W nun bir altgrubuna izomorf olur. Bu nedenle W_ω nun sonlu p -altgruplarının mertebeleri W nunki ile sınırlıdır. Böylece W nun her Sylow altgrubu W_ω nun da bir Sylow alt grubudur. Baer'in sonucundan $W_\omega \cong W$ ve böylece $W_\omega, W_{\omega+1} \cong W$ nun bir öz alt grubudur.

Bu inşaya sayılabilir ordinal ile indekslenmiş her biri W ya izomorf grupların artan bir kulesini oluşturmak için sayılabilir ordinaler ile devam edilebilir. Bu kulenin birleşimi, kardinali ilk sayılamayan ordinal $\aleph_1$ olan $\tilde{W}$ grubudur ve bu grubun Sylow altgruplarının bir tam kümesi W tarafından içerilir.

2. BAZI HAZIRLIK TANIM VE SONUÇLARI

Tanım 2.1. X , gruplardan oluşan bir sınıf olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa X 'e *grup teorik sınıf* veya kısaca *grupların bir sınıfı* denir.

(i) Eğer $H \cong G \in X$ ise $H \in X$.

(ii) X , bir aşikar grubu içerir.

Tanım 2.2. X , grupların bir sınıfı ve G bir grup olsun. G nin her sonlu alt kümesi bir X -grubu tarafından içeriliyorsa G grubuna *lokal X -grup* denir. Eğer X , altgrup kapalı ise bu tanım G nin sonlu üreteçli her alt grubunun bir X -grup olmasına denktir.

Teorem 2.3. H , sonlu üreteçli bir G grubunun sonlu indeksli bir altgrubu olsun. O zaman H sonlu üreteçlidir.

İspat. [9], 1.6.11.

Teorem 2.4. G bir grup ve N , G nin normal altgrubu olsun. Eğer N ve G/N lokal sonlu ise o zaman G lokal sonludur. Yani lokal sonlu grupların sınıfı genişleme kapalıdır.

İspat. H , G nin sonlu üreteçli bir altgrubu olsun. HN/N , G/N nin sonlu üreteçli bir altgrubudur ve dolayısıyla sonludur. Böylece $H/H \cap N$ bölüm grubu da sonludur. Teorem 2.3 ten dolayı $H \cap N$, N nin sonlu üreteçli bir altgrubudur ve bundan dolayı sonludur. Böylece H sonlu olur. Yani G lokal sonludur.

Tanım 2.5. π , asal sayıların boş olmayan bir kümesi olmak üzere asal bölenleri π de olan pozitif bir sayıya bir π -sayısı denir. Bir grubun herhangi bir elemanının mertebesi π -sayısı ise bu elemana π -elemanı denir ve her elemanı π -eleman olan gruba da π -grup denir.

Tanım 2.6. G bir grup ve π , asal sayıların bir kümesi olsun. G nin maksimal π -altgrubuna *Sylow π -altgrubu* denir. G nin Sylow π -altgruplarının kümesi $Syl_{\pi}(G)$ ile gösterilir. G bir π' -grup ise $Syl_{\pi}(G)$ aşıkâr gruptan oluşur. Eğer $\pi=\{p\}$ ise G nin Sylow p -altgrubu olarak yazılır ve kümesi $Syl_p(G)$ ile gösterilir.

Teorem 2.7. G bir grup; π , asal sayıların bir kümesi ve S , G nin bir π -altgrubu olsun. G nin S yi içeren Sylow π -altgrupları vardır.

İspat. [2], 2.2.2. Lemma.

Tanım 2.8. G sonlu bir grup olsun. $[G:H]$ bir π' sayısı olacak şekilde G nin bir H , π -altgrubuna G nin bir *Hall π -altgrubu* denir. Her Hall π -altgrubu bir Sylow π -altgrubudur. Bununla beraber G grubu herhangi bir Hall π -altgrubu içermeyebilir.

Lokal sonlu bir G grubunda ise Hall π -altgrubu, her $p \in \pi$ için, G nin bir Sylow p -altgrubunu içeren π -altgrubu olarak tanımlanır.

Tanım 2.9. G bir sonlu grup olsun. Eğer G , bir Hall π -altgrubu içeriyor ise E_{π} özelliğine sahiptir denir. E_{π} özelliğine sahip G grubunun Hall π -altgruplarının kümesi tek eşlenik sınıfına sahip ise G grubu, C_{π} özelliğine sahiptir denir. Eğer G grubu C_{π} özelliğini sağlıyor ve G nin her π -altgrubu bir Hall π -altgrubu tarafından içeriliyor ise G grubu, D_{π} özelliğine sahiptir denir.

Tanım 2.10. G bir grup, $x, y \in G$ için $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ elemanına x ile y nin *komütatörü* denir.

X ve Y , G nin boştan farklı iki altkümesi olmak üzere X ve Y nin komütatör altgrubu

$$[X, Y] = \langle [x, y] : x \in X, y \in Y \rangle$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.11. G bir grup olmak üzere her $x \in G$ ve her $n \in \mathbb{N}^+$ için $x = y^n$ (eğer grup toplamsal ise $x = ny$) olacak şekilde $y \in G$ varsa G ye bir *köklü (bölümlü)* grup denir.

Tanım 2.12. Her elemanının mertebesi sonlu olan bir gruba *periyodik (torsiyon)* grup denir.

Tanım 2.13. Bir G grubu, her $i = 0, 1, \dots, n-1$ için G_{i+1}/G_i faktörleri abelyan olan

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$$

şeklindeki bir seriye sahip ise G grubuna bir *çözülebilir* grup denir.

Teorem 2.14. (Feit-Thompson Teoremi) Mertebesi tek sayı olan bir grup çözülebilirdir.

Tanım 2.15. G bir grup olmak üzere her $i = 0, 1, \dots, n-1$ için $G_i \triangleleft G$ ve $G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i)$ olacak şekilde G nin bir

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$$

serisi varsa G ye bir *nilpotent* grup denir. G nin bu tür serilerinin en kisasının uzunluğuna G nin nilpotentlik sınıfı denir.

Teorem 2.16. Her sonlu p -grup nilpotenttir.

İspat. G bir sonlu p -grup ve $G \neq 1$ olsun. Bu durumda $Z(G) \neq 1$ dir. Eğer $G = Z(G)$ ise G abelyan ve dolayısıyla nilpotenttir. $G \neq Z(G)$ ise $G/Z(G)$ aşıkâr olmayan p -gruptur ve böylece $Z_2(G)/Z(G) = Z(G/Z(G)) \neq 1$ olur. Eğer $Z_2(G) = G$ ise ispat tamamlanmış olur. Aksi takdirde G nin aşağı merkezi

serisinin diğer terimlerini teşkil edersek G sonlu olduğundan $Z_n(G)=G$ olacak şekilde bir n doğal sayısı buluruz ki bu, G nin nilpotent olması demektir.

Tanım 2.17. π asal sayıların bir kümesi olmak üzere, faktörleri π -grup ya da π' -grup olacak şekildeki

$$1 = G_0 < G_1 < \dots < G_i < G_{i+1} < \dots < G_n = G$$

sonlu seriye sahip bir G grubuna bir π -ayrılabilir grup denir.

Lemma 2.18. π asal sayıların herhangi bir kümesi olmak üzere her sonlu çözülebilir bir grup π -ayrılabilir.

Tanım 2.19. $G = \langle c_i : c_i^p = 1, c_{i+1}^p = c_i, i=1,2,\dots \rangle$ şeklinde tanımlı G grubuna, p -prüfer grup veya C_{p^∞} tipinde bir grup denir.

C_{p^∞} tipinde bir grup, sonsuz bir p -grubudur. Ayrıca her öz altgrubu sonlu ve devirlidir.

Tanım 2.20. Bir G grubunun altgruplarının boş olmayan her kümesinin bir minimal elemanı varsa, G grubu altgruplar üzerinde *minimal şartına sahiptir* denir. Yani $S = \{H_i, i \in I\}$, G nin altgruplarının bir kümesi ise o zaman öyle bir $K \in S$ vardır ki $L \in S$ ve $L \leq K$ iken $L=K$ olur.

Minimal yerine kısaca min yazılır. Bir G grubunun p -altgruplarının boş olmayan her kümesinin bir en küçük elemanı varsa G , p -altgrupları üzerinde minimal şartını sağlar denir. Bunu kısaca *min-p* ile göstereceğiz.

Bütün sonlu gruplar minimal şartını sağlar. Ayrıca C_{p^∞} tipindeki gruplar, her öz altgrubu sonlu olduğundan minimal şartını sağlar.

Bir grubun minimal şartına sahip olması için gerek ve yeter şart altgruplarının her azalan zincirinin sonlu adımda sona ermesidir.

Teorem 2.21. Minimal şartını sağlayan grupların sınıfı genişleme kapalıdır.

İspat. $N \triangleleft G$ olsun. N ve G/N minimal şartını sağlasın. G nin minimal şartını sağladığını gösterelim.

$$G_1 \geq G_2 \geq \dots$$

G nin altgruplarının azalan bir zinciri olsun. O zaman

$$G_1N/N \geq G_2N/N \geq \dots \text{ ve } G_1 \cap N \geq G_2 \cap N \geq \dots$$

sırasıyla G/N ve $G \cap N$ nin altgruplarının azalan bir zinciridir. Böylece

$$G_kN/N = G_{k+1}N/N = \dots \text{ ve } G_k \cap N = G_{k+1} \cap N = \dots$$

olacak şekilde $k \geq 1$ sayısı vardır.

$$G_k = G_kN \cap G_k = G_{k+1}N \cap G_k = G_{k+1}(N \cap G_k) = G_{k+1}(N \cap G_{k+1}) = G_{k+1}$$

dir. Böylece G minimal şartını sağlar.

Teorem 2.22. Bir G grubunun minimal şartını sağlaması için gerek ve yeter şart G nin her sayılabilir altgrubunun minimal şartını sağlamasıdır.

İspat. [2], 1.5.4. Lemma

Tanım 2.23. Minimal şartını sağlayan bir abelyan grubun sonlu genişlemesine *Chernikov* grup denir.

Minimal şartını sağlayan bir abelyan grup, sonlu tane C_{p^∞} tipindeki grupların ve sonlu devirli grupların direkt çarpımına izomorf olduğundan, bir Chernikov

grup, sonlu sayıda C_p tipindeki grupların direkt çarpımına izomorf olan grubun bir sonlu genişlemesi olan grup olarak da tanımlanabilir.

Tanım 2.24. Bir G grubu kendine izomorf olan bir öz altgrup içermiyorsa G grubuna *co-Hopfian* veya *elastik olmayandır* denir.

Teorem 2.25. Bir G grubu minimal şartını sağlıyorsa co-Hopfiandır. Özel olarak bir Chernikov grup co-Hopfiandır.

İspat. Kabul edelim ki G , co-Hopfian olmasın. O zaman $G \cong G_1$ olacak şekilde G nin bir öz altgrubu G_1 vardır. G_1 de co-Hopfian olmadığından $G_1 \cong G_2$ olacak şekilde G nin bir öz altgrubu G_2 vardır. Bu şekilde devam edilirse G nin altgruplarının azalan sonsuz bir

$$G_1 \supseteq G_2 \supseteq G_3 \supseteq \dots$$

zincirini elde ederiz ki bu G nin minimal şartını sağlamasıyla çelişir. Böylece G co-Hopfiandır.

Öte yandan eğer G Chernikov grup ise G minimal şartını sağlayan bir abelyan grubun sonlu genişlemesi ve minimal şartını sağlayan grupların sınıfı genişleme kapalı olduğundan G minimal şartını sağlar. Böylece birinci paragraftan dolayı bir Chernikov grup co-Hopfiandır.

Teorem 2.26. P ve Q Chernikov grup olsun ve Q , P nin her sonlu altgrubunun bir izomorfik kopyasını içersin. O zaman Q , P nin bir izomorfik kopyasını içerir.

İspat. [7], 3.6. Lemma

Tanım 2.27. X , bir grup sınıfı ve G bir grup olsun. G nin sonlu indeksli normal X -altgrubu varsa G ye *hemen hemen (almost) X -grup* denir.

Tanım 2.28. Bir G grubunun altgruplarının bir kümesi $\{V_\sigma : \sigma \leq \alpha\}$

(i) $V_0=1$

(ii) $V_\alpha=G$

(iii) $V_\sigma \triangleleft V_{\sigma+1}$ (her $\sigma < \alpha$ için)

(iv) $V_\lambda = \bigcup_{\sigma < \lambda} V_\sigma$ her $\lambda \leq \alpha$ limit ordinal için

özelliklerini sağlıyorsa, G grubu artan bir seriye sahiptir denir. Eğer serinin her bir terimi G de normal ise bu seriye *artan normal seri* denir.

Tanım 2.29. X bir grup sınıfı olmak üzere bir G grubu bütün faktörleri X -grup olan artan bir normal seriye sahip ise G ye *hiper X -grup* denir.

Teorem 2.30. Hipersonlu her grup lokal sonludur.

İspat. G hipersonlu bir grup olsun. G nin

$$1=G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_\alpha \triangleleft G_{\alpha+1} \triangleleft \dots \triangleleft G_\beta = G$$

olacak şekilde artan normal serisi vardır öyle ki $G_{\alpha+1}/G_\alpha$ sonludur. α üzerine indüksiyon ile G nin lokal sonlu olduğunu gösterelim. $\alpha=0$ ise aşıkardır. α limit ordinal olmasın. $\alpha-1$ vardır. İddia $\alpha-1$ için doğru olsun. Yani $G_{\alpha-1}$ lokal sonlu olsun. Bu durumda $G_\alpha/G_{\alpha-1}$ sonlu olduğundan G_α lokal sonludur. α limit ordinal olsun. $G_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} G_\beta$ ve her $\beta < \alpha$ için G_β lokal sonludur. K , G_α

nın sonlu üreteçli bir altgrubu olsun. $K \leq G_{\beta_0}$ olacak şekilde $\beta_0 < \alpha$ vardır. G_{β_0} , lokal sonlu olduğundan K sonludur. Böylece G_α lokal sonludur.

Lemma 2.31. Her aşıkak olmayan Chernikov grup, aşıkak olmayan sonlu bir karakteristik altgruba sahiptir. Özel olarak, her Chernikov grup hipersonludur.

İspat. [2],1.5.10. Lemma

Tanım 2.32. G bir grup ve $g \in G$ olsun.

$$\tau_g: G \rightarrow G, \tau_g(x) = x^g$$

şeklinde tanımlı fonksiyon G nin bir otomorfizmasıdır. τ_g otomorfizmasına g nin sebep olduğu *iç otomorfizma* denir ve G nin iç otomorfizma kümesi $\text{Inn}G$ ile gösterilir. $\text{Aut}G$, G nin bütün otomorfizmalarının grubunu göstermek üzere $\text{Inn}G$, $\text{Aut}G$ nin bir normal alt grubudur.

G nin iç otomorfizma olmayan bir otomorfizmasına G nin bir dış otomorfizması denir. $\text{Aut}G/\text{Inn}G$ bölüm grubuna elemanları otomorfizma olmasa da G nin *dış otomorfizma grubu* denir ve $\text{Out}G$ ile gösterilir.

Teorem 2.33. G bir Chernikov grup ve A , G nin otomorfizmalarının bir periyodik grubu olsun. O zaman $A/A \cap \text{Inn}G$ sonludur.

İspat. [8],3.29.2.

Tanım 2.34. X bir grup sınıfı olmak üzere bir G grubunun aşikar olmayan her x elemanı için $x \notin N_x$ ve $G/N_x \in X$ olacak şekilde bir N_x normal alt grubu varsa G ye *residually X -grup* denir.

Teorem 2.35. G bir grup ve $H, K \leq G$ olsun. Eğer $H \text{ char } K \triangleleft G$ ise o zaman $H \triangleleft G$ dir.

İspat. $g \in G$ olsun. $\theta : K \rightarrow K$ dönüşümünü $k \in K$ olmak üzere $\theta(k) = k^g$ şeklinde tanımlayalım. Bu dönüşüm K nın bir otomorfizmasıdır. $H \text{ char } K$ olduğundan $\theta(H) = H$ dir. Yani $H^g = H$ olur. Dolayısıyla $H \triangleleft G$ dir.

Lemma 2.36. H ve K bir G grubunun alt grupları olsun. $|G:H \cap K| \leq |G:H| \cdot |G:K|$ dir.

İspat. $\theta: G/(H \cap K) \rightarrow (G/H) \times (G/K)$ dönüşümünü $g \in G$ olmak üzere $\theta(g(H \cap K)) = (gH, gK)$ şeklinde tanımlayalım. O zaman θ bir monomorfizmadır. Böylece $|G:H \cap K| \leq |G:H| \cdot |G:K|$ sonucuna ulaşılır.

Tanım 2.37. π asal sayıların boş olmayan bir kümesi olmak üzere bir G grubunun normal π -altgrupları tarafından üretilen altgrup G nin π -alt grubudur. Bu altgrup G nin tek maksimal normal π -alt grubudur ve bu altgrup $O_\pi(G)$ ile gösterilir.

$O_\pi(G)$, G nin karakteristik alt grubudur.

Tanım 2.38. G bir grup; N , G nin bir aşikar olmayan normal alt grubu olsun. Eğer G nin N tarafından içerilen bir aşikar olmayan normal alt grubu yoksa N ye G nin bir *minimal normal alt grubu* denir.

Tanım 2.39. Üssü p olan bir abelyan gruba *elemanter abelyan p -grup* denir.

Tanım 2.40. A , bir G grubunun boş olmayan bir alt kümesi olmak üzere A nın G içindeki *normal kapanışı*, G nin A yı içeren bütün normal alt gruplarının kesişimi olarak tanımlanır ve A^G ile gösterilir.

A^G , A yı içeren normal alt grupların en küçüğüdür ve

$$A^G = \langle g^{-1}Ag : g \in G \rangle$$

dir. Ayrıca $A^G \triangleleft G$ dir.

G nin A tarafından içerilen bütün normal alt gruplarının bileşimine A nın G deki *içi* denir ve $\text{Core}_G A$ ile gösterilir.

$$\text{Core}_G A = \bigcap_{g \in G} A^g$$

dir.

Teorem 2.41. Lokal sonlu bir G grubu için aşağıdakiler denktir:

- a) G bir Chernikov gruptur.
- b) G minimal şartını sağlar.
- c) G nin abelyan altgrupları minimal şartını sağlar
- d) G nin birimden farklı her elemanının merkezleyeni minimal şartını sağlar.

İspat. [2],1.6.15. Teorem

Tanım 2.42 G bir grup olsun. G nin mertebesi 2 olan bir elemanına bir *involusyon* denir.

Tanım 2.43. p bir asal sayı olmak üzere bir G grubunun tek maksimal köklü p -alt grubuna (eğer varsa) G nin *p -köklü kısmı* denir.

Teorem 2.44. $G \in K$ olsun. O zaman G nin 2-köklü kısmı D vardır öyle ki G/D nin Sylow 2-altgrupları sonludur.

İspat. [2],3.4.12. Teorem

Teorem 2.45. $G \in K$ ve G nin Sylow 2-altgrupları sonlu olsun. Eğer G nin her i involusyonu için $C_G(i)$ hemen hemen lokal çözülebilir ise o zaman G hemen hemen lokal çözülebilirdir.

İspat. [2],3.5.14. Teorem

Lemma 2.46. Her sayılabilir lokal sonlu grup Sylow p -altgruplarının bir tam kümesi tarafından üretilir.

İspat. G bir sayılabilir lokal sonlu grup olsun. $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ olacak şekilde G nin sonlu altgruplarının bir

$$G_1 \leq G_2 \leq \dots$$

kulesi vardır ve her p için G_i nin

$$(G_1)_p \leq (G_2)_p \leq \dots$$

olacak şekilde $(G_i)_p$ Sylow p -altgrubu seçilebilir. Böylece $G_p = \bigcup_i (G_i)_p$, G nin bir Sylow p -alt grubudur. Her i için G_i sonlu olduğundan Sylow altgruplarının bir tam kümesi tarafından üretilir. Yani $G_i = \langle (G_i)_p : p \in IP \rangle$ dir. Şimdi $G = \langle G_p : p \in IP \rangle$ olduğunu gösterelim. $\langle G_p : p \in IP \rangle \leq G$ olduğu aşıkardır. Şimdi $x \in G$ olsun. O zaman $x \in G_i$ olacak şekilde bir i vardır. Böylece $x = x_1 x_2 \dots x_n$ olacak şekilde $x_j \in (G_i)_{p_j}$ elemanları vardır. Dolayısıyla $x_j \in \bigcup_i (G_i)_{p_j}$ dir ve buradan $x \in \langle \bigcup_i (G_i)_p : p \in IP \rangle = \langle G_p : p \in IP \rangle$ olduğu kolayca görülür. Böylece $G = \langle G_p : p \in IP \rangle$ elde edilir.

Teorem 2.47. G bir lokal sonlu grup ve K , G nin bir normal alt grubu olsun. Eğer bir p asal sayısı için G/K bir sayılabilir p -grup ise o zaman $G = KP$ olacak şekilde G nin bir p -alt grubu P vardır.

İspat. G/K sayılabilir lokal sonlu bir grup olduğundan $G/K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n/K$ ve

$$1 = G_0/K \leq G_1/K \leq \dots$$

olacak şekilde G/K nin sonlu altgruplarının bir zinciri vardır. Böylece $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ G nin K yı içeren ve her $n \in \mathbb{N}$ için G_n/K sonlu olan altgruplarının bir zinciridir ve $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$ dir. G_1/K sonlu olduğundan $G_1 = S_1 K$ olacak şekilde G_1 in sonlu alt grubu S_1 vardır. P_1 , S_1 in Sylow p -alt grubu olsun. G_1/K sonlu p -alt grup olduğundan $|S_1 K/K| = |G_1/K| = p^r$ olacak şekilde r pozitif tamsayısı vardır. Buradan $|S_1| = p^r |S_1 \cap K|$ eşitliği elde edilir. Eğer $|S_1 \cap K| = p^t s$ ve $(p, s) = 1$ ise

$|P_1| = p^{r+t}$ dir. Öte yandan $|P_1 \cap K| \leq |S_1 \cap K|$ olduğundan $|P_1 \cap K| \leq p^t$ olur. Dolayısıyla $|P_1/P_1 \cap K| \geq p^r$ eşitsizliği elde edilir. Böylece

$$|P_1/P_1 \cap K| = |P_1 K/K| \geq |S_1 K/K|$$

sonucuna ulaşılır. Bu da bize $P_1 K = S_1 K$ olduğunu gösterir.

$S_n, G_n = S_n K$ olacak şekildeki G_n nin sonlu altgrubu ve P_n, S_n nin Sylow p -altgrubu olsun. (Yukarıdaki paragraftan dolayı $P_n K = S_n K$ dır.) Bu durumda S_n yi içeren ve $S_{n+1} K = G_{n+1}$ eşitliğini sağlayan G_{n+1} in sonlu bir altgrubu S_{n+1} vardır. Ayrıca P_n, S_{n+1} in p -altgrubu olduğundan P_n yi içeren S_{n+1} in bir Sylow p -altgrubu P_{n+1} vardır ve $P_{n+1} K = S_{n+1} K$ dır. $S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ ve $P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$ olsun. P, S nin Sylow p -altgrubudur. Ayrıca $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n K = PK$ olur.

Teorem 2.48. G, p -altgrupları üzerinde minimal şartını (min- p) sağlayan lokal sonlu bir grup ve $N \triangleleft G$ olsun. O zaman $G/N, p$ -altgrupları üzerinde minimal şartını sağlar.

İspat. G/N nin min- p şartını sağladığını göstermek için G/N nin her sayılabilir p -altgrubunun minimal şartını sağladığını göstermek yeterlidir. $H/N, G/N$ nin sayılabilir bir p -altgrubu olsun. Böylece Teorem 2.47 den dolayı $H = PN$ olacak şekilde H nın bir p -altgrubu P vardır. $P, \text{Chernikov}$ olduğundan $H/N \cong P/P \cap N$ de Chernikovdur. Dolayısıyla H/N minimal şartını sağlar.

Lemma 2.49. G lokal sonlu bir grup olsun. Eğer her p asal sayısı için G nin bir sonlu Sylow p -altgrubu varsa o zaman G nin bütün Sylow p -altgrupları eşleniktir.

İspat. P, G nin sonlu bir Sylow p -altgrubu ve $|P| = k$ olsun. Q, G nin bir p -altgrubu olsun. Kabul edelim ki $g_1, g_2, \dots, g_{k+1}, Q$ nun birbirinden farklı $k+1$ tane elemanı olsun. $H = \langle P, g_1, g_2, \dots, g_{k+1} \rangle$ olarak alalım. O zaman H

sonludur ve P , H nin Sylow p -altgrubudur. Sonlu gruplar için Sylow teoremi gereğince $|P| \geq | \langle g_1, g_2, \dots, g_{k+1} \rangle |$ olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla G nin bütün p -altgrupları sonludur. Q , G nin Sylow p -altgrubu ise $K = \langle P, Q \rangle$ sonlu bir gruptur. P ve Q , K nin Sylow p -altgrupları olduğundan P ile Q , K içinde ve dolayısıyla G içinde eşleniktir.

Teorem 2.50. G , her p asal sayısı için $\min-p$ yi sağlayan lokal çözülebilir bir grup ve π asal sayıların sonlu bir kümesi olsun. O zaman G nin Sylow π -altgrupları eşleniktir.

İspat. $P, Q \in \text{Syl}_\pi(G)$ ve G° G nin köklü kısmı olsun. G° , bütün köklü altgrupları içerdiğinden $P^\circ \leq (G^\circ)_\pi$ dir. Ayrıca P , G° ın π -köklü kısmı $(G^\circ)_\pi$ ı içerdiğinden $(G^\circ)_\pi \leq P^\circ$ dır. Böylece $P^\circ = (G^\circ)_\pi$ elde edilir. Benzer şekilde $Q^\circ = (G^\circ)_\pi$ dır. π sonlu olduğundan [2],3.1.2. Lemmadan dolayı P ve Q Chernikovdur. Bu durumda P/P° ve Q/Q° sonludur. Dolayısıyla $P/(G^\circ)_\pi$ ve $Q/(G^\circ)_\pi$, $G/(G^\circ)_\pi$ nin sonlu Sylow altgruplarıdır. Böylece [2],2.2.3. Önerme (ii) den dolayı

$$P^g/(G^\circ)_\pi = Q/(G^\circ)_\pi$$

olacak şekilde $g \in G$ vardır. Buradan $P^g = Q$ elde edilir.

Teorem 2.51. G , sonlu π -ayrılabilir bir grup olsun. O zaman G nin her π -altgrubu bir Hall π -altgrubu tarafından içerilir ve G nin herhangi iki Hall π -altgrubu eşleniktir.

İspat. [9],9.1.6.

Tanım 2.52. $\wp$, asal sayıların kümesinin bir parçalanması olsun. H_π , G nin bir hem Hall π - ve hem de Sylow π -altgrubu olmak üzere G nin altgruplarının bir $\{ H_\pi \mid \pi \in \wp \}$ koleksiyonuna G nin $\wp$ tipinde bir *Hall bazı* denir. Burada

$\pi, \rho \in \wp$ olmak üzere H_π ve H_ρ kendi aralarında yer değiştirebilir. Benzer olarak H_π , G nin bir Hall π' - ve Sylow π' -altgrubu olmak üzere G nin altgruplarının bir $\{ H_\pi \mid \pi \in \wp \}$ koleksiyonuna G nin $\wp$ tipinde bir *Hall sistemi* denir.

Teorem 2.53. H bir Chernikov grup ve $\wp$, asal sayıların bir parçalanması olsun öyle ki her $\pi \in \wp$ için H, π -ayrılabilir.

- (i) H nin $\wp$ tipinde bir $\{ H_\pi \mid \pi \in \wp \}$ Hall bazı vardır.
- (ii) $\wp$ tipindeki Hall bazı ile $\wp$ tipindeki Hall sistemi arasında birebir eşleme vardır. Bu eşleme

$$H_\pi = \langle H_\rho \mid \rho \neq \pi \rangle \text{ ve } H_\pi = \bigcap_{\rho \neq \pi} H_\rho$$

ile verilir.

- (iii) A_π bir π -grup olmak üzere $\{ A_\pi \mid \pi \in \wp \}$ ikişer ikişer yer değiştirebilir grupların bir koleksiyonu olsun. Başka bir deyişle A_π , $\wp$ tipindeki bir Hall bazının grupları tarafından üretilir. O zaman her $\pi \in \wp$ için $H_\pi^g \geq A_\pi$ olacak şekilde bir $g \in H$ vardır.

İspat. [5],6.4.

Tanım 2.54. G bir periyodik grup olsun. G nin Sylow p -altgruplarının $S = \{ S_p \mid p \in \mathbb{P} \}$ tam kümesine, her p, q asal sayıları için $S_p S_q = S_q S_p$ şartını sağlıyorsa, G nin bir *Sylow bazı* denir. Ayrıca, asal sayıların her π kümesi için $\langle S_p \mid p \in \pi \rangle \in \text{Syl}_\pi G$ ise o zaman S ye G nin bir *Sylow üreten bazı* denir.

Tanım 2.55. G bir periyodik grup, $S=\{S_p\}$ ve $T=\{T_p\}$ G nin Sylow bazları olsun. Eğer her $p \in \pi(G)$ için $S_p^g = T_p$ olacak şekilde $g \in G$ varsa S ve T ye *eşleniktir* denir.

Tanım 2.56. Φ , bir G grubunun bir endomorfizması olsun. Eğer G nin, verilen her sonlu A altkümesi ve her $a \in A$ için $\Phi(a)=a^g$ olacak şekilde bir $g \in G$ varsa Φ ye, *lokal iç endomorfizma* denir.

Tanım 2.57. G bir grup ve $S=\{S_p: p \in IP\}$, $T=\{T_p: p \in IP\}$ G nin iki Sylow üreten bazı olsun. Bu durumda her p asal sayısı için $\alpha(S_p)=T_p$ olacak biçimde bir α lokal iç otomorfizması varsa o zaman S ve T ye *lokal eşleniktir* denir.

Teorem 2.58. G sayılabilir periyodik lokal çözülebilir grup ise G nin Sylow üreten bazı vardır.

İspat. [2],5.1.6.Lemma

Teorem 2.59. (Gol'berg) Çözülebilir bir Chernikov grubun Sylow bazları eşleniktir.

İspat. [2], 5.2.7 Teorem

Tanım 2.60. Bir G grubunun herhangi bir g elemanı G içinde sonlu eşleniğe sahip ise yani $|G: C_G(g)| < \infty$ ise g ye G nin bir *FC-elemanı* denir. G nin bütün FC-elemanlarının kümesi G nin bir karakteristik altgrubudur. Bu gruba G nin *FC-merkezi* denir ve $FC(G)$ şeklinde gösterilir. Eğer $FC(G)=G$ ise G ye *FC-grup* adı verilir.

G grubunun yukarı FC-merkezi serisi, α ordinali için

$$FC_0(G)=1, FC_{\alpha+1}(G)/FC_\alpha(G)=FC(G/FC_\alpha(G))$$

ve β limit ordinali için

$$FC_{\beta}(G) = \bigcup_{\alpha < \beta} FC_{\alpha}(G)$$

şeklinde tanımlanır. Aşıkarak öyle bir γ ordinali vardır ki

$$FC_{\gamma}(G) = FC_{\gamma+1}(G) = \dots$$

dir. Bu son gruba G nin *FC-hipermerkezi* denir ve $FC^{\infty}(G)$ ile gösterilir.

Lokal sonlu bir G grubunun *FC-merkezi*, G nin sonlu normal altgruplarının çarpımıdır. Bu durumda $G/FC^{\infty}(G)$ aşıkarak olmayan sonlu normal altgrup içermez.

Tanım 2.61. X , grupların altgrup-kapalı bir sınıfı, G bir grup ve $H \leq G$ olsun. G nin

$$\theta(H) = \langle X \leq G \mid X \in X, \langle H, C_G(H) \rangle \leq N_G(X) \rangle$$

altgrubunu tanımlayabiliriz. Eğer G nin her sonlu H altgrubu için $H, \theta(H) \in X$ ise θ ya G de *sonlu tam (finitely complete)* denir.

Lemma 2.62. G bir grup, $H \leq G$ ve X , grupların altgrup-kapalı bir sınıfı olsun. O zaman θ aşağıdakileri sağlar:

$$(1) \text{ Her } x \in G \text{ için } \theta(H^x) = \theta(H)^x$$

$$(2) H \in X \text{ ise } H \leq \theta(H) \text{ dir.}$$

$$(3) \theta(G) = \theta(1) = \Pi \{ N \triangleleft G \mid N \in X \} \leq \theta(H)$$

$$(4) \text{ Eğer } \theta \text{ sonlu tam ve } H \text{ sonlu ise } \theta(G) = \text{Core}_G \theta(H) \text{ dir.}$$

İspat.

$$(1) \theta(H^x) = \langle X \leq G : X \in X, \langle H^x, C_G(H^x) \rangle \leq N_G(X) \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle X \leq G : X \in X, \langle H, C_G(H) \rangle \leq N_G(X^{x^{-1}}) \rangle \\
&= \langle Y^x \leq G : Y^x \in X, \langle H, C_G(H) \rangle \leq N_G(Y) \rangle \\
&= \langle Y \leq G : Y \in X, \langle H, C_G(H) \rangle \leq N_G(Y) \rangle^x \\
&= \theta(H)^x
\end{aligned}$$

(2) $H \in X$ olsun. H kendisini normallediğinden ve ayrıca $C_G(H) \leq N_G(H)$ olduğundan $H \leq \theta(H)$ dir.

$$(3) \theta(G) = \langle X \leq G : X \in X, \langle G, C_G(G) \rangle \leq N_G(X) \rangle$$

$$= \langle X \leq G : X \in X, X \triangleleft G \rangle$$

$$= \Pi\{X \triangleleft G : X \in X\}.$$

$$\theta(1) = \langle X \leq G : X \in X, C_G(1) \leq N_G(X) \rangle$$

$$= \langle X \leq G : X \in X, G \leq N_G(X) \rangle$$

$$= \langle X \leq G : X \in X, X \triangleleft G \rangle$$

$$= \Pi\{X \triangleleft G : X \in X\}.$$

$$\text{Böylece } \theta(G) = \theta(1) = \Pi\{X \triangleleft G : X \in X\} \leq \theta(H)$$

(4) $\theta(G) = \langle X \triangleleft G : X \in X \rangle$ dir. Her $K \triangleleft G$ ve $K \in X$ için $H \leq N_G(K)$ ve $C_G(H) \leq N_G(K)$ olduğundan $K \leq \theta(H)$ dir. Böylece her $x \in G$ için $K = K^x \leq \theta(H)^x$ ve buradan

$$K \leq \bigcap_{x \in G} \theta(H)^x = \text{Core}_G \theta(H)$$

dir. Dolayısıyla $\theta(G) \leq \text{Core}_G \theta(H)$ olur. Öte yandan H sonlu ve θ sonlu tam olduğundan $H, \theta(H) \in X$ dir. $\text{Core}_G \theta(H) \triangleleft G$, $\text{Core}_G \theta(H) \leq \theta(H)$ ve X altgrup-kapalı olduğundan $\text{Core}_G \theta(H) \in X$ dir. Böylece $\text{Core}_G \theta(H) \leq \theta(G)$ dir.

Sonuç olarak $\theta(G) = \text{Core}_G \theta(H)$ elde edilir.

Lemma 2.63. G bir grup ve θ sonlu tam olsun. Eğer $H \leq G$ sonlu ise her $K \leq H$ için $\text{Core}_{C_G(K)} \theta(H) \leq \theta(K)$ olur.

İspat. θ sonlu tam olduğundan $H \in X$ dir. $L = \text{Core}_{C_G(K)} \theta(H)$ olsun. O zaman $C_G(K) \leq N_G(L)$ ve her $x \in C_G(K)$ için $K = K^x \leq H^x \leq \theta(H)^x$ dir. Böylece

$$K \leq \bigcap_{x \in C_G(K)} \theta(H)^x = \text{Core}_{C_G(K)} \theta(H) = L$$

ise $K \leq L$ olur. Fakat $\theta(H) \in X$, $L \leq \theta(H)$ ve X altgrup-kapalı olduğundan $L \in X$ dir.

$\theta(K) = \langle X \leq G \mid X \in X, \langle K, C_G(K) \rangle \leq N_G(X) \rangle$, $L \in X$ ve $\langle K, C_G(K) \rangle \leq N_G(L)$ olduğundan $L \leq \theta(K)$ dir.

Tanım 2.64. H ve K iki grup olsun. Eğer her $h \in H$, $k \in K$ için bir tek $k^h \in K$ elemanı var ve her $k, k_1, k_2 \in K$, $h, h_1, h_2 \in H$ için

$$(k^{h_1})^{h_2} = k^{h_1 h_2}, \quad k^1 = k \quad \text{ve} \quad (k_1 k_2)^h = k_1^h k_2^h$$

şartları sağlanıyorsa H grubu, K grubu üzerine etki eder denir.

Lemma 2.65. A sonlu bir π -grubu, G lokal sonlu bir grup olsun ve A, G üzerine etki etsin. N , G nin A -invariant normal π' -altgrubu olsun. O zaman $C_{G/N}(A) = C_G(A)N/N$ dir.

İspat. [2], 1.7.7. Lemma.

Tanım 2.66. G bir grup, S boş olmayan bir küme olsun. Eğer her $x \in S$, $g \in G$ için bir tek $xg \in S$ elemanı var ve her $x \in S$, $g_1, g_2 \in G$ için

$$x(g_1 g_2) = (xg_1)g_2 \text{ ve } x1_G = x$$

şartları sağlanıyorsa G grubu, S kümesi üzerine etki eder denir

Tanım 2.67. G , en az iki eleman içeren bir S kümesi üzerine etki etsin. Eğer her $x, y \in S$ için $gx = y$ olacak şekilde $g \in G$ varsa G , S üzerine *geçişli etki* eder denir.

Tanım 2.68. G , bir S kümesi üzerine etki eden bir grup ise

(i) Her $x \in S$ için $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$, G nin bir altgrubudur. Bu gruba x 'i *sabitleyen altgrup* veya x 'in *dengeleyeni* denir.

(ii) S üzerinde tanımlanan

$$x \sim y \Leftrightarrow gx = y \text{ olacak şekilde } g \in G \text{ vardır}$$

ile tanımlı bağıntı bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntının denklik sınıflarına S üzerinde G nin *yörüngeleri* denir. Yani $x \in S$ nin yörüngesi $\bar{x} = \{gx \mid g \in G\}$ kümesidir.

G , bir S kümesi üzerine etki etsin. Eğer her $x \in S$ için $gx = x$ şartını yalnızca 1_G sağlıyor ise o zaman G , S üzerine *sadık* (*faithful*) olarak etki eder denir.

Eğer $x \in S$ için $|\bar{x}| = |G|$ ise $\bar{x}$ kümesine *regüler yörünge* denir. $\bar{x}$ regüler yörünge ise $G_x = 1$ dir.

Tanım 2.69. Bir G grubunun bütün normal nilpotent altgruplarının çarpımına G nin *Fitting altgrubu* denir. $\text{Fitt}(G)$ ile gösterilir

G nin yukarı *Fitting serisi*

$$F_0(G)=1 \text{ ve } F_{i+1}/F_i(G) = Fitt(G/F_i(G))$$

şeklinde tanımlıdır. Eğer $F_i(G)=G$ olacak şekilde $i \geq 1$ tamsayısı varsa böyle sayıların en küçüğüne G nin *Fitting uzunluğu* denir ve $h(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.70. Bir G grubunun bütün maksimal altgruplarının kesişimine G nin *Frattini altgrubu* denir. Eğer G nin maksimal altgrubu yok ise G nin Frattini altgrubu G nin kendisidir. Frattini altgrup $\phi(G)$ veya $Frat(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.71. P bir p -grup olsun. Eğer $\phi(P)=P'$ ve buna ek olarak ya P abelyan ya da $\phi(P)=Z(P)$ ise P ye *özel grup* denir.

Tanım 2.72. G sonlu bir p -grup olmak üzere eğer $G' = Z(G)$ ve $|G'|=|Z(G)|=p$ ise G ye *ekstra özel p -grup* denir.

Tanım 2.73. R bir halka ve M bir abelyan grup olsun. Her $r \in R$, $m \in M$ için $rm \in M$ çarpımı her $m, m_1, m_2 \in M$, $r, r_1, r_2 \in R$ olmak üzere

$$(i) \quad r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$$

$$(ii) \quad (r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m$$

$$(iii) \quad (r_1r_2)m = r_1(r_2m)$$

şartlarını sağlarsa M ye bir *sol R -modül* denir. Eğer R nin birim elemanı 1_R varsa

$$(iv) \quad 1_R m = m ; \text{ her } m \in M \text{ için}$$

ise M ye *birimsel sol R -modül* denir.

Tanım 2.74. R , değişmeli, birimli bir halka ve M bir halka olsun. Eğer

$$(i) \quad (M, +) \text{ bir birimli (sol) } R\text{-modül}$$

$$(ii) \quad r(ab) = (ra)b = a(rb)$$

ise M ye R -cebir denir.

Tanım 2.75. G bir grup ve R birimli bir halka olsun. RG , $r_x \in R$ olmak üzere $\sum_{x \in G} r_x x$ biçimsel toplamlarından oluşan bir küme olsun. Burada sıfırdan farklı r_x lerin sayısı sonludur. Bu küme üzerinde toplama ve çarpma işlemleri sırasıyla

$$\left(\sum_x r_x x \right) + \left(\sum_x r'_x x \right) = \sum_x (r_x + r'_x) x$$

ve

$$\left(\sum_x r_x x \right) \left(\sum_y r'_y y \right) = \sum_{x,y} r_x r'_y xy$$

şeklinde tanımlıdır. Bu işlemlerle RG birimi $1_R 1_G = 1$ (kısaca 1 ile gösterilir) olan bir halkadır. Buna G nin R üzerindeki *grup halkası* denir. F bir cisim ise FG , $f \in F$ olmak üzere

$$f \left(\sum_x f_x x \right) = \sum_x (ff_x) x$$

çarpımı ile F -modüldür. Bu FG yi F üzerinde bir vektör uzayı yapar. $f \in F$, $r, s \in FG$ olmak üzere $f(rs) = (fr)s = r(fs)$ olduğundan FG bir F -cebirdir. Buna G nin F üzerindeki *grup cebiri* denir. Ayrıca FG bir FG -modüldür. Bu modüle *regüler FG -modül* denir.

W , V nin bir altuzayı ve her $w \in W$, $g \in G$ için $wg \in W$ ise W ya V nin bir *FG -altmodülü* denir. $\{0\}$ ve V altuzayları, V nin FG -altmodülleridir. Eğer V nin $\{0\}$ ve V den başka FG -altmodülleri yoksa V ye *basit (indirgenmez) FG -modül* denir. Eğer V , basit FG -modüllerinin bir direkt toplamı ise o zaman V ye *tam indirgenirdir* denir.

Her $v \in V$, $g \in G$ için $vg=v$ ise V ye *aşık* FG -modül denir.

Tanım 2.76. Tam indirgenir FG -modülü V nin birbirine izomorf olmayan bütün indirgenmez altmodülleri $S_1, \dots, S_n$ olsun. V nin S_i ye izomorf olan bütün altmodüllerinin toplamı V_i olsun. O zaman $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ dir. Burada V_i ye V nin bir *homojen bileşeni* denir.

Tanım 2.77. G bir grup; H , G nin bir altgrubu ve V bir FG -modül olsun. FH , FG nin altcebiridir. Bu durumda V bir FH -modül olur ve $V|_H$ ile gösterilir. Buna V nin FH ya *kısıtlanmış* denir.

Tanım 2.78. G bir grup ve $H \leq G$ olsun. $\{1=x_1, x_2, \dots, x_n\}$ H nın G içindeki sol koset temsilcilerinin bir tam kümesi ve F bir cisim olsun. O zaman FG grup cebiri sağ FH -modülü olarak

$$FG = FH \oplus Fx_2H \oplus \dots \oplus Fx_nH$$

şeklinde yazılabilir. Burada $Fx_iH = x_iFH$ bir sağ FH modüldür. Şimdi V bir sol FH -modül olsun. $V|^G = FG \otimes_{FH} V$ tensör çarpımına V den *oluşturulan modül* denir.

3. BAZ ALTGRUPLAR

K , her p asal sayısı için bütün p -altgrupları Chernikov olan tüm lokal sonlu grupların sınıfını gösterebilir. Rus literatüründe bu gruplar SF-gruplar olarak adlandırılırlar.

Lemma 3.1. Lokal sonlu bir G grubunun K -grubu olması için gerek ve yeter şart her p asal sayısı için G nin p altgrupları üzerinde minimal (min- p) şartını sağlamasıdır.

İspat.

$$H_1 \geq H_2 \geq H_3 \dots,$$

G nin p -altgruplarının azalan bir zinciri olsun. G nin bütün p -altgrupları Chernikov olduğundan H_1 Chernikov dur ve Chernikov gruplar minimal şartını sağladığından H_1 de minimal şartını sağlar.

$$H_2 \geq H_3 \geq \dots$$

H_1 içinde bir azalan zinciridir. Böylece $H_n = H_{n+1} = \dots$ olacak şekilde $n \geq 2$ sayısı vardır. Böylece G nin bütün p -altgrupları minimal şartını sağlar. Karşıt olarak; P , G nin bir p -altgrubu olsun. P minimal şartını sağlayan lokal sonlu bir grup olduğundan Teorem 2.41 den dolayı P Chernikovdur.

Teorem 3.2. Her K -grubu hemen hemen lokal çözülebilirdir.

İspat. G nin 2-köklü kısmının aşikar olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda G nin Sylow 2-altgruplarının köklü kısımları aşikar olacağından Sylow 2-altgrupları sonludur. Bir Sylow 2-altgrubunun mertebesi üzerine induksiyon yapacağız. Eğer G nin Sylow 2-altgrubu aşikar ise G nin sonlu üreteçli H altgrubunun da Sylow 2-altgrubu aşikardır. Böylece H nin mertebesi tek sayıdır. Feit-Thompson teoreminden dolayı H çözülebilirdir. Dolayısıyla G lokal çözülebilirdir. Eğer G nin Sylow 2-altgrubu aşikar değilse $i \in G$ bir

involusyon olmak üzere $C_G(i)/\langle i \rangle$ nin Sylow 2-altgruplarının mertebesi G nin Sylow 2-altgruplarının mertebesinden küçüktür ve indüksiyon hipotezinden dolayı $C_G(i)/\langle i \rangle$ hemen hemen lokal çözülebilirdir. Yani $S/\langle i \rangle \triangleleft C_G(i)/\langle i \rangle$ vardır öyle ki $|C_G(i)/\langle i \rangle : S/\langle i \rangle|$ sonlu ve $S/\langle i \rangle$ lokal çözülebilirdir. Dolayısıyla $|C_G(i) : S|$ sonlu ve $\langle i \rangle$ çözülebilir olduğundan S lokal çözülebilirdir. Sonuç olarak $C_G(i)$ hemen hemen lokal çözülebilirdir. Böylece Teorem 2.45 gereğince G hemen hemen lokal çözülebilirdir.

Aslında Teorem 2.44 den dolayı G nin 2-köklü kısmı D vardır öyle ki G/D nin bütün Sylow 2-altgrupları sonludur. Böylece yukarıdaki paragraftan dolayı G/D hemen hemen lokal çözülebilirdir. Yani G/D nin bir normal, sonlu indeksli S/D lokal çözülebilir alt grubu vardır. D abelyan olduğundan G nin normal, sonlu indeksli S alt grubu lokal çözülebilirdir.

Teorem 3.3. $G \in K$ olsun . O zaman G nin öyle bir normal abelyan D alt grubu vardır ki D nin her Sylow alt grubu bölümlü Chernikov gruptur ve G/D bütün Sylow alt grupları sonlu olan residually sonlu gruptur. Ayrıca π asal sayıların sonlu bir kümesi ise o zaman $G/O_{\pi'}(G)$ Chernikovdur. ([1], Teorem 2.2.)

Sonuç 3.4. Her p asal sayısı için K -grupların Sylow p -alt grupları eşleniktir.

İspat. $G \in K$ olduğundan Teorem 3.3 ten dolayı G nin bir normal abelyan alt grubu D vardır öyle ki G/D nin Sylow alt grupları sonludur. S/D , G/D nin bir Sylow p -alt grubu olsun. S/D sonlu olduğundan Teorem 2.47 den dolayı $S = PD$ olacak şekilde G nin bir p -alt grubu P vardır. S_p , G nin P yi içeren bir Sylow p -alt grubu ise o zaman $PD/D \leq S_p D/D$ dir. Böylece $S/D \leq S_p D/D$ olur. S/D , G/D nin Sylow p -alt grubu ve $S_p D/D$, G/D nin p -alt grubu olduğundan $S/D = S_p D/D$ elde edilir. Yani S_p , G nin bir Sylow p -alt grubu olmak üzere $S_p D/D$, G/D nin Sylow p -alt grubudur. S_p , Q_p , G nin iki Sylow p -alt grubu olsun. Yukarıdaki incelemeden dolayı $S_p D/D$ ve $T_p D/D$, G/D nin iki Sylow p -alt grubudur. G/D nin Sylow p -alt grupları sonlu olduğundan Lemma 2.49 dan dolayı

$(S_p)^g D/D = Q_p D/D$ olacak şekilde $g \in G$ vardır. Buradan $(S_p)^g D = Q_p D$ elde edilir. Q_p , lokal sonlu p -grubu olduğundan lokal çözülebilirdir. Öte yandan, D abelyan olduğundan çözülebilirdir. B , $Q_p D$ nin sonlu üreteçli altgrubu olsun. BD/D , $Q_p D/D$ nin sonlu üreteçli altgrubudur. Dolayısıyla BD/D çözülebilirdir ve böylece $B/(B \cap D)$ çözülebilirdir. Ayrıca D çözülebilirdir olduğundan $B \cap D$ çözülebilirdir. Çözülebilir grupların sınıfı genişleme kapalı olduğundan B çözülebilirdir. Yani $Q_p D$ lokal çözülebilirdir. Böylece Teorem 2.50 den dolayı $Q_p D$ nin Sylow p -altgrupları eşleniktir. $(S_p)^g$ bir p -grup olduğu için, $Q_p D$ nin bunu içeren bir Sylow p -altgrubu vardır. Bu altgrup T_p olsun. Ayrıca Q_p, G nin ve dolayısıyla $Q_p D$ nin Sylow p -altgrubu olduğundan $(Q_p)^d = T_p$ olacak şekilde $d \in Q_p D$ vardır. Buradan $(S_p)^g \leq (Q_p)^d$ olduğundan $S_p \leq (Q_p)^{dg^{-1}}$ elde edilir. S_p, G nin Sylow p -altgrubu olduğu için $S_p = (Q_p)^{dg^{-1}}$ dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.5. G , bir sayılabilir lokal çözülebilir K -grup olsun. O zaman G nin Sylow üreten bazları lokal eşleniktir.

İspat. $p_1, p_2, \dots$ G nin elemanlarının mertebelerini bölen asal sayılar, $\pi_i = \{p_1, p_2, \dots, p_i\}$ ve $N_i = O_{\pi_i'}(G)$ olsun. O zaman G/N_i bir Chernikov gruptur. G/N_i nin köklü kısmı $(G/N_i)^0$ abelyan olduğundan çözülebilirdir. Öte yandan $(G/N_i)/(G/N_i)^0$ sonlu ve G/N_i lokal çözülebilir olduğundan $(G/N_i)/(G/N_i)^0$ çözülebilirdir. Çözülebilir gruplar genişleme kapalı olduğundan G/N_i çözülebilirdir.

$$G \geq N_1 \geq N_2 \geq \dots \geq \bigcap_{i=1}^{\infty} N_i = 1$$

dir. $S = \{S_p\}$ ve $T = \{T_p\}$, G nin Sylow üreten bazları olsun. O zaman $SN_i/N_i = \{S_p N_i/N_i\}$ ve TN_i/N_i , G/N_i nin Sylow bazlarıdır. Teorem 2.59 den dolayı bunlar eşleniktir. Önce $N_G(SN_i) = N_G(SN_{i+1})N_i$ eşitliğini gösterelim. $N_G(SN_{i+1})N_i \leq N_G(SN_i)$ olduğu aşıkardır. Öte yandan $x \in N_G(SN_i)$ olsun. Her

$S \in \mathcal{S}$ için $S^x N_i = SN_i$ dir. $S^x, S \in \text{Syl}_p(SN_i)$ olduğundan $S^x N_{i+1}/N_{i+1}$ ve SN_{i+1}/N_{i+1} , SN_i/N_{i+1} in Sylow p -altgruplarıdır. Böylece $h=sn \in SN_i$ vardır öyle ki $S^x N_{i+1}/N_{i+1} = S^h N_{i+1}/N_{i+1} = S^n N_{i+1}/N_{i+1}$ dir. Buradan $xn^{-1} \in N_G(SN_{i+1})$ elde edilir. Yani $x \in N_G(SN_{i+1})N_i$ dir. Bu her $S \in \mathcal{S}$ için doğru olduğundan $x \in N_G(SN_{i+1})N_i$ dir.

Şimdi $S^{g_i} N_i = TN_i$ olacak şekilde $g_i \in G$ nin var olduğunu ve $j \geq i$ için $g_j N_i = g_i N_i$ olduğunu göstereceğiz. Kabul edelim ki $g_1 \dots g_i$ tanımlanmış olsun. G/N_{i+1} in Sylow bazları eşlenik olduğundan

$$S^h N_{i+1}/N_{i+1} = TN_{i+1}/N_{i+1}$$

olacak şekilde $h \in G$ vardır. O zaman $g_i h^{-1} \in N_G(SN_i) = N_G(SN_{i+1})N_i$ dir. Böylece $g_i = nyh$ olacak şekilde $y \in N_G(SN_{i+1})$ ve $n \in N_i$ vardır. $g_{i+1} = yh$ olsun. O zaman

$$S^{g_{i+1}} N_{i+1} = S^{yh} N_{i+1} = S^h N_{i+1} = TN_{i+1} \text{ ve } g_i N_i = nyh N_i = yh N_i = g_{i+1} N_i$$

dir.

$\alpha : G \rightarrow G$ dönüşümünü her $x \in G$ için $\alpha(x) = \bigcap_{i=1}^{\infty} x^{g_i} N_i$ ile tanımlansın.

$\bigcap N_i = 1$ olduğundan $\bigcap_{i=1}^{\infty} x^{g_i} N_i$ ya boştur ya da bir elemandan oluşur. α nın bir dönüşüm olduğunun göstermek için $\bigcap_{i=1}^{\infty} x^{g_i} N_i$ nin boştan farklı olduğunu göstermeliyiz. Bunu α nın lokal iç olduğunun ispatlanması ile gösterilmiş olacaktır. Bunun için $\{x_1, \dots, x_n\}$, G nin herhangi bir sonlu altkümesi olmak üzere her $r = 1, 2, \dots, n$ için $\alpha(x_r) = x_r^h$ olacak şekilde bir $h \in G$ olduğunu göstermek yeter. $S_{\pi_i} = \langle S_p \in \mathcal{S} : p \in \pi_i \rangle$ olsun. S , G nin Sylow üreten bazı olduğundan $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_{\pi_i}$ ve böylece $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq S_{\pi_k}$ olacak şekilde bir k tamsayısı vardır. $P = S_{\pi_k}$ ve $Q = \langle T_p \in \mathcal{T} : p \in \pi_k \rangle$ olsun. P ve Q , G nin Sylow

π_k -altgrupları ve π_k sonlu olduğundan Teorem 2.50 den dolayı $P^g=Q$ olacak şekilde $g \in G$ vardır.

Her $p \in \pi_k$ için $S_p^{g_i} N_i = T_p N_i$ olduğundan $P^{g_i} N_i = Q N_i = P^g N_i$ dir ve böylece $g_i g^{-1} \in N_G(P N_i) = N_G(P) N_i$ dir. Buradan $g_i g^{-1} = y_i n_i$ olacak şekilde $y_i \in N_G(P)$ ve $n_i \in N_i$ vardır. Dolayısıyla $x^{g_i g^{-1}} N_i = x^{y_i} N_i$ ve $i \geq k$ için

$$y_i N_k = y_i n_i N_k = g_i g^{-1} N_k = g_i N_k g^{-1} = g_k N_k g^{-1} = g_k g^{-1} N^k = y_k N_k$$

dir. Böylece $y_i y_k^{-1} \in N_k \cap N_G(P)$ dir. N_k bir π'_k grup ve P bir π_k grup olduğundan $[N_k \cap N_G(P), P] \leq N_k \cap P = 1$ dir. Dolayısıyla $N_k \cap N_G(P) \leq C_G(P)$ elde edilir. Bundan dolayı her $i \geq k$ için $y_i = c_i y_k$ olacak şekilde $c_i \in C_G(P)$ vardır. Böylece her $x \in P$ ve her $i \geq k$ için

$$x^{g_i g^{-1}} N_i = x^{y_i n_i} N_i = x^{y_i} N_i = x^{c_i y_k} N_i = x^{y_k} N_i$$

ise $x^{g_i} N_i = x^{y_k g} N_i$ dir. Buradan

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} x^{g_i} N_i = \bigcap_{i=k}^{\infty} x^{g_i} N_i = \bigcap_{i=k}^{\infty} x^{y_k g} N_i = x^{y_k g}$$

dir. Yani her $r = 1, 2, \dots, n$ için $\alpha(x_r) = x_r^{y_k g}$ dir. Sonuç olarak α , G nin lokal iç otomorfizmasıdır. Ayrıca

$$\alpha(S_p) = \bigcap_{i=1}^{\infty} S_p^{g_i} N_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} T_p N_i = T_p$$

olur ve böylece $\alpha(S) = T$ dir.

Aşağıdaki sonuç K -grupların baz altgruplarına bir tanım oluşturabilmek amacıyla verilmiştir.

Lemma 3.6. G sayılabilir bir K -grup ve H , G nin bir altgrubu olsun. O zaman aşağıdaki şartlar denktir :

- (1) G den H ye örten bir lokal iç endomorfizma vardır.
- (2) $G \cong H$
- (3) H , G nin her sonlu altgrubunun bir izomorfik kopyasını içerir.
- (4) H , G nin her sonlu p -altgrubunun bir izomorfik kopyasını içerir.
- (5) Her p asal sayısı için H , G nin bir Sylow p -altgrubunu içerir.
- (6) H , G nin Sylow p -altgruplarının bir tam kümesi tarafından üretilir.

İspat.

(1) $\Rightarrow$ (2). $\Phi:G \rightarrow H$ lokal iç epimorfizma ve $x \in \text{Ker}\Phi$ olsun. $\Phi(x)=1$ dir. $X=\{x\}$ olmak üzere X sonlu olduğundan $\Phi(x) = x^x$ olacak şekilde $g \in G$ vardır. Bu durumda $x^x = 1$ olduğundan $x = 1$ ve böylece $\text{Ker}\Phi = \{1\}$ olup Φ birebirdir. O halde $G \cong H$ dir.

(2) $\Rightarrow$ (3). K , G nin sonlu bir altgrubu ve $\theta:G \rightarrow H$ bir izomorfizma olsun. Böylece $K \leq G$ olduğundan $\theta(K) \leq H$ elde edilir. $\theta(K)$, K nın bir izomorfik kopyası olduğundan (3) sağlanır.

(3) $\Rightarrow$ (4). $M \leq G$ ve $|M|=p^k$ olsun. H , G nin her sonlu altgrubunun izomorfik kopyasını içerdiğinden özel olarak M nin de bir izomorfik kopyasını içerir.

(4) $\Rightarrow$ (5). G sayılabilir olduğundan H nin sonlu altgruplarının öyle bir

$$H_1 \leq H_2 \leq \dots$$

kulesini seçebiliriz ki $H = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$ dır ve

$$Q_1 \leq Q_2 \leq \dots$$

olacak şekilde her $i=1,2, \dots$ için H_i nin bir Q_i Sylow p -altgrubu seçilebilir.

$Q = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ olsun. O zaman Q, H nin bir p -alt grubudur. S, H nin Q yu içeren bir Sylow p -altgrubu olsun. O zaman her $i=1,2, \dots$ için $Q_i \leq S$ dir. Buradan $Q_i \leq S \cap H_i$ dir. Q_i, H_i nin bir Sylow p -altgrubu olduğundan $Q_i = S \cap H_i$ dir.

$$Q = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (S \cap H_i) = S \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i \right) = S \cap H = S$$

yani $Q=S$ dir. Böylece Q, H nin bir Sylow p -alt grubudur.

Q, H nin her sonlu p -alt grubunun bir eşleniğini içerir. Bunu göstermek için H nin sonlu bir D alt grubunu alalım. D sonlu olduğundan $D \leq H_i$ olacak şekilde bir $i \geq 1$ vardır. H_i nin D yi içeren bir Sylow p -altgrubu T olsun. T ile Q_i, H_i sonlu olduğundan, eşleniktir. Bu durumda $Q_i = T^x$ olacak şekilde $x \in H_i$ vardır. $D \leq T$ ise $D^x \leq T^x = Q_i \leq Q$ olur. G nin Q yu içeren bir Sylow p -altgrubu P ve F, P nin bir sonlu alt grubu olsun. Hipotezden dolayı sonlu $E \leq H$ vardır ki $E \cong F$ dir. Ayrıca yukarıdaki incelemeden dolayı bir $h \in H$ için $E^h \leq Q$ dur. $E^h \cong E \cong F$ olduğundan Q, P nin her sonlu alt grubunun bir izomorfik kopyasını içerir. Böylece Teorem 2.26 dan dolayı Q, P ye izomorf bir alt grup içerir. Fakat Teorem 2.25 ten dolayı bir Chernikov grup kendisine izomorf olan öz alt grup içermeyeceğinden $P=Q$ olmak zorundadır. Sonuç olarak $P \leq H$ dir.

(5) $\Rightarrow$ (6). $H \leq G$ olduğundan H sayılabilir lokal sonlu bir gruptur. Lemma 2.46 dan dolayı H kendi Sylow p -alt gruplarının bir tam kümesi tarafından üretilir. Q, H nin Sylow p -alt grubu, P de G nin H tarafından içerilen Sylow p -alt grubu olsun. Sonuç 3.4 ten dolayı $Q=P^h$ olacak şekilde $h \in H$ vardır. P, G nin Sylow p -alt grubu olduğundan P^h de G nin Sylow p -alt grubudur. Yani H nin Sylow p -alt grupları G nin de Sylow p -alt grubudur. Böylece H nin kendisinin ve

dolayısıyla G nin Sylow p -altgruplarının bir tam kümesi tarafından üretildiği gösterilmiş olur.

(6) $\Rightarrow$ (1). $G \in K$ olduğundan Teorem 3.2 gereğince G , hemen hemen lokal çözülebilirdir. Yani G nin lokal çözülebilir normal bir S altgrubu vardır öyle ki $|G:S|$ sonludur. Böylece G/S π -grubu olacak şekilde asal sayıların sonlu bir π kümesini seçebiliriz. O zaman G lokal π -ayrılabiliridir. Bunu göstermek için G nin sonlu üreteçli bir N altgrubunu alalım. $NS/S \leq G/S$ ve G/S sonlu π -grup olduğundan NS/S de sonlu π -gruptur. Ayrıca $NS/S \cong N/N \cap S$ olduğu göz önüne alınırsa $N/N \cap S$ de sonlu π -gruptur. Sonlu üreteçli bir grubun sonlu indeksli her altgrubu sonlu üreteçli olduğundan $N \cap S$ sonlu üreteçlidir (Teorem 2.3). S lokal çözülebilir, G lokal sonlu olduğundan $N \cap S$ sonlu ve çözülebilirdir. Sonlu çözülebilir bir grup her π için π -ayrılabiliridir ([9], sayfa 248). Buradan $N \cap S$ π -ayrılabiliridir. Böylece $1 = S_1 \triangleleft S_2 \triangleleft \dots \triangleleft S_n = N \cap S$ ve S_{i+1}/S_i π -grup veya π' -grup olacak şekilde $N \cap S$ nin bir serisi vardır. Fakat $N/N \cap S$ bir π -grup olduğundan N π -ayrılabiliridir. Daha net olarak $1 = S_1 \triangleleft S_2 \triangleleft \dots \triangleleft S_n = N \cap S \triangleleft N$ olmak üzere N nin faktörleri π -grup veya π' -grup olacak şekilde bir serisi vardır. Bu bize G nin lokal π -ayrılabilir olduğunu gösterir. Benzer şekilde her $p \notin \pi$ için G lokal p -ayrılabiliridir.

G , sayılabilir lokal sonlu bir grup olduğundan $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ olacak şekilde

$$G_1 \leq G_2 \leq \dots$$

sonlu altgrupları vardır. G_1 sonlu altgrubunu göz önüne alalım. Teorem 2.53 ten dolayı G_1 in bir $\{G_{1,\pi}, G_{1,p} \mid p \notin \pi\}$ Hall bazı vardır. Burada gruplar kendi aralarında ikiye ikiye yer değiştirebilirler. Böylece $p_1, \dots, p_s \notin \pi$ olmak üzere $\langle G_{1,\pi}, G_{1,p_1}, \dots, G_{1,p_s} \rangle$ bir $\pi \cup \{p_1, \dots, p_s\}$ -gruptur. Teorem 2.53 (c) den dolayı $G_{1,\pi} \leq G_{2,\pi}$ ve $G_{1,p} \leq G_{2,p}$ ($p \notin \pi$) olacak şekilde G_2 nin bir

$p \notin \pi$ Hall bazı vardır. Bu şekilde devam edilirse $\bigcup_{i=1}^{\infty} G_{i,\pi} = G_{\pi}$ ve $p \notin \pi$ için

$\bigcup_{i=1}^{\infty} G_{i,p} = G_p$ ler sırasıyla G nin bir Hall π -altgrubu ve $p \notin \pi$ için Sylow p -altgruplarıdır. Ayrıca bu gruplar kendi aralarında ikişer ikişer yer değiştirebilirdir ve $p_1, \dots, p_s \notin \pi$ olmak üzere $\langle G_{\pi}, G_{p_1}, \dots, G_{p_s} \rangle$ bir $\pi \cup \{p_1, \dots, p_s\}$ -gruptur. Benzer şekilde H nin H_{π} , Hall π -altgrubu ve her $p \notin \pi$ için H_p , bir Sylow altgrubu vardır öyle ki bu gruplar kendi aralarında ikişer ikişer yer değiştirebilirdir ve $p_1, \dots, p_s \notin \pi$ olmak üzere $\langle H_{\pi}, H_{p_1}, \dots, H_{p_s} \rangle$ bir $\pi \cup \{p_1, \dots, p_s\}$ -gruptur.

$r \in \pi$ ve $H_r \leq H_{\pi}$ olmak üzere H nin bir Sylow r -altgrubu H_r olsun. (6) dan dolayı H , G nin Sylow altgruplarının bir tam kümesi tarafından üretilir. Böylece öyle bir $g \in G$ vardır ki $H_r^g \leq G_r^g = Q_r \subseteq H$ olur. Burada G_r , G nin H_r yi içeren bir Sylow r -altgrubu, Q_r ise G nin H tarafından içerilen Sylow r -alt grubudur. Dolayısıyla $H_r^g = Q_r$ ve H_r , G nin bir Sylow r -alt grubudur. Yani H_{π} , G nin bir Hall π -alt grubudur.

Şimdi Teorem 3.5'deki yaklaşımı kullanacağız. $\pi \cup \{p_1\} \cup \{p_2\} \cup \dots$, G nin elemanlarının asal bölenlerinin kümesi olsun. $i=0,1, \dots$ olmak üzere, $\pi_0 = \pi$, $i \geq 1$ için $\pi_i = \pi \cup \{p_1, \dots, p_i\}$ olsun. O zaman $S = \{G_{\pi}, G_p \mid p \notin \pi\}$, $T = \{H_{\pi}, H_p \mid p \notin \pi\}$ ve $N_i = O_{\pi_i'}(G)$ olmak üzere SN_i/N_i ve TN_i/N_i , G/N_i nin bir Hall bazıdır. Böylece 2.53'den dolayı $S^{g_i}N_i = TN_i$ olacak şekilde $g_i \in G$ vardır. İspatın geri kalan kısmı Teorem 3.5 deki gibidir. Böylece G 'nin öyle bir lokal iç endomorfizması vardır ki $\phi(G_{\pi}) = H_{\pi}$ ve $\phi(G_p) = H_p$ dir. Bundan dolayı $\phi(G) = H$ dir.

Tanım 3.7. Eğer G sayılabilir K -grup ise G nin Lemma 3.6 daki şartlardan birini sağlayan H alt grubuna G nin bir *baz alt grubu* denir. Sayılamayan bir K -

K -grubun baz altgrubu Lemma 3.6 daki (3)-(6) şartlarından birini sağlayan G nin sayılabilir bir H altgrubu olarak tanımlıdır.

Burada (3)-(6) şartları denktir. Bunu şu şekilde gösterebiliriz:

(3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (6) gerektirmeleri Lemma 3.6 nın ispatında gösterilmişti. (6) $\Rightarrow$ (3) gerektirmesini ispatlayalım. H , G nin Sylow p -altgruplarının bir tam kümesi tarafından üretilen bir altgrubu ve F , G nin sonlu bir altgrubu olsun. $K = \langle H, F \rangle$ olarak alalım. K , G nin sayılabilir bir alt grubudur ve H , K nin Sylow p -altgruplarının bir tam kümesi tarafından üretilir. Şimdi Lemma 3.6 yı K ve H ya uygularsak $K \cong H$ elde edilir. Böylece $F \cong E$ olacak şekilde H nin bir E altgrubu vardır. Bu da ispatı tamamlar.

Tanım 3.8. $G_1, G_2 \in K$ ve G_1 in en az bir baz altgrubu G_2 nin bir baz alt grubuna izomorf olsun. O zaman G_1 ve G_2 aynı baz tipine sahiptir denir.

Şimdi $G \in K$ ve B , G nin bir baz altgrubu ise o zaman G nin B yi içeren her sayılabilir alt grubunun G nin baz altgrubu ve B ile izomorfik olduğunu gösterelim: $B \leq T \leq G$ ve T sayılabilir olsun. T nin G nin bir baz altgrubu olduğunu göstermek için T nin Lemma 3.6 daki (3)-(6) şartlarından birini sağladığını göstermek yeterlidir. B , (3) şartını sağladığından T de sağlar. Böylece T , G nin bir baz alt grubudur. $G \in K$ olduğundan $T \in K$ ve ayrıca T sayılabilir. Lemma 3.6 da G yerine T , H yerine B alalım. Bu durumda (3) sağlanır. (B , G nin her sonlu alt grubunun izomorfik kopyasını içerdiğinden T nin de her sonlu alt grubunun izomorfik kopyasını içerir). Bu şartlar denk olduğundan (2) sağlanır. Yani $B \cong T$ dir.

4. HİPERSONLU GRUPLAR

Bir G grubu, faktörleri sonlu olan, artan normal seriye sahip ise G grubuna hipersonlu adı verildiğini hatırlayalım. Basit bir indüksiyon ile her hipersonlu grubun lokal sonlu olduğu gösterilebilir.

Hipersonlu bir grubun açıkça her altgrubu ve her homomorfik görüntüsü de hipersonludur. Bununla birlikte, bir periyodik abelyan grup her zaman hipersonludur. Fakat bir grubun normal hipersonlu altgruplarının çarpımı hipersonlu olmayabilir. Bununla birlikte K -grupların sınıfı için aşağıdaki sonuç verilebilir.

Lemma 4.1. $G \in K$ olsun. O zaman G nin normal hipersonlu altgruplarının çarpımı yine hipersonludur. Böylece G nin hipersonlu radikali de hipersonludur.

İspat. Önce N , G nin hipersonlu altgrubu olmak üzere N nin faktörleri sonlu artan karakteristik seriye sahip olduğunu göstereceğiz. N hipersonlu olduğundan N nin faktörleri sonlu artan normal

$$1 = N_0 \triangleleft N_1 \triangleleft \dots \triangleleft N_\alpha \triangleleft N_{\alpha+1} \triangleleft \dots \triangleleft N_\beta = N$$

serisi vardır. Şimdi α üzerine indüksiyonla yukarıdaki iddiayı ispatlayalım. $\alpha=0$ için iddia aşikar olarak sağlanır. α limit ordinal değilse $\alpha-1$ vardır. Kabul edelim ki $N_{\alpha-1} \leq K_{\alpha-1}$ olacak şekilde N nin karakteristik $K_{\alpha-1}$ altgrubu vardır ve $K_{\alpha-1}$ faktörleri sonlu olan artan karakteristik seriye sahiptir. $\pi = \pi(N_\alpha K_{\alpha-1}/K_{\alpha-1})$ olsun. $|N_\alpha : N_{\alpha-1}|$ sonlu ve $|N_\alpha K_{\alpha-1} : K_{\alpha-1}| = |N_\alpha : K_{\alpha-1} \cap N_\alpha| \leq |N_\alpha : N_{\alpha-1}|$ olduğundan π sonludur. Böylece Teorem 3.3 den dolayı $O_\pi(N/K_{\alpha-1})$ Chernikovdur. $O_\pi(N/K_{\alpha-1}) = K_\alpha/K_{\alpha-1}$ olsun. $O_\pi(N/K_{\alpha-1}) \text{char} N/K_{\alpha-1}$ ve $K_{\alpha-1} \text{char} N$ olduğu için $K_\alpha \text{char} N$ dir. Öte yandan $K_\alpha/K_{\alpha-1}$ Chernikov olduğundan Lemma 2.31

gereğince sonlu faktörlü artan karakteristik seriye sahiptir. Ayrıca $N_\alpha K_{\alpha-1}/K_{\alpha-1}$ π -grup olduğundan $N_\alpha K_{\alpha-1}/K_{\alpha-1} \leq K_\alpha/K_{\alpha-1}$ ve böylece $N_\alpha \leq K_\alpha$ dir. $K_\alpha/K_{\alpha-1}$ ve $K_{\alpha-1}$ faktörleri sonlu artan karakteristik seriye sahip olduğundan K_α faktörleri sonlu artan karakteristik seriye sahiptir.

α limit ordinal ise her $\beta \leq \alpha$ için K_β faktörleri sonlu artan karakteristik seriye sahip ve $K_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} K_\beta$ olduğundan K_β faktörleri sonlu artan karakteristik seriye sahiptir. Böylece N nin faktörleri sonlu artan karakteristik seriye sahip olduğu sonucu elde edilir.

K ve L , G nin iki normal hipersonlu altgrubu olmak üzere KL nin hipersonlu olduğunu göstermek yeter. Yukarıdaki incelemeden dolayı K nin öyle karakteristik K_β ($\beta < \alpha$) altgrupları vardır ki $K_\alpha = K$, $\gamma < \delta$ ise $K_\gamma \leq K_\delta$ ve her $\beta < \alpha$ ordinali için $K_{\beta+1}/K_\beta$ sonludur. Öte yandan $T/K = LK/K$, G/K nin bir normal hipersonlu altgrubudur böylece T/K nin öyle karakteristik altgrupları T_ξ/K ($\xi < \lambda$) vardır ki $T/K = T_\lambda$, $\gamma < \delta$ ise $T_\gamma \leq T_\delta$ ve her $w < \lambda$ için T_{w+1}/T_w sonludur. Böylece

$$1 \triangleleft K_1 \triangleleft \dots \triangleleft K_\alpha = L \triangleleft T_1 \triangleleft \dots \triangleleft T_\lambda = LK$$

dir. Burada her terim $T = LK$ da normal ve faktörler sonludur. Bundan dolayı LK hipersonludur.

Sonuç 4.2. Her p asal sayısı için p -altgrupları minimal şartını sağlayan hipersonlu grupların sınıfı genişleme-kapalıdır.

İspat. G bir grup $N \triangleleft G$ olmak üzere N ve G/N min- p şartını sağlayan hipersonlu gruplar olsun. Hipersonlu gruplar lokal sonlu olduğundan N ve G/N lokal sonludur. Lokal sonlu grupların sınıfı ve minimal şartı genişleme kapalı olduğundan G , min- p şartını sağlayan lokal sonlu gruptur. G/N hipersonlu olduğundan $1 = G_0/N \triangleleft G_1/N \triangleleft \dots \triangleleft G_\alpha/N \triangleleft G_{\alpha+1}/N \triangleleft \dots \triangleleft G_\beta/N = G/N$

olacak şekilde G/N nin faktörleri sonlu olan normal serisi vardır. G_1/N sonlu olduğundan $G_1=NF_0$ olacak şekilde sonlu F_0 altgrubu vardır. N hipersonlu olduğundan Lemma 4.1 den dolayı G_1 hipersonludur. α limit ordinal değilse $\alpha-1$ vardır. $G_{\alpha-1}$ hipersonlu olsun. $G_\alpha/G_{\alpha-1}$ sonlu olduğundan $G_\alpha=G_{\alpha-1}F_{\alpha-1}$ olacak şekilde sonlu $F_{\alpha-1}$ grubu vardır. Böylece G_α hipersonludur. α limit ordinal ise G_β hipersonlu olmak üzere $G_\alpha=\bigcup_{\beta<\alpha} G_\beta$ dir. $\bigcup_{\beta<\alpha} G_\beta \leq \prod_{\beta<\alpha} G_\beta$ ve Lemma 4.1 gereğince $\prod_{\beta<\alpha} G_\beta$ hipersonlu olduğundan G_α hipersonludur. Dolayısıyla G hipersonludur.

Lemma 4.3. $G \in K$ olsun. O zaman G nin her normal hipersonlu altgrubu $FC^\infty(G)$ tarafından içerilir.

İspat. Eğer $FC(G) = 1$ ise G nin aşıkâr olmayan normal hipersonlu altgrubu olmadığını göstermek yeter. Çünkü G nin hipersonlu normal altgrubu F ise $F(FC^\infty(G))/FC^\infty(G)$, $G/FC^\infty(G)$ nin hipersonlu normal altgrubu olur. Böylece $FC(G/FC^\infty(G)) = 1$ olduğundan $F(FC^\infty(G)) / FC^\infty(G) = 1$ olacaktır ve buradan $F \leq FC^\infty(G)$ olduğu elde edilecektir. Bunun için $FC(G)=1$ olduğunu düşünebiliriz. Bu durumda kabul edelim ki N , G nin bir aşıkâr olmayan normal hipersonlu altgrubu olsun. N aşıkâr olmayan bir sonlu normal altgrup içerdiğinden N nin bir sonlu minimal normal M altgrubu vardır. M nin karakteristik altgrubu olmadığından $M' = 1$ veya $M' = M$ dir. Birinci durumda M abelyandır ve her p için M^p , M nin fully invaryant altgrubu olduğundan her p asal sayısı için $M^p=M$ veya bir p asal sayısı için $M^p=1$ dir. Her p için $M^p=M$ olması durumunda M bölümlü abelyan gruptur. M sonlu olduğundan $M=1$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde $M^p=1$, yani M bir elemanter abelyan p -alt grubudur. O zaman her $g \in G$ için M^g , N nin minimal normal alt grubudur. Böylece M^g elementer abelyan p -grubudur. Eğer $g_1, g_2 \in G$ için $M^{g_1} \neq M^{g_2}$ ise $[M^{g_1}, M^{g_2}] \leq M^{g_1} \cap M^{g_2} = 1$ dir. Böylece M^G abelyandır. Ayrıca

$(M^G)^p = 1$ olduğu açıktır. Yani M^G bir elementer abelyan p -grubudur. Fakat M^G bir Chernikov grup ve $(M^G)^\circ = 1$ olduğundan M^G sonludur. $M' = M$ olması durumunda $M^G = \text{Dr}_{g \in G} M^g$ dir. Çünkü $M \triangleleft N$ ve $M^G \leq N$ olduğundan $M \triangleleft M^G$ ve böylece $M^g \triangleleft M^G$ dir. Ayrıca M^g , N nin minimal normal altgrubu olduğundan $g_1, g_2 \in G$ için $M^{g_1} \cap M^{g_2} \triangleleft N$ ve böylece $M^{g_1} \cap M^{g_2} = 1$ veya $M^{g_1} = M^{g_2}$ dir. Öte yandan her $g \in G$ için M^g abelyan olmayan izomorfik sonlu basit grupların direkt çarpımı olduğundan $M^G = \text{Dr}_{i \in I} S_i$ dir. Burada her $i, j \in I$ için $S_i \cong S_j$ ve her S_i basit sonlu gruptur. G hemen hemen lokal çözülebilir olduğundan G nin öyle bir normal lokal çözülebilir S altgrubu vardır ki G/S sonludur. $1 \neq x \in M^G \cap S$ olsun. O zaman $1 \neq x_i \in S_i$ olmak üzere $x = x_1 x_2 \dots x_r$ şeklindedir. $S \triangleleft G$ olduğundan $x^{s_1 s_2 \dots s_r} \leq S$ dir. Öte yandan $x^{s_1 s_2 \dots s_r} = x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_r^{s_r} = S_1 S_2 \dots S_r \leq S$ dir ve S_i ler abelyan olmayan basit grup olduğundan S_i ler mükemmel gruplardır. Ayrıca S lokal çözülebilir olduğundan S_i ler çözülebilir olur ki bu bir çelişkidir. Böylece $x = 1$ dir, yani $M^G \cap S = 1$ dir. Bundan dolayı $M^G \cong M^G S / S$ sonludur.

Hem $M' = 1$ durumunda ve hem de $M' = M$ olması durumunda M^G sonludur. Bu ise $FC(G) = 1$ olmasıyla çelişir. Böylece G nin aşıkâr olmayan hipersonlu normal altgrubu yoktur.

FC-hipermerkez, hipersonlu olduğundan K -grup olma durumunda FC-hipermerkez ayrıca tek maksimal hipersonlu normal altgruptur. Bu altgruba, grubun hipersonlu radikali diyeceğiz.

Tanım 4.4. H ile hipersonlu K -grupların sınıfı ve $H(G)$ ile bir $G \in K$ nın hipersonlu radikali gösterilecektir.

Lemma 4.5. $G \in K$ olsun.

(1) Eğer $N \triangleleft G$ ise $H(N) \leq H(G)$

(2) $H(G/H(G)) = 1$ dir.

İspat.

(1). $G \in K$ olduğundan $H(G)$, G nin tek maksimal hipersonlu normal altgrubudur. $H(N)$ de hipersonlu olduğuna göre $H(N) \triangleleft G$ olduğunu göstermek yeter. $H(N) = FC^\infty(N)$ olduğundan $FC^\infty(N)$ char N olduğunu α üzerine indüksiyonla gösterelim. $\alpha=1$ için $FC(N)$ char N olduğunu biliyoruz. α limit ordinal değilse $\alpha-1$ vardır. $F_\alpha/F_{\alpha-1} = FC(N/F_{\alpha-1})$ char $N/F_{\alpha-1}$ dir. $FC_{\alpha-1}(N)$ char N olduğundan F_α char N dir.

α limit ordinal ise $F_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} F_\beta$ dir. $f \in \text{Aut}(N)$, $x \in F_\alpha$ olsun. O zaman $x \in F_\beta(N)$ olacak şekilde $\beta < \alpha$ vardır. $\beta < \alpha$ için F_β char N olduğundan $f(x) \in F_\beta$ ve buradan da $f(x) \in \bigcup_{\beta < \alpha} F_\beta$ elde edilir. Bundan dolayı $f(F_\alpha) \leq F_\alpha$ olup F_α char N dir. Böylece $H(N) = FC^\infty(N)$ char N dir. Öte yandan $N \triangleleft G$ olduğundan $H(N) \triangleleft G$ dir. Bu ise ispatı tamamlar. Çünkü $H(G)$ tek maksimal hipersonlu normal altgrup olduğundan $H(N) \leq H(G)$ dir.

(2). $H(G) = FC^\infty(G)$ ve $FC(G/FC^\infty(G)) = 1$ olduğundan $FC(G/H(G)) = 1$ dir ve böylece $H(G/H(G)) = 1$ olduğu görülür.

Lemma 4.6. $G \in K$ ve B , G nin baz altgrubu olsun. O zaman $H(G) \leq B$ dir.

İspat. F , G nin sonlu normal bir altgrubu olsun. F sonlu olduğundan kendisinin Sylow p -altgruplarının bir tam kümesi tarafından üretilir. Yani $F = \langle F_p : p \in \pi(F) \rangle$ dir. B , G nin baz altgrubu olduğundan Lemma 3.6 gereğince $B = \langle S_p : p \in \pi(B), S_p \in \text{Syl}_p(G) \rangle$ dir. Böylece $(F_p)^g \leq S_p$ olacak şekilde $g \in G$ vardır. $F \triangleleft G$ olduğundan $(F_p)^g \leq F$ dir. $(F_p)^g$, F nin Sylow p -altgrubu olduğundan

$$F = \langle (F_p)^g : p \in \pi(F) \rangle \leq \langle S_p : p \in \pi(F) \rangle \leq B$$

dir. Daha net olarak B , G nin her sonlu normal altgrubunu içerir. Öte yandan G nin FC - hipermerkezi, sonlu normal altgruplarının çarpımı olduğundan $FC(G) \leq B$ dir.

Şimdi α ordinali üzerine indüksiyonla $FC^\infty(G) \leq B$ olduğunu gösterelim. α limit ordinal değilse $\alpha-1$ vardır. İndüksiyon hipotezinden $FC_{\alpha-1}(G) \leq B$ dir. $FC_{\alpha-1}(G)$ yi N ile gösterelim. F/N , G/N nin sonlu normal altgrubu olsun. $F/N \leq B/N$ olduğunu göstermeliyiz.

$B = \langle S_p : p \in P, S_p \in \text{Syl}_p(G) \rangle$ ise $B/N = \langle S_p N/N : S_p N/N \in \text{Syl}_p(B/N) \rangle$ dir. F/N sonlu olduğundan kendi Sylow altgruplarının herhangi bir tam kümesi tarafından üretilir. O zaman F/N nin her p asal sayısı için bir Sylow p -alt grubunun B/N tarafından içerildiğini göstermek yeterlidir. F/N sayılabilir olduğundan F/N nin Sylow altgrupları $P \in \text{Syl}_p(F)$ olmak üzere PN/N şeklindedir. P , F nin Sylow p -alt grubu olduğundan $P \leq G_p$ olacak şekilde $G_p \in \text{Syl}_p(G)$ vardır. G_p ile S_p eşlenik olduğundan $G_p^g = S_p$ olacak şekilde $g \in G$ vardır. Böylece $P^g \leq S_p$ ise $P^g N/N \leq S_p N/N$ dir. Öte yandan $F/N \triangleleft G/N$ olduğundan $P^g N/N \leq F^g N/N = F/N$ olur. F/N sonlu olduğundan Sylow p -alt grupları eşleniktir ve dolayısıyla $P^g N/N$ de F/N nin bir Sylow p -alt grubudur. $P^g N/N \leq S_p N/N$ ise $P^g N/N \leq B/N$ dir ve böylece $F/N \leq B/N$ dir. B/N , G/N nin her sonlu normal altgrubunu içerdiğinden ilk paragraftan dolayı $FC(G/N) \leq B/N$ olur. $FC(G/N) = FC_\alpha(G)/N$ olduğundan $FC_\alpha(G) \leq B$ dir.

α limit ordinal ise $FC_\alpha(G) = \bigcup_{\beta < \alpha} FC_\beta(G)$ ve $FC_\beta(G) \leq B$ olduğundan $FC_\alpha(G) \leq B$ dir. Böylece $H(G) = FC^\infty(G) \leq B$ dir.

5. BAER'İN İDDİASININ İKİ FARKLI İSPATI

Bu bölümde, lokal çözülebilir durumda Belyaev'in ve lokal sonlu durumda Bell'in ispatladığı teorem üzerinde duracağız.

Teorem 5.1. G bir sayılabilir K -grup olsun. O zaman G nin bir öz baz alt grubunun var olması için gerek ve yeter şart G nin hipersonlu olmamasıdır.

Bu sonucun bir yönünün ispatı kolaydır. Şöyle ki: G nin bir öz baz alt grubu B olsun. Buna göre Lemma 4.6 dan dolayı $H(G) \leq B$ olduğundan G hipersonlu olamaz. Öte yandan teoremin diğer yönünün ispatı için önce Belyaev'in yaklaşımını inceleyeceğiz.

Lemma 5.2. H , lokal sonlu bir G grubunun sonlu bir alt grubu ve N , G nin normal bir K -alt grubu olsun. O zaman $|C_{G/N}(H) : C_G(H)N/N|$ sonludur.

İspat. π , $|H|$ nin asal bölenlerinin kümesi olsun. O zaman Teorem 3.3 den dolayı $N/O_\pi(N)$ Chernikovdur. Böylece ispat iki duruma indirgenir: Birincisi $N/O_\pi(N)=1$ ve ikincisi $N/O_\pi(N) \neq 1$ olması durumlarıdır. Birinci durumda $N = O_\pi(N)$ olacağından N bir π' -gruptur. Böylece Lemma 2.38 den dolayı $C_{G/N}(H) = C_G(H)N/N$ olduğundan $|C_{G/N}(H) : C_G(H)N/N|$ sonludur.

İkinci durum için önce $\bar{G} = G/O_\pi(N)$ olmak üzere $|C_{\bar{G}/\bar{N}}(\bar{H}) : C_{\bar{G}}(\bar{H})\bar{N}/\bar{N}|$ sonlu olduğunu göstermek yeterlidir. Çünkü bu indeks sonlu olduğu zaman $|C_{G/N}(H) : C_G(H)N/N|$ indeksinin de sonlu olacağı kolayca görülebilir.

Böylece N nin Chernikov olduğunu kabul edebiliriz. $C/N = C_{G/N}(H)$ olarak alalım. $L = HN$ ve $M = HC$ olsun. Bu durumda L Chernikovdur. Öte yandan $N \triangleleft G$ olduğundan $N \triangleleft HC$ dir ve $hc \in HC$, $h_1 \in H$ olmak üzere

$(hc)^{-1}h_1(hc) = c^{-1}h^{-1}h_1hc = h_2h_2^{-1}c^{-1}h_2c = h_2[h_2,c] \in HN$ dir. Burada $h_2=h^{-1}h_1h$ dir ve $[h_2,n] \in N$ olduğu aşıkardır. Bundan dolayı $HN \triangleleft HC$ yani $L \triangleleft M$ dir.

Şimdi $|M/LC_M(L)|$ sonlu olduğunu gösterelim. $m \in M$ olmak üzere eğer her $l \in L$ için $\varphi_m(l) = m^{-1}lm$ olarak tanımlanırsa o zaman φ_m , L nin bir otomorfizmasıdır. $\varphi : M \rightarrow \text{Aut}(L)$, her $m \in M$ için $\varphi(m) = \varphi_m$ olarak tanımlanırsa φ bir homomorfizma olur. $\theta: M/C_M(L) \rightarrow \text{Aut}(L)/\text{Inn}(L)$, $\theta(mC_M(L)) = \varphi_m \text{Inn}(L)$ olarak tanımlandığında bu bir homomorfizmadır. Şimdi $\text{Ker}\theta$ yı belirleyelim. $\text{Inn}(L) = K$ ile gösterelim. $mC_M(L) \in \text{Ker}\theta$ olsun. O zaman $\varphi_m \in K$ dir. Böylece $\varphi_m = \varphi_l$ olacak şekilde $l \in L$ vardır. Bundan dolayı her $l_1 \in L$ için $l_1 = l_1^{lm^{-1}}$ dir. O halde $lm^{-1} \in C_M(L)$ ve $m \in LC_M(L)$ dir. Buradan $\text{Ker}\theta = LC_M(L)/C_M(L)$ dir. $M/LC_M(L)$, $(M/LC_M(L)) / (LC_M(L)/C_M(L))$ ye izomorf olduğundan $M/LC_M(L)$, $\text{Out}(L) = \text{Aut}(L)/\text{Inn}(L)$ nin bir altgrubuna izomorfdur. Bu altgrup, $M/LC_M(L)$ periyodik olduğundan periyodiktir ve böylece Teorem 2.33 ten dolayı sonludur. Böylece $M/LC_M(L)$ sonludur. $C_G(H) \leq C \leq M = HC$ olduğundan $C_G(H) = C_M(H)$ dir. $H \leq L$ olduğundan $LC_M(L) \leq LC_M(H)$ olur. $|M: LC_M(L)|$ sonlu olduğundan $|M: LC_M(H)|$ sonludur. Yani $|HC: HNC_G(H)|$ sonludur. Buradan $|C: C_G(H)N|$ sonludur ve dolayısıyla $|C/N: C_G(H)N/N|$ sonludur. $C/N = C_{G/N}(H)$ yerine yazılırsa ispat tamamlanmış olur.

Lemma 5.3. A sonlu bir grup, $G \in K$ olsun ve A, G üzerine etki etsin.

- (i) Eğer $\pi(A) \cap \pi(G) = \emptyset$ ise $H(C_G(A)) = C_G(A) \cap H(G)$
- (ii) Her durumda eğer $C_G(A) \in H$ ise $G \in H$ dir.

İspat. (i) $H(G) \triangleleft G$ olduğundan $C_G(A) \cap H(G) \triangleleft C_G(A)$ ve böylece $C_G(A) \cap H(G) \leq H(C_G(A))$ olur.

Sylow altgrupları sonludur. Bunu şu şekilde gösterebiliriz: Lemma 3.3 gereğince G nin abelyan normal bir D altgrubu vardır öyle ki G/D nin Sylow altgrupları sonludur. P , D nin bir Sylow p -altgrubu olsun. P , Chernikov olduğundan ayrıca hipersonludur. Öte yandan $P \triangleleft D$ ve $D \triangleleft G$ olduğu için $P = H(P) \leq H(D) \leq H = 1$ ve böylece $P = 1$ elde edilir. D , Sylow p -altgruplarının direkt çarpımı olduğundan ([9], 4.1.1) $D = 1$ olur. Böylece $G/D \cong G$ elde edilir. Buradan G nin Sylow altgruplarının sonlu olduğu görülür.

Mümkünse $H(C) \neq 1$ olsun. O zaman C , aşikar olmayan sonlu normal bir M altgrubu içerir. π , $q \leq 2|MA|$ şartını sağlayan q asal sayılarının kümesi ve $P = O_\pi(G)$ olsun. Bu durumda Lemma 3.3 gereğince G/P Chernikov, dolayısıyla sayılabilir. Böylece G/P nin Sylow altgrupları; S , G nin Sylow altgrubu olmak üzere SP/P şeklindedir. Bundan dolayı SP/P de sonludur. G/P nin bölümlü kısmı K/P abelyan olduğundan Sylow altgruplarının direkt çarpımıdır. Ayrıca $K/P \cong C_{p_1} \times C_{p_2} \times \dots \times C_{p_n}$ olduğundan K/P sonlu tane Sylow altgruplarının direkt çarpımı olur. Dolayısıyla K/P sonlu olur. O halde sonlu bölümlü abelyan grup aşikar olduğundan $K/P = 1$ dir. Böylece G/P sonludur.

H , P nin bir sonlu üreteçli altgrubu olsun. G lokal sonlu olduğundan H sonlu, $2 \notin \pi'$ ve P bir π' -grup olduğundan Feit-Thompson Teoreminden dolayı H çözülebilirdir. Bundan dolayı P lokal çözülebilirdir. $C \cap P$, M yi normallediğinden, $P \triangleleft G$ olduğundan ve ayrıca P bir π' -grup olduğundan $[P \cap C, M] \leq P \cap M = 1$ elde edilir. Dolayısıyla $C_P(A) = P \cap C \leq C_P(M)$ ve böylece $C_P(A) = C_P(A \times M)$ olur. $A \times M$ bir π -grup olduğundan $\pi(A \times M) \cap \pi(P) = \emptyset$ ve [1], Teorem 3.3 ten $P_0 = [P, M]$ lokal nilpotent faktörlü sonlu seriye sahiptir. Eğer $P_0 \neq 1$ ise P_0 ın Hirsch-Plotkin radikali (tek maksimal normal lokal nilpotent altgrup) $K \neq 1$ dir. Böylece $O_p(K) \neq 1$ olacak şekilde bir p asal sayısı

vardır. $O_p(K) \text{char} K \triangleleft P_0$ olduğundan $O_p(K) \triangleleft P_0$ dir. Bu durumda $O_p(K) \leq O_p(P_0)$ olduğundan $O_p(P_0) \neq 1$ dir. $P_0 = [P, M] \triangleleft P \triangleleft G$, $O_p(P_0) \neq 1$ ve $O_p(P_0) \text{char} P_0$ olduğundan $O_p(P_0) \triangleleft P$ dir. Böylece $O_p(P) \neq 1$ dir. Benzer şekilde $O_p(G) \neq 1$ dir. $O_p(G)$, G nin bir Sylow p -altgrubu tarafından içerilir. G nin Sylow p -altgrupları sonlu olduğundan $O_p(G)$ sonludur. Böylece G aşıkâr olmayan sonlu normal bir p -altgrup içerir. Bu ise bir çelişkidir. Çünkü G nin aşıkâr olmayan sonlu altgrubu yoktur. Dolayısıyla $[P, M] = 1$ olmak zorundadır. Böylece $P \leq C_G(M)$ dir ve buradan hareketle $|G:N_G(M)| \leq |G:C_G(M)| \leq |G:P|$ olur ki $|G:P|$ indeksi sonlu olduğundan $|G:N_G(M)|$ indeksi de sonlu olur. $N_G(M)$ nin G içindeki sol koset temsilcileri $g_1, g_2, \dots, g_n$ olsun. $g \in G$ için $g = ng_i$ olacak şekilde $n \in N_G(M)$ vardır. Böylece $M^g = M^{ng_i} = M^{g_i}$ olur. $M^G = \langle M^{g_1}, M^{g_2}, \dots, M^{g_n} \rangle$ dir. M sonlu olduğundan her $i=1,2,\dots,n$ için M^{g_i} sonludur. Ayrıca G lokal sonlu olduğundan M^G sonludur. Bu ise $H(G)=1$ olmasıyla çelişir. Böylece $H(G)=1$ iken $H(C_G(A))=1$ olur. Bu sonucu kullanarak $H(G/H)=1$ olduğundan $H(C_{G/H}(A))=1$ olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca $1 = H(C_{G/H}(A)) = H(CH/H) \geq H(C)H/H$ dir. Yani $H(C)H/H=1$ olur ki buradan $H(C) \leq H$ elde edilir. Öte yandan $H(C) \leq C$ olduğunu da göz önünde bulundurursak $H(C) \leq H \cap C$ olacağından ispat tamamlanır.

(ii) Yine $C_G(A) = C$ ile gösterelim. Hipotez gereğince $C \in H$ dir. $\pi, p \leq 2|A|$ şartını sağlayan p asal sayılarının kümesi ve $P = O_{\pi'}(G)$ olsun. Teorem 3.3 ten dolayı G/P Chernikov grup olduğundan $P \in H$ olduğunu göstermek ispat için yeterlidir. Çünkü G/P Chernikov olduğundan hipersonludur ve ayrıca her p asal sayısı için p -altgrupları minimal şartını sağlar ve böylece Sonuç 4.2 den dolayı G hipersonlu olur.

$C_P(A) \leq C_G(A)$ olduğundan $H(C_P(A)) = C_P(A)$ dir. $\pi(A) \cap \pi(P) = \emptyset$ olduğundan

(i) yi uygularsak $C_P(A) = H(C_P(A)) = C_P(A) \cap H(P)$ ve buradan $C_P(A) \leq H(P)$ elde edilir. $H(P) = H$ ile gösterelim. Lemma 2.65 den dolayı $C_{P/H}(A) = C_P(A)H/H$

dir. Böylece $C_P(A)H/H=1$ olduğundan $C_{P/H}(A) = 1$ elde edilir. Bundan sonra [1] Teorem 3.3 ten $E=1$ alınarak P/H nin lokal nilpotent faktörlü sonlu seriye sahip olduğu çıkar. Bu serinin bir faktörü N/M olsun. O zaman N/M lokal nilpotenttir. Dolayısıyla N/M nin Sylow altgrupları Chernikov olduğundan N/M hipersonludur. Böylece min-p yi sağlayan hipersonlu grupların sınıfı genişleme kapalı olduğundan P/H hipersonlu olur. Yani $H(P/H) = P/H$ dir. Lemma 4.5 ten dolayı $H(P/H)=1$ olduğundan $H=P$ dir. Yani P hipersonludur.

Lemma 5.4. $G \in K$ ve H , G nin sonlu bir altgrubu olsun. $C_G(H)$ yi C ile gösterelim. X , G nin H -altgruplarının bir kümesi olsun öyle ki her $X \in X$ için

- (i) $H \leq N_G(X)$
- (ii) X, C nin sonlu indeksli bir altgrubu tarafından normallenir.

şartlarını sağlasın. O zaman $\langle X : X \in X \rangle \in H$ olur.

Sonuç 5.5. G ve H , Lemma 5.4 teki gruplar olsun. O zaman H ve $C_G(H)$ tarafından normallenen G nin H -altgrupları arasında bir tek maksimal olanı vardır ki o, bu tip altgrupların bileşimidir.

Lemma 5.4 ün ispatı. $L = \langle X : X \in X \rangle$ olsun. $G = LH$ olduğunu kabul edebiliriz. $H(G)$ yi J ile gösterelim. $X \in X$ ise $F \leq N_G(X)$ olacak şekilde $F \leq C$ vardır ve $|C : F|$ sonludur. Böylece $FJ/J \leq N_{G/J}(XJ/J)$ ve $|CJ/J : FJ/J|$ sonludur. $C_{G/J}(HJ/J) = C_{G/J}(H)$ ve ayrıca Lemma 5.4 ten $|C_{G/J}(H) : CJ/J|$ sonlu olduğundan $|C_{G/J}(HJ/J) : FJ/J|$ indeksi sonlu olur. Bundan dolayı LJ/J , HJ/J yardımıyla oluşturulan G/J nin bir altgrubu tarafından içerilir, yani $Y = \{ Y/J : Y/J \in H \}$ ve her $Y/J \in Y$ için

- (i) $HJ/J \leq N_G(Y/J)$
- (ii) $Y/J, C_{G/J}(HJ/J)$ nin sonlu indeksli bir altgrubu tarafından normallenir.

Böylece $LJ/J = \langle X : X \in X \rangle J / J \leq \langle Y/J : Y/J \in Y \rangle = K$ dır. Eğer $K \in H$ ise $LJ/J \in H$ dir ve buradan $L \in H$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla $J=1$ olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda eğer $C_L(H) \in H$ olduğunu gösterirsek Lemma 5.3 (ii) den dolayı $L \in H$ olur ki bu da ispatı tamamlar.

$C_L(H)$ yı D ile gösterelim. $X \in X$ ve $x \in X$ olsun. $|D:C_D(x)|$ indeksinin sonlu olduğunu iddia ediyoruz. Bunu göstermek için E , D nin X i normalleyen sonlu indeksli normal bir altgrubu olsun. Böyle bir E altgrubunu bulmak mümkündür. Çünkü hipotezden C nin X i normalleyen bir T altgrubu vardır ve $|C:T|$ sonludur. Buradan $|C \cap D:T \cap D| = |D:T \cap D|$ indeksi sonlu olur. Böylece $\text{Core}_D(T \cap D) = E$ olarak alabiliriz. Çünkü $|D:E|$ sonludur ve $E \triangleleft D$ dir. $\langle X, H, E \rangle = M$, $\pi = \pi(H)$ ve $P = O_\pi(L)$ olsun. O zaman $P \text{ char } L \triangleleft G$ olduğundan $P \triangleleft G$ dir. Buradan $H(P) \leq H(G) = 1$ ise $H(P) = 1$ elde edilir. Lemma 5.3 gereğince $H(C_P(H)) = C_P(H) \cap H(P)$ olduğu için $H(C_P(H)) = 1$ dir. Böylece $H(D)$ sonludur. Şimdi bunu gösterelim: $L \triangleleft G$ olduğundan $H(L) \leq H(G) = 1$ ve dolayısıyla $|L:P|$ sonludur. Bu indeksin sonlu olması $|D:C_P(H)| = |L \cap D:P \cap D|$ indeksinin de sonlu olmasını gerektirir. Öte yandan $DP/P \cong D/C_P(H)$ izomorfizmasından dolayı DP/P sonlu ve böylece bunun altgrubu olan $H(D)P/P$ sonludur. Ayrıca $H(D)P/P \cong H(D)/(P \cap H(D))$ izomorfizması ile

$$P \cap H(D) = H(D) \cap C_P(H) \leq H(C_P(H)) = 1$$

olduğu da gözönünde bulundurulursa $H(D)P/P \cong H(D)$ elde edilir ve buradan $H(D)$ nin sonlu olduğu görülür. $E \leq N_G(X)$ olduğundan $E \cap X \triangleleft E$ ve $E \cap X = H(E \cap X) \leq H(E) \leq H(D)$ olduğundan $E \cap X$ sonludur.

$$E \leq D \cap M \leq C \cap M = C_M(H)$$

dır ve her biri bir sonrakinde sonlu indekslidir. Çünkü $|D:E|$ sonlu olduğundan $|D \cap M:E| = |D \cap M:E \cap M|$ sonludur. Ayrıca $G/L \cong HL/L \cong H/(H \cap L)$ ve H sonlu

olduğundan G/L sonludur. Dolayısıyla $|G \cap (C \cap M) : L \cap (C \cap M)|$ sonlu ve buradan $|C \cap M : D \cap M|$ sonlu olur. $E_1 = C_E(x)$ olsun. $|C_M(H) : E|$ indeksi sonlu olduğundan $C_M(H)$ ve E nin $C_M(x)$ ile kesişimi olan $|C_M(\langle H, x \rangle) : E_1|$ indeksi sonludur. $X \langle H, x \rangle = XH \triangleleft M$ dir. $C_{M/X}(\langle H, x \rangle) = M/X$ dir. Çünkü $H \leq N_G(X)$ olduğundan $[H, \langle H, x \rangle] \leq XH$ ve $[X, \langle H, x \rangle] \leq X$ dir ve ayrıca $E \leq N_G(X)$ ve $E \leq C_L(H)$ olduğundan $[E, \langle H, x \rangle] \leq X$ dir. Böylece $[M, \langle H, x \rangle] \leq XH$ olur ki buradan $C_{M/XH}(\langle H, x \rangle) = M/XH$ elde edilir. Bu ve Lemma 5.2 $|M/XH : C_M(\langle H, x \rangle)XH/XH|$ indeksinin sonlu olduğunu gösterir. Bu indeks k olsun. H sonlu olduğundan $|M/X : C_M(\langle H, x \rangle)X/X|$ indeksi en fazla $k|H|$ olur ve böylece bu indeks de sonludur. Buradan hareketle $|M : C_M(\langle H, x \rangle)X|$ indeksinin sonlu olduğu kolayca görülür. Ayrıca $|C_M(\langle H, x \rangle) : E_1|$ sonlu olduğundan $|C_M(\langle H, x \rangle)X : E_1X|$ sonludur. Böylece $|M : E_1X|$ indeksinin ve buna bağlı olarak $|EX : E_1X|$ indeksinin sonlu olduğu elde edilir. Dolayısıyla $|EX \cap E : E_1X \cap E| = |E : E_1(X \cap E)|$ sonludur ve $|E : E_1| = |E : E_1(X \cap E)| \cdot |E_1(X \cap E) : E_1|$ eşitliği de göz önünde bulundurulursa $|E : E_1|$ indeksi sonlu olduğu görülür. E nin seçiminden $|D : E|$ indeksi sonlu olduğundan $|D : E_1|$ sonlu olduğu elde edilir. $|D : C_D(x)| \leq |D : C_E(x)|$ eşitsizliğinden $|D : C_D(x)|$ indeksinin sonlu olduğu sonucuna ulaşırız. $g \in L$ ise $1 \leq i \leq k$ için $x_i \in X_i$ olmak üzere $g = x_1 x_2 \dots x_k$ dır. $\cap C_D(x_i) \leq C_D(g)$ ve Lemma 2.36 den dolayı $|D : C_D(g)|$ sonlu olur. $D \leq L$ olduğundan D bir FC-gruptur ve böylece $D \in H$ olduğu elde edilir.

X , hipersonlu grupların sınıfı olmak üzere Teorem 5.4 teki L aslında Tanım 2.61 de verilen $\theta(H) = \langle X \leq G \mid X \in X, \langle H, C_G(H) \rangle \leq N_G(X) \rangle$ dir. Teorem 5.4 te H sonlu olmak üzere $\theta(H) \in X$ olduğu gösterilmiştir. Bundan dolayı Tanım 2.61' e göre θ sonlu tamdır. Böylece aşağıdaki sonuç, Teorem 5.1' in bir yönünün ispatını verir.

Teorem 5.6. θ , sayılabilir lokal sonlu bir G grubunda sonlu tam ve $\theta(G) \neq G$ olsun. O zaman her $g \in G \setminus \theta(G)$ için $g \notin \phi(G)$ olacak şekilde G nin bir lokal iç endomorfizması ϕ vardır. Yani G co-Hopfian değildir.

İspat. G , sayılabilir lokal sonlu grup olduğundan $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ olacak şekilde G nin

$$G_1 \leq G_2 \leq \dots$$

sonlu altgrupları vardır. $x_{i+1}x_i^{-1} \in C_G(G_i)$, her $i \geq 1$ için $g \notin \theta(G_i^{x_i})$ şartlarını sağlayan G nin $\{x_1, x_2, \dots\}$ altkümesini inşa edelim. Lemma 2.62 (4) den dolayı

$$\theta(G) = \text{Core}_G \theta(G_1) = \bigcap_{x \in G} \theta(G_1)^x$$

dir. $g \notin \theta(G)$ olduğundan $g \notin \theta(G_1)^{x_1}$ olacak şekilde $x_1 \in G$ vardır. $x_1, x_2, \dots, x_n$, yukarıdaki gibi inşa edilmiş olsun. Lemma 2.63 den dolayı

$$\bigcap \{ \theta(G_{n+1}^{x_n})^c : c \in C_G(G_n^{x_n}) \} \leq \theta(G_n^{x_n})$$

dir. İndüksiyon hipotezinden $g \notin \theta(G_n^{x_n})$ dir ve böylece $g \notin \theta(G_{n+1}^{x_n})^{c_n}$ olacak şekilde $c_n \in C_G(G_n^{x_n})$ vardır. $x_{n+1} = x_n c_n$ olsun. O zaman

$$x_{n+1}x_n^{-1} \in x_n C_G(G_n^{x_n}) x_n^{-1} = C_G(G_n)$$

dir.

Şimdi $\phi: G \rightarrow G$ lokal iç endomorfizmasını $h \in G_i$ için $\phi(h) = x_i^{-1} h x_i$ ile tanımlayalım. $h \in G_i$ olduğundan ayrıca $h \in G_{i+1}$ dir. Böylece her i için $x_{i+1}x_i^{-1} \in C_G(G_i)$ olduğundan $x_{i+1}x_i^{-1} h = h x_{i+1}x_i^{-1}$ dir. Buradan $x_i^{-1} h x_i = x_{i+1}^{-1} h x_{i+1}$

dir. Yani ϕ iyi tanımlıdır. ϕ nin lokal iç endomorfizma olduğunu göstermek için $\{g_1, \dots, g_n\}$ alalım. Bu durumda $\{g_1, \dots, g_n\} \subseteq G_k$ olacak şekilde bir $k \geq 1$ doğal sayısı vardır. Dolayısıyla her $i = 1, 2, \dots, n$ için $\phi(g_i) = g_i^{x_k}$ dir. Öte yandan eğer $g \in \phi(G)$ ise $g = \phi(h)$ olacak şekilde $h \in G_i$ vardır. $g = x_i^{-1} h x_i$ ve $g \in G_i^{x_i} \leq \theta(G_i^{x_i})$ dir. Bu ise x_i nin inşası ile çelişir. Yani $g \notin \phi(G)$ dir.

Bu kısımdan itibaren L , sonlu çözülebilir bir grup olmak üzere H, L üzerine etki eden bir sonlu grup olsun.

Bu kısımdan itibaren Bell' in aynı probleme yaklaşımını özetleyeceğiz.

Aşağıdaki iki lemma Schur-Zassenhaus teoreminin sonuçlarıdır ve teoremlerin ispatlarında kullanılmaktadır.

Lemma 5.7. $A \triangleleft G$, $B \leq G$ ve $(|A|, |B|) = 1$ olmak üzere $G = AB$ sonlu bir grup olsun. Kabul edelim ki G bir Ω kümesi üzerine etki etsin ve A, Ω üzerinde geçişli olsun. O zaman B, Ω nın bir noktasını dengeler.

Lemma 5.8. A ve B bir X grubunun sonlu alt grupları, $(|A|, |B|) = 1$ ve A nın X içindeki Ax koseti B tarafından normallensin. O zaman $Ax \cap C_X(B)$ boştan farklıdır.

Şimdi de Turull'un bazı lemmalarını verelim.

Bu kısımdan itibaren L , sonlu çözülebilir bir grup olmak üzere H, L üzerine etki eden bir sonlu grup olsun.

Lemma 5.9. L_0, L nin H -invariant alt grubu olsun. O zaman H nin LH/L_0H koset uzayına sağdan etkisi H nin $E_1 x \dots x E_m$ çarpımının üzerine eşlenikleme etkisine izomorftur. Burada herbir E_i , $L/\text{Core}_L(L_0)$ ın bir H -invariant elemanter abelyan kesimidir.

Lemma 5.10. A bir sonlu grup olsun.

- (i) $p > |A|$ bir asal sayı ve V bir basit $F_p A$ -modül ise $C_A(v) = C_A(V)$ olacak şekilde $v \in V$ vardır. Başka bir deyişle $A/C_A(V)$, V üzerinde bir regüler yörüngeye sahiptir.
- (ii) $p > 2|A|$ olsun. A ekstra özel p -grup, P ye sadık olarak etki etsin ve P nin merkezi $Z(P)$ yi merkezleyen bir etki olsun. Kabul edelim ki M bir sadık CPA -modül olsun. O zaman $M|_A$ regüler A -modül içerir.

Lemma 5.11. Kabul edelim ki LH bir Ω kümesi üzerine L geçişli etki etsin ve $|L|$ yi bölen her p asal sayısı $|H|$ den büyük olsun. O zaman $H/C_H(\Omega)$, Ω üzerinde bir regüler yörüngeye sahiptir.

Tanım 5.12. Kabul edelim ki her $1 \leq i \leq h$ tamsayısı için L nin H -invariant bir $\hat{P}_i$ p_i -altgrubu verilsin. Eğer aşağıdaki üç şart sağlanıyorsa altgrupların bu koleksiyonuna, L içinde yüksekliği h olan bir H -kulesi denir.

- (1) Eğer $i < j$ ise $\hat{P}_i, \hat{P}_j$ yi normaller. Böylece L nin $L_i = \hat{P}_1 \dots \hat{P}_i$ altgrubunu tanımlayabiliriz.
- (2) $P_h = \hat{P}_h$, $i=1, \dots, h-1$ için $N_i = C_{\hat{P}_i}(P_{i+1})$, $P_i = \hat{P}_i / N_i$ ve her $i=1, \dots, h$ için P_i aşıkardır.
- (3) Eğer $p_i, |\hat{P}_i|$ yi bölen bir asal sayı ise o zaman $1 \leq i \leq h-1$ için $p_i \neq p_{i+1}$ dir.

Her $i \neq j$ için $\hat{P}_i \cap \hat{P}_j = 1$ olmak zorunda değildir. Bununla birlikte aşağıda göz önüne alacağımız kulelerde L_i nin $L_{i-1}/C_{L_{i-1}}(P_i / \phi P_i) \rtimes P_i / \phi P_i$ ye H -izomorfik olan bir bölüm grubu vardır.

Burada kuleler için

(4) $h = h(L)$ dir. Burada $h(L)$, L nin Fitting uzunluğudur.

$K \triangleleft H$ olsun bizim inşa edeceğimiz kulenin aşağıdaki dört şartı da sağlamasına ihtiyacımız var.

$$(5) [\hat{P}_1, K] = \hat{P}_1$$

(6) Eğer p_i tek sayı ise her bir P_i üssü p_i olan bir özel gruptur.

(7) $2 \leq i \leq h$ için eğer $P_{i-1}, \phi P_i$ yi merkezliyor ise K da ϕP_1 i merkezler.

(8) Eğer $\hat{P} \leq \hat{P}_i$ olmak üzere H ve L_{i-1} tarafından normalleniyor ise o zaman ya

$\hat{P} = \hat{P}_i$ ya da $\hat{P}$ nın P_i içindeki görüntüsü ϕP_i tarafından içerilir (böylece $P_i/\phi P_i$ bir basit $F_{p_i} L_{i-1} H$ -modül olur).

Lemma 5.13. Eğer $h([K, L]) = h(L)$ ise o zaman (1)-(5) şartlarını sağlayan kule seçmek mümkündür.

Aşağıda $P_0 = K$ olarak alalım.

Lemma 5.14. L, H ve K Lemma 5.12 deki gibi olsun. $(\hat{P}_i)$, elemanları (1)-(5) özelliklerini sağlayacak şekilde minimal mertebeli elemanlara sahip olan bir H -kule olsun. O zaman (6)-(8) sağlanır.

Yukarıda olduğu gibi L, H ve K grupları verilsin ve (1)-(8) şartlarını sağlayan bir $L = (\hat{P}_i)_{1 \leq i \leq h}$ kulesini göz önüne alalım. $V_i = P_i / \phi P_i$ ($1 \leq i \leq h$ için) olsun. Burada V_i bir basit $F_{p_i} L_{i-1} H$ -modüldür.

Tanım 5.15. $2 \leq i \leq h$ için $C_i = C_H(P_{i-1}/C_{P_{i-1}}(W_i))$ olacak şekilde V_i nin bir L_{i-1} homojen bileşeni W_i (yani $F_{p_i} L_{i-1}$ -modül ve homojen bileşen) varsa $C_i \in C_i(L)$ denir. Ayrıca $C_1(L) = \{H\}$ ve $C_{h+1}(L) = \{\{1\}\}$ olarak alalım.

Eğer W_i yukarıdaki gibi bir homojen bileşen ve C_i yukarıdaki gibi ise C_i ve W_i bağıdaşıktır (bu, birebir eşleme olmak zorunda değil).

Lemma 5.16. $3 \leq i \leq h$ için $C_i \in C_i(L)$, $C_{i-1} \in C_{i-1}(L)$ in bir altgrubu ile eşleniktir.

Lemma 5.17. $i \geq 2$ ve C_i, W_i yukarıdaki gibi olsun. S, W_i nin H içindeki dengeleyeni olsun.

- a) Eğer $C_i = C_{i+1}$ ise o zaman C_i, W_i yi merkezler.
- b) W_i nin P_{i-1} -homojen bileşenlerinin uzayı Ω olsun. S bu küme üzerinde permütasyon etkisi yapar. $C_S(\Omega) = D$ ve $U \in \Omega$ olsun. O zaman P_{i-1} in U üzerindeki etkisinin D içindeki merkezleyeni C_i dir.

Tanım 5.18. A bir sonlu grup ve $B < A$ olsun. A nın altgruplarının

$$B = C_0 < C_1 < \dots < C_l = A$$

zinciri vardır. Bu şekildeki zincirlerin en büyük uzunluğu $l, l(A:B)$ ile gösterilir. $l(A:1)$ için $l(A)$ kullanılır.

H, K ve L yukarıdaki gibi olsun. (1)-(3) ve (5)-(8) şartlarını sağlayan bir kule seçilebilir.

Lemma 5.19. Eğer $p, |L|$ yi bölen bir asal sayı ise $p > 2|H|$ olsun. Kabul edelim ki $h > l(H)$ olsun. O zaman öyle bir $i \geq 2$ vardır ki V_i , aşikar C_i -modülü ($C_i \in C_i(L)$) yardımıyla elde edilen bir F_p H -altmodül içerir.

Teorem 5.20. L, H ve K Lemma 5.18 in hipotezlerini sağlasın. Ayrıca K, H nin, tümleyeni E olan Hall altgrubu olsun. O zaman L nin öyle H -invariant altgrupları $P_0 < P$ vardır ki P/P_0 basit bir H -modüldür. Bundan başka öyle bir $v \in P/P_0$ vardır ki $E \leq C_H(v) < H$ dir.

Lemma 5.21. G bir grup olsun. Kabul edelim ki $1 = H_0 < H_1 < \dots$ birleşimleri G yi veren G nin altgrupları olsun. $n \geq 1$ için H_n, H_{n+1} in bir altgrubu P_n yi normallesin ve P_n, H_{n-1} i merkezleyen bir t_n elemanı içersin. $n \geq 1$ için $N_n = C_{P_n}(t_{n+1})$ olsun. Kabul edelim ki $C_{H_n}(t_n) = N_{H_n}(N_n t_n)$ olsun. Eğer $\phi: G \rightarrow G, b_n = t_n \dots t_2 t_1$ olmak üzere $g \in H_n$ için $\phi(g) = g^{b_n}$ olarak tanımlanırsa o zaman ϕ bir lokal iç endomorfizmadır. Bundan başka $\phi(G) \cap H_n = C_{H_n}(t_n)^{b_{n-1}}$ dir. Böylece eğer bir H_n, t_n yi merkezlemiyor ise ϕ örten değildir.

İspat. Eğer $g \in H_n$ ise her $i > n$ için $g \in H_i$ dir. Fakat her $i > n$ için t_i H_n yi merkezlediğinden $g^{t_i t_{i-1} \dots t_1} = g^{t_n \dots t_2 t_1}$ dir. Bundan dolayı ϕ iyi tanımlıdır. Ayrıca $H_n N_n = H_n C_{P_n}(t_{n+1}) = C_{H_n P_n}(t_{n+1})$ dir. H_n, P_n yi normallediğinden ve t_{n+1} i merkezlediğinden H_n, N_n yi normaller. Önce

$$H_n \cap (H_n N_n)^{t_n} = C_{H_n}(t_n)$$

olduğunu göstermeliyiz. Açıkça

$$C_{H_n}(t_n) \leq H_n \cap (H_n N_n)^{t_n}$$

dir. $g \in H_n \cap (H_n N_n)^{t_n}$ olsun. $g^{t_n^{-1}} \in H_n N_n$ dir ve böylece

$$g^{-1} g^{t_n^{-1}} \in H_n N_n \cap P_n = C_{P_n}(t_{n+1}) = N_n$$

olur. Bu sebeple $g \in N_{H_n}(N_n t_n) = C_{H_n}(t_n)$ olur.

Öte yandan $C_{H_n}(t_n) = C_{H_n}(t_n)^{t_n} \leq H_n^{t_n}$ olduğundan $C_{H_n}(t_n) \leq H_n^{t_n} \cap H_n$ ve $H_n^{t_n} \cap H_n \leq (H_n N_n)^{t_n} \cap H_n = C_{H_n}(t_n)$ dan dolayı

$$(*) \quad C_{H_n}(t_n) = H_n^{t_n} \cap H_n$$

olur.

$n \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
 \phi(H_{n+1}) \cap H_n &= \phi(H_{n+1}) \cap H_{n+1} \cap H_n \\
 &= H_{n+1}^{t_{n+1}^{b_n}} \cap H_{n+1}^{t_{n+1}^{b_n}} \cap H_n & (b_n \in H_{n+1}) \\
 &= [C_{H_{n+1}}(t_{n+1})]^{b_n} \cap H_n & (*) \text{ dan} \\
 &= C_{H_{n+1}}(t_{n+1})^{b_n} \cap (P_n H_n)^{b_n} \cap H_n & (b_n \in P_n H_n) \\
 &= C_{P_n H_n}(t_{n+1})^{b_n} \cap H_n \\
 &= ((H_n N_n)^{t_n} \cap H_n)^{b_{n-1}} & (H_n N_n = C_{P_n H_n}(t_{n+1})) \\
 &= C_{H_n}(t_n)^{b_{n-1}}
 \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca (*) denklemi bize $\phi(H_n) \cap H_n = C_{H_n}(t_n)^{b_{n-1}}$ olduğunu da gösterir. Tümevarım ve $\phi(H_{i+1}) \cap H_i = \phi(H_i) \cap H_i$ eşitliğini kullanarak her $m \geq n$ için $\phi(H_m) \cap H_n = \phi(H_n) \cap H_n$ yi elde ederiz.

$$\phi(G) \cap H_n = \phi\left(\bigcup_{m \geq n} H_m\right) \cap H_n = \bigcup_{m \geq n} (\phi(H_m) \cap H_n) = \phi(H_n) \cap H_n = C_{H_n}(t_n)^{b_{n-1}}$$

olması ispatı tamamlar.

Teorem 5.1'in ispatı. [14], Sonuç 2.6 dan dolayı aşağıdakileri göstermek ispat için yeterlidir: Eğer G , sonlu aşıkâr olmayan bir normal altgruba sahip olmayan sayılabilir sonsuz K -grup ve g , G nin birimden farklı bir elemanı ise o zaman G nin g yi içermeyen öyle bir H altgrubu vardır ki $H \cong G$ dir. O halde biz bu hipotezin sağlandığını kabul edebiliriz.

G nin hiçbir sonlu F altgrubu G nin sonlu indeksli bir altgrubunu merkezlemez. Çünkü aksi takdirde $\{ h^g : h \in F, g \in G \}$ bir sonlu kümedir ve F, G nin bir sonlu normal altgrubunu üretir. Ayrıca G nin aşikar olmayan sonlu normal altgrup içeren bir altnormal altgrubu N yoktur. Çünkü τ asal sayıların sonlu bir kümesi olmak üzere $O_\tau(N) > 1$ ise $O_\tau(G) > 1$ dir. Böylece eğer N sonsuz ve lokal çözülebilir ise o zaman N nin sonlu altgrupları sınırsız Fitting uzunluğuna sahiptir. G nin yukarıdaki özelliklerini kullanarak eğer sonlu altgruplar sınırlı Fitting uzunluğuna sahip ise o zaman N nin aynı sınıra sahip olduğu ve böylece N nin bir sonlu aşikar olmayan normal altgruba sahip olduğu gösterilebilir.

Şimdi π, G lokal p -çözülebilir olmayacak şekildeki asal sayıların kümesi olsun. $1 \neq g \in G$ olmak üzere $G = \{ g, g_1, g_2, \dots \}$ şeklinde yazılabilir. F, G nin sonlu altgrubu olmak üzere $\sigma(F), \pi$ de olmayan ve $2|F|$ den büyük veya eşit olan asal sayıların kümesi olsun. Teorem 3.3 den G residually sonludur. Böylece G nin $\sigma(F)$ -elemanlar içeren en geniş normal altgrubu $O_{\sigma(F)}(G)$ dir ve $O_{\sigma(F)}(G), G$ içinde sonlu indekslidir. $L(F) = O_{\sigma(F)}(G)$ yazalım.

$n \geq 1$ olmak üzere G nin H_n ve P_n sonlu altgrupları ve $t_n \in P_n$ elemanlarını aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

- (i) $H_1 = \langle g_1 \rangle$ ve $H_n = \langle g_n, H_{n-1}, P_{n-1} \rangle$
- (ii) P_n, H_n tarafından normallenen bir p -altgrubu olsun ve $(|H_n|, |P_n|) = 1$ olsun.
- (iii) $P_n/\phi P_n$ eşlenikleme ile $Z_p H_n$ -modül olarak basittir.
- (iv) t_1, g_1 i merkezlemesin ve $n \geq 2$ için $H_{n-1} \leq C_{H_{n-1}P_{n-1}}(t_n) \leq H_{n-1}\phi P_{n-1}$
- (v) $C_{H_n}(t_n) = N_{H_n}(\phi P_n t_n)$

Kabul edelim ki H_n seçilmiş olsun. $n \geq 2$ için P_n ve t_n nin nasıl seçileceğini gösterelim. $L(H_n)$ nin $h([F, P_{n-1}]) \geq l(H_{n-1}P_{n-1})+1$ şartını sağlayacak şekilde bir H -invariant F altgrubu bulunabilir. p_n bir asal sayı ve P bir p_n -grup olmak üzere Teorem 2.20 den dolayı F nin bir $H_{n-1}P_{n-1}$ -invariant ve -basit olan bir P/P_0 kesimini ve $H_{n-1} \leq C_{H_{n-1}P_{n-1}}(v) < H_{n-1}P_{n-1}$ şartını sağlayan $v \in P/P_0$ bulunabilir.

Q , F nin H_n tarafından normallenen bir Sylow p_n -altgrubu olsun. O zaman Q nun P/P_0 a izomorf olan $H_{n-1}P_{n-1}$ -invariant kesimi vardır. Böylece Q nun $H_{n-1}P_{n-1}$ e kısıtlaması P/P_0 a izomorf bir altmodül içeren H_n -chief faktör M vardır. P_n , Q nun M yi bir chief faktör olarak içermeye göre minimal olan bir H_n -invariant altgrubu olsun. Böylece $P_n/\phi P_n \cong M$ dir. M nin tanımından dolayı $H_{n-1} \leq C_{H_{n-1}P_{n-1}}(m) < H_{n-1}P_{n-1}$ olacak şekilde $m \in P_n/\phi P_n$ vardır. $(|P_n|, |H_n|) = 1$ olduğundan öyle bir $t_n \in m$ vardır öyle ki $C_{H_n}(t_n) = C_{H_n}(m)$ ve

$$H_{n-1} \leq C_{H_{n-1}P_{n-1}}(m) < H_{n-1}\phi P_{n-1}$$

veya denk olarak $P_{n-1}/\phi P_{n-1}$ basit olduğu için

$$H_{n-1} \leq C_{H_{n-1}P_{n-1}}(t_n) < H_{n-1}\phi P_{n-1}$$

dir. Buradan P_1 ve t_1 in seçilmesi daha kolaydır.

$g_n \in H_n$ olduğundan H_n lerin birleşimi G ye eşittir. Ayrıca $C_{P_n}(t_{n+1}), \{1\}$ ve ϕP_n arasındadır. Böylece (iv) ve (v) den H_i, P_i ve t_i lemmanın şartlarını sağlar. Buradan $G^\phi \cap H_1 = C_{H_1}(t_1)$ dir. Sonuç olarak $g_1 \notin G^\phi$ dir.

KAYNAKLAR

1. Hartley, B., **Locally finite groups whose Sylow subgroups are Chernikov**, Infinite groups 1994 (Ravello), 87-101, de Gruyter Berlin, 1996.
2. Dixon, M. R., **Sylow Theory, Formations and Fitting Classes in Locally Finite Groups**, World Scientific, 1994.
3. Dixon, M. R., Tomkinson, M. J., **The local conjugacy of some Sylow bases in a class of locally finite groups**, J. London Math. Soc., (2), 21, 1980, 225-228.
4. Dixon, M. R., **Locally inner endomorphisms of SF-groups**, Algebra and Logic, 27, 1988, 1-11.
5. Bell, S. D., **Uncountable locally finite groups with Chernikov Sylow subgroups.**, Preprint 1993/15, Manchester Centre for Pure Mathematics, 1993.
6. Gorenstien, D., **Finite Groups**, Harper and Row, New York, 1968.
7. Kegel, O. H., Wehrfritz, B. A. F., **Locally Finite Groups**, North Holland, Amsterdam, 1980.
8. Robinson, D. J. S., **Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups**, Part 1, Springer, Berlin, 1972.
9. Robinson, D. J. S., **A Course in the Theory of Groups**, Springer-Verlag, New York, 1982.
10. Rose, J. S., **A Course on Group Theory**, Cambridge, University Press, 1978.

11. Yalıncaklıoğlu, A. **Hall Higman Tipi Teoremler**, G.Ü.F.B.E., Yüksek Lisans Tezi, 1990.
12. Hungerford, T. W., **Algebra**, Springer-Verlag, New York, 1974.
13. N. Massey, **Locally finite groups with min-p for all p. I**, J. London Math. Soc., (2) ,12, 1975, 7-14.
14. N. Massey, **Locally finite groups with min-p for all p. II**, J. London Math. Soc., (2) ,12, 1975, 15-23.



ÖZGEÇMİŞ

Yasemin KIYMAZ 1974 yılında Edirne'nin Keşan ilçesinde doğdu. İlk öğrenimini Van Atatürk İlkokulunda, orta öğrenimini Ankara Akşemsettin Ortaokulu, lise öğrenimini ise Ankara Dikmen Lisesinde tamamladı. Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi Bölümünden 1997 yılında mezun oldu. Aynı sene, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Yüksek Lisans eğitimine başladı. 1997-1999 yılları arasında Ankara ili Ayaş ilçesi Oltan İlköğretim Okulunda Matematik Öğretmeni olarak çalıştı. 1999 yılında Gazi Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesine Öğretim Görevlisi olarak atandı. Halen Gazi Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesindeki görevine devam etmektedir.