

T.C.
KIRKLARELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SYLVESTER KUATERNİYON MATRİS DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN BİR
BLOK GMRES YÖNTEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Neslihan BEKTAŞOĞLU

NİSAN - 2024

T.C.
KIRKLARELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SYLVESTER KUATERNİYON MATRİS DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN
BİR BLOK GMRES YÖNTEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Neslihan BEKTAŞOĞLU

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Sinem ŞİMŞEK MENGİ

Nisan – 2024

“Sylvester Kuaterniyon Matris Denkleminin Çözümü için Bir Blok GMRES Yöntemi” adlı tez çalışması adlı tez çalışması **Neslihan BEKTAŞOĞLU** tarafından hazırlanmış olup aşağıdaki jüri tarafından **OY BİRLİĞİ** ile Kırklareli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı:

Dr. Öğr. Üyesi Sinem ŞİMŞEK MENGİ
Kırklareli Üniversitesi

.....

Jüri Üyeleri:

Dr. Öğr. Üyesi Özlem KIRCI
Kırklareli Üniversitesi

.....

Dr. Öğr. Üyesi Tuğba DEMİRKOL
Sakarya Üniversitesi

.....

Tez Savunma Tarihi: 17/04/2024

.....

Doç. Dr. Hasibe Hale KARAYER
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Kırkırelı Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez ve Proje Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum bilgileri, verileri ve dokümanları, değişik sonuç verebilecek şekilde araştırma araç gereçleri kullanmadan, işlem veya kayıt sonuçlarını değiştirmeden akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Neslihan BEKTAŞOĞLU
17/04/2024

ÖZET

SYLVESTER KUATERNİYON MATRİS DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN BİR BLOK GMRES YÖNTEMİ

Neslihan BEKTAŞOĞLU

Yüksek Lisans Tezi

Kırklareli Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Sinem ŞİMŞEK MENGİ

Nisan 2024, 33 sayfa

Tezde, $A \in \mathbb{H}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{H}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{H}^{m \times n}$ ve $m \gg n$ olmak üzere $AX - XB = C$ Sylvester kuaterniyon matris denkleminin çözümünün elde edilmesi amaçlanmıştır. Kuaterniyon sayılarının çarpma işlemine göre değişme özelliği olmadığından, Sylvester kuaterniyon matris denklemini, kuaterniyon matrislerin kompleks matris gösterimlerinden faydalanılarak, Sylvester kompleks matris denklemine dönüştürülmüştür. Elde edilen kompleks matris denkleminin büyük boyutlu ve $m \gg n$ olduğu dikkate alınarak çözümü için Krylov alt uzay yöntemlerinden biri olan blok GMRES yöntemi kullanılmıştır. Böylece, dönüşüm sonucunda oluşturulan kompleks matris denklemine nazaran daha küçük boyutlu bir kompleks matris denklemini elde edilmiş ve denklemin çözümü iteratif olarak bulunmuştur. Elde edilen kompleks çözüm matrisi, başlangıçta ele alınan Sylvester kuaterniyon matris denkleminin çözümünün kompleks gösterim matrisidir. Son olarak, kompleks çözüm matrisine karşılık gelen kuaterniyon matris yazılarak, $AX - XB = C$ Sylvester kuaterniyon matris denkleminin çözümü elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sylvester kuaterniyon matris denklemini, kompleks matris gösterimi, blok Arnoldi yöntemi, blok GMRES yöntemi.

ABSTRACT

A BLOCK GMRES METHOD FOR THE SOLUTION OF THE SYLVESTER QUATERNION MATRIX EQUATION

Neslihan BEKTAŞOĞLU

MSc Thesis

Kirklareli University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Sinem ŞİMŞEK MENĐİ

April 2024, 33 pages

In this thesis work, we aim to obtain the solution of the Sylvester quaternion matrix equation $AX - XB = C$, where $A \in \mathbb{H}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{H}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{H}^{m \times n}$ and m is very large such that $m \gg n$. One difficulty in solving such an equation is that quaternion scalars are not commutative under multiplication. To overcome this difficulty, we exploit the complex matrix representations of quaternion matrices, and, consequently, turn the quaternion matrix equation into a complex matrix equation. By taking into account the fact that the resulting complex matrix equation involve large matrices, and $m \gg n$, we tailor a block GMRES method, that makes use of certain Krylov subspaces. As the proposed block GMRES method operates on small Krylov subspaces, it requires the solution of small complex matrix equations. The Krylov subspaces are expanded and the small complex matrix equations are refined iteratively. In the end, our GMRES approach yields the complex representation of the solution of the Sylvester quaternion matrix equation at hand. In the final step of our approach, this complex matrix representation is converted into the corresponding quaternion matrix leading to the solution of the quaternion matrix equation $AX - XB = C$.

Keywords: Sylvester quaternion matrix equation, complex matrix representation, block Arnoldi process, block GMRES method.

TEŞEKKÜR

Öncelikle tezimin konusunun seçiminde ve yazım sürecinde yanımda olup bilgi ve her türlü desteğini benden esirgemeyen Dr. Öğr. Üyesi Sinem ŞİMŞEK MENGİ hocama sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Yüksek lisans yaptığım süre boyunca matematiğe gönül vermiş annem Nilüfer BEKTAŞOĞLU, babam Bilgihan BEKTAŞOĞLU ve kardeşim Batuhan Emre BEKTAŞOĞLU'na bana maddi ve manevi her türlü imkânı sağlayıp yanımda oldukları için teşekkür ederim.

Aynı zamanda tezim için bilgi ve desteğini esirgemeyen Arş. Gör. Gökay KARABACAK hocama da teşekkürlerimi sunuyorum.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	viii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	x
1. GİRİŞ.....	1
2. TANIMLAR VE TEMEL KAVRAMLAR.....	5
2.1. Temel Kavramlar	5
2.2. İç Çarpım ve Norm	6
2.3. Lineer Bağımsızlık, Gram-Schmidt Yöntemi	7
2.4. QR Ayrışımı.....	8
3. GENELLEŞTİRİLMİŞ MİNİMUM KALAN YÖNTEMİ	11
3.1. Arnoldi İterasyonu	11
3.2. Genelleştirilmiş Minimum Kalan Yöntemi	13
4. KUATERNİYON SYLVESTER MATRİS DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ	15
4.1. Kuaterniyonların Kompleks Matris Temsili	17
4.2. Problemin İfadesi ve Çözümü.....	19
4.3. Problemin Çözümü	20
4.4. Sayısal Örnekler.....	24
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	27
KAYNAKLAR.....	29
ÖZGEÇMİŞ	HATA! YER İŞARETİ TANIMLANMAMIŞ.

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge 2.1 QR Ayrışımı	10
Çizelge 3.1. Arnoldi İterasyonu.....	12
Çizelge 4.1 Blok Arnoldi İterasyonu.....	21



ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil 4.1 $\|\widetilde{R}_k\|_F$ matrislerinin normunun değişim grafiği. 25



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{H}$	Kuaterniyon sayılar kümesi
$\mathbb{R}^{m \times n}$	$m \times n$ boyutlu reel matrisler kümesi
$\mathbb{C}^{m \times n}$	$m \times n$ boyutlu kompleks matrisler kümesi
$\mathbb{H}^{m \times n}$	$m \times n$ boyutlu kuaterniyon matrisler kümesi
A^T	Bir A matrisinin transpozu
$\bar{A}$	Bir A matrisinin eşleniği
A^*	Bir A matrisinin eşlenik transpozu
$\text{iz}(\cdot)$	Bir kare matrisin izi
$\text{rank}(\cdot)$	Bir matrisin rankı
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	İç çarpım
$\ \cdot\ _2$	2-norm
$\ \cdot\ _F$	Frobenius norm
■	İspat sonu

Kısaltmalar

Açıklamalar

GMRES	Genelleştirilmiş minimum kalan yöntemi
-------	--

1. GİRİŞ

Reel hayattaki birçok olayı açıklamak için kullanılan matematiksel araçlardan biri matris denklemleridir. Mühendislik, ekonomi, istatistik, fizik gibi birçok disiplinde karşımıza çıkan problemler, lineer veya lineer olmayan türden matris denklemi biçiminde ifade edilebilir. Çalışmanın konusu olan Sylvester matris denklemi ise A , B ve C uygun boyutlu bilinenler matrisler ve X uygun boyutlu bilinmeyenler matrisi olmak üzere

$$AX - XB = C \quad (1.1)$$

şeklinde tanımlı lineer matris denklemdir. (1.1) matris denkleminin homojen hali ilk defa J.J. Sylvester tarafından 1884 yılında tanıtılmıştır [1]. $B = A^T$ ve $C = C^T$ olması durumunda ise (1.1) denklemine Lyapunov matris denklemi denir [2].

Sylvester ve Lyapunov matris denklemleri kontrol teori [3,4], model indirgeme [5,6], görüntü düzeltme [7,8], adi diferansiyel denklemlerin çözümü [9], genelleştirilmiş özdeğer problemleri [10] gibi birçok alanda ortaya çıkmaktadır.

Genel olarak, (1.1) matris denklemlerinin çözümlerini bulmak için kullanılan doğrudan veya iteratif yöntemler A ve B matrislerinin boyutuna bağlıdır. Lyapunov denklemi, Sylvester denkleminin özel bir durumu olduğundan, Sylvester denklemi için kullanılan çözüm yöntemleri Lyapunov denklemine de uygulanabilir [11]. Katsayı matrislerinin boyutları en fazla birkaç yüz olduğunda, problemin boyutu küçük veya orta olarak adlandırılır. Bu problemler için en etkin yöntem Bartels ve Stewart tarafından önerilmiştir [12]. Bartels ve Stewart tarafından önerilen yöntem, Sylvester matris denklemini, katsayı matrislerinin Schur ayrışımından yararlanarak daha basit bir forma dönüştürüp, geri yerine koyma yöntemi ile çözmeye dayanmaktadır. Katsayı matrislerinin boyutlarının her ikisinin de küçük olduğu ancak birinin diğerinden önemli ölçüde daha küçük olduğu durumlarda, Golub ve ark. daha büyük boyutlu katsayı matrisinin Hessenberg ayrışımı ile Bartels ve Stewart algoritmasının bir çeşidini sunmuşlardır [13]. Bu yöntemlere alternatif olarak, Sylvester matris denklemi, Kronecker çarpım ve vec operatörü yardımıyla lineer sistem biçiminde yazılabilir. Daha sonra elde edilen lineer sistemin çözümü kısmi pivotlu LU ayrışımı, ardından yerine koyma yöntemi ile kolaylıkla bulunabilir. Gerçek dünyada

karşılaştığımız problemleri temsil eden matris denklemleri genellikle büyük boyutludur. Bu tür problemlerin çözümünde yaygın olarak kullanılan teknikler değişen yönlü kapalı iterasyon (ADI) ve iz düşüm yöntemleridir [14-25]. Bir iz düşüm yöntemi olan Krylov alt uzay yöntemleri büyük ve seyrek problemlere uygulanır. Özellikle, reel veya kompleks cisimler üzerinde tanımlı büyük boyutlu Sylvester matris denklemleri için, blok ve global Krylov alt uzay yöntemleri literatürde dikkat çekmiştir. Bu algoritmaların arkasındaki ana fikir, başlangıç kalan matrisini blok Krylov alt uzayı veya matris Krylov alt uzayı üzerine yansıtmaktır [15-25].

Reel ve kompleks sayıların daha genel bir hali olan kuaterniyon sayıları 1843 yılında W.R. Hamilton tarafından ortaya atılmıştır. Kuaterniyonların kümesi

$$\mathbb{H} = \{a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \mid i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

biçiminde tanımlıdır [26]. i, j, k birimlerinin çarpması göz önüne alındığında $\mathbb{H}$ kümesinde çarpma işleminin değişme özelliği olmadığı görülmektedir. Bu sebeple kuaterniyonlar yarı cisim olarak adlandırılır. $\mathbb{H}$ kümesi toplama ve skalarla çarpma işlemleriyle birlikte reel sayılar üzerinde 4-boyutlu ve kompleks sayılar üzerinde 2-boyutlu bir vektör uzaydır [26,27]. Kuaterniyonların bilgisayar bilimleri, sinyal ve renkli görüntü işleme, kuantum mekaniği gibi alanlarda uygulamaları bulunmaktadır [26,27]. Bu alanlardaki uygulamalardan hareketle, kuaterniyonlar yarı cismi üzerinde matris denklemlerinin çözümlerinin elde edilmesi problemi son zamanlarda dikkat çekmektedir. Kuaterniyon sayılarının çarpma işlemine göre değişmeli olmaması, kuaterniyon matris denklemlerin çözümünü bulma problemini reel veya kompleks matris denklemlerin çözümünü bulma problemine kıyasla zorlaştırır. Bu zorlukların üstesinden gelebilmek amacı ile geliştirilen çözüm yöntemlerinden bazıları şu şekildedir. Kuaterniyon matris denklemleri, kuaterniyonlar için tanımlı Kronecker çarpım ile lineer denklemler sistemine dönüştürülerek Moore-Penrose ters yardımı ile çözülebilir [28-34]. Bir diğer yöntem ise matris denklemini sağ kuaterniyon vektör uzayı veya sol kuaterniyon vektör uzayında çözmektir [35-37]. Son zamanlarda dikkat çeken başka bir yöntem ise kuaterniyon matris denklemini, kuaterniyon matrislerin reel veya kompleks gösterimlerinden yararlanarak reel veya kompleks matris denklemine dönüştürmektir. Böylece öncelikle elde edilen reel yada kompleks matris denkleminin çözümü bulunur ve daha sonra başlangıçtaki kuaterniyon matris denkleminin çözümü ise yapılan dönüşümünden yararlanarak geri dönük yazılabilir [38-40]

Bu çalışmada ise $A \in \mathbb{H}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{H}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{H}^{m \times n}$ seyrek matrisler (matrisin 0 elemanlarının sayısı fazla) ve $m \gg n$ olmak üzere $AX - XB = C$ Sylvester kuaterniyon matris denklemi ele alınacaktır. Literatürde Sylvester kuaterniyon matris denkleminin çözümünü bulma problemini farklı yöntemler ile ele alan çalışmalara mevcuttur [29-36]. Tezde ele alınan (1.1) matris denklemindeki matrisler, seyrek ve boyutları büyük olduğundan denklemin çözümü için iteratif yöntemlerden biri tercih edilecektir. Öncelikle, (1.1) Sylvester kuaterniyon matris denklemini, kuaterniyon matrislerin kompleks gösteriminden faydalanarak, Sylvester kompleks matris denklemine dönüştüreceğiz. Bu dönüşüm sonunda elde ettiğimiz Sylvester kompleks matris denklemindeki matrislerin boyutları, (1.1) matris denklemindeki matrislerin boyutlarına göre iki kat artmaktadır. Buna ilaveten $m \gg n$ olduğu da göz önüne alırsa, Sylvester kompleks denklemin çözümü, Krylov alt uzay yöntemlerinden biri olan blok GMRES yöntemi ile bulunacaktır. Sylvester kompleks matris denklemini, Sylvester operatör yardımı ile tekrar ifade edeceğiz. Blok Arnoldi yöntemini, Sylvester operatörüne ve başlangıç kalan matrisine uygulayarak k boyutlu (k iterasyon sayısı) Krylov alt uzayı oluşturacağız. Daha sonra oluşturulan k boyutlu Krylov uzayında Sylvester kompleks matris denkleminin çözümünü blok GMRES yöntemi ile arayacağız. Elde edilen kompleks çözüm matrisi başlangıçtaki Sylvester kuaterniyon matris denkleminin çözümünün kompleks gösterim matrisidir. Kompleks gösterim matrisinden yararlanarak oluşturduğumuz kuaterniyon matris ise istenilen çözüm matrisidir. Son olarak ise çalışmada ele alınan yöntemin doğruluğunu ve elverişliliğini göstermek amacı ile bir sayısal örnek ve verilen örnekteki kalan matrislerin normlarının değişim grafiği verilecektir.



2. TANIMLAR VE TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, bir sonraki bölümlerde zemin oluşturacak temel kavram ve ifadelere yer verilecektir.

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1 a_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, sayılarının m satır ve n sütun şeklindeki dikdörtgensel bir dizisine $m \times n$ boyutlu bir matris denir. Bu matris $A = [a_{ij}]$ ile gösterilir.

a_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, sayılarına A matrisinin elemanları denir. Bir A matrisi, elemanlarının alındığı (yarı)-cisime göre isimlendirilir. Örneğin, elemanları reel sayılardan oluşan matrise reel matris, elemanları kompleks sayılardan oluşan matrise kompleks matris, elemanları kuaterniyon sayılarından oluşan matrise kuaterniyon matris denir [41].

Tanım 2.2 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$ olsun.

- i. A matrisinin devriği ij . elemanı a_{ji} olan $n \times m$ matristir ve A^T ile gösterilir.
- ii. $z = c + di$ kompleks sayısının eşleniği $\bar{z} = c - di$ olmak üzere, A matrisinin eşleniği $\bar{A}$ ile gösterilir ve $\bar{A} = [\bar{a}_{ij}]$ olarak tanımlanır. Benzer şekilde, A matrisinin eşleniği A^* ile gösterilir ve $A^* = \bar{A}^T = \overline{A^T}$ olarak tanımlanır [41].

Şimdi çalışmada gerekli olan bazı özel tipli matrislerin tanıtalım.

Tanım 2.3 Bir $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisi için,

- i. $A^* = A$ ise A matrisine Hermityen matris,
- ii. $A^*A = I$ ($A^T A = I$) ise A matrisine üniter (ortogonal) matris,
- iii. $A^*A = AA^*$ ise A matrisine normal matris denir.
- iv. $\forall i > j + 1$ için $a_{ij} = 0$ ise A matrisine üst Hessenberg matris denir.

v. $\forall i > j$ için $a_{ij} = 0$ ise A matrisine üst üçgensel matris denir.

vi. $\forall i \neq j$ için $a_{ij} = 0$ ise A matrisine köşegen matris denir [41].

Tanım 2.4 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ olsun. A matrisinin izi $\text{iz}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ şeklinde tanımlanır [41].

Tanım 2.5 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ve $B \in \mathbb{C}^{p \times q}$ keyfi iki matris olsun. Bu durumda A matrisinin B matrisi ile Kronecker çarpımı $A \otimes B$ ile gösterilen

$$\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

$mp \times nq$ boyutlu matristir [41].

Tanım 2.6 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$ matrisi için *vec*-operatörü

$$\text{vec}(A) = [a_{11} \ a_{21} \ \dots \ a_{m1} \ a_{12} \ a_{22} \ \dots \ a_{m2} \ \dots \ a_{1n} \ a_{2n} \ \dots \ a_{mn}]^T$$

olarak tanımlanır [41].

Tanım 2.7 A, B ve C uygun boyutlu kompleks matrisler olmak üzere

$$\text{vec}(ABC) = (C^T \otimes A)\text{vec}(B)$$

eşitliği vardır [41].

2.2. İç Çarpım ve Norm

Tanım 2.8 $V, \mathbb{F}(\mathbb{R} \text{ veya } \mathbb{C})$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ fonksiyonuna V üzerinde bir iç çarpım, $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ikilisine de bir iç çarpım uzay denir.

i. $\forall u \in V$ için $\langle u, u \rangle \geq 0$ ve $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$,

ii. $\forall u, v \in V$ için $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$,

iii. $\forall u \in V$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{F}$ için $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$,

iv. $\forall u, v, w \in V$ için $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

n boyutlu kompleks vektör uzayında standart iç çarpım $\forall u, v \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ için

$$\langle u, v \rangle = v^* u = \sum_{i=1}^n u_i \bar{v}_i,$$

$m \times n$ boyutlu kompleks vektör uzayında standart iç çarpım ise $\forall A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ için

$$\langle A, B \rangle = \text{iz}(B^* A)$$

şeklinde tanımlıdır [41].

Tanım 2.9 $V, \mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Her $u, v \in V$ ve her $\lambda \in \mathbb{F}$ için, $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu,

- i. $\|u\| \geq 0$
- ii. $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$
- iii. $\|cu\| = |c|\|u\|$
- iv. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

aksiyomlarını sağlıyor ise $\|\cdot\|$ fonksiyonuna V vektör uzayı üzerinde bir norm ve $(V, \|\cdot\|)$ ikilisine normlu uzay denir.

$\mathbb{C}^{n \times 1}$ vektör uzayındaki bir u vektörünün 2-normu $\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |u_i|^2}$, $\mathbb{C}^{m \times n}$ vektör uzayında bir A matrisinin Frobenius normu $\|A\|_F = \sqrt{\text{iz}(A^* A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$ biçiminde tanımlıdır [41].

2.3. Lineer Bağımsızlık, Gram-Schmidt Yöntemi

Tanım 2.10 V bir vektör uzayı olmak üzere $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ vektörlerinden oluşan küme $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ olsun. $c_i, i = 1, 2, \dots, m$ keyfi sabitler olmak üzere $v_i, i = 1, 2, \dots, m$ vektörlerinin lineer kombinasyonu $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_m v_m$ biçiminde ifade edilir. Eğer $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_m v_m = 0$ eşitliğini sağlayan $\exists c_i = 0, i = 1, 2, \dots, m$ varsa S kümesine lineer bağımlı küme, aksi halde lineer bağımsız küme denir [41].

Tanım 2.11 V bir vektör uzayı olmak üzere $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ vektörlerinden oluşan küme $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ ve $W \subset V$ bir alt uzay olsun. $\forall w \in W$ için $w = \sum_{i=1}^m c_i v_i$ olacak şekilde $c_i, i = 1, 2, \dots, m$ sayıları bulunabiliyorsa S kümesi W alt uzayını gerer (üretir)

denir ve $\text{span}S$ ile gösterilir. S kümesi lineer bağımsız bir küme ise S kümesine W alt uzayının bir bazı denir [41].

Tanım 2.12 V bir iç çarpım uzayı olsun. $u, v \in V$ için $\langle u, v \rangle = 0$ ise u ve v vektörlerine ortogonal vektörler denir. Ortogonal vektörlerin oluşturduğu kümeye ise ortogonal küme denir. Eğer ortogonal bir S kümesinde her vektörün normu 1 ise S kümesi ortonormal küme denir [41].

Tanım 2.13 Bir $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ matrisi için $\text{range}(A) = \{Ax | x \in \mathbb{C}^{n \times 1}\} \subset \mathbb{C}^{m \times 1}$ kümesine A matrisinin bir sütun uzayı denir [41].

Tanım 2.14 Bir $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ matrisinin sütun uzayının boyutu A matrisinin *rankı* olarak adlandırılır ve $\text{rank}(A)$ ile gösterilir [41].

Şimdi lineer bağımsız bir kümeden ortonormal küme elde etme işlemi olan Gram-Schmidt yöntemini verelim.

Tanım 2.15 V sonlu boyutlu bir iç çarpım uzayı olmak üzere $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ kümesi V iç çarpım uzayının bir bazı olsun. V iç çarpım uzayı için

$$\text{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} = \text{span}\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$$

olacak şekilde ortonormal $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ bazı aşağıdaki şekilde hesaplanır [41].

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|_2}$$

$$\beta_j = \frac{\alpha_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle \alpha_j, \beta_i \rangle}{\langle \beta_i, \beta_i \rangle} \beta_i}{\left\| \alpha_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle \alpha_j, \beta_i \rangle}{\langle \beta_i, \beta_i \rangle} \beta_i \right\|_2}, j = 2, \dots, n$$

eşitlikleriyle belirlenir.

2.4. QR Ayırışımı

Şimdi lineer sistemlerin çözümünde kullanışlı bir araç olan QR ayrışımından bahsedelim.

Tanım 2.16 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ sütunları lineer bağımsız matris ve $m > n$ olsun. Bu durumda

$$A = \hat{Q} \hat{R}$$

olacak şekilde sütunları ortonormal $\widehat{Q} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ matrisi ve $r_{jj} \neq 0, j = 1, \dots, n$ olacak şekilde üst üçgensel $\widehat{R} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisi vardır. Bu ayrışımı $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ matrisinin indirgenmiş QR ayrışımı denir. $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ matrisinin tam QR ayrışımı ise $Q \in \mathbb{C}^{m \times m}$ üniter matris ve $R \in \mathbb{C}^{n \times n}$ üst üçgensel matris olmak üzere

$$A = Q \begin{bmatrix} R \\ 0_{(m-n) \times n} \end{bmatrix}$$

ile verilir [42].

Şimdi QR ayrışımından bir lineer sistem çözümünde nasıl yararlanıldığını açıklayalım. $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ olmak üzere $Ax = b$ lineer sistemini göz önüne alalım. $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ matrisinin indirgenmiş QR ayrışımı $Ax = b$ lineer sisteminde yerine yazılsın. Bu durumda $\widehat{Q}^* \widehat{Q} = I$ ve $g := \widehat{Q}^* b$ olmak üzere $\widehat{R}x = g$ üst üçgensel lineer sistemi elde edilir. $\widehat{R}x = g$ lineer sistemi ise geriye yerine koyma yöntemi ile kolaylıkla çözülebilir. Dolayısıyla $\widehat{R}x = g$ lineer sisteminden elde edilen çözüm, $Ax = b$ lineer sisteminin çözümüdür. Burada, eğer $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ise x vektörü lineer sistemin çözümü, eğer $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ise x vektörü lineer sistemin en küçük kareler çözümüdür. $Ax = b$ lineer sistemi çözümünde $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ matrisinin tam QR ayrışımı göz önüne alınırsa da benzer şekilde ilerlenir.

Bir matrisin QR ayrışımı; Gram-Schmidt yöntemi, Householder yansıtıcıları ve Givens rotasyonlarla hesaplanabilir. Bilgisayar ortamında yapılacak hesaplamalarda Householder yansıtıcıları ve Givens rotasyonlarla QR ayrışımı yapmak, Gram-Schmidt yöntemi ile QR ayrışımı yapmaya göre daha istikrarlı sonuçlar verir [12,37]. Householder yansıtıcıları matrisin bir sütunundaki bir eleman hariç diğerlerinin hepsini birden sıfır yapabilirken, Givens rotasyonları sütundaki elemanları teker teker sıfır yapar. Bu açıdan Householder yansıtıcıları, Givens rotasyonlara nazaran daha büyük ölçekli matrislerde kullanılır. Bu çalışmada ise QR ayrışımının Householder yansıtıcılar ile hesaplanmasına değineceğiz.

Householder yansıtıcı matrisler ile bir matrisin üçgensel forma nasıl geldiğini açıklamak

için temsili olarak 5×3 boyutlu $A = \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix}$ şeklinde temsili bir matris alalım.

A matrisini soldan Householder yansıtıcı matrisleri ile çarpalım

$$\begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix} \xrightarrow{Q_1} \begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & x & x \end{bmatrix} \xrightarrow{Q_2} \begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} \xrightarrow{Q_3} \begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$A^{(2)} \qquad A^{(3)} \qquad A^{(4)}$

Görüldüğü bir $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ matrisi üçgensel forma getirmek için n tane $Q_1, \dots, Q_n$ Householder yansıtıcı matrisine ihtiyaç vardır. Burada, $v^{(j)} = A^{(j)}(j:m, j) - \|A^{(j)}(j:m, j)\|_2 e_1$ olmak üzere $Q_j = I_m - \frac{2v^{(j)}(v^{(j)})^*}{(v^{(j)})^* v^{(j)}}$ şeklindedir [42]. Şimdi, $m > n$ olmak üzere $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ matrisinin QR ayrışımını Householder yansıtıcılar ile hesaplayan algoritmayı verelim.

Çizelge 2.1 QR Ayrışımı

$A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $m > n$ giriniz.

$k = 1, \dots, n$ için

$$v^{(k)} := A(k:m, k)$$

$$u^{(k)} := \frac{v^{(k)} - \|v^{(k)}\|_2 e_1}{\|v^{(k)} - \|v^{(k)}\|_2 e_1\|_2} \text{ için}$$

$$A(k:m, k:n) := A(k:m, k:n) - 2u^{(k)} \left((u^{(k)})^* A(k:m, k:n) \right)$$

Bitir.

Algoritma sonunda $R \in \mathbb{C}^{n \times n}$ üçgensel matris olmak üzere $\begin{bmatrix} R \\ 0_{(m-n) \times n} \end{bmatrix}$ matrisi elde edilir.

Ek olarak yukarıdaki algoritmanın adımları $Q_n \dots Q_2 Q_1 A = R$ şeklinde yazılabilir. Yani, Q_j , $j = 1, \dots, n$ matrislerinin simetrik olduğu göz önünde bulundurularak, $A = QR$ elde edilir, öyle ki burada $Q \in \mathbb{C}^{m \times m}$ üniter bir matris ve $Q = Q_1 Q_2 \dots Q_n$ biçimindedir.

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ MİNİMUM KALAN YÖNTEMİ

Bu bölümde öncelikle ortonormal bir baz oluşturma yöntemi olan Arnoldi iterasyonu, daha sonra ise bir lineer sistemin çözümünü iteratif olarak hesaplayan GMRES yöntemi verilecektir.

3.1. Arnoldi İterasyonu

Öncelikle, sıklıkla bahsedeceğimiz Krylov dizisi, Krylov alt uzayı ve Krylov matrisi tanımlarını verelim.

Tanım 3.1 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ve $0 \neq b \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ olmak üzere

- $\{b, Ab, A^2b, \dots, A^{j-1}b\}$ şeklinde oluşturulan diziye bir Krylov dizisi,
- $\mathcal{K}_j = \text{span}\{b, Ab, A^2b, \dots, A^{j-1}b\}$ uzayına j boyutlu bir Krylov alt uzayı,
- $\mathcal{K}_{n \times j} = [b \quad Ab \quad A^2b \quad \dots \quad A^{j-1}b]$ matrisine bir Krylov matrisi

denir.

Walter Edwin Arnoldi tarafından 1951 senesinde yoğun elemanlı (sıfır elemanı fazla olmayan) bir matrisi Hessenberg forma dönüştürmek amacı ile verilen Arnoldi iterasyonu daha sonraki yıllarda büyük boyutlu bir matrisin özdeğerlerini hesapmak için elverişli bir algoritma olarak literatürde yerini almıştır. Bunun yanı sıra Arnoldi iterasyonu, Krylov alt uzayının bir ortonormal bazını oluşturmak için de kullanılmaktadır. Algoritmanın her adımında bir önceki adımda hesaplanan Arnoldi vektörünün A katsayılar matrisi ile çarpılması sonucu elde edilen yeni vektörü, önceki adımlarda oluşturulan vektörlere Gram-Schmidt yöntemi ile dikleştirme fikri yatar. Öncelikle, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ve $0 \neq b \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ olmak üzere $\mathcal{K}_j$, $j = 1, 2, \dots, k$ uzayı için ortonormal bir $\{q_1, \dots, q_j\}$ bazını Gram-Schmidt yöntemini ile üreten Arnoldi iterasyonunun algoritmasını verelim.

Çizelge 3.1. Arnoldi İterasyonu

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $0 \neq b \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ giriniz.

$$q_1 := \frac{b}{\|b\|_2}$$

$j = 1, \dots, k$ için

$$v := Aq_j$$

$l = 1, \dots, j$ için

$$h_{lj} := \langle v, q_l \rangle$$

$$v := v - h_{lj}q_l$$

Bitir.

$$h_{(j+1)j} := \|v\|_2$$

$$q_{j+1} := \frac{v}{h_{(j+1)j}}$$

Bitir.

Geri döndür.

Algoritmayı detaylı olarak inceleyelim. Krylov uzayının bazının ilk elemanı $q_1 = \frac{b}{\|b\|_2} \in \mathcal{K}_1$ olmak üzere,

$$Aq_1 = h_{11}q_1 + h_{21}q_2 \in \mathcal{K}_2$$

$$Aq_2 = h_{12}q_1 + h_{22}q_2 + h_{32}q_3 \in \mathcal{K}_3$$

$\vdots$

$$Aq_{k-1} = h_{1(k-1)}q_1 + h_{2(k-1)}q_2 + \dots + h_{k(k-1)}q_k \in \mathcal{K}_k$$

$$Aq_k = h_{1k}q_1 + h_{2k}q_2 + \dots + h_{kk}q_k + h_{(k+1)k}q_{k+1} \in \mathcal{K}_{k+1}$$

şeklinde. Dikkat edilirse her iterasyonda baza yeni bir yön eklenmektedir. Dolayısıyla Krylov uzayları arasında $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2 \subseteq \dots$ ilişkisi vardır. Yukarıda ifade edilen yinelemeli bağıntılardan $i = 1, 2, \dots, k+1$, $j = 1, 2, \dots, k$ için eğer $i > j$ ise $h_{ij} = \langle Aq_j, q_i \rangle = \langle Aq_j, q_i \rangle - \sum_{n=1}^j h_{nj}q_n$, eğer $i \leq j$ ise $h_{ij} = \langle Aq_i, q_j \rangle$ olduğu açıktır ve

$$A[q_1 \ q_2 \ \dots \ q_k] = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_{k+1}] \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1k} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2k} \\ 0 & h_{32} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & h_{kk} \\ 0 & \dots & 0 & h_{k+1,k} \end{bmatrix}$$

eşitliği yazılabilir. Dolayısıyla $Q_k := [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_k]$, $Q_{k+1} := [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_{k+1}]$ sırasıyla $n \times k$ ve $n \times (k+1)$ boyutlu ortonormal matrisler ve $H_k := [h_{ij}]$, $i = 1, \dots, k+1$, $j = 1, \dots, k$ matrisi ise $(k+1) \times k$ boyutlu üst Hessenberg matris olmak üzere

$$AQ_k = Q_{k+1}H_k$$

yazılabilir. Böylece Çizelge 3.1. ile verilen algoritma Q_k ve Q_{k+1} matrislerinin sütunları olarak ifade edilen $\{q_1, q_2, \dots, q_k\}$ ve $\{q_1, q_2, \dots, q_{k+1}\}$ ortonormal bazları oluşturur.

Şimdi $Ax = b$ biçiminde verilen lineer sistemin çözümünü GMRES yöntemi ile arayalım.

3.2. Genelleştirilmiş Minimum Kalan Yöntemi

Krylov alt uzay yöntemlerinden biri olan genelleştirilmiş minimum kalan (GMRES) yöntemi, $Ax = b$ lineer sisteminin çözümü için Yousef Saad ve Martin H. Schultz tarafından 1986 yılında ileri sürülmüştür. Benzer problemlerin çözümünde kullanılan CGNR (kalanı minimumlaştırmak için normal denklemlerine uygulanan Eşlenik Gradyan yöntem) ve CGNE (hatayı minimumlaştırmak için normal denklemlerine uygulanan Eşlenik Gradyan yöntem) yöntemlerinden farklı olarak GMRES yöntemi iki matris vektör çarpımı yerine bir matris vektör çarpımı gerektirdiğinden hesaplama maliyeti açısından elverişli bir yöntemdir. Ayrıca GMRES yöntemini uygulamak için $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisinin özel yapılı (simetrik, pozitif tanımlı vb.) olması gerekmez. Katsayılar matrisinin tersinir olması yeterlidir. $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tersinir matris olmak üzere $Ax = b$ lineer sisteminin tam çözümü $\hat{x} = A^{-1}b$ şeklinde ifade edilir. Başlangıç vektörü x_0 olmak üzere A matrisi ve $r_0 = b - Ax_0$ vektörü ile oluşturulan k boyutlu Krylov uzayı $\mathcal{K}_k := \text{span}\{r_0, Ar_0, \dots, A^{k-1}r_0\}$ olsun. GMRES yöntemi her iterasyonda kalan vektörünün normunu minimum yapan yaklaşık çözümü bulmak için bir en küçük kareler problemi çözer. Örneğin k . adımda elde edilen $x_k \in x_0 + \mathcal{K}_k$ çözümü $r_k = b - Ax_k$ kalan vektörünün normunu minimumlaştırır. Başlangıç kalan vektörü r_0 ve $q = \frac{r_0}{\|r_0\|_2}$ olmak üzere Arnoldi yöntemi ile k boyutlu Krylov uzayı için oluşturulan ortonormal bir baz $\{q, Aq, \dots, A^{k-1}q\}$ ve bu baza karşılık gelen matris $Q_k := [q \ Aq \ \dots \ A^{k-1}q]$ olsun. Bu durumda $\forall x \in x_0 + \mathcal{K}_k$ için $x = x_0 + Q_k y$ olacak şekilde $y \in \mathbb{C}^{k \times 1}$ vardır. O halde

$$\min_{x \in x_0 + \mathcal{K}_k} \|b - Ax\|_2 = \min_{y \in \mathbb{C}^{k \times 1}} \|b - A(x_0 + Q_k y)\|_2$$

yazılabilir. $r_0 = b - Ax_0$ ve $AQ_k = Q_{k+1}H_k$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\min_{y \in \mathbb{C}^{k \times 1}} \|b - A(x_0 + Q_k y)\|_2 = \min_{y \in \mathbb{C}^{k \times 1}} \|r_0 - Q_{k+1}H_k y\|_2$$

elde edilir. Q_{k+1}^* matrisi ile normun içindeki ifadeyi çarpmak 2-normunu değiştirmez.

$q = \frac{r_0}{\|r_0\|_2} \in \mathcal{K}_1$ olduğundan $Q_{k+1}^* r_0 = \|r_0\|_2 e_1 \in \mathbb{C}^{(k+1) \times 1}$ şeklindedir. Ayrıca $Q_{k+1}^* Q_{k+1} = I_{k+1}$ eşitliği göz önüne alınırsa

$$\min_{x \in x_0 + \mathcal{K}_k} \|b - Ax\|_2 = \min_{y \in \mathbb{C}^{k \times 1}} \|\|r_0\|_2 e_1 - H_k y\|_2$$

yazılabilir. Böylece $Ax = b$ lineer sistemini çözmek $\min_{y \in \mathbb{C}^{k \times 1}} \|\|r_0\|_2 e_1 - H_k y\|_2$ en küçük kareler

problemini çözmeye denk gelir. H_k üst Hessenberg matrisinin QR ayrışımı yapılarak ile $H_k = \tilde{Q}\tilde{R}$ şeklinde $(k+1) \times k$ boyutlu ortogonal bir $\tilde{Q}$ ve $k \times k$ boyutlu üst üçgensel bir $\tilde{R}$ matrisinin çarpımı şeklinde yazılabilir. Böylece en küçük kareler problemi geriye yerine koyma yöntemi ile kolaylıkla çözülür. En küçük kareler probleminin çözümünü y_* ile gösterirsek $Ax = b$ lineer sisteminin çözümünü $x = x_0 + Q_k y_*$ olarak ifade edilir.

4. KUATERNİYON SYLVESTER MATRİS DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Kompleks sayıların bir genişlemesi olan kuaterniyonlar halkası, İrlandalı matematikçi Sir William Rowan Hamilton tarafından 1843 yılında tanımlanmıştır. Hamilton'a ithafen genellikle $\mathbb{H}$ harfi ile gösterilen kuaterniyonlar halkası

$$\mathbb{H} = \{a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \mid i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

şeklinde ifade edilir. Eğer $c_1 = a_0 + a_1i$ ve $c_2 = a_2 - a_3i$ olarak göz önüne alınırsa bir a kuaterniyon sayısı $a = c_1 + jc_2$ biçiminde iki kompleks sayının toplamı olarak tek türlü ifade edilir. Dolayısıyla $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ olduğu açıktır. Kuaterniyon sayıları çarpma işlemine göre değişmeli değildir. Yani genel olarak $a, b \in \mathbb{H}$ için $ab \neq ba$ yazılır. Bu sebeple kuaterniyonlar halkası yarı cisim olarak isimlendirilir. Dolayısıyla kuaterniyonlar yarı cismi üzerinde sağ vektör uzayı ve sol vektör uzayı kavramları vardır. Bir a kuaterniyon sayısının reel kısmı $\text{Re}(a) = a_0$, sanal kısmı $\text{Im}(a) = a_1i + a_2j + a_3k$ olmak üzere eşleniği $\bar{a} = a_0 - a_1i - a_2j - a_3k$ ifade edilir. $a \in \mathbb{H}$ kuaterniyon sayının normu $\|a\| = \sqrt{a\bar{a}} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ ve $0 \neq a$ olmak üzere tersi $a^{-1} = \frac{\bar{a}}{\|a\|^2}$ biçiminde tanımlıdır. $a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ ve $b = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k$ olmak üzere iki kuaterniyon sayısının toplamı ve çarpımı sırasıyla

$$a + b = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k$$

ve

$$ab = a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)i + (a_0b_2 + a_2b_0 + a_3b_1 - a_1b_3)j + (a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1)k$$

biçiminde tanımlıdır.

Kuaterniyon sayılarına benzer olarak, $m \times n$ boyutlu bir A kuaterniyon matrisi $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ olmak üzere $A = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1i + \mathcal{A}_2j + \mathcal{A}_3k$ şeklinde ifade edilir. $\mathbb{H}^{m \times n}$, $m \times n$ boyutlu kuaterniyon matrisler kümesini gösterebilir. $A \in \mathbb{H}^{m \times n}$ kuaterniyon matrisinin eşleniği ise $\bar{A} = \mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_1i - \mathcal{A}_2j - \mathcal{A}_3k$ biçiminde tanımlıdır. $A_1 := \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1i \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ve $A_2 := \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_3i \in \mathbb{C}^{m \times n}$ olmak üzere, $A \in$

$\mathbb{H}^{m \times n}$ matrisi iki kompleks matrisin toplamı olarak $A = A_1 + jA_2$ biçiminde tek türlü ifade edilir.

$A = A_1 + jA_2$ ve $B = B_1 + jB_2$ kuaterniyon matrisler olmak üzere, iki kuaterniyon matrisin toplamı ve çarpımı sırasıyla

$$A + B = (A_1 + B_1) + (A_2 + B_2)j$$

ve

$$AB = (A_1B_1 - \overline{A_2}B_2) + j(\overline{A_1}B_2 + A_2B_1)$$

şeklinde tanımlıdır.

Kuaterniyon sayıları çarpma işlemine göre değişmeli olmadığından bir $A \in \mathbb{H}^{n \times n}$ kuaterniyon matrisi için sağ özdeğer ve sol özdeğer tanımları mevcuttur. Literatürde kuaterniyon matrislerin sağ özdeğerleri ile ilgili birçok çalışma olmasına rağmen sol özdeğerleri ile ilgili kısıtlı sayıda çalışma ve bilgi vardır. Şimdi bir $A \in \mathbb{H}^{n \times n}$ kuaterniyon matrisi için sağ özdeğer tanımı verelim.

Tanım 4.1 $A \in \mathbb{H}^{n \times n}$ matrisi için $(\lambda, x) \in \mathbb{H} \times (\mathbb{H}^{n \times 1} \setminus \{0\})$ ikilisi $Ax = x\lambda$ denklemini sağlıyorsa λ skalerine bir sağ öz değer, x vektörüne ise λ ya karşılık gelen bir öz vektör denir [43].

Eğer λ , $A \in \mathbb{H}^{n \times n}$ matrisinin reel olmayan bir sağ özdeğeri ise $\forall 0 \neq s \in \mathbb{H}$ için $Axs = xs(s^{-1}\lambda s)$ eşitliğinden $s^{-1}\lambda s$ skalerlerinin de $A \in \mathbb{H}^{n \times n}$ matrisinin özdeğerleri olduğu aşıkardır. Dolayısıyla $A \in \mathbb{H}^{n \times n}$ matrisinin reel olmayan bir sağ özdeğeri varsa sonsuz sayıda sağ özdeğeri vardır. Bu durumda reel olmayan bir sağ özdeğer için benzerlik yörüngesinden söz edilebilir. Diyelim ki $\lambda \in \mathbb{H}$ skaleri $A \in \mathbb{H}^{n \times n}$ matrisi için bir sağ özdeğer olsun. Bu durumda

$$\theta(\lambda) = \{s^{-1}\lambda s : s \in \mathbb{H}, s \neq 0\}$$

şeklinde tanımlanan $\theta(\lambda)$ kümesine λ özdeğerinin benzerlik yörüngesi denir. Eğer $\theta(\lambda)$ kümesi

$$\theta(\lambda) = \{\bar{s}\lambda s : s \in \mathbb{H}, |s| = 1\}$$

biçiminde göz önüne alınırsa $\theta(\lambda)$ kümesi ile λ özdeğerinin bir eşlenik sınıfını ifade edilir. Açıkthat ki λ özdeğerinin eşlenik sınıfında eşleniği ve kendisi olmak üzere bir kompleks çift vardır. Yani $\theta(\lambda) \cap \mathbb{C} = \{c, \bar{c}\}$ şeklindedir. $\mathbb{C}^+ = \{\alpha + \beta i : \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \geq 0\}$

0 kümesi ile kapalı üst yarı düzlemi gösterelim. $\{c, \bar{c}\}$ kompleks sayılarından $\mathbb{C}^+$ 'da olanına standart sağ özdeğer denir. Yani diyelim ki $\alpha + \beta i$ standart özdeğer olsun. Bu durumda $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\beta \geq 0$ şeklindedir. Bir $A \in \mathbb{H}^{n \times n}$ kuaterniyon matrisin tam n tane standart sağ özdeğeri vardır [43].

4.1. Kuaterniyonların Kompleks Matris Temsili

Öncelikle n ve m boyutlu iki reel vektör uzayı V ve W olmak üzere, $V \rightarrow W$ bir lineer dönüşüme karşılık gelen matrisin nasıl bulunduğuna değinelim. V vektör uzayının bir bazı

$$\phi = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

ve W vektör uzayının bir bazı

$$\psi = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$$

şeklinde verilsin. $T: V \rightarrow W$ lineer dönüşümü $1 \leq i \leq n$ için $T(v_i) = \sum_{j=1}^m t_{ji} w_j$ şeklinde verilsin. Bu durumda $T(v_i)$ vektörlerini W vektör uzayının ψ bazına göre

$$T(v_1) = t_{11}w_1 + t_{21}w_2 + \dots + t_{m1}w_m$$

$$T(v_2) = t_{12}w_1 + t_{22}w_2 + \dots + t_{m2}w_m$$

$$\vdots$$

$$T(v_n) = t_{1n}w_1 + t_{2n}w_2 + \dots + t_{mn}w_m$$

şeklinde ifade edilir. Bu durumda $T: V \rightarrow W$ lineer dönüşümünün ϕ ve ψ bazlarına karşılık gelen matrisi

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \dots & t_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

$\mathbb{H}$ kuaterniyonlar halkasının, $\mathbb{R}$ üzerinde standart bazı $\{1, i, j, k\}$, $\mathbb{C}$ üzerinde standart bazı $\{1, j\}$ olmak üzere $\mathbb{H} \rightarrow M_4(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{4 \times 4}$ ve $\mathbb{H} \rightarrow M_2(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{2 \times 2}$ olacak biçimde izomorf dönüşümler tanımlamak mümkündür. Dolayısıyla kuaterniyonların reel matris gösterimlerinden ve kompleks matris gösterimlerinden söz etmek mümkündür.

Çalışmada ele alınan kuaterniyon problem, kompleks probleme dönüştürülerek çözüleceğinden $\mathbb{H} \rightarrow M_2(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{2 \times 2}$ izomorf dönüşümü göz önüne alalım.

$\varphi: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ lineer dönüşümü $\forall q = c_1 + jc_2 \in \mathbb{H}$ için $\varphi(x) = qx$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\{1, j\}$ bazı için

$$\varphi(1) = (c_1 + jc_2)1 = c_1 + jc_2$$

$$\varphi(j) = (c_1 + jc_2)j = c_1j + jc_2j = j\bar{c}_1 - \bar{c}_2 = -\bar{c}_2 + j\bar{c}_1$$

şeklindedir. Bu durumda, $\{1, j\}$ bazına göre, φ dönüşümüne karşılık gelen matris

$$\begin{bmatrix} c_1 & -\bar{c}_2 \\ c_2 & \bar{c}_1 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir. Böylece, $\mathbb{H} \rightarrow M_2(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{2 \times 2}$ bir izomorfizm tanımlanmış olur.

Yani $\mathbb{H}$ ve $M_2(\mathbb{C})$ izomorf halkalardır ve bunu $\mathbb{H} \cong M_2(\mathbb{C})$ ile gösterelim.

Benzer şekilde $\forall A = A_1 + jA_2 \in \mathbb{H}^{m \times n}$ için $\mathbb{H}^{m \times n}$ kuaterniyon matrisler kümesinden, $\mathbb{C}^{2m \times 2n}$ kompleks matrisler kümesinin

$$f(A) = \begin{bmatrix} A_1 & -\bar{A}_2 \\ A_2 & \bar{A}_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2m \times 2n} \quad (4.1)$$

şeklinde yazılabilen, ve $M_2(\mathbb{C}^{m \times n})$ ile temsil edilen matrisler alt kümesine izomorfizm tanımlamak mümkündür. (4.1) ile verilen matrise bir $A = A_1 + jA_2 \in \mathbb{H}^{m \times n}$ matrisinin kompleks gösterim matrisi denir. $f: \mathbb{H}^{m \times n} \rightarrow M_2(\mathbb{C}^{m \times n}) \subset \mathbb{C}^{2m \times 2n}$ dönüşümü ile $m \times n$ boyutlu kuaterniyon matrisler $2m \times 2n$ kompleks matrisler ile temsil edilmektedir. Dolayısıyla değişmeli olmayan kuaterniyonlar kümesi üzerinde çalışmak yerine kompleks cisim üzerinde çalışılabilir. Şimdi bu dönüşüm ile ilgili bazı özellikleri aşağıdaki teoremden sıralayalım.

Teorem 4.1 $A, B \in \mathbb{H}^{m \times n}$ ve $C \in \mathbb{H}^{n \times s}$ ve $k \in \mathbb{R}$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır [27].

- i. $A = B \Leftrightarrow f(A) = f(B),$
- ii. $f(A + B) = f(A) + f(B),$
- iii. $f(kA) = kf(A),$
- iv. $f(AC) = f(A)f(C),$

- v. $f(A^*) = f^*(A)$,
- vi. $A \in \mathbb{H}^{m \times m}$ üniter matristir ancak ve ancak $f(A)$ üniter matristir,
- vii. $A \in \mathbb{H}^{m \times m}$ tersinir matristir ancak ve ancak $f(A)$ tersinir matristir ve $f(A^{-1}) = f^{-1}(A)$ ilişkisi vardır,
- viii. $\|f(A)\|_F = \sqrt{2}\|A\|_F$ ve $\|f(A)\|_2 = \|A\|_2$.

Bir sonraki bölümde çalışmada ele alınan kuaterniyon Sylvester kuaterniyon matris denklemi, (4.1) eşitliği ve Teorem 4.1 dikkate alınarak kompleks matris denklemi şeklinde ifade edilecektir.

4.2. Problemin İfadesi ve Çözümü

$A \in \mathbb{H}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{H}^{n \times n}$ ve $C \in \mathbb{H}^{m \times n}$ bilinen seyrek matrisler, $m \gg n$ ve $X \in \mathbb{H}^{m \times n}$ bilinmeyen matris olmak üzere

$$AX - XB = C \quad (4.2)$$

Sylvester kuaterniyon matris denklemi alalım. $\sigma(A)$, A matrisinin standart sağ özdeğerlerinin kümesini ve $\sigma(B)$, B matrisinin standart sağ özdeğerlerinin kümesini gösterebilir. (4.2) denkleminin tek çözümünün olmasının gerek ve yeter koşulu

$$\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset \quad (4.3)$$

olmasıdır. Çalışmada, (4.2) ile verilen Sylvester kuaterniyon matris denkleminin (4.3) koşulunu sağladığı varsayımı altında ilerleyeceğiz. (4.2) kuaterniyon matris denklemi, (4.1) eşitliği ve Teorem 4.1 ile

$$f(A)f(X) - f(X)f(B) = f(C) \quad (4.4)$$

kompleks matris denklemi olarak ifade edilebilir. (4.4) denklemindeki $f(A) =$

$$\begin{bmatrix} A_1 & -\bar{A}_2 \\ A_2 & \bar{A}_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2m \times 2m}, f(B) = \begin{bmatrix} B_1 & -\bar{B}_2 \\ B_2 & \bar{B}_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}, f(X) = \begin{bmatrix} X_1 & -\bar{X}_2 \\ X_2 & \bar{X}_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2m \times 2n} \text{ ve}$$

$$f(C) = \begin{bmatrix} C_1 & -\bar{C}_2 \\ C_2 & \bar{C}_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2m \times 2n} \text{ matrislerini basitlik olması açısından sırasıyla } \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{X} \text{ ve}$$

$\tilde{C}$ matrisleri ile gösterelim. Bu durumda (4.4) matris denklemi

$$\tilde{A}\tilde{X} - \tilde{X}\tilde{B} = \tilde{C} \quad (4.5)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Şimdi verilen $\tilde{A} \in \mathbb{C}^{2m \times 2m}$ ve $\tilde{B} \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ olmak üzere $S: \mathbb{C}^{2m \times 2n} \rightarrow \mathbb{C}^{2m \times 2n}$ Sylvester operatörünü

$$S(\tilde{X}) = \tilde{A}\tilde{X} - \tilde{X}\tilde{B} \quad (4.6)$$

şeklinde tanımlayalım. O halde (4.2) Sylvester kuaterniyon matris denklemi (4.6) operatörü yardımıyla

$$S(\tilde{X}) = \tilde{C} \quad (4.7)$$

şeklinde ifade edilmiş olur.

Sıradaki bölümde (4.5) Sylvester kompleks matris denkleminin çözümü blok GMRES yöntemi ile bulunacaktır. Elde edilen çözüm matrisi, yapılan dönüşümler dikkate alınarak kuaterniyon matris denklemi biçiminde ifade edildiğinde ise asıl problemin çözümü elde edilmiş olacaktır.

4.3. Problemin Çözümü

Bu bölümde öncelikle (4.5) Sylvester kompleks matris denklemi için blok Arnoldi iterasyonu ile ortonormal bir baz oluşturulacaktır. Blok Arnoldi iterasyonu, klasik Arnoldi iterasyonunun bir genellemesidir. $\tilde{X}_0$ başlangıç tahmin matrisi olmak üzere $\tilde{R}_0 = \tilde{C} - (\tilde{A}\tilde{X}_0 - \tilde{X}_0\tilde{B})$ başlangıç kalan matrisidir. $\tilde{R}_0$ başlangıç kalan matrisi ve (4.7) Sylvester operatörü ikilisine blok Arnoldi iterasyonunun k kez uygulanması sonucu $\mathcal{K}_k(S, \tilde{R}_0)$ Krylov uzayı oluşur.

Lemma 4.1 $k \geq 1$ olmak üzere $\mathcal{K}_k(S, \tilde{R}_0) = \mathcal{K}_k(\tilde{A}, \tilde{R}_0)$ eşitliği vardır [44].

Lemma 4.1 göz önüne alınırsa k . iterasyon sonunda elde edilen $\tilde{X}_k$ çözüm matrisi $\tilde{X}_0 + \mathcal{K}_k(\tilde{A}, \tilde{R}_0)$ afin uzayının bir elemanıdır ve $\tilde{R}_k$ kalan matrisi ise $\tilde{R}_k \perp \tilde{A}\mathcal{K}_k(\tilde{A}, \tilde{R}_0)$ şeklindedir. Lemma 4.1'i göz önüne alarak klasik Arnoldi iterasyonunun bir genellemesi olan blok Arnoldi iterasyonunun algoritmasını $(\tilde{A}, \tilde{R}_0)$ ikilisi için verelim.

Çizelge 4.1 Blok Arnoldi İterasyonu

$\widetilde{R}_0 \in \mathbb{C}^{2m \times 2n}$ giriniz. $\widetilde{R}_0 = Q_1 U_1$ olacak şekilde QR ayrışımını yapınız.

$j = 1, \dots, k$ için

$$W_j := \widetilde{A}Q_j$$

$l = 1, \dots, j$ için

$$H_{lj} := Q_l^* W_j$$

$$W_j := W_j - Q_l H_{lj}$$

Bitir.

$W_j = Q_{j+1} H_{(j+1)j}$ olacak şekilde QR ayrışımını yapınız.

$\widetilde{Q}_k = [Q_1 \ Q_2 \ \dots \ Q_k]$, $\widetilde{Q}_{k+1} = [Q_1 \ Q_2 \ \dots \ Q_k \ Q_{k+1}]$ ve $\widetilde{H}_{k+1}$ matrislerini oluşturun.

Bitir.

Geri döndür.

Çizelge 4.1.'de her iterasyonda elde edilen Q_j matrisleri sütunları ortonormal olan $2m \times 2n$ matrisler olmak üzere k iterasyon sonunda oluşan $\widetilde{Q}_k$ matrisi $2m \times 2nk$ ve $\widetilde{Q}_{k+1}$ matrisi $2m \times 2n(k+1)$ boyutlu matrislerdir. $\widetilde{H}_{k+1}$ matrisi ise

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1k} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2k} \\ 0 & H_{32} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & H_{kk} \\ 0 & \dots & 0 & H_{(k+1)k} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$2n(k+1) \times 2nk$ blok matristir. H_{lj} , $1 \leq l \leq j$ ve $H_{(j+1)j}$ alt matrisleri ise $2n \times 2n$ boyutlu matrisler olup, $H_{(j+1)j}$ matrisi üst üçgensel matristir. $\widetilde{H}_{k+1}$ son $2n$ satırı silinmesi durumunda oluşan matrise $\widetilde{H}_k$ diyelim. Dikkat edilirse $\widetilde{H}_k$ blok üst Hessenberg matristir. Çizelge 4.1'de verilen algoritmasından

$$\tilde{A}\tilde{Q}_k = \tilde{Q}_k\tilde{H}_k + Q_{k+1}H_{(k+1)k}E_k^T,$$

$$\tilde{H}_k = \tilde{Q}_k^* \tilde{A} \tilde{Q}_k, \quad (4.9)$$

$$\tilde{H}_{k+1} = \tilde{Q}_{k+1}^* \tilde{A} \tilde{Q}_k$$

eşitlikleri elde edilir.

Şimdi, $m \gg n$ olduğu göz önüne alınarak, (4.5) Sylvester kompleks matris denkleminin blok GMRES ile çözümünü verelim. $\tilde{X}_k \in X_0 + \mathcal{K}_k(\tilde{A}, \tilde{R}_0)$ olduğundan $\tilde{X}_k = \tilde{X}_0 + \tilde{Q}_k \tilde{Y}_k$ olacak şekilde $\tilde{Y}_k \in \mathbb{C}^{2nk \times 2n}$ matrisi vardır. O halde

$$\min_{\tilde{X}_k \in X_0 + \mathcal{K}_k(\tilde{A}, \tilde{R}_0)} \|\tilde{C} - S(\tilde{X}_k)\|_F = \min_{\tilde{Y}_k \in \mathbb{C}^{2nk \times 2n}} \|\tilde{C} - S(\tilde{X}_0 + \tilde{Q}_k \tilde{Y}_k)\|_F$$

S Sylvester operatörü lineer olduğundan

$$\min_{\tilde{X}_k \in X_0 + \mathcal{K}_k(\tilde{A}, \tilde{R}_0)} \|\tilde{C} - S(\tilde{X}_k)\|_F = \min_{\tilde{Y}_k \in \mathbb{C}^{2nk \times 2n}} \|\tilde{C} - S(\tilde{X}_0) - S(\tilde{Q}_k \tilde{Y}_k)\|_F$$

ve $\tilde{R}_0 = \tilde{C} - S(\tilde{X}_0)$ olduğu göz önüne alınırsa eşitliğin sağ kısmı $\min_{\tilde{Y}_k \in \mathbb{C}^{2nk \times 2n}} \|\tilde{R}_0 - S(\tilde{Q}_k \tilde{Y}_k)\|_F$ yazılabilir. $S(\tilde{Q}_k \tilde{Y}_k)$ ise $S(\tilde{Q}_k \tilde{Y}_k) = \tilde{A}(\tilde{Q}_k \tilde{Y}_k) - (\tilde{Q}_k \tilde{Y}_k) \tilde{B}$ şeklindedir. Bu durumda

$$\min_{\tilde{Y}_k \in \mathbb{C}^{2nk \times 2n}} \|\tilde{R}_0 - S(\tilde{Q}_k \tilde{Y}_k)\|_F = \min_{\tilde{Y}_k \in \mathbb{C}^{2nk \times 2n}} \|\tilde{R}_0 - (\tilde{A} \tilde{Q}_k \tilde{Y}_k - \tilde{Q}_k \tilde{Y}_k \tilde{B})\|_F$$

eşitliği vardır. $\|\tilde{R}_0 - (\tilde{A} \tilde{Q}_k \tilde{Y}_k - \tilde{Q}_k \tilde{Y}_k \tilde{B})\|_F$ normunun içindeki ifadeyi $\tilde{Q}_{k+1}^*$ matrisi ile çarpmak normu değiştirmez. Şimdi $\tilde{Q}_{k+1}^*$ matrisi ile normun içini soldan çarpalım.

$$\tilde{Q}_{k+1}^* \tilde{R}_0 = \begin{bmatrix} U_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2n(k+1) \times 2n}, \tilde{Q}_{k+1}^* \tilde{A} \tilde{Q}_k = \tilde{H}_{k+1} \text{ ve } \tilde{Q}_{k+1}^* \tilde{Q}_k = \begin{bmatrix} I_{2nk} \\ 0_{2n \times 2nk} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n(k+1) \times 2nk}$$

eşitliklerini göz önüne alınırsa

$$\min_{\tilde{X}_k \in X_0 + \mathcal{K}_k(\tilde{A}, \tilde{R}_0)} \|\tilde{C} - S(\tilde{X}_k)\|_F = \min_{\tilde{Y}_k \in \mathbb{C}^{2nk \times 2n}} \left\| \begin{bmatrix} U_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \tilde{H}_{k+1} \tilde{Y}_k + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{Y}_k \tilde{B} \right\|_F$$

elde edilir. Basitlik olması açısından $\begin{bmatrix} U_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ matrisini $\tilde{U}$ ile gösterelim. Bu durumda

$\min_{\tilde{X}_k \in X_0 + \mathcal{K}_k(\tilde{A}, \tilde{R}_0)} \|\tilde{C} - S(\tilde{X}_k)\|_F$ minimumlaştıma problemi

$$\min_{\tilde{Y}_k \in \mathbb{C}^{2nk \times 2n}} \left\| \tilde{U} - \tilde{H}_{k+1} \tilde{Y}_k + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{Y}_k \tilde{B} \right\|_F \quad (4.10)$$

minimumlaştıma problemine denk gelir. (4.10) normunun içerisindeki ifade başlangıçtaki Sylvester matris denkleminde göre daha küçük boyutlu

$$\tilde{H}_{k+1} \tilde{Y}_k - \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{Y}_k \tilde{B} = \tilde{U} \quad (4.11)$$

Sylvester matris denklemdir. (4.11) Sylvester matris denklemini ise Tanım 2.6 ile verilen eşitlik sayesinde

$$\left((I \otimes \tilde{H}_{k+1}) - (\tilde{B}^* \otimes \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}) \right) \text{vec}(\tilde{Y}_k) = \text{vec}(\tilde{U}) \quad (4.11)$$

lineer sistemi olarak ifade edilebilir. (4.11) lineer sisteminin çözümü ise

$$\min_{\text{vec}(\tilde{Y}_k) \in \mathbb{C}^{4n^2 k \times 1}} \left\| \text{vec}(\tilde{U}) - \left((I \otimes \tilde{H}_{k+1}) - (\tilde{B}^* \otimes \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}) \right) \text{vec}(\tilde{Y}_k) \right\|_2 \quad (4.12)$$

en küçük kareler problemine indirgenir. Basitlik olması açısından $\left((I \otimes \tilde{H}_{k+1}) - (\tilde{B}^* \otimes \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}) \right)$ katsayılar matrisini $\mathcal{A}$, $\text{vec}(\tilde{Y}_k)$ vektörünü y ve $\text{vec}(\tilde{U})$

vektörünü g ile gösterelim. Bu durumda (4.12) en küçük kareler problemi daha sade olarak

$$\min_{y \in \mathbb{C}^{4n^2 k \times 1}} \|g - \mathcal{A}y\|_2 \quad (4.13)$$

şeklinde ifade edilir. (4.13) en küçük kareler probleminin çözümü katsayılar matrisini $\mathcal{A}$ 'nın QR ayrışımı yapılarak kolaylıkla çözülebilir. En edilen çözüm vektörünü $y_* \in \mathbb{C}^{4n^2 k \times 1}$ ile gösterelim. y_* vektörüne karşılık gelen $Y_* \in \mathbb{C}^{2nk \times 2n}$ matrisi ise (4.11) Sylvester matris denkleminin çözümüdür. Bu durumda $\tilde{X}_k = \tilde{X}_0 + \tilde{Q}_k Y_* \in \mathbb{C}^{2m \times 2n}$ matrisi (4.5) Sylvester kompleks matris denkleminin çözümüdür. (4.5) kompleks matris

denklemini ise asıl ele alınan (4.2) Sylvester kuaterniyon matris denklemindeki matrislerin kompleks gösterim matrislerinden faydalanarak ifade edilmiştir. Yani $\widetilde{X}_k$ matrisi (4.2) probleminin çözümünün

$$\widetilde{X}_k = f(X_*) = \begin{bmatrix} X_{*1} & -\overline{X_{*2}} \\ X_{*2} & \overline{X_{*1}} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2m \times 2n}$$

şeklinde kompleks gösterim matrisidir. O halde $AX - XB = C$ kuaterniyon matris denkleminin çözümü $X_* = X_{*1} + X_{*2}j \in \mathbb{H}^{m \times n}$ matrisidir. Böylece asıl problemin çözümünü elde etmiş oluruz.

4.4. Sayısal Örnekler

Bu bölümde rastgele oluşturduğumuz matrisler için $AX - XB = C$ Sylvester kuaterniyon matris denkleminin çözümü çalışmada önerilen yöntem ile bulunacaktır. Yöntemin elverişliliğini göstermek için ise her iterasyonda kalan matrislerin normunun değişim grafiğini vereceğiz. Ele alınan problem için algoritmalar MATLAB R2021’de çalıştırılmıştır.

Örnek 4.1. $A \in \mathbb{H}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{H}^{n \times n}$ ve $C \in \mathbb{H}^{m \times n}$ bilinen matrisler olmak üzere $m = 50$ ve $n = 5$ için MATLAB’da aşağıdaki şekilde rastgele

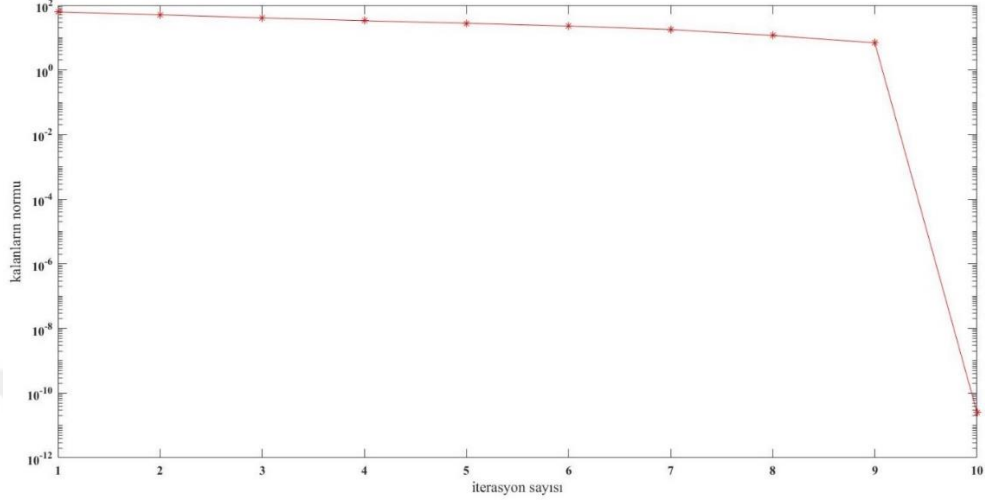
$A = \text{quaternion}(\text{rand}(m,m), \text{rand}(m,m), \text{rand}(m,m), \text{rand}(m,m));$

$B = \text{quaternion}(\text{rand}(n,n), \text{rand}(n,n), \text{rand}(n,n), \text{rand}(n,n));$

$C = \text{quaternion}(\text{rand}(m,n), \text{rand}(m,n), \text{rand}(m,n), \text{rand}(m,n));$

matrislerini oluşturalım. (4.1) ile verilen kompleks matris gösterimi sayesinde A , B ve C kuaterniyon matrisleri kompleks matris biçiminde ifade edelim. Daha sonra Teorem 4.1’i göz önüne alarak $AX - XB = C$ Sylvester kuaterniyon matris denklemini $\widetilde{A}\widetilde{X} - \widetilde{X}\widetilde{B} = \widetilde{C}$ Sylvester kompleks matris denklemini biçiminde ifade edelim. $\widetilde{X}_0$ başlangıç matrisi $2m \times 2n$ sıfır matrisi olarak alalım. $\widetilde{R}_0 = \widetilde{C} - (\widetilde{A}\widetilde{X}_0 - \widetilde{X}_0\widetilde{B})$ olmak üzere Çizelge 4.1 ile verilen blok Arnoldi iterasyonunu $(\widetilde{A}, \widetilde{R}_0)$ ikilisine iterasyon sayısı 10 seçilerek uygulansın. Böylece $\widetilde{Q}_{10}$ ve $\widetilde{Q}_{11}$ ortonormal bazları oluşur. $\widetilde{A}\widetilde{X} - \widetilde{X}\widetilde{B} = \widetilde{C}$ kompleks matris denklemin $\mathcal{K}_{10}(\widetilde{A}, \widetilde{R}_0)$ uzayında GMRES yöntemi ile çözümü $\widetilde{X}_{10} = \widetilde{X}_0 + \widetilde{Q}_{10}\widetilde{Y}_{10}$ elde edilir. Son olarak ise elde edilen $\widetilde{X}_{10}$ kompleks matrisi kuaterniyon matrise çevrilerek asıl problemin çözümü elde edilmiştir. Şekil 4.1’de $AX - XB = C$ kuaterniyon matris denkleminin karşılık gelen kompleks matris denklemini için $\|\widetilde{R}_k\|_F$ matrislerinin normunun değişimi

gösterilmektedir. Her iterasyonda hesaplana kalan matrislerin normu sırasıyla 62.2118, 50.6591, 40.7386, 33.3585, 27.8083, 22.7574, 17.8061, 11.6200, 6.8859, 0.0000 şeklindedir. Beklenildiği üzere 10. iterasyonda yuvarlama hatalarına bağlı olarak $\|\widetilde{R}_{10}\|_F \cong 0$ olduğu görülmektedir.



Şekil 4.1 $\|\widetilde{R}_k\|_F$ matrislerinin normunun değişim grafiği.



5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Tezde literatürde sıklıkla karşımıza çıkan ve birçok uygulama alanı bulunan $AX - XB = C$ Sylvester kuaterniyon matris denklemi ele alınmıştır. Kuaterniyon sayıları, kompleks sayıların bir genellemesidir. Dolayısıyla bir problemi kuaterniyonlar üzerinde ele almak daha genel bir çözüm bakış açısı sunar. Bunun yanı sıra kuaterniyonlar, kuantum mekaniği, görüntü işleme, robotik gibi birçok alanda karşımıza çıkmaktadır. Tüm bu hususlar dikkate alındığında kuaterniyon çalışmaların önemi dikkat çekmektedir. İki kuaterniyon sayısının çarpma işlemine göre değişme özelliği olmadığından kuaterniyonlar yarı cisim olarak adlandırılırlar. Bu yüzden kuaterniyon problemlerin çözümü, kompleks problemlerin çözümüne nazaran karmaşıktır. Literatürde, bu karmaşıklığın üstesinden gelebilmek için çeşitli yöntemler sunulmuştur. Bir kuaterniyon problemi, izomorf dönüşüm sayesinde kompleks yada reel probleme dönüştürmek bu yöntemlerden biridir. Bir diğer yöntem ise ele alınan problemin çözümünü, sağ kuaterniyon vektör uzayı veya sol kuaterniyon vektör uzayı üzerinde çalışmaktır.

Çalışmada, $A \in \mathbb{H}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{H}^{n \times n}$ ve $C \in \mathbb{H}^{m \times n}$ bilinen matrisler, $X \in \mathbb{H}^{m \times n}$ bilinmeyen matris ve $m \gg n$ olmak üzere

$$AX - XB = C$$

matris denkleminin, çözümünün var olduğu koşulu altında, iteratif yöntem ile çözümü bulunmuştur. Ele alınan Sylvester kuaterniyon matris denkleminin farklı yöntemler ile çözümünü veren çalışmalar mevcuttur. Bu yöntemlerin bir kısmı direk yöntem, bir kısmı ise iteratif yöntemlerdir. Çalışmada sunduğumuz yöntem ise seyrek ve büyük boyutlu sistemler için elverişli olan Krylov alt uzay yöntemlerinden GMRES metodudur. Kuaterniyonların çarpma işlemine göre değişmeli olmamasından kaynaklanan zorluğun üstesinden gelebilmek için ise ele alınan kuaterniyon matris denklemi kompleks matris denklemine dönüştürmeyi tercih ettik. Bu dönüşümü yapabilmek için $AX - XB = C$ matris denklemindeki matrislerin kompleks matris gösterimlerinden faydalandık. Elde edilen yeni kompleks matris denklemindeki matrislerin boyutları, ilk durumdaki kuaterniyon matrislerin boyutlarının iki katıdır. Dolayısıyla, problemin çözümünü için iteratif yöntemlerden birini tercih etmek uygundur. Daha sonra, Sylvester kompleks

matris denklemi için blok Arnoldi iterasyonu ile ortonormal bir baz inşa edildi. Elde edilen bu baz yardımıyla, denklemin çözümü daha küçük boyutlu bir Krylov alt uzayında GMRES yöntemi elde edildi. Son olarak ise yapılan kompleks dönüşüm dikkate alınarak, elde edilen kompleks çözüm matrisine karşılık gelen kuaterniyon çözüm matrisi ifade edildi. Böylece asıl problemin çözümü elde edildi. Yöntemin elverişliliğini göstermek için ise MATLAB 2021’de rasgele oluşturulan matrisler ile bir Sylvester kuaterniyon matris denklemi ele alındı. Sentetik olarak oluşturulan bu matris denklemi, belli sayıda iterasyon için GMRES ile çözüldü. Beklenildiği gibi her iterasyonda kalan matrislerin normunun azaldığı gözlemlendi. Kalan matrislerin normlarının değişimi, bir grafik ile verildi.

Sylvester kuaterniyon matris denkleminin blok GMRES metot ile çözümü bildiğimiz kadarı ile literatürde daha önce ele alınmadı. Bu açıdan çalışmanın önemli ve katkı sağlayıcı nitelikte olduğu düşünülmektedir.

Ayrıca ele alınan yöntem işlem sayısını azaltacak şekilde geliştirilebilir. Bunun dışında ele alınan problem başka iteratif yöntemler ile çözülebileceği gibi, sunulan yöntem farklı matris denklemlerinin çözümleri için de kullanılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] **A. Bouhamidi, K. J.** (2007). Sylvester Tikhonov-regularization methods in image restoration, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 206(1), 86-98.
- [2] **A. Bouhamidi, K. J.** (2008). A note on the numerical approximate solutions for generalized Sylvester matrix equations with applications, *Applied Mathematics and Computation* 206, 687-694.
- [3] **A. Dymtryshyn, B. K.** (2015). Coupled Sylvester-type matrix equations and block diagonalization, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 36 (2), 580-593.
- [4] **Antoulas, A.** (2005). *Approximation of large-scale dynamical systems*. Philadelphia: PA: SIAM Publications.
- [5] **Beik, F.** (2014). Theoretical results on the global GMRES method for solving generalized Sylvester matrix equations. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society* 40 (5), 1097-1117.
- [6] **Beik, F., & Salkuyeh, D.** (2011). On the global Krylov subspace methods for solving general coupled matrix equations. *Computers and Mathematics with Applications* 62, 4605-4613.
- [7] **Calvetti, D., & Reichel, L.** (1995). Application of adi iterative methods to the restoration of noisy images. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 17 (1), 165-186.
- [8] **Castelan, E., & Silva, V.** (2005). On the solution of a Sylvester equation appearing in descriptor systems control theory. *Systems & Control Letters* 54, 109-117.
- [9] **El Guennouni, A., Jbilou, K., & Riquet, A.** (2002). Block Krylov subspace methods for solving large Sylvester equations. *Numerical Algorithms* 29, 75-96.
- [10] **Epton, M.** (1980). Methods for the solution of $AXD-BXC=E$ and its application in the numerical solution of implicit ordinary differential equations. *BIT Numerical Mathematic* 20, 341-345.
- [11] **Farenick, D., & Pidkowich, B.** (2003). The spectral theorem in quaternions. *Linear Algebra Appl.* 371, 75-102.
- [12] **Golub, G., Nash, S., & Van Loan, C.** (1979). A hessenberg-schur method for the problem $AX+XB=C$. *IEEE Transactions on Automatic Control* 24 (6), 909-913.
- [13] **Horn, R. A., & Johnson, C. R.** (1985). *Matrix Analysis*. Cambridge, A.B.D.: Cambridge University Press.
- [14] **J. Zhang, H. D.** (2011). A new family of global methods for linear systems with multiple right-hand sides, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 236, 1562-1575.

- [15] **Jbilou, K.** (2010). ADI preconditioned Krylov methods for large Lyapunov matrix equations. *Linear Algebra and its Applications* 432, 2473-2485.
- [16] **Jia, Z., & Ng, M.** (2021). Structure preserving quaternion generalized minimal residual method. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 42(2), 616-634.
- [17] **K. Jbilou, A. J.** (2006). Projection methods for large Lyapunov matrix equations, *Linear Algebra and its Applications* 415, 344-358.
- [18] **K. Jbilou, A. Messaoudi, & H. Sadok.** (1999). Global FOM and GMRES algorithms for matrix equations, *Applied Numerical Mathematics* 31, 49-63.
- [19] **Kaabi, A.** (2014). On the numerical solution of generalized Sylvester matrix equations. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society* 40, 101-113.
- [20] **Kyrchei, L.** (2018). Cramer's rules for Sylvester quaternion matrix equation and its special cases. *Adv. Appl. Clifford Algebras* 28(5), 1-26.
- [21] **Kyrchei, L.** (2019). Cramer's rules of η -(skew-)Hermitian solutions to the quaternion Sylvester-type matrix equations. *Adv. Appl. Clifford Algebras* 29(3), 1-31.
- [22] **Li, T., & Wang, Q.** (2023). Structure preserving quaternion full orthogonalization method with applications. *Numerical Linear Algebra with Applications* 30 (5), 1-15.
- [23] **Lyapunov, A. M.** (1992). The general of the stability of motion. (Cilt 55(3):531534). *International Journal of Control*, 664-676.
- [24] **M. Darouach, M. B.** (1995). Design of observers for descriptor systems, *IEEE Trans. Automat. Control* 40(7), 1323-1327.
- [25] **M. Heyouni, K. J.** (2006). Matrix Krylov subspace methods for large scale model reduction problems, *Applied Mathematics and Computation* 181, 1215-1228.
- [26] **R. H. Bartels, G. W.** (1972). Algorithm 432: Solution of the matrix equation $AX + XB = C$, *Communications of the ACM* 15, 820-826.
- [27] **Robbè, M., & Sadkane, M.** (2002). A convergence analysis of GMRES and FOM methods for Sylvester equations. *Numerical Algorithms* 30: 71-89.
- [28] **Rodman, L.** (2014). *Topics in Quaternion Linear Algebra*. Princeton University Press.
- [29] **S. K. Li, M. X.** (2021). A global variant of the COCR method for the complex symmetric Sylvester matrix equation $AX+XB=C$, *Computers and Mathematics with Applications* 94, 104-113.
- [30] **S. K. Li, T. Z.** (2018). Global FOM and GMRES algorithms for a class complex matrix equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 335, 227-241.
- [31] **Simoncini, V.** (2016). Computational methods for linear matrix equations, *SIAM Review* 58(3), 377-441.
- [32] **Sylvester, J. J.** (1884). "Sur l'equation en matrices $px=xq$." (Cilt 99). Paris: CR Acad. Sci. Paris 99(2) 67-71.

- [33] **Şimşek, S.** (2023). Least squares solutions of generalized Sylvester type quaternion matrix equations. *Adv. Appl. Clifford Algebras* 33(3), 28.
- [34] **Şimşek, S.** A block quaternion GMRES method and its convergence analysis. *Calcolo*, accepted.
- [35] **Şimşek, S., & Körükçü, A.** (2023). A block conjugate gradient method for quaternion linear systems. *Journal of the Institute of Natural and Applied Sciences* 28 (2), 394-403.
- [36] **Şimşek, S., Sarduvan, M., & Özdemir, H.** (2017). Centrohermitian and skew centrohermitian solutions to the minimum residual and matrix nearness problems of the quaternion matrix equation $(AXB, DXE)=(C, F)$. *Adv. Appl. Clifford Algebras* 27, 2201-2214.
- [37] **Trefethen, L., & Bau, D.** (1997). *Numerical Linear Algebra*. Philadelphia: SIAM.
- [38] **U. Baur, P. B.** (2008). Cross-gramian based model reduction for data-sparse systems, *Electron. Trans. Numer. Anal* 31, 256-270.
- [39] **Wang, Q., Zhang, H., & Yu, S.** (2008). On solutions to the quaternion matrix equation $AXB+CYD=E$. *Electron. J. Linear Algebra* 17, 343-358 .
- [40] **Wei, M., Li, Y., Zhang, F., & Zhao, J.** (2018). *Quaternion Matrix Computations*. New York: Nova Science Publishers.
- [41] **Yuan, S.** (2014). Least squares pure imaginary solution an real soluion of the quaternion matrix equation $AXB+CXD=E$ with the least norm. *J. Appl. Math.* 4, 1-9.
- [42] **Yuan, S., & Wang, Q.** (2012). Two special kinds of least squares solutions for the quaternion matrix equation $AXB+CXD=E$ *Electron. J. Linear Algebra* 23, 257-274.
- [43] **Yuan, S., & Wang, Q.** (2016). L-structured quaternion matrices and quaternion linear matrix equations. *Linear and Multilinear Algebra* 64(2), 321-339.
- [44] **Zhang, F., Mu, W., Li, Y., & Zhao, J.** (2016). Special least squares solutions of the quaternion matix equation $AXB+CXD=E$. *Comput. Math. Appl.* 72, 1426-1435.



