

SZASZ-DURRMEYER OPERATÖRLERİ İLE GLOBAL YAKLAŞIM

Hanife ÖZDOĞAN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TEMMUZ 2010
ANKARA**

Hanife ÖZDOĞAN tarafından hazırlanan SZASZ-DURRMEYER OPERATÖRLERİ İLE GLOBAL YAKLAŞIM adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Nurhayat İSPİR
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ahmet Ali ÖÇAL
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Prof. Dr. Nurhayat İSPİR
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Prof.. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ
Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Tarih:07/07/2010

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Hanife ÖZDOĞAN

SZASZ-DURRMEYER OPERATÖRLERİ İLE GLOBAL YAKLAŞIM

(Yüksek Lisans Tezi)

Hanife ÖZDOĞAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Temmuz 2010

ÖZET

Bu tezde, $[0, \infty)$ aralığında sürekli olan integrallenebilir fonksiyonlara (S_n^*) Szasz-Durrmeyer operatörler dizisinin yaklaşım özellikleri önce $[0, \infty)$ –un sonlu kapalı alt aralığında daha sonra ise $[0, \infty)$ aralığında sürekli olan ve polinomsal büyüyen fonksiyonların ağırlıklı uzayında incelendi. C_N ve C_N^2 fonksiyon uzaylarında (S_n^*) operatörler dizisinin fonksiyonlara yakınsama oranına ait bazı tahminler verildi. Ayrıca, χ^2 test fonksiyonunu koruyan düzenlenmiş $\tilde{S}_n$ operatörü yardımı ile daha iyi bir hata oranı elde edildi.

Bilim Kodu	: 204.1.095
Anahtar Kelimeler	: Szasz-Durrmeyer operatörler, ağırlıklı uzay, süreklilik modülü, yaklaşım hızı
Sayfa Adedi	: 56
Tez Yöneticisi	: Prof. Dr. Nurhayat İSPİR

GLOBAL APPROXIMATION BY SZASZ-DURRMEYER OPERATORS
(M.Sc. Thesis)

Hanife ÖZDOĞAN

GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
July 2010

ABSTRACT

In this thesis, the approximation properties of the sequences of (S_n^*) Szasz-Durrmeyer operators are investigated on any finite closed interval of $[0, \infty)$ and on the weighted spaces of integrable continuous functions defined on $[0, \infty)$, having polynomial growth. Some estimates are given related to the rate of convergence of the operators S_n^* for continuous functions in the C_N and C_N^2 spaces. Furthermore, by the modified operator $\tilde{S}_n$ preserving the test function x^2 we get a better error estimation.

Science Code	: 204.1.095
Key Words	: Szasz-Durrmeyer operators, weighted spaces, modulus of continuity, rate of convergence
Page Number	: 56
Adviser	: Prof. Dr. Nurhayat İSPİR

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sırasında bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, bana büyük bir titizlikle yol gösteren danışmanım Sn. Prof. Dr. Nurhayat İSPİR' e ayrıca desteğini esirgemeyen Sn. Yrd. Doç. Dr. İsmet YÜKSEL' e ve beni manevi destekleriyle hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELERVE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	4
2.1. Lineer Pozitif Operatörler	4
2.2. $C[a,b]$ Uzayında P.P. Korovkin Teoremi.....	8
2.2.1. Weierstrass yaklaşım teoremi	8
2.3. L_p Uzaylarında P.P. Korovkin Teoremi	10
2.4. Ağırlıklı Uzaylarda Yaklaşım	13
3. SZASZ-DURRMEYER OPERATÖRLER DİZİSİNİN YAKLAŞIM	
ÖZELLİKLERİ	20
3.1. Szasz Operatörler Dizisinin Düzgün Yakınsaklığı	20
3.2. Szasz-Durrmeyer Operatörleri ile Yaklaşım.....	22
3.3. S_n^* Operatörünün Süreklilik Modülü ile Yaklaşım Hızının Hesaplanması.....	29
3.4. Szasz-Durrmeyer Operatörlerinin C_N ve C_N^2 Uzaylarında Yaklaşım	
Özellikleri.....	33
3.5. Daha İyi Bir Yaklaşım Derecesi	49
KAYNAKLAR	54
ÖZGEÇMİŞ	56

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$< a, b >$	$[a, b], (a, b), [a, b), (a, b], (-\infty, \infty), (-\infty, b), (a, \infty)$ aralıklarından biri
$B_\rho(\mathbb{R})$	Her $x \in \mathbb{R}$ için $ f(x) \leq M_f \cdot \rho(x)$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayı
$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı
$C_\rho(\mathbb{R})$	Her $x \in \mathbb{R}$ için $ f(x) \leq M_f \cdot \rho(x)$ koşulunu sağlayan sürekli fonksiyonlar uzayı
$C_\rho^k(\mathbb{R})$	$\left\{ f \in C_\rho : \lim_{ x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = k_f < \infty \right\}$ alt uzayı
$\ f\ _\rho$	$B_\rho(\mathbb{R})$ uzayında tanımlanan norm
$\ L\ _{X \rightarrow Y}$	X normlu uzayından Y normlu uzayına dönüşüm yapan L operatörünün normu
$L_n(f; x)$	L operatörünün f fonksiyonuna uygulanmasından elde edilen fonksiyon
$L_p[a, b]$	$\left\{ f : \int_a^b f(x) ^p dx < \infty \right\}$
$\rho(x)$	Ağırlık fonksiyonu
$\omega(f; \delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$S_n(f; x)$	Szasz operatörleri
$S_n^*(f; x)$	Szasz-Durrmeyer operatörleri

Simgeler**Açıklama** C_N

$[0, \infty)$ aralığında sürekli ve $w_N f$, $[0, \infty)$ da düzgün sürekli ve sınırlı fonksiyonların uzayı

 $w_N(x)$

C_N uzayında tanımlanan ağırlık fonksiyonu

 $\|f\|_N$

C_N uzayında tanımlanan norm

 C_N^2

$\{f \in C_N; f'' \in C_N\}$

 $\omega_N^2(f; \delta)$

C_N^2 uzayında f fonksiyonunun süreklilik modülü

 $Lip_M \alpha$

α mertebeli M katsayılı Lipschitz sınıfı

1. GİRİŞ

Fonksiyonlar teorisinin en çok uygulaması olan dalı yaklaşım teorisidir. Genelde fonksiyonları yaklaştırmak en basit yapılar lineer pozitif operatörler yardımıyla tanımlanabildiğinden, yaklaşım teorisinde kompakt aralıklarda sürekli fonksiyonlara lineer pozitif operatörlerle yaklaşım problemi önemli bir yer tutmaktadır.

19. yüzyılda pek çok matematikçi bir nokta kümesinde sürekli bir fonksiyonun en az bir nokta da türevlenebilir olduğunu kabul ediyordu. K. Weierstrass 1872 yılında Berlin Akademisinde bir konferansta her yerde sürekli olduğu halde hiçbir yerde türevli olmayan bir fonksiyon örneği verdi. Bu fonksiyon:

$0 < a < 1$, b pozitif bir çift tam sayı ve $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ olmak üzere

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

ile tanımlıdır. Daha sonra birçok matematikçi bu tür fonksiyonlar tanımlayarak kendi fonksiyonlarını oluşturmuşlardır.

K. Weierstrass 1885 yılında kompakt aralıklarda sürekli fakat türevi olmayan fonksiyonlara yakınsayan bir polinomlar dizisinin var olduğunu ispatlamıştır [1-3,14]. Bu dizilerin oluşturulma tekniği lineer pozitif operatörlerle yaklaşım problemini ortaya çıkarmıştır. Bernstein [4], $[0,1]$ aralığında sürekli fonksiyonlar için;

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} ; \quad 0 \leq x \leq 1$$

toplamsal operatörünü tanımlayarak, bu operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığında düzgün olarak f fonksiyonuna yaklaştığını ispatlamıştır.

1952 yılında H. Bohman [5] toplam şeklindeki lineer pozitif operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığında sürekli f fonksiyonuna yaklaşması problemini incelemiştir. 1953 yılında P.P. Korovkin, H. Bohman' ın teoremini genelleştirmiştir. Korovkin [2], daha genel durumlarda lineer pozitif operatörler dizisinin yaklaşım problemini ele alarak “Korovkin Teoremi” olarak bilinen teoremi ispatlamıştır.

Bernstein operatörleri ile, süreksiz fonksiyonlara yaklaşmak uygun olmadığından, integrallenebilir fonksiyonlar uzayında Korovkin Teoremini incelemek için, Kantorovich ve Durrmeyer ilk toplamsal integral tip operatörleri tanımlamışlardır [3]. Bu operatörler sırası ile,

$$f \in L_1[0,1], x \in [0,1] \text{ ve } p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

olmak üzere

$$K_n(f; x) = (n+1) \sum_{k=0}^n p_{k,n}(x) \int_{k/n+1}^{k+1/n+1} f(t) dt$$

$$D_n(f; x) = (n+1) \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) \int_0^1 p_{n,k}(t) f(t) dt$$

şeklinde tanımlanır. Sonlu aralıklarda tanımlı bu operatörler için, Korovkin Teoremi sağlanmaktadır. Sınırsız aralıklarda yaklaşım problemi, ağırlıklı uzaylarda incelenir. Ağırlıklı uzaylarda yaklaşım koşulları ve Korovkin tip teoremler Gadjiev [6,7] tarafından verilmiştir.

Bu tezde, Szasz operatörlerinin bir genelleştirilmiş hali olan Szasz-Durrmeyer toplamsal-integral tip operatörlerinin $[0,\infty)$ aralığında sürekli ve polinomsal büyüme hızına sahip fonksiyonlara farklı uzaylarda yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızı incelenecektir.

Bu tez, birinci bölüm giriş bölümü olmak üzere üç bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde temel kavram ve teoremler tanıtılmıştır. Bu amaçla fonksiyon uzayları ve lineer pozitif operatörlerle ilgili tanım ve teoremler verilerek, $C[a,b]$ uzayında Korovkin Teoremi ifade edilmiştir. Ayrıca L_p uzayı ve ağırlıklı uzaylarda yaklaşım koşullarına ilişkin teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölüm dört kısımdan oluşmaktadır. 1. kısımda, Szasz operatörler dizisi tanıtılarak $[0,\infty)$ aralığında sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsaklık teoremi, 2. kısımda Szasz-Durrmeyer operatörlerinin tanımı ve özellikleri verilerek yaklaşım özellikleri, $C[a,b]$ uzayında ve ağırlıklı uzaylarda incelenmiştir. 3. kısımda operatörler dizisinin süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı hesaplanmıştır. 4. kısımda ise C_N ve C_N^2 uzaylarında yaklaşım oranları, merkezi momentler yardımıyla Jackson tip eşitsizlikler elde edilerek yaklaşım hızı bulunmuştur. Son kısımda ise Szasz-Durrmeyer operatörleri x^2 fonksiyonunu koruyacak biçimde yeniden düzenlenerek daha iyi bir yaklaşım derecesi elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde diğer bölümlere temel teşkil edecek bazı tanım, teorem ve özelliklerden bahsedilecektir.

2.1. Lineer Pozitif Operatörler

X ve Y normlu iki fonksiyon uzayı olsun. X den alınmış her f fonksiyonuna Y de bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa o takdirde X uzayında bir operatör tanımlanmıştır denir ve g nin tanım kümesindeki x ler için $g(x) = L(f; x)$ şeklinde gösterilir. t , f nin tanım kümesinin herhangi bir elemanı ise $L(f(t); x)$, $L(f)(x)$, $L(f; x)$ gösterimlerinden biri kullanılır.

2.1. Tanım

X ve Y iki lineer fonksiyon uzayları olmak üzere $L: X \rightarrow Y$ şeklindeki L operatörünü göz önüne alalım. $\forall f_1, f_2 \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için L operatörü;

$$L(\alpha f_1 + \beta f_2; x) = \alpha L(f_1; x) + \beta L(f_2; x)$$

koşulunu gerçekleştiriyorsa o takdirde L operatörüne lineer operatör denir.

2.2. Tanım

X, Y iki lineer uzay, T_f ve T_g sırasıyla f ve g fonksiyonlarının tanım kümeleri olmak üzere,

$$X^+ = \{f \in X : f(t) \geq 0, \forall t \in T_f\} \text{ ve } Y^+ = \{g \in Y : g(x) \geq 0, \forall x \in T_g\}$$

olsun. Eğer X uzayında tanımlanmış L lineer operatörü X^+ kümesindeki herhangi bir f fonksiyonunu pozitif fonksiyona dönüştürüyorsa L ye lineer pozitif operatör denir. L lineer pozitif operatörü için $L(X^+) \subset Y^+$ sağlanır. Yani $f(t) \geq 0$ olduğunda $L(f; x) \geq 0$ olur.

Hem lineerlik hem de pozitiflik şartlarını sağlayan operatörlere lineer pozitif operatörler denir.

2.1. Önerme

$L : X \rightarrow Y$ bir lineer pozitif operatör olsun. Bu durumda L monotondur.

İspat

$\forall f_1, f_2 \in X$ ve $f_1 \leq f_2$ olsun. Bu durumda $f_2 - f_1 \geq 0$ olur. L lineer pozitif operatör olduğundan

$$L(f_2 - f_1; x) = L(f_2; x) - L(f_1; x) \geq 0$$

ifadesini yazabiliriz. Buradan da

$$L(f_1; x) \leq L(f_2; x)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

2.2. Önerme

L lineer pozitif operatörü $\forall t \in T_f$ için $f(t) < 0$ koşulunu sağlayan fonksiyonları yine aynı özelliği sağlayan fonksiyonlara dönüştürür.

İspat

$\forall t \in T_f$ için $f(t) < 0$ olduğunda $-f(t) > 0$ olur. L lineer pozitif operatör olduğundan $\forall t \in T_f$ için

$$0 < L(-f; x) = -L(f; x)$$

eşitsizliği sağlanır. O halde $\forall t \in T_f$ için $L(f; x) < 0$ ifadesi elde edilir.

2.3. Önerme

$L: X \rightarrow Y$ bir lineer pozitif operatör olsun. O takdirde

$$|L(f; x)| \leq L(|f|; x)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

$-|f| \leq f \leq |f|$ eşitsizliğini L operatörüne uygulayalım. Lineer pozitif operatörlerin monotonluk özelliğinden

$$L(-|f|; x) \leq L(f; x) \leq L(|f|; x)$$

eşitsizliği elde edilir. L operatörü lineer olduğundan

$$-L(|f|; x) \leq L(f; x) \leq L(|f|; x)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise,

$$|L(f; x)| \leq L(|f|; x)$$

anlamına gelir.

2.3. Tanım

$[a, b]$ kapalı ve sonlu aralığında tanımlı ve sürekli fonksiyonlar uzayını $C[a, b]$ ile gösterelim. $C[a, b]$,

i) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ve

ii) $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ işlemleri ile bir lineer uzaydır. Bu lineer uzay üzerinde bir norm,

$$\|f\|_{C[a, b]} = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanır.

2.1. Teorem

Bir (f_n) fonksiyonlar dizisinin f fonksiyonuna $C[a, b]$ normunda düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{C[a, b]} = 0$$

olmasıdır.

2.4. Tanım

$L : X \rightarrow Y$ lineer operatör olsun. Eğer $\forall f \in X$ için

$$\|L(f)\|_Y \leq c \|f\|_X$$

eşitsizliğini gerçekleyen bir $c > 0$ sayısı varsa, L operatörüne sınırlı operatör denir. Bu c sabitlerinin en küçüğüne L operatörünün normu denir ve $\|L\|_{X \rightarrow Y}$ ya da $\|L\|$ biçiminde gösterilir.

2.2. $C[a,b]$ Uzayında P.P. Korovkin Teoremi

Bu kısımda (L_n) lineer pozitif operatörler dizisinin sürekli fonksiyonlara yakınsaklık koşulları incelenecektir.

2.2.1. Weierstrass yaklaşım teoremi

$\forall \varepsilon > 0$ ve $f(x) \in C[a,b]$ için öyle bir $P(x)$ polinomu vardır ki, $\forall x \in [a,b]$ için $|P(x) - f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır. Başka bir ifadeyle sonlu $[a,b]$ aralığında sürekli her f fonksiyonu için $f(x)$ e $[a,b]$ aralığında düzgün yakınsayan bir $(P_n(x))$ polinom dizisi vardır [14].

Belirtelim ki, $C[a,b]$ uzayında tanımlı (L_n) lineer pozitif operatörler dizisi, $(L_n(f;x))$ dizisine karşılık gelen $(L_n(f))$ dizisi anlamındadır.

1951 yılında H. Bohman, toplam şeklindeki lineer pozitif operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığında sürekli $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşması problemini incelemiştir.

H. Bohman göstermiştir ki $\forall x \in [0,1], 0 \leq a_{k,n} \leq 1$ olduğunda

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f(\alpha_{k,n}) P_{k,n}(x) ; P_{k,n}(x) \geq 0$$

lineer pozitif operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığında sürekli f fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşullar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(1) - 1\|_{C_{[0,1]}} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(t) - t\|_{C_{[0,1]}} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(t^2) - t^2\|_{C_{[0,1]}} = 0$$

şeklindedir. Bu üç koşul $e_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2$ olmak üzere, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(e_k) - e_k\|_{C_{[0,1]}} = 0$ olarak da gösterilebilir [1,2].

1953 yılında P.P. Korovkin [2], genel bir teorem ispatlamış ve göstermiştir ki Bohman' ın koşulları genel halde gerçekleştirilebilir.

2.2. Teorem (Korovkin Teoremi)

Her n için $L_n : C[a,b] \rightarrow C[a,b]$ olmak üzere (L_n) lineer pozitif operatörler dizisi olsun. Her bir $k = 0, 1, 2$ için $e_k(x) = x^k$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(e_k) - e_k\|_{C[a,b]} = 0 ; \quad k = 0, 1, 2 \quad (2.1)$$

koşulları gerçekleşiyorsa, bu durumda $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli olan her f fonksiyonu için, $[a,b]$ aralığı üzerinde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - f\|_{C[a,b]} = 0$$

dır.

2.3. L_p Uzaylarında P.P. Korovkin Teoremi

2.5. Tanım

(X, A, μ) bir ölçü uzayı olsun. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere,

$$L_p = \left\{ f \in M(X, A) : \int_X |f(x)|^p dx < \infty \right\}$$

kümesine p -ninci kuvvetten integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı denir. Burada X bir küme, A X üzerinde bir σ cebiri, $M(X, A)$ X üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli μ ölçülebilir bütün fonksiyonların kümesidir.

$f \in L_p$ olsun. $\alpha \in \mathbb{R}$ ise $\alpha f \in L_p$ dir. Çünkü $f \in L_p$ olduğunda, $|f|^p$ integrallenebilir olup $|\alpha|^p \cdot |f|^p$ de integrallenebilirdir. Dolayısıyla $|\alpha f|^p$ integrallenebilirdir. Ayrıca $f, g \in L_p$ ise

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq \left(2 \cdot \max\{|f|, |g|\} \right)^p \leq 2^p (|f|^p + |g|^p)$$

olacağından $|f + g|^p$ integrallenebilirdir ve dolayısıyla $f + g \in L_p$ olur. Şu halde L_p kümesi, fonksiyonların noktasal toplama ve skalerle çarpma işlemleri altında bir vektör uzayıdır. Bu uzay üzerinde $p \geq 1$ olmak üzere

$\|f\|_p = \left(\int_{\mathcal{X}} |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p}$ şeklinde tanımlanan $\|\cdot\|_p : L_p \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu L_p üzerinde bir yarı normdur.

Belirtelim ki; $f \in L_p$ olmak üzere $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow \int |f|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow$ hemen hemen her yerde $f = 0$ dır [9]. Buna göre L_p üzerinde tanımlanan $\|\cdot\|_p$ fonksiyonu için

$$(a) \|f\|_p = 0 \Leftrightarrow \text{hemen hemen her yerde } f = 0$$

$$(b) \|\alpha f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p$$

$$(c) \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

özellikleri sağlanır ki bu $\|\cdot\|_p$ fonksiyonunun L_p üzerinde bir yarı norm olduğunu gösterir.

L_p üzerinde, $f \sim g \Leftrightarrow$ hemen hemen her yerde $f = g$ biçiminde tanımlanan $\sim$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Dolayısıyla bu bağıntı L_p uzayını denklik sınıflarına ayırır. Bu denklik sınıflarının kümesi L_p ile gösterilir. Buna göre L_p nin elemanları $[f]$ biçimindeki denklik sınıflarıdır. L_p uzayı,

$$[f] + [g] = [f + g]$$

$$\lambda \cdot [f] = [\lambda f]$$

şeklinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır. $[f]$ denklik sınıfı temsilci eleman f ile gösterilmek üzere $p \geq 1$ için

$$\|f\|_p = \|f\|_p = \left(\int_{\mathcal{X}} |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p}$$

biçiminde tanımlanan $\|\cdot\|_p$ fonksiyonu L_p üzerinde bir normdur.

2.5. Teorem

Kabul edelim ki $L_p(a,b)$ den $L_p(a,b)$ ye dönüşüm yapan (L_n) lineer pozitif operatörler dizisi için aşağıdaki şartlar geçerli olsun [8].

a) L_n -lerin normları düzgün sınırlı olsun. Yani öyle bir M sabiti olsun ki tüm n -ler için

$$\|L_n\|_{L_p \rightarrow L_p} \leq M < \infty ; \quad n = 1, 2, \dots$$

sağlansın.

b) $e_k(x) = x^k$ olmak üzere, her bir $k = 0, 1, 2$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(e_k) - e_k\|_{L_p} = 0$$

şartları geçerli olsun. O halde $f \in L_p(a,b)$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - f\|_{L_p} = 0$$

olur.

Buradaki yakınsama L_p -normundadır. $L_p(a, b)$ yerine $C[a, b]$ uzayında fonksiyonlar alınırsa yakınsamanın düzgün olacağına dikkat edilmelidir.

2.4. Ağırlıklı Uzaylarda Yaklaşım

Korovkin Teoremi reel eksenin sonlu ve kapalı alt aralıklarında verilmiştir. Reel eksenin tamamında veya sınırsız alt aralıklarında yaklaşım koşullarını Gadjiev araştırmıştır [6,7]. Sınırsız aralıklarda Korovkin Teoremi ağırlıklı uzaylarda incelenmiştir.

2.6. Tanım

$\varphi(x)$ reel ekseninde sürekli, monoton, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon ve $\rho(x) = 1 + [\varphi(x)]^2$ olsun. Bu durumda M_f sadece f fonksiyonuna bağlı bir sayı olmak üzere

$$|f(x)| \leq M_f \cdot \rho(x) \quad (2.2)$$

eşitsizliğini sağlayan reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonların kümesini $B_\rho(\mathbb{R})$ ile $B_\rho(\mathbb{R})$ uzayındaki sürekli fonksiyonların kümesini ise $C_\rho(\mathbb{R})$ ile gösterelim. Bu uzaylar

$$\|f\|_\rho = \sup \left\{ \frac{|f(x)|}{\rho(x)} : x \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.3)$$

normu ile birer normlu uzay olur. Burada ρ ya ağırlık fonksiyonu, $B_\rho(\mathbb{R})$ ve $C_\rho(\mathbb{R})$ uzaylarına ise ağırlıklı uzaylar denir. $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayının

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = k_f < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların kümesini $C_\rho^k(\mathbb{R})$ ile gösterelim.

2.4. Önerme

$C_\rho(\mathbb{R})$ de tanımlı bir lineer pozitif operatörün $C_\rho(\mathbb{R})$ den $B_\rho(\mathbb{R})$ ye dönüşüm yapması için gerek ve yeter koşul

$$\|L(\rho)\|_\rho \leq M$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısının bulunmasıdır.

İspat

Önce $f \in C_\rho(\mathbb{R})$ alalım ve $L: C_\rho(\mathbb{R}) \rightarrow B_\rho(\mathbb{R})$ dönüşümünün var olduğunu kabul edelim. Buna göre $\forall f \in C_\rho(\mathbb{R})$ için $L(f; x) \in B_\rho(\mathbb{R})$ olur.

Özel olarak $M_1 > 0$ olmak üzere $|\rho(x)| \leq M_1 \cdot \rho(x)$ olduğu için $\rho(x) \in C_\rho(\mathbb{R})$ ve $L(\rho) \in B_\rho(\mathbb{R})$ olur. Bu ise Eş. 2.2 den

$$|L(\rho; x)| < M \cdot \rho(x) \tag{2.4}$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısının bulunması demektir. Buradan $\frac{|L(\rho; x)|}{\rho(x)} < M$

eşitsizliğini elde ederiz. Reel sayılar kümesinde üstten sınırlı olan her kümenin bir en küçük elemanı olduğundan,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|L(\rho; x)|}{\rho(x)} < M$$

mevcut olup buradan da, Eş. 2.3 den dolayı $\|L(\rho)\|_{\rho} \leq M$ sonucuna ulaşırız.

Şimdi $\|L(\rho)\|_{\rho} \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısının var olduğunu kabul edelim.

$$\|L(\rho)\|_{\rho} = \frac{|L(\rho; x)|}{\rho(x)} \leq M$$

olduğundan

$$|L(\rho; x)| \leq M \cdot \rho(x) \quad (2.5)$$

olur. $f \in C_{\rho}(\mathbb{R})$ olduğu için Eş. 2.2 den

$$|f(x)| \leq M_f \cdot \rho(x) \text{ olacak şekilde } M_f > 0 \text{ vardır.}$$

Lineer pozitif operatörlerin monotonluk ve lineerlik özelliğini kullanarak

$$\begin{aligned} |L(f; x)| &\leq L(|f|; x) = L\left(\frac{|f|}{\rho} \cdot \rho; x\right) \\ &= \frac{|f|}{\rho} \cdot L(\rho; x) \\ &\leq M_f \cdot L(\rho; x) \\ &\leq M_f \cdot M \cdot \rho(x) \text{ Eş. 2.5 den} \end{aligned}$$

$M_f \cdot M = M_2$ dersek

$$|L(f; x)| \leq M_2 \cdot \rho(x)$$

eşitsizliğini elde ederiz ki bu da $L(f; x) \in B_\rho(\mathbb{R})$ olduğunu ispatlar.

2.5. Önerme

$L : C_\rho(\mathbb{R}) \rightarrow B_\rho(\mathbb{R})$ lineer pozitif operatörü tanımlansın. Bu durumda

$$\|L\|_{C_\rho \rightarrow B_\rho} = \|L(\rho)\|_\rho \quad (2.6)$$

eşitliği gerçekleşir.

İspat

Operatör normunun tanımından ve lineer pozitif operatörlerin monotonluk özelliğinden

$$\begin{aligned} \|L\|_{C_\rho \rightarrow B_\rho} &= \sup_{\|f\|_\rho=1} \|L(f; x)\|_\rho \\ &= \sup_{\|f\|_\rho=1} \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{L(f; x)}{\rho} \right\} \\ &\leq \sup_{\|f\|_\rho=1} \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{L(|f|; x)}{\rho(x)} \right\} \\ &\leq \sup_{\|f\|_\rho=1} \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{L\left(\frac{|f|}{\rho}, \rho; x\right)}{\rho(x)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{\|f\|_\rho=1} \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{L\left(\rho(t) \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|f(t)|}{\rho(t)}; x\right)}{\rho(x)} \right\} \\
&= \sup_{\|f\|_\rho=1} \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{L(\rho(t); x)}{\rho(x)} \right\} \|f\|_\rho \\
&= \|L(\rho)\|_\rho
\end{aligned} \tag{2.7}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan $\|\rho\|_\rho = 1$ olduğundan

$$\|L\|_{C_\rho \rightarrow B_\rho} = \sup_{\|f\|_\rho=1} \|L(f)\|_\rho \geq \|L(\rho)\|_\rho \tag{2.8}$$

eşitsizliği bulunur. Eş. 2.7 ve Eş. 2.8 den Eş. 2.6 elde edilir.

$C[a, b]$ ve $L_p(a, b)$ uzaylarında Korovkin Teoremi mevcuttur. Yani öyle şartlar bulabiliriz ki basit fonksiyonlar üzerinde operatörler dizisi yakınsak ise uzayın keyfi fonksiyonu için de aynı norma göre yakınsaklık sağlanır. Şimdi sınırsız bölgelerde tanımlanmış uzaylar için böyle bir teoremin geçerli olmadığına dair bir teorem verelim.

2.6. Teorem

Her bir ρ ağırlık fonksiyonu verildiğinde $C_\rho(\mathbb{R})$ -den $B_\rho(\mathbb{R})$ uzayına dönüşüm yapan öyle (L_n) lineer pozitif operatörler dizisi tanımlanabilir ki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(\varphi^\nu) - \varphi^\nu\|_\rho = 0 \quad ; \quad \nu = 0, 1, 2 \tag{2.9}$$

koşulları sağlanmasına rağmen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f^*) - f^*\|_{\rho} \geq 1$$

olacak şekilde bir $f^* \in C_{\rho}(\mathbb{R})$ bulunabilir.

Burada $\varphi(x)$, reel ekseninde sürekli, tüm reel ekseninde monoton artan, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$

ve $\rho(x) = 1 + [\varphi(x)]^2$ dir [7,8].

Şimdi $C_{\rho}(\mathbb{R})$ uzayında yakınsaklık teoremini verelim. Öncelikle bir lemma verelim.

2.1. Lemma

$L_n : C_{\rho}(\mathbb{R}) \rightarrow B_{\rho}(\mathbb{R})$ lineer pozitif operatörler dizisi için Eş. 2.9 daki koşullar sağlanıyorsa bu durumda $\forall f \in C_{\rho}(\mathbb{R})$ için keyfi $[a, b]$ sonlu aralığında

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [a, b]} |L_n(f; x) - f(x)| = 0$$

olur [8].

Bu lemmanın yardımıyla $C_{\rho}(\mathbb{R})$ uzayındaki yakınsaklık şartlarını bulabiliriz.

2.7. Teorem

(L_n) lineer pozitif operatörler dizisi Eş. 2.9 daki koşulları sağlıyorsa bu durumda keyfi bir $f \in C_{\rho}^k(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - f\|_{\rho} = 0$$

dır.

Açık olarak buradaki yakınsama ρ -normundadır. Yukarıdaki verilen teoremlerde $\mathbb{R}$ yerine $[0, \infty)$ aralığını alırsak teoremler yine geçerlidir [6-8]

3. SZASZ-DURRMEYER OPERATÖRLER DİZİSİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölümün ilk kısmında Szasz operatörlerinin, ikinci kısımda Szasz-Durrmeyer operatörlerinin yaklaşım özellikleri verilecektir. Üçüncü kısımda süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı, dördüncü kısımda ise C_N ve C_N^2 uzaylarında yaklaşım özellikleri incelenecektir. Son kısımda ise Szasz-Durrmeyer operatörleri x^2 fonksiyonunu koruyacak biçimde yeniden düzenlenerek daha iyi bir yaklaşım derecesi elde edilecektir.

3.1. Szasz Operatörler Dizisinin Düzgün Yakınsaklığı

Öncelikle aşağıdaki yardımcı teoremi ifade edelim.

3.1. Teorem

$A > 0$ olmak üzere $T_A : C[0, \infty) \rightarrow C[0, A]$ dönüşümünü $\forall f \in C[0, \infty)$ için $T_A(f) = f|_{[0, A]}$ olarak tanımlayalım. Burada $f|_{[0, A]}$, f nin tanım kümesinin $[0, A]$ ya kısıtlamasını göstermektedir. (L_n) , $C[0, \infty)$ üzerinde tanımlı lineer pozitif operatörler dizisi ve $k = 0, 1, 2$ için $[0, A]$ üzerinde düzgün olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_A(L_n(e_k)) = T_A(e_k)$$

oluyorsa bu durumda $[0, A]$ üzerinde düzgün olarak $\forall f \in C[0, \infty)$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f; x) - f(x) = 0$$

dır [1].

3.1. Tanım

$x \in [0, \infty)$ ve $f \in C[0, \infty)$ için $S_n : C[0, \infty) \rightarrow C[0, \infty)$,

$$S_n(f; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!}$$

şeklinde tanımlı olan lineer pozitif operatörlere Szasz operatörleri denir.

(S_n) operatörler dizisi için Korovkin tip teorem gerçekleşir: $A > 0$ sayısı için

$T_A : C[0, \infty) \rightarrow C[0, A]$ dönüşümünü $T_A(f) = f|_{[0, A]}$ olarak tanımlayalım.

$e_k(t) = t^k$; $k = 0, 1, 2$ olmak üzere

$$S_n(e_0; x) = 1, S_n(e_1; x) = x, S_n(e_2; x) = x^2 + \frac{x}{n} \text{ ve}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_A(S_n(e_k)) - T_A(e_k)\|_{C[0, A]} = 0 ; \quad k = 0, 1, 2$$

olduğundan Teorem 3.1 den

$[0, A]$ aralığı üzerinde $\forall f \in C[0, \infty)$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(f) - f\|_{C[0, A]} = 0$$

dır.

3.2. Szasz-Durrmeyer Operatörleri ile Yaklaşım

Bu kısımda Szasz-Durrmeyer operatörlerinin önce kapalı aralıkta, daha sonra ağırlıklı uzaylarda yakınsaklığını inceleyeceğiz.

3.2. Tanım

$f, [0, \infty)$ da integrallenebilir bir fonksiyon ve $x \in [0, \infty)$ için Szasz-Durrmeyer operatörleri

$$S_n^*(f; x) = n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \int_0^{\infty} f(t) p_{n,k-1}(t) dt ; \quad p_{n,k}(x) = e^{-nx} \frac{(nx)^k}{k!} \quad (3.1)$$

olarak tanımlanır.

3.2. Teorem

Eş. 3.1 ile tanımlı Szasz-Durrmeyer operatörleri Korovkin tip teoremi sağlar.

İspat

Öncelikle S_n^* in lineer ve pozitif bir operatör olduğunu gösterelim.

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\forall f_1, f_2 \in C[0, \infty)$ için

$$\begin{aligned} & S_n^*((\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)); x) \\ &= n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \int_0^{\infty} (\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)) p_{n,k-1}(t) dt \\ &= n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \int_0^{\infty} \alpha f_1(t) p_{n,k-1}(t) dt + n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \int_0^{\infty} \beta f_2(t) p_{n,k-1}(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha \left(n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \int_0^{\infty} f_1(t) p_{n,k-1}(t) dt \right) + \beta \left(n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \int_0^{\infty} f_2(t) p_{n,k-1}(t) dt \right) \\
&= \alpha S_n^*(f_1(t); x) + \beta S_n^*(f_2(t); x)
\end{aligned}$$

olduğundan S_n^* lineer bir operatördür.

$k = 0, 1, 2, \dots, n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0, \infty)$ için $p_{n,k}(x) = e^{-nx} \frac{(nx)^k}{k!} \geq 0$ olduğundan $f \geq 0$ ise

$S_n^*(f; x) \geq 0$ dır. O halde S_n^* pozitif bir operatördür.

$A > 0$ için $T_A : C[0, \infty) \rightarrow C[0, A]$ dönüşümünü $T_A(f) = f|_{[0, A]}$ olarak tanımlayalım.

Her $f \in C[0, \infty)$ ve $x \in [0, A]$ için

$$\begin{aligned}
\text{i) } S_n^*(e_0; x) &= n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \int_0^{\infty} p_{n,k-1}(t) dt \\
&= n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \int_0^{\infty} e^{-nt} \frac{(nt)^{k-1}}{(k-1)!} dt \\
&= n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} \int_0^{\infty} e^{-nt} t^{k-1} dt
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Eş.3.2 deki integralin değerini hesaplamak için $t = \frac{u}{n}$ dönüşümünü kullanırsak

$$\int_0^{\infty} e^{-nt} t^{k-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{n} \right)^{k-1} \frac{du}{n} = \frac{1}{n^k} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{k-1} du$$

integralini elde ederiz. Gamma fonksiyonu yardımıyla

$$\frac{1}{n^k} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{k-1} du = \frac{1}{n^k} \Gamma(k) = \frac{1}{n^k} (k-1)!$$

bulunur. Bu ifadeyi Eş. 3.2 de yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
S_n^*(e_0; x) &= n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \frac{1}{(k-1)!} n^{k-1} \frac{1}{n^k} (k-1)! \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \\
&= S_n(e_0; x) = 1
\end{aligned} \tag{3.3}$$

elde ederiz. Buradan da

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_A(S_n^*(e_0)) - T_A(e_0)\|_{C[0,A]} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,A]} |T_A(S_n^*(e_0; x)) - T_A(e_0; x)| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,A]} |1 - 1| = 0
\end{aligned}$$

ifadesine ulaşırız.

$$\begin{aligned}
\text{ii) } S_n^*(e_1; x) &= n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \int_0^{\infty} t \cdot p_{n,k-1}(t) dt \\
&= n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \int_0^{\infty} t \cdot e^{-nt} \frac{(nt)^{k-1}}{(k-1)!} dt \\
&= n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} \int_0^{\infty} t^k e^{-nt} dt
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Eş. 3.4 de $t = \frac{u}{n}$ değişken değişimini uygularsak

$$\begin{aligned}
&= n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{n}\right)^k \frac{du}{n} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \frac{1}{n^k} \int_0^{\infty} e^{-u} u^k du \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \frac{1}{(k-1)!} \int_0^{\infty} e^{-u} u^k du
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan yine Gamma fonksiyonu yardımı ile

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \frac{1}{(k-1)!} \Gamma(k+1) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \frac{1}{(k-1)!} \cdot k! \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} p_{n,k}(x) \\
&= S_n(e_1; x) \\
&= x
\end{aligned} \tag{3.5}$$

ifadesini elde ederiz. O halde

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_A(S_n^*(e_1)) - T_A(e_1)\|_{C[0,A]} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,A]} |T_A(S_n^*(e_1; x)) - T_A(e_1; x)| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,A]} |x - x| = 0
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız.

$$\begin{aligned}
\text{iii) } S_n^*(e_2; x) &= n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \int_0^{\infty} t^2 \cdot p_{n,k-1}(t) dt \\
&= n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \int_0^{\infty} t^2 \cdot e^{-nt} \frac{(nt)^{k-1}}{(k-1)!} dt \\
&= n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} \int_0^{\infty} e^{-nt} t^{k+1} dt
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Eş. 3.6 da $t = \frac{u}{n}$ dönüşümünü uygularsak

$$= n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{n}\right)^{k+1} \frac{du}{n}$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \frac{1}{(k-1)!} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{k+1} du$$

ifadesine ulaşırız. Yine Gamma fonksiyonu yardımı ile

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \frac{1}{(k-1)!} \Gamma(k+2) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \frac{1}{(k-1)!} (k+1)! \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 + k) p_{n,k}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^2 p_{n,k}(x) + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}(x) \\
&= S_n(e_2; x) + \frac{1}{n} S_n(e_1; x) \\
&= x^2 + \frac{2x}{n}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

ifadesini elde ederiz. Buradan da

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_A(S_n^*(e_2)) - T_A(e_2)\|_{C[0,A]} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,A]} |T_A(S_n^*(e_2; x)) - T_A(e_2; x)| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,A]} \left| x^2 + \frac{2x}{n} - x^2 \right| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,A]} \left| \frac{2x}{n} \right|
\end{aligned}$$

ifadesine ulaşırız. Buradaki supremum sonlu bir değer olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_A(S_n(e_2)) - T_A(e_2)\|_{C[0,A]} = 0$$

olur.

(i), (ii), (iii) den dolayı, Teorem 3.1 den, $[0, A]$ aralığı üzerinde her $f \in C[0, \infty)$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n^*(f) - f\|_{C[0, A]} = 0$$

dır.

3.3. Teorem

$S_n^* : C_\rho^k[0, \infty) \rightarrow B_\rho(\mathbb{R})$ olmak üzere, Eş. 3.1 ile verilen Szasz-Durrmeyer operatörleri Korovkin tipi ağırlıklı yaklaşım teoremini sağlar. Yani Eş. 2.9 daki koşullar sağlanıyorsa bu durumda

$\forall f \in C_\rho^k[0, \infty)$ ve $\forall x \in [0, \infty)$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n^*(f) - f\|_\rho = 0$$

dır.

İspat

(S_n^*) lineer pozitif operatörler dizisinin ağırlıklı uzaylarda Korovkin tipi teoremin hipotezlerini gerçeklediğini gösterelim.

i) $S_n^*(e_0; x) = 1$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n^*(e_0) - e_0\|_\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|S_n^*(e_0; x) - e_0(x)|}{1 + x^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{0}{1+x^2} = 0$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \text{ii) } \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n^*(e_1) - e_1\|_\rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|S_n^*(e_1; x) - e_1(x)|}{1+x^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|x - x|}{1+x^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ifadesine ulaşırız.

$$\begin{aligned} \text{iii) } \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n^*(e_2) - e_2\|_\rho &= \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|S_n^*(e_2; x) - e_2(x)|}{1+x^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{\left| x^2 + \frac{2}{n}x - x^2 \right|}{1+x^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{\left| \frac{2}{n}x \right|}{1+x^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{2x}{1+x^2} \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Buradaki supremum sonlu bir değer olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n^*(e_2) - e_2\|_\rho = 0$$

bulunur. Sonuç olarak (i), (ii), (iii) den dolayı Teorem 2.7 nin koşulları gerçeğlendiğinden, $\forall f \in C_\rho^k[0, \infty)$ ve $\forall x \in [0, \infty)$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n^*(f) - f\|_\rho = 0$$

dır. Böylece teorem ispatlanmış olur.

3.3. S_n^* Operatörünün Süreklilik Modülü ile Yaklaşım Hızının Hesaplanması

Burada, $(S_n^*(f))$ operatörler dizisinin f ye yakınsaklık oranına ait bir tahmin süreklilik modülü yardımıyla hesaplanacaktır.

3.3. Tanım

$\langle a, b \rangle$ ifadesi $[a, b]$, (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, \infty)$, $(-\infty, b)$, (a, ∞) aralıklarından birini gösterebilir.

$\omega_f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $x, y \in \langle a, b \rangle$ ve $\delta > 0$ olmak üzere

$$\omega_f(\delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|$$

değerine f in süreklilik modülü denir. $\omega_f(\delta)$ yerine $\omega(f; \delta)$, $\omega(\delta)$ gösterimleri de kullanılabilir. Şimdi süreklilik modülünün özelliklerini verelim.

i) $\omega_f(\delta)$ fonksiyonu δ nin monoton artan bir fonksiyonudur.

ii) f nin $\langle a, b \rangle$ de düzgün sürekli olması için gerek ve yeter koşul $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega_f(\delta) = 0$ olmasıdır.

iii) $m \in \mathbb{N}$ ise $\omega_f(m\delta) \leq m\omega_f(\delta)$ dır.

iv) $\lambda > 0$ reel sayısı için $\omega_f(\lambda\delta) \leq (\lambda+1)\omega_f(\delta)$ dır.

v) $|f(t) - f(x)| \leq \omega_f(|t - x|)$ dır.

vi) $|f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t - x|}{\delta} + 1 \right) \omega_f(\delta)$ dır.

3.4. Teorem

Eş. 3.1 ile tanımlanan S_n^* lineer pozitif operatörü $A > 0$ olmak üzere, yeterince büyük n ler, $x \in [0, A] \subset [0, \infty)$ ve $f \in C[0, A]$ için,

$$|S_n^*(f(t); x) - f(x)| \leq K \omega_{[0, A]}(n^{-1/2})$$

eşitsizliğini sağlar. Burada K , n den bağımsız bir sabit ve $\omega_{[0, A]}$, f nin $[0, A]$ aralığında verilen süreklilik modülüdür.

İspat

S_n^* ın lineerliğini ve üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$|S_n^*(f(t); x) - f(x)| \leq |S_n^*((f(t) - f(x)); x)| + |f(x)| |S_n^*(1; x) - 1| \quad (3.8)$$

ifadesini elde ederiz. $S_n^*(1; x) = 1$ olduğundan ve S_n^* ın monotonluk özelliğini Eş. 3.8 de yerine yazarsak

$$|S_n^*(f(t); x) - f(x)| \leq S_n^*(|f(t) - f(x)|; x)$$

S_n^* in tanımından

$$\left| S_n^*(f(t); x) - f(x) \right| \leq n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \int_0^{\infty} |f(t) - f(x)| p_{n,k-1}(t) dt \quad (3.9)$$

ifadesini elde ederiz. Eş. 3.9 da süreklilik modülünün (vi) özelliğini kullanırsak

$$\begin{aligned} &\leq n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \int_0^{\infty} \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1 \right) \omega(\delta) p_{n,k-1}(t) dt \\ &= \omega(\delta) \left[n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \int_0^{\infty} p_{n,k-1}(t) dt + \frac{1}{\delta} \left(n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \int_0^{\infty} |t-x| p_{n,k-1}(t) dt \right) \right] \\ &= \omega(\delta) \left[S_n^*(1; x) + \frac{1}{\delta} \left(n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \int_0^{\infty} |t-x| p_{n,k-1}(t) dt \right) \right] \\ &= \omega(\delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} \left(n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \int_0^{\infty} |t-x| \sqrt{p_{n,k-1}(t)} \sqrt{p_{n,k-1}(t)} dt \right) \right] \end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. Bu eşitlikte integral üzerine Cauchy-Schwartz eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{aligned} &\leq \omega(\delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} \left(n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \left(\int_0^{\infty} \sqrt{p_{n,k-1}(t)}^2 dt \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^{\infty} (t-x)^2 \sqrt{p_{n,k-1}(t)}^2 dt \right)^{1/2} \right) \right] \\ &= \omega(\delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} \left(n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \left(\int_0^{\infty} p_{n,k-1}(t) dt \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^{\infty} (t-x)^2 p_{n,k-1}(t) dt \right)^{1/2} \right) \right] \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlikte toplam üzerine Cauchy-Schwartz eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{aligned}
&\leq \omega(\delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} \left(\left(n \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{p_{n,k}(x)}^2 \int_0^{\infty} p_{n,k-1}(t) dt \right)^{1/2} \cdot \left(n \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{p_{n,k}(x)}^2 \int_0^{\infty} (t-x)^2 p_{n,k-1}(t) dt \right)^{1/2} \right) \right] \\
&= \omega(\delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} \left(\left(n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \int_0^{\infty} p_{n,k-1}(t) dt \right)^{1/2} \cdot \left(n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \int_0^{\infty} (t-x)^2 p_{n,k-1}(t) dt \right)^{1/2} \right) \right] \\
&= \omega(\delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} \left(S_n^*(1; x) \right)^{1/2} \cdot \left(S_n^*((t-x)^2; x) \right)^{1/2} \right] \\
&= \omega(\delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} \left(S_n^*((t-x)^2; x) \right)^{1/2} \right] \\
&= \omega(\delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} \left(S_n^*(t^2; x) - 2x S_n^*(t; x) + x^2 S_n^*(1; x) \right)^{1/2} \right] \\
&= \omega(\delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} \left(x^2 + \frac{2x}{n} - 2x \cdot x + x^2 \right)^{1/2} \right] \\
&= \omega(\delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} \left(\frac{2x}{n} \right)^{1/2} \right]
\end{aligned}$$

ifadesine ulaşırız. $\delta_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ olarak alırsak

$$\begin{aligned}
|S_n^*(f; x) - f(x)| &\leq \omega \left(1 + \sqrt{n} \frac{(2x)^{1/2}}{\sqrt{n}} \right) \\
&= \omega(1 + (2x)^{1/2})
\end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. $x \in [0, A]$ için $(2x)^{1/2} \leq (2A)^{1/2}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
&\leq \omega_{[0,A]}(n^{-1/2}) (1 + \sqrt{2A}) \\
&= K \omega_{[0,A]}(n^{-1/2}) \quad ; \quad (K = 1 + \sqrt{2A})
\end{aligned}$$

bulunur.

3.4. Szasz-Durrmeyer Operatörlerinin C_N ve C_N^2 Uzaylarında Yaklaşım Özellikleri

Bu bölümde Szasz-Durrmeyer operatörlerinin C_N ve C_N^2 uzaylarında merkezi momentler yardımıyla yaklaşım özellikleri incelenecektir [10].

3.4. Tanım

$N \in \mathbb{IP} := \mathbb{N} \cup \{0\}$ için;

$$w_0(x) := 1, \quad w_N(x) := (1 + x^N)^{-1} \quad (x \geq 0, N \in \mathbb{N})$$

ile tanımlı ağırlık fonksiyonlarıyla C_N uzayı

$$C_N := \{f \in C[0, \infty); w_N f, [0, \infty) \text{ aralığında düzgün sürekli ve sınırlı}\}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu uzayda bir norm

$$\|f\|_N := \sup_{x \geq 0} w_N(x) |f(x)|$$

ile tanımlanır. h , pozitif bir sabit ve

$$\Delta_h^2 f(x) := f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x) \text{ olmak üzere}$$

$$\omega_N^2(f; \delta) := \sup_{0 < h \leq \delta} \|\Delta_h^2 f\|_N \text{ dır.}$$

$m \in \mathbb{IP}$ olmak üzere S_n^* operatörünün m -inci basamaktan momentini

$$S_n^*((t-x)^m; x) = n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \int_0^{\infty} (t-x)^m p_{n,k-1}(t) dt$$

şeklindedir.

Eş. 3.3, Eş. 3.5, Eş. 3.7 ve S_n^* operatörünün lineerliğini dikkate alarak birinci ve ikinci merkezi momentleri

$$S_n^*((t-x); x) = 0 \quad (3.10)$$

$$S_n^*((t-x)^2; x) = \frac{2x}{n} \quad (3.11)$$

dir.

Daha genel olarak aşağıdaki lemmayı verelim.

3.1. Lemma

$N \in \mathbb{IP}$ olmak üzere

$$S_n^*(t^N; x) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i(a, n) x^{N-i} \quad (3.12)$$

ifadesi geçerlidir. Burada $b_i(a, n)$ katsayıları

$$b_i(a, n) = \begin{cases} 1, & i = 0 \text{ ise} \\ \frac{a_i}{n^i}, & i = 1, 2, \dots, N-1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat

$$\begin{aligned}
 S_n^*(t^N; x) &= n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \int_0^{\infty} t^N p_{n,k-1}(t) dt \\
 &= n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \int_0^{\infty} t^N e^{-nt} \frac{(nt)^{k-1}}{(k-1)!} dt \\
 &= n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} \int_0^{\infty} t^{N+k-1} e^{-nt} dt
 \end{aligned}$$

eşitliğindeki integrale $t = \frac{u}{n}$ değişken değişimini uygularsak,

$$\begin{aligned}
 &= n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{n}\right)^{N+k-1} e^{-u} \frac{du}{n} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \frac{n^{k-1}}{n^{N+k-1} (k-1)!} \int_0^{\infty} u^{N+k-1} e^{-u} du
 \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Gamma fonksiyonu yardımı ile

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \frac{1}{n^N (k-1)!} \Gamma(k+N) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \frac{1}{n^N (k-1)!} (k+N-1)! \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \frac{1}{n^N} \cdot \frac{1.2...(k-1).k(k+1)...(k+N-1)}{1.2...(k-1)} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \frac{k(k+1)(k+2)...(k+N-1)}{n^N}
 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

$k, N \in \mathbb{N}$ ve $k \neq N-1$ olmak üzere

$$\prod_{j=0}^{N-1} (k+j) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \prod_{j=0}^{N-1-i} (k-j), \quad a_0 = 1, a_1 = N(N-1), a_2, \dots, a_{N-1} \in \mathbb{N}$$

eşitliği yardımı ile

$$\begin{aligned} S_n^*(t^N; x) &= \sum_{i=0}^{N-1} a_i \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k-1)\dots(k-(N-i-1))}{n^N} e^{-nx} \frac{(nx)^k}{k!} \right] \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} a_i \left[\sum_{k=N-i}^{\infty} \frac{1}{n^N} e^{-nx} \frac{(nx)^k}{(k-(N-i))!} \right] \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} a_i \frac{1}{n^N} (nx)^{N-i} \left[\sum_{k=N-i}^{\infty} e^{-nx} \frac{(nx)^{k-(N-i)}}{(k-(N-i))!} \right] \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} a_i \frac{1}{n^i} x^{N-i} \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} b_i(a, n) x^{N-i} \tag{3.14}$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için $b_0(a, n) \rightarrow 1$ ve $i = 1, 2, \dots, N-1$ için $b_i(a, n) \rightarrow 0$ olur. Yani

$S_n^*(t^N; x)$, x in N . dereceden bir polinomudur.

3.2. Lemma

$x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ için düzgün olarak

$$w_N(x) S_n^*(1/w_N(t); x) \leq M_1 \tag{3.15}$$

olacak biçimde her bir $N \in \mathbb{IP}$ sayısına karşılık M_1 sayısı vardır. (M_1 sayısı N ye bağlı sabit bir sayıdır.)

Özel olarak herhangi bir $f \in C_N$ için

$$\|S_n^*(f)\|_N \leq M_1 \|f\|_N \quad (3.16)$$

eşitsizliği sağlanır. Yani $(\|S_n^*(f)\|_N)$ dizisi düzgün sınırlıdır.

İspat

$$\begin{aligned} S_n^*(1/w_N(t); x) &= S_n^*\left(1/(1+t^N)^{-1}; x\right) \\ &= S_n^*(1+t^N; x) \end{aligned}$$

ifadesinde S_n^* ın lineerliğini ve Eş. 3.3 ve Eş. 3.13 ve Eş. 3.14 ü kullanarak

$$\begin{aligned} &= S_n^*(1; x) + S_n^*(t^N; x) \\ &= 1 + \sum_{i=0}^{N-1} a_i \frac{1}{n^i} x^{N-i} \\ &= 1 + x^N + \sum_{i=1}^{N-1} a_i \frac{1}{n^i} x^{N-i} \\ &= 1 + x^N + \sum_{i=1}^{N-1} b_i(a, n) x^{N-i} \end{aligned} \quad (3.17)$$

eşitliğini elde ederiz. Lemma 3.1 den $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ için $b_i(a, n)$ katsayıları sınırlıdır.

Eş. 3.17 nin her iki yanını $w_N(x)$ ağırlık fonksiyonu ile çarparsak

$$\begin{aligned}
w_N(x)S_n^*(1/w_N(t);x) &= w_N(x) \left[1 + x^N + \sum_{i=1}^{N-1} b_i(a,n)x^{N-i} \right] \\
w_N(x)S_n^*(1/w_N(t);x) &= \frac{1}{1+x^N} \left[1 + x^N + \sum_{i=1}^{N-1} b_i(a,n)x^{N-i} \right] \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{N-1} b_i(a,n)x^{N-i} \Big/ 1+x^N
\end{aligned} \tag{3.18}$$

ifadesini elde ederiz. Eş. 3.18 deki toplam x e göre sınırlı olduğundan

$$w_N(x)S_n^*(1/w_N(t);x) \leq M_1$$

olacak şekilde N ye bağlı $M_1 > 0$ sabit sayısı vardır.

Şimdi $f \in C_N$ için Eş. 3.16 yı ispatlayalım.

$$\begin{aligned}
w_N(x) \left| S_n^*(f;x) \right| &= w_N(x) \left| n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \int_0^{\infty} f(t) p_{n,k-1}(t) dt \right| \\
&= w_N(x) \left| n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \int_0^{\infty} \frac{w_N(t)}{w_N(t)} f(t) p_{n,k-1}(t) dt \right| \\
&\leq w_N(x) \sup_{t \in [0, \infty)} \left(n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \int_0^{\infty} w_N(t) f(t) (w_N(t))^{-1} p_{n,k-1}(t) dt \right) \\
&\leq w_N(x) \sup_{t \in [0, \infty)} (|f(t)| w_N(t)) \left(n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \int_0^{\infty} (w_N(t))^{-1} p_{n,k-1}(t) dt \right)
\end{aligned}$$

C_N uzayındaki normun tanımından

$$= w_N(x) \|f\|_N S_n^*(1/w_N(t);x) \tag{3.19}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Eş. 3.15 den

$$\|S_n^*(f)\|_N \leq M_1 \|f\|_N$$

ifadesine ulaşırız.

3.3. Lemma

$x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ için

$$w_N(x)S_n^*\left((t-x)^2/w_N(t);x\right) \leq M_2 \frac{2x}{n} \quad (3.20)$$

$$\frac{1}{n} w_N(x)S_n^*(t/w_N(t);x) \leq M_3 \frac{2x}{n} \quad (3.21)$$

eşitsizlikleri gerçekleşir. Burada, $i = 2, 3$ olmak üzere M_i , N ye bağlı sabit sayılardır.

İspat

S_n^* ın lineerliğini ve Eş. 3. 11 den

$$\begin{aligned} S_n^*\left((t-x)^2/w_N(t);x\right) &= S_n^*\left((t-x)^2(1+t^N);x\right) \\ &= S_n^*\left((t-x)^2;x\right) + S_n^*\left((t-x)^2t^N;x\right) \\ &= \frac{2x}{n} + S_n^*\left((t^2-2xt+x^2)t^N;x\right) \\ &= \frac{2x}{n} + S_n^*\left(t^{N+2};x\right) - 2xS_n^*\left(t^{N+1};x\right) + x^2S_n^*\left(t^2;x\right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

ifadesini elde ederiz. Eş. 3.12 den yararlanarak

$$\begin{aligned}
& S_n^*(t^{N+2}; x) - 2xS_n^*(t^{N+1}; x) + x^2S_n^*(t^2; x) \\
&= \sum_{i=0}^{N+1} b_i(a, n)x^{N+2-i} - 2x \sum_{i=0}^N b_i(a, n)x^{N+1-i} + x^2 \sum_{i=0}^{N-1} b_i(a, n)x^{N-i} \\
&= b_0(a, n)x^{N+2} + b_1(a, n)x^{N+1} + \dots + b_{N-1}(a, n)x^3 + b_N(a, n)x^2 + b_{N+1}(a, n)x \\
&\quad - 2x(b_0(a, n)x^{N+1} + b_1(a, n)x^N + \dots + b_{N-1}(a, n)x^2 + b_N(a, n)x) \\
&\quad + x^2(b_0(a, n)x^N + b_1(a, n)x^{N-1} + \dots + b_{N-1}(a, n)x) \\
&= b_0(a, n)x^{N+2} + b_1(a, n)x^{N+1} + \dots + b_{N-1}(a, n)x^3 + b_N(a, n)x^2 + b_{N+1}(a, n)x \\
&\quad - 2b_0x^{N+2} - 2b_1(a, n)x^{N+1} - \dots - 2b_{N-1}(a, n)x^3 - 2b_N(a, n)x^2 \\
&\quad + b_0x^{N+2} + b_1(a, n)x^{N+1} + \dots + b_{N-1}(a, n)x^3 \\
&= b_{N+1}(a, n)x - b_N(a, n)x^2
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Eş. 3.23 deki ifade belirli bir $N \in \mathbb{N}$ ve belirli $x \geq 0$ için $n \rightarrow \infty$ iken 0 a yakınsar. Bu ifadeyi Eş. 3.22 de yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
S_n^*((t-x)^2/w_N(t); x) &= \frac{2x}{n} + b_{N+1}(a, n)x - b_N(a, n)x^2 \\
&= \frac{2x}{n} + \frac{a_{N+1}}{n^{N+1}}x - \frac{a_N}{n^N}x^2 \\
&\leq \frac{2x}{n} + \frac{x}{n} \left(\frac{a_{N+1}}{n^N} - \frac{a_N}{n^{N-1}}x \right) \\
&\leq \frac{2x}{n} + \frac{2x}{n} \left(\frac{a_{N+1}}{n^N} - \frac{a_N}{n^{N-1}}x \right) \\
&= \frac{2x}{n} \left(1 + \frac{a_{N+1}}{n^N} - \frac{a_N}{n^{N-1}}x \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadenin her iki yanını $w_N(x)$ ağırlık fonksiyonu ile çarparsak

$$w_N(x)S_n^*(t/w_N(t); x) \leq \frac{2x}{n} \frac{1}{1+x^N} \left(1 + \frac{a_{N+1}}{n^N} - \frac{a_N}{n^{N-1}}x \right)$$

olur. C_N nin tanımından sağdaki ifade sınırlı olduğundan

$$w_N(x)S_n^*((t-x)^2/w_N(t);x) \leq \frac{2x}{n}M_2$$

olacak şekilde N ye bağlı M_2 sabit sayısı vardır. Böylece Eş. 20 deki ifadenin ispatı tamamlanmış olur.

Şimdi Eş.3.21 deki ifadesini ispatlayalım. S_n^* ın lineerliğini, Eş. 3.5 ve Eş.3.14 den yararlanarak

$$\begin{aligned} S_n^*(t/w_N(t);x) &= S_n^*(t(1+t^N);x) \\ &= S_n^*(t;x) + S_n^*(t^{N+1};x) \\ &= x + b_0(a,n)x^{N+1} + \dots + b_N(a,n)x \\ &= x(1 + b_0(a,n)x^N + \dots + b_N(a,n)) \end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz. Bu eşitliğin her iki yanını $\frac{1}{n}w_N(x)$ ile çarparsak

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}w_N(x)S_n^*(t/w_N(t);x) &= \frac{1}{n} \frac{x}{1+x^N} [1 + b_0(a,n)x^N + \dots + b_N(a,n)] \\ &\leq \frac{2x}{n} \frac{1}{1+x^N} [1 + b_0(a,n)x^N + \dots + b_N(a,n)] \\ &\leq \frac{2x}{n}M_3 \end{aligned}$$

olacak şekilde N ye bağlı M_3 sabit sayısı vardır. Böylece ispat tamamlanır. Burada

$S_n^*((t-x)^2;x) = \frac{2x}{n}$ olduğuna dikkat edilmelidir. Dolayısıyla bulduğumuz sonuçlar

ikinci momentle bağlantılıdır. Şimdi C_N^2 uzayında yaklaşım özelliklerini inceleyelim ve Jackson tip bir eşitsizlik elde edelim.

3.4. Lemma

$N \in \mathbb{P}$, $g \in C_N^2 := \{f \in C_N; f'' \in C_N\}$ olsun.

Tüm $n \in \mathbb{N}$, $x \geq 0$ için

$$w_N(x) \left| S_n^*(g; x) - g(x) \right| \leq M_4 \|g''\|_N \frac{2x}{n} \quad (3.24)$$

olacak biçimde N ye bağlı sabit bir M_4 sayısı vardır.

İspat

$$g(t) - g(x) = (t - x)g'(x) + \int_x^t \int_x^s g''(u) du ds \quad (x, t \geq 0) \quad (3.25)$$

eşitliğini göz önüne alalım. Eş. 3.25 in sağındaki ikinci terim için bir üst sınır bulalım. Öncelikle $x \leq s \leq t$ için $1 + u^N \leq 1 + t^N$ eşitsizliğini göz önünde bulundurarak

$$\int_x^t \int_x^s (1 + u^N) du ds$$

ifadesinin değerini hesaplayalım.

$$\int_x^t \int_x^s (1 + u^N) du ds \leq \int_x^t \int_x^s (1 + t^N) du ds$$

$$\begin{aligned}
&= (1+t^N) \int_x^t \int_x^s du ds \\
&= (1+t^N) \int_x^t u \Big|_x^s ds \\
&= (1+t^N) \int_x^t (s-x) ds \\
&= (1+t^N) \left(\frac{s^2}{2} - xs \right) \Big|_x^t \\
&= (1+t^N) \left(\frac{t^2}{2} - xt - \frac{x^2}{2} + x^2 \right) \\
&= \frac{(t-x)^2}{2} (1+t^N) \\
&\leq \frac{(t-x)^2}{2} (1+t^N + 1+x^N) \\
&= \frac{(t-x)^2}{2} [1/w_N(t) + 1/w_N(x)] \tag{3.26}
\end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz.

$$\begin{aligned}
\left| \int_x^t \int_x^s g''(u) du ds \right| &= \left| \int_x^t \int_x^s g''(u) \frac{w_N(u)}{w_N(u)} du ds \right| \\
&\leq \|g''\|_N \left| \int_x^t \int_x^s \frac{1}{w_N(u)} du ds \right| \\
&= \|g''\|_N \left| \int_x^t \int_x^s (1+u^N) du ds \right| \\
&\leq \|g''\|_N \frac{(t-x)^2}{2} [1/w_N(t) + 1/w_N(x)] \quad \text{Eş. 3.26 dan} \tag{3.27}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. Benzer şekilde $t \leq x \leq s$ olması durumunda da Eş. 3.27 elde edilir.

Şimdi $S_n^*(g(t) - g(x); x)$ ifadesini hesaplayalım. S_n^* ın lineerlik, monotonluk özelliği ile Eş. 3.5, Eş. 3.25 ve Eş. 3.27 yi kullanarak

$$\begin{aligned}
& \left| w_N(x) S_n^*(g(t) - g(x); x) \right| \\
&= \left| w_N(x) \left(S_n^*((t-x)g'(x); x) + S_n^*\left(\int_x^t \int_x^s g''(u) du ds; x\right) \right) \right| \\
&\leq w_N(x) S_n^*\left(\left|\int_x^t \int_x^s g''(u) du ds\right|; x\right) \\
&\leq \frac{1}{2} \|g''\|_N \left[S_n^*((t-x)^2; x) + w_N(x) S_n^*((t-x)^2 / w_N(t); x) \right] \tag{3.28}
\end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz. Lemma 3.3 ve Eş. 3.11 den

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2} \|g''\|_N \left[\frac{2x}{n} + M_2 \frac{2x}{n} \right] \\
&\leq \frac{1}{2} \|g''\|_N \frac{2x}{n} [1 + M_2] \\
&\leq \|g''\|_N \frac{2x}{n} [1 + M_2]
\end{aligned}$$

yeterince büyük M_4 sabit sayısı için

$$\leq M_4 \|g''\|_N \frac{2x}{n}$$

sonucuna ulaşırız. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi $h > 0$ için Steklov' un

$$f_h(x) := \left(\frac{2}{h}\right)^2 \int_0^{h/2} \int_0^{h/2} [2f(x+s+t) - f(x+2(s+t))] ds dt$$

fonksiyonu yardımıyla

$$\begin{aligned}
 f(x) - f_h(x) &= \left(\frac{2}{h}\right)^2 \int_0^{h/2} \int_0^{h/2} f(x) \, ds \, dt - \left(\frac{2}{h}\right)^2 \int_0^{h/2} \int_0^{h/2} [2f(x+s+t) - f(x+2(s+t))] \, ds \, dt \\
 &= \left(\frac{2}{h}\right)^2 \int_0^{h/2} \int_0^{h/2} [f(x) - 2f(x+s+t) + f(x+2(s+t))] \, ds \, dt \\
 &= \left(\frac{2}{h}\right)^2 \int_0^{h/2} \Delta_{s+t}^2 f(x) \, ds \, dt
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

ifadesi elde edilir. Şimdi f_h' ve f_h'' ı hesaplayalım.

$$f_h(x) = \frac{4}{h^2} \int_0^{h/2} \int_0^{h/2} [2f(x+s+t) - f(x+2(s+t))] \, ds \, dt$$

olduğuna göre

$$\begin{aligned}
 f_h'(x) &= \frac{4}{h^2} \int_0^{h/2} [2f(x+s+h/2) - f(x+2(s+h/2)) - 2f(x+s) + f(x+2s)] \, ds \\
 &= \int_0^{h/2} [8(f(x+s+h/2) - f(x+s)) - 4(f(x+2s+h) - f(x+2s))] \, ds \\
 &= \frac{1}{h^2} \int_0^{h/2} [8\Delta_{h/2}f(x+s) - 4\Delta_hf(x+2s)] \, ds \\
 &= \frac{1}{h^2} \int_0^{h/2} 8\Delta_{h/2}f(x+s) \, ds - \frac{1}{h^2} \int_0^{h/2} 4\Delta_hf(x+2s) \, ds
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Eş. 3.30 daki integrallerin değerlerini hesaplayalım.

$$\frac{1}{h^2} \int_0^{h/2} \Delta_{h/2}f(x+s) \, ds = \frac{1}{h^2} \int_0^{h/2} [f(x+s+h/2) - f(x+s)] \, ds$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h^2} [f(x+h) - 2f(x+h/2) + f(x)] \\
&= \frac{1}{h^2} \Delta_{h/2}^2 f(x)
\end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h^2} \int_0^{h/2} \Delta_h f(x+2s) ds &= \frac{1}{h^2} \int_0^{h/2} [f(x+2s+h) - f(x+2s)] ds \\
&= \frac{1}{h^2} [f(x+2h) - f(x+h) - f(x+h) + f(x)] \\
&= \frac{1}{h^2} [f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)] \\
&= \frac{1}{h^2} \Delta_h^2 f(x)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Eş. 3.31 ve Eş.3.32 yi, Eş. 3.30 da yerine yazarsak

$$f'_h = h^{-2} [8\Delta_{h/2}^2 f(x) - 4\Delta_h^2 f(x)]$$

ifadesine ulaşırız. Dolayısıyla

$$f''_h(x) = h^{-2} [8\Delta_{h/2}^2 f(x) - 4\Delta_h^2 f(x)] \tag{3.33}$$

olur. Şimdi $\|f - f_h\|_N$ ve $\|f''\|_N$ ifadelerini hesaplayalım.

$$f(x) - f_h(x) = \left(\frac{2}{h}\right)^2 \int_0^{h/2} \int_0^{h/2} \Delta_{s+t}^2 f(x) ds dt$$

eşitliğini kullanarak ve C_N uzayındaki normun tanımından

$$\begin{aligned}
\|f - f_h\|_N &\leq \|\Delta_h^2 f\|_N \left(\frac{2}{h}\right)^2 \int_0^{h/2} \int_0^{h/2} ds \, dt \\
&= \|\Delta_h^2 f\|_N \left(\frac{2}{h}\right)^2 \left(\frac{h}{2}\right)^2 \\
&= \|\Delta_h^2 f\|_N \\
&\leq \omega_N^2(f; h)
\end{aligned} \tag{3.34}$$

ifadesini elde ederiz.

Üçgen eşitsizliğini Eş. 3.33 de uygularsak

$$\|f_h''\|_N \leq 12h^{-2} \omega_N^2(f, h) \tag{3.35}$$

olur.

3.5. Teorem

Herhangi bir $N \in \mathbb{IP}$ ve $f \in C_N$ için

$$w_N(x) \left| S_n^*(f; x) - f(x) \right| \leq M_5 \omega_N^2 \left(f, \sqrt{\frac{2x}{n}} \right) \tag{3.36}$$

eşitsizliği tüm $x \geq 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için geçerlidir. Burada M_5 sabit sayısı N ye bağlı sabit bir sayıdır.

İspat

$f \in C_N$ ve $h > 0$ için

$$w_N(x) \left| S_n^*(f; x) - f(x) \right|$$

ifadesini düzenleyelim.

$$\begin{aligned} & w_N(x) \left| S_n^*(f; x) - f(x) \right| \\ &= w_N(x) \left| S_n^*(f(t) - f_h(t) + f_h(t); x) - f(x) + f_h(x) - f_h(x) \right| \\ &\leq w_N(x) \left[\left| S_n^*(f(t) - f_h(t); x) \right| + \left| S_n^*(f_h(t); x) - f_h(t) \right| + \left| f_h(x) - f(x) \right| \right] \\ &= w_N(x) \left| S_n^*(f(t) - f_h(t); x) \right| + w_N(x) \left| S_n^*(f_h(t); x) - f_h(t) \right| + w_N(x) \left| f_h(x) - f(x) \right| \end{aligned}$$

Lemma 3.2, Lemma 3.4, Eş. 3.34 ve Eş. 3.35 den

$$\begin{aligned} &\leq M_1 \|f - f_h\|_N + M_4 \|f_h''\|_N \frac{2x}{n} + \|f_h - f\|_N \\ &= \|f - f_h\|_N [M_1 + 1] + M_4 \|f_h''\|_N \frac{2x}{n} \\ &\leq \omega_N^2(f; h) [M_1 + 1] + M_4 12h^{-2} \omega_N^2(f; h) \frac{2x}{n} \end{aligned}$$

yeterince büyük N ye bağlı sabit M_5 sayısı için

$$\begin{aligned} &\leq \omega_N^2(f; h) M_5 + M_5 h^{-2} \omega_N^2(f; h) \frac{2x}{n} \\ &= \omega_N^2(f; h) M_5 \left(1 + \frac{2x}{n} h^{-2} \right) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitsizlikte $h = \sqrt{\frac{2x}{n}}$ yazarsak

$$w_N(x) \left| S_n^*(f; x) - f(x) \right| \leq \omega_N^2(f; h) M_5 \left[1 + \frac{2x}{n} \bigg/ \frac{2x}{n} \right]$$

$$\leq 2\omega_N^2(f; h)M_5$$

ifadesine ulaşırız. Buradan da her $f \in C_N$ ve $x \geq 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_N(x) |S_n^*(f; x) - f(x)| = 0$$

olur.

3.5. Daha İyi Bir Yaklaşım Derecesi

Teorem 3.2 den S_n^* lineer pozitif operatörü $e_0(x) = 1$ ve $e_1(x) = x$ fonksiyonlarını koruduğunu fakat $e_2(x) = x^2$ fonksiyonunu korumadığını görmekteyiz. Fakat bazı işlemlerle e_0 , e_2 fonksiyonlarını koruyacak şekilde S_n^* operatörünü yeniden düzenleyerek daha iyi bir yaklaşım derecesi elde edeceğiz. Bu problemle ilgili olarak çeşitli çalışmalar yapılmaktadır. Rempulska ve Tomczak' ın makalesinden yararlanarak aşağıdaki kavramları hatırlatalım [13].

(L_n) lineer pozitif operatörler dizisi olmak üzere $L_n(e_k; x) = e_k$, $k = 0, 1$ olsun.

$$L_n(e_2; x) = x^2 + \frac{ax^2 + bx}{\lambda_n} ; \quad x \in [0, \infty), \quad n \geq n_0 \quad (3.37)$$

$a, b \geq 0$, $a^2 + b^2 > 0$ sayıları ve $\lambda_n > 0$ olmak üzere bir $(\lambda_n)_{n_0}^\infty$, $n_0 \in \mathbb{N}$, artan ve sınırsız dizisi vardır. $(u_n(x))$, $[0, \infty)$ aralığında tanımlı, sürekli ve $0 \leq u_n(x) < \infty$ olacak biçimde fonksiyonlar dizisi için

$$u_n(x) := \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4\lambda_n(a + \lambda_n)x^2}}{2(a + \lambda_n)}$$

olarak tanımlansın. Burada $L_n(f; x)$ operatöründe x yerine $u_n(x)$ alarak operatörü yeniden düzenleyelim ve bu operatörü

$$L_n^*(f; x) := L_n(f; u_n(x)) \quad (3.38)$$

ile gösterelim. Bu operatörler dizisi için $L_n^*(e_0; x) = 1$, $L_n^*(e_1; x) = u_n(x)$ ve $L_n^*(e_2; x) = x^2$ dir. Buradan da L_n^* in lineerliğini kullanarak

$$\begin{aligned} L_n^*((t-x)^2; x) &= L_n^*(t^2; x) - 2xL_n^*(t; x) + x^2L_n^*(1; x) \\ &= 2x(x - u_n(x)) \end{aligned}$$

elde edilir.

(S_n^*) lineer pozitif operatörler dizisi için

$$S_n^*(e_2; x) = x^2 + \frac{2x}{n}$$

olduğundan

$$u_n(x) = \frac{-1 + \sqrt{1 + n^2 x^2}}{n}$$

şeklindedir. Burada $0 \leq u_n(x) < \infty$ ve $u_n(x)$ reel değerli ve süreklidir. x yerine $u_n(x)$ yazarak elde ettiğimiz operatörler dizisini $(\tilde{S}_n)$ ile gösterelim.

Lemma 3.5.

$x \geq 0$ için

$$(i) \tilde{S}_n(e_0; x) = 1$$

$$(ii) \tilde{S}_n(e_1; x) = u_n(x) = \frac{-1 + \sqrt{1 + n^2 x^2}}{n}$$

$$(iii) \tilde{S}_n(e_2; x) = x^2$$

eşitlikleri gerçekleşir. S_n^* ve $\tilde{S}_n$ operatörler dizisinin yaklaşım derecelerini karşılaştırmak istiyoruz. Bunun için önce Devore' nin aşağıdaki teoremini hatırlatalım.

Teorem 3.6.

Bir (L_n) lineer pozitif operatörler dizisi, $L_n : C[a, b] \rightarrow C[c, d]$ ve $[a, b] \subseteq [c, d]$ olsun. $x \in [c, d]$ için $\alpha_n^2(x) = L_n((t-x)^2; x)$ olmak üzere eğer $f \in C[a, b]$ ve $x \in [c, d]$ ise bu durumda

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq |f(x)| |e_0(x) - L_n(e_0; x)| + \left| L_n(e_0; x) + (L_n(e_0; x))^{1/2} \right| \omega(f, \alpha_n(x))$$

dir [15].

Teorem 3.4 den (S_n^*) lineer pozitif operatörler dizisi her $f \in C[0, \infty)$, $x \geq 0$ ve $n > 1$ için

$$|S_n^*(f; x) - f(x)| \leq 2\omega(f; \alpha_n(x)) ; \alpha_n(x) = \sqrt{\frac{2x}{n}} \quad (3.39)$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.7.

$(\tilde{S}_n)$ lineer pozitif operatörler dizisi her $f \in C[0, \infty)$, $x \geq 0$ ve $n > 1$ için

$$\left| \tilde{S}_n(f; x) - f(x) \right| \leq 2\omega(f; \alpha_n(x)) ; \quad \alpha_n(x) = \sqrt{2x(x - u_n(x))} \quad (3.40)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

Lemma 3.5 den $\tilde{S}_n((t-x)^2; x) = \sqrt{2x(x - u_n(x))}$ ifadesinden ve Teorem 3.6 dan ispat açıktır.

Şimdi Eş. 3.40 ve Eş. 3.39 da verilen yaklaşım derecelerini karşılaştıralım. Bunun için

$$2x(x - u_n(x)) < \frac{2x}{n}$$

olduğunu $x \in [0, \infty)$ için göstermeliyiz.

$x \in [0, \infty)$ için

$$1 + xn < 1 + \sqrt{1 + (xn)^2}$$

$$xn + 1 - \sqrt{1 + (xn)^2} < 1$$

$$x - \frac{-1 + \sqrt{1 + (xn)^2}}{n} < \frac{1}{n}$$

olup bu eşitsizliğin her iki tarafını $2x$ ile çarparsak

$$2x \left(x - \frac{-1 + \sqrt{1 + (xn)^2}}{n} \right) < \frac{2x}{n}$$

ifadesine ulaşırız. Buradan da $\forall x \in [0, \infty)$ için

$$2x(x - u_n(x)) < \frac{2x}{n}$$

dır. O halde Eş. 3.40 ile verilen yaklaşım derecesi Eş. 3.39 dakine göre daha iyidir.

3.1. Uyarı

Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar içinde $\tilde{S}_n$ nın yaklaşım derecesi S_n^* dan daha iyidir. Gerçekten, f fonksiyonu $\langle a, b \rangle$ aralığında tanımlı ve her $x, y \in \langle a, b \rangle$ için $|f(x) - f(y)| \leq M \cdot |x - y|^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$ koşulunu sağlarsa f ye “ M katsayılı, α mertebeli Lipschitz sınıfından bir fonksiyon” denir ve $f \in Lip_M \alpha$ yazılır. $f \in Lip_M \alpha \Leftrightarrow \omega_f(\delta) \leq M \cdot \delta^\alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$) olduğu bilinmektedir [1]. Dolayısıyla,

$$|S_n^*(f; x) - f(x)| \leq M \cdot \left(\frac{2x}{n} \right)^{\alpha/2}$$

$$|\tilde{S}_n(f; x) - f(x)| \leq M \cdot (2x(x - u_n(x)))^{\alpha/2}$$

olur.

KAYNAKLAR

1. Natanson, I. P., “Constructive Function Theory”, Volume I, **Frederick Zingar Publishing**, New York, 1-200 (1964).
2. Korovkin, P. P., “Linear Operators and Approximation Theory”, **Hindustan Publishing Corp. (India)**, Delhi, 1-63 (1960).
3. Altomare, F., and Campiti, M., “Korovkin-Type Approximation Theory and Its Applications”, **Walter de Gruyter**, Berlin, Newyork, 265-373 (1994).
4. Bernstein, S., “Démonstration du théorème de Weierstrass, fondée sur le calcul des probabilités”, **Commun. Soc. Math. Kharkow** (2), 13: 1-2, (1912-1913).
5. Bohman, H., “On Approximation of Continuous and Analytic Functions”, **Arh. Math.**, 2: 43-56 (1952).
6. Gadjiev, A.D., “On Korovkin Type Theorems”, **Math. Notes**, 20(5-6): 996-998 (1976).
7. Gadjiev, A. D., “The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets, and theorems analogous to that of P. P. Korovkin” **Dokl. Akad. Nauk. SSS**, 218(5): 1001-1004 (in Russian), **Sov. Math.** 15(5): 1433-1436 (1974).
8. Hacısalihoğlu, H. H., ve Hacıyev, A., “Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı”, **Ankara Üniv. Basımevi**, Ankara, 1-80 (1995).
9. Balcı, M., “Reel Analiz”, **Ertem Matbaa**, Ankara, 93-98 (1998).
10. Becker, M., “Global approximation theorems for Szasz- Mirakyan and Baskakov operators in polynomial weight spaces”, **India Univ. Math J.**, 27(1), 127-142 (1978).
11. King, J. P., “Positive linear operators which preserve x^2 ”, **Acta. Math. Hungar.**, 99(3), 203-208 (2003).
12. Duman, O., Özarslan, M. A., “Szasz- Mirakyan type operators providing a better error estimation”, **Applied Math. Letters** 20(12): 1184-1188 (2007).
13. Rempulska, L., Tomczak, K., “On approximation of functions by certain operators preserving x^2 ”, **Comment. Math. Univ. Carolin.**, 49(4): 579-593 (2008).

14. Weierstrass, K., “Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen”, *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 633-639 and 89-805 (1885).
15. Devore, V. A., “The Approximation of Continuous Functions by Linear Positive Operators”, *Springer-Verlag*, Berlin, 28-29 (1972).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ÖZDOĞAN, Hanife
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 16.04.1984 Ankara
Medeni hali : Bekar
Telefon : 0 (312) 3551349
e-mail : hanife.ozdogan@gazi.edu.tr.

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Gazi Üniversitesi Matematik Bölümü	2007
Lise	Kanuni Lisesi (Y.D.A.)	2002

Başarılar

2006 -2007 Gazi Üniversitesi Matematik Bölümü Üçüncülüğü

Yabancı Dil

İngilizce