

**SZÁSZ-MIRAKYAN OPERATÖRLERİNİN FARKLI BİR TİPİNİN
İNŞASI****Kamal NAJAFI GHAZIKNADI****YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI****DANIŞMAN
DOÇ. DR. FUAT USTA****DÜZCE, 2023**

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

SZÁSZ-MIRAKYAN OPERATÖRLERİNİN FARKLI BİR TİPİNİN
İNŞASI

Kamal NAJAFI GHAZIKANDI tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Fuat USTA
Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Fuat USTA
Düzce Üniversitesi

Prof. Dr. Mahmut AKYİĞİT
Sakarya Üniversitesi

Prof. Dr. Emrah Evren KARA
Düzce Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 19/06/2023

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

14/06/2023

Kamal NAJAFI GHAZIKANDI

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimimde ve bu tezin hazırlanmasında ve her aşamasında benim yanımda olan ve hiç bir yardımı ve desteği esirgemeyen saygıdeğer hocam Doç. Dr. Fuat Usta'ya ve "Düzce Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü" hocalarına ve beni destekleyen sevgili eşime ve aileme sonsuz sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

14/06/2023

Kamal NAJAFI GHAZIKANDI

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
KISALTMALAR	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. BERNSTEİN(1912) OPERATÖRÜ.....	7
2.2. BERNSTEIN-CHLODOVSKY OPERATÖRÜ	7
2.3. SZASZ-MİRAKJAN OPERATÖRÜ.....	7
2.4. FAVARD-SZASZ-MİRAKJAN OPERATÖRÜ	8
2.5. BASKAKOV OPERATÖRÜ	8
2.6. BLEİMANN-BUTZER-HAHN OPERATÖRÜ	9
2.7. KİNG OPERATÖRÜ	9
3. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	11
4. SONUÇ.....	22
5. KAYNAKLAR.....	23
ÖZGEÇMİŞ	24

KISALTMALAR

BBH	Bleimann-Butzer-Hahn Operatörü
$B_m(v; x)$	Bernstein operatörü
$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı
$B_m^*(v; x)$	Bernstein-Chlodovsky operatörü
$F_m(v; x)$	Favard-Szász-Mirakjan operatörü
$K_m(v; x)$	Kantorovich operatörü
$L(v; x)$	L operatörünün v fonksiyonuna uygulanması
$L_m(v; x)$	Baskakov operatörü
$V_m(v; x)$	King operatörü

ÖZET

SZÁSZ-MIRAKYAN OPERATÖRLERİNİN FARKLI BİR TİPİNİN İNŞASI

Kamal NAJAFI GHAZIKANDI

Düzce Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Fuat USTA

Haziran 2023, 23 sayfa

Matematiksel analizin en önemli konularından biri lineer pozitif operatörlerdir. Bu dalda yeni operatörlerin inşası ve temel özelliklerin araştırılması da önemli bir yer bulmaktadır. Sunulan bu tezin asıl amacı çok yaygın olarak kullanılan Szász-Mirakyan tipli operatörlerin yeni bir sınıfının inşası ve temel özelliklerinin verilmesidir. Daha ayrıntılı ifade etmek gerekirse bu çalışmada birinci bölüm giriş kısmı için ayrılmıştır ve yakınsama teorisinin tarihte süreci hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde tezde kullanılan tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde ise modifiye edilmiş Szász-Mirakyan operatörlerinden bahsedilmiştir ve yaklaşım özellikleri ve hızı incelenmiştir. Son bölümde ise sonuç kısmı yer almıştır.

Anahtar sözcükler: Polinomlar dizisi, Weierstrass yaklaşım teoremi, Pozitif lineer operatörler, Bernstein operatörü, Szász operatörü, Yaklaşım hızı.

ABSTRACT

A NEW FAMILY OF SZÁSZ-MIRAKYAN OPERATORS

Kamal NAJAFI GHAZIKANDI
Düzce University
Graduate School, Department of Mathematics
Master Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Fuat USTA
June 2023, 23 pages

One of the most recognized area in mathematical analysis is linear positive operators. In this research area introducing a new operators and presenting their approximation properties are quite significant. In this work, a new family of Szász-Mirakyan type operators are presented and examined their approximation properties. In more detailed, in this thesis, the first chapter is reserved for the introduction and information about the historical process of convergence theory is given. In the second part, the definitions and theorems used in the thesis are given. In the third part, the modified Szász-Mirakyan operators are mentioned and the approximation properties and speed are examined. In the last part, the conclusion part is included.

Keywords: Sequence of polynomials, Weierstrass theorem of approximation, Positive linear operators, Bernstein operator, Szász-Mirakyan operator, Rate of approximation.

1. GİRİŞ

"Tüm bilimlere yaklaşımlar teorisi hakimdir." [1] Betrand Russell'a atfedilen bu ifade, bilimin sınırlarını göstermekle birlikte, doğanın matematik aracılığıyla nasıl tanımlanacağına da işaret etmeyi amaçlamaktadır. Yaklaşım teorisi matematiksel analizde en çok uygulama alanına sahiptir ve amacı teorik matematikte araştırması zor olan fonksiyonları daha basit ve işlevsel özellikler taşıyan fonksiyonlara dönüştürüp veya ifade etmektir ve söz konusu basit fonksiyonlar daha çok bilinen polinomlar veya rasyonel fonksiyonlardır. Yaklaşımlar teorisi 1815 yılında Weierstrass'la başladı ve Weierstrass [2]'in temel fikri, aşağıda verilen sürekli bir v fonksiyonuydu:

$$v(x) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-\left(\frac{t-x}{s}\right)^2} dt \quad (1.1)$$

Ve sonra weierstrass yaklaşımlar teorisinin temelini inşa eden aşağıdaki teoremi açıkladı: Eğer v , $[a,b]$ üzerinde sürekli ve gerçekteğerli bir fonksiyon ise ve herhangi bir $\varepsilon > 0$ verilmiş ise, $\forall x \in [a,b]$ üzerinde şu şekilde bir p polinomu vardır:

$$|v(x) - P(x)| < \varepsilon \quad (1.2)$$

Weierstrass'ın bu teoremi, sürekli fonksiyonlara yaklaşan polinomların sadece varlığı hakkında bilgi verirken, Bernstein 1912 [3] yılında Weierstrass teoreminin ispatı için $[0, 1]$ aralığında tanımlı, reel değerli, sürekli bir v fonksiyonuna yaklaşan aşağıdaki verilen bir polinom tanımladı:

$$B_m(v; x) = \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} x^s (1-x)^{m-s} v\left(\frac{s}{m}\right) \quad (1.3)$$

Daha sonraki yıllarda bu polinomlar dizisi Bernstein polinomları olarak tanımlanmaya başladı. Bernstein operatörlerinin popüler olma nedenlerinden açık bir şekilde verilebilir ve değişkenin yalnızca rasyonel değerleri için fonksiyonun değerlerine bağlı olması, ve çeşitli fonksiyonları koruması ve yaklaşımı ve çalışmada en basit yollarını sağlaması ve türevlerinin ve integrallerinin ele alınmasının kolay olmasıdır. Bu özellikler v

'in değeriendirilmesinin zor ve zaman alıcı olduğu durumlarda oldukça yararlıdır. Araştırmacılar Bernstein polinomlarını modifiye ederek farklı operatörler tanımlamıştır. Bernstein benzeri operatörlerin özellikleri 1953'te Pavel Korovkin [4] yaklaşım teorisinde "Pozitif Lineer Operatör" kavramını tanıttı ve ilgili bir makale 1952'de Herald Bohman [5] tarafından yayınlandı. Lineer pozitif operatörlerin yaklaşım özellikleri Korovkin tarafından verilen lineer pozitif operatörlerin sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsadığını gösteren teorem sayesinde incelenmiştir ve ayrıca Korovkin tarafından Bernstein'in yaptığı ispatlar daha basit bir şekilde verildi. 1950 yılında, sonlu aralık üzerinde tanımlı olan Bernstein operatörü Szász [6] tarafından $[0, \infty)$ aralığa genişletilerek, $x \in [0, \infty)$ ve $v \in [0, \infty)$ için aşağıda verilen operatör tanımlanmış ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

$$S_m(v; x) = e^{nx} \sum_{s=0}^{\infty} v\left(\frac{s}{m}\right) \frac{(nx)^s}{s!} \quad (1.4)$$

Szász-Mirakyan operatörleri sabit ve lineer fonksiyonları korur.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezimizde kullandığımız lineer pozitif operatörlere dair tanımlar ve teoremler verilmiştir ve tezin diğer bölümlerinde kullanılan teoremler yer almıştır.

Tanım 2.1. (Metrik Uzay): M bir küme ve $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ bir Reel fonksiyon olsun. aşağıdaki koşullar sağlayan, (M, d) sıralı ikilisine bir metrik uzay denir.

1. $d(\alpha, \beta) \geq 0$ ve $d(\alpha, \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$
2. $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$
3. $d(\alpha, \beta) + d(\beta, \theta) \geq d(\alpha, \theta)$

Tanım 2.2. (Normlu Uzay): X bir vektör uzayı ve $\forall \alpha, \beta \in X$ ve ξ bir skaler olursa,

1. $\|\alpha\| \geq 0$
2. $\|\alpha\| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$
3. $\|\xi \alpha\| = |\xi| \|\alpha\|$
4. $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$

özelliklerini sağlayan $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X uzayı üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir normlu uzay adı verilir.

Tanım 2.3. (Kompakt Uzay): Eğer X metrik uzayındaki her dizi yakınsak bir alt diziye sahipse, X uzayına kompakt uzay denir. Burada tanımlanan kompaktlık , dizisel kompaktlıktır.

Tanım 2.4. (Operatör): V ve W iki fonksiyon uzayı olarak tanımlansın. Eğer V 'den alınan herhangi bir v fonksiyonuna, W 'de bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa, bu kurala V uzayında bir operatör denir. Bu operatör $L(v; V) = g(V)$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.5. (Lineer Operatör): V ve W lineer fonksiyon uzayları olmak üzere,

$$T : V \rightarrow W \tag{2.1}$$

şeklindeki T operatörünü varsayalım. Eğer $\forall \alpha, \beta \in V$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için:

$$T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta) \quad (2.2)$$

$$T(\lambda \alpha) = \lambda T(\alpha) \quad (2.3)$$

koşulları sağlanıyorsa, T operatörüne lineer operatör denir.

Yardımcı Teorem 2.6. : L lineer pozitif bir operatör ise

$$|T(v)| \leq T(|v|)$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.7. $X \subset \mathbb{R}$ ve X üzerinde tanımlı fonksiyonların kümesi $F(x)$ olursa, $d : \mathbb{N} \rightarrow F(X)$ şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna bir fonksiyon dizisi denir. Fonksiyon dizisi (v_m) , ve her bir terimi $v_1, v_2, \dots$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.8. $L = \{T : C[a, b] \rightarrow C[a, b] : T \text{ lineer pozitif operatör} \}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ olsun $T : \mathbb{N} \rightarrow L$ şeklinde tanımlı olan T fonksiyonuna lineer pozitif operatör dizisi denir.

Tanım 2.9. X ve Y reel değerli fonksiyon sınıfları olursa eğer, ve $V^+ = \{v \in X, v \geq 0\}$, $W^+ = \{g \in X, g \geq 0\}$ ve bu durumda $T : V^+ \rightarrow W^+$ sağlanıyorsa T operatörüne pozitif operatör denir. Hem lineer hemde pozitif olan operatöre lineer pozitif operatör denir.

Tanım 2.10. Eğer T lineer ve pozitif bir operatör ise, $\forall u$ için

$$v(u) \leq g(u)$$

$$T(v(u); x) \leq T(g(u); x)$$

olur. Ve bu özelliğe monotonluk özelliği denir.

Teorem 2.11. Lineer pozitif operatörler monoton artandır ve aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$v(x) \leq g(x) \implies T(v; x) \leq T(g; x)$$

Tanım 2.12. $A \subset \mathbb{R}$ ve $v : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ise , $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A$, için $|x - a| < \delta$ olduğunda $|v(x) - v(a)| < \varepsilon$ şeklinde $\delta = \delta(\varepsilon)$ bir sayı varsa a noktasında v fonksiyonu süreklidir denir.

Tanım 2.13. $X \subset \mathbb{R}$ ve $v : X \rightarrow \mathbb{N}$ bir fonksiyon olsun , $\forall \varepsilon > 0$ ve her $x_1, x_2 \in X$ için $|x_1 - x_2| < \delta$ olduğunda $|v(x_1) - v(x_2)| < \varepsilon$ şeklinde $\delta = \delta(\varepsilon)$ bir sayı varsa a noktasında v fonksiyonu X kümesi üzerinde düzgün süreklidir denir.

Tanım 2.14. (v_m) fonksiyon dizisinin $C[a, b]$ fonksiyon sınıfında olmak şartıyla ve

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|v_m - v\|_{C[a, b]} = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıyla birlikte, v fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir ve $v_m(x) \Rightarrow v(x)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.15. Her $x, y \in Y$ ve $0 < \gamma < 1$ için

$$|v(x) - v(y)| \leq K|x - y|^\gamma \quad (2.4)$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı varsa v fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağlar denir.

Tanım 2.16. (Süreklilik Modülü): $v \in [a, b]$ sınırlı bir fonksiyon olsun v fonksiyonunun süreklilik modülü $\omega(v, \delta)$ şeklinde gösterilmek üzere , keyfi $\delta > 0$ için :

$$\omega(v, \delta) = \sup_{t, x \in [a, b]} |v(t) - v(x)| \quad (2.5)$$

sağlanıyorsa $\omega(v, \delta)$ fonksiyonuna v'nin $[a, b]$ aralığındaki süreklilik modülü denir.

Teorem 2.17. Süreklilik modülü aşağıda verilerin özellikleri sağlar:

1. $\omega(v, \delta) \geq 0$,
2. $\omega(v + g; \delta) \leq \omega(v, \delta) + \omega(g, \delta)$,
3. $\omega(v, m\delta) \leq m\omega(v, \delta)$, $m \in \mathbb{N}$,
4. $\omega(v, \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(v, \delta)$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$
5. $\theta_1 \leq \theta_2 \implies \omega(v, \theta_1) \leq \omega(v, \theta_2)$,
6. $|v(t) - v(x)| \leq \omega(v, \delta) \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right)$
7. $\omega(v, |t-x|) \geq |v(t) - v(x)|$

$$8. \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(v, \delta) = 0$$

Teorem 2.18. (Minkowski eşitsizliği)

Bazıları sıfırdan farklı olan a_i ve $b_i, i = 1, 2, \dots, m$ pozitif sayılarında , $p > 1$ için aşağıdaki eşitsizliğe Minkowski eşitsizliği denir.

$$\left(\sum_{i=1}^m (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^m a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^m b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.6)$$

Teorem 2.19. (Hölder eşitsizliği)

Hepsi sıfır olmayan a_i ve $b_i, i = 1, 2, \dots, m$ pozitif sayılarını alırsak ve $p > 1$ sayıları $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşulu sağlanıyorsa aşağıdaki eşitsizliğe Hölder eşitsizliği denir.

$$\left(\sum_{i=1}^m a_i b_i \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^m a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^m b_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.7)$$

Eğer yukarıdaki eşitsizlikte $m = 2$ ise bu eşitsizliğe Cauchy-Schwartz eşitsizliği denir.

Teorem 2.20. (Weierstrass Yaklaşım Teoremi): $v(x) \in C[a, b]$ olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için $a \leq x \leq b$ aralığındaki tüm x 'ler için $|v(x) - p(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde $p(x)$ polinomu vardır. Yani sürekli olan her v fonksiyonuna karşılık gelen $P_m(x)$ şeklinde polinomlar dizisi vardır.

Teorem 2.21. (Korovkin-Bohman Teoremi): $v \in C[a, b]$ ve v tüm reel ekseninde sınırlı bir fonksiyon tanımlansın. Eğer $T_m(v; x)$ lineer pozitif operatör dizisi için $m \rightarrow \infty$ iken $\forall x \in [a, b]$ aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, $[a, c]$ kompakt aralığı üzerinde $T_m(v; x) \Rightarrow v(x)$ olur.

$$T_m(1; x) \Rightarrow 1$$

$$T_m(u; x) \Rightarrow x$$

$$T_m(u^2; x) \Rightarrow x^2$$

2.1. BERNSTEİN(1912) OPERATÖRÜ

Bernstein, $x \in [0, 1]$ için reel değerli, sürekli bir v fonksiyonuna yaklaşan bir polinomun olduğunu aşağıdaki gibi ispatlamıştır:

$$B_m(v; x) = \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} x^s (1-x)^{m-s} v\left(\frac{s}{m}\right) \quad (2.8)$$

Yardımcı Teorem 2.22. (2.8) tanımlanan Bernstein operatörü aşağıdaki koşulları sağlar:

- i. $B_m(1; x) = 1$
- ii. $B_m(t; x) = x$
- iii. $B_m(t^2; x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{m}$

2.2. BERNSTEİN-CHLODOVSKY OPERATÖRÜ

Bernstein polinomlarının $[0, 1]$ aralığında tanımlı olduğundan bahsetmiştik. Chlodovsky [8] sınırsız aralıklarda Bernstein polinomlarının yeni bir modifikasyonunu $(\xi_m)_m \geq 1$ kesin pozitif reel sayı dizisi olmak üzere

$$B_m^*(v; x) = \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \left(\frac{x}{\xi_m}\right)^s \left(1 - \frac{x}{\xi_m}\right)^{m-s} v\left(\frac{s\xi_m}{m}\right) \quad (2.9)$$

şeklinde elde etmiştir.

2.3. SZASZ-MİRAKJAN OPERATÖRÜ

Eğer $x \in [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{N}$ olursa , aşağıdaki şekilde tanımlı olan operatörlere Szasz operatörleri denir.

$$S_m(v; x) = e^{-mx} \sum_{s=0}^m \frac{(mx)^s}{s!} v\left(\frac{s}{m}\right) \quad (2.10)$$

Korovkin teoremi yardımıyla :

- i. $S_m(1; x) = 1$
- ii. $S_m(t; x) = x$
- iii. $S_m(t^2; x) = x^2 + \frac{x}{m}$

iv. $S_m(t^2; x) = x^2, (m \rightarrow \infty)$ elde ederiz.

Teorem 2.23. Szász–Mirakjan Operatörleri $[0, A]$ aralığında sürekli ve tüm pozitif yarı ekseninde sınırlı bir şekilde tanımlanan v fonksiyonuna bu aralıkta düzgün yakınsar. Yani $v \in [0, A]$ ise:

$$S_m(v; x) \Rightarrow v(x) \quad (2.11)$$

dir.

2.4. FAVARD-SZASZ-MIRAKJAN OPERATÖRÜ

Eğer $M > 0$ ve $\xi \in N$ için

$C_M[0, \infty) := \{v \in C[0, \infty) : |v(x)| \leq Me^{\xi x}\}$ Favard-Szász-Mirakjan Operatörü
 $F_m : C_M[0, \infty) \rightarrow C[0, \infty)$ üzerinde ;

$$F_m(v; x) := \sum_{s=0}^{\infty} e^{-mx} \frac{(mx)^s}{s!} v\left(\frac{s}{m}\right) \quad (2.12)$$

olarak tanımlanır.

Operatörün özellikleri;

- 1) $F_m(1; x) = 1$
- 2) $F_m(t; x) = x$
- 3) $F_m(t^2; x) = x^2 + \frac{1}{m}x$

2.5. BASKAKOV OPERATÖRÜ

$v \in C[0, \infty)$ ve $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere, aşağıdaki ifadeye Baskarov [7] operatörü denir.

$$L_m(v; x) = \frac{1}{(1+x)^m} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{m+s-1}{s} \frac{x^s}{(1+x)^s} v\left(\frac{s}{m}\right) \quad (2.13)$$

Baskakov operatörünün özellikleri;

- 1) $L_m(1; x) = 1$
- 2) $L_m(t; x) = x$

$$3) L_m(t^2; x) = x^2 + \frac{x(1+x)}{m}$$

2.6. BLEİMANN-BUTZER-HAHN OPERATÖRÜ

$C[0, \infty)$ üzerinde $v \in C[0, \infty)$ ve $m \in N$ için

$$L_m(v; x) = \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} x^s (1-x)^{m-s} v\left(\frac{s}{m}\right) \quad (2.14)$$

Favard-Szász-Mirakjan ve Baskakov operatörleri gibi, Bleiman-Butzer-Hahn [9] operatörü (kısaca BBH) $[0, \infty)$ üzerinde tanımlanır.

BBH operatörünün özellikleri:

$$1) L_m(1; x) = 1$$

$$2) L_m\left(\frac{t}{t+1}; x\right) = \frac{mx}{(m+1)(x+1)}$$

$$3) L_m\left(\left(\frac{t}{t+1}\right)^2; x\right) = \frac{mx(1+mx)}{(1+m)^2(x+1)^2}$$

2.7. KING OPERATÖRÜ

Her $v \in C[0, 1], m \geq 1$ ve $0 \leq x \leq 1$ için

$$V_m(v; x) := \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (r_m(x))^s (1-r_m(x))^{m-s} v\left(\frac{s}{m}\right) \quad (2.15)$$

Burada

$$r_m(x) = \begin{cases} x^2 & , m = 1 \text{ ise} \\ \frac{-1 + \sqrt{4m(m-1)x^2 + 1}}{2(m-1)} & , m > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

King [10] operatörünün özellikleri:

$$1) V_m(1; x) = 1$$

$$2) V_m(t; x) = r_m(x)$$

$$3) V_m(t^2; x) = x^2$$



3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde aşağıda verilen Szász tipli operatörün yakınsama özellikleri verilecektir.

Tanım 3.1. $x \in [0, \infty)$ için ve $m \in \mathbb{N}$ ve $v \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdaki $S_m(v; x)$ lineer pozitif operatörü tanımlanmıştır:

$$S_m(v; x) = \frac{e^{-mx}}{1+mx} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) \frac{(mx)^s}{s!} v \left(\frac{s}{m} \right) \quad (3.1)$$

İlk başta (3.1) bulunan operatörün lineer ve pozitif olduğunu ispatlayacağız.

Lineerlik: Her $u, t \in C[0, A]$ ve $\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned} S_m((u\xi + t\eta); x) &= \frac{e^{-mx}}{1+mx} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) \frac{(mx)^s}{s!} (u\xi + t\eta) \left(\frac{s}{m} \right) \\ &= \xi \frac{e^{-mx}}{1+mx} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) \frac{(mx)^s}{s!} (u) \left(\frac{s}{m} \right) + \eta \frac{e^{-mx}}{1+mx} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) \frac{(mx)^s}{s!} (t) \left(\frac{s}{m} \right) \\ &= \xi S_m(u) + \eta S_m(t) \end{aligned}$$

sağlandığından $S_m(v; x)$ lineer operatördür.

Pozitiflik: Her $x \in C[0, A]$ için,

$$\frac{e^{-mx}}{1+mx} \frac{(mx)^s}{s!} \geq 0 \quad (3.2)$$

olduğu için, eğer

$$v \geq 0 \rightarrow S_m(v; x) = \frac{e^{-mx}}{1+mx} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) \frac{(mx)^s}{s!} v \left(\frac{s}{m} \right) \geq 0 \quad (3.3)$$

Teorem 3.2. Denklem (3.1) $\forall X \in [0, \infty)$ aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$1. S_m(1; x) = 1$$

$$2. S_m(t; x) = x + \frac{x}{1 + mx}$$

$$3. S_m(t^2; x) = x^2 + \frac{3mx^2 + 2x}{m^2 + m}$$

$$4. S_m(t^3; x) = x^3 + \frac{6x^3m^2 + 10mx^2 + 2x}{m^3x + m^2}$$

$$5. S_m(t^4; x) = x^4 + \frac{10m^3x^4 + 25m^2x^3 + 19mx^2 + x}{m^4x + m^3}$$

İspat.

1. Öncelikle sabit fonksiyon olan 1'in operatör altındaki eşitini bulalım.

$$\begin{aligned} S_m(t; 1) &= \frac{e^{-mx}}{1 + mx} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) \frac{(mx)^s}{s!} 1 \\ &= \frac{e^{-mx}}{1 + mx} \left(\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(mx)^s}{s!} s + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^s}{s!} 1 \right) \\ &= \frac{e^{-mx}}{1 + mx} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^{s+1}}{s!} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^s}{s!} 1 \right) \\ &= \frac{e^{-mx}}{1 + mx} (mxe^{mx} + e^{mx}) \\ &= \frac{e^{-mx}}{1 + mx} (e^{mx}(mx + 1)) \\ &= 1, \end{aligned}$$

elde edilir ve bu da operatörümüzün sabit fonksiyonları koruduğunu gösterir.

2. Şimdi benzer bir biçimde t 'nin operatör altındaki davranışını inceleyelim. Bunun için yine operatörümüzün tanımından faydalanarak aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz.

$$\begin{aligned}
S_m(t; x) &= \frac{e^{-mx}}{1+mx} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) \frac{(mx)^s}{s!} \frac{s}{m} \\
&= \frac{e^{-mx}}{1+mx} \left(\sum_{s=1}^{\infty} s \frac{(mx)^s}{s!} \frac{s}{m} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(mx)^s}{s!} \frac{s}{m} \right) \\
&= \frac{e^{-mx}}{1+mx} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^{s+1}}{s!} \frac{s}{m} + \sum_{s=-1}^{\infty} \frac{(mx)^{s+1}}{s!} \frac{1}{m} \right) \\
&= \frac{e^{-mx}}{1+mx} \left(\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(mx)^{s+1}}{s!} \frac{s}{m} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(mx)^{s+1}}{s!} \frac{1}{m} + \sum_{s=-1}^{\infty} \frac{(mx)^{s+1}}{s!} \frac{1}{m} \right) \\
&= \frac{e^{-mx}}{1+mx} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^{s+1}}{s!} \frac{(mx)^2}{m} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^{s+1}}{s!} \frac{1}{m} + \sum_{s=-1}^{\infty} \frac{(mx)^{s+1}}{s!} \frac{1}{m} \right) \\
&= \frac{e^{-mx}}{1+mx} \left[e^{mx} \frac{(mx)^2}{m} + 2x \right] = x + \frac{x}{1+mx}
\end{aligned}$$

3. Benzer bir şekilde aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned}
S_m(t^2; x) &= \frac{e^{-mx}}{1+mx} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) \frac{(mx)^s}{s!} \frac{s^2}{m^2} \\
&= \frac{e^{-mx}}{1+mx} \left(\sum_{s=1}^{\infty} s \frac{(mx)^s}{s!} \frac{s^2}{m^2} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(mx)^s}{s!} \frac{s^2}{m^2} \right) \\
&= \frac{e^{-mx}}{1+mx} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^{s+1}}{s!} \frac{(s+1)^2}{m^2} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^{s+1}}{s!} \frac{s^2}{m^2} \right) \\
&= \frac{e^{-mx}}{1+mx} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^{s+1}}{s!} \frac{s^2}{m^2} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^{s+1}}{s!} \frac{2s}{m^2} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^{s+1}}{s!} \frac{1}{m^2} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^{s+1}}{s!} \frac{s}{m^2} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^{s+1}}{s!} \frac{1}{m^2} \right) \\
&= \frac{e^{-mx}}{1+mx} \left(e^m x (mx^3 + 4x^2 + \frac{2x}{m}) \right) = x^2 + \frac{3mx^2 + 2x}{m^2x + m}
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
S_m(t^3; x) &= \frac{e^{-mx}}{1+mx} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) \frac{(mx)^s}{s!} \frac{s^3}{m^3} \\
&= \frac{e^{-mx}}{1+mx} \left(\sum_{s=1}^{\infty} s \frac{(mx)^s}{s!} \frac{s^3}{m^3} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(mx)^s}{s!} \frac{s^3}{m^3} \right) \\
&= \frac{e^{-mx}}{1+mx} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^{s+1}}{s!} \frac{(s+1)^3}{m^3} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^{s+1}}{s!} \frac{(s+1)^2}{m^3} \right) \\
&= \frac{e^{-mx}}{1+mx} \frac{x}{m^2} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^s}{s!} s^3 + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^s}{s!} 3s^2 + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^s}{s!} 3s + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^s}{s!} 1 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^s}{s!} s^2 + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^s}{s!} 2s + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^s}{s!} 1 \right) \\
&= \frac{e^{-mx}}{1+mx} \frac{x}{m^2} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^{s+1}}{s!} (s+1)^2 + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^{s+1}}{s!} 3(s+1) + \sum_{s=0}^{\infty} 3 \frac{(mx)^{s+1}}{s!} \right. \\
&\quad \left. + e^{mx} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^{s+1}}{s!} (s+1) + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^{s+1}}{s!} 2 + e^{mx} \right) \\
&= \frac{e^{-mx}}{1+mx} \frac{x}{m^2} \left[\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^s + 1}{s!} (s+1) + 2(mx)^2 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^s}{s!} + mxe^{mx} + 3(mx)^2 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^s}{s!} \right. \\
&\quad \left. + 3mx \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^s}{s!} + e^{mx} + 3mxe^{mx} + mx \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^{s+1}}{s!} + mxe^{mx} + 2mxe^{mx} + e^{mx} \right] \\
&= \frac{e^{-mx}}{1+mx} \frac{x}{m^2} \left[(mx)^3 e^{mx} + (mx)^2 e^{mx} + 2(mx)^2 e^{mx} + mxe^{mx} + 3(mx)^2 e^{mx} \right. \\
&\quad \left. + 3mxe^{mx} + e^{mx} + (mx)^2 e^{mx} + mxe^{mx} + 2mxe^{mx} + e^{mx} \right] \\
&= \frac{1}{1+mx} \left[mx^4 + 7x^3 + \frac{10x^2}{m} + \frac{2x}{m^2} \right] = x^3 + \frac{6x^3m^2 + 10x^2m + 2x}{xm^3 + m^2}
\end{aligned}$$

5.

$$S_m(t^4; x) = \frac{e^{-mx}}{1+mx} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) \frac{(mx)^s}{s!} \frac{s^4}{m^4}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{-mx}}{1+mx} \left(\sum_{s=1}^{\infty} s \frac{(mx)^s}{s!} \frac{s^4}{m^4} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(mx)^s}{s!} \frac{s^4}{m^4} \right) \\
&= \frac{e^{-mx}}{1+mx} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^{s+1}}{s!} \frac{(s+1)^4}{m^4} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^{s+1}}{s!} \frac{(s+1)^3}{m^4} \right) \\
&= \frac{e^{-mx}}{1+mx} \frac{1}{m^4} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^{s+1}}{s!} (s+1)^3 + 4 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^{s+1}}{s!} (s+1)^2 \right. \\
&\quad \left. + 6 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^{s+1}}{s!} (s+1) + 4 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^{s+1}}{s!} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^s}{s!} \right) \\
&= \frac{1}{(1+mx)} \left(\frac{m^4 x^5 + 11m^3 x^4 + 25m^2 x^3 + 19mx^2 + x}{m^3} \right) \\
&= \frac{m^4 x^5 + 11m^3 x^4 + 25m^2 x^3 + 19mx^2 + x}{m^4 x + m^3} \\
&= x^4 + \frac{10m^3 x^4 + 25m^2 x^3 + 19mx^2 + x}{m^4 x + m^3}
\end{aligned}$$

□

Yardımcı Teorem 3.3. (3.1) operatörü için aşağıdaki momentler yazılabilir:

1. $S_m(1; x) = 1$
2. $S_m((t-x); x) = \frac{x}{1+mx}$
3. $S_m((t-x)^2; x) = \frac{mx^2 + 2x}{m^2 x + m}$
4. $S_m((t-x)^3; x) = \frac{4mx^2 + 2x}{m^3 x + m^2}$
5. $S_m((t-x)^4; x) = \frac{-3m^2 x^3 + 11mx^2 + x}{m^4 x + m^3}$

İspat.

1. $S_m(1; x) = 1$

$$2. S_m((t-x);x)$$

$$\begin{aligned} &= S_m(t;x) - S_m(x;x) = S_m(t;x) - xS_m(1;x) \\ &= x + \frac{x}{1+mx} - x = \frac{x}{1+mx} \end{aligned}$$

$$3. S_m((t-x)^2;x)$$

$$= S_m(t^2 - 2tx + x^2;x) = S_m(t^2;x) - 2xS_m(t;x) + x^2S_m(1;x)$$

$$= x^2 + \frac{3mx^2 + 2x}{m^2x + m} - 2x\left(x + \frac{x}{1+mx}\right) + x^2$$

$$= x^2 + \frac{3mx^2 + 2x}{m^2x + m} - 2x^2 - \frac{2x^2}{mx + 1} + x^2$$

$$= \frac{3mx^2 + 2x - 2x^2m}{m^2x + m}$$

$$= \frac{mx^2 + 2x}{m^2x + m}$$

$$4. S_m((t-x)^3;x)$$

$$= S_m(t^3 - 3t^2x + 3tx^2 - x^3;x) = S_m(t^3;x) - 3xS_m(t^2;x) + 3x^2S_m(t;x) - x^3S_m(1;x)$$

$$= \frac{m^3x^4 + 7m^2x^3 + 10mx^2 + 2x}{m^3x + m^2} - 3x\left(x^2 + \frac{3mx^2 + 2x}{m^2x + m}\right) + 3x^2\left(x + \frac{x}{1+mx}\right) - x^3$$

$$= \frac{m^3x^4 + 7m^2x^3 + 10mx^2 + 2x - 9m^2x^3 - 6mx^2 + 3m^2x^3 - m^3x^4 - m^2x^3}{m^3x + m^2}$$

$$= \frac{4mx^2 + 2x}{m^3x + m^2}$$

$$5. S_m((t-x)^4;x)$$

$$\begin{aligned} &= S_m(t^4 - 4t^3x + 6t^2x^2 - 4tx^3 + x^4;x) = S_m(t^4;x) - 4xS_m(t^3;x) + 6x^2S_m(t^2;x) - \\ &4x^3S_m(t;x) + x^4S_m(1;x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= x^4 + \frac{10m^3x^4 + 25m^2x^3 + 19mx^2 + x}{m^4x + m^3} - 4x\left(x^3 + \frac{6x^3m^2 + 10x^2m + 2x}{xm^3 + m^2}\right) + \\ &6x^2\left(x^2 + \frac{3mx^2 + 2x}{m^2x + m}\right) - 4x\left(x + \frac{x}{1+mx}\right) + x^4 \end{aligned}$$

$$= \frac{-3m^2x^3 + 11mx^2 + x}{m^4x + m^3}$$

□

Teorem 3.4. Eğer $v \in C[0, A]$ ve v bütün reel sayılarda sınırlı olduğu halde,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|S_m f - v\|_{C[0, A]} = 0 \quad (3.4)$$

İspat.

(2.21) teoreminde verilen Korovkin teoreminden yararlanarak $m \rightarrow \infty$ için ve (3.2) de sonuçları kullanarak aşağıdaki gibi ispatı tamamlayabiliriz.

$$1. \lim_{m \rightarrow \infty} \|S_m 1 - 1\| = 0$$

$$2. \lim_{m \rightarrow \infty} \|S_m t - x\| = \max_{0 \leq x \leq A} \left| x + \frac{x}{1 + mx} - x \right| = \left| \frac{A}{1 + mA} \right|$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{A}{1 + mA} \right| = 0 \quad (3.5)$$

$$3. \lim_{m \rightarrow \infty} \|S_m t^2 - x^2\| = \max_{0 \leq x \leq A} \left| x^2 + \frac{3mx^2 + 2x}{m^2x + x} - x^2 \right|$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{3mA^2 + 2A}{m^2A + A} \right| = 0 \quad (3.6)$$

$$4. \lim_{m \rightarrow \infty} \|S_m t^3 - x^3\| = \max_{0 \leq x \leq A} \left| x^3 + \frac{6m^2x^3 + 10mx^2 + 2x}{m^3x + m^2} - x^3 \right|$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{6m^2x^3 + 10mx^2 + 2x}{m^3x + m^2} \right| = 0 \quad (3.7)$$

□

Teorem 3.5. Her $v \in C[0, A]$ için $S_m(v; x)$ 'in yaklaşım hızı aşağıdaki eşitsizlikte verilmiştir.

$$\|S_m(v; x) - v(x)\| \leq 2\omega \left(v; \sqrt{\frac{mA^2 + 2A}{Am^2 + m}} \right) \quad (3.8)$$

İspat.

$$\begin{aligned}
|S_m(v; x) - v(x)| &= |S_m(v; t) - v(x); x| \\
&\leq S_m(|S_m(v; t) - v(x)|; x) \\
|S_m(v; x) - v(x)| &\leq S_m(\omega(v; |t - x|); x) \\
|S_m(v; x) - v(x)| &\leq S_m\left(\left(1 + \frac{|t - x|}{\delta}\right); x\right) \omega(v; \delta) \\
&= \left(1 + \frac{1}{\delta} S_m(|t - x|); x\right) \omega(v; \delta) \\
&\leq \left(1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{S_m(t - x)^2; x}\right) \omega(v; \delta) \\
|S_m(v; x) - v(x)| &= \left(1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{mx^2 + 2x}{xm^2 + m}}\right) \omega(v; \delta)
\end{aligned}$$

son ifadede maksimum olması için $x = A$ yazarsak ,

$$|S_m(v; x) - v(x)| \leq \left(1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{mA^2 + 2A}{Am^2 + m}}\right) \omega(v; \delta)$$

Eğer $\delta = \sqrt{\frac{mA^2 + 2A}{Am^2 + m}}$ seçilirse ,

$$\|S_m(v; x) - v(x)\| \leq 2\omega\left(v; \sqrt{\frac{mA^2 + 2A}{Am^2 + m}}\right)$$

şeklinde ispatlanır. □

Teorem 3.6. v fonksiyonu Lipschitz şartı sağlıyorsa,

$$\|S_m(v; x) - v(x)\|_{C[0, A]} = O\left(\left(\frac{mA^2 + 2A}{m^2A + m}\right)^{\frac{\gamma}{2}}\right) \quad (3.9)$$

İspat. $S_m(1; x) = 1$ olduğuna göre ve lineer özellikten ,

$$|S_m(v; x) - v(x)| = |S_m(v; x) - v(x)S_m(1; x)|$$

$$\begin{aligned}
&= |S_m(v; x) - S_m(v(x); x)| \\
|S_m(v; x) - v(x)| &\leq (S_m|v(t) - v(x)|; x)
\end{aligned}$$

v fonksiyonu Lipschitz şartını sağlıyor ve :

$$|S_m(v; x) - v(x)| \leq K(S_m(t - x)^\gamma; x)$$

Hölder eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
S_m(|t - x|^\gamma; x) &\leq S_m((t - x)^2; x)^{\frac{\gamma}{2}} \\
|S_m(v; x) - v(x)| &\leq K \left(\frac{mA^2 + 2A}{m^2A + m} \right)^{\frac{\gamma}{2}}
\end{aligned}$$

Ve o halde,

$$\|S_m(v; x) - v(x)\|_{C[0, A]} \leq K \left(\frac{mA^2 + 2A}{m^2A + m} \right)^{\frac{\gamma}{2}} \quad (3.10)$$

□

Teorem 3.7. v fonksiyonunun türevi $[0, A]$ kapalı aralıkta sürekli ve sınırlı olan bir fonksiyon olursa bu durumda belirli bir m 'den sonra,

$$|S_m(v; x) - v(x)| \leq \frac{K}{m} + 2\sqrt{\frac{mA^2 + 2A}{Am^2 + m}} \omega \left(v'; \sqrt{\frac{mA^2 + 2A}{Am^2 + m}} \right)$$

İspat. v 'in türevi sürekli ve reel ekseninde sınırlı oluşu için $t, x \in [0, A]$ ve $t \leq u \leq x$ olursa , ortalama değer teoreminden bir u vardır ki

$$v'(u) = \frac{v(t) - v(x)}{t - x} \quad (3.11)$$

$v'(x) - v'(x)$ 'i ekliyoruz

$$\begin{aligned}
v(t) - v(x) &= (t - x)v'(u) + (t - x)v'(u) - v'(x) \\
S_m(x)(v; x) - v(x) &= v'(x)S_m(t - x; x) + S_m((t - x)(v'(u) - v'(x)); x) \\
S_m(x)(v; x) - v(x) &= v'(x) \left(\frac{x}{1 + mx} \right) + S_m((t - x)(v'(u) - v(x)); x)
\end{aligned}$$

$|u - x| \leq |t - x|$ olduğundan ve süreklilik modülü özelliğinden,

$$\begin{aligned}
|v'(u) - v'(x)| &\leq \omega(v'; |t - x|) \\
&\leq \left(1 + \frac{|t - x|}{\delta}\right) \omega(v'; \delta_m) \\
|S_m(x)(v; x) - v(x)| &\leq \frac{|v'(x)x|}{1 + mx} + S_m(|t - x| |v'(u) - v'(x)|; x) \\
&\leq \frac{|v'(x)x|}{1 + mx} + S_m\left(|t - x| \left(1 + \frac{|t - x|}{\delta_m}\right); x\right) \omega(v'; \delta_m) \\
&\leq \frac{|v'(x)x|}{1 + mx} + S_m\left(|t - x| \frac{(t - x)^2}{\delta_m}; x\right) \omega(v'; \delta_m) \\
&\leq \frac{|v'(x)x|}{1 + mx} + \left(S_m((t - x)^2; x)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{(t - x)^2}{\delta_m}\right); x\right) \omega(v'; \delta_m) \\
&\leq \frac{|v'(x)x|}{1 + mx} + \left(\sqrt{\frac{mx^2 + 2x}{xm^2 + m}} + \frac{1}{\delta_m} \frac{mx^2 + 2x}{xm^2 + m}\right) \omega(v'; \delta_m)
\end{aligned}$$

$0 \leq x \leq A$ ve v reel ekseninde sınırlı olduğundan $|v'(x)| \leq K$ olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı vardır.

$$\begin{aligned}
|S_m(x)(v; x) - v(x)| &\leq \frac{|v'(x)x|}{1 + mx} + \left(\sqrt{\frac{mA^2 + 2A}{Am^2 + m}} + \frac{1}{\delta_m} \frac{mA^2 + 2A}{Am^2 + m}\right) \omega(v'; \delta_m) \\
|S_m(x)(v; x) - v(x)| &\leq \frac{K}{m} + \left(\sqrt{\frac{mA^2 + 2A}{Am^2 + m}} + \frac{1}{\delta_m} \frac{mA^2 + 2A}{Am^2 + m}\right) \omega(v'; \delta_m)
\end{aligned}$$

$\delta_m = \sqrt{\frac{mA^2 + 2A}{Am^2 + m}}$ seçilirse, ispat aşağıdaki şekilede tamamlanır,

$$|S_m(v; x) - v(x)| \leq \frac{K}{m} + 2\sqrt{\frac{mA^2 + 2A}{Am^2 + m}} \omega\left(v'; \sqrt{\frac{mA^2 + 2A}{Am^2 + m}}\right) \quad (3.12)$$

□

Teorem 3.8. $v \in C[0, A]$ ve $[0, A]$ aralığında v, v', v'' sınırlı ise ,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m(S_m(v; x) - v(x)) = v'(x) + \frac{x}{2}v''(x) \quad (3.13)$$

İspat. v fonksiyonun Taylor açılımını aşağıda veriyoruz,

$$\begin{aligned}
v(t) &= v(x) + v'(x)(t-x) + \frac{1}{2!}v''(x)(t-x)^2 + \frac{1}{3!}v'''(x)(t-x)^3 + \frac{1}{4!}v^{(4)}(x)(t-x)^4 + \dots \\
v(t) - v(x) &= v'(x)(t-x) + \frac{1}{2!}v''(x)(t-x)^2 + (t-x)^2g(t-x) \\
g(t-x) &= \left(\frac{1}{3!}v'''(x)(t-x)^2 + \frac{1}{4!}v^{(4)}(x)(t-x)^3 + \dots\right) \\
S_m(v;x) - v(x) &= v'(x)S_m((t-x);x) + \frac{1}{2!}v''(x)S_m((t-x)^2;x) + S_m((t-x)^2g(t-x);x)
\end{aligned}$$

Merkezi momentleri yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
S_m(v;x) - v(x) &= v'(x)\frac{x}{1+mx} + \frac{1}{2!}v''(x)\frac{mx^2+2x}{m^2x+m} + S_m((t-x)^2g(t-x);x) \\
m(S_m(v;x) - v(x)) &= v'(x)\frac{mx}{1+mx} + \frac{1}{2!}v''(x)\frac{m^2x^2+2x}{m^2x+m} + mS_m((t-x)^2g(t-x);x) \quad (3.14)
\end{aligned}$$

$\lim_{t \rightarrow x} g(t-x) = 0$ olduğundan ve g fonksiyon sınırlı olduğundan ve Cauchy schwarz eşitsizliğinden

$$mS_m((t-x)^2g(t-x);x) \leq \sqrt{m(S(t-x)^4;x)} \sqrt{mS(g(t-x)^2;x)}$$

$S_m((t-x)^4;x) = \frac{-3m^2x^3 + 11mx^2 + x}{m^4x + m^3}$ olduğundan , bu eşitliğin her iki tarafını m ile çarparsak,

$$mS_m((t-x)^4;x) \leq \frac{-3m^2x^3 + 11mx^2 + x}{m^3x + m^2}$$

ve

$$\lim_{m \rightarrow \infty} mS_m((t-x)^4;x) = 0 \quad (3.15)$$

(3.14)'in her iki tarafından limit alındığı takdirde,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m(S_m(v;x) - v(x)) = v'(x) + \frac{x}{2}v''(x) \quad (3.16)$$

ve ispat tamamdır.

□

4. SONUÇ

Matematiksel analiz, uygulama alanları çok fazla olan ve üzerine yoğun bir şekilde çalışılan matematiğin alt bir dalıdır. Bu dal içerisinde de yakınsama teorisi önemli bir yere sahiptir. Günümüzde ise yakınsama teorisinde pozitif lineer operatörler bir çok matematikçi tarafından çalışılmaktadır. Bu tezde çok yaygın olarak kullanılan Szász-Mirakyan tipli operatörlerinin yeni bir sınıfı sunulmuştur. Öncelikle bu operatör tanımlanarak temel bazı özellikleri verilmiştir. Öte yandan lineer pozitif operatörlerin temel teoremlerinde kullanılmak üzere $1, t, t^2, t^3$ ve t^4 için merkezi momentleri hesaplanmış ve yakalşım hızı bulunmuştur. Bu sonuçlarla beraber diğer temel teoremlerde tezde sunulmuş ve bunların ayrıntılı ispatları verilmiştir. Bu çalışma, lineer pozitif operatörlerin yeni sınıflarının bulunması bakımından önemli bir yere sahip olup, gelecek çalışmalar ve bu operatörlerin uygulama alanları için yeni ufuklar açabilmektedir.

5. KAYNAKLAR

- [1] K.G Steffens, "The History of Approximation Theory", *Birkhäuser*, ss. vii, 2006.
- [2] Weierstrass, K., "Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen veränderlichen", *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* , ss.633-639 ve 789-805, 1885.
- [3] Stancu D.D., "Approximation of functions by means of a new generalized Bernstein operatör", *Calcolo* 20, 211-229,1983.
- [4] P. P. Korovkin, "On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions", *Doklady Akademii Nauk SSSR (N.S.)*, c. 90, ss. 961-964, 1953.
- [5] H. Bohman, "On approximation of continuous and of analytic functions." *Arkiv For Mathematic*, c. 2, ss. 43–56, 1952.
- [6] SZASZ," Genelalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite", *Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology*, c.45, ss.239-245, 1950.
- [7] V. A. Baskakov, " An instance of a sequence of linear positive operators in the space of continuous functions", *Doklady Akademii Nauk SSSR (N.S.)*, c. 113, ss. 249–251, 1957.
- [8] I. Chlodovsky, "Sur le développement des fonctions définies dans un intervalle infini en séries de polynomes de M. S. Bernstein", *Compositio Mathematica* , c. 4, ss. 380–393, 1937.
- [9] G. Bleimann, P. L. Butzer ve Hahn", L. A Bernšteĭn-type operator approximating continuous functions on the semi-axis", *Indagationes Mathematicae*, c. 42, sayı. 3, ss. 255–262, 1980.
- [10] J. P. King, " Positive linear operators which preserve x^2 ", *Acta Mathematica Hungarica* , c. 99, ss. 203-208,2003.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Kamal Najafi Ghazikandi

Yabancı Dili : İngilizce

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik.	DÜZCE Üniversitesi SHAHID MADANI	2023
Lisans	Matematik.	AZARBAIJAN Üniversitesi	2016