



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

T_0 VE T_1 YANSIMA BAĞINTILI UZAYLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Burcu MERCAN

DANIŞMAN

Prof. Dr. Ayhan ERCİYES

AKSARAY, 2025

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 222342427 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Burcu MERCAN tarafından hazırlanan “**T₀ VE T₁ YANSIMA BAĞINTILI UZAYLAR**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Ayhan ERCİYES

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Prof. Dr. Halis BİLGİL

Kayseri Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Emre KIRLI

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 12.06.2025

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Fazliye KARABÖRK

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinallliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Burcu MERCAN

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmam boyunca bana rehberlik eden, destek veren ve yol gösteren saygıdeğer hocam Prof. Dr. Ayhan ERCİYES'e sonsuz teşekkür ederim. Bilgi, deneyim ve sabrınız sayesinde akademik gelişimime büyük katkıda bulundunuz.

Hayatımın her anında maddi manevi desteğini hissettiğim, yaşadığım her zorlukta yanımda olan ve kız çocuklarının okumasını her şeyden çok destekleyen canım annem Fatma MERCAN'a ve canım babam Sabri MERCAN'a yürekten teşekkür ederim.

Burcu MERCAN
AKSARAY, 2025

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
SİMGELER VE KISALTMALAR	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	4
2.1 Kategori.....	4
2.2 Özel Nesne ve Morfizmler	5
2.3 Fanktor.....	6
2.4 Topolojik Fanktor.....	7
2.5 Eksen Dönüşümleri	9
2.6 T_0 ve T_1 Ayırma Aksiyomları.....	10
3. YANSIMA BAĞINTILI UZAYLAR KATEGORİSİ.....	19
3.1 Yansıma Bağintılı Uzaylar	19
3.2 $RRel$ Topolojik Kategorisi	20
4. T_0 VE T_1 YANSIMA BAĞINTILI UZAYLAR	23
4.1 Lokal T_0 ve T_1 Yansıma Bağintılı Uzaylar.....	23
4.2 T_0 ve T_1 Yansıma Bağintılı Uzaylar	29
4.3 Diğer Bazı Topolojik Kategorilerde T_0 ve T_1 Nesneler	36
5. SOBER YANSIMA BAĞINTILI UZAYLAR.....	39
5.1 Sober Topolojik Uzaylar	39
5.2 Yansıma Bağintılı Uzaylarda Kapalılık	42
5.3 $RRel$ de Sober Nesne.....	43
5.4 Bazı Topolojik Kategorilerde Sober Nesne.....	44
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	47
KAYNAKLAR	49
ÖZGEÇMİŞ.....	51

YÜKSEK LİSANS TEZİ

T_0 VE T_1 YANSIMA BAĞINTILI UZAYLAR

Burcu MERCAN

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ayhan ERCİYES

ÖZET

T_0 ve T_1 ayırma aksiyomları, topolojide noktaların ayrılabilirliğini belirleyen temel kavramlardır. T_0 aksiyomu, bir topolojik uzaydaki her iki farklı noktanın en az bir açık küme ile ayırt edilebilmesini şart koşarken, T_1 aksiyomu her noktanın kendisini içeren ve diğer noktaları içermeyen açık kümelerle sahip olmasını gerektirir. Yani T_1 uzaylarında her noktada özel açık kümeler bulunurken, T_0 uzayları bu ayrımı garanti etmez. T_0 uzayları, otomata teorisi, veri bilimi, makine öğrenmesi, elektronik ve dijital mantık tasarımı gibi pek çok alanda kullanılır.

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde, çalışmamızda kullanacağımız kategorik kavramların tanımı verilmiştir. T_0 ve T_1 topolojik uzayın, topolojik kategorilerdeki karşılığı olan tanımlara örneklerle açıklanmış ve bu tanımların uygulamaları ele alınmıştır. Üçüncü bölümde, yansıma bağıntılı uzaylar açıklanıp, nesneleri yansıma bağıntılı uzaylar ve morfizmleri ise bağıntı koruyan fonksiyonlardan oluşan ***RRel*** kategorisi tanımlanmıştır. ***RRel*** kategorisinin özellikleri verilmiş olup normalleştirilmiş topolojik kategori olduğu gösterilmiştir. Dördüncü bölümde, hem yerel hem de genel anlamda ***RRel*** kategorisinde T_0 ve T_1 nesne belirlenmiştir. Bölüm sonunda diğer bazı topolojik kategorilerdeki T_0 ve T_1 nesneler ile aralarındaki ilişkiler verilmiştir. Beşinci bölümde, öncelikle sober topolojik uzaylar tanımlanmıştır. Ardından, ***RRel*** kategorisinde sober, quasi-sober ve indirgenemez nesne karakterize edilmiştir. Son olarak bazı kategorilerdeki bu kavramlar ve aralarındaki ilişkiler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Topolojik Fanktor, Yansıma Bağıntılı Uzaylar, T_0 ve T_1 Ayırma Aksiyomları, Wedge Çarpımı.

Haziran, 2025; 51 sayfa

M. Sc. THESIS

T_0 AND T_1 REFLEXIVE RELATION SPACES

Burcu MERCAN

**Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof. Dr. Ayhan ERCİYES

ABSTRACT

T_0 and T_1 separation axioms are fundamental concepts in topology that define the separability of points within a topological space. The T_0 axiom states that in a topological space, any two distinct points must be distinguishable by at least one open set. On the other hand, the T_1 axiom requires that each point has open sets containing itself while excluding all other points. In T_1 spaces, each point has its own distinct open set, whereas T_0 spaces do not necessarily guarantee this separation. T_0 spaces are utilized in various fields, including automata theory, data science, machine learning, electronics, and digital logic design.

This thesis comprises six chapters. The second chapter provides definitions of categorical concepts relevant to the study. The definitions corresponding to T_0 and T_1 topological spaces within topological categories are illustrated through examples, and their applications are discussed. In the third chapter, reflexive related spaces are introduced, and the ***RRel*** category is defined, consisting of objects as reflexive related spaces and morphisms as relation preserving functions. The properties of the ***RRel*** category are examined, demonstrating that it constitutes a normalized topological category. The fourth chapter establishes T_0 and T_1 objects within the ***RRel*** category, both in local and general contexts. At the end of this chapter, relationships between T_0 and T_1 objects in other topological categories are provided. In the fifth chapter, sober topological spaces are first introduced. Subsequently, sober, quasi-sober, and irreducible objects within the ***RRel*** category are characterized. Finally, concepts related to these objects in other categories and their interrelations are examined.

Keywords: Topological Category, Reflexive Relation Spaces, T_0 and T_1 Separation Properties, Wedge Product.

June, 2025; 51 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Top da diskre ve indiskre diyagramı.....	9
Şekil 2.2. $p = a$ noktasında $\bar{T}_0$ diyagramı	13
Şekil 2.3. $p = a$ noktasında T_0'	13
Şekil 2.4. $p = a$ noktasında T_1	14
Şekil 2.5. $\bar{T}_0$ diyagramı	15
Şekil 2.6. T_1 diyagramı	17
Şekil 4.1. Yansıma bağıntılı uzaylarda p de $\bar{T}_0$	23
Şekil 4.2. Yansıma bağıntılı uzaylarda p de T_1	25
Şekil 4.3. Yansıma bağıntılı uzaylarda p de T_0'	28
Şekil 4.4. Yansıma bağıntılı uzaylarda $\bar{T}_0'$	29
Şekil 4.5. Yansıma bağıntılı uzaylarda T_0'	32
Şekil 4.6. Yansıma bağıntılı uzaylarda T_1	35

SİMGELER VE KISALTMALAR

CP	Çiftler Uzayı
$Denk$	Denklik Bağıntılı Uzaylar Kategorisi
FCO	Süzgeç Yakınsak Uzaylar Kategorisi
Fam	Aile Uzaylar Kategorisi
$Mor(K)$	K nın Morfizmleri Kümesi
$Ob(K)$	K nın Nesneleri Kümesi
$P(X)$	X in Kuvvet Kümesi
$PBorn$	Pre-Bornolojik Uzaylar Kategorisi
$Poset$	Kısmi Sıralama Bağıntılı Uzaylar Kategorisi
$(P)Born$	(Pre)Bornolojik Uzaylar Kategorisi
$Prord$	Ön Sıralama Bağıntılı Uzaylar Kategorisi
$PsqMet$	Quasi-Metrik Uzayların Kategorisi
Rel	Bağıntı Uzaylar Kategorisi
$Ring$	Halkalar Kategorisi
$RRel$	Yansıma Bağıntılı Uzaylar Kategorisi
Top	Topolojik Uzaylar Kategorisi
$TopGrp$	Topolojik Gruplar Kategorisi
BV_pB	B Kümesinin p Noktasında Wedge Çarpımı
$B \sqcup B$	B Kümesinin Ayrık Birleşimi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar Kümesi

1. GİRİŞ

Matematiksel yapılar arasında en temel ve evrensel olanlardan biri, bağıntı (relation) kavramıdır. Bağıntılar, nesneler arasındaki ilişkileri tanımlamak için kullanılır ve bu ilişkiler, çeşitli alanlarda soyutlamayı mümkün kılar. Bağıntı uzayları, bir küme ile bu küme üzerinde tanımlanmış bağıntıların oluşturduğu yapısal sistemlerdir. Bu sistemler, hem teorik matematikte hem de uygulamalı bilimlerde önemli bir yer tutar [1]. Bağıntı uzayları, özellikle denklik sınıfları, kısmi sıralamalar, graf yapıları ve mantıksal çıkarım sistemleri gibi alanlarda kullanılır. Örneğin, bir denklik bağıntısı, küme üzerinde bir parçalanma (partition) oluşturur ve bu parçalanmalar denklik sınıflarını tanımlarken sıralama bağıntıları belirli bir düzen içinde elemanları sıralamak için kullanılır [2].

Bağıntı uzayları, yalnızca soyut matematiksel teorilerde değil, aynı zamanda birçok uygulamalı alanda da kullanılmaktadır:

Veri Tabanları: Nesneler arasındaki ilişkiler, sorgulama ve veri modelleme için bağıntı uzaylarıyla temsil edilir. Veri kümeleme algoritmalarında noktaların birbirleriyle ilişkisi bağıntılar aracılığıyla analiz edilirken, bilgi sistemlerinde mantıksal bağıntılar sınıflandırmaların yapılmasına olanak tanır [3].

Graf Teorisi: İlişkisel yapılar, model teorisinde matematiksel sistemleri tanımlamak için temel oluşturur; grafik teorisi ise, ilişkisel yapıların bir türü olup düğümler ve kenarlar üzerinden ilişkileri modelleyerek analiz yapar [4].

Yapay Zekâ ve Mantık: Yapay zekâ sistemleri, çok kriterli karar verme ve sıralama algoritmalarında da bağıntı uzaylarını kullanır. Örneğin, bir öneri sisteminde kullanıcı tercihleri, ürünler arasındaki benzerlik bağıntılarıyla modellenir. Bu bağıntılar, kısmi sıralama yapıları oluşturur ve öneri algoritmalarının temelini oluşturur. Bilgi temsili ve çıkarım sistemlerinde bağıntılar, bilgi parçacıkları arasındaki ilişkileri tanımlar. Bağıntı uzayları, yapay zekâ sistemlerinin hem bilgi temsili hem de işlem mantığı açısından vazgeçilmez bir bileşenidir. Ontolojilerden grafik öğrenmeye, mantıksal çıkarımdan öneri sistemlerine kadar birçok alanda bu yapıların kullanımı, Yapay zekânın daha anlamlı, tutarlı ve açıklanabilir hale gelmesini sağlar. Bu nedenle, bağıntı

uzaylarının hem teorik hem de uygulamalı düzeyde daha derinlemesine incelenmesi, yapay zekâ alanındaki ilerlemeler için kritik öneme sahiptir [1].

Sıralama ve Karar Sistemleri: Kısmi sıralamalar, tercih sistemleri ve önceliklendirme algoritmalarında bağıntı uzayları kullanılır. Bunun yanında elektronik sistemlerde dijital mantık devreleri bağıntı uzayları kullanılarak modellenabilir ve analiz edilir [2].

1945 de Eilenberg ve Mac Lane kategori teorisini ortaya attılar [5]. Grothendieck, kategori teorisini cebirsel denklemlerin çözümünde eşsiz bir görüş olarak kohomoloji (cohomology) teorisini oluşturmakta kullandı [6]. Lamberk 1980 yılında, bilgisayar biliminde kullanılan karakter ve programların özel bir çeşit kategori olduğunu gösterdi [7]. Kategori teorisi, coğrafi bilgi sistemlerinde, uzay gözlemlerinde, DNA ve RNA kodları konusunda uygulamaları bulunmaktadır.

Topolojik kategori 1974 yılında Herrlich tarafından başlangıç ve bitiş topolojilerini karakterize ederek başlangıç ve bitiş kaldırmaları varlığına dayanarak topolojik kategoriye tanımlamıştır [8]. Topolojik uzaylar limit uzaylar, yakınsak uzaylar, (pre)bornolojik uzaylar, ön sıralama bağıntılı uzaylar kavramlarını da içine alarak pek çok bilim insanı tarafından topolojik kategoriye genelleştirilmiştir [8-11]. Örneğin, 1971 de Wyler, tam latis kategorisindeki fanktora dayandırarak topolojik kategorinin tanımını vermiştir [9]. Topolojik uzaylarda kapalılık, ayırma aksiyomları, soberlik, Scott uzay olma, bağlantılılık, kompaktlık, kavramlarını herhangi bir topolojik kategoriye genişletmek ve karakterize etmek önemlidir. Bilinen T_0 ayırma aksiyomu topolojik kategoriye değişik yollarla pek çok bilim insanı tarafından genelleştirilmiştir [12-15]. T_0 nesneler Hausdorff nesnelerin değişik formlarını tanımlamakta kullanılır [12, 16-19]. Bir topolojik kategorideki T_1 nesne kavramına Baran 1991 yılında giriş yapmıştır ve O bir topolojik kategorideki verilen bir nesnenin kuvvetli kapalı alt objesi kavramını tanımlamak için T_1 nesnesini kullanmıştır [12,20]. Bundan başka keyfi bir topolojik kategoride verilen bir nesnenin kapalı alt nesnesi topolojik kategorilerdeki regüler ve normal nesnelerin genelleştirilmesinde kullanılır [21,22].

RRel, bağıntı uzaylarının yapısal özelliklerini anlamak için önemli bir araç olarak geliştirilmiştir. ***RRel*** de bağıntılar, morfizmeler olarak temsil edilerek, bağıntı koruyan fonksiyonlarla birleştirilir. Böylece matematiksel nesneler arasındaki ilişkilerin daha sistematik bir şekilde incelenmesi mümkün olur.

Bu tez çalışmasında aşağıdaki durumlar amaçlanmıştır:

1. Hem noktada hem de genel anlamda ***RRel*** kategorisinde T_0 ve T_1 ayırma aksiyomları karakterize etmek,
2. T_0 ve T_1 ile elde edilen alt kategorileri ve aralarındaki ilişkileri incelemek,
3. ***RRel*** kategorisinde sober ve quasi-sober nesneleri belirlemek ve bu nesneler ile elde edilen alt kategorileri ve aralarındaki ilişkileri araştırmak,
4. Diğer bazı topolojik kategorilerdeki sonuçlar ile bu tez çalışmasında elde edilen sonuçları kıyaslamak.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1 Kategori

Tanım 2.1.1 K bir sınıf olsun. K deki nesnelerin (objelerin) sınıfı $Ob(K)$ ve her $A, B \in Ob(K)$ nesneleri için A dan B ye tüm dönüşümlerin (morfizmlerin) sınıfı $Mor(A, B) = \{f | f: A \rightarrow B \text{ ve } A, B \in Ob(K)\}$ tanımlansın. Her $A, B, C \in Ob(K)$ için iki dönüşümün bileşkesi

$$\begin{aligned} Mor(A, B) \times Mor(B, C) &\rightarrow Mor(A, C) \\ (f, g) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

biçimindedir ve bu işlemin aşağıdaki şartları sağlaması halinde oluşan yapıya kategori denir [23,24].

(i) K deki her A nesnesi için id_A birim dönüşümü vardır öyle ki $\forall f: A \rightarrow B$ için

$$f \circ id_A = f \text{ ve } id_B \circ f = f$$

(ii) K deki her $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ ve $h: C \rightarrow D$ için

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Örnek 2.1.2 (1) Nesneleri kümeler, morfizmleri fonksiyonlar olarak tanımlanan sınıf tüm kümelerin kategorisi olarak adlandırılır ve **Set** ile gösterilir.

(2) Nesneleri topolojik uzaylar, morfizmleri sürekli fonksiyonlar olarak tanımlanan sınıf tüm topolojik uzayların kategorisi olarak adlandırılır ve **Top** şeklindedir.

(3) Nesneleri gruplar, morfizmleri grup homomorfizmleri olan sınıf tüm grupların kategorisidir ve **Grp** şeklindedir.

(4) Nesneleri halkalar, morfizmleri halka homomorfizmleri olan sınıf tüm halkaların kategorisidir ve **Ring** şeklindedir.

(5) Nesneleri yansıma bağıntılı uzaylar, morfizmleri bağıntı koruyan dönüşümler olan sınıf tüm yansıma bağıntılı uzayların kategorisidir ve **RRel** şeklindedir.

(6) Nesneleri bornolojik (prebornolojik) uzaylar, morfizmleri sürekli dönüşümler olan sınıf tüm bornolojik (prebornolojik) uzayların kategorisidir ve **Born** (**PBorn**) şeklindedir.

(7) Nesneleri metrik uzaylar, morfizmleri sürekli fonksiyonlar olan sınıf tüm metrik uzayların kategorisidir ve **Met** şeklindedir.

Tanım 2.1.3 K ve L iki kategori olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye K nin alt kategorisi denir.

(i) $Ob(L) \subseteq Ob(K)$

(ii) $\forall A, B \in Ob(L)$ için $L(A, B) \subseteq K(A, B)$

(iii) L deki dönüşümlerin bileşke işlemi, K deki ile aynıdır.

(iv) Her $A \in Ob(L)$ için L deki id_A , K deki birim ile aynıdır.

$\forall A, B \in Ob(L)$ için $L(A, B) = K(A, B)$ ise L ye full alt kategori denir [23,24].

2.2 Özel Nesne ve Morfizmler

Tanım 2.2.1 ([23,24]) K bir kategori olsun.

(1) $I \in Ob(K)$ olsun. Her $A \in Ob(K)$ için $K(I, A) = \{f | f: I \rightarrow A \text{ dönüşüm}\}$ kümesi tek elemanlı ise I ye K nin ilk (initial) nesnesi denir.

(2) $T \in Ob(K)$ olsun. Her $A \in Ob(K)$ için $K(A, T) = \{f | f: A \rightarrow T \text{ dönüşüm}\}$ kümesi tek elemanlı ise T ye K nin son (terminal) nesnesi denir.

(3) $A \in Ob(K)$ hem başlangıç hem de bitiş nesnesi ise A ya K nin sıfır nesnesi denir.

Örnek 2.2.2 **Set** de, $I = \emptyset$ başlangıç ve $T = \{x\}$ bitiş nesnedir. **Top** da, $I = (\emptyset, \{\emptyset\})$ başlangıç nesne ve $T = (x, \{\emptyset, \{x\}\})$ bitiş nesnedir. **Grp** da sadece birimden oluşan $(\{e, *\})$ grubu başlangıç, bitiş ve sıfır nesnesidir. **Born** ve **PBorn** da $I = (\emptyset, \{\emptyset\})$ başlangıç nesne ve $T = (\{x\}, \{\{x\}\})$ bitiş nesnedir. **Ring** de başlangıç nesne $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi, bitiş nesne sıfır halkasıdır. **Met** de $I = (\emptyset, d)$ başlangıç nesne ve $T = (\{x\}, d)$ bitiş nesnedir.

Tanım 2.2.3 ([23,24]) K bir kategori, $f: X \rightarrow Y$ bir morfizm olsun.

(1) $g \circ f = id_X$, $f \circ g = id_Y$ şeklinde $g: Y \rightarrow X$ dönüşümü varsa f ye izomorfizm denir.

(2) $f \circ h = f \circ k$ olacak şekilde K deki tüm h ve k için $h = k$ oluyorsa f ye monomorfizm denir. **Set** de monomorfizm bire bir fonksiyona karşılık gelir. Herhangi bir kategoride birebir dönüşüm monomorfizmdir. Ters her zaman doğru değildir.

(3) $h \circ f = k \circ f$ olacak şekilde K deki tüm h ve k için $h = k$ oluyorsa f ye epimorfizm denir. **Set** de epimorfizm örten fonksiyona karşılık gelir. Herhangi bir kategoride örten dönüşüm epimorfizmdir. Ters her zaman doğru değildir.

(4) $f: X \rightarrow Y$ hem monomorfizm hem de epimorfizm ise f ye bimorfizm denir. **Set** de izomorfizm bire bir ve örten fonksiyona karşılık gelir.

2.3 Fanktor

Fanktorlar, okların yönünü koruyan kovaryant fanktorlar ve okların yönünü tersine çeviren kontravaryant fanktorlar olmak üzere iki ana tipe ayrılır. Fanktorlar matematiğin farklı disiplinleri arasındaki ilişkileri biçimsel olarak ifade etme imkânı sunar. Örneğin, cebirsel topolojide homoloji ve homotopi fanktorları, topolojik uzaylar kategorisinden gruplar kategorisine giden kovaryant fanktorlardır ve karmaşık topolojik problemlerin cebirsel araçlarla incelenmesine olanak tanır. Fanktorlar, soyut cebir, mantık, tip teorisi ve teorik bilgisayar bilimi gibi birçok alanda hem kavramsal hem de uygulamalı düzeyde merkezi bir role sahiptir. Bu tez çalışmasında kovaryant fanktorlar bulunmaktadır.

Tanım 2.3.1 K ve L iki kategori olmak üzere K nin $\forall A$ nesnesini L nin $F(A)$ nesnesine, K nin $\forall f: A \rightarrow B$ dönüşümünü L nin $F(f): F(A) \rightarrow F(B)$ ne dönüştüren ve $F: K \rightarrow L$ ye aşağıdaki şartları sağlarsa fanktor denir [23,24].

(i) F birim morfizmi korur yani her $A \in Ob(K)$ için

$$F(id_A) = id_{F(A)}$$

(ii) F bileşke işlemini korur yani $f, g \in Mor(K)$ için tanımlı olman $g \circ f$ için

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

Tanım 2.3.2 ([23]) $F:K \rightarrow L$ bir fanktor olsun.

- 1) K nin $\forall A, B$ nesnesi, $\forall f: A \rightarrow B$ için $F(f) = f$ olacak şekilde $\exists g: A \rightarrow B$ varsa F dolu fanktor adını alır.
- 2) K nin $\forall A, B$ nesnesi, $\forall f, g: A \rightarrow B$ için $F(f) = F(g)$ olduğunda $f = g$ ise F düzenli (faithful) fanktor adını alır.
- 3) K nin $\forall A$ nesnesi için $\forall f: A \rightarrow A$ için $F(f) = id_{F(A)}$ ve f izomorfizm olduğunda $f = id_A$ ise F ye amnestik (amnesitic) fanktor adını alır.
- 4) F hem amnestik hem de düzenli ise F belirli (concrete) fanktor adını alır.

Örnek 2.3.3 1) $F: Top \rightarrow Set, F((Y, \tau)) = Y$ ye unutkan (forgetful) fanktor denir.

2) $D: Set \rightarrow Top, D(Y) = (Y, P(Y))$ ye diskre fanktor denir.

3) $I^*: Set \rightarrow Top, I^*(Y) = (Y, \{\emptyset, Y\})$ ye indiskre fanktor denir.

2.4 Topolojik Fanktor

Tanım 2.4.1 ([23,24]) K, L kategorileri için $U: K \rightarrow L$ fanktoru aşağıdaki şartları sağlıyorsa U topolojik fanktordur veya K ye L üzerinde topolojik kategori denir. L kategorisine ise baz kategori (base category) denir.

(i) U belirli (concrete) olmalıdır.

(ii) U küçük demetlere (small fiber) sahip olmalıdır. $B \in Ob(L)$ için $U^{-1}(B)$ kümedir. $U^{-1}(B) = \{X \in Ob(K) \mid U(X) = B\}$ dir ve B de bir demet adını alır.

(iii) L deki her $f_i: A \rightarrow U(X_i)$ K de bir başlangıç kaldırmaya sahip olmalıdır. Yani $i \in I$ için $A_i \in Ob(K)$, $B \in Ob(L)$ ve $f_i: B \rightarrow B_i = U(\bar{f}_i)$ morfizmleri L kategorisinde bir U -kaynağı olsun. $\{f_i\}_{i \in I}$ nin bir başlangıç kaldırmasının (initial lift) $A \in Ob(K)$, $U(A) = B$, ve $U(\bar{f}_i) = f_i$ olacak şekildeki $\bar{f}_i: A \rightarrow A_i$ morfizmler ailesi olması için aşağıdaki şart sağlanmalıdır.

K deki $\bar{g}_i: X \rightarrow A_i$ dönüşümlerin ailesi ve $U(\bar{g}_i) = g_i$ olmak üzere $\forall i \in I$ için $f_i \circ h = g_i$ olacak şekilde $\exists h: U(X) \rightarrow B$ varsa $\forall i \in I$ için $\bar{f}_i \circ \bar{h} = \bar{g}_i$ olacak şekilde $\exists \bar{h}: X \rightarrow A$ dönüşümü vardır. $\bar{f}_i: A \rightarrow A_i$ bir başlangıç kaldırması ise A

üzerindeki yapıya $\bar{f}_i$ dönüşümleri tarafından A_i nesnelerinden elde edilen yapı adı verilir.

L nin her bir sabit X nesnesi için $U^{-1}(X)$ tek yapıya sahipse U normalleştirilmiş bir topolojik kategoridir. X nesnesi sabittir $\Leftrightarrow X$ terminal nesnenin bir alt objesidir.

Teorem 2.4.2 ([23]) Keyfi çarpımlara sahip kategorisi $\mathcal{E}$ için $U: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ fanktoru (ii) şartını sağlasın ve belirli olmak üzere $\mathcal{E}$ nin topolojik kategori olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{E}$ alt uzaylara ve indiskre nesnelere sahip olmasıdır.

Örnek 2.4.3 (1) $K = Top, Denk, Preord, Fam, CP, Unif, PsqMet, FCO, Rel, Born, PBorn$ kategorileri için $U: K \rightarrow Set$ topolojik fanktordur.

(2) **Met** de keyfi sayıdaki (sonsuz) metrik uzayların çarpımları metrik uzay değildir. U nun başlangıç kaldırmasına sahip olmadığı anlamına gelir. Dolayısıyla, $U: Met \rightarrow Set$ unutkan fanktoru topolojik değildir.

(3) Bir grubun (halkanın) alt kümesi grup (halka) olmadığından $U: Grp \rightarrow Set$ ve $U: Ring \rightarrow Set$ fanktorları topolojik değildir. Bu durum U nun başlangıç kaldırmasına sahip olmadığı anlamına gelir.

(4) $U: TopGrp \rightarrow Grp$ fanktoru topolojiktir. Ama $U: TopGrp \rightarrow Top$ topolojik fanktor değildir.

(5) $i = 0, 1, 2, 3, 4$ için $U: T_iTop \rightarrow Set$ ve $U: Poset \rightarrow Set$ topolojik fanktor değildir, çünkü T_iTop ve $Poset$ kategorileri indiskre nesneye sahip değildir.

(6) $U: PreT_2Top \rightarrow Set$ unutkan fanktoru topolojik fanktordur ve $PreT_2Top$ kategorisi indiskre nesneye sahiptir.

Tanım 2.4.4 ([23,24]) $U: K \rightarrow Set$ topolojik kategorisi

(1) $D: Set \rightarrow K$ sol adjointe sahipse D ye diskre fanktor denir, $d = DUD$ formundaki d ye ise K nın diskre nesnesi denir.

(2) $I: Set \rightarrow K$ sağ adjointe sahipse I ya indiskre fanktor denir, $e = IUE$ formundaki e ye ise K nın indiskre nesnesi denir. Örneğin Şekil 2.1’de **Top** için diskre ve indiskre objelerin diyagramları verilmiştir.

$$\begin{array}{ccc|ccc}
\textit{Top} & \xrightarrow{U} & \textit{Set} & \xrightarrow{D} & \textit{Top} & & \textit{Top} & \xrightarrow{U} & \textit{Set} & \xrightarrow{I} & \textit{Top} \\
(Y, \tau) & \rightarrow & Y & \rightarrow & (Y, P(Y)) & & (Y, \tau) & \rightarrow & Y & \rightarrow & (Y, \{\emptyset, Y\}) \\
d & = & UDd & & & & e & = & Ule & & \\
\tau & = & P(Y) & & & & \tau & = & \{\emptyset, Y\} & &
\end{array}$$

Şekil 2.1. *Top* da diskre ve indiskre diyagramı.

Teorem 2.4.5 ([23]) *K* bir kategori olsun.

(1) $d \in Ob(K)$ diskredir yani $DUd = d$ dir $\Leftrightarrow$ Her $X \in Ob(K)$ için $U(d) \rightarrow U(X)$ dönüşümü $d \rightarrow X$ kaldırmasına sahiptir.

(2) $e \in Ob(K)$ indiskredir yani $D^*Ue = e$ dir $\Leftrightarrow$ Her $Y \in Ob(K)$ için $U(Y) \rightarrow U(e)$ dönüşümü $Y \rightarrow e$ kaldırmasına sahiptir

2.5 Eksen Dönüşümleri

Tanım 2.5.1 ([12,24]) Bir X kümesinin ayrık iki kopyasının p de çakışması $X \vee_p X$ ile gösterilsin. Bu durumda $X \vee_p X$ kümesinde x birinci bileşendeyse x_1 ile ikinci bileşendeyse x_2 ile gösterilir.

(1) $A_p: X \vee_p X \rightarrow X^2$ için aşağıdaki dönüşüme p de Temel Eksen Dönüşümü denir.

$$A_p(x_i) = \begin{cases} (x, p), & i = 1 \text{ ise} \\ (p, x), & i = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

(2) $S_p: X \vee_p X \rightarrow X^2$ için aşağıdaki dönüşüme p deki Skewed Eksen Dönüşümü denir.

$$S_p(x_i) = \begin{cases} (x, x), & i = 1 \text{ ise} \\ (p, x), & i = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

(3) $\nabla_p: X \vee_p X \rightarrow X$, $i = 1, 2$ için $\nabla_p(x_i) = x$ dönüşüme p deki Katlama Dönüşümü denir.

Yukarıdaki tanımda verilen X yerine $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ve $p = 0$ alınırsa Temel Eksen Dönüşümünün görüntüsü bilinen kartezyen koordinatlardaki eksenlerin birleşimini verir. Skewed Eksen Dönüşümünün görüntüsü $y = x$ doğrusu ile $x = 0$ doğrularının birleşimini verir. Katlama Dönüşümü ise $y = 0$ doğrusunu verir.

Tanım 2.5.2 ([12,24]) Bir X kümesinde X^2 nin ayrık iki kopyasının Δ boyunca çakışması $X^2 \vee_{\Delta} X^2$ şeklinde gösterilsin. $X^2 \vee_{\Delta} X^2$ de (x, y) noktası birinci bileşendeysse $(x, y)_1$ ile ikinci bileşendeysse $(x, y)_2$ şeklindedir.

(1) $A: X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow X^3$ için aşağıdaki dönüşüme Temel Eksen Dönüşümü denir.

$$A((x, y)_i) = \begin{cases} (x, y, x), & i = 1 \text{ ise} \\ (x, x, y), & i = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

(2) $S: X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow X^3$ için aşağıdaki dönüşüme Skewed Eksen Dönüşümü denir.

$$S((x, y)_i) = \begin{cases} (x, y, y), & i = 1 \text{ ise} \\ (x, x, y), & i = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

(3) $\nabla: X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow X^2$, $i = 1, 2$ için $\nabla((x, y)_i) = (x, y)$ şeklindeki dönüşüme Katlama Dönüşümü denir.

2.6 T_0 ve T_1 Ayırma Aksiyomları

T_0 ve T_1 ayırma aksiyomları, özellikle topoloji, analiz ve cebirsel topoloji gibi matematiğin temel alanlarında yoğun olarak kullanılır. T_0 uzaylar, sürekli fonksiyonların ayırt edici özelliklerinin incelenmesinde ve topolojik ayırma gerektiren problemlerde temel bir sınıf oluşturur. T_1 ayırma aksiyomu ise nokta kapalı küme olduğu için, sınır, kapanış ve süreklilik kavramlarının tanımlanmasında ve ayrıklık özelliklerinin araştırılmasında geniş uygulama alanına sahiptir.

Tanım 2.6.1 ([24]) (X, τ) uzay ve $p \in X$ olsun. Her $x, p \in X$, $x \neq p$ için

(1) $x \notin G_p$ olacak şekilde $p \in G_p$ açık komşuluğu veya $p \notin G_x$ olacak şekilde $x \in G_x$ açık komşuluğu varsa (X, τ) ya p noktasında T_0 uzay denir.

(2) $x \notin G_p$ olacak şekilde $p \in G_p$ açık komşuluğu ve $p \notin G_x$ olacak şekilde $x \in G_x$ açık komşuluğu varsa (X, τ) ya p noktasında T_1 uzay denir.

Tanım 2.6.2 ([24]) (X, τ) topolojik uzay olsun. Her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için

(1) $x \notin G_y$ olacak şekilde $y \in G_y$ açık komşuluğu veya $y \notin G_x$ olacak şekilde $x \in G_x$ açık komşuluğu varsa (X, τ) ya T_0 uzay denir.

(2) $x \notin G_y$ olacak şekilde $y \in G_y$ açık komşuluğu ve $y \notin G_x$ olacak şekilde $x \in G_x$ açık komşuluğu varsa (X, τ) ya T_1 uzay denir.

Teorem 2.6.3 ([12,25]) $U: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{Set}$ topolojik fanktor, $B \in Ob(\mathbf{K})$, $p \in U(B) = X$, D diskre olsun.

(1) B, p de $\bar{T}_0$ dır ancak ve ancak

$$\{A_p : X \vee_p X \rightarrow U(B^2) = X^2 \text{ ve } \nabla_p : X \vee_p X \rightarrow UD(X) = X\}$$

U -kaynağının başlangıç kaldırması diskredir

(2) B, p de T_1 dir ancak ve ancak

$$\{S_p : X \vee_p X \rightarrow U(B^2) = X^2 \text{ ve } \nabla_p : X \vee_p X \rightarrow UD(X) = X\}$$

U -kaynağının başlangıç kaldırması diskredir.

(3) B, p de T_0' dır ancak ve ancak

$$\{id : X \vee_p X \rightarrow U(X \vee_p X)' = X \vee_p X \text{ ve } \nabla_p : X \vee_p X \rightarrow UD(X) = X\}$$

U -kaynağının başlangıç kaldırmasının diskredir. $(X \vee_p X)'$ deki yapı

$\{i_1, i_2 : X \rightarrow X \vee_p X\}$ U nun final kaldırmasıdır.

Teorem 2.6.4 $F: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ için X nesnesi p de T_0 dir $\Leftrightarrow X \vee_p X$ de

$$A_p : X \vee_p X \rightarrow (X^2, \tau_*) \text{ ve } \nabla_p : X \vee_p X \rightarrow (X, P(X))$$

fonksiyonları ile üretilen topoloji diskredir. Benzer biçimde A_p , S_p olarak değiştirilirse p noktasında T_1 olma elde edilir. Ayrıca p de $\bar{T}_0$, T_0' olma bilinen anlamda p noktasında T_0 olmaya karşılık gelir [13,15,25].

Tanım 2.6.5 ([12,25]) $U: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{Set}$ topolojik fanktor, $X \in Ob(\mathbf{K})$, $U(B) = X$ için

(1) $D: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{K}$ diskre fanktor olmak üzere

$$\{A: X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow U(B^3) = X^3 \text{ ve } \nabla: X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow UD(X^2) = X^2\}$$

U -kaynağının başlangıç kaldırması diskre ise B nesnesine $\bar{T}_0$ dır denir.

(2) $(X^2 \vee_{\Delta} X^2)'$, $\{i_1, i_2: U(B^2) = X^2 \rightarrow X^2 \vee_{\Delta} X^2\}$ U -kavşağının bitiş kaldırması olmak üzere

$$\{id: X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow U(X^2 \vee_{\Delta} X^2)' = X^2 \vee_{\Delta} X^2 \text{ ve } \nabla_p: X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow UD(X^2) = X^2\}$$

U nun başlangıç kaldırması diskre ise B nesnesi T_0' dır.

(3) X nesnesinin en az iki elemanlı alt uzayı indiskre değilse uzaya T_0 denir.

(4) $D: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{K}$ diskre fanktor olmak üzere

$$\{S: X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow U(B^3) = X^3 \text{ ve } \nabla: X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow UD(X^2) = X^2\}$$

U nun başlangıç kaldırması diskre ise X nesnesine T_1 nesnesi denir.

Teorem 2.6.6 ([24]) (X, τ) uzayı için aşağıdakiler denktir:

(1) (X, τ) , T_0 dır,

(2) $A: X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow (X^3, \tau_*)$ ve $\nabla: X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow (X^2, P(X^2))$ ile elde edilen başlangıç topolojisi diskredir,

(3) $id: X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow (X^2 \vee_{\Delta} X^2, \tau^*)$ birim ve $\Delta: X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow (X^2, P(X^2))$ ile elde edilen başlangıç topolojisi diskredir,

(4) (X, τ) en az iki elemanlı hiçbir indiskre alt uzay ihtiva etmez.

Teorem 2.6.7 ([24]) (X, τ) topolojik uzayının T_1 olması için gerek ve yeter şart X^3 τ_* $S: X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow (X^3, \tau_*)$ ve $\nabla: \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow (X^2, P(X^2))$ fonksiyonları tarafından üretilen başlangıç topolojisinin diskre olmasıdır.

Örnek 2.6.8 $B = \{a, b\}$ kümesi üzerinde ve $\tau = \{\emptyset, B, \{a\}\}$ topolojisi verilsin.

(1) (B, τ) uzayının a noktasında $\bar{T}_0$ olduğunu gösterelim (bkz. Şekil 2.2).

$$\begin{array}{ccc} (BV_a B, \tau_{BV_a B}) & \xrightarrow{A_a} & (B^2, \tau_*) \\ \downarrow \nabla_a & & \\ (B, P(B)) & & \end{array}$$

Şekil 2.2. $p = a$ noktasında $\bar{T}_0$ diyagramı.

$\tau_* = \{(B^2, \emptyset, \{(a, b), (a, a)\}, \{(b, a), (a, a)\}, \{(a, a)\})\}$ sınıfı B^2 deki çarpım topolojisi ve $P(B) = \{B, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$ diskre topoloji olmak üzere,

$\nabla_a^{-1}(B) = BV_a B$		$A_a^{-1}(B^2) = BV_a B$
$\nabla_a^{-1}(\emptyset) = \emptyset$		$A_a^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
$\nabla_a^{-1}(\{a\}) = \{a\}$		$A_a^{-1}(\{(a, a)\}) = \{a\}$
$\nabla_a^{-1}(\{b\}) = \{b_1, b_2\}$		$A_a^{-1}(\{(a, b), (a, a)\}) = \{b_2, a\}$
		$A_a^{-1}(\{(b, a), (a, a)\}) = \{a, b_1\}$

$$\delta = \{BV_a B, \emptyset, \{a\}, \{a, b_1\}, \{b_2, a\}, \{b_1, b_2\}\} \text{ alt baz,}$$

$$\beta = \{BV_a B, \emptyset, \{a\}, \{a, b_1\}, \{b_2, a\}, \{b_1, b_2\}, \{b_1\}, \{b_2\}\} \text{ baz,}$$

$$\tau = \{BV_a B, \emptyset, \{a\}, \{a, b_1\}, \{b_2, a\}, \{b_1, b_2\}, \{b_1\}, \{b_2\}\} = P(BV_a B)$$

A_a ve ∇_a dan doğrulan topoloji diskre olup Teorem 2.6.3 den (B, τ) uzayı a da T_0 dır.

(2) (B, τ) uzayı a noktasında T_0' dır (bkz. Şekil 2.3).

$$\begin{array}{ccc} (BV_a B, \tau_{BV_a B}) & \xrightarrow{id} & (BV_a B, \tau^*) \\ \downarrow \nabla_a & & \uparrow i_1 \quad \uparrow i_2 \\ (B, P(B)) & & (B, \tau) \end{array}$$

Şekil 2.3. $p = a$ noktasında T_0' .

BV_aB üzerindeki i_1 ve i_2 içine dönüşümleri ile elde edilen bitiş topolojisi

$$\tau^* = \{\emptyset, BV_aB, \{a\}, \{a, b_1\}, \{a, b_2\}\}$$

şeklindedir.

Şimdi ise τ_{BV_aB} topolojisini bulalım.

$\nabla_a^{-1}(B) = BV_aB$	$id^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
$\nabla_a^{-1}(\emptyset) = \emptyset$	$id^{-1}(BV_aB) = BV_aB$
$\nabla_a^{-1}(\{a\}) = \{a\}$	$id^{-1}(\{a\}) = \{a\}$
$\nabla_a^{-1}(\{b\}) = \{b_1, b_2\}$	$id^{-1}(\{a, b_1\}) = \{a, b_1\}$
	$id^{-1}(\{a, b_2\}) = \{a, b_2\}$

$$\delta = \{\emptyset, BV_aB, \{a\}, \{a, b_1\}, \{a, b_2\}, \{b_1, b_2\}\} \text{ alt baz,}$$

$$\beta = \{\emptyset, BV_aB, \{a\}, \{a, b_1\}, \{a, b_2\}, \{b_1, b_2\}, \{b_1\}, \{b_2\}\} \text{ baz,}$$

$$\tau = \{\emptyset, BV_aB, \{a\}, \{a, b_1\}, \{a, b_2\}, \{b_1, b_2\}, \{b_1\}, \{b_2\}\} = P(BV_aB)$$

olduğundan Teorem 2.6.3 den (B, τ) uzayı a da T_0' dır.

(3) (B, τ) nun a noktasında T_1 olmadığını gösterelim (bkznz. Şekil 2.4).

$$\begin{array}{ccc}
 (BV_aB, \tau_{BV_aB}) & \xrightarrow{S_a} & (B^2, \tau_*) \\
 \downarrow \nabla_a & & \\
 (B, P(B)) & &
 \end{array}$$

Şekil 2.4. $p = a$ noktasında T_1 .

$$\begin{array}{l|l}
\mathbb{V}_a^{-1}(B) = B\mathbb{V}_a B & S_a^{-1}(B^2) = B\mathbb{V}_a B \\
\mathbb{V}_a^{-1}(\emptyset) = \emptyset & S_a^{-1}(\emptyset) = \emptyset \\
\mathbb{V}_a^{-1}(\{a\}) = \{a\} & S_a^{-1}(\{(a, a)\}) = \{a\} \\
\mathbb{V}_a^{-1}(\{b\}) = \{b_1, b_2\} & S_a^{-1}(\{(a, a), (a, b)\}) = \{a, b_2\} \\
& S_a^{-1}(\{(a, a), (b, a)\}) = \{a\}
\end{array}$$

$$\delta = \{B\mathbb{V}_a B, \emptyset, \{a\}, \{b_1, b_2\}, \{a, b_2\}\} \text{ alt baz,}$$

$$\beta = \{B\mathbb{V}_a B, \emptyset, \{a\}, \{b_2\}, \{b_1, b_2\}, \{a, b_2\}\} \text{ baz,}$$

$$\tau = \{B\mathbb{V}_a B, \emptyset, \{a\}, \{b_2\}, \{b_1, b_2\}, \{a, b_2\}\} \text{ topoloji,}$$

$$\tau \neq P(B\mathbb{V}_a B)$$

olup S_a ve $\mathbb{V}_a$ tarafından doğrulan topoloji diskre olmadığından Teorem 2.6.3 den (B, τ) uzayı a noktasında T_1 değildir.

Şimdi de noktadan bağımsız olarak Teorem 2.6.5 in bir uygulaması olan örneği verelim.

Örnek 2.6.9 $B = \{a, b\}$ kümesi üzerinde ve $\tau = \{\emptyset, B, \{a\}\}$ topolojisi verilsin.

(1) (B, τ) uzayı $\bar{T}_0$ dır. $B^2\mathbb{V}_\Delta B^2$ üzerindeki üretilen topoloji $\tau_{B^2\mathbb{V}_\Delta B^2}$ olmak üzere, Şekil 2.5'te verilen diyagrama dikkat edilirse

$$\begin{array}{ccc}
(B^2\mathbb{V}_\Delta B^2, \tau_{B^2\mathbb{V}_\Delta B^2}) & \xrightarrow{A} & (B^3, \tau_*) \\
\downarrow \nabla & & \\
(B^2, P(B^2)) & &
\end{array}$$

Şekil 2.5. $\bar{T}_0$ diyagramı.

$$\tau_* = \{B^3, \emptyset, B \times B \times \{a\}, B \times \{a\} \times B, \{a\} \times B \times B, \{a\} \times \{a\} \times B, \\ \{a\} \times B \times \{a\}, B \times \{a\} \times \{a\}, \{a\} \times \{a\} \times \{a\}\}$$

$$\tau_* = \{B^3, \emptyset, \{(a, a, a), (a, b, a), (b, a, a), (b, b, a)\}, \\ \{(a, a, a), (b, a, a), (b, a, b), (a, a, b)\}, \{(a, a, a), (a, a, b), (a, b, a), (a, b, b)\}, \\ \{(a, a, a), (a, a, b)\}, \{(a, a, a), (a, b, a)\}, \{(a, a, a), (b, a, a)\}, \{(a, a, a)\}\}$$

$B^2 = \{(b, b), (b, a), (a, b), (a, a)\}$ dır. Şimdi de $P(B^2)$ yi yazalım.

$$P(B^2) = \{\{(b, b)\}, \{(b, a)\}, \{(a, b)\}, \{(a, a)\}, \{(b, b), (b, a)\}, \{(b, b), (a, b)\}, \\ \{(b, b), (a, a)\}, \{(b, a), (a, b)\}, \{(b, a), (a, a)\}, \{(a, b), (a, a)\}, \\ \{(b, b), (b, a), (a, b)\}, \{(b, b), (b, a), (a, a)\}, \{(b, b), (a, b), (a, a)\}, \\ \{(b, a), (a, b), (a, a)\}, \{(b, b), (b, a), (a, b), (a, a)\}, \emptyset\}$$

$$\begin{aligned} \nabla^{-1}(\emptyset) &= \emptyset \\ \nabla^{-1}(B^2) &= B^2 \bigvee_{\Delta} B^2 \\ \nabla^{-1}(\{(b, b)\}) &= \{(b, b)\} \\ \nabla^{-1}(\{(b, a)\}) &= \{(b, a)_1, (b, a)_2\} \\ \nabla^{-1}(\{(a, b)\}) &= \{(a, b)_1, (a, b)_2\} \\ \nabla^{-1}(\{(a, a)\}) &= \{(a, a)\} \\ \nabla^{-1}(\{(b, b), (a, a)\}) &= \{(b, b), (a, a)\} \\ \nabla^{-1}(\{(b, b), (a, b)\}) &= \{(b, b), (a, b)_1, (a, b)_2\} \\ \nabla^{-1}(\{(b, b), (b, a)\}) &= \{(b, b), (b, a)_1, (b, a)_2\} \\ \nabla^{-1}(\{(b, a), (a, b)\}) &= \{(b, a)_1, (b, a)_2, (a, b)_1, (a, b)_2\} \\ \nabla^{-1}(\{(b, a), (a, a)\}) &= \{(b, a)_1, (b, a)_2, (a, a)\} \\ \nabla^{-1}(\{(a, b), (a, a)\}) &= \{(a, b)_1, (a, b)_2, (a, a)\} \\ \nabla^{-1}(\{(b, b), (b, a), (a, b)\}) &= \{(b, b), (b, a)_1, (b, a)_2, (a, b)_1, (a, b)_2\} \\ \nabla^{-1}(\{(b, b), (b, a), (a, a)\}) &= \{(b, b), (b, a)_1, (b, a)_2, (a, a)\} \\ \nabla^{-1}(\{(b, b), (a, b), (a, a)\}) &= \{(b, b), (a, b)_1, (a, b)_2, (a, a)\} \\ \nabla^{-1}(\{(b, a), (a, b), (a, a)\}) &= \{(b, a)_1, (b, a)_2, (a, b)_1, (a, b)_2, (a, a)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A^{-1}(\emptyset) &= \emptyset \\
A^{-1}(B^3) &= B^2 \bigvee_{\Delta} B^2 \\
A^{-1}(\{(b, b, a), (b, a, a), (a, b, a), (a, a, a)\}) &= \{(b, a)_2, (a, b)_1, (a, a)\} \\
A^{-1}(\{(a, b, b), (a, b, a), (a, a, b), (a, a, a)\}) &= \{(a, b)_1, (a, b)_2, (a, a)\} \\
A^{-1}(\{(a, b, a), (a, a, a)\}) &= \{(a, b)_1, (a, a)\} \\
A^{-1}(\{(a, a, b), (a, a, a)\}) &= \{(a, b)_1, (a, a)\} \\
A^{-1}(\{(b, a, a), (a, a, a)\}) &= \{(a, a)\} \\
A^{-1}(\{(b, a, b), (a, a, b), (a, a, a), (b, a, a)\}) &= \{(a, b)_1, (a, b)_2, (a, a)\} \\
A^{-1}(\{(a, a, a)\}) &= \{(a, a)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta &= \{\emptyset, B^2 \bigvee_{\Delta} B^2, \{(b, a)_2, (a, b)_1, (a, a)\}, \{(a, b)_1, (a, b)_2, (a, a)\}, \\
&\quad \{(a, b)_1, (a, a)\}, \{(a, b)_1, (a, a)\}, \{(a, a)\}, \{(b, a)_1, (a, b)_2, (a, a)\}, \\
&\quad \{(b, b)(b, a)_1, (b, a)_2\}, \{(a, b)_1, (a, b)_2\}, \\
&\quad \{(b, b), (a, a)\}, \{(a, b)_1, (a, b)_2, (b, b)\}, \{(b, a)_1, (b, a)_2, (a, b)_1, (a, b)_2\}, \\
&\quad \{(b, a)_1, (b, a)_2, (a, a)\}\} \\
\beta &= \delta \cup \{ \{(a, b)_1\}, \{(b, a)_1\}, \{(a, b)_2\}, \{(b, a)_2\}, \dots \} \\
\tau &= P(B^2 \bigvee_{\Delta} B^2)
\end{aligned}$$

olur ki sonuç olarak Teorem 2.6.5 den (B, τ) uzayı $\bar{T}_0$ dır.

(2) (B, τ) uzayı T_1 değildir, Şekil 2.6’da verilen diyagrama dikkat edilirse

$$\begin{array}{ccc}
(B^2 \bigvee_{\Delta} B^2, \tau_{B^2 \bigvee_{\Delta} B^2}) & \xrightarrow{s} & (B^3, \tau_*) \\
\downarrow \nabla & & \\
(B^2, P(B^2)) & &
\end{array}$$

Şekil 2.6. T_1 diyagramı.

$$\begin{aligned}
S^{-1}(\emptyset) &= \emptyset \\
S^{-1}(B^3) &= B^2 \vee_{\Delta} B^2 \\
S^{-1}(\{(b, b, a), (b, a, a), (a, b, a), (a, a, a)\}) &= \{(b, a)_2, (b, a)_1, (a, a)\} \\
S^{-1}(\{(a, b, b), (a, b, a), (a, a, b), (a, a, a)\}) &= \{(a, b)_1, (a, b)_2, (a, a)\} \\
S^{-1}(\{(b, a, b), (a, a, b), (a, a, a), (b, a, a)\}) &= \{(a, b)_2, (b, a)_1, (a, a)\} \\
S^{-1}(\{(a, a, b), (a, a, a)\}) &= \{(a, b)_2, (a, a)\} \\
S^{-1}(\{(b, a, a), (a, a, a)\}) &= \{(b, a)_1, (a, a)\} \\
S^{-1}(\{(a, b, a), (a, a, a)\}) &= \{(a, a)\} \\
S^{-1}(\{(a, a, a)\}) &= \{(a, a)\} \\
\delta &= \{\emptyset, B^2 \vee_{\Delta} B^2, \{(b, a)_2, (b, a)_1, (a, a)\}, \{(a, b)_1, (a, b)_2, (a, a)\}, \{(a, a)\}, \\
&\quad \{(a, b)_2, (a, a)\}, \{(b, a)_1, (a, a)\}, \{(a, b)_2, (b, a)_1, (a, a)\}\} \\
\beta &= \delta \cup \{(b, a)_1, (a, b)_2\} \\
\tau &\neq P(B^2 \vee_{\Delta} B^2)
\end{aligned}$$

olur, dolayısıyla, Teorem 2.6.5 den (B, τ) uzayı T_1 değildir.

3. YANSIMA BAĞINTILI UZAYLAR KATEGORİSİ

3.1 Yansıma Bağıntılı Uzaylar

Tanım 3.1.1 X boş kümeden farklı, $R \subseteq X^2$ yansıma özelliğini sağlayan bağıntı ise (X, R) ye yansıma bağıntı uzay denir [26].

Örnek 3.1.2 (1) $X = \{a\}$ üzerindeki yansıma bağıntısı $\beta = \{(a, a)\}$ dir.

(2) $X = \{a, b\}$ üzerindeki yansıma bağıntıları aşağıdaki gibidir.

$$\beta_1 = X^2$$

$$\beta_2 = \{(a, a), (b, b)\}$$

$$\beta_3 = \{(a, a), (b, b), (a, b)\}$$

$$\beta_4 = \{(a, a), (b, b), (b, a)\}$$

(3) $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerindeki yansıma bağıntılar aşağıdaki gibidir.

$$\beta_1 = X \times X$$

$$\beta_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$$

$$\beta_3 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b)\}$$

$$\beta_4 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c)\}$$

$$\beta_5 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c)\}$$

$$\beta_6 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, a)\}$$

$$\beta_7 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (c, a)\}$$

$$\beta_8 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (c, b)\}$$

$$\beta_9 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c)\}$$

$$\beta_{10} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c)\}$$

$$\beta_{11} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$$

$$\beta_{12} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (c, a)\}$$

$$\beta_{13} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (c, b)\}$$

$$\beta_{14} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (b, c)\}$$

$$\beta_{15} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (b, a)\}$$

$$\beta_{16} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}$$

$$\beta_{17} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, b)\}$$

$$\beta_{18} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (b, a)\}$$

$$\beta_{19} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, a)\}$$

$$\beta_{20} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}$$

$$\beta_{21} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, a), (c, a)\}$$

$$\beta_{33} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (c, a), (c, b)\}$$

$$\beta_{34} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (b, c), (b, a)\}$$

$$\beta_{35} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (b, c), (c, a)\}$$

$$\beta_{36} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (b, c), (c, b)\}$$

$$\beta_{37} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (b, a), (c, a)\}$$

$$\beta_{38} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (b, a), (c, b)\}$$

$$\beta_{39} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, a), (c, a), (c, b)\}$$

$$\beta_{40} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a), (c, b)\}$$

$$\beta_{41} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, a), (c, b)\}$$

$$\beta_{42} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (b, a), (c, b)\}$$

$$\beta_{43} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (b, a), (c, a)\}$$

$$\beta_{44} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (b, c), (b, a)\}$$

$$\beta_{45} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (b, c), (c, a)\}$$

$$\beta_{46} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (b, c), (c, b)\}$$

$$\beta_{47} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (b, a), (c, a)\}$$

$$\beta_{48} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (b, a), (c, b)\}$$

$$\beta_{49} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (c, a), (c, b)\}$$

$$\beta_{50} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c), (b, a), (c, a)\}$$

$$\beta_{51} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (b, a), (c, b)\}$$

$$\beta_{52} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (c, a), (c, b)\}$$

$$\beta_{53} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (c, a), (c, b)\}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{22} &= \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, a), (c, b)\} & \beta_{54} &= \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (b, c)(b, a), (c, a)\} \\
\beta_{23} &= \{(a, a), (b, b), (c, c), (c, a), (c, b)\} & \beta_{55} &= \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (b, c)(b, a), (c, b)\} \\
\beta_{24} &= \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (b, c)\} & \beta_{56} &= \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (b, c)(c, a), (c, b)\} \\
\beta_{25} &= \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (b, a)\} & \beta_{57} &= \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (b, a)(c, a), (c, b)\} \\
\beta_{26} &= \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (c, a)\} & \beta_{58} &= \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (b, a)(c, a), (c, b)\} \\
\beta_{27} &= \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (c, b)\} & \beta_{59} &= \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c)(b, c), (b, a), (c, a)\} \\
\beta_{28} &= \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c), (b, a)\} & \beta_{60} &= \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c)(b, c), (b, a), (c, b)\} \\
\beta_{29} &= \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c), (c, a)\} & \beta_{61} &= \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c)(b, a), (c, b), (c, a)\} \\
\beta_{30} &= \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c), (c, b)\} & \beta_{62} &= \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c)(b, a), (c, a), (c, b)\} \\
\beta_{31} &= \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (c, a)\} & \beta_{63} &= \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (b, c)(b, a), (c, a), (c, b)\} \\
\beta_{32} &= \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)(c, b)\} & \beta_{64} &= \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c)(b, c), (c, a), (c, b)\}
\end{aligned}$$

3.2 *RRel* Topolojik Kategorisi

Tanım 3.2.1 ([24]) Nesneleri sırasıyla bağıntı uzaylar, yansıma bağıntılı uzaylar, denklik bağıntılı uzaylar, kısmi sıralı bağıntılı uzaylar, ön sıralama bağıntı uzaylar ve morfizmler ise bu uzaylar arasındaki bağıntı koruyan dönüşümlerden oluşan sınıflar birer kategoridir. Bu kategoriler sırasıyla *Rel*, *RRel*, *Denk*, *Poset* ve *Preord* ile gösterilir ve aralarında şu şekilde bir ilişki vardır.

$$Poset \subset Preord \subset RRel \subset Rel$$

$$Denk \subset Preord \subset RRel \subset Rel$$

Tanım 3.2.2 ([13, 24, 26]) *RRel* kategorisinde

i. Her $i \in I$ için (B_i, R_i) yansıma bağıntılı uzaylar, $f_i: (B, R) \rightarrow (B_i, R_i)$ kaynağı de bir başlangıç kaldırmasıdır $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in B$ için

$$xRy \text{ dir} \Leftrightarrow \forall i \in I \text{ için } f_i(x)R_i f_i(y)$$

ii. $f: (B, R) \rightarrow (A, S)$ epimorfizmi final kaldırmasıdır $\Leftrightarrow$ Her $u, v \in A$ için uSv olması için $f(x) = u, f(y) = v$ ve xRy olacak şekilde en az bir $x, y \in B$ vardır.

iii. (B, R) diskre nesnedir $\Leftrightarrow R = \{(x, y) | x = y\}$ dir.

iv. (B, R) indiskre nesnedir $\Leftrightarrow R = X \times X$ dir.

Teorem 3.2.3 $F: RRel \rightarrow Set$ bir topolojik fanktordur.

İspat: Teorem 2.4.2 nin şartlarını sağlayalım:

(i) $g, h: (X, R) \rightarrow (Y, S)$ morfizmleri ve $F(g) = F(h)$ olduğunu kabul edelim. F unutkan fanktor olduğundan $h = g$ dir, yani F düzenlidir.

$g: (X, R) \rightarrow (Y, S)$ için g izomorfizm ve $F(g) = g = id_X$ ise $g = id_{(X,R)}$ yani $R = S$ olduğunu göstereceğiz. Her $a, b \in X$ için aRb ise g sürekli olduğundan $g(a)Sg(b)$ olur. $id_X = g$ olmasından $id_X(a)Sid_X(b) = aSb$ dir, böylece $R \subset S$ dir. Diğer taraftan $g^{-1}: (X, S) \rightarrow (X, R)$ için $F(g^{-1}) = g^{-1} = id_X$ olmak üzere her $a, b \in X$ için aSb ise g^{-1} nin sürekliliğinden $g^{-1}(a)Rg^{-1}(b) = aRb$ olur, dolayısıyla $R \subset S$ dir, sonuçta $R = S$ dir yani $g = id_{(X,R)}$ dir, yani F amnestiktir.

(ii) $\Phi = \{R | R \subseteq X^2, R \text{ yansıma özelliğini sağlayan bağıntı} \}$ olsun.

$$F^{-1}(X) = \{(X, R) | F((X, R)) = X \text{ ve } R \subseteq X^2\}$$

dir. Bu durumda $g: U^{-1}(X) \rightarrow \Phi, (X, R) \rightarrow f((X, R)) = R$ olacak şekilde bir fonksiyon tanımlayalım. g bire-bir olmasından $F^{-1}(X)$ ve Φ denktir. Sonuç olarak $F^{-1}(X)$ bir kümedir.

(iii) $\{(X_i, R_i): i \in I\}$ yansımali uzayların sınıfı için $X = \prod_{i \in I} X_i$ üzerindeki çarpım yansıma bağıntılı uzay yapısı

$$R = \{(a, b) | \pi_i(a)R_i\pi_i(b), \text{ her } i \in I\}$$

olsun. (X, R) yansıma bağıntılıdır. (Y, S) yansıma bağıntılı uzay, $h_i: (Y, S) \rightarrow (X_i, R_i)$ fonksiyon, $h: Y \rightarrow X$ için $\pi_i \circ h = h_i$ olması durumunda h nin sürekliliğini göstereceğiz. $a, b \in Y$ olmak üzere h_i ler sürekli olduğundan aSb ise $h_i(a)R_ih_i(b)$ dir. $h_i = \pi_i \circ h$ yazılırsa

$$(\pi_i \circ h)(a)R_i(\pi_i \circ h)(b) = \pi_i(h(a))R_i\pi_i(h(b))$$

(iv) **RRel** alt uzaylara sahip mi? $Y \subseteq X, i: Y \hookrightarrow X$ olsun. Y deki yansıma bağıntılı alt uzay yapısı

$$R_Y = \{(a, b): i(a)R_i(b), a, b \in Y\}$$

şeklinde olsun. (Y, R_Y) yansıma bağıntılı uzay ve i dönüşümü süreklidir. Dolayısıyla ***RRel*** de alt uzaylar vardır.

(v) $X \neq \emptyset$ bir küme ve $R = X^2$ olsun. Bu durumda (Y, S) yansıma bağıntılı uzayında $f: Y \rightarrow X$, $a, b \in Y$ için aSb olsun. $(f(a), f(b)) \in X^2$ olduğundan $f(a)Rf(b)$ dir. Dolayısıyla, f fonksiyonu süreklidir.

Tek nokta kümesi ve boş küme üzerindeki yansıma özelliğine sahip bağıntı tek bir olduğundan Tanım 2.4.1 den ***RRel*** normalleştirilmiştir. Böylece, $\mathcal{U}: \mathbf{RRel} \rightarrow \mathbf{Set}$ topolojik kategoridir.

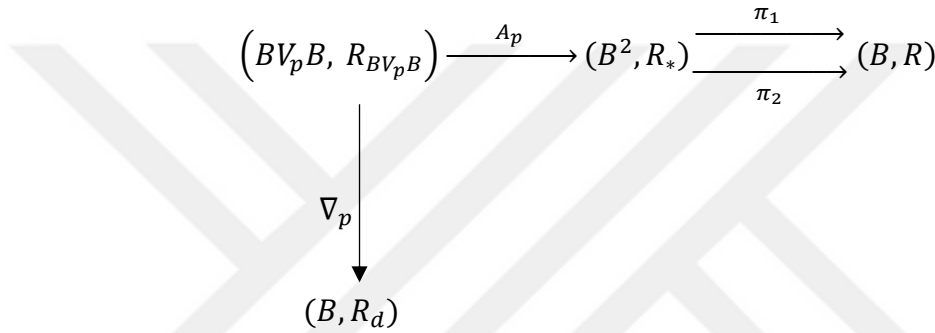


4. LOKAL T_0 VE T_1 YANSIMA BAĞINTILI UZAYLAR

4.1 Lokal T_0 ve T_1 Yansima Bağıntılı Uzaylar

Teorem 4.1.1 (B, R) yansima bağıntılı uzayında $p \in B$ için (B, R) , p noktasında $\bar{T}_0$ dır ancak ve ancak R, p de ters simetrik bir bağıntıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ Kabul edelim ki (B, R) yansima bağıntılı uzayı p noktasında $\bar{T}_0$ olsun. $R_{BV_p B}$ ve R_d sırasıyla $BV_p B$ ve B kümeleri üzerindeki diskre bağıntılar olmak üzere her $x \in B$ için pRx ve xRp olsun, $x = p$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için Şekil 4.1’de verilen diyagramdan faydalanacağız.



Şekil 4.1. Yansima bağıntılı uzaylarda p de $\bar{T}_0$.

$$\pi_1 A_p(x_1) R \pi_1 A_p(x_2) = \pi_1(x, p) R \pi_1(p, x) = xRp$$

$$\pi_2 A_p(x_1) R \pi_2 A_p(x_2) = \pi_2(x, p) R \pi_2(p, x) = pRx$$

$\nabla_p(x_1) = \nabla_p(x_2) = x$ olmak üzere $\nabla_p(x_1) R_d \nabla_p(x_2) = x R_d x$ olur.

Bu ise $x_1 R_{BV_p B} x_2$ olması demektir. (B, R) nin p de $\bar{T}_0$ olduğundan $x_1 = x_2$ yani $x = p$ dir. Böylece R ters simetrik olur.

$(\Leftarrow)$ Tersine olarak kabul edelim ki R, p de ters simetrik bir bağıntı olsun. Yani $\forall x \in B$ için xRp ve pRx olduğunda $p = x$ olur. (B, R) nin p de $\bar{T}_0$ olduğunu göstereceğiz.

$u, v \in BV_p B$ için $\pi_1 A_p(u) R \pi_1 A_p(v), \pi_2 A_p(u) R \pi_2 A_p(v)$ ve $\nabla_p(u) R_d \nabla_p(v)$ ise bu durumda $u = v$ olduğunu göstereceğiz. $\nabla_p(u) R_d \nabla_p(v)$ den $\nabla_p(u) = \nabla_p(v)$ olur ki bazı $x \in B$ için u, v değişkenleri x_1, x_2 formundadır.

$u = x_1$ ve $v = x_2$ ise

$$\begin{aligned}\pi_1 A_p(u) R \pi_1 A_p(v) &= \pi_1 A_p(x_1) R \pi_1 A_p(x_2) \\ &= \pi_1(x, p) R \pi_1(p, x) \\ &= x R p\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_2 A_p(u) R \pi_2 A_p(v) &= \pi_2 A_p(x_1) R \pi_2 A_p(x_2) \\ &= \pi_2(x, p) R \pi_2(p, x) \\ &= p R x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla_p(u) R_d \nabla_p(v) &= \nabla_p(x_1) R_d \nabla_p(x_2) \\ &= x R_d x\end{aligned}$$

R, p de ters simetrik bir bağıntı olduğundan $x_1 = x_2$ dir. Böylece $x = p$ elde edilir, yani $u = v$ dir.

$u = x_2$ ve $v = x_1$ ise

$$\begin{aligned}\pi_1 A_p(u) R \pi_1 A_p(v) &= \pi_1 A_p(x_2) R \pi_1 A_p(x_1) \\ &= \pi_1(p, x) R \pi_1(x, p) \\ &= p R x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_2 A_p(u) R \pi_2 A_p(v) &= \pi_2 A_p(x_2) R \pi_2 A_p(x_1) \\ &= \pi_2(p, x) R \pi_2(x, p) \\ &= x R p\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla_p(u) R_d \nabla_p(v) &= \nabla_p(x_2) R_d \nabla_p(x_1) \\ &= x R_d x\end{aligned}$$

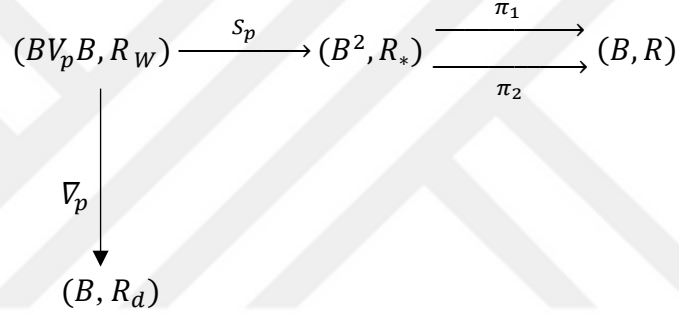
olur. R, p de ters simetrik bir bağıntı olduğundan $x_1 = x_2$ dir. Böylece $x = p$ elde edilir. Yani $u = v$ dir.

Diğer taraftan kabul edelim ki $u = v$ olsun. $\pi_1 A_p(u) R \pi_1 A_p(v) = x R x$, $\pi_2 A_p(u) R \pi_2 A_p(v) = x R x$ ve $\nabla_p(u) R_d \nabla_p(v) = x R x$ olur.

Sonuç olarak Tanım 3.2.2 den $R_{BV_p B}$ diskre yansımali bağıntıdır. Teorem 2.6.3 den (B, R) uzayı da p noktasında $\bar{T}_0$ olur.

Teorem 4.1.2 (B, R) yansıma bağıntılı uzay, $p \in B$ için (B, R) , p de T_1 dir $\Leftrightarrow R, p$ de diskre bağıntıdır ($\forall x \in B$ için $x R p$ veya $p R x$ olduğunda $x = p$ olur).

İspat: ($\Rightarrow$) Kabul edelim ki (B, R) yansıma bağıntılı uzay, $p \in B$ için p de T_1 ve her $x \in B$ için $x R p$ veya $p R x$ olsun. Ayrıca R_w, R_d ve R_* sırasıyla $BV_p B, B$ ve B^2 kümeleri üzerindeki bağıntılar olsun (bkz. Şekil 4.2). Durumları inceleyelim:



Şekil 4.2. Yansıma bağıntılı uzaylarda p de T_1 .

(i) $x R p$ olsun. $x_1, x_2 \in BV_p B$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \pi_1 S_p(x_1) R \pi_1 S_p(x_2) &= \pi_1(x, x) R \pi_1(p, x) \\ &= x R p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_2 S_p(x_1) R \pi_2 S_p(x_2) &= \pi_2(x, x) R \pi_2(p, x) \\ &= x R x \end{aligned}$$

$\nabla_p(x_i) R_d \nabla_p(x_i) = x R_d x$ olur.

(B, R) uzayı p noktasında T_1 olduğundan $x_1 R_w x_2$ dir. Tanım 3.2.2 den $x_1 = x_2$ olmak zorundadır. Buradan $p = x$ elde edilir. Tanım 3.2.2 den R, p noktasında diskre bir bağıntıdır.

(ii) $x \in B$ için pRx olsun. $x_1, x_2 \in BV_pB$ için

$$\begin{aligned}\pi_1 S_p(x_2) R \pi_1 S_p(x_1) &= \pi_1(p, x) R \pi_1(x, x) \\ &= pRx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_2 S_p(x_2) R \pi_2 S_p(x_1) &= \pi_2(p, x) R \pi_2(x, x) \\ &= xRx\end{aligned}$$

$i = 1, 2$ için $\nabla_p(x_i) R_d \nabla_p(x_i) = x R_d x$ olur.

(B, R) uzayı p de T_1 olduğundan $x_2 R_W x_1$ dir. Tanım 3.2.2 den $x_2 = x_1$ dir. Böylece $x = p$ elde edilir. Tanım 3.2.2 den R, p noktasında diskre bağıntıdır.

($\Leftarrow$) Tersine olarak R, p de diskre yansılmalı bağıntı olsun. (B, R) nin p de T_1 olduğunu yani BV_pB üzerindeki bağıntının diskre olduğunu göstereceğiz.

Kabul edelim ki $u, v \in BV_pB$ herhangi iki noktası için $u R_W v$ olsun. $u = v$ göstereceğiz. Yani $\pi_1 S_p(u) R \pi_1 S_p(v), \pi_2 S_p(u) R \pi_2 S_p(v)$ ve $\nabla_p(u) R_d \nabla_p(v)$ olması durumunda $u = v$ olduğunu göstereceğiz.

Bazı $x \in B$ için $x_1, x_2 \in BV_pB$ için

(i) $u = x_1$ ve $v = x_2$ olsun.

$$\begin{aligned}\pi_1 S_p(u) R \pi_1 S_p(v) &= \pi_1 S_p(x_1) R \pi_1 S_p(x_2) \\ &= \pi_1(x, x) R \pi_1(p, x) \\ &= xRp\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_2 S_p(u) R \pi_2 S_p(v) &= \pi_2 S_p(x_1) R \pi_2 S_p(x_2) \\ &= \pi_2(x, x) R \pi_2(p, x) \\ &= xRx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla_p(u) R_d \nabla_p(v) &= \nabla_p(x_1) R_d \nabla_p(x_2) \\ &= x R_d x\end{aligned}$$

R nin p de diskre olmasından $x = p$ dir, yani $x_1 = p = x_2$ olur ki $u = v$ olur.

(i) $u = x_2$ ve $v = x_1$ olsun.

$$\begin{aligned}\pi_1 S_p(u) R \pi_1 S_p(v) &= \pi_1 S_p(x_2) R \pi_1 S_p(x_1) \\ &= \pi_1(p, x) R \pi_1(x, x) \\ &= p R x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_2 S_p(u) R \pi_2 S_p(v) &= \pi_2 S_p(x_2) R \pi_2 S_p(x_1) \\ &= \pi_2(p, x) R \pi_2(x, x) \\ &= x R x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla_p(u) R_d \nabla_p(v) &= \nabla_p(x_1) R_d \nabla_p(x_2) \\ &= x R_d x\end{aligned}$$

R nin p de diskre olmasından $x = p$ dir, yani $x_1 = p = x_2$ olur ki $u = v$ elde edilir. Böylece (i) ve (ii) den $u = v$ dir.

Diğer taraftan kabul edelim ki $u = v$ olsun. $\pi_1 S_p(u) R \pi_1 S_p(v) = x R x$, $\pi_2 A_p(u) R \pi_2 A_p(v) = x R x$ ve $\nabla_p(u) R_d \nabla_p(v) = x R x$ olur.

Sonuç olarak Tanım 3.2.2 den $R_{BV_p B}$ diskre yansımali bağıntıdır, yani Teorem 2.6.3 den (B, R) uzayı da p de T_1 olur.

Teorem 4.1.3 Her (B, R) yansıma bağıntılı uzayı $p \in B$ noktasında T_0' dür.

İspat: Kabul edelim ki (B, R) yansıma bağıntılı uzay, i_1 ve i_2 kanonik morfizmiler için $i_1, i_2: B \rightarrow BV_p B$ kavşağı tarafından elde edilen final kaldırması R_f ve B^2 üzerindeki diskre bağıntı R_d olsun (bkz. Şekil 4.3).

$$\begin{array}{ccc} (BV_p B, R_{BV_p B}) & \xrightarrow{id} & (BV_p B, R_f) \\ \downarrow \nabla_p & & \uparrow i_1 \quad \uparrow i_2 \\ (B^2, R_d) & & (B, R) \end{array}$$

Şekil 4.3. Yansıma bağıntılı uzaylarda p de T_0' .

$\{i_d: BV_p B \rightarrow U(BV_p B, R_F) = BV_p B \text{ ve } \nabla_p: BV_p B \rightarrow UD(B) = B\}$ kaynağı ile elde edilen başlangıç yapısı $R_{BV_p B}$ olsun. (B, R) yansıma bağıntılı uzayının $p \in B$ noktasında T_0' olması demek her $u, v \in BV_p B$ için $\nabla_p u = \nabla_p v$ ve bazı $k = 1$ veya $k = 2$ için $i_k(x) = u$ ve $i_k(x) = v$ olmak üzere xRy olacak şekilde $x, y \in B$ vardır ancak ve ancak $u = v$ dir. Şimdi bu duruma göre işlem yapalım.

$u, v \in BV_p B$ farklı iki eleman olsun. $uR_{BV_p B}v$ ise $\nabla_p u R_d \nabla_p v$ olur. R_d, B deki diskre yapı olduğunda $x \in B$ olmak üzere $\nabla_p u = \nabla_p v = x$ olur.

Sonuç olarak $u = x_1$ ve $v = x_2$ veya $u = x_2$ ve $v = x_1$ formundadır.

(i) $u = x_1$ ve $v = x_2$ olsun. $k = 1$ veya 2 için $i_k(x) = x_1 = u$, $i_k(x) = x_2 = v$ olduğundan $x = p$ olur.

(ii) $u = x_2$ ve $v = x_1$ olsun. $k = 1$ veya 2 için $i_k(x) = x_2 = u$, $i_k(x) = x_1 = v$ olduğundan $x = p$ olur.

Dolayısıyla (i) ve (ii) den $u = x_1 = v$ veya $u = x_2 = v$ olur. Bu ise $R_{BV_p B}$ nin diskre olduğunu gösterir.

Diğer taraftan $u = v$ ise bu durumda $\nabla_p u = \nabla_p v$ ve $k = 1$ veya 2 için $x \in B$ olmak üzere xR_x den $i_k(x) = v = u$ olur. Böylece (B, R) , Teorem 2.6.3 den p de T_0' dir.

Sonuç 4.1.4 (B, R) yansıma bağıntılı uzayı ve $p \in B$ olsun. Uzay

(1) p de $T_1 \Rightarrow p$ de $\bar{T}_0$ dir,

(2) p de $T_1 \Rightarrow p$ de T_0' dir.

Örnek 4.1.5 $B = \{a, b, c\}$ üzerinde yansıma bağıntılı uzaylar

$R_1 = \{(c, c), (b, b), (a, a), (a, b), (b, a)\}$ ve $R_2 = \{(c, c), (b, b), (a, a), (a, b)\}$ olsun.

(1) (B, R_1) yansıma bağıntılı uzayı,

a ve b noktalarında T_0' dür. Fakat bu noktalarda $\bar{T}_0$ ve T_1 değildir.

c noktasında $\bar{T}_0, T_0'$ ve T_1 dir.

(2) (B, R_2) yansıma bağıntılı uzayı,

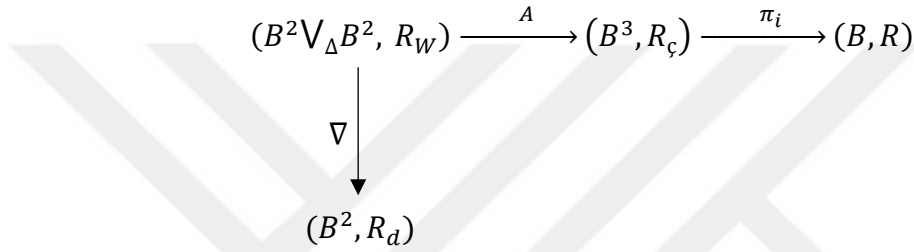
a ve b noktalarında $\bar{T}_0, T_0'$ dür. Fakat T_1 değildir.

c noktasında $\bar{T}_0, T_0'$ ve T_1 dir.

4.2 T_0 ve T_1 Yansıma Bağıntılı Uzaylar

Teorem 4.2.1 (B, R) yansıma bağıntılı uzay $\bar{T}_0$ dir ancak ve ancak R ters simetriktir.

İspat: ($\Rightarrow$) Kabul edelim ki (B, R) uzayı $\bar{T}_0$ olsun. Ayrıca B^2 üzerindeki diskre yapı R_d , B^3 deki çarpım yapısı R_φ , $B^2 \bigvee_\Delta B^2$ üzerindeki yapı R_W olsun (bkz. Şekil 4.4).



Şekil 4.4. Yansıma bağıntılı uzaylarda $\bar{T}_0$.

(B, R) uzayı $\bar{T}_0$ olması demek $u, v \in B^2 \bigvee_\Delta B^2$ için $\pi_1 A u R \pi_1 A v$, $\pi_2 A u R \pi_2 A v$, $\pi_3 A u R \pi_3 A v$ ve $\nabla u R_d \nabla v$ dir ancak ve ancak $u = v$ dir. R nin ters simetrik olduğunu göstereceğiz, yani $x R y$ ve $y R x$ olduğunda $y = x$ dir.

$x \neq y$ ise $u = (x, y)_1$, $v = (x, y)_2$ olsun.

$$\begin{aligned}
 \pi_1 A(x, y)_1 R \pi_1 A(x, y)_2 &= \pi_1(x, y, x) R \pi_1(x, x, y) \\
 &= x R x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \pi_2 A(x, y)_1 R \pi_2 A(x, y)_2 &= \pi_2(x, y, x) R \pi_2(x, x, y) \\
 &= y R x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \pi_3 A(x, y)_1 R \pi_3 A(x, y)_2 &= \pi_3(x, y, x) R \pi_3(x, x, y) \\
 &= x R y
 \end{aligned}$$

$$\nabla(x, y)_1 R_d \nabla(x, y)_2 = (x, y) R_d (x, y)$$

(B, R) uzayı $\bar{T}_0$ olduğundan $u = (x, y)_1 = (x, y)_2 = v$ olur bu ise $y = x$ olması demektir, dolayısıyla R ters simetrik bir bağıntıdır.

($\Leftarrow$) Tersine olarak kabul edelim ki (B, R) uzayı ters simetrik olsun. $u, v \in B^2 V_\Delta B^2$ için $\pi_1 A u R \pi_1 A v$, $\pi_2 A u R \pi_2 A v$, $\pi_3 A u R \pi_3 A v$ ve $\nabla u R_d \nabla v$ ise $u = v$ olduğunu göstereceğiz. Böylece, $u = (x, y)_{1,2}, v = (x, y)_{1,2}$ olmak üzere karşımıza dört durum çıkar.

1. durum: $u = (x, y)_1$ ve $v = (x, y)_2$ ise

$$\begin{aligned}\pi_1 A(x, y)_1 R \pi_1 A(x, y)_2 &= \pi_1(x, y, x) R \pi_1(x, x, y) \\ &= x R x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_2 A(x, y)_1 R \pi_2 A(x, y)_2 &= \pi_2(x, y, x) R \pi_2(x, x, y) \\ &= y R x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_3 A(x, y)_1 R \pi_3 A(x, y)_2 &= \pi_3(x, y, x) R \pi_3(x, x, y) \\ &= x R y\end{aligned}$$

$$\nabla(x, y)_1 R_d \nabla(x, y)_2 = (x, y) R_d(x, y)$$

2. durum: $u = (x, y)_1$ ve $v = (x, y)_1$ ise

$$\begin{aligned}\pi_1 A(x, y)_1 R \pi_1 A(x, y)_2 &= \pi_1(x, y, x) R \pi_1(x, y, x) \\ &= x R x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_2 A(x, y)_1 R \pi_2 A(x, y)_2 &= \pi_2(x, y, x) R \pi_2(x, y, x) \\ &= y R y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_3 A(x, y)_1 R \pi_3 A(x, y)_2 &= \pi_3(x, y, x) R \pi_3(x, y, x) \\ &= x R x\end{aligned}$$

$$\nabla(x, y)_1 R_d \nabla(x, y)_1 = (x, y) R_d(x, y)$$

3. durum: $u = (x, y)_2$ ve $v = (x, y)_2$ ise

$$\begin{aligned}\pi_1 A(x, y)_2 R \pi_1 A(x, y)_2 &= \pi_1(x, x, y) R \pi_1(x, x, y) \\ &= x R x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_2 A(x, y)_2 R \pi_2 A(x, y)_2 &= \pi_2(x, x, y) R \pi_2(x, x, y) \\ &= x R x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_3 A(x, y)_2 R \pi_3 A(x, y)_2 &= \pi_3(x, x, y) R \pi_3(x, x, y) \\ &= y R y\end{aligned}$$

$$\nabla(x, y)_2 R_d \nabla(x, y)_2 = (x, y) R_d(x, y)$$

4. durum: $u = (x, y)_2$ ve $v = (x, y)_1$ olsun.

$$\begin{aligned}\pi_1 A(x, y)_2 R \pi_1 A(x, y)_1 &= \pi_1(x, x, y) R \pi_1(x, y, x) \\ &= x R x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_2 A(x, y)_2 R \pi_2 A(x, y)_1 &= \pi_2(x, x, y) R \pi_2(x, y, x) \\ &= x R y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_3 A(x, y)_2 R \pi_3 A(x, y)_1 &= \pi_3(x, x, y) R \pi_3(x, y, x) \\ &= y R x\end{aligned}$$

$$\nabla(x, y)_2 R_d \nabla(x, y)_1 = (x, y) R_d(x, y)$$

Dolayısıyla yukarıdaki durumlardan göz önüne alındığında R nin ters simetrik olmasından $x = y$ elde edilir. Bu da $u = (x, y)_1 = (x, y)_2 = v$ olması demektir.

Diğer taraftan $u = v$ ise $\pi_1 A u R \pi_1 A v, \pi_2 A u R \pi_2 A v, \pi_3 A u R \pi_3 A v$ ve $\nabla u = \nabla v$ olur ki yansıma özelliğinden (B, R) nin $\bar{T}_0$ dır.

Teorem 4.2.2 (B, R) yansıma bağıntılı uzay T_1 dir ancak ve ancak R , diskre bir bağıntıdır, yani her $x, y \in B$ için $x R y$ veya $y R x$ ise $x = y$ dir.

İspat: $(\Rightarrow)$ Kabul edelim ki (B, R) uzayı T_1 olsun. Ayrıca B^2 üzerindeki diskre yapı R_d , B^3 deki çarpım yapısı R_ζ , $B^2 \bigvee_\Delta B^2$ üzerindeki yapı R_W olsun (bkz. Şekil 4.5).

$$\begin{array}{ccccc}
(B^2 V_{\Delta} B^2, R_W) & \xrightarrow{S} & (B^3, R_{\zeta}) & \xrightarrow{\pi_i} & (B, R) \\
\downarrow \nabla & & & & \\
(B^2, R_d) & & & &
\end{array}$$

Şekil 4.5. Yansıma bağıntılı uzaylarda T_1 .

(B, R) uzayının T_1 olması demek $u, v \in B^2 V_{\Delta} B^2$ için $\pi_1 S u R \pi_1 S v$, $\pi_2 S u R \pi_2 S v$, $\pi_3 S u R \pi_3 S v$ ve $\nabla u R_d \nabla v$ ($\nabla u = \nabla v$) dir ancak ve ancak $u = v$ dir demektir. R nin diskre olduğunu göstereceğiz, yani $x R y$ ise $x = y$ dir.

$x R y$ ise $u = (x, y)_2$ ve $v = (x, y)_1$ ise

$$\begin{aligned}
\pi_1 S(x, y)_2 R \pi_1 S(x, y)_1 &= \pi_1(x, x, y) R \pi_1(x, y, y) \\
&= x R x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_2 S(x, y)_2 R \pi_2 S(x, y)_1 &= \pi_2(x, x, y) R \pi_2(x, y, y) \\
&= x R y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_3 S(x, y)_2 R \pi_3 S(x, y)_1 &= \pi_3(x, x, y) R \pi_3(x, y, y) \\
&= y R y
\end{aligned}$$

$$\nabla(x, y)_2 R_d \nabla(x, y)_1 = (x, y) R_d (x, y)$$

(B, R) , T_1 olduğundan $u R_W v$ olur. R_W diskre olduğundan $u = (x, y)_1 = (x, y)_2 = v$ olur bu ise $x = y$ olması anlamına gelir. Sonuç olarak R diskre bir bağıntıdır.

($\Leftarrow$) Tersine olarak R nin diskre olduğunu kabul edelim. (B, R) nin T_1 olduğunu göstereceğiz. $\nabla u R_d \nabla v$ olacak şekilde alınan $u, v \in B^2 V_{\Delta} B^2$ için $x, y \in B$ olmak üzere $u = (x, y)_{1,2}$ ve $v = (x, y)_{1,2}$ şeklinde olmalıdır. O halde karşımıza dört durum çıkar.

1. durum: $u = (x, y)_1, v = (x, y)_2$ ise

$$\begin{aligned}
\pi_1 S(x, y)_1 R \pi_1 S(x, y)_2 &= \pi_1(x, y, y) R \pi_1(x, x, y) \\
&= x R x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_2 S(x, y)_1 R \pi_2 S(x, y)_2 &= \pi_2(x, y, y) R \pi_2(x, x, y) \\ &= y R x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_3 S(x, y)_1 R \pi_3 S(x, y)_2 &= \pi_3(x, y, y) R \pi_3(x, x, y) \\ &= y R y\end{aligned}$$

$$\nabla(x, y)_1 R_d \nabla(x, y)_2 = (x, y) R_d(x, y)$$

2. durum: $u = (x, y)_1$ ve $v = (x, y)_1$ ise

$$\begin{aligned}\pi_1 S(x, y)_1 R \pi_1 S(x, y)_1 &= \pi_1(x, y, y) R \pi_1(x, y, y) \\ &= x R x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_2 S(x, y)_1 R \pi_2 S(x, y)_1 &= \pi_2(x, y, y) R \pi_2(x, y, y) \\ &= y R y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_3 S(x, y)_1 R \pi_3 S(x, y)_1 &= \pi_3(x, y, y) R \pi_3(x, y, y) \\ &= y R y\end{aligned}$$

$$\nabla(x, y)_1 R_d \nabla(x, y)_1 = (x, y) R_d(x, y)$$

3. durum: $u = (x, y)_2$ ve $v = (x, y)_2$ ise

$$\begin{aligned}\pi_1 S(x, y)_2 R \pi_1 S(x, y)_2 &= \pi_1(x, x, y) R \pi_1(x, x, y) \\ &= x R x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_2 S(x, y)_2 R \pi_2 S(x, y)_2 &= \pi_2(x, x, y) R \pi_2(x, x, y) \\ &= x R x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_3 S(x, y)_2 R \pi_3 S(x, y)_2 &= \pi_3(x, x, y) R \pi_3(x, x, y) \\ &= y R y\end{aligned}$$

$$\nabla(x, y)_2 R_d \nabla(x, y)_2 = (x, y) R_d(x, y)$$

4. durum: $u = (x, y)_2, v = (x, y)_1$ ise

$$\begin{aligned}\pi_1 S(x, y)_2 R \pi_1 S(x, y)_1 &= \pi_1(x, x, y) R \pi_1(x, y, y) \\ &= x R x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_2 S(x, y)_2 R \pi_2 S(x, y)_1 &= \pi_2(x, x, y) R \pi_2(x, y, y) \\ &= x R y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_3 S(x, y)_2 R \pi_3 S(x, y)_1 &= \pi_3(x, x, y) R \pi_3(x, y, y) \\ &= y R y\end{aligned}$$

$$\nabla(x, y)_2 R_d \nabla(x, y)_1 = (x, y) R_d(x, y)$$

Dolayısıyla (B, R) diskre olduğundan $u = v$ olur.

Diğer taraftan $u = v$ ise $\pi_1 S u R \pi_1 S v, \pi_2 S u R \pi_2 S v, \pi_3 S u R \pi_3 S v$ ve $\nabla u = \nabla v$ olur.

Sonuç olarak Teorem 2.6.5 den (B, R) uzayı T_1 dir.

Teorem 4.2.3 Her (B, R) yansıma bağıntılı uzayı T_0' dür.

İspat: (B, R) nin T_0' olduğunu yani R_W nin diskre olduğunu göstereceğiz. Dolayısıyla $u, v \in B^2 V_\Delta B^2$ için $u = v$ dir $\Leftrightarrow \nabla u = \nabla v$ ve $i_1(a, b) = u$, $i_1(c, d) = v$ veya $i_2(a, b) = u$, $i_2(c, d) = v$ olacak şekilde $(a, b), (c, d) \in B^2$ vardır ve $(a, b) R_\zeta(c, d)$ dir. Burada $R_W, B^2 V_\Delta B^2$ üzerindeki yapı, R_f ise i_1 ile i_2 dönüşümleri ile elde edilen final yapı, R_d, B^2 üzerindeki diskre yapı ve R_ζ ise B^2 üzerindeki çarpım yapısıdır (bkz. Şekil 4.6).

$$\begin{array}{ccc}(B^2 V_\Delta B^2, R_W) & \xrightarrow{id} & (B^2 V_\Delta B^2, R_f) \\ \nabla \downarrow & & \uparrow i_1 \quad \uparrow i_2 \\ (B^2, R_d) & & (B^2, R_\zeta)\end{array}$$

Şekil 4.6. Yansıma bağıntılı uzaylarda T_0' .

$\nabla u = \nabla v$ olsun. $u = (x, y)_1$ veya $u = (x, y)_2$ ve $v = (x, y)_1$ veya $v = (x, y)_2$ olur.

(i) $u = (x, y)_1$ ve $v = (x, y)_2$ olsun.

$\nabla u = \nabla v = (x, y)$ ve $i_1(a, b) = (x, y)_1$ ve $i_2(c, d) = (x, y)_2$ olacak şekilde $(a, b)R_\zeta(c, d)$ vardır. u ve v wedge çarpımındaki farklı bileşenlerde olduğu için $x = y$ olmalıdır, dolayısıyla $u = v$ dir.

(ii) $u = (x, y)_2$ ve $v = (x, y)_1$ olsun. Benzer şekilde $u = v$ elde edilir. $u = (x, y)_1$ ve $v = (x, y)_1$ veya $u = (x, y)_2$ ve $v = (x, y)_2$ olduğundan zaten $u = v$ olmuş olur.

Diğer taraftan $u = v$ olsun. $\nabla u = \nabla v$ dir ve **RRel** yansıma özelliğine sahip olduğundan $\nabla u R_\zeta \nabla v$ ve $i_1 u = u = v$ veya $i_2 u = v = u$ olur, böylece (B, R) uzayı T_0' olur.

Teorem 4.2.4 Her (B, R) yansıma bağıntılı uzayı T_0 dır ancak ve ancak R bağıntısı ters simetriktir.

İspat: Kabul edelim ki $(B, R), T_0$ olsun. R nin ters simetrik olduğunu göstereceğiz. $x, y \in B, x \neq y$ için xRy ve yRx olmak üzere $y = x$ göstereceğiz. $A = \{x, y\}$ ve R_A da A daki $i: A \rightarrow B$ içine dönüşümü ile elde edilen başlangıç yapısı (alt uzay yapısı) olsun. R , yansıma bağıntılı olduğundan Tanım...den

$$xR_A x = xRx$$

$$yR_A y = yRy$$

$$xR_A y = xRy$$

$$yR_A x = yRx$$

olur ki $R_A = \{(y, y), (x, x), (x, y), (y, x)\}$ indiskre bağıntısıdır. Bu (B, R) nin T_0 olması ile çelişir. O halde $x = y$ olmalı, yani R ters simetriktir.

Tersine R , ters simetrik bir bağıntı olsun. (B, R) nin T_0 olduğunu göstereceğiz. $A \subseteq B$, en az iki elemanlı alt küme ve $x \neq y$ olsun. $R_A = A \times A$ olsun.

$$xR_A x = xRx$$

$$yR_A y = yRy$$

$$xR_A y = xRy$$

$$yR_A x = yRx$$

olur ki bu ise R nin ters simetrik olması ile çelişir. Bu durumda $R_A \neq A \times A$ dır. Teorem 2.6.5 den (B, R) uzayı T_0 dır.

Sonuç 4.2.5 (B, R) yansıma bağıntılı uzayı için

(1) $T_1 \Rightarrow T_0$, $T_1 \Rightarrow \bar{T}_0$ ve $T_1 \Rightarrow T_0'$ dır.

(2) $T_0 \Leftrightarrow \bar{T}_0$

Örnek 4.2.6 $B = \{a, b, c\}$ üzerinde

(1) $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$ için

(B, R_1) yansıma bağıntılı uzayı T_0' dır. Ters simetrik olmadığından $\bar{T}_0$ ve T_0 değildir. Diskre olmadığından ise T_1 değildir.

(2) $R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b)\}$ için

(B, R_2) uzayı T_0' dır. Ters simetrikden $\bar{T}_0$ ve T_0 dır. Uzay T_1 değildir.

(3) $R_3 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ için

(B, R_3) yansıma bağıntılı uzayı T_0' , $\bar{T}_0$, T_0 ve T_1 dir.

4.3 Diğer Bazı Topolojik Kategorilerde T_0 ve T_1 Nesneler

(1) **ConFCO** kategorisinde,

i. (B, L) sabit süzgeç yakınsak uzayı $p \in B$ de $\bar{T}_0$ (T_1) dir. $\Leftrightarrow$ Her bir $x \neq p$ için için $[x] \cap [p] \notin K$ dir.

ii. Her (B, L) sabit süzgeç yakınsak uzayı $p \in B$ de T_0' dır.

iii. (B, L) sabit süzgeç yakınsak uzayı $\bar{T}_0$ (T_1 ve T_0) dir. $\Leftrightarrow$ Farklı $x, y \in B$ için $[x] \cap [y] \notin K$ dir.

iv. T_1 ConFCO ve $\bar{T}_0$ ConFCO kategorileri izomorfiktir.

v. Her (B, L) sabit süzgeç yakınsak uzayı T_0' .

(2) **ConLim** kategorisinde, (B, L) sabit limit uzayı için

i. (B, L) , $p \in B$ de $\bar{T}_0, T_0'$ ve T_1 dir.

ii. (B, L) , $\bar{T}_0, T_0'$ ve T_1 dir.

iii. (B, L) , T_0 dır $\Leftrightarrow B = \{x\}$ ya da $B = \emptyset$.

(3) **Lim** kategorisinde, (B, L) limit uzayı için

i. (B, L) , $p \in B$ de $\bar{T}_0 (T_1)$ dir $\Leftrightarrow$ Her bir $p \neq x$ için $[p] \notin K(x)$ veya (ve) $[x] \notin K(p)$.

ii. (B, L) , $p \in B$ de T_0' dir.

iii. (B, L) , $\bar{T}_0$ dır $\Leftrightarrow$ Farklı her $x, y \in B$ için $[x] \notin K(y)$ veya $[y] \notin K(x)$.

iv. (B, L) , T_1 dir $\Leftrightarrow$ Farklı her $x, y \in B$ için $[x] \notin K(y)$ dir.

v. (B, L) , T_0' dir.

vi. $T_0\text{Lim}$ ve $\bar{T}_0\text{Lim}$ kategorileri izomorfiktir.

(4) **Prord** kategorisinde, (B, R) ön sıralama bağıntılı uzayı için

i. (B, R) , $p \in B$ de $\bar{T}_0 (T_0')$ dır $\Leftrightarrow R$ ters simetrik bir bağıntıdır.

ii. (B, R) , $p \in B$ de T_1 dır $\Leftrightarrow R$ bağıntısı p de diskredir.

iii. (B, R) , $\bar{T}_0 (T_0' \text{ ve } T_0)$ dır, $\Leftrightarrow R$ kısmi sıralama bağıntıdır.

iv. (B, R) , T_1 dir. $\Leftrightarrow R$ diskredir.

v. $T_0\text{Prord}, T_0'\text{Prord}, \bar{T}_0\text{Prord}$ kategorileri ikişer ikişer izomorfiktir.

(5) ε , **Fam**, **PBorn** ve **Born** kategorilerinden,

i. (B, F) prebornolojik uzayı $p \in B$ de $\bar{T}_0, T_0'$ ve T_1 dir.

ii. (B, F) prebornolojik uzayı $\bar{T}_0, T_0'$ ve T_1 dir.

iii. $T_0\mathcal{E}$, $T_1\mathcal{E}$ ve $\bar{T}_0\mathcal{E}$ kategorileri ikişer ikişer izomorftir. Ayrıca tüm limit ve (co)limitlere sahiptir.

(6) CP kategorisinde,

i. (A, B) çiftler uzayı $p \in B$ de $\bar{T}_0$, T_0' ve T_1 dir.

ii. (A, B) çiftler uzayı $\bar{T}_0$, T_0' ve T_1 dir.

iii. T_0CP , T_1CP ve $\bar{T}_0CP$ kategorileri ikişer ikişer izomorftir. Ayrıca tüm limit ve (co)limitlere sahiptir.



5. SOBER YANSIMA BAĞINTILI UZAYLAR

5.1 Sober Topolojik Uzaylar

Tanım 5.1.1 (X, δ) topolojik uzay için

- 1) X kapalı iki öz alt kümenin birleşimi ise (X, δ) ya indirgenebilir (reducible) uzay denir.
- 2) (X, δ) indirgenebilir değilse, yani $F_1, F_2 \subseteq X$ kapalı kümeleri için $X = F_1 \cup F_2$ olduğunda ya $X = F_1$ ya da $X = F_2$ ise (X, δ) indirgenemez (irreducible) uzaydır.
- 3) (X, δ) nun boştan farklı indirgenemez her kapalı kümesi en az bir nokta kümesinin kapanışı ise (X, δ) ya quasi-sober uzay denir.
- 4) (X, δ) quasi-sober ve T_0 ise (X, τ) ya sober uzay denir.

Açık olarak sober uzay quasi-soberdir.

Örnek 5.1.2 (1) $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerindeki $\delta = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$ topolojik uzayı için $I = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$ sınıfı indirgenemez kümelerden oluşur. $IC = \{\{c\}, \{b, c\}, X\}$ ise indirgenemez kapalıların sınıfıdır.

$\overline{\{a\}} = X$, $\overline{\{b\}} = \{b, c\}$ ve $\overline{\{c\}} = \{c\}$ indirgenemez kapalı kümeler en az tek nokta kümesinin kapanışı olduğundan (X, δ) uzayı quasi-soberdir. Ayrıca (X, δ) uzayı T_0 olduğundan Tanım 5.1.1 den soberdir.

(2) $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerindeki $\delta = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a, b\}\}$ topolojik uzayı için $I = \{\{b\}, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ sınıfı indirgenemez kümelerden oluşur. $IC = \{\{c\}, \{a, b\}\}$ sınıfı da indirgenemez kapalı kümelerden oluşmaktadır. $\overline{\{c\}} = \{c\}$ olup $\{a, b\}$ indirgenemez kapalı kümesi tek nokta kümesinin kapanışı olmadığından (X, δ) , Tanım 5.1.1 den quasi-sober değildir, dolayısıyla sober de değildir.

Örnek 5.1.3 $s(X) \geq 2$ için (X, τ) indiskre uzayında, boştan farklı tek kapalı küme X olduğundan X kapalı iki öz alt kümenin birleşimi olarak yazılamaz. Tanım 5.1.1 den (X, τ) indirgenemez, yani $I = \{X\} = IC$ olup indirgenemez kapalı kümesi de X in kendisidir. $a \in X$ için $X = \overline{\{a\}}$ olduğundan (X, τ) uzayı quasi-soberdir. Bunun dışında (X, τ) indiskre uzayı T_0 olmadığından sober de değildir.

Örnek 5.1.4 $s(X) \geq 2$ için (X, τ) diskre uzayı,

(1) Herhangi bir $a \in X$ için $X = \{a\} \cup \{a\}^c$ olduğundan (X, τ) diskre uzay indirgenebilir. Çünkü diskre uzayda tüm alt kümeler hem açık hem de kapalıdır.

(2) (X, τ) quasi-soberdir. İndirgenemez kapalı kümeleri sadece tek nokta kümeleri olduğundan $a \in X$ için $\{a\} = \overline{\{a\}}$ dir, dolayısıyla (X, τ) uzayı quasi-soberdir.

(3) (X, τ) uzayı quasi-sober ve T_0 olduğundan soberdir.

Örnek 5.1.5 (X, τ) uzayında $a \in X$ olsun. $\{a\}$ ve $\overline{\{a\}}$ indirgenemez. F_1 ve F_2 kapalı kümeleri için $\{a\} = F_1 \cup F_2$ ise ya $\{a\} = F_1$ ya da $\{a\} = F_2$ dir. Bu nedenle $\{a\}$ kümesi indirgenemez.

Benzer şekilde F_1 ve F_2 kapalı kümeleri için $\overline{\{a\}} = F_1 \cup F_2$ olsun. $\{a\} \in \overline{\{a\}}$ olduğundan $a \in F_1$ veya $a \in F_2$ dir. F_1 kapalı olduğundan eğer $a \in F_1$ ise $\overline{\{a\}} \subseteq F_1$ den $\overline{\{a\}} = F_1$ olur. Aynı şekilde F_2 kapalı olduğundan eğer $a \in F_2$ ise $\overline{\{a\}} \subseteq F_2$ den $\overline{\{a\}} = F_2$ bulunur. Bundan dolayı $\overline{\{a\}}$ da indirgenemezdir.

Örnek 5.1.6 X sonsuz ve (X, τ) tümleyeni sonlu topoloji olsun. $X = F_1 \cup F_2$ ve F_1 ve F_2 kapalı olsun. F_1 ve F_2 ya sonludur ya da X dir. X sonsuz olduğundan ya $F_1 = X$ ya da $F_2 = X$ dir, dolayısıyla (X, τ) indirgenemez.

X in kapalı alt kümeleri sonlu kümelerle X dir. Eleman sayıları iki ve daha fazla olan sonlu kümeler indirgenebilir. İndirgenemez kapalı kümeler, tek elemanlı kümelerle X dir. Fakat uzay T_1 olduğundan her tek nokta kümesi kapalıdır. $\overline{\{a\}} = \{a\}$ olmasına rağmen kapanışı X i veren tek nokta kümesi yoktur. Bundan sebepten (X, τ) quasi-sober değildir. Dolayısıyla sober de değildir.

Önerme 5.1.7 (X, τ) uzayı indirgenemez ise bağlantılıdır.

İspat: Buna denk olarak bağlantısız uzayın indirgenebilir olduğunu ispat edelim. (X, τ) uzayı bağlantısız olsun. Dolayısıyla, X uzayı boştan farklı, ayrık ve kapalı $F_1, F_2 \subseteq X$ iki kümenin birleşimi olarak yazılır. Bu sebepten (X, τ) uzayı indirgenebilir.

Önerme 5.1.8 $s(X) \geq 2$ için (X, τ) Hausdorff uzayı

- (1) İndirgenebilir,
- (2) Quasi-sober,
- (3) Soberdir,
- (4) T_1 dir,
- (5) T_0 dır.

İspat: (1) $a, b \in X$ noktaları farklı olsun. (X, τ) Hausdorff olduğundan a ve b nin ayrık U_a ve U_b açık komşulukları vardır. $U_a \cap U_b = \emptyset$ olur ki $X = U_a^c \cup U_b^c$ elde edilir. U_a^c ve U_b^c kapalı öz alt kümeler olduğundan (X, τ) uzayı indirgenebilir.

(2) Hausdorff uzayların alt uzayları da Hausdorff olduğundan $s(A) \geq 2$ olacak şekilde tüm $A \subseteq X$ alt kümeler indirgenebilir. Bu nedenle X in indirgenemez alt kümeleri sadece tek elemanlı kümeleridir. Her $a \in X$ için $\overline{\{a\}} = \{a\}$ olduğundan (X, τ) quasi-soberdir.

(3) Tanım 5.1.1 den Hausdorff uzayı T_0 ve quasi-sober olduğundan soberdir.

(4) ve (5) aşikârdır.

Not 5.1.9 (1) Quasi-sober bir uzayın Hausdorff olması gerekmez. Örnek 5.1.3 den (X, τ) indiske uzayı quasi-sober olmasına rağmen Hausdorff değildir.

(2) Sober uzayın Hausdorff olması gerekmez. Örneğin $X = \{a, b\}$ üzerindeki $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ topolojisi için (X, τ) soberdir ancak Hausdorff değildir.

Önerme 5.1.10 (X, τ) için aşağıdakiler denktir:

- (1) (X, τ) indirgenemez,
- (2) (X, τ) nun boştan farklı her U, V açık kümeleri için $U \cap V \neq \emptyset$ dir,
- (3) X in boştan farklı her açık alt kümesi yoğundur.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2): (X, τ) indirgenemez, U, V boştan farklı alt kümeler ve $U \cap V \neq \emptyset$ olsun. Burada $U^c \cup V^c = X$ ve U^c, V^c kapalı öz alt kümelerdir. (X, τ) indirgenemez olduğundan bu bir çelişkidir, o halde $U \cap V \neq \emptyset$ dır.

(2) $\Rightarrow$ (3): $U \subseteq X$ boş kümeden farklı açık ve $x \in X$ olsun. $x \in \bar{U}$ olduğunu gösterelim. V, x i ihtiva eden herhangi bir açık olsun. (2) den $U \cap V \neq \emptyset$ dır. Bu sebeple $x \in \bar{U}$ dır.

(3) $\Rightarrow$ (1): (1) in tersine olarak (X, τ) nun indirgenebilir olduğunu varsayalım. Bu durumda $X = F_1 \cup F_2$ olacak şekilde $F_1, F_2 \subseteq X$ kapalı öz alt kümeler vardır. $X = F_1 \cup F_2$ olduğundan $\emptyset = F_1^c \cap F_2^c$ dir. Burada F_1^c ve F_2^c boştan farklı açık kümelerdir ancak yoğun değildir. $\emptyset = F_1^c \cap F_2^c$ olduğundan $x \in F_2^c$ ise $x \notin F_1^c$ ve dolayısıyla $x \notin \overline{F_1^c}$ dır. Bundan dolayı $\overline{F_1^c} \neq X$ dir yani F_1^c yoğun değildir. Benzer olarak F_2^c de yoğun değildir. Bu durum (3) ile çelişir, o halde X in boştan farklı her açık alt kümesi yoğundur.

5.2 Yansıma Bağlantılı Uzaylarda Kapalılık

Teorem 5.2.1 ([26]) (B, R) yansıma bağlantılı uzay $x \in B$ ve $M \subseteq B$ olsun.

(1) $\{x\}$ kapalıdır ancak ve ancak R bağıntısı x de ters simetriktir, yani aRx ve xRa olacak şekilde $a \in B$ varsa $a = x$ dir.

(2) M kapalıdır $\Leftrightarrow \forall x \in B$ için xRa ve bRx olacak şekilde $a, b \in M$ varsa $x \in M$ dir.

(3) $\emptyset$ ve B her zaman kapalıdır.

Örnek 5.2.2 $B = \{x, y, z\}$ kümesinde $R = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (x, z), (z, y)\}$ yansıma bağlantılı uzayı için $\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, z\}, \{z, y\}, B$ kapalıdır $M = \{x, y\}$ kümesi kapalı değildir. Çünkü $(x, z) \in R$ ve $(z, y) \in R$ olmasına rağmen $z \notin M$ dir.

Tanım 5.2.3 ([27]) $\mathcal{E}$ topolojik kategorisindeki X nesnesi için,

(1) X in kapalı alt objeleri N ile M ve $X = M \cup N$ için $X = M$ veya $X = N$ ise X nesnesi indirgenemezdir.

(2) X in boştan farklı indirgenemez kapalı her alt kümesi, en az bir noktanın kapanışıysa X nesnesine quasi-sober denir.

(3) X quasi-sober ve $\bar{T}_0 \Rightarrow X$ nesnesi $\bar{T}_0$ -soberdir.

(4) X quasi-sober ve $T_0' \Rightarrow X$ nesnesi T_0' -soberdir.

(5) X quasi-sober ve $T_0 \Rightarrow X$ nesnesi T_0 -soberdir.

5.3 *RRel* de Sober Nesne

Teorem 5.3.1 *RRel* kategorisindeki (B, R) nesnesi

A. (1) $\bar{T}_0$ dır $\Leftrightarrow \forall x \in B$ için $\{x\}$ kapalıdır.

(2) Quasi-soberdir $\Leftrightarrow T_0'$ -sober dir.

B. Aşağıdakiler denktir:

(1) T_0 -sober dir.

(2) $\bar{T}_0$ -sober dir.

(3) $\forall x \in B$ için $\{x\}$ kapalı ve B boştan farklı indirgenemez kapalı öz alt kümeleri tek nokta kümeleridir.

İspat: **A. (1)** Kabul edelim ki (B, R) uzayı $\bar{T}_0$ olsun. Teorem 4.2.1 den R ters simetrik bir bağıntıdır. Teorem 5.2.1 den her $x \in B$ için $\{x\}$ kapalı olur.

(2) Tanım 5.2.2 den açıktır.

B. (1) $\Leftrightarrow$ (2): Tanım 5.1.1, Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.4 den açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (3): (B, R) T_0 -sober olduğunu kabul edelim. Teorem 5.3.1 den her $x \in B$ için $\{x\}$ kapalıdır. $\emptyset \neq M \subseteq B$ öz (irreducible) indirgenemez kapalı alt küme ise bu durumda (B, R) quasi-sober olduğundan bazı $a \in B$ için $cl(\{a\}) = M$ dir. $\{a\}$ kapalı olduğundan $cl(\{a\}) = \{a\} = M$ olur.

(3) $\Rightarrow$ (1): $\forall x \in B$ için $\{x\}$ kapalı ve B nin boş kümeden farklı her öz (irreducible) kapalı alt kümesi tek nokta kümesi olduğunu kabul edelim. Teorem 5.3.1 den (B, R) uzayı T_0 dır. Eğer B nin boştan farklı öz indirgenemez kapalı alt kümesi M ise bazı $a \in B$ ler için $M = \{a\}$ olmalıdır. $\{a\}$ kapalı olduğundan $cl(\{a\}) = \{a\} = M$ dir. Bu

durumda Tanım 5.1.1 den (B, R) quasi-soberdir. Sonuç olarak Tanım 5.1.1 den (B, R) uzayı T_0 -sober dir.

Burada $T_0SobRRel$, $\bar{T}_0SobRRel$, $T_0'SobRRel$ ve $QSobRRel$, $RRel$ in sırasıyla T_0 -sober, $\bar{T}_0$ -sober, T_0' -sober ve quasi-sober yansılmalı uzaylardan oluşan dolu alt kategorisidir.

Teorem 5.3.2 $RRel$ kategorisinde

- (1) $RRel$ ve $T_0'RRel$ izomorfiktir,
- (2) $T_0'SobRRel$ ve $QSobRRel$ kategorileri izomorfiktir,

Teorem 5.3.3 $RRel$ kategorisinde, $(X,)$ yansılmalı uzayı için

- (1) $(X,)$, $\bar{T}_0$ -soberdir $\Leftrightarrow (X, R)$ T_0 -soberdir $\Leftrightarrow \forall a \in X$ için $\{a\}$ kapalı ve X in boştan farklı indirgenemez kapalı öz alt kümeleri tek noktadan oluşur.

- (2) $T_0SobRRel$ ve $\bar{T}_0SobRRel$ kategorileri izomorfiktir.

İspat: Keyfi topolojik kategoride [27] deki Teorem 3.5 den dolayı her $\bar{T}_0$ sober nesne T_0' sober nesnedir. Ayrıca [27] deki Teorem 3.13 den dolayı T_0 -sober ve $\bar{T}_0$ -sober arasında herhangi bir ilişki yoktur.

5.4 Bazı Topolojik Kategorilerde Sober Nesne

$T_0'\mathcal{E}(\bar{T}_0\mathcal{E}, T_0\mathcal{E}, T_1\mathcal{E})$, $\mathcal{E}$ deki tüm $T_0'(\bar{T}_0, T_0, T_1)$ nesnelerinden oluşan $\mathcal{E}$ nin dolu alt kategorisi olsun. Ayrıca $T_0'Sob\mathcal{E}(\bar{T}_0Sob\mathcal{E}, T_0Sob\mathcal{E})$, $\mathcal{E}$ deki tüm T_0' -sober ($\bar{T}_0$ -sober, T_0 -sober) nesnelerinden oluşan $\mathcal{E}$ nin dolu alt kategorisi olsun.

- (1) Top kategorisinde,

i. $\bar{T}_0$ -soberdir $\Leftrightarrow T_0'$ -soberdir $\Leftrightarrow$ soberdir

ii. $T_0'SobTop = \bar{T}_0SobTop = T_0SobTop$

iii. $T_2 \Rightarrow$ soberdir $\Rightarrow T_0$

- (2) $ConLim$ kategorisinde (B, L) sabit limit uzayı [27] den

i. $\bar{T}_0$ -soberdir $\Leftrightarrow T_0'$ -soberdir $\Leftrightarrow$ quasi-soberdir $\Leftrightarrow$ İndirgenemez

ii. T_0 dır $\Leftrightarrow T_0$ -soberdir $\Leftrightarrow B = \emptyset$ veya $B = \{a\}$ dır.

iii. $T_0\mathbf{ConLim} = T_0\mathbf{SobConLim}$

iv. $\bar{T}_0\mathbf{SobConLim}$, $T_0'\mathbf{SobConLim}$ ve $\mathbf{QSobConLim}$ ler ikişerli olarak izomorfiktir. $\mathbf{QSobConLim}$, $\mathbf{ConLim}$ nin full alt kategorisidir.

v. $T_0'\mathbf{SobConLim}$, $\bar{T}_0\mathbf{SobConLim}$ ve $\mathbf{QSobConLim}$ ler co-limitlere sahiptir.

(3) $\mathbf{Lim}$ kategorisinde (B, L) limit uzayı

i. $T_1 \Rightarrow \bar{T}_0$ -soberdir $\Leftrightarrow T_0$ -soberdir $\Rightarrow T_0'$ -soberdir.

ii. $T_0\mathbf{Lim}$ ve $\bar{T}_0\mathbf{Lim}$ kategorileri izomorfiktir.

iii. $T_0\mathbf{Lim} = \bar{T}_0\mathbf{SobLim}$

(3) $\mathbf{Prord}$ kategorisinde (B, R) ön sıralama bağıntılı uzayı

i. $\bar{T}_0$ -soberdir $\Leftrightarrow T_0'$ -soberdir $\Leftrightarrow T_0$ -soberdir.

ii. $T_0\mathbf{Prord} = \bar{T}_0\mathbf{SobPrord} = T_0'\mathbf{SobPrord}$

(4) $\mathbf{PBorn}$ kategorisinde (B, F) prebornolojik uzayı [27] den

i. $\bar{T}_0$ -soberdir $\Leftrightarrow T_0'$ -soberdir $\Leftrightarrow$ quasi-soberdir $\Leftrightarrow$ indirgenemez

ii. $T_0 \Leftrightarrow T_0$ -soberdir $\Leftrightarrow B = \emptyset$ veya $B = \{a\}$

iii. $T_0'\mathbf{SobPBorn}$, $\bar{T}_0\mathbf{SobPBorn}$ ve $\mathbf{QSobPBorn}$ ler ikişerli olarak izomorfiktir. Burada $\mathbf{QSobPBorn}$, quasi-sober prebornolojik uzaylardan oluşan $\mathbf{PBorn}$ un dolu alt kategorisidir.

iv. $T_0\mathbf{SobPBorn}$ ve $T_0\mathbf{PBorn}$ kategorileri izomorfiktir.

(5) CP kategorisinde (A, B) çiftler uzayı [27] den

i. $\bar{T}_0$ -soberdir $\Leftrightarrow T_0'$ -soberdir $\Leftrightarrow$ quasi-soberdir

ii. $T_0 \Leftrightarrow T_0$ -soberdir $\Leftrightarrow$ indirgenemez $\Leftrightarrow A = \emptyset$ veya $A = \{a\}$

iii. $T_0' SobCP$, $\bar{T}_0 SobCP$ ve $QSobCP$ ikiyeşer ikiyeşer izomorfiktir. Burada $QSobCP$, quasi-sober nesnelerden oluşan CP nin dolu alt kategorisidir.

iv. $T_0 SobCP$ ve $T_0 CP$ kategorileri izomorfiktir.



6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Tez çalışmasının sonucunda, ***RRel*** kategorisinde lokal anlamda $\bar{T}_0$, T_0' ve T_1 ve genel anlamda ise T_0 , $\bar{T}_0$, T_0' ve T_1 şeklinde gösterine topolojik anlamda da T_0 ve T_1 kavramlarına denk gelen ayırma aksiyomları karakterize edilmiştir. Bunun yanında bu ayırma aksiyomları ile elde edilen dolu alt kategoriler belirlenmiş, birbirleri ile olan ilişkileri incelenmiş ve aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır.

(B, R) yansıma bağıntılı uzayının

1. $p \in B$ noktasında $\bar{T}_0$ olması için gerek ve yeter şart R nin p de ters simetrik olmasıdır.
2. $p \in B$ noktasında T_1 olması için gerek ve yeter şart R nin p de diskre olmasıdır.
3. $p \in B$ noktasında her zaman T_0' dür.
4. $\bar{T}_0$ olması için gerek ve yeter şart R nin ters simetrik olmasıdır.
5. T_0 olması için gerek ve yeter şart R nin ters simetrik olmasıdır.
6. Her zaman T_0' dür.
7. T_1 olması için gerek ve yeter şart R nin diskre olmasıdır.
8. ***RRel*** ve T_0' ***RRel*** izomorfik kategorilerdir.
9. T_0 ***RRel*** ve $\bar{T}_0$ ***RRel*** izomorfik kategorilerdir.

Dahası ***RRel*** kategorisinde kapalı nesne kavramı kullanılarak sober yansıma bağıntılı uzaylar ele alınmıştır. Burada Tanım... de sözü geçen T_0 -sober, $\bar{T}_0$ -sober, T_0' -sober şeklinde üç farklı sober uzay kavramı üzerinde durulmuş olup bu kategoride incelenmiştir ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

(B, R) yansıma bağıntılı uzayı

1. T_0 -soberdir $\Leftrightarrow \bar{T}_0$ -soberdir $\Leftrightarrow \forall x \in B$ için $\{x\}$ kapalı ve indirgenemez kapalı $\emptyset \neq B$ öz alt kümeleri tek noktadan oluşur.

2. Quasi-soberdir ancak ve ancak T_0' -soberdir.

Bundan başka yukarıda elde edilen sonuçlar kullanılarak ***RRel*** kategorisinin dolu alt kategorileri olan ***T₀SobRRel***, ***$\bar{T}_0$ SobRRel***, ***T₀'SobRRel*** ve ***QSobRRel*** şeklinde gösterilen kategoriler oluşturulmuş ve aralarındaki aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

1. ***T₀'SobRRel*** ve ***QSobRRel*** izomorfik kategorilerdir.

2. ***T₀SobRRel*** ve ***$\bar{T}_0$ SobRRel*** izomorfik kategorilerdir.

Yukarıda verilen sonuçlar kullanılarak ***RRel*** kategorisinde diğer ayırma aksiyomları ve birbirleri ile olan ilişkileri incelenebilir. Urysohn's Lemması, Tietze Extension Teoremi gibi genel topolojide önemli yere sahip olan teoremlerin yansıma bağıntılı uzayların kategorisinde ifadeleri ispat edilebilir. Dahası Stone, tam bağlantısız, kompakt, vb. kavramlar yine bu kategoride karakterize edilebilir. Son olarak bilinen kapanış operatörlerinin yanı sıra diğer kapanış operatörleri ve bu operatörler ile elde edilen alt kategoriler ve özellikleri belirlenebilir.

KAYNAKLAR

1. Rosen, K. H., 2012. Discrete mathematics and its applications, McGraw-Hill Education, New York, USA.
2. Davey, B. A. ve Priestley, H. A., 2002. Introduction to lattices and order, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
3. Epp, S. S., 2011. Discrete mathematics with applications, Cengage Learning, Boston, USA.
4. Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L. ve Stein, C., 2009. Introduction to algorithms. MIT Press, Massachusetts, USA.
5. Eilenberg, S. ve MacLane, S., 1945. General theory of natural equivalences, Transactions of the American Mathematical Society, 58, 2, 231-294.
6. Grothendieck, A., 1957. Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku Mathematical Journal, Second Series, 9(2), 119-183.
7. Lambek, J., 1980. From λ -calculus to cartesian closed categories, To H.B. Curry, Essays in combinatory logic, lambda calculus and formalism, Academic Press, London, 375-402.
8. Herrlich, H., 1974. Topological structures, Mathematical Centre Tracts, 52, 59-122.
9. Wyler, O., 1971. Top categories and categorical topology, General Topology and Its Applications, 1, 1, 17-28.
10. Kent, D., 1969. Convergence quotient maps, Fundamenta Mathematicae, 65, 197-205.
11. Schwarz, F. ve Hannover, T.U., 1978. Connections between convergence and nearness, Categorical Topology, Lecture Notes in Mathematics, 719, 345-425.
12. Baran, M., 1991. Separation properties, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 23, 333-341.
13. Baran, M., 1995. T_0 -objects in topological categories Kuwait Journal of Science, 22, 123-127.
14. Herrlich, H., 1974. Topological functors, General Topology and its Applications, 4, 2, 125-142.
15. Weck-Schwarz, S., 1991. T_0 -objects and separated objects in topological categories, Quaestiones Mathematicae, 14, 3, 315-325.
16. Baran, M. ve Altindis, H., 1996. T_2 -objects in topological categories, Acta Mathematica Hungarica, 71, 41-48.

17. Baran, M., 2000. Closure operators in convergence spaces, *Acta Mathematica Hungarica*, 87, 33-45.
18. Baran, M., 2002. Compactness, perfectness, separation, minimality and closedness with respect to closure operators, *Applied Categorical Structures*, 10, 403-415.
19. Baran, M. ve Al-Safar, J., 2011. Quotient-reflective and bireflective subcategories of the category of preordered sets, *Topology and its Applications*, 158, 2076-2084.
20. Baran, M., 1993. The notion of closedness in topological categories, *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 34, 1, 383-395.
21. Baran, M., 1998. Completely regular objects and normal objects in topological categories, *Acta Mathematica Hungarica*, 80, 211-224.
22. Baran, M., 1998. T_3 and T_4 -objects in topological categories, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 29, 59-69.
23. Adamek, J., Herrlich, H. ve Strecker, G. E., 1990. Abstract and concrete categories, John Wiley and Sons, New York, USA.
24. Baran, M., 2025, *Topoloji*, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.
25. Marny, T., 1973. Rechts-Bikategoriestrukturen in topologischen Kategorien, Dissertation, Freie Universitat, Berlin.
26. Baran, M., 1992. Separation properties at p for the topological categories of reflexive relation spaces and preordered spaces, *Mathematica Balkanica*, 6, 193-198.
27. Baran, M., 2022. Sober spaces, *Turkish Journal of Mathematics*, 46, 299-310.
28. Çevik, K., 2023. Sabit limit uzaylar kategorisinde ayırma aksiyomları, kapalılık, bağlantılılık, soberlik ve kompaktlık, Yüksek Lisans Tezi, Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Aksaray.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Burcu MERCAN

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2018-2022.

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, 2022-2025.

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLERİ

1. Aksaray Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Pedagojik Formasyon Eğitimi Sertifika Programı, 2022-2023.

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Bildiriler

1. Erciyes, A., Kaçar, G. B. ve Mercan, B., 2024. Closed subobjects with separation axioms T_0 ve T_1 in ***RRel***, 5. BİLSEL Uluslararası Truva Bilimsel Araştırmalar ve İnovasyon Kongresi, Çanakkale, Bildiriler Kitabı, 378-379.