

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**



TAKSİKAB GEOMETRİDE KONİKLER ÜZERİNE

Merve ÖZER

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ARALIK 2021

ANTALYA

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**



TAKSİKAB GEOMETRİDE KONİKLER ÜZERİNE

Merve ÖZER

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ARALIK 2021

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TAKSİKAB GEOMETRİDE KONİKLER ÜZERİNE

Merve ÖZER
MATEMATİK
ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 06/12/2021 tarihinde jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Harun Barış ÇOLAKOĞLU (Danışman)

Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK

ÖZET

TAKSİKAB GEOMETRİDE KONİKLER ÜZERİNE

Merve ÖZER

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Harun Barış ÇOLAKOĞLU

Aralık 2021; 102 sayfa

Üç bölümden oluşan bu tezde, Öklid düzleminde iyi bilinen koniklerin temel tanımları verilmiş ve taksikab düzlem geometri tanıtılarak yalnızca nokta ve doğru yardımıyla verilen konik tanımlarının taksikab karşılıkları belirlenmiştir. Birinci bölümde, Öklidyen düzlem geometri, aksiyomatik olarak tarif edilmiş ve uzaklıkla ilgili kavram ya da özelliklerin metrik geometriler için ilgi çekici olabileceği vurgulanmıştır. İkinci bölümde, önce Öklid düzleminde koniklerin bilinen temel tanımları, daha açık olarak onların bir yüzey ve bir düzlemin arakesiti olarak, bir nokta ve bir doğru kullanılarak, iki nokta kullanılarak ve iki doğru kullanılarak verilen tanımları derlenmiş, daha sonra Öklidyen olmayan geometriler sınıfında yer alan bir metrik geometri örneği olan taksikab düzlem geometri tanıtılarak koniklerin yalnızca nokta ve doğru yardımıyla verilen tanımlarının taksikab karşılıkları incelenmiştir. Üçüncü bölümde verilen karşılıkların sınıflandırılması ve karşılaştırması yapılmıştır. Sonuç olarak, Öklid düzleminde iyi bilinen koniklerin yalnızca nokta ve doğru yardımıyla verilen bu temel tanımlarının taksikab düzlemdeki karşılıklarının, Öklid düzlemindeki aksine, özel durumlar haricinde birbirinden farklı geometrik şekiller olduğu belirlenmiştir.

ANAHTAR KELİMELEER: Elips, hiperbol, konik, Öklid geometrisi, parabol, taksikab geometri, taksikab elips, taksikab hiperbol, taksikab parabol

JÜRİ: Doç. Dr. Harun Barış ÇOLAKOĞLU

Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK

ABSTRACT

ON THE CONICS IN THE TAXICAB GEOMETRY

Merve ÖZER

MSc Thesis in Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Harun Barış ÇOLAKOĞLU

December 2021; 102 pages

In this thesis consisted of three parts, basic definitions of the well-known conics in the Euclid plane are given and introducing the taxicab plane geometry, the taxicab analogues of definitions of conics, which are given only by point and line, are determined. In the first chapter, Euclidean plane geometry is presented axiomatically, and it is emphasized that notions and properties about distance can be interesting subjects for metric geometries. In the second chapter, first, the fundamental definitions of the conics in the Euclid plane, more clearly definitions as a cross section of a plane and a surface, given by using a point and a line, using two points and using two lines, are collected, and then the taxicab plane, which takes place in non-Euclidean geometry class metric geometry, is presented and the analogues of the point and line definitions of the conics are investigated. In the third chapter, the given analogues are classified and compared. As a result, contrary to those in the Euclid plane, the taxicab analogues of these only point-line definitions of the well-known conics in the Euclid plane, has different shapes except in some special cases.

KEYWORDS: Conic, ellipse, Euclidean geometry, hyperbola, parabola, taxicab geometry, taxicab ellipse, taxicab hyperbola, taxicab parabola

COMMITTEE: Assoc. Prof. Dr. Harun Barış ÇOLAKOĞLU

Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Assoc. Prof. Dr. Hakan ŞİMŞEK

ÖNSÖZ

Bu tezde, aşına olduğumuz Öklid geometrisinde iyi bilinen koniklerin yalnızca nokta ve doğru yardımıyla verilen tanımlarının taksikab geometrideki karşılıkları incelenmiştir. Önce Öklid geometrisinde iyi bilinen konikler için kaynaklar taranmış ve koniklerin bilinen temel tanımları verilmiştir. Daha sonra, yalnızca nokta ve doğru yardımıyla verilen tanımların taksikab geometrideki karşılıkları için kaynak taraması yapılmış ve bilinen karşılıklar ifade edilmiştir. Son olarak, verilen karşılıkların sınıflandırılması ve karşılaştırması yapılmıştır.

Tez konumun belirlenmesinde, hazırlanmasında ve düzenlenmesinde yardım ve fedakarlığını esirgemeyen, çalışmalarında bana yol gösteren değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Harun Barış ÇOLAKOĞLU'na teşekkür ediyorum.

Bu çalışmamı, hayatım boyunca beni destekleyerek cesaretlendiren, maddi ve manevi desteğini esirgemeyen aileme ithaf ediyorum.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
ÖNSÖZ.....	iii
AKADEMİK BEYAN	v
SİMGELER	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK TARAMASI	6
2.1. Öklid Geometrisinde Konikler	6
2.1.1. Koniklerin kesit tanımı	9
2.1.2. Koniklerin odak ve doğrultmanlı tanımı	14
2.1.3. Merkezli koniklerin iki odaklı tanımı.....	15
2.1.4. Merkezli koniklerin iki doğrulu tanımı	16
2.1.5. Koniklerin denklemleri.....	18
2.2. Taksikab Geometride Konikler	27
2.2.1. Taksikab düzlem.....	27
2.2.2. Koniklerin odak ve doğrultmanlı tanımının taksikab karşılığı.....	36
2.2.3. Merkezli koniklerin iki odaklı tanımının taksikab karşılığı	70
2.2.4. Merkezli koniklerin iki doğrulu tanımının taksikab karşılığı.....	81
3. MATERYAL VE METOT	94
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	95
4.1. Taksikab Çember Tipleri.....	95
4.2. Taksikab Elips Tipleri	96
4.3. Taksikab Parabol Tipleri	97
4.4. Taksikab Hiperbol Tipleri	97
5. SONUÇLAR	99
6. KAYNAKLAR	101
ÖZGEÇMİŞ	

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Taksikab Geometride Konikler Üzerine” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

06/12/2021

Merve ÖZER



SİMGELER

Simgeler

- $\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi
 $\mathbb{R}^+$: Pozitif reel sayılar kümesi
 $\mathbb{R}^-$: Negatif reel sayılar kümesi
 $\mathbb{R}^2$: Analitik düzlem
 $\mathbb{R}_T^2$: Taksikab düzlem
 $\mathbb{R}_T^3$: Taksikab uzay
 d_E : Öklidyen uzaklık
 d_T : Taksi uzaklık
 d_p : Minkowski (l_p) uzaklığı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Tek kanatlı koninin düzlemle kesitleri	6
Şekil 2.2. Koni yüzeyi.....	8
Şekil 2.3. Koninin tabanı	8
Şekil 2.4. Dik dairesel koni.....	8
Şekil 2.5. Eğik dairesel koni	8
Şekil 2.6. Dik dairesel koninin bir düzlemle kesitleri.....	9
Şekil 2.7. Koninin düzlemle kesiti - elips.....	13
Şekil 2.8. Koninin düzlemle kesiti - hiperbol	13
Şekil 2.9. Koninin düzlemle kesiti - parabol	13
Şekil 2.10. Bir nokta ve dışındaki bir doğru ile elde edilen konikler	15
Şekil 2.11. İki nokta yardımıyla elde edilen elips.....	15
Şekil 2.12. İki nokta yardımıyla elde edilen hiperbol.....	16
Şekil 2.13. İki doğru yardımıyla elde edilen elips	16
Şekil 2.14. İki doğru yardımıyla elde edilen hiperbol	17
Şekil 2.15. Standart denkleme sahip elipsler	22
Şekil 2.16. Standart denkleme sahip hiperboller	24
Şekil 2.17. Standart denkleme sahip paraboller.....	26
Şekil 2.18. P_1 ve P_2 noktaları arasındaki taksikab uzaklık	28
Şekil 2.19. Taksikab düzlem KAK aksiyomunu sağlamaz.....	31
Şekil 2.20. M merkezli r yarıçaplı taksikab çemberi	32
Şekil 2.21. Taksikab düzlemde merkezden geçen doğruların sınıflandırılması	33
Şekil 2.22. Taksikab düzlemde bir P noktasının bir l doğrusuna uzaklığı	33
Şekil 2.23. $-1 \leq m \leq 0$ için dejenere olmayan odak-doğrultman taksikab elipsleri.....	42
Şekil 2.24. $-1 \leq m \leq 0$ için dejenere olmayan odak-doğrultman taksikab parabolleri ...	49
Şekil 2.25. $-1 \leq m \leq 0$ için dejenere odak-doğrultman taksikab parabolleri	54

Şekil 2.26. $-1 \leq m \leq 0$ için dejenere olmayan odak-doğrultman taksikab hiperbollerini ..	63
Şekil 2.27. $-1 \leq m \leq 0$ için dejenere odak-doğrultman taksikab hiperbollerini.....	69
Şekil 2.28. $c_1 = c_2$ için iki odaklı taksikab elipsi.....	73
Şekil 2.29. $c_1 > c_2 > 0$ için iki odaklı taksikab elipsi	73
Şekil 2.30. $a > c_1 > c_2 = 0$ için iki odaklı taksikab elipsi	74
Şekil 2.31. $a > c_1 = c_2 = 0$ için dejenere iki odaklı taksikab elipsi.....	74
Şekil 2.32. $a = c_2 = c_1 = 0$ için dejenere iki odaklı taksikab elipsi.....	75
Şekil 2.33. $c_2 = c_1 > 0$ ve $0 < a < c_1 + c_2$ için dejenere iki odaklı taksikab hiperbolü	79
Şekil 2.34. $c_1 > c_2 > 0$ ve $c_1 - c_2 < a < c_1 + c_2$ için iki odaklı taksikab hiperbolü	79
Şekil 2.35. $c_1 > c_2 > 0$ ve $c_1 - c_2 = a$ için iki odaklı taksikab hiperbolü	80
Şekil 2.36. $c_1 > c_2 > 0$ ve $0 < a < c_1 - c_2$ için iki odaklı taksikab hiperbolü.....	80
Şekil 2.37. $c_1 > c_2 = 0$ ve $0 < a < c_1$ için iki odaklı taksikab hiperbolü	81
Şekil 2.38. İki doğru yardımıyla elde edilen taksikab elipsleri.....	87
Şekil 2.39. İki doğru yardımıyla elde edilen taksikab çemberi.....	88
Şekil 2.40. İki doğru yardımıyla elde edilen taksikab hiperbollerini	93
Şekil 2.41. Taksikab çember tipleri	95
Şekil 2.42. Taksikab elips tipleri	96
Şekil 2.43. Taksikab parabol tipleri	97
Şekil 2.44. Taksikab hiperbol tipleri.....	98

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1. Koniklerin denklemlerine göre sınıflandırılması	20
--	----



1. GİRİŞ

İspatlı geometri Tales (MÖ 624-546) ile birlikte başlar. O zamana kadar basit ölçüm yöntemlerinden ibaret olan geometri, bu tarihlerden sonra ideal geometrik nesnelerin değişmeyen özelliklerinin belirlenmesi çabasına dönüşür. Bu çaba; Thales'le ilişkilendirilen Pisagor (MÖ 570–495) ve takipçileri, Pisagor'la ilişkilendirilen Platon (MÖ 427-347) ve Akademisi ve Sofistler (MÖ 5. ve 4. yüzyıllar) köşetaşlarıyla devam eder. Sistematik olarak organize edilmiş ilk geometri kitabının, Elemanlar adıyla Sakızlı Hipokrat (MÖ 470-410) tarafından yazıldığı kabul edilir. Hipokrat'tan sonra mantık yapısı ve terminolojisi giderek daha iyi olan birkaç kitap daha yazılmıştır. Ancak, bu kitaplar günümüze ulaşamamıştır. Bu şekilde yazılan kitapların en ünlüsü ve yüzyıllar boyu standart geometri kitabı olarak kalan Öklid'in (M.Ö 330-275) yazmış olduğu 13 ciltlik Elemanlar kitabıdır (MÖ 300). Öklid, ünlü Elemanlar adlı eserinde, girişte 5 aksiyom, 5 postulat ve 23 tanım vermiş ve o zamana kadar bilinenleri kendi katkılarıyla birlikte sistematik bir şekilde işlemiştir. Öklid, kitabının girişinde verdiği genel ve geometriye özel olan ispatsız önermelerini aksiyomlar ve postulatlar olarak ikiye ayırır. Günümüzde aksiyom ve postulatlar arasında bir fark gözetilmez ve başlangıç koşulları olarak değerlendirilir (Çolakoğlu 2019).

Öklid'in, kitabının başında geometriye özel olarak verdiği postulatlar şunlardır:

- 1) Herhangi iki noktayı birleştiren bir doğru çizilebilir.
- 2) Bir doğru her iki yönde sürekli olarak uzatılabilir.
- 3) Yarıçapı ve merkezi verilen çember çizilebilir.
- 4) Bütün dik açılar birbirine eşittir.
- 5) İki doğruyu üçüncü bir doğru kestiğinde, kesen doğrunun aynı tarafında kalan iç açılarının ölçüleri toplamı iki dik açıdan küçük ise, bu iki doğru sürekli olarak uzatıldığında iç açılarının iki dik açıdan küçük olduğu tarafta kesişir.

Öklid'in 5. postulatı genelde, ona denk olan "Bir doğruya dışındaki bir noktadan yalnızca bir tek paralel doğru çizilebilir." paralellik postulatıyla anılır. Matematikçiler uzun bir süre Öklid'in verdiği 5. postulatın veya paralellik postulatının gereksiz olduğuna

ve bu postulatların geçerliliğinin diğer dört postulat yardımıyla gösterilebileceğine inanmışlardır. Ancak, 2000 yıldan fazla bir süre bu inancı kanıtlamak için tekrarlanan girişimler başarısız olmuştur. Beşinci postulatın ispatlanamaması bu postulatın geçerli olmadığı bir geometrinin mümkün olabileceğini akla getirmiştir. Daha sonraları Bolyai, Lobaçevski ve Gauss tarafından beşinci postulatın ispat edilemeyeceği ve onun mümkün hallerden yalnız biri olduğu kanıtlanmıştır. Böylece paralellik postulatını sağlamayan geometriler doğmuştur. Tarihsel olarak, Öklid'in 5.postulatını sağlamayan geometriler Öklidyen olmayan veya Öklid-dışı geometri olarak bilinir. Ancak, Öklid'in aksiyomatik sistemi mükemmel değildir. Öklid'in aradığı mükemmelliği yakalamak için 19. yüzyılda birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalardan biri, Hilbert'in 1899 tarihli "Geometrinin Temelleri" (Grundlagen Der Geometrie) adlı eseridir. Bu kitapta Hilbert, verdiği aksiyomlar topluluğundan Öklid geometrisinin nasıl elde edildiğini ortaya koymuştur. Bundan sonra, birçok matematikçi Öklid geometrisi için farklı aksiyom sistemleri oluşturmuştur ve Öklidyen geometri için alınacak olan bu aksiyom kümelerine ait aksiyomlardan en az birini sağlamayan geometriler Öklidyen olmayan veya Öklid-dışı geometri olarak tanımlanmıştır (Çolakoğlu 2019).

Biz bu tez içinde Öklidyen geometri için, (Krause 1987)'de yer alan metrik yaklaşım ile düzenlenen aşağıdaki 13 aksiyom kümesini dikkate alacağız:

$\mathbb{P}$: noktalar kümesi,

$\mathbb{L}$: $\mathbb{P}$ nin bazı alt kümelerinin bir ailesi olan doğrular kümesi,

d : uzaklık fonksiyonu,

m : açı ölçüm fonksiyonu

olmak üzere aşağıda verilen 13 aksiyomu sağlayan bir $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d, m]$ matematiksel yapısına *Öklidyen geometri* denir:

[E1] Verilen iki noktayı içeren bir tek doğru vardır.

[E2] Her doğru en az iki nokta içerir. $\mathbb{P}$ kümesi doğrusal olmayan en az üç nokta içerir.

[E1] ve [E2] aksiyomları *üzerinde olma (incidence)* özellikleridir. Bunları izleyen dört aksiyom *uzaklık fonksiyonunun* pozitif tanımlı ve simetrik olduğunu, üçgen eşitsizliğini ve cetvel özelliğini sağladığını ifade eder:

[E3] d , her sıralı (A, B) nokta çiftine bir tek negatif olmayan $d(A, B)$ sayısını eşler. $d(A, B) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $A = B$ olmasıdır.

[E4] $d(A, B) = d(B, A)$ dır.

[E5] $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$ dir.

[E6] Verilen her l doğrusu için öyle birebir ve örten $f_l : l \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır ki, l üzerindeki her A ve B noktaları için

$$|f_l(A) - f_l(B)| = d(A, B)$$

sağlanır.

Aşağıdaki aksiyom *düzlem ayırma* aksiyomudur:

[E7] Verilen her bir l doğrusu için $\mathbb{P}$ nin, yarı-düzlem şeklinde adlandırılan ve aşağıdaki özellikleri sağlayan H_1 ve H_2 gibi iki alt kümesi vardır:

i) H_1 ve H_2 konvektir.

ii) $H_1 \cup H_2 = \mathbb{P} - l$ dir. ($\mathbb{P} - l$, $\mathbb{P}$ den l nin atılmışı demektir).

iii) $A \in H_1$ ve $B \in H_2$ ise $AB \cap l \neq \emptyset$ dir.

Şimdi vereceğimiz dört aksiyom *açı ölçme fonksiyonunun* özelliklerini belirler:

[E8] m , her bir açığı 0 ile 180 arasında değişen bir reel sayıya eşler.

[E9] Bir H yarı-düzleminin kenarı üzerinde bir $[AB$ ışını ve 0 ile 180 arasında herhangi bir r reel sayısı verildiğinde $P \in H$ ve $m\angle PAB = r$ olacak şekilde bir tek $[AP$ ışını vardır.

[E10] Eğer D noktası $\angle ABC$ açısının iç bölgesinde ise,

$$m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC$$

sağlanır.

[E11] Eğer B noktası, A ile C arasında ve $D \notin AC$ ise,

$$m\angle ABD + m\angle DBC = 180$$

sağlanır.

Sıradaki aksiyoim *kenar-açı-kenar* aksiyoimu olarak bilinir:

[E12] İki üçgenin köşe noktaları arasında birebir bir eşleme verilsin. Eğer birinci üçgenin iki kenarı ve aralarındaki açı, ikinci üçgenin karşılık gelen kenarlarına ve açısına eş ise bu üçgenler eştir.

Son aksiyoim *paralellik aksiyoimu* olarak ifade edilir:

[E13] l doğrusu ve dışında bir P noktası verilsin. Bu durumda P noktasından geçen ve l doğrusuna paralel olan bir tek doğru vardır.

Özel olarak, [E1] ve [E2] aksiyoimlerini sağlayan $\mathbb{P}$ ve $\mathbb{L}$ kümelerine birlikte *konum geometrisi* denir ve $[\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ ile gösterilir; d , $\mathbb{P}$ üzerinde bir uzaklık fonksiyonu olmak üzere, her $l \in \mathbb{L}$ doğrusu cetvele sahipse, $[\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ konum geometrisine d ile birlikte *metrik geometri* denir ve $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d]$ ile gösterilir; düzlem ayırma aksiyoimunu sağlayan bir metrik geometriye *Pasch geometrisi* denir; üzerinde tanımlı bir m açı ölçme fonksiyonuyla birlikte $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d]$ Pasch geometrisine *açıölçer (protractor) geometri* denir ve $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d, m]$ ile gösterilir; KAK aksiyoimunu sağlayan açıölçer geometriye *mutlak (absolute, neutral) geometri* denir; son olarak, paralellik aksiyoimunu sağlayan mutlak geometriye de *Öklidyen geometri* denir (Krause 1987 ve Milmann ve Parker 1991).

Aşına olduğumuz Öklid düzlemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$\mathbb{P} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ noktalar kümesi; a, b ve m reel sayılar olmak üzere,

$\mathbb{L} = L_E = l_a \cup l_{m,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx + b\}$ doğrular kümesi; üzerinde bulunma bağıntısı " $\circ$ " da $(x, y) \circ l_a \Leftrightarrow x = a$ ve

$(x, y) \circ l_{m,b} \Leftrightarrow y = mx + b$ şeklinde tanımlansın. Bununla birlikte, $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ noktaları için uzaklık fonksiyonu $d_E : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$;

$$d_E(P_1, P_2) = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{1/2}$$

şeklinde ve herhangi bir $\angle ABC$ açısı için açı ölçme fonksiyonu da

$$m_E(\angle ABC) = \left(\frac{180}{\pi} \right) \cos^{-1} \left(\frac{\langle A - B, C - B \rangle}{\|A - B\| \|C - B\|} \right)$$

şeklinde tanımlansın. $[\mathbb{R}^2, L_E, d_E, m_E]$ sistemi yukarıdaki 13 aksiyomu sağlar ve bir Öklidyen geometri modelidir. Her $[\mathbb{P}, L, d, m]$ Öklidyen geometri modeli $[\mathbb{R}^2, L_E, d_E, m_E]$ sistemine izomorftur. $[\mathbb{R}^2, L_E, d_E, m_E]$ sistemine *Öklid düzlemi* veya *Öklidyen düzlem* denir (Milmann ve Parker 1991).

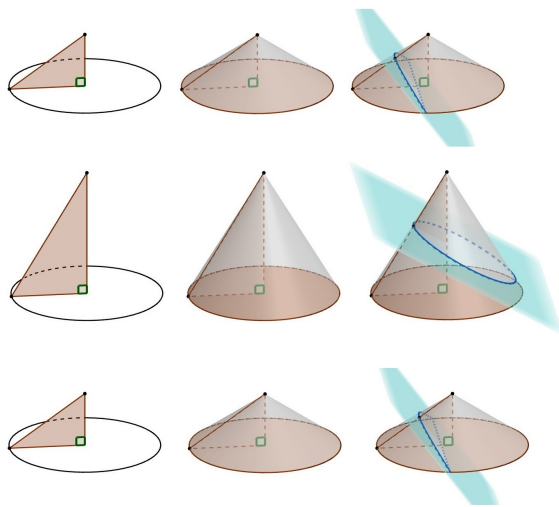
Öklid geometrisinde uzaklıkla ilgili bilinen bir kavramın farklı uzaklık fonksiyonlarına sahip metrik geometriler içindeki karşılıkları ilgi çekici olabilmektedir. Konik kavramı da kesit tanımına ek olarak uzaklıklarla ilişkili çeşitli tanımlara sahip çok temel bir kavramdır. Dolayısıyla koniklerin çeşitli metrik geometrilerindeki karşılıkları ilgi çekicidir ve literatürde farklı yazarlar tarafından ele alınmıştır. (Krause 1975), (Laatsch 1982) ve (Moser ve Kramer 1982) çalışmaları örnek olarak verilebilir. Bu tezde konik kavramının Öklid geometrisindeki bilinen tanımları (Çolakoğlu 2021a)'dan yararlanılarak toplu biçimde ifade edilmiş ve bir metrik geometri olan taksikab düzlem tanıtılarak bu kavramın sadece nokta ve doğru yardımıyla verilen tanımlarının taksikab düzlemdeki karşılıkları, (Laatsch 1982), (Krause 1987), (Kaya vd. 2000) ve (Çolakoğlu 2021b) kaynaklarından yararlanarak derlenmiştir.

2. KAYNAK TARAMASI

Bu bölümde, önce Öklid düzleminde koniklerin temel -yani, kesit ve sadece nokta ve doğru yardımıyla verilen- tanımları (Çolakoğlu 2021a)'dan yararlanılarak verilecektir. Daha sonra taksikab düzlem aksiyomatik özellikleriyle tanıtılacak ve (Krause 1987), (Laatsch 1982), (Kaya vd. 2000) ve (Çolakoğlu 2021b) kaynaklarından yararlanılarak sadece nokta ve doğru yardımıyla verilen konik tanımlarının taksikab karşılıkları verilecektir.

2.1. Öklid Geometrisinde Konikler

Konik; Öklid düzleminde nokta, doğru, paralel iki doğru, kesişen iki doğru, çember, elips, hiperbol ve parabolden oluşan bir ailenin genel adıdır. Bununla birlikte, nokta, çember, doğru, paralel iki doğru, kesişen iki doğru *dejenere* koniklerdendir ve konik denince genelde yalnızca dejenere olmayan konikler, yani elips, hiperbol ve parabol akla gelir. Koniklerin ilk kez Menaechmus (MÖ 380-320) tarafından keşfedildiği bilinir. Menaechmus, Şekil 2.1'de gösterildiği gibi, ikizkenar bir dik üçgenin bir dik kenarı etrafında tam tur döndürülmesiyle elde edilen dik koni yüzeyini üçgenin hipotenüsüne dik bir düzlemle kesitirerek parabolü, ikizkenar olmayan bir dik üçgenin kısa ve uzun dik kenarları etrafında tam tur döndürülmesiyle elde edilen dik koni yüzeyini yine üçgenin hipotenüsüne dik bir düzlemle kesitirerek elips ve hiperbolü elde etmiştir (Çolakoğlu 2021a).



Şekil 2.1. Tek kanatlı koninin düzlemle kesitleri

Büyük Geometrici olarak bilinen Perge’li Apollonius’a (MÖ 262-190) kadar bu eğriler -koninin tepe noktasında oluşan açılı dikkate alınarak- *dik açılı koni kesiti* (parabol), *dar açılı koni kesiti* (elips) ve *geniş açılı koni kesiti* (hiperbol) olarak ifade edilmiştir. Eğrilere bugünkü isimlerini veren Apollonius’tur. Koniklerle ilgili kendinden önceki bilgileri bir araya getirerek ve kendi buluşlarını da ekleyerek Konikler adlı sekiz ciltlik kitap yazmıştır. Apollonius’tan sonra 17. yüzyıla kadar konikler üzerine önemli fazla bir çalışma yoktur. Konikler, Johannes Kepler (1571 – 1630) ve Isaac Newton’un (1643-1727) gezegenlerin hareketlerine ve çekim yasalarına yönelik çalışmaları sonrasında önem kazanır; analitik ve projektif geometrinin doğuşuyla da ayrıntılı olarak incelenir. Konikler,

1) dik dairesel koninin düzlemle kesitleri olarak,

2) nokta ve doğru kullanılarak,

3) iki nokta kullanılarak (sadece elips ve hiperbol için),

4) iki doğru kullanılarak (sadece elips ve hiperbol için),

tanımlanabilmektedir. Bu tanımlara *koniklerin temel tanımları* diyeceğiz. Bununla birlikte, konikler

5) dik dairesel silindir, dik dairesel koni ve tek kanatlı dairesel hiperboloidin genel bir hali olan burkulmuş silindirin düzlemle kesitleri olarak,

6) çember ve doğru kullanılarak,

7) iki çember kullanılarak,

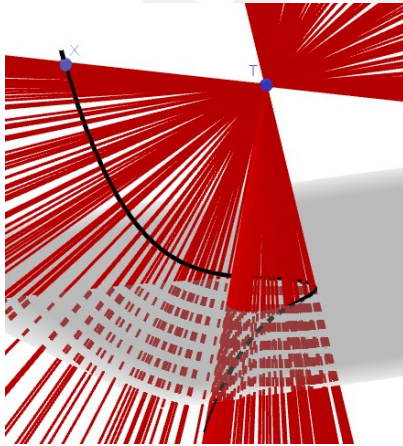
8) nokta ve çember kullanılarak (sadece elips ve hiperbol için),

9) bir denklem kullanılarak (analitik düzlemde tanımlanacaklarsa)

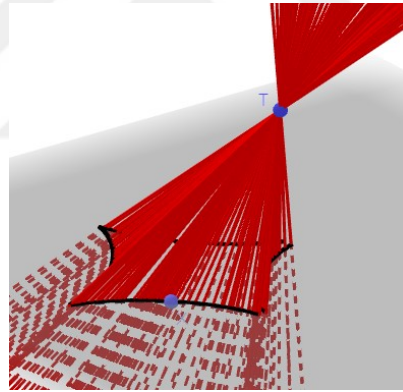
da tanımlanabilmektedir (Çolakoğlu 2021a).

Bu tezde, Öklid düzleminde koniklerin temel tanımlarını vereceğiz ve yalnızca nokta ve doğru yardımıyla verilen tanımlarının taksikab karşılıklarını inceleyeceğiz. Öklid geometrisinde koniklerin kesit tanımını vermeden önce koni tanımını verelim:

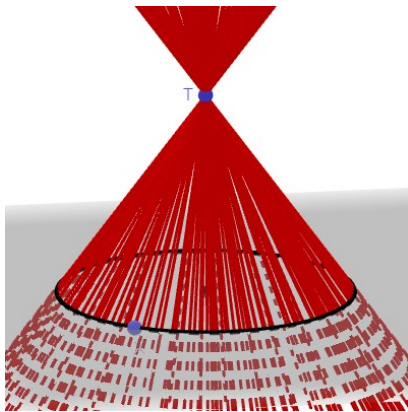
Tanım 2.1. T , uzayda sabit bir nokta, φ de T noktasından geçmeyen ve T ile birlikte aynı düzlemde bulunmayan bir uzay eğrisi olsun. X , φ eğrisi üzerindeki tüm noktaları tarayan hareketli bir nokta olmak üzere, TX doğrusunun geometrik yerine bir **koni yüzeyi**, **çift koni** veya kısaca **koni** denir (Şekil 2.2). Burada, T noktasına koninin **tepe noktası**, T noktası ve φ eğrisinin bir noktasından geçen her bir doğruya koninin bir **ana doğrusu** ve T noktasının konide ayırdığı iki parçadan her birine de koninin bir **kanadı** denir. Eğer φ eğrisi, T noktasından geçmeyen bir düzlem içinde bulunuyorsa ve kapalı ise bu eğriye veya eğrinin sınırladığı düzlemsel bölgeye **koninin tabanı** denir (Şekil 2.3). Tabanı bir daire olan koniye **dairesel koni** denir. Bir dairesel koninin tepe noktasıyla taban merkezini birleştiren doğruya **koninin eksen** denir. Bir dairesel konide eksen tabana dik ise bu koniye **dik dairesel koni** (Şekil 2.4), dik değil ise **eğik dairesel koni** denir (Şekil 2.5) (Çolakoğlu 2021a).



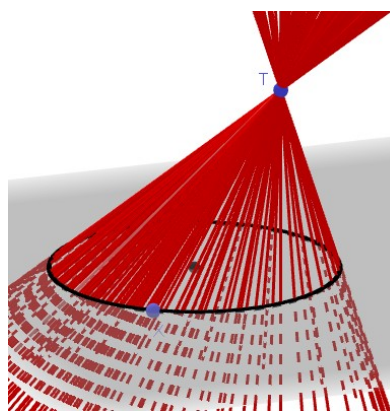
Şekil 2.2. Koni yüzeyi



Şekil 2.3. Koninin tabanı



Şekil 2.4. Dik dairesel koni



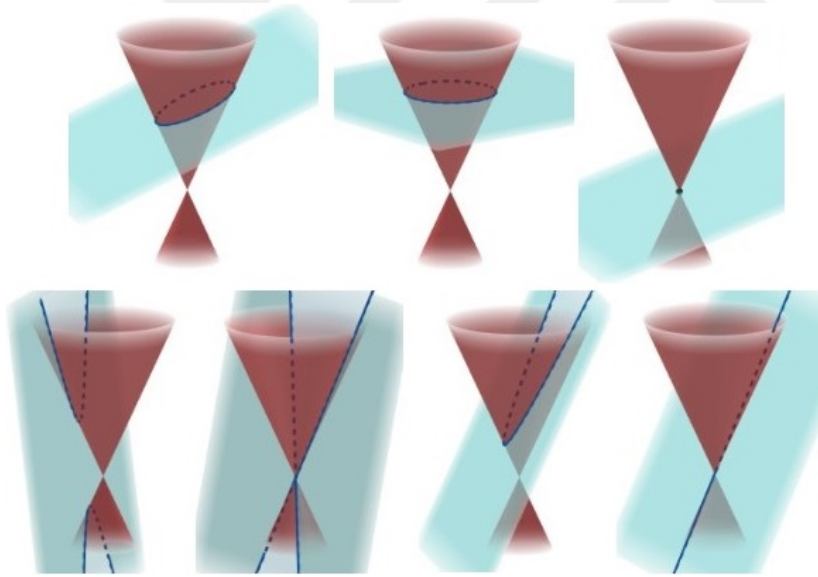
Şekil 2.5. Eğik dairesel koni

2.1.1. Koniklerin kesit tanımı

Kaynaklarda koniklerin kesit tanımı genelde aşağıdaki şekilde yapılır:

Tanım 2.2. Bir dik dairesel koninin bir düzlemlle kesiştirilmesinden elde edilen arakesitlere **konik** denir (Şekil 2.6). Özel olarak, koninin ekseninin bir ana doğrusuyla yaptığı dar açı θ olmak üzere;

- 1) kesen düzlemin eksenle yaptığı dar açı θ 'dan büyük ise, arakesitlere **elips**,
- 2) kesen düzlemin eksenle yaptığı dar açı θ 'ya eşit ise, arakesitlere **parabol**,
- 3) kesen düzlemin eksenle yaptığı dar açı θ 'dan küçük ise, arakesitlere **hiperbol**,
- 4) kesen düzlem koninin uç noktasından geçiyorsa, arakesitlere **dejenere konik** denir (Çolakoğlu 2021a).



Şekil 2.6. Dik dairesel koninin bir düzlemlle kesitleri

Bu tanıma göre nokta ve çember, elipsin; kesişen iki doğru hiperbolün; bir doğru da parabolün özel durumlarıdır. Koniklerle ilgili iyi bilinen diğer iki tanım uzaklıkla ilişkili geometrik yer olarak ifade edilir. Bu tanımları vermeden önce tanımları verebilmemizi sağlayan iki karakteristik özelliği belirleyeceğiz. Bunun için Germinal Pierre Dandelin'in (1794-1847) küreler yardımıyla verdiği ispatı kullanacağız. Bu ispatta kullanılan kürelere Dandelin küreleri denmektedir.

Dandelin küreleri: Pierre Dandelin, dik dairesel koninin düzlemle kesitlerinin uzaklıkla ilişkili iki karakteristik özelliğe sahip olduğunu koninin içine yerleştirdiği küreler yardımıyla göstermiştir. Dik dairesel koninin düzlemle arakesiti olan elips için bu iki özelliğin elde edilişi, Şekil 2.7 göz önüne alınarak aşağıda verilmiştir. Diğer durumlar da benzer olarak elde edilir.

- 1) Bir çember ve bu çemberin merkezinden geçen ve çember düzlemine dik olan doğru üzerinde fakat çember düzleminde olmayan bir nokta alalım.
- 2) Bu çember ve noktayla oluşturulan dik dairesel koniyi göz önüne alalım.
- 3) Çemberin merkezinden ve bu noktadan geçen doğru koninin eksenidir.
- 4) Şimdi, koniyi, kapalı bir eğri oluşturacak şekilde bir düzlemle kesiştirelim. Arakesit tanım gereği bir elipstir.
- 5) Bu düzleme dik olan ve koninin ekseninden geçen bir tek düzlem vardır. Bu düzlemi inşa edelim. Önce eksenin düzlemle kesişme noktasını belirleyelim. Sonra eksen üzerindeki başka bir noktanın düzlem üzerine dik izdüşümünü alalım. Bu üç noktadan geçen düzlem aradığımız düzlemdir. Yani, hem koninin ekseninden geçer, hem de kesen düzleme diktir. Dik dairesel koni, ekseninden geçen her düzleme göre simetrik olduğundan bu düzleme göre simetriktir. Ayrıca kesen düzlem, bu düzleme dik olduğundan kesen düzlem de bu düzleme göre simetriktir. Bu düzleme simetri düzlemi diyelim.
- 6) Hem koni hem de kesen düzlem üzerinde olan bir noktanın simetri düzlemine göre simetriği yine hem koni hem de kesen düzlem üzerindedir. Buna göre, elips simetri düzlemine göre simetriktir.
- 7) Kesen düzlem ve simetri düzlemi birbirine dik olduğundan, kesen düzlemdeki bir noktanın simetri düzlemine göre simetrisi, bu iki düzlemin kesişme doğrusuna göre de simetriktir. Buna göre, elips bu kesişme doğrusuna göre de simetriktir. Bu doğruya elipsin simetri eksenini diyelim.
- 8) Simetri düzlemi koniyi tepe noktasında kesişen iki doğruda keser. Bu kesişen doğrular ve elipsin simetri eksenini aynı düzlemdedir ve kesişirler. Kesişen doğrular simetri eksenini A_1 ve A_2 noktalarında kesişsinler.

9) Bu koninin içine, merkezi koninin ekseni üzerinde ve koni yüzeyine teğet olacak şekilde küreler yerleştirilebilir. Böyle iki küre, kesen düzleme de teğet olacak şekilde Şekil 2.7’de olduğu gibi yerleştirilsin.

10) Simetri düzlemi kürelerin merkezinden geçtiği için küreleri iki eş parçaya ayırır ve bu düzlemin kürelerle kesişimi de yarıçapı kürelerin yarıçaplarına eşit iki çemberdir.

11) Kesen düzlem, simetri düzlemine dik olduğundan, kürelerin kesen düzleme teğet değme noktaları elipsin simetri ekseni üzerinde olur. Ayrıca, küreler koninin her ana doğrusuna teğettir.

12) O halde, kürenin simetri düzlemiyle kesişmesinden elde edilen çemberler kesişen doğrulara ve elipsin simetri eksenine teğettir.

13) Bu üç doğruya teğet olan çemberlerin merkezini (ki bu merkezler kürelerin de merkezidir) ve teğet değme noktalarını bulabiliriz. Köşe açılarının açıortaylarının koninin eksenine keşimi bu çemberlerin merkezini verir. Merkezlerden teğetlere inilen dikmeler de teğet değme noktalarını verir. Bunlara F_1 ve F_2 diyelim. Her kesen düzlemle bu iki nokta tek türlü olarak bellidir. Bu noklara elipsin odakları denir.

14) Kürelerin merkezleri ve kesen düzleme değme noktaları elde edilmiştir. O halde bu küreleri inşa edelim. Şimdi kürelerin kesişen doğrulara teğet değme noktalarından geçen ve koninin eksenine dik olan paralel düzlemleri inşa edelim. Bu düzlemlerin koni ve küreyle kesimleri aynı çemberlerdir; koni ve küre birbirine bu çemberler boyunca teğettir. Ayrıca, bu düzlemlerle kesen düzlemin kesişimi iki paralel doğru verir. Bu doğrulara elipsin doğrultmanları denir. Bu doğrular, simetri düzlemine dik olan iki düzlemin kesişme doğrusu olduğundan simetri düzlemine dolayısıyla da elipsin simetri eksenine diktir. Bu doğruların simetri eksenini kestiği noktalara D_1 ve D_2 diyelim.

15) Şimdi elips üzerinde bir X noktası alalım. Koninin tepe noktasından ve X noktasından geçen doğru kürelere teğettir. Çünkü bu doğru kürelerin koniyle teğet oldukları çemberleri birer noktada keser. Bu noktalar kürelerin bu doğruya değme noktalarıdır. Bu teğet değme noktalarına K_1 ve K_2 diyelim. K_1K_2 doğrusu paralel iki düzleme hep aynı açıda olduğundan $|K_1K_2|$ uzunluğu sabittir.

16) Kesen düzlem, kürelere F_1 ve F_2 noktalarında teğetti. X noktası kesen düzlem üzerindedir. O halde XF_1 ve XF_2 doğruları kürelere F_1 ve F_2 noktalarında teğettir. X noktasından bir küreye çizilen teğet parçaları eşit uzunlukta olacağından $|XK_1| = |XF_1|$ ve $|XK_2| = |XF_2|$ dir.

17) Buradan, $|XF_1| + |XF_2| = |XK_1| + |XK_2| = |K_1K_2|$ dir ve sabittir. X noktası değişse, hatta kesen düzlemi değişse de elips üzerindeki noktaların iki sabit noktaya uzaklıkları toplamı sabit olur.

18) Kesen düzlemle paralel düzlemlerin kesişme doğrularının paralel olduğunu ve elipsin simetri eksenine dik olduğunu belirlemiştik. Şimdi X noktasından geçen ve elipsin simetri eksenine paralel olan bir doğru inşa edelim. Bu doğru, birbirine paralel olan kesişme doğrularına da dik olur. Bunların kesişme noktalarına H_1 ve H_2 diyelim. X noktası değişse de $|H_1H_2|$ sabittir ve $|D_1D_2|$ ye eşittir.

19) K_1H_1 ve K_2H_2 doğruları aynı düzlemde ve kesişmedikleri için paraleldirler. Ayrıca, K_1K_2 doğrusu ve H_1H_2 doğrusu X noktasında kesişir. O halde burada Thales teoremi uygulanabilir.

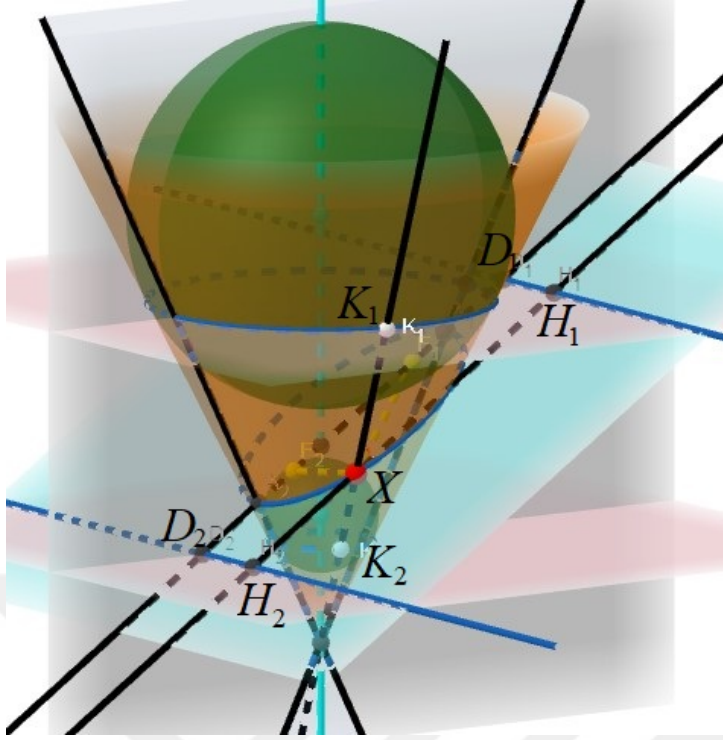
20) O halde, $\frac{|XK_1|}{|XH_1|} = \frac{|XK_2|}{|XH_2|}$ ve buradan $\frac{|XF_1|}{|XH_1|} = \frac{|XF_2|}{|XH_2|}$ dir. Orantı özelliklerinden

$$\frac{|XF_1|}{|XH_1|} = \frac{|XF_2|}{|XH_2|} = \frac{|XF_1| + |XF_2|}{|XH_1| + |XH_2|} = \frac{|XK_1| + |XK_2|}{|XH_1| + |XH_2|} = \frac{|K_1K_2|}{|H_1H_2|} \text{ bulunur.}$$

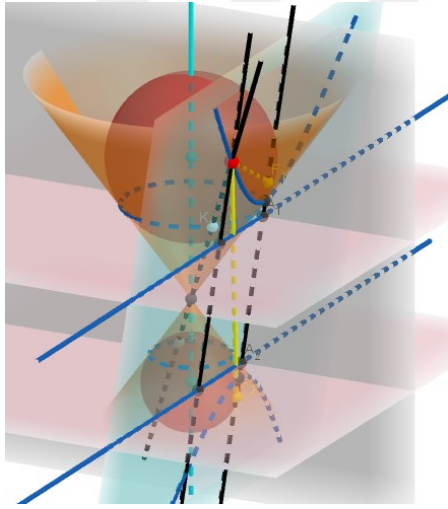
$|K_1K_2|$ ve $|H_1H_2|$ sabit sayılar ve $|K_1K_2| < |H_1H_2|$ olduğundan $\frac{|K_1K_2|}{|H_1H_2|}$ değeri 0 ile 1 arasında sabit bir sayıdır.

21) Buna göre, X değişse de her X için $\frac{|XF_1|}{|XH_1|} = \frac{|XF_2|}{|XH_2|}$ oranı sabit ve 0 ile 1 arasında bir sayıdır. O halde dejenere olmayan bir elips üzerindeki bir noktanın, sabit bir noktaya uzaklığının sabit bir doğruya uzaklığına oranı 0 ile 1 arasında sabit bir sayıdır.

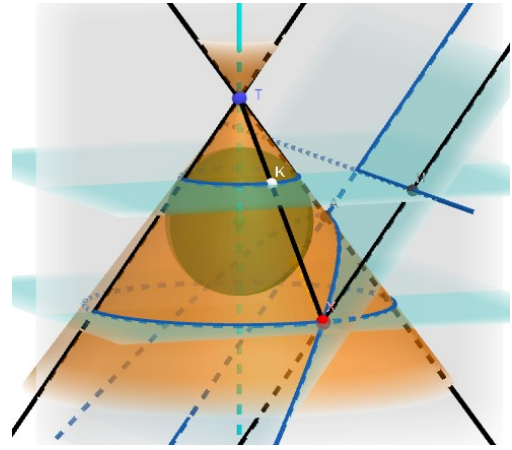
Bu özellik koniyi kesen düzlem değişse de değişmeyeceğinden elipsi karakterize eder ve onu tanımlamak için kullanılır (Çolakoğlu 2021a)



Şekil 2.7. Koninin düzlem kesiti - elips



Şekil 2.8. Koninin düzlem kesiti - hiperbol



Şekil 2.9. Koninin düzlem kesiti - parabol

Böylece çember hariç tüm konikler için karakteristik odak-doğrultman özelliği, ek olarak elips ve hiperbol için karakteristik iki-odak özelliği belirlenmiş olur. Elips ve hiperbol bir simetri merkezine sahip olduklarından özel olarak merkezli konik olarak isimlendirilir. Yukarıda elde edilen karakteristik özellikler yardımıyla koniklerin odak-doğrultman ve merkezli koniklerin de iki odak tanımı verilir (Çolakoğlu 2021a).

2.1.2. Koniklerin odak ve doğrultmanlı tanımı

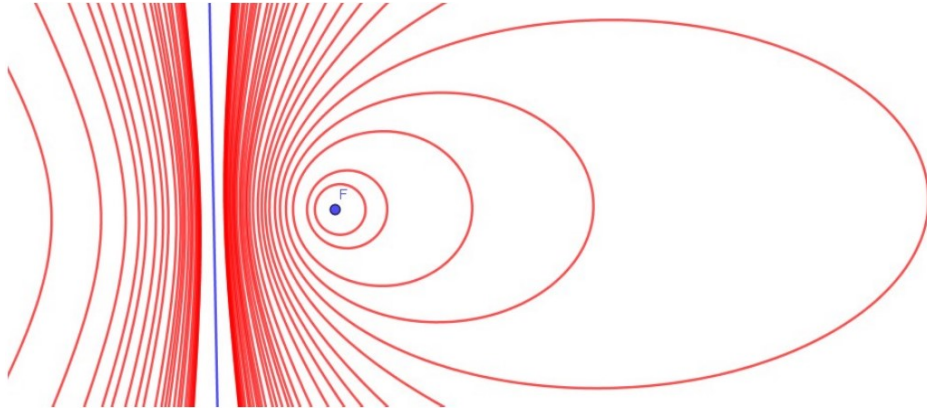
Tanım 2.3. *Düzlemde, sabit bir F noktası ve sabit bir d doğrusu verilsin. Negatif olmayan sabit bir e reel sayısı için, $|PF| = e|Pd|$ özelliğindeki P noktalarının geometrik yerine **konik** denir. Özel olarak, koniğe; $0 \leq e < 1$ ise **elips**, $e = 1$ ise **parabol**, $e > 1$ ise **hiperbol** denir. Ayrıca, verilen sabit noktaya koniğin **odağı**, sabit doğruya koniğin **doğrultmanı**, sabit sayıya da koniğin **dışmerkezliği** denir (Çolakoğlu 2021a).*

Tanıma göre, eğer F noktası d doğrusu üzerinde ise, konik

- 1) $e = 0$ için, F noktasından ibaret tek bir nokta ($0 < e < 1$ için boş küme),
 - 2) $e = 1$ için, d doğrusuna F noktasında dik olan bir doğru,
 - 3) $e > 1$ için, F noktasından geçen ve d doğrusuna göre simetrik olan kesişen iki doğru olur. Bu dejene durumlar daha önceki kesit tanımıyla tutarlıdır. Ancak, tanımda $|PF| = e|Pd|$ yerine $\frac{|PF|}{|Pd|} = e$ şartı kullanılırsa, F noktası d doğrusu üzerinde iken,
- 1) $e = 0$ için, boş küme,
 - 2) $e = 1$ için, d doğrusuna F noktasında dik olan doğrudan F noktasının çıkarılmasıyla elde edilen yarıdoğru,
 - 3) $e > 1$ için, d doğrusuna göre simetrik ve F noktasında kesişen iki doğrudan F noktasının çıkarılmasıyla elde edilen iki yarıdoğrunun birleşimi

elde edilir. Bu durumda kesit tanımıyla tutarlı olmayan dejenere durumlar elde edilmektedir (Çolakoğlu 2021a).

Tanım 2.3'e göre, bir nokta bir elipsin, bir doğru bir parabolün ve kesişen iki doğru bir hiperbolün özel durumudur. Bununla birlikte, çember ancak bir limit durumunda elde edilebilmektedir: Merkezi sabit F noktası ve yarıçapı r olan bir çember ve F noktasından uzaklığı $u > r$ olan, yani çemberi kesmeyen bir d doğrusu alalım. Odağı F , doğrultmanı d ve dışmerkezliği $e = \frac{r}{u}$ şeklinde tanımlanmış olan bir elips için doğrultman kendisine paralel bir şekilde sonsuza giderken, elips M merkezli r yarıçaplı çembere, elipsin dışmerkezliği de 0'a gider. Başka bir ifadeyle her çember doğrultmanı sonsuzda olan bir elips gibi yorumlanabilir. O halde, bir nokta bir çemberin ve bir çember de bir elipsin özel durumu olarak görülebilir (Çolakoğlu 2021a).

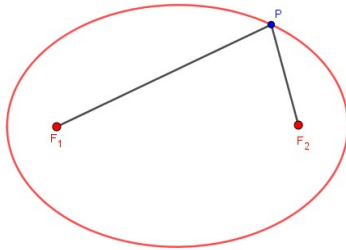


Şekil 2.10. Bir nokta ve dışındaki bir doğru ile elde edilen konikler

2.1.3. Merkezli koniklerin iki odaklı tanımı

Elipsin iki nokta yardımıyla verilen tanımı aşağıdaki gibi yapılabilir:

Tanım 2.4. *Düzlemde sabit iki noktaya uzaklıkları toplamı; sabit ve bu noktalar farklı iken bu noktalar arasındaki uzaklıktan büyük olan noktaların geometrik yerine **elips** denir. Bu sabit noktalara da elipsin **odakları** denir (Çolakoğlu 2021a).*

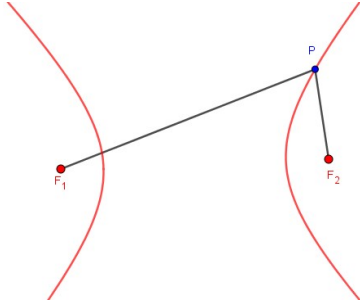


Şekil 2.11. İki nokta yardımıyla elde edilen elips

Eğer iki nokta aynı nokta olarak seçilirse, özel durum olarak çember ve dejenere durum olarak nokta elde edilir. Çember için verilen "sabit bir noktadan sabit bir uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri" tanımı, elipsin tanımının bir özel halidir (Çolakoğlu 2021a).

Hiperbolün iki nokta yardımıyla verilen tanımı aşağıdaki gibi yapılabilir:

Tanım 2.5. *Düzlemde sabit iki noktaya uzaklıkları farkı, bu noktalar arasındaki uzaklıktan küçük ve pozitif sabit bir sayı olan noktaların geometrik yerine **hiperbol** denir. Bu sabit noktalara da hiperbolün **odakları** denir (Çolakoğlu 2021a).*



Şekil 2.12. İki nokta yardımıyla elde edilen hiperbol

Kaynaklarda, merkezli koniklerin iki-odak tanımında "noktalar arasındaki uzaklıktan küçük ve büyük olma" kısıtlaması yer almamaktadır. Ancak, bu durumda elipsin dejenere hali "bir doğru parçası", hiperbolün dejenere hali ise "zıt yönlerde ve ayrık iki ışının birleşimi" veya "düzlemin tamamı" olabilmektedir. Daha açık olarak;

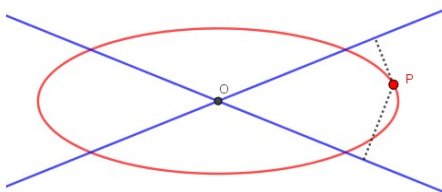
- $F_1 = F_2$ iken uzaklıklar farkı 0 ise "düzlemin tamamı" elde edilir,
- $F_1 \neq F_2$ iken; uzaklıklar toplamı sabit ve $|F_1 F_2|$ değerine eşit ise "bir doğru parçası", uzaklıklar farkı sabit ve $|F_1 F_2|$ değerine eşit ise $F_1 F_2 - (F_1, F_2)$ elde edilir.

Ancak bu durumlar daha önce elde edilmiş olan dejenere formlara uymamaktadır. Yukarıda yer alan tanımda verilen kısıtlamalarla elde edilen dejenere durumlar önceki durumlarla tutarsızlık oluşturmaz. Bununla birlikte, bu tanımda hiperbol için kesişen iki doğru dejenere durumu elde edilememektedir (ancak bu dejenere durum kısıtlama olmasa da elde edilemez) (Çolakoğlu 2021a).

2.1.4. Merkezli koniklerin iki doğrulu tanımı

Elipsin iki doğru yardımıyla verilen tanımı aşağıdadır:

Tanım 2.6. *Düzlemde bir noktası ortak sabit iki doğruya uzaklıklarının kareleri toplamı sabit olan noktaların geometrik yerine **elips** denir. Bu sabit doğrulara elipsin **dışmerkezlik doğruları (eccentrix)** denir (Çolakoğlu 2020, 2021a).*



Şekil 2.13. İki doğru yardımıyla elde edilen elips

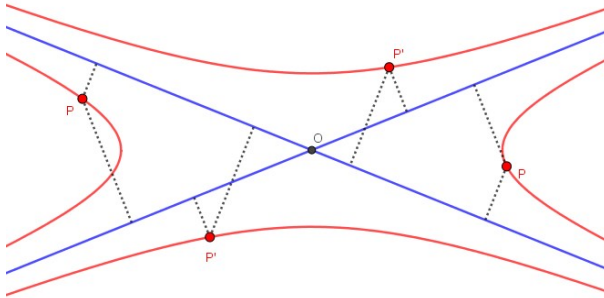
Bu tanıma göre dejenere durumlar olarak, doğrular farklı iken uzaklıkların kareleri toplamı 0 ise bir nokta, doğrular aynı iken; uzaklıkların kareleri toplamı 0 ise bu doğrularla çakışık bir doğru, uzaklıkların kareleri toplamı 0'dan büyük ise bu çakışık doğrulara paralel ve onlara eşit uzaklıkta iki paralel doğru elde edilir. Ek olarak, elipsin iki odak tanımının bir özel halinde olduğu gibi, bu tanımın bir özel durumu olarak çemberi, "düzlemde dik kesişen iki doğruya uzaklıklarının kareleri toplamı sabit olan noktaların geometrik yeri" olarak tanımlamak mümkündür:

Tanım 2.7. *Düzlemde dik kesişen sabit iki doğruya uzaklıklarının kareleri toplamı sabit olan noktaların geometrik yerine **çember** denir (Çolakoğlu 2021a).*

Hiperbolün iki doğru yardımıyla verilen tanımı aşağıdadır:

Tanım 2.8. *Düzlemde bir noktası ortak sabit iki doğrunun oluşturduğu karşılıklı bölge çiftlerinin birinde yer alan ve bu iki doğruya uzaklıkları çarpımı sabit olan noktaların geometrik yerine **hiperbol** denir. Bu sabit doğrulara hiperbolün **dışmerkezlik doğruları (eccentrix)** denir (Çolakoğlu 2020, 2021a).*

Hiperbolün dışmerkezlik doğruları asimptotlarıyla çakışır.



Şekil 2.14. İki doğru yardımıyla elde edilen hiperbol

Bu tanıma göre dejenere durumlar olarak, doğrular farklı iken uzaklıkların çarpımı 0 ise, bu doğruların birleşimi olarak kesişen iki doğru, doğrular aynı iken; uzaklıkların çarpımı 0 ise bu doğrularla çakışık bir doğru, uzaklıkların çarpımı 0'dan büyük ise bu çakışık doğrulara paralel ve eşit uzaklıkta olan iki paralel doğru elde edilir. Buna göre, paralel iki doğru ve tek bir doğru hem elipsin ve hem de hiperbolün dejenere durumlarıdır. Ancak bu durum önceki dejenere formlarda görülmemiştir. Bununla birlikte, bir

dik dairesel silindirin ve dik hiperbolik silindirin düzlemle kesitlerinden paralel iki doğru ve tek doğru dejenere durumları elde edilebilmektedir (Çolakoğlu 2000, 2021a).

2.1.5. Koniklerin denklemleri

A) Koniklerin genel denklemleri

Tüm konikleri belirleyen odak-doğrultman tanımını dikkate alalım. Düzlemde bir $F = (x_0, y_0)$ noktası, $ax + by + c = 0$ denklemine sahip bir d doğrusu ve negatif olmayan bir e reel sayısını göz önüne alalım. F odaklı, d doğrultmanlı ve e dışmerkeziğine sahip olan konik $|PF| = e|Pd|$ özelliğini sağlayacağından, üzerindeki $P = (x, y)$ noktaları da

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = e \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

denklemini sağlar. Bu denklem düzenlenirse

$$A' = a^2(1 - e^2) + b^2, B' = -2abe^2, C' = a^2 + b^2(1 - e^2), D' = -2ace^2 - 2x_0(a^2 + b^2),$$

$$E' = -2bce^2 - 2y_0(a^2 + b^2), F' = (a^2 + b^2)(x_0^2 + y_0^2) - c^2e^2$$

için

$$A'x^2 + B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0$$

denklemini elde edilir. Doğru denkleminin a ve b katsayılarının ikisi birden sıfır olamayacağından, bu denklemde A' , B' ve C' katsayılarından en az biri sıfırdan farklıdır. Ayrıca, $\delta = B'^2 - 4A'C'$ şeklinde tanımlanırsa,

$$\delta = (-2abe^2)^2 - 4(a^2 + b^2 - e^2a^2)(a^2 + b^2 - e^2b^2) = 4(a^2 + b^2)^2(e^2 - 1)$$

elde edilir. Buna göre, çözüm kümesinin boş olmadığı durumlarda, aşağıdaki durumlar açıktır:

- i) $\delta < 0 \iff 0 \leq e < 1$ dir; yani, konik bir elips veya dejenere elipstir.
- ii) $\delta > 0 \iff e > 1$ dir; yani, konik bir hiperbol veya dejenere hiperboldür.
- iii) $\delta = 0 \iff e = 1$ dir; yani, konik bir parabol veya dejenere paraboldür.

O halde, odak-doğrultman tanımından elde edilen tüm koniklerin denklemi A , B , C en az biri sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

şeklinde ifade edilebilir ve $\delta = B^2 - 4AC$ bu koniğin genel karakterini belirler. Koniklerin odak-doğrultman tanımından, doğrudan çember ve paralel iki doğru elde edilemez. Ancak, denklemin bu dejenere durumları da kapsadığı kolayca görülebilir:

- Çemberin genel denklemi A sıfırdan farklı olmak üzere

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda $\delta = -4A^2 < 0$ dır. Ayrıca çember için $e = 0$ olduğu yorumuyla bu durum yukarıdaki sınıflandırmaya da alınabilir.

- Paralel iki doğrunun genel denklemi $(a, b) \neq (0, 0)$ ve $c_1 \neq c_2$ için $(ax + by + c_1)(ax + by + c_2) = 0$ şeklindedir ve bu denklem açılırsa

$$a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 + a(c_1 + c_2)x + b(c_1 + c_2)y + c_1c_2 = 0$$

denklemi elde edilir. a ve b aynı anda sıfır olamayacağından yukarıdaki denklem ikinci derecedendir. Ek olarak, bu denklem için $\delta = 0$ dır. Paralel iki doğrunun parabolün dejenere durumu olduğu düşünülürse, bu durum da yukarıdaki sınıflandırmaya dahil edilebilir.

Buna göre, dejenere olanlar dahil tüm koniklerin denklemi, A, B, C en az biri sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

şeklinde ifade edilebilir (Çolakoğlu 2021a).

Karşıt olarak; A, B ve C en az biri sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

ikinci derece denklemini göz önüne alalım. Bu denklemde, öteleme ve dönmelerle x, y ve xy nin katsayıları yok edilip simetri merkezi orijin olan veya orijinden geçen koniklerin denklem formlarına benzetilerek Çizelge 2.1’de verilen sonuç elde edilmektedir (Özdemir 2021).

Çizelge 2.1. Koniklerin denklemlerine göre sınıflandırılması

Genel Konik Denkleminin Sınıflandırılması		
$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 ; \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix}$ $\delta = B^2 - 4AC$ ve		
$\delta < 0$	$\Delta = 0$	Nokta
	$A\Delta < 0$	Elips
	$A\Delta > 0$	Boş küme
$\delta > 0$	$\Delta \neq 0$	Hiperbol
	$\Delta = 0$	Kesişen iki doğru
$\delta = 0$	$\Delta \neq 0$	Parabol
	$\Delta = 0$	$\left\{ \begin{array}{l} A = 0 \left\{ \begin{array}{ll} E^2 > 4CF & \text{Paralel iki doğru} \\ E^2 = 4CF & \text{Tek doğru} \\ E^2 < 4CF & \text{Boş küme} \end{array} \right. \\ \\ C = 0 \left\{ \begin{array}{ll} D^2 > 4AF & \text{Paralel iki doğru} \\ D^2 = 4AF & \text{Tek doğru} \\ D^2 < 4AF & \text{Boş küme} \end{array} \right. \\ \\ A \neq 0 \left\{ \begin{array}{ll} ABDE > 2AB^2F & \text{Paralel iki doğru} \\ DE = 2BF & \text{Tek doğru} \\ ABDE < 2AB^2F & \text{Boş küme} \end{array} \right. \\ C \neq 0 \end{array} \right.$

Konikleri, analitik düzlemde yukarıdaki denklem sınıflandırmasını kullanılarak tanımlamak da mümkündür (Çolakoğlu 2021a).

B) Koniklerin standart denklemleri

Yukarıdaki genel denklemlere ek olarak, özel bir durumdaki merkezli koniklerin iki odak tanımları ve yine özel bir durumdaki parabolün odak-doğrultmanı tanımı kullanılarak koniklerin standart denklemi denilen denklemleri elde edilir:

Merkezi orijinde, odakları x -ekseni üzerindeki $F_1 = (c, 0)$ ve $F_2 = (-c, 0)$ noktaları ve x -eksenini kestiği noktalar $A_1 = (a, 0)$ ve $A_2 = (-a, 0)$ olan elipsi göz önüne alalım ve $a^2 - c^2 = b^2$ diyelim. Bu elipsin üzerindeki her $P = (x, y)$ noktası için, elipsin iki odak tanımı gereğince $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ dır. O halde,

$$\begin{aligned}
 \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a \\
 \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
 (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
 4xc &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
 a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= a^2 - xc \\
 a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \\
 a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 + x^2c^2 \\
 x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \\
 b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2
 \end{aligned}$$

denklemlerinden

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

denklemini elde edilir.

Eğer merkezi orijinde, odakları y -ekseni üzerindeki $F_1 = (0, c)$ ve $F_2 = (0, -c)$ noktaları ve y -eksenini kestiği noktalar $B_1 = (0, b)$ ve $B_2 = (0, -b)$ olan elipsi göz önüne alırsak ve $b^2 - c^2 = a^2$ dersek, elipsin üzerindeki her $P = (x, y)$ noktası için $|PF_1| + |PF_2| = 2b$

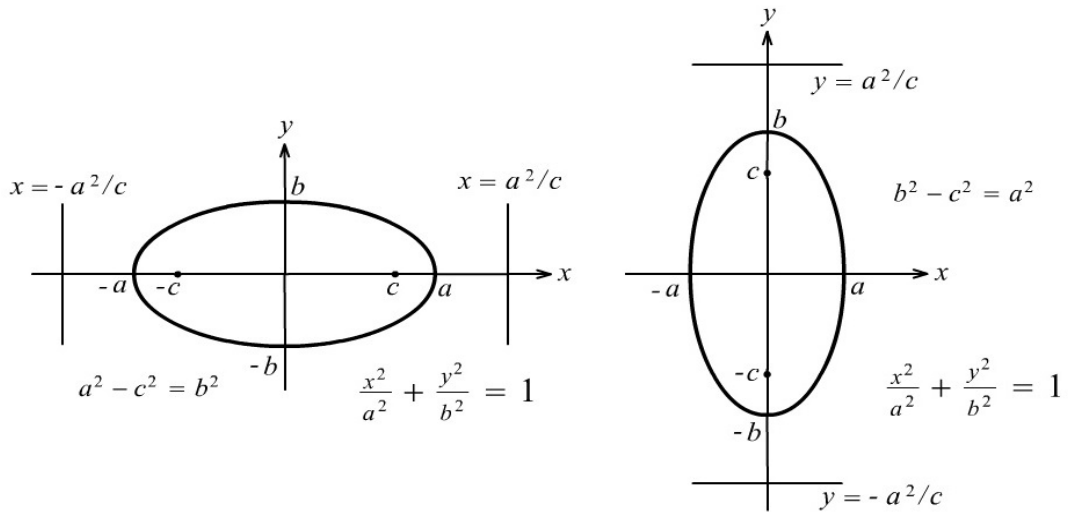
olur ve

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x^2 + (y - c)^2} + \sqrt{x^2 + (y + c)^2} &= 2b \\
 \sqrt{x^2 + (y + c)^2} &= 2b - \sqrt{x^2 + (y - c)^2} \\
 x^2 + (y + c)^2 &= 4b^2 - 4b\sqrt{x^2 + (y - c)^2} + x^2 + (y - c)^2 \\
 4yc &= 4b^2 - 4b\sqrt{x^2 + (y - c)^2} \\
 b\sqrt{x^2 + (y - c)^2} &= b^2 - yc \\
 b^2x^2 - 2b^2yc + b^2c^2 + b^2y^2 &= b^4 - 2b^2yc + y^2c^2 \\
 b^2x^2 + b^2c^2 + b^2y^2 &= b^4 + y^2c^2 \\
 b^2x^2 + y^2(b^2 - c^2) &= b^2(b^2 - c^2) \\
 b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2
 \end{aligned}$$

denklemlerinden yine

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

denklemini elde edilir.



Şekil 2.15. Standart denkleme sahip elipsler

Elde edilen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ denklemine *elipsin standart denklemi* denir. Bu denkleme sahip elipsin x -eksenin kestiği noktalar $A_1 = (a, 0)$ ve $A_2 = (-a, 0)$, y -eksenin kestiği noktalar $B_1 = (0, b)$ ve $B_2 = (0, -b)$ dir. Denklemden $a > b$ ise merkezi orijin olan yatay bir elips, $a < b$ ise merkezi orijin olan dikey bir elips, $a = b$ ise merkezi orijin

olan a yarıçapılı çember elde edilir. Ayrıca, denklemde $a > b$ iken, elipsin doğrultmanları $d_1 \dots x = k$ ve $d_2 \dots x = -k$ ise,

$$|A_1 F_1| = e |A_1 d_1| \quad \text{ve} \quad |A_2 F_1| = e |A_2 d_1|$$

olduğundan

$$e = \frac{|A_1 F_1|}{|A_1 d_1|} = \frac{|A_2 F_1|}{|A_2 d_1|} = \frac{a - c}{k - a} = \frac{a + c}{a + k}$$

dir. Buradan,

$$a^2 + ak - ca - ck = ka + kc - a^2 - ac$$

$$a^2 = ck$$

$$k = \frac{a^2}{c}$$

ve böylece

$$e = \frac{a - c}{k - a} = \frac{a - c}{\frac{a^2}{c} - a} = \frac{c}{a}$$

elde edilir. Tanım gereği $c < a$ olduğundan $0 < e = \frac{c}{a} < 1$ olduğu görülür.

Merkezi orijinde, odakları x -ekseni üzerindeki $F_1 = (c, 0)$ ve $F_2 = (-c, 0)$ noktaları ve x -eksenini kestiği noktalar $A_1 = (a, 0)$ ve $A_2 = (-a, 0)$ olan hiperbolü göz önüne alalım ve $c^2 - a^2 = b^2$ diyelim. Bu hiperbolün üzerindeki her $P = (x, y)$ noktası için, hiperbolün iki odak tanım gereğince $||PF_1| - |PF_2|| = 2a$ dır. O halde,

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{(x - c)^2 + y^2} - \sqrt{(x + c)^2 + y^2} \right| &= 2a \\ (x - c)^2 + y^2 + (x + c)^2 + y^2 - 4a^2 &= 2\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \sqrt{(x + c)^2 + y^2} \\ 2x^2 + 2c^2 + 2y^2 - 4a^2 &= 2\sqrt{((x - c)^2 + y^2)((x + c)^2 + y^2)} \\ (x^2 + c^2 + y^2 - 2a^2)^2 &= (x^2 + c^2 + y^2 - 2xc)(x^2 + c^2 + y^2 + 2xc) \\ (x^2 + c^2 + y^2)^2 - 4a^2(x^2 + c^2 + y^2) + 4a^4 &= (x^2 + c^2 + y^2)^2 - 4x^2c^2 \\ -a^2(x^2 + c^2 + y^2) + a^4 &= -x^2c^2 \\ x^2c^2 - x^2a^2 - a^2y^2 &= a^2c^2 - a^4 \\ b^2x^2 - a^2y^2 &= a^2b^2 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 \end{aligned}$$

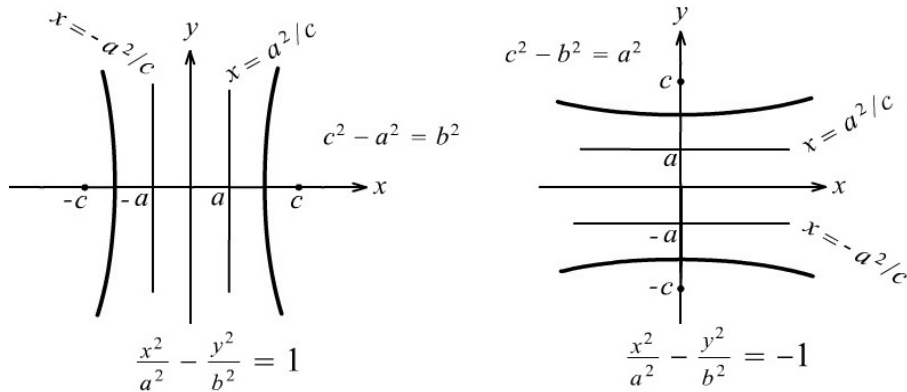
elde edilir. Buna göre, bu hiperbolün denklemi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dir. Eğer, merkezi orijinde, odakları y -ekseni üzerindeki $F_1 = (0, c)$ ve $F_2 = (0, -c)$ noktaları ve y -eksenini kestiği noktalar $B_1 = (0, b)$ ve $B_2 = (0, -b)$ olan hiperbolü göz önüne alırsak ve $c^2 - b^2 = a^2$ dersek, hiperbolün üzerindeki her $P = (x, y)$ noktası için $||PF_1| - |PF_2|| = 2b$ olur ve

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{x^2 + (y - c)^2} - \sqrt{x^2 + (y + c)^2} \right| &= 2b \\ x^2 + (y - c)^2 + x^2 + (y + c)^2 - 4b^2 &= 2\sqrt{x^2 + (y - c)^2}\sqrt{x^2 + (y + c)^2} \\ 2x^2 + 2c^2 + 2y^2 - 4b^2 &= 2\sqrt{(x^2 + (y - c)^2)(x^2 + (y + c)^2)} \\ (x^2 + c^2 + y^2 - 2b^2)^2 &= (x^2 + c^2 + y^2 - 2yc)(x^2 + c^2 + y^2 + 2yc) \\ (x^2 + c^2 + y^2)^2 - 4b^2(x^2 + c^2 + y^2) + 4b^4 &= (x^2 + c^2 + y^2)^2 - 4y^2c^2 \\ -b^2(x^2 + c^2 + y^2) + b^4 &= -y^2c^2 \\ y^2c^2 - x^2b^2 - b^2y^2 &= b^2c^2 - b^4 \\ a^2y^2 - b^2x^2 &= b^2a^2 \\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} &= 1 \text{ (veya } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1) \end{aligned}$$

denklemi elde edilir.



Şekil 2.16. Standart denkleme sahip hiperboller

Elde edilen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ve $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ (veya $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$) denklemlerine *hiperbolün standart denklemi* denir. Burada hiperbolün tipini a ve b arasındaki ilişki değil, denklem belirler. Eğer denklem $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ şeklinde ise, merkezi orijinde ve

odakları $F_1 = (c, 0)$ ve $F_2 = (-c, 0)$ olan $c^2 - a^2 = b^2$ özelliğine sahip yatay hiperbol, eğer denklem $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ şeklinde ise, merkezi orijinde ve odakları $F_1 = (0, c)$ ve $F_2 = (0, -c)$ olan $c^2 - b^2 = a^2$ özelliğine sahip dikey hiperbol elde edilir. Ayrıca, denklemi $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ olan hiperbolün doğrultmanları $d_1 \dots x = k$ ve $d_2 \dots x = -k$ ise,

$$|A_1 F_1| = e |A_1 d_1| \quad \text{ve} \quad |A_2 F_1| = e |A_2 d_1|$$

olduğundan

$$e = \frac{|A_1 F_1|}{|A_1 d_1|} = \frac{|A_2 F_1|}{|A_2 d_1|} = \frac{c - a}{a - k} = \frac{a + c}{a + k}$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned} ac - a^2 + kc - ka &= a^2 + ac - ka - kc \\ kc &= a^2 \\ k &= \frac{a^2}{c} \end{aligned}$$

ve böylece

$$e = \frac{c - a}{a - k} = \frac{a - c}{\frac{a^2}{c} - a} = \frac{c}{a}$$

elde edilir. Tanım gereği $c > a$ olduğundan $1 < e = \frac{c}{a}$ olduğu görülür. Dikkat edilirse, her iki konikte de dışmerkezlik $e = \frac{c}{a}$ dır. Bazı kaynaklarda dışmerkezlik, odaklar arası uzaklığın asal eksen uzunluğuna oranı olarak tekrar tanımlanmaktadır. Bu durumda da elips ve hiperbolün dışmerkezliği 1'e eşit olabilmektedir.

Odağı $F = (c, 0)$ ve doğrultmanı $x = -c$ denklemine sahip d doğrusu olan parabolü göz önüne alalım. Parabol üzerindeki her $P = (x, y)$ noktası için, parabolün odak-doğrultman tanımı gereğince $|PF| = |Pd|$ dir. O halde,

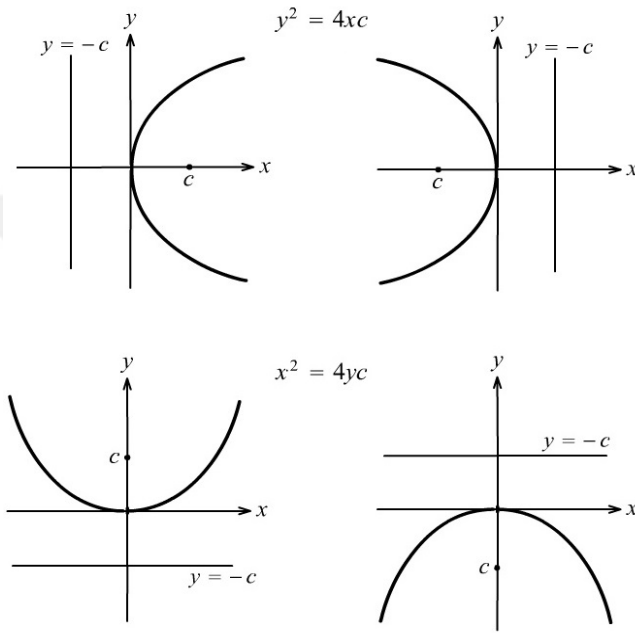
$$\begin{aligned} \sqrt{(x - c)^2 + y^2} &= |x + c| \\ x^2 - 2xc + c^2 + y^2 &= x^2 + 2xc + c^2 \\ y^2 &= 4xc \end{aligned}$$

denklemi elde edilir. Eğer, odağı $F = (0, c)$ ve doğrultmanı $y = -c$ denklemine sahip d doğrusu olan parabolü göz önüne alırsak, parabol üzerindeki her $P = (x, y)$ noktası için

$|PF| = |Pd|$ dir ve

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + (y - c)^2} &= |y + c| \\ x^2 + y^2 - 2yc + c^2 &= y^2 + 2yc + c^2 \\ x^2 &= 4yc\end{aligned}$$

denklemini elde edilir.



Şekil 2.17. Standart denkleme sahip paraboller

Elde edilen $y^2 = 4xc$ ve $x^2 = 4yc$ denklemlerine *parabolün standart denklemini* denir. Bu paraboller orijinden geçer ve parabolün tipi denkleminle belirlenir. Eğer denklem $y^2 = 4xc$ şeklindeyse ekseni x -ekseni olan yatay parabol, denklem $x^2 = 4yc$ şeklindeyse ekseni y -ekseni olan dikey parabol elde edilir.

Basit denklemlere sahip olan bu konikler tüm dejenere olmayan konikleri temsil edebildiklerinden önemlidir. Bir şeklin bir konik olup olmadığını belirlemek için denkleminin konik denkleminle karşılaştırılması veya şeklin koniklerin tanımsal karakteristik özellikleri sağladığının gösterilmesi gerekmektedir. Bir şeklin görünüş olarak bir koniğe benzemesi, hatta bir noktaya veya doğruya göre simetrik olarak benzemesi, onun bir konik olması için yeterli değildir (Çolakoğlu 2021a).

2.2. Taksikab Geometride Konikler

Öklid geometrisinde uzaklıkla ilgili kavramların taksikab geometrideki karşılıkları basitçe kavram içindeki (Öklidyen) uzaklık terimi yerine taksikab uzaklık yazılarak, Öklid metriği yerine taksikab metriği kullanılarak veya Öklid düzlemi yerine taksikab düzlem kullanılarak elde edilir (Çolakoğlu 2021b). Öklid geometrisindeki konik kavramının taksikab karşılıkları da benzer şekilde elde edilir. Bu kısımda, önce (Krause 1987) ve (Çolakoğlu 2009, 2021b) çalışmalarından yararlanılarak taksikab geometri tanıtılacak, daha sonra da (Krause 1987), (Kaya vd. 2000) ve (Çolakoğlu 2021b) çalışmalarından yararlanılarak koniklerin yalnızca nokta ve doğru yardımıyla elde edilen tanımlarının taksikab geometrideki karşılıkları verilecektir.

2.2.1. Taksikab düzlem

Taksikab düzlem, Öklid düzlemiyle hemen hemen aynı yapıya sahiptir. Nokta ve doğrular aynıdır ve açılar da aynı yolla ölçülür, fakat uzaklık fonksiyonu farklıdır. Taksikab uzaklık fonksiyonu d_T ile gösterilir ve $[\mathbb{R}^2, L_E, d_T]$ veya $[\mathbb{R}^2, L_E, d_T, m_E]$ sistemi taksikab düzlem olarak tanımlanır.

Tanım 2.9. $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$, $\mathbb{R}^2$ de iki nokta olmak üzere **taksikab uzaklık fonksiyonu** $d_T : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$;

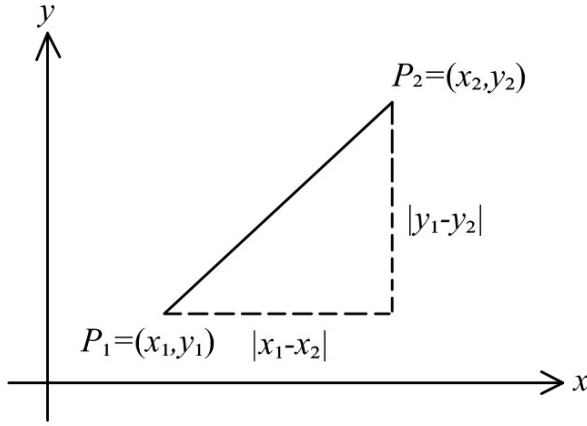
$$d_T(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

şeklinde tanımlanır ve $d_T(P_1, P_2)$ negatif olmayan reel sayısına da P_1 ve P_2 noktaları arasındaki **taksikab uzaklık** denir.

Geometrik olarak P_1 ve P_2 noktaları arasındaki Öklid uzaklığı,

$$d_E(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

bu iki noktayı birleştiren doğru parçasının uzunluğu iken, taksikab uzaklık, bu noktaları Şekil 2.18'deki gibi, koordinat eksenlerine paralel olan doğru parçalarıyla birleştiren en kısa yolun uzunluğudur (Çolakoğlu 2021b).



Şekil 2.18. P_1 ve P_2 noktaları arasındaki taksikab uzaklık

Öklidyen düzlem geometrinin konum aksiyomları nokta ve doğrularla ilgilidir ve Öklid düzleminde geçerli olduğundan taksikab düzlemde de geçerlidir. Sonraki dört aksiyom metrik olma ve cetvel özellikleridir aşağıdaki iki teoremden d_T nin metrik olduğu ve $[\mathbb{R}^2, L_E, d_T]$ sisteminde her doğrunun cetvele sahip olduğu gösterilmiştir:

Teorem 2.10. d_T uzaklık fonksiyonu bir metriktir.

İspat Yapılması gereken d_T nin [E3], [E4] ve [E5] özelliklerine sahip olduğunu göstermektir. Her $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için $|x_1 - y_1| \geq 0$ ve $|x_2 - y_2| \geq 0$ olduğundan $d_T(P_1, P_2) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \geq 0$ dır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} d_T(P_1, P_2) &= |x_1 - x_1| + |y_1 - y_2| = 0 \\ &\Rightarrow |x_1 - x_2| = |y_1 - y_2| = 0 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ ve } y_1 = y_2 \Rightarrow P_1 = P_2 \end{aligned}$$

dir. O halde [E3] sağlar. Her $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$\begin{aligned} d_T(P_1, P_2) &= |x_1 - x_1| + |y_1 - y_2| \\ &= |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| = d_T(P_2, P_1) \end{aligned}$$

dir. O halde [E4] sağlar. Her $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2), P_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ için

$$\begin{aligned} d_T(P_1, P_3) &= |x_1 - x_3| + |y_1 - y_3| = |x_1 - x_3 + x_2 - x_2| + |y_1 - y_3 + y_2 - y_2| \\ &\leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |y_1 - y_2| + |y_2 - y_3| = d_T(P_1, P_2) + d_T(P_2, P_3) \end{aligned}$$

dir. O halde [E5] de sağlar. Buna göre, d_T taksikab uzaklık fonksiyonu bir metriktir; yani pozitif tanımlıdır, simetriktir ve üçgen eşitsizliğini sağlar. $\square$

Teorem 2.11. $[\mathbb{R}^2, L_E, d_T]$ sisteminde $f_1 : l_a \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(a, y) = y$ fonksiyonu dikey doğrular için; $f_2 : l_{m,b} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x, y) = x(1 + |m|)$ fonksiyonu da dikey olmayan doğrular için cetveldir.

İspat Önce f_1 ve f_2 fonksiyonlarının bire-bir ve örten olduklarını gösterelim:

$a, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ için $P_1 = (a, y_1), P_2 = (a, y_2) \in l_a$ alalım. Eğer $f_1(a, y_1) = f_1(a, y_2)$ ise, $y_1 = y_2$ ve dolayısıyla $P_1 = P_2$ olacağı aşıkardır. O halde f_1 fonksiyonu birebirdir. Ayrıca, her $t \in \mathbb{R}$ için $f_1(a, y) = t$ olacak şekilde $y \in \mathbb{R}$ -dolayısıyla $(a, y) \in l_a$ - vardır. O halde f_1 fonksiyonu örtendir.

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $y_1 = mx_1 + b$ ve $y_2 = mx_2 + b$ için $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2) \in l_{m,b}$ alalım. Eğer $f_2(x_1, y_1) = f_2(x_2, y_2)$ ise, $x_1 = x_2$ ve dolayısıyla $y_1 = y_2$ olacağı aşıkardır. O halde $P = Q$ dur ve f_2 fonksiyonu birebirdir. Ayrıca, her $t \in \mathbb{R}$ için $f_2(x, y) = t$ olacak şekilde $x = [t/(1 + |m|)] \in \mathbb{R}$ ve $y = (mx + b) \in \mathbb{R}$ -dolayısıyla $(x, y) \in l_{m,b}$ - vardır. O halde f_2 fonksiyonu örtendir.

Son olarak; her $P_1, P_2 \in l_a$ için $|f_1(P_1) - f_1(P_2)| = d_T(P_1, P_2)$ ve her $P_1, P_2 \in l_{m,b}$ için $|f_2(P_1) - f_2(P_2)| = d_T(P_1, P_2)$ eşitliklerinin geçerli olduğu gösterelim:

$P_1 = (a, y_1), P_2 = (a, y_2) \in l_a$ olsun. Buna göre,

$$|f_1(P_1) - f_1(P_2)| = |y_1 - y_2| = d_T(P_1, P_2)$$

dir. O halde $f_1 : l_a \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(a, y) = y$ fonksiyonu dikey doğrular için cetveldir.

$P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2) \in l_{m,b}$ olsun. $P_1 = P_2$ iken

$$|f_2(P_1) - f_2(P_2)| = 0 = d_T(P_1, P_2)$$

dir. $P_1 \neq P_2$ iken $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ve

$$\begin{aligned} |f_2(P_1) - f_2(P_2)| &= |x_1 - x_2| |1 + |m|| \\ &= |x_1 - x_2| \left(1 + \frac{|y_1 - y_2|}{|x_1 - x_2|}\right) \\ &= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \\ &= d_T(P_1, P_2) \end{aligned}$$

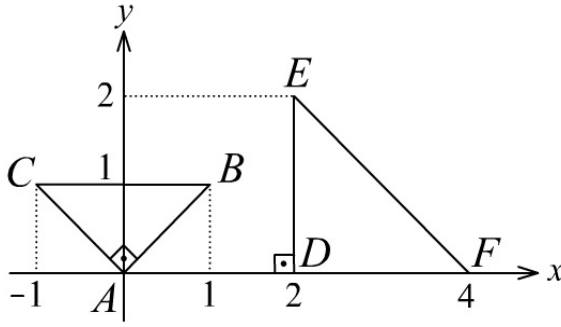
elde edilir. O halde $f_2 : l_{m,b} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x, y) = x(1 + |m|)$ fonksiyonu da dikey olmayan doğrular için cetveldir. $\square$

Buna göre $[\mathbb{R}^2, L_E, d_T]$ sistemi bir metrik geometri modelidir. Ayrıca, arada olma kavramı değişmediğinden, düzlem ayırma aksiyomu da Öklid düzleminde olduğu gibi taksikab düzlemde de geçerli olur. Sonraki dört aksiyom açı ölçme aksiyomlarıdır ve taksikab düzlemdeki açı ölçme fonksiyonu Öklid düzlemindeki açı ölçme fonksiyonu ile aynı olduğundan bu aksiyomlar da geçerli olacaktır. Böylece, Öklid açı ölçme aksiyomuyla birlikte bir açıölçer geometri modeli olan $[\mathbb{R}^2, L_E, d_T, m_E]$ sistemi elde edilir. $[\mathbb{R}^2, L_E, d_T]$ veya $[\mathbb{R}^2, L_E, d_T, m_E]$ sistemine taksikab düzlem denir ve kısaca $\mathbb{R}_T^2$ ile gösterilir. Ek olarak, paralellik aksiyomu sadece nokta ve doğrularla ilgili ve Öklid düzleminde geçerli olduğundan taksikab düzlemde de geçerlidir. Ancak, KAK aksiyomunun taksikab düzlemde geçerli olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir. Sonuç olarak, taksikab düzlem Öklid-dışı geometriler sınıfındadır ve $[\mathbb{R}^2, L_E, d_T]$ şeklinde bir metrik geometri veya $[\mathbb{R}^2, L_E, d_T, m_E]$ şeklinde açıölçer geometri olarak değerlendirilebilir. Ek olarak, n -boyut-lu taksikab uzaklık $P_1 = (x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n), P_2 = (x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$d_T^n(P_1, P_2) = |x_1^1 - x_2^1| + |x_1^2 - x_2^2| + \dots + |x_1^n - x_2^n|$$

şeklinde ve n -boyutlu taksikab uzay da benzer şekilde $[\mathbb{R}^n, L_E^n, d_T^n, m_E]$ şeklinde tanımlanır (Çolakoğlu 2021b).

Örnek 2.12. Şekil 2.19’da $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (-1, 1)$, $D = (2, 0)$, $E = (2, 2)$ ve $F = (4, 0)$ dir. Buna göre, CAB ve EDF üçgenleri için $d_T(C, A) = d_T(E, D) = 2$, $d_T(B, A) = d_T(F, D) = 2$ ve $m_E(\angle CAB) = m_E(\angle EDF) = 90^\circ$ dir, ancak CAB ve EDF üçgenleri eş değildir. O halde taksikab düzlem KAK aksiyomunu sağlamaz (Çolakoğlu 2021b).



Şekil 2.19. Taksikab düzlem KAK aksiyomunu sağlamaz

Taksikab metriği, Minkowski metriği veya l_p metriği olarak bilinen

$$d_p(P_1, P_2) = (|x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p)^{1/p}$$

metriğinin $p = 1$ için özel halidir. Ancak taksikab düzlem, ilk olarak (Menger 1952)'de sunulmuş ve (Krause 1975)'te geliştirilmiştir. Bugüne kadar taksikab düzlem üzerine birçok çalışma yapılmıştır (örnek çalışmalar için bkz: So, S.S. 2002). Taksikab düzlem, ideal şehir formu için daha uygun bir geometri modelidir. Bununla birlikte, aşına olduğumuz Öklid düzleminden sadece uzaklık fonksiyonuyla farklı olduğundan Öklid geometrisinde uzaklık içeren bilinen kavramların taksikab düzlemdeki karşılıkları farklılık gösterebilmekte ve ilginç olabilmektedir. Örneğin, taksikab düzlemde bir çember aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 2.13. *Taksikab düzlemde sabit bir noktadan sabit bir taksikab uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerine **taksikab çember** denir. Sabit noktaya, taksikab çemberin **merkezi**; sabit taksikab uzaklığa da taksikab çemberin **yarıçapı** denir.*

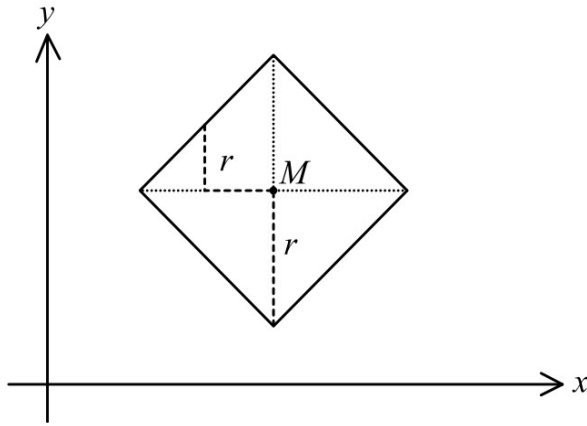
Analitik düzlemde, merkezi $M = (a, b)$ ve yarıçapı $r \geq 0$ olan taksikab çember

$$\{X \in \mathbb{R}^2 : d_T(X, M) = r\}$$

veya

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - a| + |y - b| = r\}$$

kümesidir. Kolayca görülebileceği üzere, $r = 0$ için taksikab çember M noktasından ibarettir ve $r > 0$ için taksikab çember Şekil 2.20'deki gibi köşegenleri eksenlere paralel olan bir kare belirtir (Çolakoğlu 2021b).



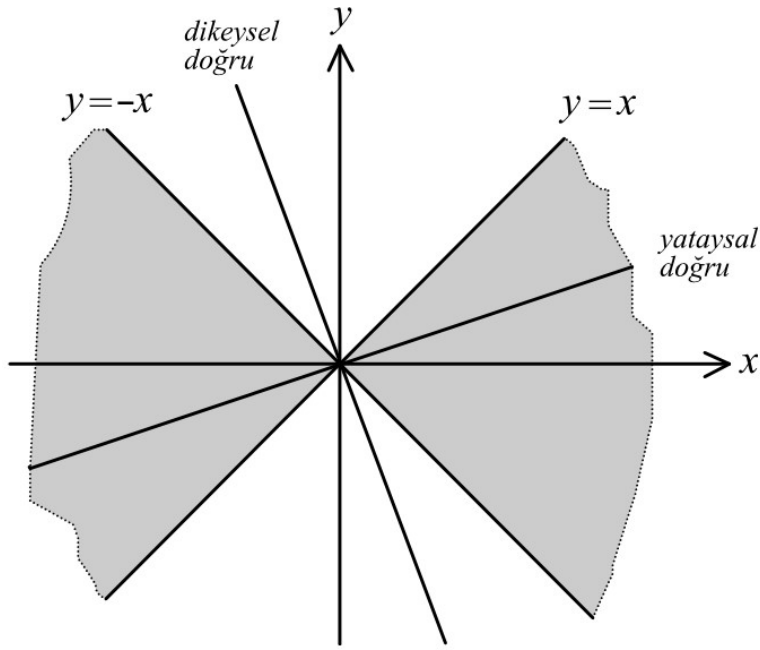
Şekil 2.20. M merkezli r yarıçaplı taksikab çemberi

Benzer şekilde, taksikab düzlemde bir noktanın bir doğruya olan taksikab uzaklık formülü de Öklid düzlemindeki formülden farklıdır. Taksikab düzlemde bir P noktasının bir l doğrusuna olan uzaklığı

$$d_T(P, l) = \min_{X \in l} \{d_T(P, X)\}$$

şeklinde tanımlanır. Başka bir ifadeyle, bu uzaklık P nin l doğrusu üzerindeki noktalara olan taksikab uzaklıklarından en küçüğüdür. Bu uzaklığı bulmak için izlenilebilecek bir prosedür, merkezi P noktası olan ve genişleyen bir taksikab çemberinin yarıçapını, bu taksikab çember doğruya değene kadar büyütmeektir. Taksikab çember doğruya değdiği anda taksikab çemberin yarıçapı P noktasının l doğrusuna olan en kısa taksikab uzaklığını verir. Açıkça, genişleyen bir taksikab çemberinin bir l doğrusuna değme noktasının sen-tetik olarak tespit edilebilmesi için doğruların tipleri belirlenmelidir. Taksikab düzlemde doğruları, tiplerine göre aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz (Çolakoğlu 2021b):

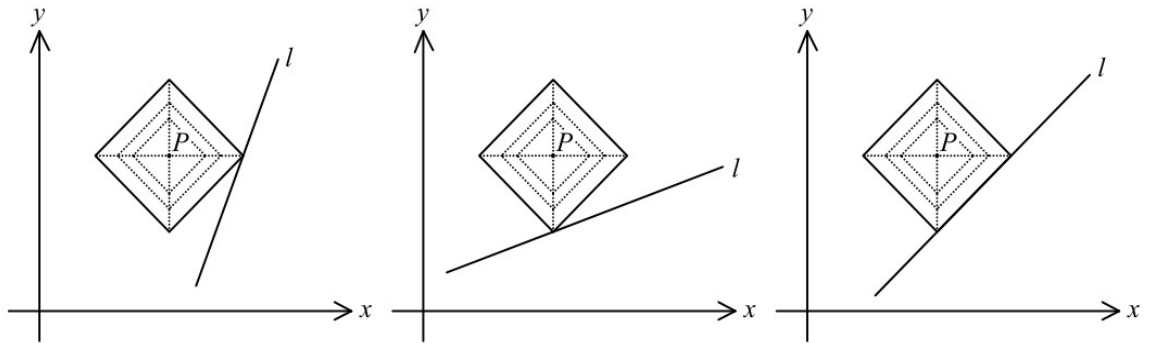
Tanım 2.14. Taksikab düzlemde $l : ax + by + c = 0$ doğrusu verilsin. l doğrusuna, $|\frac{a}{b}| < 1$ ise **yataysal doğru** ; $|\frac{a}{b}| > 1$ ise **dikeysel doğru** ; $|\frac{a}{b}| = 1$ ise **ayıraç doğru** denir (Şekil 2.21).



Şekil 2.21. Taksikab düzleminde merkezden geçen doğruların sınıflandırılması

Yukarıdaki tanımlardan doğrudan aşağıdaki sonuç elde edilir:

- i) Eğer l dikeysel bir doğru ise, P noktasının l doğrusuna olan taksikab uzaklık P den l ye x -eksenine paralel uzaklıktır.
- ii) Eğer l yataysal bir doğru ise, P noktasının l doğrusuna olan taksikab uzaklık P den l ye y -eksenine paralel uzaklıktır.
- iii) Eğer l bir ayıraç doğru ise, P noktasının l doğrusuna olan taksikab uzaklık P den l ye x -eksenine veya y -eksenine paralel uzaklıktır. (Şekil 2.22)



Şekil 2.22. Taksikab düzleminde bir P noktasının bir l doğrusuna uzaklığı

Bu düşüncelerle taksikab düzlemde bir noktanın bir doğruya olan uzaklığını aşağıdaki gibi elde edebiliriz:

Teorem 2.15. *Taksikab düzlemde bir $P = (x_0, y_0)$ noktasının $l : ax + by + c = 0$ doğrusuna olan taksikab uzaklığı*

$$d_T(P, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\max\{|a|, |b|\}}$$

dir .

İspat Tanımdan, taksikab düzlemde bir $P = (x_0, y_0)$ noktasının l doğrusuna olan uzaklığı $d_T(P, l) = \min_{X \in l} \{d_T(P, X)\}$ dir. Bununla birlikte, P merkezli bir taksikab çemberinin merkezinden geçen ve eksenlere paralel olan doğrular boyunca genişlediği dikkate alınırsa, taksikab çemberinin l doğrusuna bu doğrular üzerinde değeceği görülür. Buna göre, l doğrusuyla $x = x_0$ ve $y = y_0$ doğrularının kesişim noktaları sırasıyla Q ve R ise $\min_{X \in l} \{d_T(P, X)\} = \min\{d_T(P, Q), d_T(P, R)\}$ olur. Buna göre,

$$d_T(P, l) = \begin{cases} \min \left\{ \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{b} \right|, \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{a} \right| \right\} & , a \neq b \neq 0 \text{ ise} \\ \left| \frac{by_0 + c}{b} \right| & , a = 0 \text{ ve } b \neq 0 \text{ ise} \\ \left| \frac{ax_0 + c}{a} \right| & , b = 0 \text{ ve } a \neq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğundan

$$d_T(P, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\max\{|a|, |b|\}}$$

elde edilir (Çolakoğlu 2021b). □

Öklid düzleminde bilinen özellik ve kavramların taksikab düzlemdeki karşılıkları her zaman değişmeyebilir. Örneğin, taksikab düzlemde iki noktanın orta noktası kavramı, dolayısıyla bir noktanın bir noktaya göre simetriği kavramı Öklid düzlemindeki gibidir. Öklid düzleminde iki noktanın orta noktası kavramı aşağıdaki gibi tanımlanır:

Öklid düzleminde, P_1 ve P_2 farklı iki nokta olsun. $[P_1P_2]$ doğru parçası üzerinde ve $d_E(P_1, X) = d_E(X, P_2)$ özelliğinde olan X noktasına P_1 ve P_2 noktalarının *orta*

noktası denir. Özel olarak, $P_1 = P_2$ ise, bu noktaların orta noktası bu noktaların gösterdikleri noktanın kendisi olarak tanımlanır. Ek olarak, iki noktanın orta noktası kavramı Öklid analitik düzleminde tanımlanacak olursa şöyle de tanımlanabilir: $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ noktaları için $X = (\frac{x_1+y_1}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ noktasına P_1 ve P_2 noktaların *orta noktası* denir.

Yukarıdaki ikinci tanım doğrudan uzaklık kavramı içermediğinden, taksikab düzlemindeki karşılığı aynı kalır. Bununla birlikte, birinci tanımın taksikab karşılığı için kullanılan uzaklıklar taksikab uzaklıklarıyla değiştirilmeli ve koşul $d_T(P_1, X) = d_T(X, P_2)$ şeklinde ifade edilmelidir. Ancak bu durum da aşağıdaki teoremin bir sonucu olarak aynı kalır (Çolakoğlu 2021b).

Teorem 2.16. P_1 ve P_2 , $\mathbb{R}^2$ de dikey bir doğru üzerinde bulunmayan iki nokta, m de bu iki noktadan geçen doğrunun eğimi ise, $\rho(m) = \sqrt{1+m^2}/(1+|m|)$ olmak üzere,

$$d_E(P_1, P_2) = \rho(m)d_T(P_1, P_2)$$

dir. P_1 ve P_2 dikey bir doğru üzerinde bulunan iki nokta ise, $d_E(P_1, P_2) = d_T(P_1, P_2)$ dir (Çolakoğlu 2021b).

İspat $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$, $\mathbb{R}^2$ de iki nokta olsun. Eğer P_1 ve P_2 dikey bir doğru üzerinde değilse, $x_1 \neq x_2$ ve $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ dir. O halde, açıkça, $d_E(P_1, P_2) = |x_2 - x_1| \sqrt{1+m^2}$ ve $d_T(P_1, P_2) = |x_2 - x_1| (1+|m|)$ dir. Bu iki eşitlik taraf tarafa oranlanırsa kolayca aranan eşitlik elde edilir. Eğer P_1 ve P_2 dikey bir doğru üzerinde ise, $x_1 = x_2$ dir. Bu durumda $d_E(P_1, P_2) = |y_2 - y_1|$ ve $d_T(P_1, P_2) = |y_2 - y_1|$ olur. Böylece $d_E(P_1, P_2) = d_T(P_1, P_2)$ elde edilir. $\square$

Başka bir örnek olarak bir noktaya göre yansıma kavramını verebiliriz: Öklid düzleminde bir noktaya göre yansıma iki noktanın orta noktası kavramıyla veya koordinatlar kullanılarak tanımlanmaktadır:

Öklid düzleminde, P sabit bir nokta, X ise değişken bir nokta olsun. Eğer P noktası, X ve X' noktalarının orta noktası ise, X' noktasına X noktasının P noktasına

göre *yansıması* veya *simetriği* denir. Bununla birlikte, aynı kavram Öklid analitik düzlemi üzerinde tanımlanacak olursa şöyle de tanımlanabilir: Öklid düzleminde, sabit bir $P = (x_0, y_0)$ noktası ve değişken bir $X = (x, y)$ noktası için $X' = (2x_0 - x, 2y_0 - y)$ noktasına X noktasının P noktasına göre *yansıması* veya *simetriği* denir.

Yukarıdaki iki tanım da iki noktanın orta noktası kavramına benzer olarak taksikab düzlemde aynı kalır. Dolayısıyla, orta nokta ve bir noktaya göre simetri kavramları Öklid ve taksikab düzlemlerinde aynıdır. Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak, taksikab düzlemde Menelaus ve Ceva teoremlerinin de aynı kaldığını hemen ifade edebiliriz. Ayrıca, aynı teoremin başka bir sonucu olarak, ötelemelerin, eksenlere göre yansımaların, I. ve II. açıortay doğrularına göre yansımaların, orijine göre 0° , 90° , 180° , 270° lik dönmelerin ve bunların bileşkelerinin taksikab uzaklıkları koruduğunu ifade edebiliriz. Taksikab düzlemin tüm izometrilere bu dönüşümlerden ibarettir (Schattschneider 1984).

Öklid geometrisinde bir kavramın birden fazla tanımı olabilmekte ve bu tanımların taksikab karşılıkları bazen aynı kalırken bazen de değişiklik gösterebilmektedir. Bundan sonraki kısımlarda, koniklerin Öklid geometrisindeki temel tanımlarının karşılıkları elde edilecektir ve göreceğiz ki, Öklid düzlemindeki konik kavramının farklı tanımlarının karşılıkları farklı olabilmektedir (Çolakoğlu 2021b).

2.2.2. Koniklerin odak ve doğrultmanlı tanımının taksikab karşılığı

Öklid düzleminde bir nokta ve bir doğru yardımıyla verilen konik tanımının taksikab düzlemdeki karşılığı aşağıdaki gibi verilebilir:

Tanım 2.17. *Taksikab düzlemde sabit bir F noktası ve sabit bir d doğrusu verilsin. Negatif olmayan sabit bir e reel sayısı için, $|PF|_T = e|Pd|_T$ özelliğindeki P noktalarının geometrik yerine **nokta-doğru taksikab koniği** denir. Özel olarak, koniğe; $0 \leq e < 1$ ise **nokta-doğru taksikab elipsi**, $e = 1$ ise **nokta-doğru taksikab parabolü**, $e > 1$ ise **nokta-doğru taksikab hiperbolü** denir. Ayrıca, verilen sabit noktaya nokta-doğru taksikab koniğinin **odakı**, sabit doğruya nokta-doğru taksikab koniğinin **doğrultmanı**, sabit sayıya da nokta-doğru taksikab koniğinin **dışmerkezliği** denir. Tanımlarda **nokta-doğru** yerine **odak-doğrultman** terimi de kullanılabilir (Çolakoğlu 2021b).*

Şimdi odak-doğrultman taksikab koniklerini ayrı ayrı inceleyelim:

A) Odak-doğrultman taksikab elipsi

Odak-doğrultman taksikab elipsi, dışmerkezliği 1'den küçük olan odak-doğrultman taksikab koniğidir. Taksikab düzlemde ötelemeler taksikab uzaklıkları değiştirmedinden, odak-doğrultman taksikab elipsini belirlemek için odak noktası $F = (0, 0)$ olarak alınabilir. Bununla birlikte, taksikab düzlemin diğer izometrilere dikkate alınırsa, doğrultmanı, genel durumda $n > 0$ ve $-1 \leq m \leq 0$ olmak üzere $d : y = mx - n$ şeklinde ve dejenere durumda $x = 0$ şeklinde alarak inceleme yapmak yeterlidir. Buna göre, genel durum için aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 2.18. *Taksikab düzlemde sabit bir F noktası ve F noktasından geçmeyen sabit bir d doğrusu verilsin. Odağı F noktası ve doğrultmanı d doğrusu olan odak-doğrultman taksikab elipsi,*

- i) d doğrusu yataysal ise, köşegenlerinin biri x -eksenine diğeri y -eksenine dik, x -eksenine dik köşegeni diğer köşegeninden daha uzun olan konveks bir dörtgendir,*
- ii) d doğrusu dikeysel ise, köşegenlerinin biri x -eksenine diğeri y -eksenine dik, y -eksenine dik köşegeni diğer köşegeninden daha uzun olan konveks bir dörtgendir,*
- iii) d doğrusu ayıraç ise, kenarlarının ikisi I. ya da II. açıortay doğrusuna paralel, köşegenlerinin biri x -eksenine diğeri y -eksenine dik ve F noktasından geçip d ye dik olan doğruya göre simetrik olan konveks bir dörtgendir (Çolakoğlu 2021b).*

İspat Odağı $F = (0, 0)$ noktası ve doğrultmanı, $n > 0$ ve $-1 \leq m \leq 0$ olmak üzere, $d : y = mx - n$ olan odak-doğrultman taksikab elipsinin denklemi $0 \leq e < 1$ ve $X = (x, y)$ için

$$|XF|_T = e |Xd|_T$$

den

$$|x| + |y| = e \frac{|y - mx + n|}{\max\{|m|, |1|\}}$$

ve

$$|x| + |y| = e |y - mx + n|$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemin $e = 0$ için çözüm kümesi F noktasından ibarettir.

Denklemin $0 < e < 1$ için çözüm kümesi,

A	$y - mx + n \geq 0$	$x \geq 0$ ve $y \geq 0$	I
		$x \geq 0$ ve $y < 0$	II
		$x < 0$ ve $y \geq 0$	III
		$x < 0$ ve $y < 0$	IV
B	$y - mx + n < 0$	$x \geq 0$ ve $y \geq 0$	V
		$x \geq 0$ ve $y < 0$	VI
		$x < 0$ ve $y \geq 0$	VII
		$x < 0$ ve $y < 0$	VIII

aralıklarında incelenmelidir. Ayrıca bu durumda $-1 < em \leq 0$ ve $en > 0$ dır. Aralıkları sırasıyla inceleyelim:

A) $y - mx + n \geq 0$ olsun.

I) $x \geq 0$ ve $y \geq 0$ ise

$$x + y = e(y - mx + n)$$

ve

$$(1 + em)x + (1 - e)y = en$$

dir. Burada

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{en}{1 + em} > 0 \text{ ve } x = 0 \Rightarrow y = \frac{en}{1 - e} > 0$$

dir. O halde,

$$\text{ÇK} = \{(x, y) \in \text{I} : (1 + em)x + (1 - e)y = en\}$$

çözümü elde edilir.

II) $x \geq 0$ ve $y < 0$ ise

$$x - y = e(y - mx + n)$$

ve

$$(1 + em)x - (1 + e)y = en$$

dir. Burada

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{en}{1+em} > 0 \text{ ve } x = 0 \Rightarrow y = -\frac{en}{1+e} < 0$$

dir. O halde,

$$\text{ÇK} = \{(x, y) \in \text{II} : (1+em)x - (1+e)y = en\}$$

çözümü elde edilir.

III) $x < 0$ ve $y \geq 0$ ise

$$-x + y = e(y - mx + n)$$

ve

$$(em - 1)x + (1 - e)y = en$$

dir. Burada

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{en}{em - 1} < 0 \text{ ve } x = 0 \Rightarrow y = \frac{en}{1 - e} > 0$$

dir. O halde,

$$\text{ÇK} = \{(x, y) \in \text{III} : (em - 1)x + (1 - e)y = en\}$$

çözümü elde edilir.

IV) $x < 0$ ve $y < 0$ ise

$$-x - y = e(y - mx + n)$$

ve

$$(em - 1)x - (1 + e)y = en$$

dir. Burada

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{en}{em - 1} < 0 \text{ ve } x = 0 \Rightarrow y = -\frac{en}{1+e} < 0$$

dir. $\frac{n}{m} < x = \frac{en}{em - 1} < 0$ ve $-n < y = -\frac{en}{1+e} < 0$ olduğundan

$$\text{ÇK} = \{(x, y) \in \text{IV} : (em - 1)x - (1 + e)y = en\}$$

çözümü elde edilir.

B) $y - mx + n < 0$ olsun.

V) $x \geq 0$ ve $y \geq 0$ ise, bölge oluşmaz ve çözüm kümesi boş kümedir.

VI) $x \geq 0$ ve $y < 0$ ise

$$x - y = e(-y + mx - n)$$

ve

$$(em - 1)x + (1 - e)y = en$$

dir. Burada

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{en}{em - 1} < 0 \text{ ve } x = 0 \Rightarrow y = \frac{en}{1 - e} > 0$$

dir. O halde çözüm kümesi boş kümedir.

VII) $x < 0$ ve $y \geq 0$ ise

$$-x + y = e(-y + mx - n)$$

ve

$$(1 + em)x - (1 + e)y = en$$

dir. Burada

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{en}{1 + em} > 0 \text{ ve } x = 0 \Rightarrow y = -\frac{en}{1 + e} < 0$$

dir. O halde çözüm kümesi boş kümedir.

VIII) $x < 0$ ve $y < 0$ ise

$$-x - y = e(-y + mx - n)$$

ve

$$(1 + em)x + (1 - e)y = en$$

dir. Burada

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{en}{1 + em} > 0 \text{ ve } x = 0 \Rightarrow y = \frac{en}{1 - e} > 0$$

dir. O halde çözüm kümesi boş kümedir.

O halde, denklemin çözüm kümesi ilgili aralıklarda aşağıdaki gibi elde edilir:

	$m = -1$	$-1 < m < 0$	$m = 0$
I	$(1 - e)x + (1 - e)y = en$	$(1 + em)x + (1 - e)y = en$	$x + (1 - e)y = en$
II	$(1 - e)x - (1 + e)y = en$	$(1 + em)x - (1 + e)y = en$	$x - (1 + e)y = en$
III	$-(1 + e)x + (1 - e)y = en$	$(em - 1)x + (1 - e)y = en$	$-x + (1 - e)y = en$
IV	$-(1 + e)x - (1 + e)y = en$	$(em - 1)x - (1 + e)y = en$	$-x - (1 + e)y = en$
V	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
VI	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
VII	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
VIII	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

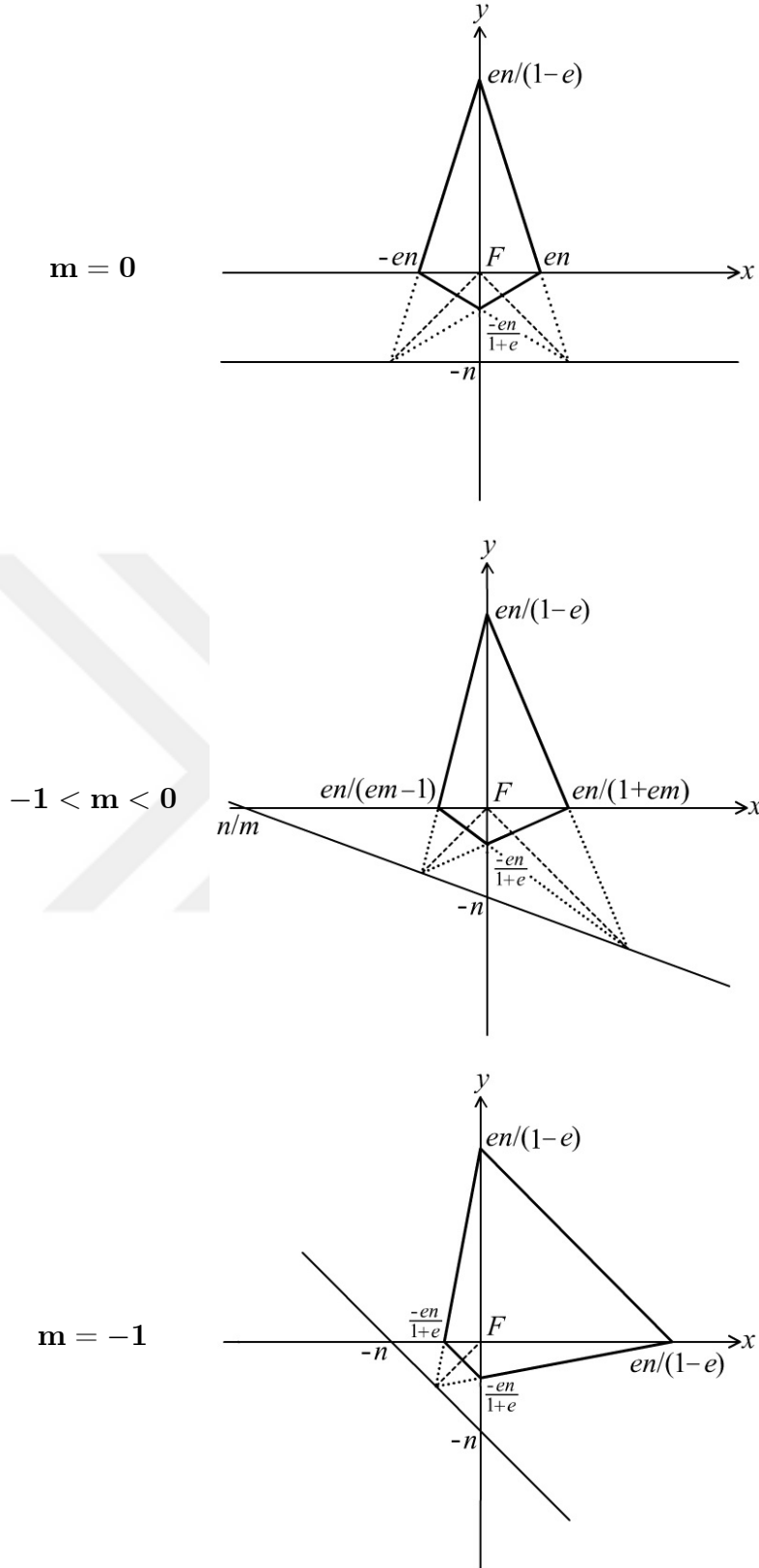
Elde edilen bu dejenere olmayan odak-doğrultman taksikab elipslerinin grafikleri Şekil 2.23'te verilmiştir. Burada;

1) $m = 0$ durumunda; I ve IV aralıklarında elde edilen doğrular doğrultman ve II. açkırtay doğrusu üzerindeki $(n, -n)$ noktasında kesişir. II ve III aralıklarında elde edilen doğrular doğrultman ve I. açkırtay doğrusu üzerindeki $(-n, -n)$ noktasında kesişir.

2) $-1 < m < 0$ durumunda; I ve IV aralıklarında elde edilen doğrular doğrultman ve II. açkırtay doğrusu üzerindeki $(\frac{n}{1+m}, -\frac{n}{1+m})$ noktasında kesişir. II ve III aralıklarında elde edilen doğrular doğrultman ve I. açkırtay doğrusu üzerindeki $(-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2})$ noktasında kesişir.

3) $m = -1$ durumunda; I ve IV aralıkları için elde edilen doğrular doğrultmana paraleldir. II ve III aralıklarında elde edilen doğrular doğrultman ve I. açkırtay doğrusu üzerindeki $(-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2})$ noktasında kesişir.

Taksikab uzaklıklıkların; ötelemeler, I. ve II. açkırtay doğrularına ve eksenlere göre yansımalar, orijine göre 90° , 180° , 270° lik dönmeler altında değışmediğı dikkate alınırsa teoremin ifadesi elde edilir. İspat tamamlanmıştır (Çolakoğlu 2021b).



Şekil 2.23. $-1 \leq m \leq 0$ için dejenere olmayan odak-doğrultman taksikab elipsleri $\square$

Dikkat edilirse, odak noktası doğrultman üzerinde değilken, doğrultman yatay, dikey ya da ayıraç olduğunda odak-doğrultman taksikab elipsi bir simetri eksenine sahip iken diğer durumlarda simetri eksen yoktur. Bununla birlikte, bu eksen varsa Öklid geometrisindeki gibi odaktan geçen ve doğrultmana dik olan doğrudur. Ek olarak, odak-doğrultman elipsinde Öklid geometrisinde olduğu gibi dejenere durum yoktur:

Teorem 2.19. *Taksikab düzlemde sabit bir F noktası ve F noktasından geçen sabit bir d doğrusu verilsin. Odağı F noktası ve doğrultmanı d doğrusu olan odak-doğrultman taksikab elipsi yoktur (Çolakoğlu 2021b).*

İspat Odağı $F = (0, 0)$ noktası ve doğrultmanı, $-1 \leq m \leq 0$ olmak üzere, $d : y = mx$ olan odak-doğrultman taksikab elipsinin denklemi $0 \leq e < 1$ ve $X = (x, y)$ için

$$|XF|_T = e |Xd|_T$$

den

$$|x| + |y| = e \frac{|y - mx|}{\max\{|m|, |1|\}}$$

ve

$$|x| + |y| = e |y - mx|$$

şeklinde elde edilir. Ancak, $|y - mx| \leq |mx| + |y| = |m| |x| + |y| < |x| + |y|$ olduğundan $\frac{|x|+|y|}{|y-mx|} = e > 0$ olur ki, $0 \leq e < 1$ için çözüm kümesi boş kümedir (Çolakoğlu 2021b). $\square$

Buna göre, odak-doğrultman taksikab elipsi tanımıyla elde edilen taksikab elips genel olarak köşegenleri birbirine dik ve eksenlere paralel olan konveks dörtgendir ve özel olarak bir nokta bir odak-doğrultman taksikab elipsinin özel durumudur. Öklid geometrisinde olduğu gibi bir taksikab çember, özel durum olarak bu tanımdan doğrudan elde edilemez. Ancak, taksikab çember Öklid geometrisinde olduğu gibi bir limit durumunda elde edilebilmektedir: Merkezi sabit F noktası ve yarıçapı r olan bir taksikab çember ve F noktasından taksikab uzaklığı $u > r$ olan, yani taksikab çemberi kesmeyen bir d doğrusu alalım. Odağı F , doğrultmanı d ve dışmerkezliği $e = \frac{r}{u}$ şeklinde tanımlanmış olan bir odak-doğrultman taksikab elipsi için doğrultman kendisine paralel bir şekilde sonsuza giderken, taksikab elips M merkezli r yarıçaplı taksikab çembere, taksikab

elipsin dışmerkezliği de 0'a gider. Başka bir ifadeyle, her taksikab çember, doğrultmanı sonsuzda olan bir odak-doğrultman taksikab elipsi gibi yorumlanabilir. O halde, bir nokta bir taksikab çemberin ve bir taksikab çember de bir odak-doğrultman taksikab elipsinin özel durumu olarak görülebilir (Çolakoğlu 2021b).

B) Odak–doğrultman taksikab parabolü

Odak-doğrultman taksikab parabolü, dışmerkezliği 1 olan odak-doğrultman taksikab koniğidir. Taksikab düzlemde ötelemeler taksikab uzaklıkları değiştirmedikinden, odak-doğrultman taksikab parabolünü belirlemek için odak noktası $F = (0, 0)$ olarak alınabilir. Bununla birlikte, taksikab düzlemin diğer izometrilere dikkate alınırsa, doğrultmanı, genel durumda $n > 0$ ve $-1 \leq m \leq 0$ olmak üzere $d : y = mx - n$ şeklinde ve dejenere durumda $y = mx$ şeklinde alarak inceleme yapmak yeterlidir. Buna göre, genel durum için aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 2.20. *Taksikab düzlemde sabit bir F noktası ve F noktasından geçmeyen sabit bir d doğrusu verilsin. Odağı F noktası ve doğrultmanı d doğrusu olan odak-doğrultman taksikab parabolü,*

- i) d doğrusu yataysal ise, uç noktaları ortak iki doğru parçası ve x -eksenine dik iki ışının birleşimi,*
- ii) d doğrusu dikeysel ise, uç noktaları ortak iki doğru parçası ve y -eksenine dik iki ışının birleşimi,*
- iii) d doğrusu ayıraç ise, uç noktaları ortak, I. ya da II. açıortay doğrusuna paralel bir doğru parçası ve biri x -eksenine diğeri y -eksenine dik iki ışının birleşimidir (Çolakoğlu 2021b).*

İspat Odağı $F = (0, 0)$ noktası ve doğrultmanı, $n > 0$ ve $-1 \leq m \leq 0$ olmak üzere, $d : y = mx - n$ olan odak-doğrultman taksikab parabolünün denklemi $X = (x, y)$ için

$$|XF|_T = |Xd|_T$$

den

$$|x| + |y| = \frac{|y - mx + n|}{\max\{|m|, |1|\}}$$

ve

$$|x| + |y| = |y - mx + n|$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemin çözüm kümesi

A	$y - mx + n \geq 0$	$x \geq 0$ ve $y \geq 0$	I
		$x \geq 0$ ve $y < 0$	II
		$x < 0$ ve $y \geq 0$	III
		$x < 0$ ve $y < 0$	IV
B	$y - mx + n < 0$	$x \geq 0$ ve $y \geq 0$	V
		$x \geq 0$ ve $y < 0$	VI
		$x < 0$ ve $y \geq 0$	VII
		$x < 0$ ve $y < 0$	VIII

aralıklarında incelenmelidir. Aralıkları sırasıyla inceleyelim:

A) $y - mx + n \geq 0$ olsun.

I) $x \geq 0$ ve $y \geq 0$ ise

$$x + y = y - mx + n$$

ve

$$(m + 1)x = n$$

dir. Buradan $-1 < m \leq 0$ için

$$\text{ÇK} = \{(x, y) \in \mathbf{I} : x = \frac{n}{m + 1}\}$$

çözümü elde edilir. Bununla birlikte, $m = -1$ için çözüm boş kümedir.

II) $x \geq 0$ ve $y < 0$ ise

$$x - y = y - mx + n$$

ve

$$(m + 1)x - 2y = n$$

dir. Buradan $-1 \leq m \leq 0$ için

$$\text{ÇK} = \{(x, y) \in \text{II} : (m+1)x - 2y = n\}$$

çözümü elde edilir. Bu durumda $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{n}{2}$ ve $y = 0 \Rightarrow x = \frac{n}{m+1}$ dir.

III) $x < 0$ ve $y \geq 0$ ise

$$-x + y = y - mx + n$$

ve

$$x = \frac{n}{m-1}$$

dir. Buradan $-1 \leq m \leq 0$ için

$$\text{ÇK} = \{(x, y) \in \text{III} : x = \frac{n}{m-1}\}$$

çözümü elde edilir.

IV) $x < 0$ ve $y < 0$ ise

$$-x - y = y - mx + n$$

ve

$$(m-1)x - 2y = n$$

dir. Buradan $-1 \leq m \leq 0$ için

$$\text{ÇK} = \{(x, y) \in \text{IV} : (m-1)x - 2y = n\}$$

çözümü elde edilir. Bu durumda $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{n}{2}$ ve $y = 0 \Rightarrow x = \frac{n}{m-1}$ dir.

B) $y - mx + n < 0$ olsun.

V) $x \geq 0$ ve $y \geq 0$ ise, $n > 0$ ve $-1 \leq m \leq 0$ için $y > mx - n$ elde edileceğinden çözüm kümesi boş kümedir.

VI) $x \geq 0$ ve $y < 0$ ise

$$x - y = -y + mx - n$$

ve

$$x = \frac{n}{m-1} < 0$$

elde edileceğinden çözüm kümesi boş kümedir.

VII) $x < 0$ ve $y \geq 0$ ise

$$-x + y = -y + mx - n$$

ve

$$(m+1)x - 2y = n > 0$$

dir. Ancak, $-1 \leq m \leq 0$, $x < 0$ ve $y \geq 0$ için $(m+1)x - 2y < 0$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

VIII) $x < 0$ ve $y < 0$ ise

$$-x - y = -y + mx - n$$

ve

$$(m+1)x = n$$

dir. Ancak, $n > 0$ ve $-1 < m \leq 0$ için $x = \frac{n}{m+1} > 0$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir. Bununla birlikte, $m = -1$ ise çözüm kümesi boş kümedir.

O halde, denklemin çözüm kümesi ilgili aralıklarda aşağıdaki gibi elde edilir:

	$m = -1$	$-1 < m < 0$	$m = 0$
I	$\emptyset$	$x = \frac{n}{m+1}$	$x = n$
II	$y = -\frac{n}{2}$	$(m+1)x - 2y = n$	$x - 2y = n$
III	$x = -\frac{n}{2}$	$x = \frac{n}{m-1}$	$x = -n$
IV	$x + y = -\frac{n}{2}$	$(m-1)x - 2y = n$	$-x - 2y = n$
V	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
VI	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
VII	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
VIII	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

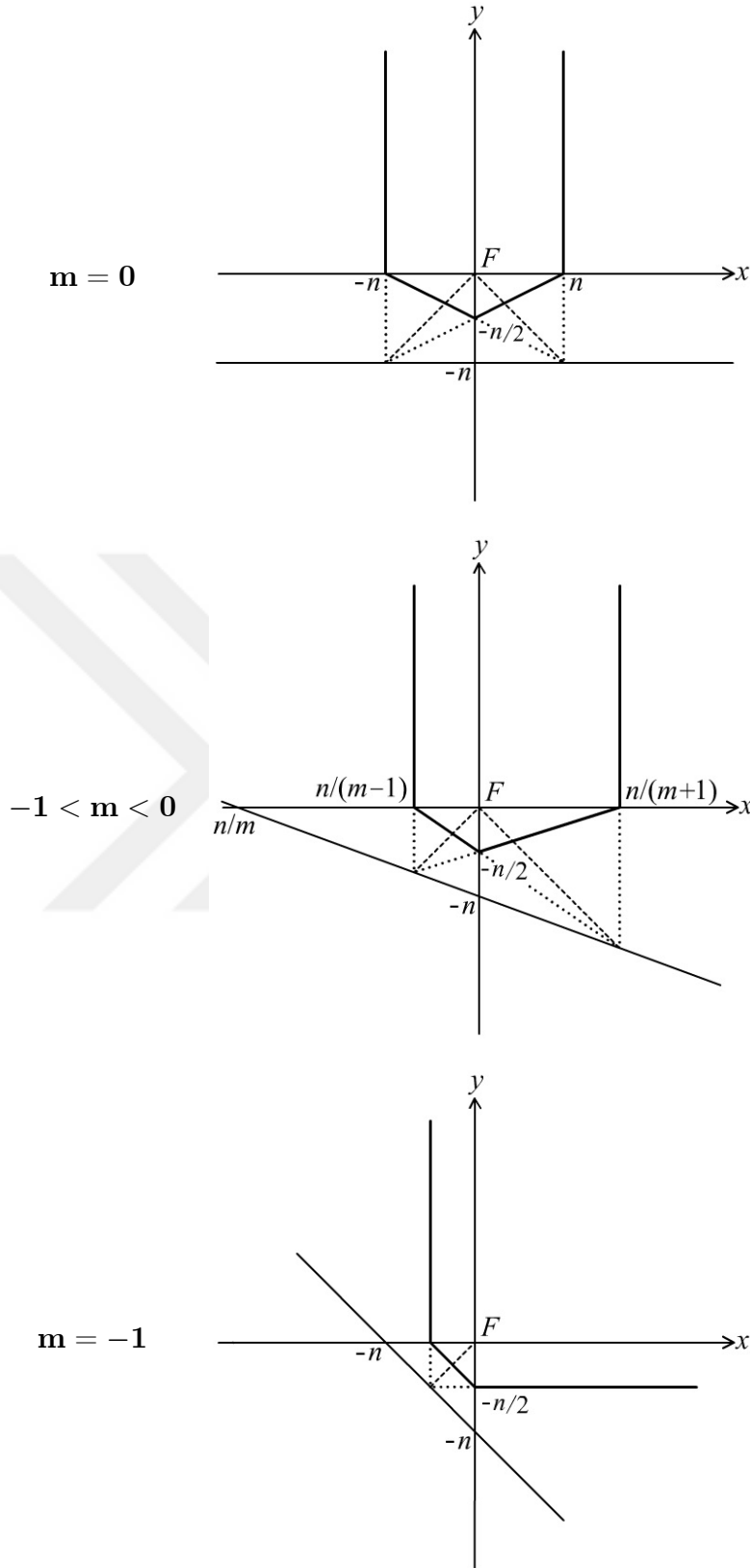
Elde edilen bu dejenere olmayan odak-doğrultman taksikab parabollerinin grafikleri Şekil 2.24'te verilmiştir. Burada;

1) $m = 0$ durumunda $x = n$ doğrusu ve $-x - 2y = n$ doğrusu doğrultman ve II. açkırtay doğrusu üzerindeki $(n, -n)$ noktasında, $x = -n$ doğrusu ve $x - 2y = n$ doğrusu ise doğrultman ve I. açkırtay doğrusu üzerindeki $(-n, -n)$ noktasında kesişir.

2) $-1 < m < 0$ durumunda $x = \frac{n}{m+1}$ doğrusu ve $(m - 1)x - 2y = n$ doğrusu doğrultman ve II. açkırtay doğrusu üzerindeki $(\frac{n}{m+1}, -\frac{n}{m+1})$ noktasında, $x = \frac{n}{m-1}$ doğrusu ve $(m + 1)x - 2y = n$ doğrusu ise doğrultman ve I. açkırtay doğrusu üzerindeki $(\frac{n}{m-1}, \frac{n}{m-1})$ noktasında kesişir.

3) $m = -1$ durumunda $x = -\frac{n}{2}$ ve $y = -\frac{n}{2}$ doğrusu doğrultman ve I. açkırtay doğrusu üzerindeki $(-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2})$ noktasında kesişir.

Taksikab uzaklıklıkların; ötelemeler, I. ve II. açkırtay doğrularına ve eksenlere göre yansımalar, orijine göre 90° , 180° , 270° lik dönmeler altında değışmediğı dikkate alınırsa teoremin ifadesi elde edilir. İspat tamamlanmıştır (Çolakoğlu 2021b).



Şekil 2.24. $-1 \leq m \leq 0$ için dejenere olmayan odak-doğrultman taksikab parabolleri $\square$

Dikkat edilirse, odak noktası doğrultman üzerinde değilken, doğrultman yatay, dikey ya da ayıraç olduğunda odak-doğrultman taksikab parabolü bir simetri eksenine sahip iken diğer durumlarda simetri eksen yoktur. Bununla birlikte, bu eksen odaktan geçen ve doğrultmana dik olan doğrudur. Şimdi dejenere durumu da inceleyelim:

Teorem 2.21. *Taksikab düzlemde sabit bir F noktası ve F noktasından geçen sabit bir d doğrusu verilsin. Odağı F noktası ve doğrultmanı d doğrusu olan odak-doğrultman taksikab parabolü,*

- i) d doğrusu yataysal ise, F noktasından geçen ve x -eksenine dik olan doğru,*
- ii) d doğrusu dikeysel ise, F noktasından geçen ve y -eksenine dik olan doğru,*
- iii) d doğrusu ayıraç ise, F noktasından geçen ve eksenlere dik olan doğruların oluşturduğu dört bölgeden, ayıraç doğruyu içermeyen karşılıklı iki bölgenin birleşimidir (Çolakoğlu 2021b).*

İspat Odağı $F = (0, 0)$ noktası ve doğrultmanı, $-1 \leq m \leq 0$ olmak üzere, $d : y = mx$ olan nokta-doğru taksikab parabolünün denklemi $X = (x, y)$ için

$$|XF|_T = |Xd|_T$$

den

$$|x| + |y| = \frac{|y - mx|}{\max\{|m|, |1|\}}$$

ve

$$|x| + |y| = |y - mx|$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemin çözüm kümesi

A	$y - mx \geq 0$	$x \geq 0$ ve $y \geq 0$	I
		$x \geq 0$ ve $y < 0$	II
		$x < 0$ ve $y \geq 0$	III
		$x < 0$ ve $y < 0$	IV
B	$y - mx < 0$	$x \geq 0$ ve $y \geq 0$	V
		$x \geq 0$ ve $y < 0$	VI
		$x < 0$ ve $y \geq 0$	VII
		$x < 0$ ve $y < 0$	VIII

aralıklarında incelenmelidir. Aralıkları sırasıyla inceleyelim:

A) $y - mx \geq 0$ olsun.

I) $x \geq 0$ ve $y \geq 0$ ise

$$x + y = y - mx$$

ve

$$(m + 1)x = 0$$

dir. Buradan $-1 < m \leq 0$ için

$$\text{ÇK} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ ve } y \geq 0\}$$

çözümü elde edilir. Bu küme bir ışın belirtir. Ancak $m = -1$ için

$$\text{ÇK} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ ve } y \geq 0\}$$

çözümdür.

II) $x \geq 0$ ve $y < 0$ ise

$$x - y = y - mx$$

ve

$$(m + 1)x - 2y = 0$$

dir. Ancak, $-1 \leq m \leq 0$, $x \geq 0$ ve $y < 0$ için $(m + 1)x - 2y > 0$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

III) $x < 0$ ve $y \geq 0$ ise

$$-x + y = y - mx$$

ve

$$x = 0$$

dir. Ancak $x < 0$ olmadığından çözüm kümesi boş kümedir.

IV) $x < 0$ ve $y < 0$ için bölge oluşmaz. Çözüm kümesi boş kümedir.

B) $y - mx < 0$ olsun.

V) $x \geq 0$ ve $y \geq 0$ için bölge oluşmaz. Çözüm kümesi boş kümedir.

VI) $x \geq 0$ ve $y < 0$ ise

$$x - y = -y + mx$$

ve

$$x = 0$$

dir. $-1 \leq m \leq 0$ için çözüm kümesi

$$\text{ÇK} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ ve } y < 0\}$$

olur. Bu küme bir yarıdoğru belirtir.

VII) $x < 0$ ve $y \geq 0$ ise

$$-x + y = -y + mx$$

ve

$$(m + 1)x - 2y = 0$$

dir. $-1 < m \leq 0$, $x < 0$ ve $y \geq 0$ için $(m + 1)x - 2y > 0$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir. Ancak, $m = -1$ için $y = 0$ dir ve

$$\text{ÇK} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \text{ ve } y = 0\}$$

çözümdür. Bu küme bir yarıdoğru belirtir.

VIII) $x < 0$ ve $y < 0$ ise

$$-x - y = -y + mx$$

ve

$$(m + 1)x = 0$$

dir. Buradan $-1 < m \leq 0$ için $x = 0$ elde edilir. Ancak, $x < 0$ olmadığından çözüm kümesi boş kümedir. Bununla birlikte, $m = -1$ için

$$\text{ÇK} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \text{ ve } y < 0\}$$

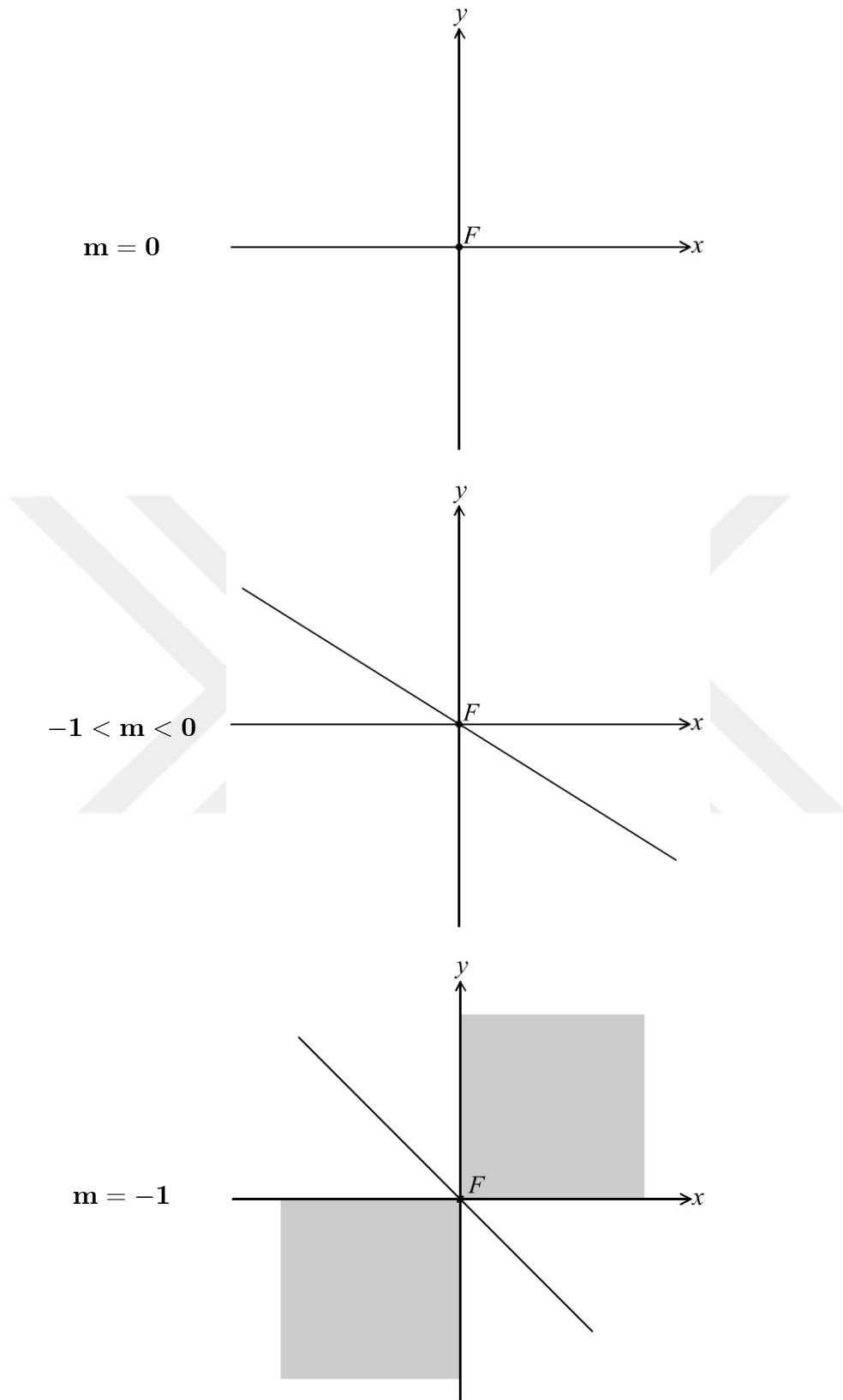
çözümdür.

O halde, çözüm kümesi aşağıdaki gibi elde edilir:

	$m = -1$	$-1 < m < 0$	$m = 0$
I	$\{x \geq 0 \text{ ve } y \geq 0\}$	$\{x = 0 \text{ ve } y \geq 0\}$	$\{x = 0 \text{ ve } y \geq 0\}$
II	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
III	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
IV	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
V	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
VI	$\{x = 0 \text{ ve } y < 0\}$	$\{x = 0 \text{ ve } y < 0\}$	$\{x = 0 \text{ ve } y < 0\}$
VII	$\{x < 0 \text{ ve } y = 0\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
VIII	$\{x < 0 \text{ ve } y < 0\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

Elde edilen bu dejenere odak-doğrultman taksikab parabollerinin grafikleri Şekil 2.25'te verilmiştir.

Taksikab uzaklıklıkların; ötelemeler, I. ve II. açıortay doğrularına ve eksenlere göre yansımalar, orijine göre 90° , 180° , 270° lik dönmeler altında değişmediği dikkate alınırsa teoremin ifadesi elde edilir. İspat tamamlanmıştır (Çolakoğlu 2021b).



Şekil 2.25. $-1 \leq m \leq 0$ için dejenere odak-doğrultman taksikab parabollemi

□

C) Odak–Doğrultman Taksikab Hiperbolü

Odak-doğrultman taksikab hiperbolü, dışmerkezliği 1'den büyük olan odak-doğrultman taksikab koniğidir. Taksikab düzlemde ötelemeler taksikab uzaklıkları değiştirmedinden, odak-doğrultman taksikab hiperbolünü belirlemek için odak noktası $F = (0, 0)$ olarak alınabilir. Bununla birlikte, taksikab düzlemin diğer izometrilere dikkate alınırsa, doğrultmanı, genel durumda $n > 0$ ve $-1 \leq m \leq 0$ olmak üzere $d : y = mx - n$ şeklinde ve dejenere durumda $y = mx$ şeklinde alarak inceleme yapmak yeterlidir. Buna göre, genel durum için aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 2.22. *Taksikab düzlemde sabit bir F noktası ve F noktasından geçmeyen m eğimli sabit bir d doğrusu verilsin. Odağı F noktası, doğrultmanı d doğrusu ve dışmerkezliği e olan odak-doğrultman taksikab hiperbolü iki kanatlıdır; ek olarak*

- i) " d doğrusu yataysal ve $|em| < 1$ " veya " d doğrusu dikeysel ve $|e/m| < 1$ " ise, bir kanadı iki ışının birleşimi, diğer kanadı iki ışın ile iki doğru parçasının birleşimidir,*
- ii) " d doğrusu yataysal ve $|em| = 1$ " veya " d doğrusu dikeysel ve $|e/m| = 1$ " ise, bir kanadı iki ışının birleşimi, diğer kanadı iki ışın ile bir doğru parçasının birleşimidir,*
- iii) " d doğrusu yataysal ve $|em| > 1$ " veya " d doğrusu dikeysel ve $|e/m| > 1$ " veya " d doğrusu ayıraç" ise, iki kanadı da iki ışın ve bir doğru parçasının birleşimidir, özel olarak d doğrusu ayıraç ise, doğru parçalarının ikisi birden I. ya da II. açıortay doğrularından birine paraleldir (Çolakoğlu 2021b).*

İspat Odağı $F = (0, 0)$ noktası ve doğrultmanı, $n > 0$ ve $-1 \leq m \leq 0$ olmak üzere, $d : y = mx - n$ olan odak-doğrultman taksikab elipsinin denklemi $e > 1$ ve $X = (x, y)$ için

$$|XF|_T = e |Xd|_T$$

den

$$|x| + |y| = e \frac{|y - mx + n|}{\max\{|m|, |1|\}}$$

ve

$$|x| + |y| = e |y - mx + n|$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemin çözüm kümesi,

A	$y - mx + n \geq 0$	$x \geq 0$ ve $y \geq 0$	I
		$x \geq 0$ ve $y < 0$	II
		$x < 0$ ve $y \geq 0$	III
		$x < 0$ ve $y < 0$	IV
B	$y - mx + n < 0$	$x \geq 0$ ve $y \geq 0$	V
		$x \geq 0$ ve $y < 0$	VI
		$x < 0$ ve $y \geq 0$	VII
		$x < 0$ ve $y < 0$	VIII

aralıklarında incelenmelidir. Ayrıca bu durumda $-e \leq em \leq 0$ ve $en > 0$ dır. Aralıkları sırasıyla inceleyelim:

A) $y - mx + n \geq 0$ olsun.

I) $x \geq 0$ ve $y \geq 0$ ise

$$x + y = e(y - mx + n)$$

ve

$$(1 + em)x + (1 - e)y = en$$

dir. Burada

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{en}{1 + em} \text{ ve } x = 0 \Rightarrow y = \frac{en}{1 - e} < 0$$

dir.

i) Eğer $em < -1$ ise, $x = \frac{en}{1 + em} < 0$ olur ve çözüm boş kümedir.

ii) Eğer $em = -1$ ise, doğru x -eksenini kesmez ve çözüm boş kümedir.

iii) Eğer $em > -1$ ise, $x = \frac{en}{1 + em} > 0$ olur ve

$$\text{ÇK} = \{(x, y) \in \mathbf{I} : (1 + em)x + (1 - e)y = en\}$$

çözümü elde edilir. Çözüm kümesi bir ışın belirtir.

II) $x \geq 0$ ve $y < 0$ ise

$$x - y = e(y - mx + n)$$

ve

$$(1 + em)x - (1 + e)y = en$$

dir. Burada

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{en}{1 + em} \text{ ve } x = 0 \Rightarrow -n < y = -\frac{en}{1 + e} < 0$$

dir.

i) Eğer $em < -1$ ise, $x = \frac{en}{1 + em} < \frac{n}{m} < 0$ olur ve

$$\text{ÇK} = \{(x, y) \in \text{II} : (1 + em)x - (1 + e)y = en\}$$

çözümü elde edilir. Çözüm kümesi bir yarıdoğru belirtir.

ii) Eğer $em = -1$ ise, doğru x -eksenini kesmez ve $y = -\frac{en}{1 + e} < 0$ sağlandığından

$$\text{ÇK} = \{(x, y) \in \text{II} : y = -\frac{en}{1 + e}\}$$

çözümü elde edilir.

iii) Eğer $em > -1$ ise, $x = \frac{en}{1 + em} > 0$ olur ve

$$\text{ÇK} = \{(x, y) \in \text{II} : (1 + em)x - (1 + e)y = en\}$$

çözümü elde edilir. Çözüm kümesi yarıaçık bir doğru parçası belirtir.

III) $x < 0$ ve $y \geq 0$ ise

$$-x + y = e(y - mx + n)$$

ve

$$(em - 1)x + (1 - e)y = en$$

dir. Burada $em < 0$ olduğundan

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{en}{em - 1} < \frac{n}{m} \text{ ve } x = 0 \Rightarrow y = \frac{en}{1 - e} < -n < 0$$

dir ve

$$\text{ÇK} = \{(x, y) \in \text{III} : (em - 1)x + (1 - e)y = en\}$$

çözümü elde edilir. Çözüm kümesi bir ışın belirtir.

IV) $x < 0$ ve $y < 0$ ise

$$-x - y = e(y - mx + n)$$

ve

$$(em - 1)x - (1 + e)y = en$$

dir. Burada $em < 0$ olduğundan

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{en}{em - 1} \text{ ve } x = 0 \Rightarrow y = -\frac{en}{1 + e}$$

dir. $\frac{n}{m} < x = \frac{en}{em - 1} < 0$ ve $-n < y = -\frac{en}{1 + e} < 0$ olduğundan

$$\text{ÇK} = \{(x, y) \in \mathbf{IV} : (em - 1)x - (1 + e)y = en\}$$

çözümü elde edilir. Çözüm kümesi yarıaçık bir doğru parçası belirtir.

B) $y - mx + n < 0$ olsun.

V) $x \geq 0$ ve $y \geq 0$ ise, bölge oluşmaz ve çözüm kümesi boş kümedir.

VI) $x \geq 0$ ve $y < 0$ ise

$$x - y = e(-y + mx - n)$$

ve

$$(em - 1)x + (1 - e)y = en$$

dir. Burada $em < 0$ olduğundan

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{en}{em - 1} < 0 \text{ ve } x = 0 \Rightarrow y = \frac{en}{1 - e} < 0$$

dir. $\frac{n}{m} < x = \frac{en}{em - 1}$ ve $\frac{en}{1 - e} < -n$ olduğundan

$$\text{ÇK} = \{(x, y) \in \mathbf{VI} : (em - 1)x + (1 - e)y = en\}$$

çözümü elde edilir. Çözüm kümesi bir ışın belirtir.

VII) $x < 0$ ve $y \geq 0$ ise

$$-x + y = e(-y + mx - n)$$

ve

$$(1 + em)x - (1 + e)y = en$$

dir. Burada

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{en}{1 + em} \text{ ve } x = 0 \Rightarrow y = -\frac{en}{1 + e} < 0$$

dir.

i) Eğer $em < -1$ ise, $x = \frac{en}{1 + em} < \frac{n}{m}$ olur ve

$$\text{ÇK} = \{(x, y) \in \text{VII} : (1 + em)x - (1 + e)y = en\}$$

çözümü elde edilir. Çözüm kümesi bir ışın belirtir.

ii) Eğer $em = -1$ ise, doğru x -eksenini kesmez ve $y = -\frac{en}{1 + e} < 0$ sağlandığından çözüm kümesi boş kümedir.

iii) Eğer $em > -1$ ise, $x = \frac{en}{1 + em} > 0$ sağlandığından çözüm kümesi boş kümedir.

VIII) $x < 0$ ve $y < 0$ ise

$$-x - y = e(-y + mx - n)$$

ve

$$(1 + em)x + (1 - e)y = en$$

dir. Burada

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{en}{1 + em} \text{ ve } x = 0 \Rightarrow y = \frac{en}{1 - e} < 0$$

dir.

i) Eğer $em < -1$ ise, $x = \frac{en}{1 + em} < \frac{n}{m}$ olur ve

$$\text{ÇK} = \{(x, y) \in \text{VIII} : (1 + em)x + (1 - e)y = en\}$$

çözümü elde edilir. Çözüm kümesi yarıaçık bir doğru parçası belirtir.

ii) Eğer $em = -1$ ise, doğru x -eksenini kesmez ve $y = -\frac{en}{1 + e} < 0$ sağlandığından

$$\text{ÇK} = \{(x, y) \in \text{VIII} : y = -\frac{en}{1 - e}\}$$

çözümü elde edilir. Çözüm kümesi x -eksenine paralel bir yarıdoğru belirtir.

iii) Eğer $em > -1$ ise, $x = \frac{en}{1+em} > 0$ olur ve

$$\text{ÇK} = \{(x, y) \in \text{VIII} : (1+em)x + (1-e)y = en\}$$

çözümü elde edilir. Çözüm kümesi bir yarıdoğru belirtir.

O halde, denklemin çözüm kümesi ilgili aralıklarda aşağıdaki gibi elde edilir:

	$-1 < m < 0, em < -1$	$-1 < m < 0, em = -1$	$-1 < m < 0, em > -1$
I	$\emptyset$	$\emptyset$	$(1+em)x + (1-e)y = en$
II	$(1+em)x - (1+e)y = en$	$y = -\frac{en}{1+e}$	$(1+em)x - (1+e)y = en$
III	$(em-1)x + (1-e)y = en$	$(em-1)x + (1-e)y = en$	$(em-1)x + (1-e)y = en$
IV	$(em-1)x - (1+e)y = en$	$(em-1)x - (1+e)y = en$	$(em-1)x - (1+e)y = en$
V	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
VI	$(em-1)x + (1-e)y = en$	$(em-1)x + (1-e)y = en$	$(em-1)x + (1-e)y = en$
VII	$(1+em)x - (1+e)y = en$	$\emptyset$	$\emptyset$
VIII	$(1+em)x + (1-e)y = en$	$y = -\frac{en}{1-e}$	$(1+em)x + (1-e)y = en$

	$m = -1 (em < -1)$	$m = 0 (em = 0 > -1)$
I	$\emptyset$	$x + (1-e)y = en$
II	$(1-e)x - (1+e)y = en$	$x - (1+e)y = en$
III	$-(e+1)x + (1-e)y = en$	$-x + (1-e)y = en$
IV	$-(e+1)x - (1+e)y = en$	$-x - (1+e)y = en$
V	$\emptyset$	$\emptyset$
VI	$-(e+1)x + (1-e)y = en$	$-x + (1-e)y = en$
VII	$(1-e)x - (1+e)y = en$	$\emptyset$
VIII	$(1-e)x + (1-e)y = en$	$x + (1-e)y = en$

Elde edilen bu dejenere olmayan odak-doğrultman taksikab parabollerinin grafikleri Şekil 2.26'da verilmiştir. Burada;

1) $m = 0$ durumunda; I, IV ve VIII aralıklarında elde edilen doğrular doğrultman ve

II. açkırtay doğruşu üzerindeki $(n, -n)$ noktasında keşir. II, III ve VI aralıklarında elde edilen doğruşlar doğruşlman ve I. açkırtay doğruşu üzerindeki $(-n, -n)$ noktasında keşir.

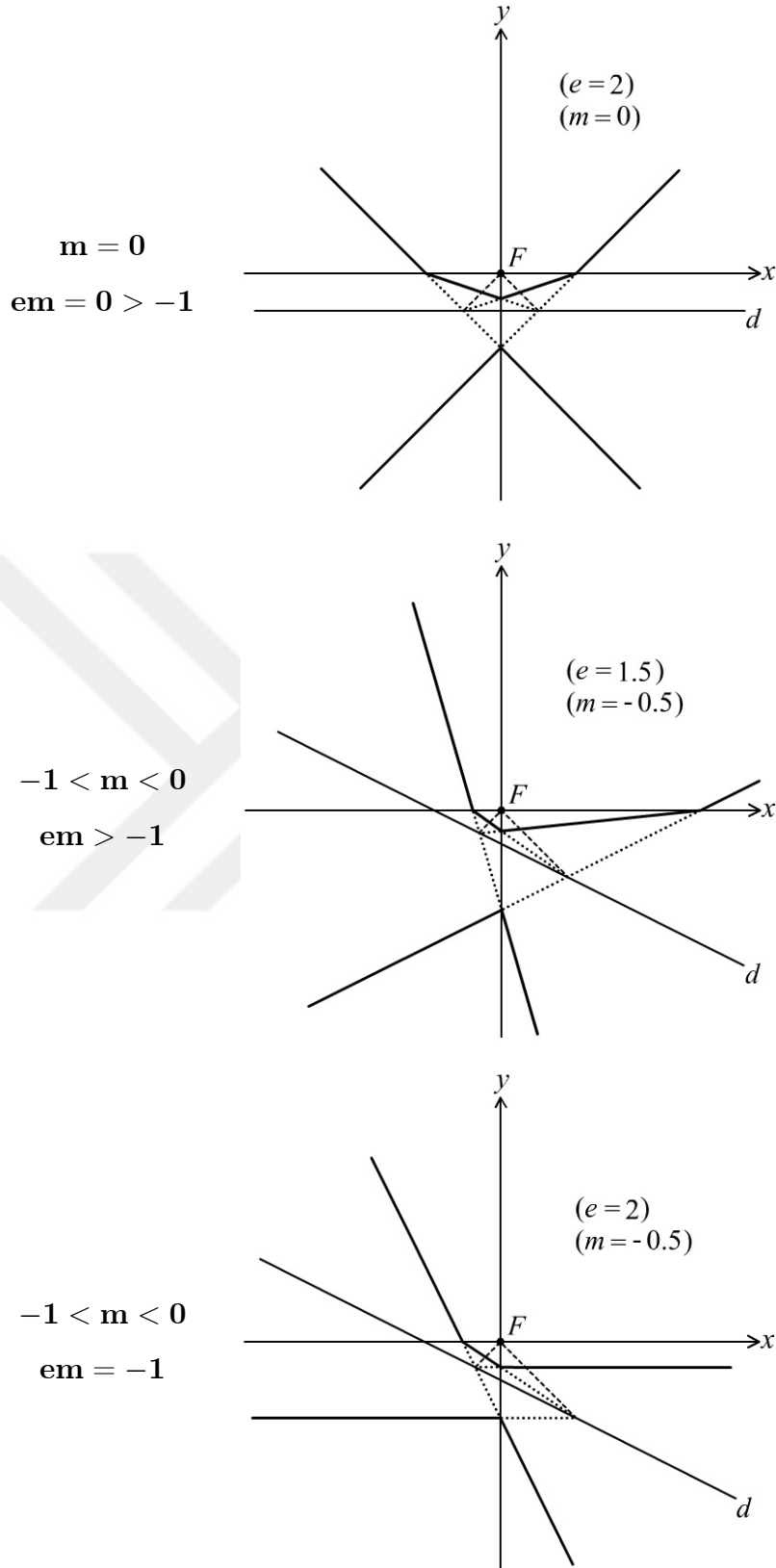
2) $-1 < m < 0$ ve $em > -1$ durumunda; I, IV ve VIII aralıklarında elde edilen doğruşlar doğruşlman ve II. açkırtay doğruşu üzerindeki $(\frac{n}{1+m}, -\frac{n}{1+m})$ noktasında keşir. II, III ve VI aralıklarında elde edilen doğruşlar doğruşlman ve I. açkırtay doğruşu üzerindeki $(\frac{n}{m-1}, \frac{n}{m-1})$ noktasında keşir.

3) $-1 < m < 0$ ve $em = -1$ durumunda; II, III ve VI aralıklarında elde edilen doğruşlar doğruşlman ve I. açkırtay doğruşu üzerindeki $(\frac{n}{m-1}, \frac{n}{m-1})$ noktasında keşir. IV ve VIII aralıklarında elde edilen doğruşlar doğruşlman ve II. açkırtay doğruşu üzerindeki $(\frac{n}{1+m}, -\frac{n}{1+m})$ noktasında keşir.

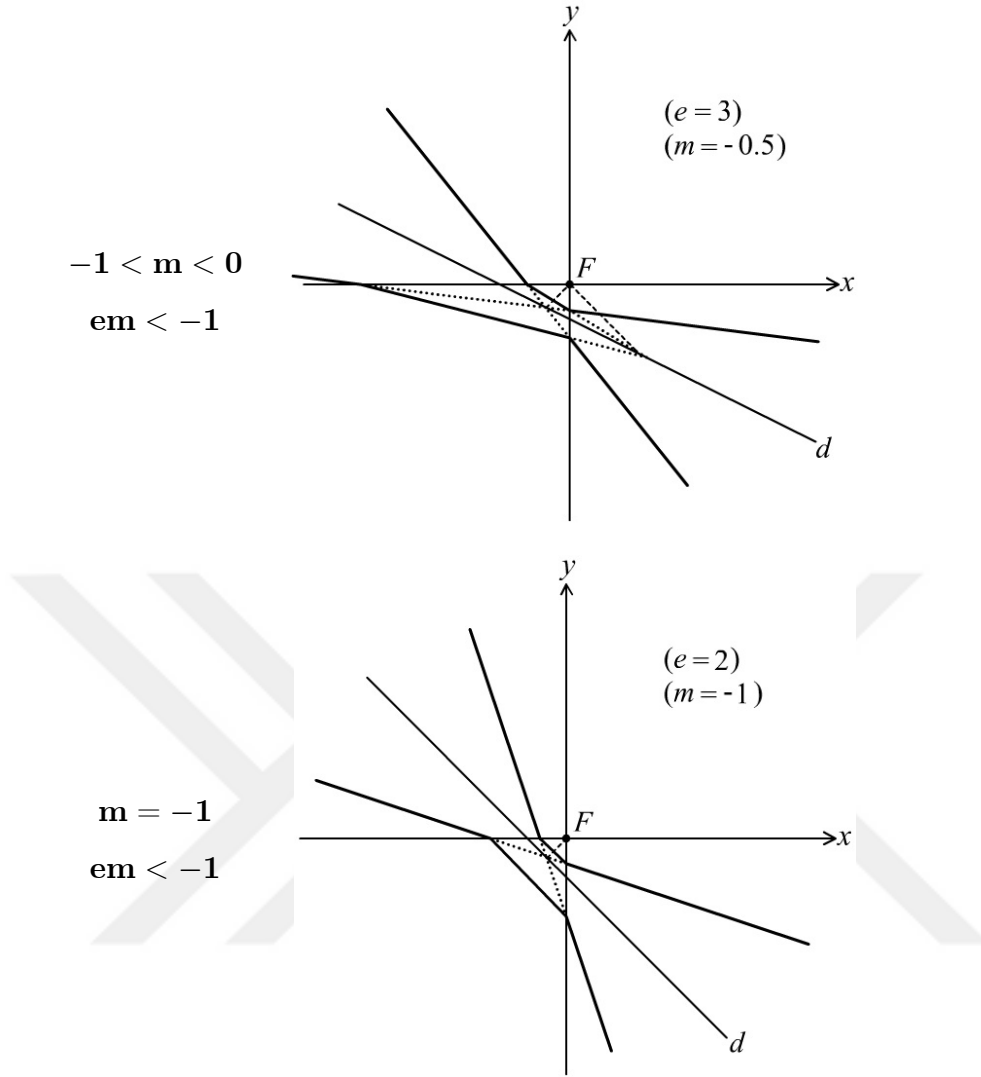
4) $-1 < m < 0$ ve $em < -1$ durumunda; II, III, V ve VI aralıklarında elde edilen doğruşlar doğruşlman ve I. açkırtay doğruşu üzerindeki $(\frac{n}{m-1}, \frac{n}{m-1})$ noktasında keşir. IV ve VIII aralıklarında elde edilen doğruşlar doğruşlman ve II. açkırtay doğruşu üzerindeki $(\frac{n}{1+m}, -\frac{n}{1+m})$ noktasında keşir.

5) $m = -1$ durumunda; II, III, V ve VI aralıklarında elde edilen doğruşlar doğruşlman ve I. açkırtay doğruşu üzerindeki $(\frac{n}{m-1}, \frac{n}{m-1})$ noktasında keşir. IV ve VIII aralıklarında elde edilen doğruşlar doğruşlman ve II. açkırtay doğruşuna paraleldir.

Taksikab uzaklıklıkların; ötelemeler, I. ve II. açkırtay doğruşlarına ve eksenlere göre yansımalar, orijine göre 90° , 180° , 270° lik dönmeler altında değışmediğı dikkate alınırsa teoremin ifadesi elde edilir. İspat tamamlanmıştır (Çolakoğlu 2021b).



Şekil 2.26. $-1 \leq m \leq 0$ için dejenere olmayan odak-doğrultman taksikab hiperbolleri



Şekil 2.26'nın devamı

□

Dikkat edilirse, odak noktası doğrultman üzerinde değilken, doğrultman yatay, dikey ya da ayıraç olduğunda odak-doğrultman taksikab elipsi bir simetri eksenine sahip iken diğer durumlarda simetri eksen yoktur. Bununla birlikte, bu eksen varsa Öklid geometrisindeki gibi odaktan geçen ve doğrultmana dik olan doğrudur. Şimdi dejenere durumu da inceleyelim:

Teorem 2.23. *Taksikab düzlemde sabit bir F noktası ve F noktasından geçen sabit bir d doğrusu verilsin. Odağı F noktası ve doğrultmanı d doğrusu olan odak-doğrultman taksikab hiperbolü kesişen iki doğrudur (Çolakoğlu 2021b).*

İspat Odağı $F = (0, 0)$ noktası ve doğrultmanı, $-1 \leq m \leq 0$ olmak üzere,
 $d : y = mx$ olan odak-doğrultman taksikab hiperbolünün denklemi $e > 1$ ve $X = (x, y)$

için

$$|XF|_T = e |Xd|_T$$

den

$$|x| + |y| = e \frac{|y - mx|}{\max\{|m|, |1|\}}$$

ve

$$|x| + |y| = e |y - mx|$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemin çözüm kümesi,

A	$y - mx \geq 0$	$x \geq 0$ ve $y \geq 0$	I
		$x \geq 0$ ve $y < 0$	II
		$x < 0$ ve $y \geq 0$	III
		$x < 0$ ve $y < 0$	IV
B	$y - mx < 0$	$x \geq 0$ ve $y \geq 0$	V
		$x \geq 0$ ve $y < 0$	VI
		$x < 0$ ve $y \geq 0$	VII
		$x < 0$ ve $y < 0$	VIII

aralıklarında incelenmelidir. Ayrıca bu durumda $-e \leq em \leq 0$ dır. Aralıkları sırasıyla inceleyelim:

A) $y - mx \geq 0$ olsun.

I) $x \geq 0$ ve $y \geq 0$ ise

$$x + y = e(y - mx)$$

ve

$$(1 + em)x + (1 - e)y = 0$$

dir. Çözümün var olabilmesi için bu doğrunun eğiminin $[0, \infty)$ aralığında olması gerekir.

i) Eğer $em < -1$ ise, $\frac{1 + em}{e - 1} < 0$ olur ve çözüm boş kümedir.

ii) Eğer $em = -1$ ise, $\frac{1 + em}{e - 1} = 0$ olur ve

$$\text{ÇK} = \{(x, y) \in \mathbf{I} : y = 0\}$$

çözümü elde edilir. Çözüm kümesi bir ışın belirtir.

iii) Eğer $em > -1$ ise, $\frac{1+em}{e-1} > 0$ olur ve

$$\text{ÇK} = \{(x, y) \in \mathbf{I} : (1+em)x + (1-e)y = 0\}$$

çözümü elde edilir. Çözüm kümesi bir ışın belirtir.

II) $x \geq 0$ ve $y < 0$ ise

$$x - y = e(y - mx)$$

ve

$$(1+em)x - (1+e)y = 0$$

dir. Çözümün var olabilmesi için bu doğrunun eğiminin $[m, 0)$ aralığında olması gerekir.

i) Eğer $em < -1$ ise, $m < \frac{1+em}{1+e} < 0$ olur ve

$$\text{ÇK} = \{(x, y) \in \mathbf{II} : (1+em)x - (1+e)y = 0\}$$

çözümü elde edilir. Çözüm kümesi bir yarıdoğru belirtir.

ii) Eğer $em = -1$ ise, $\frac{1+em}{1+e} = 0$ olur ve çözüm boş kümedir.

iii) Eğer $em > -1$ ise, $\frac{1+em}{1+e} > 0$ olur ve çözüm boş kümedir.

III) $x < 0$ ve $y \geq 0$ ise

$$-x + y = e(y - mx)$$

ve

$$(em-1)x + (1-e)y = 0$$

dir. Çözümün var olabilmesi için bu doğrunun eğiminin m 'den küçük olması gerekir.

$-1 \leq m \leq 0$ ve $e > 1$ için $\frac{1-em}{1-e} < m$ olduğundan

$$\text{ÇK} = \{(x, y) \in \mathbf{III} : (em-1)x + (1-e)y = 0\}$$

çözümü elde edilir. Çözüm kümesi bir yarıdoğru belirtir.

IV) $x < 0$ ve $y < 0$ ise, bölge oluşmaz ve çözüm kümesi boş kümedir.

B) $y - mx < 0$ olsun.

V) $x \geq 0$ ve $y \geq 0$ ise, bölge oluşmaz ve çözüm kümesi boş kümedir.

VI) $x \geq 0$ ve $y < 0$ ise

$$x - y = e(-y + mx)$$

ve

$$(em - 1)x + (1 - e)y = 0$$

dir. Çözümün var olabilmesi için bu doğrunun eğiminin m 'den küçük olması gerekir.

$-1 \leq m \leq 0$ ve $e > 1$ için $\frac{1 - em}{1 - e} < m$ olduğundan

$$\text{ÇK} = \{(x, y) \in \text{VI} : (em - 1)x + (1 - e)y = 0\}$$

çözümü elde edilir. Çözüm kümesi bir yarıdoğru belirtir.

VII) $x < 0$ ve $y \geq 0$ ise

$$-x + y = e(-y + mx)$$

ve

$$(1 + em)x - (1 + e)y = 0$$

dir. Çözümün var olabilmesi için bu doğrunun eğiminin $[m, 0]$ aralığında olması gerekir.

i) Eğer $em < -1$ ise, $m < \frac{1 + em}{1 + e} < 0$ olur ve

$$\text{ÇK} = \{(x, y) \in \text{VII} : (1 + em)x - (1 + e)y = 0\}$$

çözümü elde edilir. Çözüm kümesi bir yarıdoğru belirtir.

ii) Eğer $em = -1$ ise, $\frac{1 + em}{1 + e} = 0$ olur ve

$$\text{ÇK} = \{(x, y) \in \text{VII} : y = 0\}$$

çözümü elde edilir. Çözüm kümesi bir yarıdoğru belirtir.

iii) Eğer $em > -1$ ise, $\frac{1+em}{1+e} > 0$ olur ve çözüm boş kümedir.

VIII) $x < 0$ ve $y < 0$ ise

$$-x - y = e(-y + mx)$$

ve

$$(1+em)x + (1-e)y = 0$$

dir. Çözümün var olabilmesi için bu doğrunun eğiminin $[0, \infty)$ aralığında olması gerekir.

i) Eğer $em < -1$ ise, $\frac{1+em}{e-1} < 0$ olur ve çözüm boş kümedir.

ii) Eğer $em = -1$ ise, $\frac{1+em}{e-1} = 0$ olur ve çözüm boş kümedir.

iii) Eğer $em > -1$ ise, $\frac{1+em}{e-1} > 0$ olur ve

$$\text{ÇK} = \{(x, y) \in \text{VIII} : (1+em)x + (1-e)y = 0\}$$

çözümü elde edilir. Çözüm kümesi bir yarıdoğru belirtir.

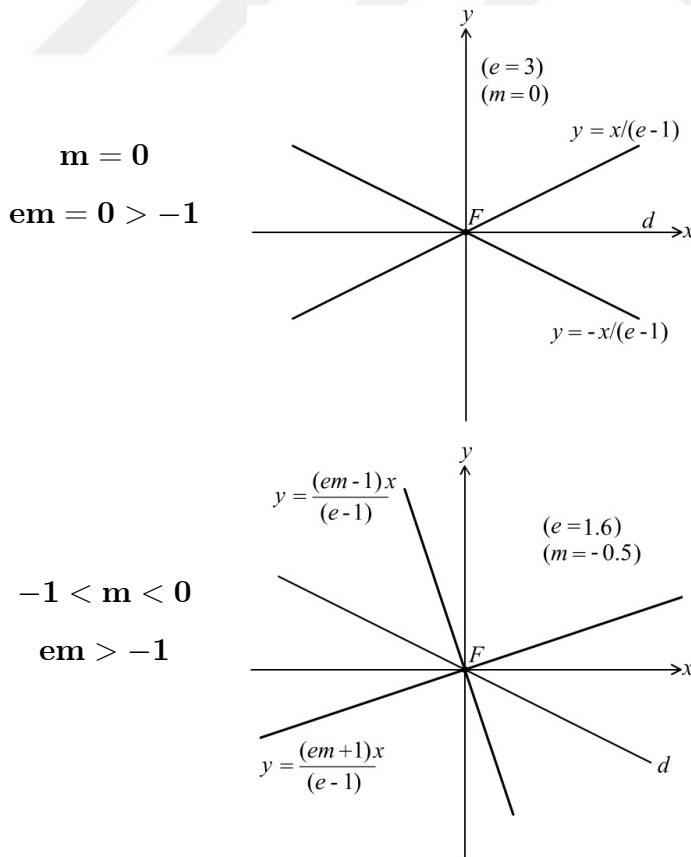
O halde, denklemin çözüm kümesi ilgili aralıklarda aşağıdaki gibi elde edilir:

	$-1 < m < 0, em < -1$	$-1 < m < 0, em = -1$	$-1 < m < 0, em > -1$
I	$\emptyset$	$y = 0$	$(1+em)x + (1-e)y = 0$
II	$(1+em)x - (1+e)y = 0$	$\emptyset$	$\emptyset$
III	$(em-1)x + (1-e)y = 0$	$(em-1)x + (1-e)y = 0$	$(em-1)x + (1-e)y = 0$
IV	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
V	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
VI	$(em-1)x + (1-e)y = 0$	$(em-1)x + (1-e)y = 0$	$(em-1)x + (1-e)y = 0$
VII	$(1+em)x - (1+e)y = 0$	$y = 0$	$\emptyset$
VIII	$\emptyset$	$\emptyset$	$(1+em)x + (1-e)y = 0$

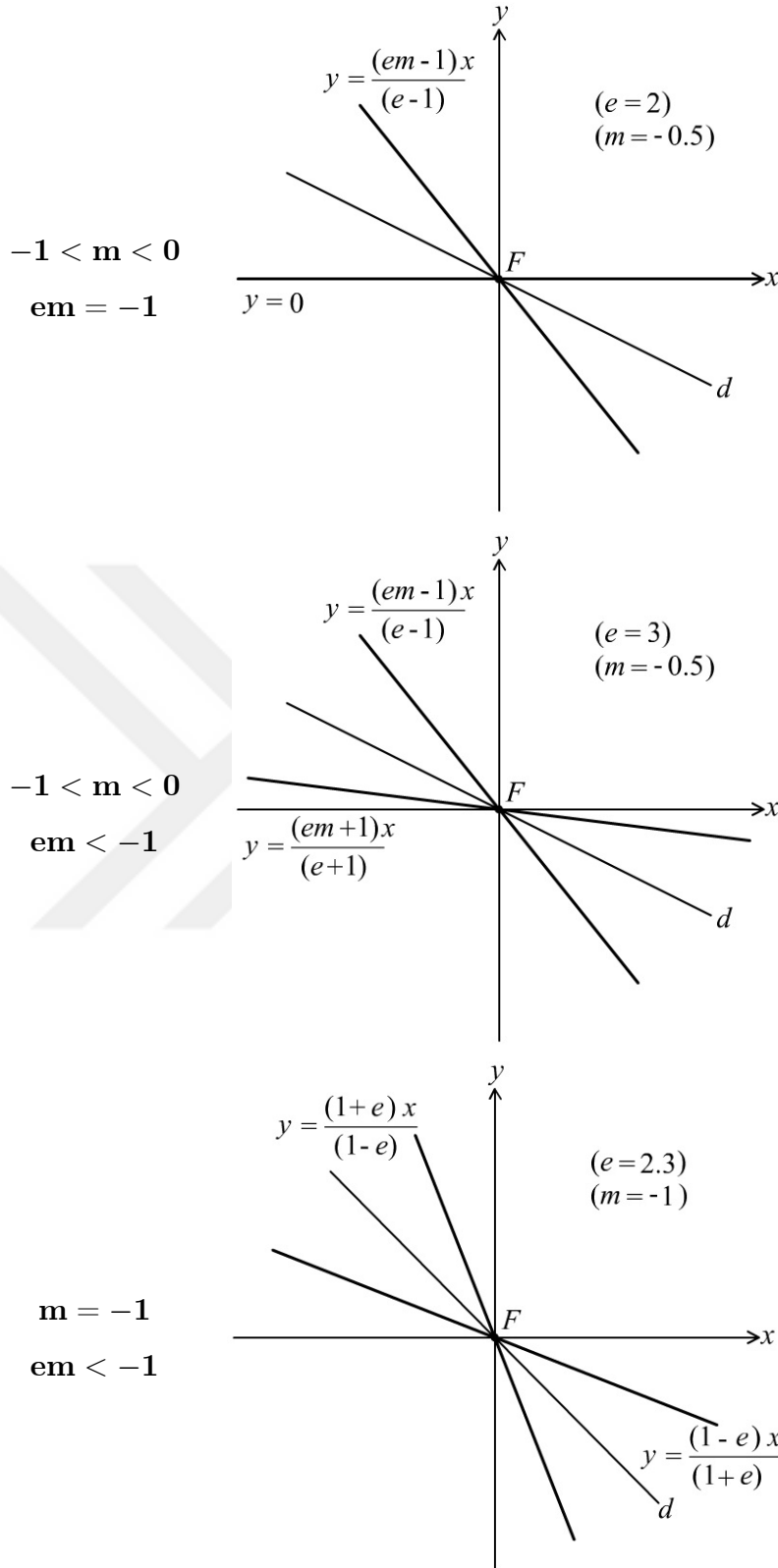
	$m = -1$ ($em < -1$)	$m = 0$ ($em = 0 > -1$)
I	$\emptyset$	$x + (1 - e)y = 0$
II	$(1 - e)x - (1 + e)y = 0$	$\emptyset$
III	$-(e + 1)x + (1 - e)y = 0$	$-x + (1 - e)y = 0$
IV	$\emptyset$	$\emptyset$
V	$\emptyset$	$\emptyset$
VI	$-(e + 1)x + (1 - e)y = 0$	$-x + (1 - e)y = 0$
VII	$(1 - e)x - (1 + e)y = 0$	$\emptyset$
VIII	$\emptyset$	$x + (1 - e)y = 0$

Elde edilen bu dejenere olmayan odak-doğrultman taksikab parabollerinin grafikleri Şekil 2.27’de verilmiştir.

Taksikab uzaklıklıkların; ötelemeler, I. ve II. açıortay doğrularına ve eksenlere göre yansımalar, orijine göre 90° , 180° , 270° lik dönmeler altında değişmediği dikkate alınırsa teoremin ifadesi elde edilir. İspat tamamlanmıştır (Çolakoğlu 2021b).



Şekil 2.27. $-1 \leq m \leq 0$ için dejenere odak-doğrultman taksikab hiperbolleri



Şekil 2.27'nin devamı

□

2.2.3. Merkezli koniklerin iki odaklı tanımının taksikab karşılığı

A) İki odaklı taksikab elipsi

Öklid düzleminde iki nokta yardımıyla verilen elips tanımının taksikab düzlemdeki karşılığı aşağıdaki gibi verilebilir:

Tanım 2.24. Taksikab düzlemde sabit iki noktaya taksikab uzaklıkları toplamı; sabit ve bu noktalar farklı iken bu noktalar arasındaki taksikab uzaklıktan büyük olan noktaların geometrik yerine **iki odaklı taksikab elipsi** denir. Bu sabit noktalara da iki odaklı taksikab elipsinin **odakları** denir (Çolakoğlu 2021b).

Teorem 2.25. Taksikab düzlemde sabit ve farklı $F_1 = (x_1, y_1)$ ve $F_2 = (x_2, y_2)$ noktalarından taksikab uzaklıkları toplamı $2a$ olan iki odaklı taksikab elipsi; F_1 ve F_2 noktalarının orta noktasına göre simetrik olan ve ek olarak

- a) $x_1 \neq x_2$ ve $y_1 \neq y_2$ ise, kenarları eksenlere, I. ve II. açığortay doğrularına paralel olan bir sekizgen,
- b) $x_1 \neq x_2$ ve $y_1 = y_2$ ise, kenarları x -eksenine, I. ve II. açığortay doğrularına paralel olan bir altıgen,
- c) $x_1 = x_2$ ve $y_1 \neq y_2$ ise, kenarları y -eksenine, I. ve II. açığortay doğrularına paralel olan bir altıgen,
- d) $x_1 = x_2, y_1 = y_2$ ve $a > 0$ ise, kenarları I. ve II. açığortay doğrularına paralel olan bir kare,
- e) $x_1 = x_2, y_1 = y_2$ ve $a = 0$ ise, $F_1 = F_2$ noktasıdır (Çolakoğlu 2021b).

İspat Taksikab düzlemde; odakları orijine göre simetrik $F_1 = (c_1, c_2)$ ve $F_2 = (-c_1, -c_2)$ noktaları ve bu odaklara taksikab uzaklıkları toplamı $2a$ olan iki odaklı taksikab elipsini göz önüne alalım. Taksikab uzaklıklar ötelemeler altında değişmez kaldığından bu seçim genelliği bozmayacaktır. Burada $F_1 \neq F_2$ iken $2a > d_T(F_1, F_2) = |2c_1| + |2c_2|$ olduğunu, dolayısıyla $a > |c_1| + |c_2|$ olduğunu belirtelim. Bu taksikab elipsinin denklemi, $X = (x, y)$ için

$$d_T(X, F_1) + d_T(X, F_2) = 2a$$

den

$$|x - c_1| + |y - c_2| + |x + c_1| + |y + c_2| = 2a$$

olur. Burada $X' = (-x, -y)$ noktası da denklemi sağlayacağından iki odaklı taksikab elipsi, Öklid düzlemindeki gibi, orijine, yani F_1 ve F_2 noktalarının orta noktasına göre simetriktir. Başka bir ifadeyle, iki odaklı taksikab elipsinde odakların orta noktası simetri merkezidir. Şimdi, 90° , 180° , 270° lik açı altında dönmeler; eksenlere, I. ve II. açığortay doğrularına göre yansımalar taksikab uzaklıkları koruduğundan, F_1 noktasının, koordinat sisteminin I. bölgesinde x -ekseni ve I. açığortay doğrusu arasında kaldığı bölgede denklemi incelemek yeterlidir. Bu bölge de iki odaklı taksikab elipsi tanımını dikkate alınarak aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir:

i) $c_1 = c_2 > 0$ ve $a > c_1 + c_2$

ii) $c_1 > c_2 > 0$ ve $a > c_1 + c_2$

iii) $a > c_1 > c_2 = 0$

iv) $a > c_2 = c_1 = 0$

v) $a = c_2 = c_1 = 0$.

Bu bölgede genel olarak $c_1 \geq c_2 \geq 0$ ve $|c_1| + |c_2| = c_1 + c_2 < a$ olduğu dikkat edilirse, iki odaklı taksikab elipsinin denkleminde

$$x \geq c_1 \text{ ve } y \geq c_2 \implies x - c_1 + y - c_2 + x + c_1 + y + c_2 = 2a$$

$$\implies 2x + 2y = 2a \implies x + y = a$$

$$x \geq c_1 \text{ ve } -c_2 \leq y < c_2 \implies x - c_1 + c_2 - y + x + c_1 + y + c_2 = 2a$$

$$\implies 2x + 2c_2 = 2a \implies x = a - c_2$$

$$x \geq c_1 \text{ ve } y < -c_2 \implies x - c_1 + c_2 - y + x + c_1 - y - c_2 = 2a$$

$$\implies 2x - 2y = 2a \implies x - y = a$$

$$-c_1 \leq x < c_1 \text{ ve } y \geq c_2 \implies c_1 - x + y - c_2 + x + c_1 + y + c_2 = 2a$$

$$\implies 2y + 2c_1 = 2a \implies y = a - c_1$$

$$-c_1 \leq x < c_1 \text{ ve } -c_2 \leq y < c_2 \implies c_1 - x + c_2 - y + x + c_1 + y + c_2 = 2a \\ \implies 2c_1 + 2c_2 = 2a \implies c_1 + c_2 = a \quad \emptyset$$

$$-c_1 \leq x < c_1 \text{ ve } y < -c_2 \implies c_1 - x + c_2 - y + x + c_1 - y - c_2 = 2a \\ \implies 2c_1 - 2y = 2a \implies y = c_1 - a$$

$$x < -c_1 \text{ ve } y \geq c_2 \implies c_1 - x + y - c_2 - x - c_1 + y + c_2 = 2a \\ \implies 2y - 2x = 2a \implies x - y = -a$$

$$x < -c_1 \text{ ve } -c_2 \leq y < c_2 \implies c_1 - x + c_2 - y - x - c_1 + y + c_2 = 2a \\ \implies 2c_2 - 2x = 2a \implies x = c_2 - a$$

$$x < -c_1 \text{ ve } y < -c_2 \implies c_1 - x + c_2 - y - x - c_1 - y - c_2 = 2a \\ \implies -2x - 2y = 2a \implies x + y = -a$$

ve böylece

$$1) \quad x \geq c_1 \text{ ve } y \geq c_2 \implies x + y = a$$

$$2) \quad x \geq c_1 \text{ ve } -c_2 \leq y < c_2 \implies x = a - c_2$$

$$3) \quad x \geq c_1 \text{ ve } y < -c_2 \implies x - y = a$$

$$4) \quad -c_1 \leq x < c_1 \text{ ve } y \geq c_2 \implies y = a - c_1$$

$$5) \quad -c_1 \leq x < c_1 \text{ ve } y < -c_2 \implies y = c_1 - a$$

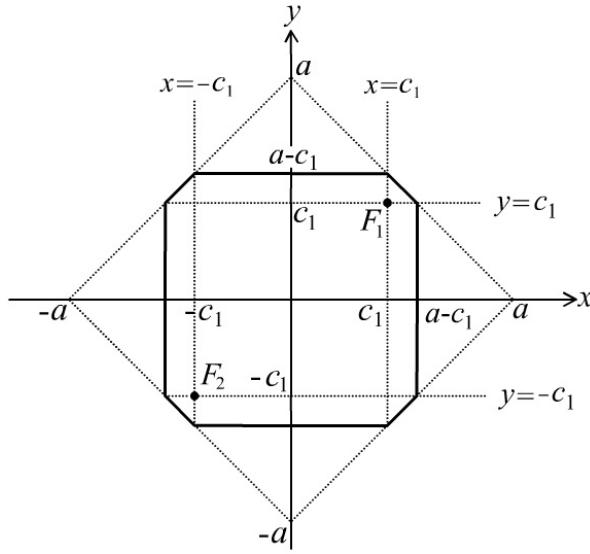
$$6) \quad x < -c_1 \text{ ve } y \geq c_2 \implies x - y = -a$$

$$7) \quad x < -c_1 \text{ ve } -c_2 \leq y < c_2 \implies x = c_2 - a$$

$$8) \quad x < -c_1 \text{ ve } y < -c_2 \implies x + y = -a$$

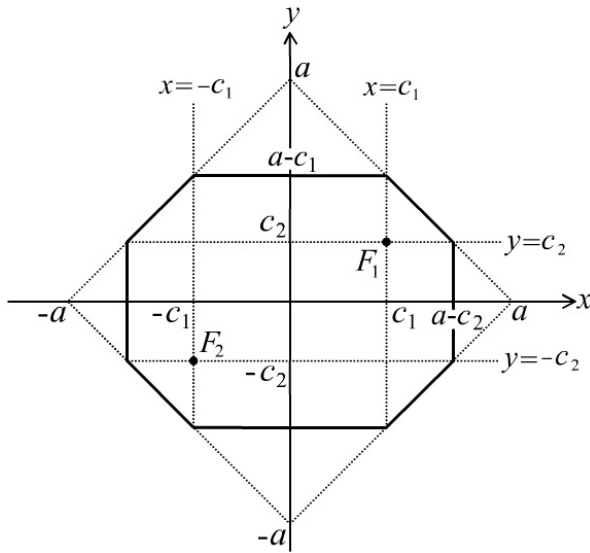
çözümü elde edilir. Şimdi belirtilen durumları sırasıyla inceleyelim:

i) $c_1 = c_2 > 0$ ve $a > c_1 + c_2$ ise, 1,2,3,4,5,6,7,8 denklemleri çözüm kümesini oluşturur. Diğer denklemlerin çözüm kümeleri boş kümedir. Çözüm kümesi, aşağıdaki şekildeki gibi, kenarları eksenlere ve I. ve II. açıortay doğrularına paralel; orijine, eksenlere ve açıortay doğrularına göre simetrik olan bir sekizgen belirtir:



Şekil 2.28. $c_1 = c_2$ için iki odaklı taksikab elipsi

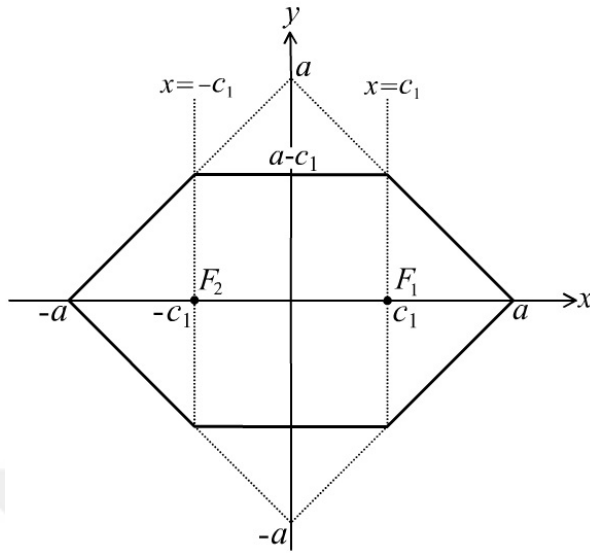
ii) $c_1 > c_2 > 0$ ve $a > c_1 + c_2$ ise, 1,2,3,4,5,6,7,8 denklemleri çözüm kümesini oluşturur. Diğer denklemlerin çözüm kümeleri boş kümedir. Çözüm kümesi, aşağıdaki şekildeki gibi, kenarları eksenlere ve I. ve II. açıortay doğrularına paralel; orijine ve eksenlere göre simetrik olan bir sekizgen belirtir:



Şekil 2.29. $c_1 > c_2 > 0$ için iki odaklı taksikab elipsi

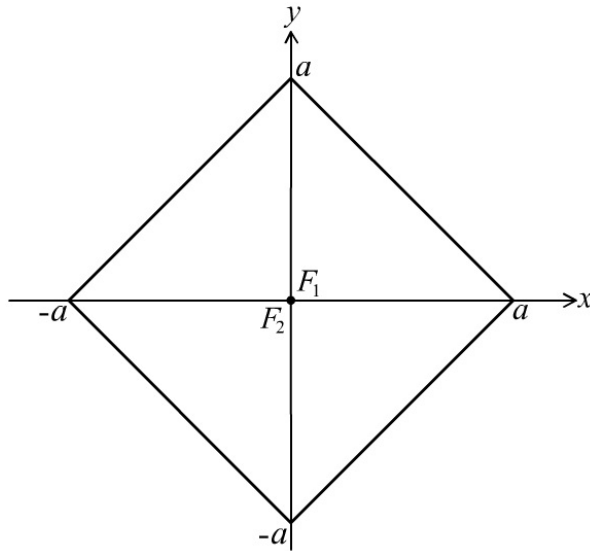
iii) $a > c_1 > c_2 = 0$ ise, 1,3,4,5,6,8 denklemleri çözüm kümesini oluşturur. Diğer denklemlerin çözüm kümeleri boş kümedir. Çözüm kümesi, aşağıdaki şekildeki gibi,

kenarları x -eksenine ve I. ve II. açkırtay doğrularına paralel olan altıgen belirtir:



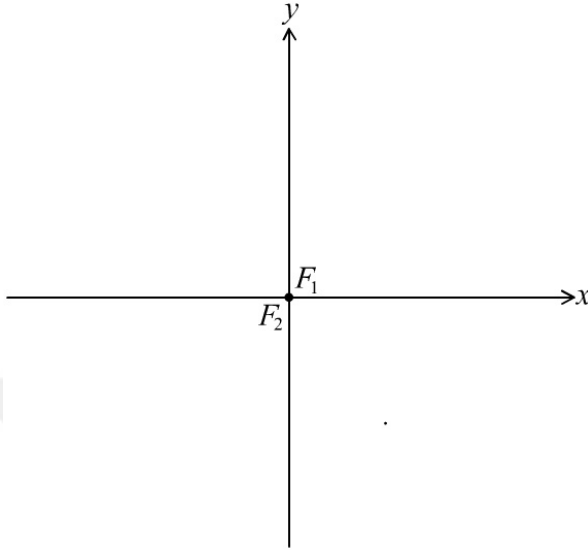
Şekil 2.30. $a > c_1 > c_2 = 0$ için iki odaklı taksikab elipsi

iv) $a > c_2 = c_1 = 0$ ise, 1,3,6,8 denklemleri çözüm kümesini oluşturur. Diğer denklemlerin çözüm kümeleri boş kümedir. Çözüm kümesi, aşağıdaki şekildeki gibi, kenarları I. ve II. açkırtay doğrularına paralel olan kare, daha açık olarak yarıçapı a ve merkezi $F_1 = F_2$ olan taksikab çemberi belirtir:



Şekil 2.31. $a > c_1 = c_2 = 0$ için dejenere iki odaklı taksikab elipsi

v) $a = c_2 = c_1 = 0$ ise, 1 denklemi çözüm kümesini oluşturur. Diğer denklemlerin çözüm kümeleri boş kümedir. Çözüm kümesi, aşağıdaki şekildeki gibi, $F_1 = F_2$ noktasından ibarettir:



Şekil 2.32. $a = c_2 = c_1 = 0$ için dejenere iki odaklı taksikab elipsi

Taksikab uzaklıklarının; ötelemeler, I. ve II. açıortay doğrularına ve eksenlere göre yansımalar, orijine göre 90° , 180° , 270° lik dönmeler altında değişmediği dikkate alınıp, odaklar genel olarak $F_1 = (x_1, y_1)$ ve $F_2 = (x_2, y_2)$ şeklinde seçilirse teoremin ifadesi elde edilir. İspat tamamlanmıştır (Çolakoğlu 2021b). $\square$

Buna göre, bu tanımla ifade edilen iki odaklı taksikab elipsleri odakların orta noktasına göre simetrik ve genel olarak özel bir sekizgen belirtir. Eğer odaklar x ya da y eksenine paralel bir doğru üzerindeyse özel bir altıgen, eğer odaklar aynı nokta olarak seçilirse özel bir kare (taksikab çember) ve dejenere durum olarak da nokta elde edilir. Taksikab çember için verilen "sabit bir noktadan sabit taksikab uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri" tanımı, iki odak taksikab elips tanımının bir özel halidir. (Çolakoğlu 2021b).

B) İki odaklı taksikab hiperbolü

Öklid düzleminde iki nokta yardımıyla verilen hiperbol tanımının taksikab düzlemdeki karşılığı aşağıdaki gibi verilebilir:

Tanım 2.26. *Düzlemde sabit iki noktaya taksikab uzaklıkları farkı, bu noktalar arasındaki taksikab uzaklıktan küçük ve pozitif sabit bir sayı olan noktaların geometrik yerine **iki odaklı taksikab hiperbolü** denir. Bu sabit noktalara da **iki odaklı taksikab hiperbolünün odakları** denir (Çolakoğlu 2021b).*

Teorem 2.27. *Taksikab düzlemde sabit ve farklı $F_1 = (x_1, y_1)$ ve $F_2 = (x_2, y_2)$ noktalarından taksikab uzaklıkları farkı pozitif $2a$ sayısı olan **iki odaklı taksikab hiperbolü**; F_1 ve F_2 noktalarının orta noktasına göre simetrik olan ve ek olarak*

a) $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$ ve $||x_1 - x_2| - |y_1 + y_2|| < 2a < |x_1 - x_2| + |y_1 + y_2|$ ise, x -eksenine paralel iki ışın, y -eksenine paralel iki ışın, I. ve II. açkırtay doğrularından birine paralel iki doğru parçasının birleşiminden oluşur.

b) $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$ ve $2a = ||x_1 - x_2| - |y_1 + y_2||$ ise, eksenlerden birine paralel iki ışın, I. ve II. açkırtay doğrularından birine paralel iki doğru parçası ve sınırları eksenlere paralel iki bölgenin birleşiminden oluşur.

c) $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$ ve $0 < 2a < ||x_1 - x_2| - |y_1 + y_2||$ ise, eksenlerden birine paralel dört ışın ile I. ve II. açkırtay doğrularından birine paralel iki doğru parçasının birleşiminden oluşur.

d) $x_1 \neq x_2$ ve $y_1 = y_2$ ve $0 < 2a < |x_1 - x_2|$ ise, y -eksenine paralel iki doğrunun birleşiminden oluşur.

e) $x_1 = x_2$ ve $y_1 \neq y_2$ ve $0 < 2a < |y_1 - y_2|$ ise, x -eksenine paralel iki doğrunun birleşiminden oluşur (Çolakoğlu 2021b).

İspat Taksikab düzlemde; odakları orijine göre simetrik $F_1 = (c_1, c_2)$ ve $F_2 = (-c_1, -c_2)$ noktaları ve bu odaklara taksikab uzaklıkları farkı pozitif $2a$ sayısı olan **iki odaklı taksikab hiperbolünü** göz önüne alalım. Taksikab uzaklıklar ötelemeler altında değişmez kaldığından bu seçim genelliği bozmayacaktır. Burada $F_1 \neq F_2$ iken $0 < 2a < d_T(F_1, F_2) = |2c_1| + |2c_2|$ olduğunu, dolayısıyla $0 < a < |c_1| + |c_2|$ olduğunu belirtelim. Bu taksikab hiperbolünün denklemi, $X = (x, y)$ için

$$|d_T(X, F_1) - d_T(X, F_2)| = 2a$$

den

$$||x - c_1| + |y - c_2| - (|x + c_1| + |y + c_2|)| = 2a$$

olur. Burada $X' = (-x, -y)$ noktası da denklemi sağlayacağından iki odaklı taksikab hiperbolü, Öklid düzlemindeki gibi, orijine, yani F_1 ve F_2 noktalarının orta noktasına göre simetriktir. Başka bir ifadeyle, iki odaklı taksikab hiperbolünde odakların orta noktası simetri merkezidir. Şimdi, 90° , 180° , 270° lik açı altında dönmeler; eksenlere, I. ve II. açığortay doğrularına göre yansımalar taksikab uzaklıkları koruduğundan, F_1 noktasının, koordinat sisteminin I. bölgesinde x -ekseni ve I. açığortay doğrusu arasında kaldığı bölgede denklemi incelemek yeterlidir. Bu bölge de iki odaklı taksikab hiperbolü tanımını dikkate alınarak aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir:

i) $c_2 = c_1 > 0$ ve $0 < a < c_1 + c_2$

ii) $c_1 > c_2 > 0$ ve $c_1 - c_2 < a < c_1 + c_2$

iii) $c_1 > c_2 > 0$ ve $c_1 - c_2 = a$

iv) $c_1 > c_2 > 0$ ve $0 < a < c_1 - c_2$

v) $c_1 > c_2 = 0$ ve $0 < a < c_1$

Bu bölgede $c_1 \geq c_2 \geq 0 \neq c_1$ ve $|c_1| + |c_2| = c_1 + c_2 > a > 0$ olduğu dikkat edilirse, iki odaklı taksikab hiperbolünün denkleminde

$$\begin{aligned} x \geq c_1 \text{ ve } y \geq c_2 &\implies |x - c_1 + y - c_2 - (x + c_1 + y + c_2)| = 2a \\ \implies |-2c_1 - 2c_2| = 2a &\implies |c_1 + c_2| = c_1 + c_2 = a \quad \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \geq c_1 \text{ ve } -c_2 \leq y < c_2 &\implies |x - c_1 + c_2 - y - (x + c_1 + y + c_2)| = 2a \\ \implies |-2y - 2c_1| = 2a &\implies |y + c_1| = y + c_1 = a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \geq c_1 \text{ ve } y < -c_2 &\implies |x - c_1 + c_2 - y - (x + c_1 - y - c_2)| = 2a \\ \implies |2c_2 - 2c_1| = 2a &\implies |c_2 - c_1| = c_1 - c_2 = a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -c_1 \leq x < c_1 \text{ ve } y \geq c_2 &\implies |c_1 - x + y - c_2 - (x + c_1 + y + c_2)| = 2a \\ \implies |-2x - 2c_2| = 2a &\implies |x + c_2| = a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -c_1 \leq x < c_1 \text{ ve } -c_2 \leq y < c_2 &\implies |c_1 - x + c_2 - y - (x + c_1 + y + c_2)| = 2a \\ \implies |-2x - 2y| = 2a &\implies |x + y| = a \end{aligned}$$

$$-c_1 \leq x < c_1 \text{ ve } y < -c_2 \implies |c_1 - x + c_2 - y - (x + c_1 - y - c_2)| = 2a \\ \implies |2c_2 - 2x| = 2a \implies |x - c_2| = a$$

$$x < -c_1 \text{ ve } y \geq c_2 \implies |c_1 - x + y - c_2 - (-x - c_1 + y + c_2)| = 2a \\ \implies |2c_1 - 2c_2| = 2a \implies |c_1 - c_2| = c_1 - c_2 = a$$

$$x < -c_1 \text{ ve } -c_2 \leq y < c_2 \implies |c_1 - x + c_2 - y - (-x - c_1 + y + c_2)| = 2a \\ \implies |2c_1 - 2y| = 2a \implies |y - c_1| = c_1 - y = a$$

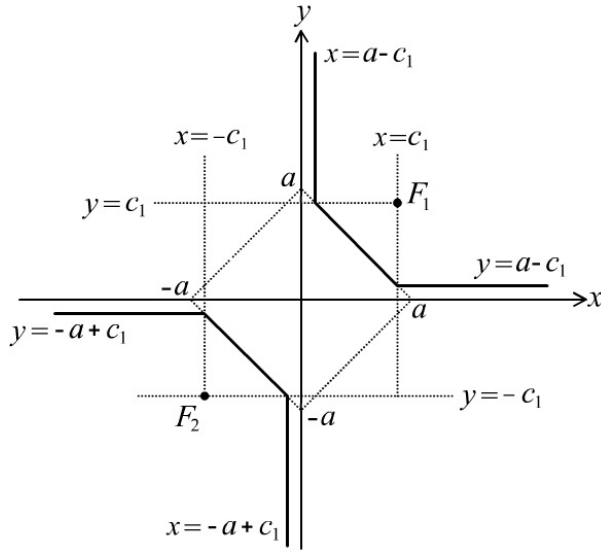
$$x < -c_1 \text{ ve } y < -c_2 \implies |c_1 - x + c_2 - y - (-x - c_1 - y - c_2)| = 2a \\ \implies |2c_1 + 2c_2| = 2a \implies |c_1 + c_2| = c_1 + c_2 = a \quad \emptyset$$

ve böylece

- 1) $x \geq c_1 \text{ ve } -c_2 \leq y < c_2 \implies y = a - c_1$
- 2) $x \geq c_1 \text{ ve } y < -c_2 \implies c_1 - c_2 = a$
- 3) $-c_1 \leq x < c_1 \text{ ve } y \geq c_2 \implies x = a - c_2 \vee x = -a - c_2$
- 4) $-c_1 \leq x < c_1 \text{ ve } -c_2 \leq y < c_2 \implies x + y = a \vee x + y = -a$
- 5) $-c_1 \leq x < c_1 \text{ ve } y < -c_2 \implies x = a + c_2 \vee x = -a + c_2$
- 6) $x < -c_1 \text{ ve } y \geq c_2 \implies c_1 - c_2 = a$
- 7) $x < -c_1 \text{ ve } -c_2 \leq y < c_2 \implies y = -a + c_1$

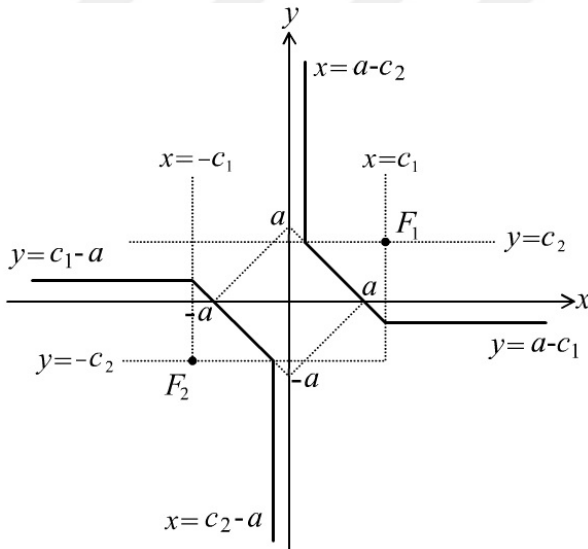
çözümü elde edilir. Şimdi belirtilen durumları sırasıyla inceleyelim:

i) $c_2 = c_1 > 0$ ve $0 < a < c_1 + c_2$ ise, 1,3,4,5,7 denklemleri çözüm kümesini oluşturur. Diğer denklemlerin çözüm kümeleri boş kümedir. Çözüm kümesi, aşağıdaki şekildeki gibi, y -eksenine paralel iki ışın, x -eksenine paralel iki ışın ve II. açıortay doğrusuna paralel iki doğru parçasının birleşimidir:



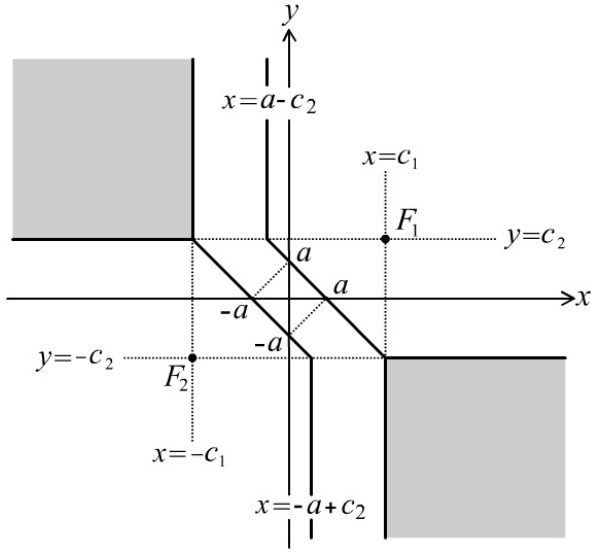
Şekil 2.33. $c_2 = c_1 > 0$ ve $0 < a < c_1 + c_2$ için dejenere iki odaklı taksikab hiperbolü

ii) $c_1 > c_2 > 0$ ve $c_1 - c_2 < a < c_1 + c_2$ ise, 1,3,4,5,7 denklemleri çözüm kümesini oluşturur. Çözüm kümesi, aşağıdaki şekildeki gibi, y -eksenine paralel iki ışın, x -eksenine paralel iki ışın ve II. açkırtay doğrusuna paralel iki doğru parçasının birleşimidir:



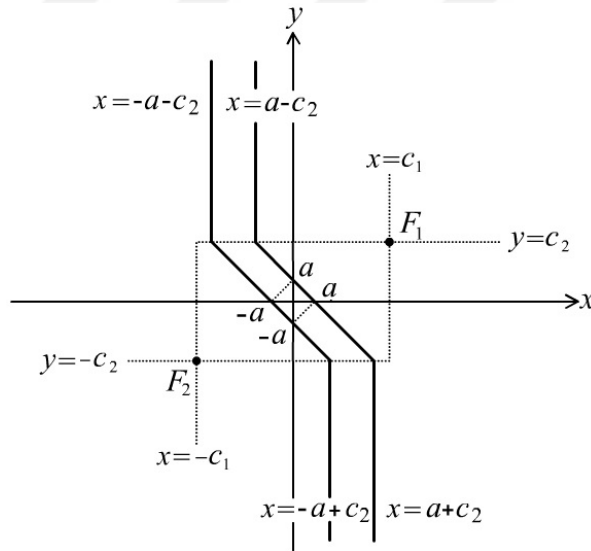
Şekil 2.34. $c_1 > c_2 > 0$ ve $c_1 - c_2 < a < c_1 + c_2$ için iki odaklı taksikab hiperbolü

iii) $c_1 > c_2 > 0$ ve $c_1 - c_2 = a$ ise, 1,2,3,4,5,6 denklemleri çözüm kümesini oluşturur. Çözüm kümesi, aşağıdaki şekildeki gibi, y -eksenine paralel iki ışın, II. açkırtay doğrusuna paralel iki doğru parçası ve sınırları eksenlere paralel iki düzlem parasının birleşimidir:



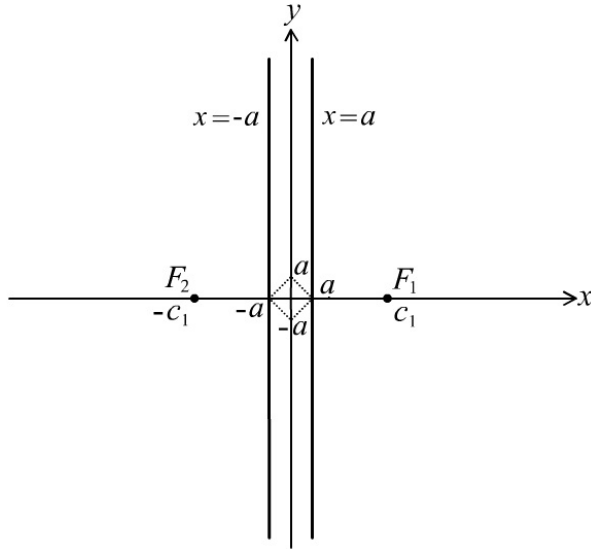
Şekil 2.35. $c_1 > c_2 > 0$ ve $c_1 - c_2 = a$ için iki odaklı taksikab hiperbolü

iv) $c_1 > c_2 > 0$ ve $0 < a < c_1 - c_2$ ise, 3,4,5 denklemleri çözüm kümesini oluşturur. Diğer denklemlerin çözüm kümeleri boş kümedir. Çözüm kümesi, aşağıdaki şekildeki gibi, y -eksenine paralel dört ışın ve II. açıortay doğrusuna paralel iki doğru parçasının birleşimidir:



Şekil 2.36. $c_1 > c_2 > 0$ ve $0 < a < c_1 - c_2$ için iki odaklı taksikab hiperbolü

v) $c_1 > c_2 = 0$ ve $0 < a < c_1$ ise, 3,4,5 denklemleri çözüm kümesini oluşturur. Diğer denklemlerin çözüm kümeleri boş kümedir. Çözüm kümesi, aşağıdaki şekildeki gibi, y -eksenine paralel iki doğrunun birleşimidir:



Şekil 2.37. $c_1 > c_2 = 0$ ve $0 < a < c_1$ için iki odaklı taksikab hiperbolü

Taksikab uzaklıklıkların; ötelemeler, I. ve II. açıortay doğrularına ve eksenlere göre yansımalar, orijine göre 90° , 180° , 270° lik dönmeler altında değişmediği dikkate alınıp, odaklar genel olarak $F_1 = (x_1, y_1)$ ve $F_2 = (x_2, y_2)$ şeklinde seçilirse teoremin ifadesi elde edilir. İspat tamamlanmıştır (Çolakoğlu 2021b). $\square$

2.2.4. Merkezli koniklerin iki doğrulu tanımının taksikab karşılığı

A) İki doğrulu taksikab elipsi

Öklid düzleminde iki doğru yardımıyla verilen elips tanımının taksikab düzlemdeki karşılığı aşağıdaki gibi verilebilir:

Tanım 2.28. Taksikab düzlemde bir noktası ortak sabit iki doğruya taksikab uzaklıklarının kareleri toplamı sabit olan noktaların geometrik yerine **iki doğrulu taksikab elipsi** denir. Bu sabit doğrulara elipsin **dışmerkezlik doğruları (eccentrix)** denir (Çolakoğlu 2021b).

Bu tanımla elde edilen taksikab elipslerini belirleyebilmek için dışmerkezlik doğrularını $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $l_1 : y = m_1x$ ve $l_2 : y = m_2x$ olarak alalım. Ötelemelerin uzaklıkları koruması sebebiyle bu seçim tüm durumları kapsayacaktır. Ek olarak, I. ve

II. açıortay doğrularına ve eksenlere göre yansımalar ve 90° , 180° , 270° lik dönmeler altında taksikab uzaklıklar değişmediği dikkate alınarak; " l_1 ve l_2 doğrularının ikisinde yataysal veya ayıraç olduğu" ve " l_1 in yataysal ve l_2 nin dikeysel olduğu" durumları incelemek yeterli olur.

Teorem 2.29. *Taksikab düzlemde bir noktası ortak sabit iki doğruya taksikab uzaklıklarının kareleri toplamı $r^2 \geq 0$ olan iki doğrulu taksikab elipsleri;*

- i) *doğrular çakışık değilse ve $r > 0$ ise bir Öklid elipsi,*
 - ii) *doğrular çakışık değilse ve $r = 0$ ise bir nokta,*
 - iii) *doğrular çakışık ve $r > 0$ ise bu doğrulara paralel olan paralel iki doğru,*
 - iv) *doğrular çakışık ve $r = 0$ ise bu doğrulara çakışık olan bir doğrudur.*
- Özel olarak,
- v) *doğrular dik ise Öklid çemberidir (Çolakoğlu 2021b).*

İspat İzometrilere sebebiyle, bir noktası ortak $l_1: y = m_1x$ ve $l_2: y = m_2x$ doğrularını göze almak ve sadece aşağıdaki durumları incelemek yeterlidir:

- 1) $|m_1| \leq 1$ ve $|m_2| \leq 1$
- 2) $|m_1| \leq 1$ ve $|m_2| > 1$
- 3) $m_1 = 0$ ve $m_2 \rightarrow \infty$

Şimdi bu durumları sırasıyla inceleyelim:

- 1) $|m_1| \leq 1$ ve $|m_2| \leq 1$ için; l_1 ve l_2 doğruları yataysal veya ayıraç doğrulardır. Bu iki doğruya taksikab uzaklıklarının kareleri toplamı $r^2 \geq 0$ olan iki doğrulu taksikab elipsinin denklemi $X = (x, y)$ için

$$d_T^2(X, l_1) + d_T^2(X, l_2) = r^2$$

den

$$(|y - m_1x|)^2 + (|y - m_2x|)^2 = (y - m_1x)^2 + (y - m_2x)^2 = r^2$$

ve buradan da

$$(m_1^2 + m_2^2)x^2 - 2(m_1 + m_2)xy + 2y^2 - r^2 = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde bir Öklid genel konik denklemi olarak elde edilir. Bu denklemin katsayıları

$$A = (m_1^2 + m_2^2), B = -2(m_1 + m_2), C = 2, D = E = 0, F = -r^2$$

dir. Ayrıca, bu katsayılar yardımıyla

$$\delta = B^2 - 4AC = 4(m_1 + m_2)^2 - 8(m_1^2 + m_2^2) = -4(m_1 - m_2)^2$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(m_1^2 + m_2^2) & -2(m_1 + m_2) & 0 \\ -2(m_1 + m_2) & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2r^2 \end{vmatrix} \\ &= -8r^2(m_1 - m_2)^2 \end{aligned}$$

ve

$$A\Delta = (m_1^2 + m_2^2)(-8r^2(m_1 - m_2)^2) = -8r^2(m_1 - m_2)^2(m_1^2 + m_2^2)$$

bulunur. Elde edilen (2.1) denkleminin çözüm kümesini, Çizelge 2.1'den yararlanarak inceleyelim:

A) $m_1 \neq m_2$ olsun. Bu durumda

$$\delta = -4(m_1 - m_2)^2 < 0$$

dır ve

$$A\Delta = -8r^2(m_1 - m_2)^2(m_1^2 + m_2^2)$$

ya bakılmalıdır. Bu ifadenin pozitiflik durumunu ise r belirler:

i) $r > 0$ ise

$$A\Delta = -8r^2(m_1 - m_2)^2(m_1^2 + m_2^2) < 0$$

elde edilir. Bu durumda denklem bir Öklid elipsi belirtir.

ii) $r = 0$ ise

$$\Delta = -8r^2(m_1 - m_2)^2 = 0$$

elde edilir. Bu durumda denklem bir nokta belirtir.

Burada özel olarak, " $m_1 = 1$ ve $m_2 = -1$ " ve " $m_1 = -1$ ve $m_2 = 1$ " durumlarında (2.1) denklemi

$$2x^2 + 2y^2 = r^2$$

denklemine dönüşür. Bu ise, merkezi orijin, yani doğruların kesişme noktası olan ve yarıçapı $r/\sqrt{2}$ olan Öklid çemberidir.

B) $m_1 = m_2 \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$\delta = -4(m_1 - m_2)^2 = 0 \quad \text{ve} \quad \Delta = -8r^2(m_1 - m_2)^2 = 0$$

elde edilir ve denklem,

$$(2m_1^2)x^2 - (4m_1)xy + 2y^2 - r^2 = 0$$

veya

$$(\sqrt{2}m_1x - \sqrt{2}y)^2 = r^2$$

denklemine dönüşür. Bu denklem için de, $A \neq 0$ ve $C \neq 0$ olduğundan $ABDE$ ve $2AB^2F$ çarpımları karşılaştırılmalıdır. Denklemde

$$ABDE = 0 \quad \text{ve} \quad 2AB^2F = 2(2m_1^2)(-4m_1)^2(-r^2) = -64m_1^4r^2$$

elde edilir. Bu ifadede $m_1 \neq 0$ olduğundan r ye bakılmalıdır:

i) $r > 0$ ise $ABDE > 2AB^2F$ elde edilir. Bu durumda denklem paralel iki doğru belirtir: $y = m_1x - r/\sqrt{2}$ ve $y = m_1x + r/\sqrt{2}$.

ii) $r = 0$ ise, $DE = 2BF = 0$ elde edilir. Bu durumda tek bir doğru elde edilir: $y = m_1x$.

C) $m_1 = m_2 = 0$ olsun. Bu durumda

$$\delta = -4(m_1 - m_2)^2 = 0 \quad \text{ve} \quad \Delta = -8r^2(m_1 - m_2)^2 = 0$$

elde edilir ve denklem

$$2y^2 - r^2 = 0$$

denklemine dönüşür. Bu denklemde $A = 0$ olduğundan E^2 ve $4CF$ çarpımları karşılaştırılmalıdır. Denklemde

$$E^2 = 0 \quad \text{ve} \quad 4CF = 4(2)(-r^2) = -8r^2$$

elde edilir. Karşılaştırma r ye bağlıdır:

i) $r > 0$ ise, $E^2 > 4CF$ dir ve x -eksenine paralel iki doğru elde edilir: $y = r/\sqrt{2}$ ve $y = -r/\sqrt{2}$.

ii) $r = 0$ ise, $E^2 = 4CF$ dir ve x -ekseni olarak tek doğru elde edilir: $y = 0$.

2) $|m_1| \leq 1$ ve $|m_2| > 1$ için; l_1 yataysal veya ayıraç l_2 dikeysel bir doğrudur. Bu doğrularla elde edilen iki doğrulu taksikab elipsinin denklemi

$$d_T^2(X, l_1) + d_T^2(X, l_2) = r^2$$

den

$$(|y - m_1x|)^2 + \left(\frac{|y - m_2x|}{|m_2|}\right)^2 = (y - m_1x)^2 + \left(\frac{y - m_2x}{m_2}\right)^2 = r^2$$

ve buradan da

$$(1 + m_1^2)x^2 - 2\left(\frac{m_1m_2 + 1}{m_2}\right)xy + \left(\frac{1 + m_2^2}{m_2^2}\right)y^2 - r^2 = 0 \quad (2.2)$$

şeklinde bir Öklid genel konik denklemi olarak elde edilir. Bu denklemin katsayıları

$$A = (1 + m_1^2), B = -2\left(\frac{m_1m_2 + 1}{m_2}\right), C = \left(\frac{1 + m_2^2}{m_2^2}\right), D = E = 0, F = -r^2$$

dir. Ayrıca, bu katsayılar yardımıyla

$$\delta = B^2 - 4AC = 4\left(\frac{m_1m_2 + 1}{m_2}\right)^2 - 4(1 + m_1^2)\left(\frac{1 + m_2^2}{m_2^2}\right) = -\frac{4}{m_2^2}(m_1 - m_2)^2$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(1 + m_1^2) & -2\left(\frac{m_1m_2 + 1}{m_2}\right) & 0 \\ -2\left(\frac{m_1m_2 + 1}{m_2}\right) & 2\left(\frac{1 + m_2^2}{m_2^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & -2r^2 \end{vmatrix} \\ &= -8\frac{r^2}{m_2^2}(m_1 - m_2)^2 \end{aligned}$$

ve

$$A\Delta = (1 + m_1^2)(-8)\frac{r^2}{m_2^2}(m_1 - m_2)^2 = -8\frac{r^2}{m_2^2}(m_1 - m_2)^2(1 + m_1^2)$$

bulunur. Elde edilen (2.2) denkleminin çözüm kümesini, Çizelge 2.1'den yararlanarak inceleyelim. $|m_1| \leq 1$ ve $|m_2| > 1$ ise $m_1 - m_2 \neq 0 \neq m_2$ olacağından

$$\delta = -\frac{4}{m_2^2}(m_1 - m_2)^2 < 0$$

dır ve $A\Delta$ ya bakılmalıdır:

i) $r > 0$ ise

$$A\Delta = -8 \frac{r^2}{m_2^2} (m_1 - m_2)^2 (1 + m_1^2) < 0$$

elde edilir. Bu durumda denklem bir Öklid elipsi belirtir.

ii) $r = 0$ ise,

$$\Delta = -8 \frac{r^2}{m_2^2} (m_1 - m_2)^2 = 0$$

dır. Bu durumda denklem bir nokta belirtir.

Burada özel olarak, $m_1 m_2 = -1$ durumunda (2.2) denklemi

$$(1 + m_1^2)x^2 + (1 + m_1^2)y^2 = r^2$$

denkleme dönüşür. Bu ise, merkezi orijin, yani doğruların kesişme noktası olan ve yarıçapı $r/\sqrt{1 + m_1^2}$ olan Öklid çemberidir.

3) $m_1 = 0$ ve $m_2 \rightarrow \infty$ için; $l_1 : y = 0$ yataysal, $l_2 : x = 0$ dikeysel bir doğrudur. Bu doğrularla elde edilen iki doğrulu taksikab elipsinin denklemi

$$d_T^2(X, l_1) + d_T^2(X, l_2) = r^2$$

den

$$(|y|)^2 + (|x|)^2 = r^2$$

ve buradan da

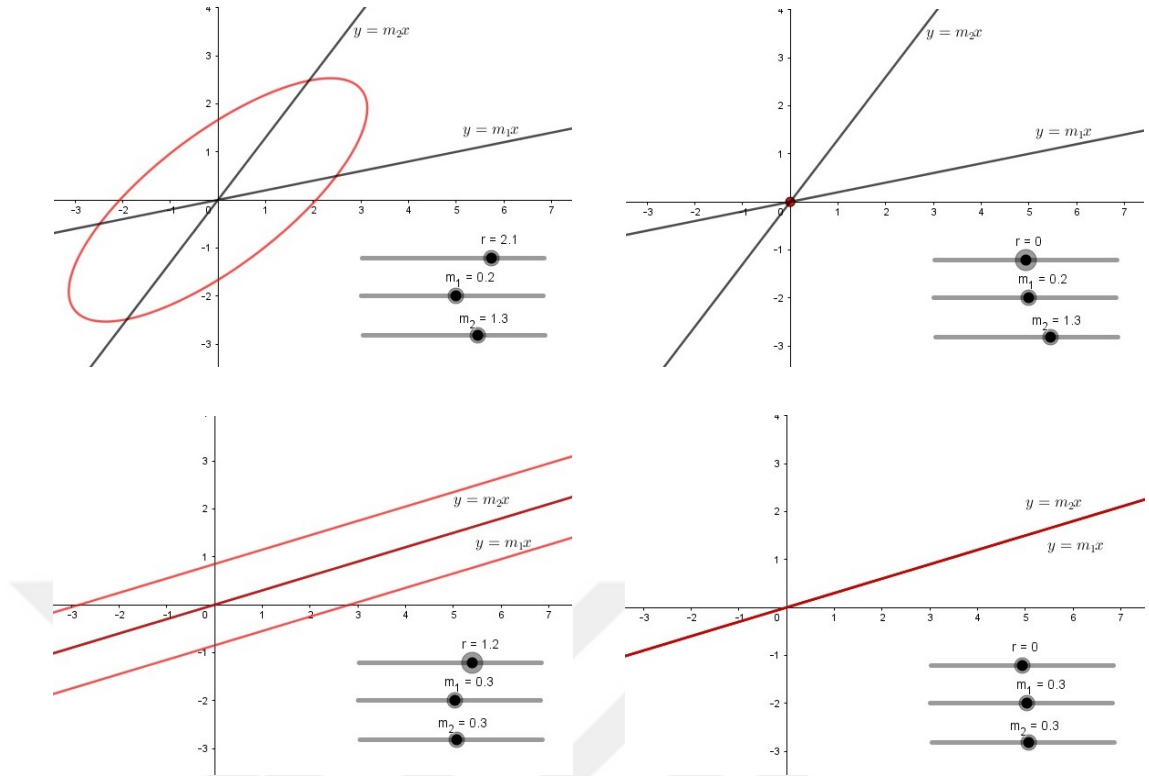
$$x^2 + y^2 = r^2$$

denklemini elde edilir. Bu ise,

i) $r > 0$ ise merkezi orijin, yani doğruların kesişme noktası olan ve yarıçapı r olan Öklid çemberidir.

ii) $r = 0$ ise doğruların kesişme noktası olan bir noktadır.

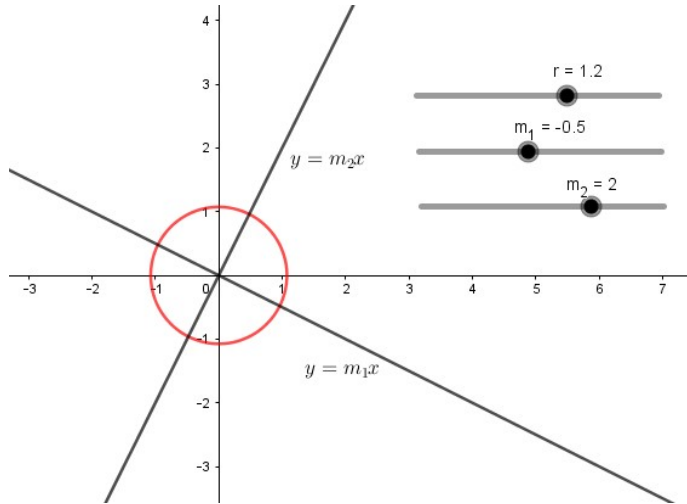
Taksikab uzaklıklarının; ötelemeler, I. ve II. açıortay doğrularına ve eksenlere göre yansımalar, orijine göre 90° , 180° , 270° lik dönmeler altında değişmediği dikkate alınrsa teoremin ifadesi elde edilir. İspat tamamlanmıştır (Çolakoglu 2021b). $\square$



Şekil 2.38. İki doğru yardımıyla elde edilen taksikab elipsleri

İki odaklı taksikab elipsinin bir özel halinin merkez-yarıçap taksikab çemberi olduğu gibi, bu tanımın bir özel durumu olarak da "taksikab düzlemde dik kesişen iki doğruya taksikab uzaklıklarının kareleri toplamı sabit olan noktaların geometrik yeri" olarak iki doğrulu taksikab çemberini tanımlamak mümkündür (Çolakoğlu 2021b):

Tanım 2.30. *Taksikab düzlemde dik kesişen sabit iki doğruya taksikab uzaklıklarının kareleri toplamı sabit olan noktaların geometrik yerine **iki doğru taksikab çemberi** denir (Çolakoğlu 2021b).*



Şekil 2.39. İki doğru yardımıyla elde edilen taksikab çemberi

B) İki doğrulu taksikab hiperbolü

Öklid düzleminde iki doğru yardımıyla verilen hiperbol tanımının taksikab düzlemdaki karşılığı aşağıdaki gibi verilebilir:

Tanım 2.31. Taksikab düzlemde bir noktası ortak sabit iki doğrunun oluşturduğu karşılıklı bölge çiftlerinin birinde yer alan ve bu iki doğruya taksikab uzaklıkları çarpımı sabit olan noktaların geometrik yerine **iki doğru taksikab hiperbolü** denir. Bu sabit doğrulara hiperbolün **dışmerkezlik doğruları (eccentrix)** denir (Çolakoğlu 2021b).

Bu tanımla elde edilen taksikab hiperbollerini belirleyebilmek için dışmerkezlik doğrularını $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $l_1 : y = m_1x$ ve $l_2 : y = m_2x$ olarak alalım. Ötelemelerin uzaklıkları koruması sebebiyle bu seçim tüm durumları kapsayacaktır. Ek olarak, I. ve II. açıortay doğrularına ve eksenlere göre yansımalar ve 90° , 180° , 270° lik dönmeler altında taksikab uzaklıklar değişmediği dikkate alınarak; " l_1 ve l_2 doğrularının ikisinde yataysal veya ayıraç olduğu" ve " l_1 in yataysal ve l_2 nin dikeysel olduğu" durumları incelemek yeterli olur.

Teorem 2.32. Taksikab düzlemde bir noktası ortak sabit iki doğrunun oluşturduğu karşılıklı bölge çiftlerinin birinde yer alan ve bu iki doğruya taksikab uzaklıklarının çarpımı $r^2 \geq 0$ olan iki doğrulu taksikab hiperbolleri;

- i) doğrular çakışık değilse ve $r > 0$ ise bir Öklid hiperbolü,
- ii) doğrular çakışık değilse ve $r = 0$ ise doğruların birleşiminden ibaret kesişen iki doğru,
- iii) doğrular çakışık ve $r > 0$ ise bu doğrulara paralel ve eşit taksikab uzaklıkta olan paralel iki doğru,
- iv) doğrular çakışık ve $r = 0$ ise bu doğrulara çakışık bir doğrudur (Çolakoğlu 2021b).

İspat İzometrilere sebebiyle, bir noktası ortak $l_1: y = m_1x$ ve $l_2: y = m_2x$ doğrularını göze almak ve sadece aşağıdaki durumları incelemek yeterlidir:

1) $|m_1| \leq 1$ ve $|m_2| \leq 1$

2) $|m_1| \leq 1$ ve $|m_2| > 1$

3) $m_1 = 0$ ve $m_2 \rightarrow \infty$

Şimdi bu durumları sırasıyla inceleyelim:

1) $|m_1| \leq 1$ ve $|m_2| \leq 1$ için; l_1 ve l_2 doğruları yataysal veya ayıraç doğrulardır. Bu iki doğruya taksikab uzaklıklarının çarpımı $r^2 \geq 0$ olan iki doğrulu taksikab hiperbolünün denklemi $X = (x, y)$ için

$$d_T(X, l_1) \cdot d_T(X, l_2) = r^2$$

den

$$|y - m_1x| \cdot |y - m_2x| = |(y - m_1x)(y - m_2x)| = |m_1m_2x^2 - xy(m_1 + m_2) + y^2| = r^2$$

ve buradan da

$$(m_1m_2)x^2 - (m_1 + m_2)xy + y^2 \pm r^2 = 0 \quad (2.3)$$

şeklinde bir Öklid genel konik denklemi olarak elde edilir. Bu denklemin katsayıları

$$A = m_1m_2, B = -(m_1 + m_2), C = 1, D = E = 0, F = \pm r^2$$

dir. Ayrıca, bu katsayılar yardımıyla

$$\delta = B^2 - 4AC = (m_1 + m_2)^2 - 4m_1m_2 = (m_1 - m_2)^2$$

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2m_1m_2 & -(m_1+m_2) & 0 \\ -(m_1+m_2) & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2r^2 \end{vmatrix} \\ &= 2r^2(m_1-m_2)^2\end{aligned}$$

ve

$$A\Delta = (m_1m_2)(2r^2(m_1-m_2)^2) = 2r^2(m_1-m_2)^2 m_1m_2$$

bulunur. Elde edilen (2.3) denkleminin çözüm kümesini, Çizelge 2.1'den yararlanarak inceleyelim:

A) $m_1 \neq m_2$ olsun. Bu durumda

$$\delta = (m_1 - m_2)^2 > 0$$

dır ve

$$\Delta = 2r^2(m_1 - m_2)^2$$

ya bakılmalıdır. Bu ifadenin pozitiflik durumunu ise r belirler:

i) $r > 0$ ise

$$\Delta = 2r^2(m_1 - m_2)^2 > 0$$

elde edilir. Bu durumda denklemler l_1 ve l_2 doğrularını asimptot kabul eden eşlenik iki Öklid hiperbolü belirtir.

ii) $r = 0$ ise

$$\Delta = 2r^2(m_1 - m_2)^2 = 0$$

elde edilir. Bu durumda denklem l_1 ve l_2 doğrularının birleşiminden ibaret kesişen iki doğru belirtir.

B) $m_1 = m_2 \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$\delta = (m_1 - m_2)^2 = 0 \quad \text{ve} \quad \Delta = 2r^2(m_1 - m_2)^2 = 0$$

elde edilir ve denklem,

$$(m_1^2)x^2 - (2m_1)xy + y^2 \pm r^2 = 0$$

veya

$$(m_1x - y)^2 = \mp r^2$$

denkleminde dönüşür. $(m_1x - y)^2 = -r^2$ denkleminin çözüm kümesi $r > 0$ için boş kümedir. Bu sebeple $(m_1x - y)^2 = r^2$ denklemini, yani $(m_1^2)x^2 - (2m_1)xy + y^2 - r^2 = 0$ denklemini göz önüne alalım. $A \neq 0$ ve $C \neq 0$ olduğundan $ABDE$ ve $2AB^2F$ çarpımları karşılaştırılmalıdır. Denklemden

$$ABDE = 0 \quad \text{ve} \quad 2AB^2F = 2(m_1^2)(-2m_1)^2(-r^2) = -4m_1^4r^2$$

elde edilir. Bu ifadede $m_1 \neq 0$ olduğundan r ye bakılmalıdır:

i) $r > 0$ ise $ABDE > 2AB^2F$ elde edilir. Bu durumda denklem paralel iki doğru belirtir:

$$y = m_1x - r \quad \text{ve} \quad y = m_1x + r.$$

ii) $r = 0$ ise, $DE = 2BF = 0$ elde edilir. Bu durumda tek bir doğru elde edilir: $y = m_1x$.

C) $m_1 = m_2 = 0$ olsun. Bu durumda

$$\delta = (m_1 - m_2)^2 = 0 \quad \text{ve} \quad \Delta = 2r^2(m_1 - m_2)^2 = 0$$

elde edilir ve denklem

$$y^2 - r^2 = 0$$

denkleminde dönüşür. Bu denklemde $A = 0$ olduğundan E^2 ve $4CF$ çarpımları karşılaştırılmalıdır. Denklemden

$$E^2 = 0 \quad \text{ve} \quad 4CF = 4(1)(-r^2) = -4r^2$$

elde edilir. Karşılaştırma r ye bağlıdır:

i) $r > 0$ ise, $E^2 > 4CF$ dir ve x -eksenine, yani l_1 ve l_2 ye paralel iki doğru elde edilir:

$$y = r \quad \text{ve} \quad y = -r.$$

ii) $r = 0$ ise, $E^2 = 4CF$ dir ve x -ekseni olarak, yani l_1 ve l_2 ile çakışık bir doğru elde edilir: $y = 0$.

2) $|m_1| \leq 1$ ve $|m_2| > 1$ için; l_1 yataysal veya ayıraç l_2 dikeysel bir doğrudur. Bu doğrularla elde edilen iki doğrulu taksikab hiperbolünün denklemi

$$d_T(X, l_1).d_T(X, l_2) = r^2$$

den

$$|y - m_1x| \cdot \frac{|y - m_2x|}{|m_2|} = \frac{|(m_1m_2)x^2 - (m_1 + m_2)xy + y^2|}{|m_2|} = r^2$$

ve buradan da

$$(m_1m_2)x^2 - (m_1 + m_2)xy + y^2 \pm |m_2| r^2 = 0 \quad (2.4)$$

şeklinde bir Öklid genel konik denklemi olarak elde edilir. Bu denklemin katsayıları

$$A = (m_1m_2), B = -(m_1 + m_2), C = 1, D = E = 0, F = \pm |m_2| r^2$$

dir. Ayrıca, bu katsayılar yardımıyla

$$\delta = B^2 - 4AC = (-(m_1 + m_2))^2 - 4(m_1m_2) = (m_1 - m_2)^2$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(m_1m_2) & -(m_1 + m_2) & 0 \\ -(m_1 + m_2) & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2|m_2|r^2 \end{vmatrix} \\ &= -2r^2(m_1 - m_2)^2|m_2| \end{aligned}$$

ve

$$A\Delta = (m_1m_2)(-2r^2(m_1 - m_2)^2|m_2|) = 2r^2(m_1 - m_2)^2|m_2|(m_1m_2)$$

bulunur. Elde edilen (2.4) denkleminin çözüm kümesini, Çizelge 2.1'den yararlanarak inceleyelim. $|m_1| \leq 1$ ve $|m_2| > 1$ ise $m_1 - m_2 \neq 0 \neq m_2$ olacağından

$$\delta = (m_1 - m_2)^2 > 0$$

dır ve Δ ya bakılmalıdır:

i) $r > 0$ ise

$$\Delta = -2r^2(m_1 - m_2)^2|m_2| < 0$$

elde edilir. Bu durumda denklemler l_1 ve l_2 doğrularını asimptot kabul eden eşlenik iki Öklid hiperbolü belirtir.

ii) $r = 0$ ise,

$$\Delta = -2r^2(m_1 - m_2)^2|m_2| = 0$$

dır. Bu durumda denklem l_1 ve l_2 doğrularının birleşiminden ibaret kesişen iki doğru belirtir.

3) $m_1 = 0$ ve $m_2 \rightarrow \infty$ için; $l_1 : y = 0$ yataysal, $l_2 : x = 0$ dikeysel bir doğrudur. Bu doğrularla elde edilen iki doğrulu taksikab elipsinin denklemi

$$d_T(X, l_1) \cdot d_T(X, l_2) = r^2$$

den

$$|y| \cdot |x| = r^2$$

ve buradan da

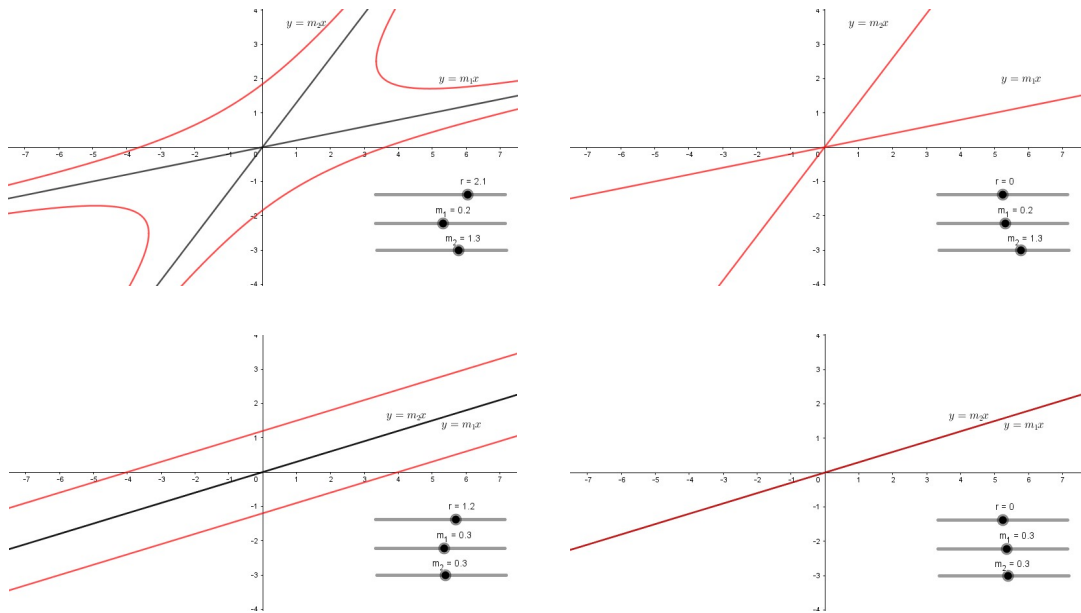
$$xy = \mp r^2$$

denklemi elde edilir. Bu ise,

i) $r > 0$ ise asimptotları eksenler olan bir çift eşlenik Öklid hiperbolü belirtir.

ii) $r = 0$ ise x ve y eksenlerinin birleşiminden oluşan kesişen iki doğrudur.

Taksikab uzaklıklıkların; ötelemeler, I. ve II. açıortay doğrularına ve eksenlere göre yansımalar, orijine göre 90° , 180° , 270° lik dönmeler altında değişmediği dikkate alınırsa teoremin ifadesi elde edilir. İspat tamamlanmıştır (Çolakoğlu 2021b). $\square$



Şekil 2.40. İki doğru yardımıyla elde edilen taksikab hiperbolleri

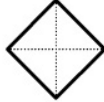
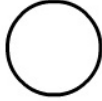
3. MATERYAL VE METOT

Bu tezde matematiksel yöntemler ve kanıtlar kullanılarak, Öklid düzleminde koniklerin temel tanımları derlenmiş ve yalnızca nokta ve doğru yardımıyla verilen konik tanımlarının, daha açık olarak onların "iki nokta", "bir nokta ve bir doğru" ve "iki doğru" konik tanımlarının taksikab düzlemdeki karşılıkları belirlenmiştir. Tez içinde Öklid ve Taksikab geometirinin temel kavramları, tanım ve teoremleri materyal ve metot olarak kullanılmıştır. Bu tezin oluşmasındaki en önemli materyaller bu konuda daha önce yapılmış çalışmalardır. Bunların da en önemlileri (Krause 1987), (Laatsch 1982), (Kaya vd. 2006) ve (Çolakoğlu 2021a, 2021b) dir. Uygulanan yöntemler ve ulaşılan sonuçlar doğrudan ispat, dolaylı ispat, olmayana ergi gibi matematiksel yöntemlerdir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

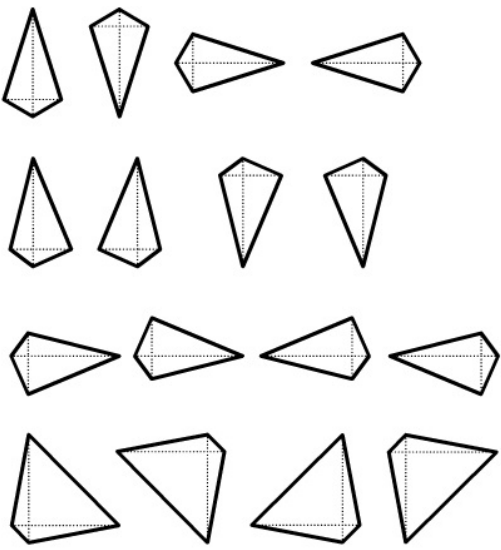
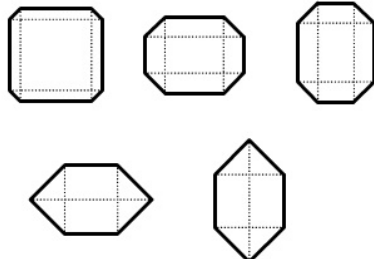
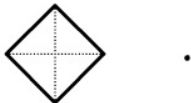
Bu tezde, Öklid geometrisinde bilinen koniklerin yalnızca nokta ve doğru yardımıyla verilen temel tanımlarının, yani "iki odak", "odak-doğrultman" ve "iki doğru" tanımlarının taksikab düzlemdeki karşılıkları dejenere durumlarıyla birlikte belirlenmiştir. Taksikab düzlemde belirlenmiş olan bu konikler aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir:

4.1. Taksikab Çember Tipleri

	Dejenere Olmayan Durumlar	Dejenere Durumlar
Merkez Yarıçap Taksikab Çemberi		.
İki Doğru Taksikab Çemberi	 (Tüm Öklid Çemberleri)	.

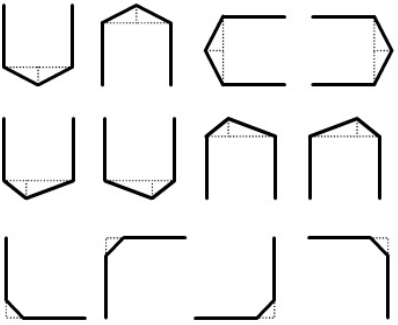
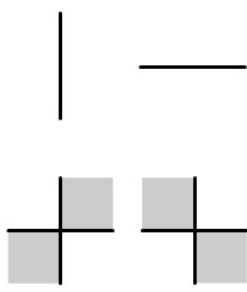
Şekil 2.41. Taksikab çember tipleri (Çolakoğlu 2021b)

4.2. Taksikab Elips Tipleri

	Dejenere Olmayan Durumlar	Dejenere Durumlar
Odak-Doğrultman Taksikab Elipsleri		
İki Odak Taksikab Elipsleri		
İki Doğru Taksikab Elipsleri	 (Tüm Öklid Elipsleri)	 Tüm noktalar Tüm doğrular Tüm paralel doğru çiftleri

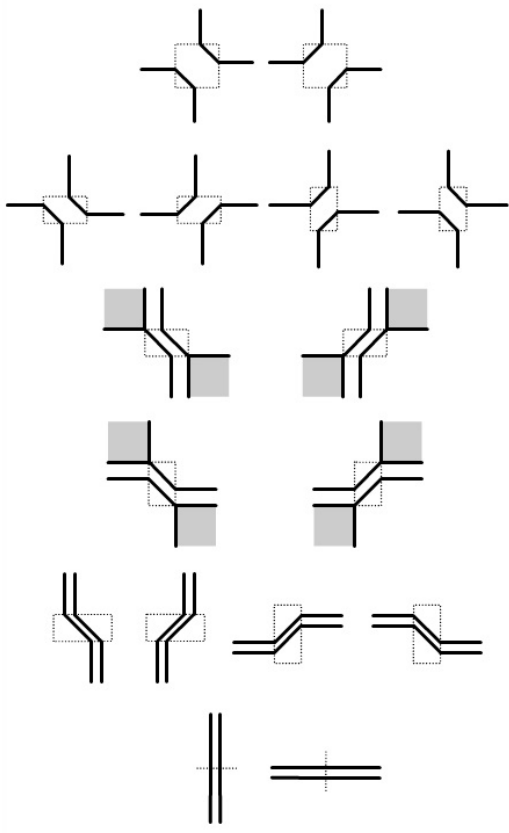
Şekil 2.42. Taksikab elips tipleri (Çolakoğlu 2021b)

4.3. Taksikab Parabol Tipleri

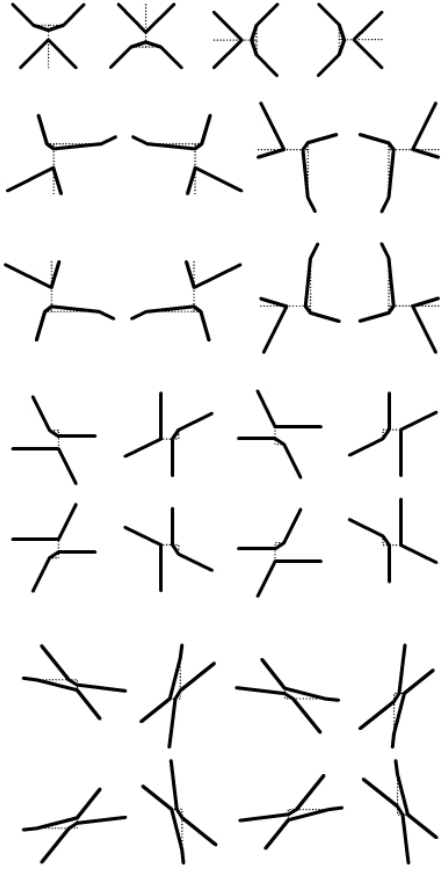
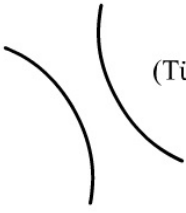
	Dejenere Olmayan Durumlar	Dejenere Durumlar
Odak-Doğrultman Taksikab Parabolleri		

Şekil 2.43. Taksikab parabol tipleri (Çolakoğlu 2021b)

4.4. Taksikab Hiperbol Tipleri

	Dejenere Olmayan Durumlar	Dejenere Durumlar
İki Odak Taksikab Hiperbolleri		

Şekil 2.44. Taksikab hiperbol tipleri (Çolakoğlu 2021b)

	Dejenere Olmayan Durumlar	Dejenere Durumlar
Odak- Doğrultman Taksikab Hiperbollerleri		 Tüm kesişen doğru çiftleri
	Dejenere Olmayan Durumlar	Dejenere Durumlar
İki Doğru Taksikab Hiperbollerleri	 (Tüm Öklid Hiperbollerleri)	 Tüm doğrular Tüm paralel doğru çiftleri Tüm kesişen doğru çiftleri

Şekil 2.44'ün devamı

5. SONUÇLAR

Öklid geometrisinde bir kavram farklı tanımlara sahip olsa da bunların hepsi aynı geometrik nesneye işaret ederler. Bu tanımların taksikab düzlemdeki karşılıkları bazen aynı kalabileceği gibi değişiklik de gösterebilmektedir. Bu durumda aynı kavramın farklı versiyonlarından söz edilebilmektedir. Tez içinde koniklerin üç farklı tanımının taksikab karşılıkları belirlenmiştir ve bunların birbirinden farklı olduğu gözlenmiştir. Daha açık olarak, aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

- 1) Öklid düzleminde çember iki farklı şekilde tanımlanabilir. Bu tanımların taksikab düzlemdeki karşılıkları da farklıdır. Taksikab düzlemde merkez-yarıçap taksikab çemberi köşegenleri eksenlere paralel olan kareler iken, iki doğru taksikab çemberi bildiğimiz Öklid çemberleriyle aynıdır. Bu taksikab çemberlerin dejenere formları birer noktadır.
- 2) Elipsin odak-doğrultman tanımının taksikab karşılığı köşegenleri birbirine dik olan dörtgenlerdir. Bu taksikab elips, yalnızca, doğrultman eksenlere veya açortay doğrularına paralel olduğunda bir simetri eksenine sahiptir ve bu eksen, odaktan geçen ve doğrultmana dik olan doğrudur.
- 3) Elipsin iki odak tanımının taksikab karşılığı genel olarak kenarları eksenlere ve açortay doğrularına paralel ve bu iki odağın orta noktasına göre simetrik olan sekizgenlerdir. Özel olarak, odaklar eksenlere dik doğrular üzerinde olursa altıgen elde edilmektedir. Odakların çakıştığı dejenere durumda ise, taksikab çember elde edilir.
- 4) Elipsin iki doğru tanımının taksikab karşılığı yine Öklid elipsi verir. Bu taksikab elipsin dejenere durumları Öklid dejenere durumlarıyla aynıdır. Verilen bir Öklid elipsinin, hangi doğru çifti için taksikab elipsi olduğu sorusu bir açık problemdir.
- 5) Parabolün odak-doğrultman tanımının taksikab karşılığı dört parçalı (2 ışın ve 2 doğru parçası) ya da üç parçalı (2 ışın ve 1 doğru parçası) olarak elde edilmektedir. Dejenere durumlarında ise, eksenlere paralel doğrular ya da iki çeyrek düzlem parçasının birleşimi elde edilmektedir.

- 6)** Hiperbolün odak-doğrultman tanımının taksikab karşılığı yine iki kanatlıdır. Kanatlar duruma göre 4+2, 3+2 ve 3+3 parçalı olabilmektedir. Bu taksikab hiperbol, yalnızca, doğrultman eksenlere veya açıortay doğrularına paralel olduğunda bir simetri eksenine sahiptir ve bu eksen, odaktan geçen ve doğrultmana dik olan doğrudur.
- 7)** Hiperbolün iki odak tanımının taksikab karşılığı yine iki kanatlıdır ve odakların orta noktasına göre simetriktir. Kanatlar duruma göre birbirine paralel iki doğru olabilirken 3+3 parçalı da olabilmektedir.
- 8)** Hiperbolün iki doğru tanımının taksikab karşılığı yine Öklid hiperbolü verir. Bu taksikab hiperbolünün dejenere durumları Öklid dejenere durumlarıyla aynıdır. Verilen bir Öklid hiperbolünün, hangi doğru çifti için taksikab hiperbol olduğu sorusu bir açık problemdir.

6. KAYNAKLAR

- Apostol T.M., Mnatsakanian, M.A. 2008. New Descriptions of Conics via Twisted Cylinders, Focal Disks, and Directors, *The American Mathematical Monthly*, 115 (9), 795-812 s.
- Çolakoğlu, H.B. 2006. Bazı Öklidyen Problemlerin Taksi Geometrideki Benzerleri. Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Çolakoğlu, H.B. 2009. Taksi, Maksimum, Çin Dama ve Alfa Düzlemlerinin Bazı Özellikleri ve Genelleştirilmesi. Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Çolakoğlu, H.B. 2019. Bilgisayar Destekli Geometri Ders Notları, Akdeniz Üniversitesi, Antalya.
- Çolakoğlu, H.B. 2020. A generalization of the Minkowski distance and new definitions of the central conics, *Turkish Journal of Mathematics*, 44 (1), 319-333 s.
- Çolakoğlu, H.B. 2021a. Geogebra İle Koniklerin Tanımları Üzerine, Çağrılı Konuşma, Matematik Öğretmenlerine Akademik Gelişim Seminerleri-2, Antalya.
- Çolakoğlu, H.B. 2021b. Taksikab Geometri Ders Notları, Akdeniz Üniversitesi, Antalya.
- Kaya, R. 2002. Analitik Geometri. Bilim ve Teknik Yayınevi, Eskişehir.
- Kaya, R., Akça, Z., Günaltılı, İ., Özcan, M. 2000. General Equation for Taxicab Conics and Their Classification. *Mitt. Math. Ges. Hamburg*, 19, 135-148 s.
- Krause, E.F. 1987. Taxicab Geometry. Dover Publications, New York. (İlk basımı: Krause, E.F. 1975. Taxicab Geometry. Addison-Wesley Publition Company, Menlo Park, California.)
- Laatsch, R. 1982. Pyramidal Sections in Taxicab Geometry. *Mitt. Mathematics Magazine*, 55(4), 205-212 s.

- Menger, K. 1952. You Will Like Geometry. Guildbook of the Illinois Institute of Technology Geometry Exhibit, Museum of Science and Industry, Chicago, IL.
- Milmann, R.S. and Parker, G.D. 1991. Geometry; A Metric Approach with Models. Springer.
- Moser, J. and Kramer, J. 1982. Lines and Parabolas in Taxicab geometry, *Pi Mu Epsilon Journal*, 7, 441-448 s.
- Özdemir, M. 2021. Analitik Geometri. Altın Nokta Yayınevi, İzmir.
- Schattschneider, D.J. 1984. The Taxicab Group. *The American Mathematical Monthly*, 91(7), 423-428 s.
- So, S.S. 2002. Recent Developments in Taxicab Geometry. *Cubo Mathematica Educational*, 4 (2), 79-96 s.

ÖZGEÇMİŞ

Merve ÖZER

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2019-2021	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Antalya
Lisans 2014-2018	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya