



**T.C.**

**TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ**

**LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**

**$\alpha$ -TAM METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Dilek KANGAL**

**Danışman: Doç. Dr. Demet BİNBAŞIOĞLU ÖZATILGAN**

**TOKAT- 2025**

## ETİK SÖZLEŞME

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Doç. Dr. Demet BİNBAŞIOĞLU ÖZATILGAN danışmanlığında hazırlamış olduğum “ $\alpha$ -Tam Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri” adlı Yüksek Lisans tezinin bilimsel etik değerlere ve kurallara uygun, özgün bir çalışma olduğunu, aksinin tespit edilmesi halinde her türlü yasal yaptırımını kabul edeceğimi beyan ederim.

07/05/2025

Dilek KANGAL

## ÖNSÖZ

Öğrencisi olmanın şansını hep hissettiğim, yüksek lisans eğitimim boyunca ilgi ve şefkati ile hep yanımda olan, bilgi birikimiyle yoluma ışık tutan, kıymetli danışman hocam Doç. Dr. Demet BİNBAŞIOĞLU ÖZATILGAN' a canı gönülden teşekkür ederim.

Bir matematikçi için mantığın ne kadar önemli olduğunu göstererek hem öğrenciliğime hem öğretmenliğime tesir eden değerli hocam Prof. Dr. Naim ÇAĞMAN' a ve hiçbir ricamızı kırmayıp teknik desteği ile tezin yazım aşamasını kolaylaştıran kıymetli hocam Doç. Dr. Orhan ÖZDEMİR 'e teşekkürü borç bilirim.

Hayatımın her anında olduğu gibi bu süreçte de yanımda olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Dilek KANGAL

Mayıs 2025

# ÖZET

## $\alpha$ -TAM METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Kangal, Dilek  
Yüksek Lisans, Matematik Anabilim Dalı  
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Demet Binbaşioğlu Özatılğan  
Mayıs 2025, vii + 90 sayfa

Bu tez çalışması  $\alpha$ - tam metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri üzerine yapılan güncel çalışmaların bir derlemesi niteliğindedir. Öncelikle sabit nokta kavramı ve Banach Sabit Nokta Teoremi verilmiş, bunlar örneklerle açıklanmıştır. Daha sonra sırasıyla  $\alpha$ - tam metrik uzaylarda kısmi genelleştirilmiş dış bükey büzülme dönüşümleri için yaklaşık sabit nokta teoremleri,  $\alpha$ - tam metrik uzaylarda genelleştirilmiş  $(\alpha, \psi, \phi)$  – rasyonel büzülme dönüşümlerinin sabit noktaları,  $\alpha$ - tam metrik uzaylarda  $(\alpha, \psi, \xi)$  çok değişkenli büzülme dönüşümleri ve bunların sonuçları için yeni sabit nokta sonuçları,  $\alpha$ - tam metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Çok Değerli Dönüşümler, Genelleştirilmiş Büzülme Dönüşümleri, Sabit Nokta, Yaklaşık Sabit Nokta,  $\alpha$ -Tam Metrik Uzay.

**ABSTRACT**  
**FIXED POINT THEOREMS IN  $\alpha$ -COMPLETE METRIC SPACES**

Kangal, Dilek  
Master's Thesis, Department of Mathematics  
Advisor: Assoc.Prof.Dr. Demet Binbaşıoğlu Özatılğan  
May 2025, vii + 90 pages

This thesis presents a comprehensive review of recent developments concerning fixed point theorems in  $\alpha$ -complete metric spaces. It begins with an introduction to the notion of fixed points and the Banach Fixed Point Theorem, illustrated with examples. Subsequent sections examine approximate fixed point theorems for partially generalized convex contractions, fixed points of generalized  $(\alpha, \psi, \phi)$ -rational contractions, and new results related to  $(\alpha, \psi, \xi)$ - multivariable contraction mappings. These findings aim to enrich the understanding of fixed point theory within generalized metric frameworks.

**Key Words:** Approximate Fixed Point, Fixed Point, Generalized Contraction Mappings, Multivalued Mappings,  $\alpha$ -Complete Metric Space.

## İÇİNDEKİLER

|                                                                                                                                        |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ETİK SÖZLEŞME . . . . .                                                                                                                | i   |
| JÜRİ KABUL VE ONAY . . . . .                                                                                                           | ii  |
| ÖNSÖZ . . . . .                                                                                                                        | iii |
| ÖZET . . . . .                                                                                                                         | iv  |
| ABSTRACT . . . . .                                                                                                                     | v   |
| SİMGE ve KISALTMALAR . . . . .                                                                                                         | vii |
| 1. GİRİŞ . . . . .                                                                                                                     | 1   |
| 2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR . . . . .                                                                                                  | 3   |
| 2.1. Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teorisine Giriş: Temel Bilgiler . . . . .                                                            | 3   |
| 2.2. $\alpha$ -Tam Metrik Uzaylara Giriş . . . . .                                                                                     | 5   |
| 3. BULGULAR . . . . .                                                                                                                  | 24  |
| 3.1. Kısmi Genelleştirilmiş Dış Bükey Büzülme Dönüşümleri için Yaklaşık Sabit Nokta Teoremleri . . . . .                               | 24  |
| 3.2. Keyfi Bir İkili İlişki ile Donatılmış Metrik Uzayda Yaklaşık Sabit Nokta Teoremleri . . . . .                                     | 35  |
| 3.3. Grafik İle Yaklaşık Sabit Nokta Analizi . . . . .                                                                                 | 36  |
| 3.4. $\alpha$ -Tam Metrik Uzaylarda Genelleştirilmiş $(\alpha, \psi, \phi)$ -Rasyonel Büzülme Dönüşümlerinin Sabit Noktaları . . . . . | 37  |
| 3.5. $\alpha$ -Tam Metrik Uzaylarda $(\alpha, \psi, \xi)$ -Çoğul Değerli Büzülme Dönüşümleri ve Sabit Nokta Sonuçları . . . . .        | 53  |
| 3.6. Keyfi İkili İlişki İle Donatılmış Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Sonuçları . . . . .                                                | 62  |
| 3.7. Bir Grafik İle Donatılmış Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Sonuçları . . . . .                                                        | 63  |
| 3.8. $\alpha - \eta - \psi$ Rasyonel Büzülme Dönüşümleri İçin Sabit Nokta Teoremleri . . . . .                                         | 64  |
| 3.9. Suzuki Tipi Sabit Nokta Sonuçları . . . . .                                                                                       | 73  |
| 3.10. Büzülme Grafikleri İçin Sabit Nokta Sonuçları . . . . .                                                                          | 76  |
| 4. İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞINA UYGULAMA . . . . .                                                                        | 81  |
| 5. TARTIŞMA VE SONUÇ . . . . .                                                                                                         | 84  |
| KAYNAKLAR . . . . .                                                                                                                    | 85  |
| ÖZGEÇMİŞ . . . . .                                                                                                                     | 90  |

## SİMGE ve KISALTMALAR

| Simgeler       | Açıklamalar                           |
|----------------|---------------------------------------|
| $\mathbb{R}$   | Gerçel Sayılar Kümmesi                |
| $\mathbb{R}^+$ | Negatif Olmayan Gerçel Sayılar kümesi |
| $\mathbb{N}$   | Pozitif Tamsayılar Kümesi             |
| $\omega$       | Omega                                 |
| $\tau$         | Tau                                   |
| $\eta$         | Eta                                   |
| $\upsilon$     | Upsilon                               |
| $\epsilon$     | Epsilon                               |
| $\mu$          | Mu                                    |
| $\psi$         | Psi                                   |
| $\xi$          | Xi                                    |
| $\phi$         | Varphi                                |
| $\pi$          | Pi                                    |
| $\varphi$      | Phi                                   |
| $\delta$       | Delta                                 |
| $\sigma$       | Sigma                                 |
| $\alpha$       | Alpha                                 |
| $\vartheta$    | Theta                                 |
| $\beta$        | Beta                                  |

## 1. GİRİŞ

Mühendislikten davranış bilimlerine, ekonomiden yapay zeka teknolojisine, tıptan oyun teorisine kadar geniş bir yelpazade kullanım alanı bulunan sabit nokta kavramı ilk kez, modern fonksiyonel analizin kurucu sayılan Polonyalı matematikçi Stefan Banach tarafından 1922’de ortaya konmuştur. Banach Sabit Nokta Teoremi iteratif yöntemlerle sabit noktanın bulunabileceğini göstermektedir ve halen en çok kullanılan sabit nokta teoremidir.

Metrik uzayların daha genel bir versiyonunu olan  $\alpha$ -metrik uzay kavramı 2015 yılında Jleli & Samet tarafından oluşturuldu. Böylelikle klasik sabit nokta teoremleri,  $\alpha$ -metrik uzaylara genelleştirildi ve yeni tür büzülme fonksiyonları tanımlanmış oldu. Karapınar, Abbas ve Sintunavarat’un 2016-2020 arasında yaptıkları çalışmalarla  $\alpha$ -metrik uzaylarda zayıf ve güçlü büzülmeler için genelleştirilmiş sabit nokta teoremleri geliştirmiştir.

Ortaya koyduğumuz bu tez çalışmasında ise  $\alpha$ -tam metrik uzaylarda sabit nokta nokta teoremleri hakkındaki literatür taraması yapılarak, bu konudaki güncel çalışmalar derlenmiştir.

Tezimiz beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm olan giriş kısmında tezin genel yapısından bahsedilmiştir.

İkinci bölümde sabit nokta kavramına tanımlanıp, örneklenmiş, sonrasında Banach Büzülme Prensibi verilmiş ve çeşitli örnekler üzerinde incelenmiştir.

Üçüncü bölümde kısmi genelleştirilmiş dışbükey büzülmeler ve 2. dereceden kısmi genelleştirilmiş dışbükey büzülme kavramları tanıtılmış, ayrıca  $\alpha$ -tam metrik uzaylarda bu tür dönüşümler için bazı yaklaşık sabit nokta teoremleri oluşturulmuştur.  $\alpha$ -tam metrik uzaylarda  $(\alpha, \psi, \phi)$ -rasyonel büzülme dönüşümleri ve  $(\alpha, \psi, \xi)$ -çoğul değerli büzülmeleri incelenmiştir. Ek olarak üzerinde keyfi bir ikili ilişki olan metrik uzaylarda ve üzerinde keyfi bir grafik olan metrik uzaylarda yaklaşık sabit nokta sonuçları ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde ise elde ettiğimiz sonuçlar integral denklemlerinin valığına uygulanmıştır.

Tartışma ve sonuç kısmında ise sabit nokta teorisinin öneminden bahsedilerek kullanım alanlarına değinilmiştir.



## 2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

### 2.1. Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teorisine Giriş: Temel Bilgiler

**Tanım 2.1.1.**  $X$  boştan farklı küme,  $T : X \rightarrow X$  dönüşüm olmak üzere

$$T(x) = x$$

eşitliğini sağlayan  $x \in X$  noktasına  $T$  dönüşümünün sabit noktası adı verilir.

$T : X \rightarrow X$  dönüşümünün bir veya birden çok sabit noktası olabileceği gibi herhangi bir sabit noktası olmayabilir de. Bunu çeşitli örneklerle inceleyelim.

**Örnek 2.1.2.**  $X = \mathbb{R}$  yi alalım.  $T(x) = x+7$  öteleme dönüşümü herhangi bir sabit nokta içermez.

**Örnek 2.1.3.**  $X = \mathbb{R}$ ,  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$T(x) = \frac{x}{2} + 1$$

şeklinde tanımlansın.  $T$  bir tek sabit noktaya sahiptir. O da  $x=2$  dir.

**Örnek 2.1.4.**  $X = \mathbb{N}$  için

$$T(x) = |x|$$

ile tanımlı  $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mutlak değer dönüşümünün sonsuz sayıda sabit noktası vardır.

$I$ ,  $X$  üzerindeki birim dönüşüm olmak üzere  $T : X \rightarrow X$  fonksiyonunun sabit noktaları aslında

$$(T - I)(x) = 0$$

denkleminin çözümleridir. O halde bir denklemin çözümünü bulmak için kullanılan metodlardan biri, buna karşılık gelen dönüşümün sabit noktalarını bulmaktır.

**Tanım 2.1.5.**  $(X, d)$  metrik uzay,  $T : X \rightarrow X$  bir dönüşüm olsun. Her  $x, y \in X$  için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

şeklinde  $0 < k < 1$  var ise  $T$  ye büzülme dönüşümü denir

**Tanım 2.1.6.**  $X \neq \emptyset$ ,  $T : X \rightarrow X$  olsun.  $n$  tane  $T$ 'den elde edilen

$$T \circ T \circ \dots \circ T(x) = T(T(\dots T(x)\dots))$$

ifadesine  $T^n$  dönüşümünün ,  $n$ . iterasyonu adı verilir.

$$T^n = T \circ T \circ \dots \circ T$$

ile gösterilir.

**Örnek 2.1.7.**  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ,  $T(x) = 2x + 1$  dönüşümünün beşinci iterasyonu

$$T^5(x) = 2(2(2(2(2x + 1) + 1) + 1) + 1) + 1 = 32x + 31$$

ile verilir.

Sabit nokta teoremlerinin uygulamaları yaklaşım teorisi, diferensiyel denklemler teorisi, integral denklemler teorisindeki problemlerin çözülmesinde matematik, kimya, istatistik, biyoloji ve ekonominin çeşitli disiplinleri için çok önemlidir. Sabit nokta teoride çok kullanışlı araçlardan biri 1922'de ortaya konan Banach büzülme ilkesidir.

**Teorem 2.1.8. (Banach Sabit Nokta Teoremi)**  $(X, d)$  tam metrik uzay,  $T : X \rightarrow X$  büzülme dönüşümü yani  $\forall x, y \in X$  için

$$d(Tx, Ty) = k.d(x, y)$$

şeklinde  $k \in [0, 1)$  var olsun. Bu durumda  $T$ 'nin sabit noktası tektir.

**Örnek 2.1.9.**  $T(x) = x+1$  ile tanımlı  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dönüşümünü ele alalım.

$$|T(x) - T(y)| \leq |x - y|$$

dir. Görüldüğü üzere  $T$  sabit bir noktaya sahip değildir.

**Örnek 2.1.10.**

$$T(x) = x + 1 - \frac{x}{1 + |x|}$$

$T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dönüşümünü ele alalım

$$|T'(x)| = 1 - (1 + |x|)^{-2} < 1,$$

bu nedenle bütün  $x < y$  için

$$|T(y) - T(x)| = \left| \int_x^y T'(t) dt \right| \leq \int_x^y |T'(t)| dt < \int_x^y dt = |y - x|$$

dir. O halde herhangi  $x, y$  için

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y)$$

olup  $T$ 'nin herhangi bir sabit noktası mevcut değildir.

**Örnek 2.1.11.**  $T(x) = x$ ,  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dönüşümünü inceleyelim.

$|T(x) - T(y)| \leq |x - y|$  eşitsizliğinin sağlandığını görürüz. Dolayısıyla her  $x$  reel sayısı  $T$  nin sabit noktasıdır.  $x \in \mathbb{R}$  olmak şartıyla her  $x$   $T$  nin sabit noktasıdır.

Yani sabit nokta tek değildir.

## 2.2. $\alpha$ -Tam Metrik Uzaylara Giriş

Sabit nokta teorisi lineer olmayan türev ve integral denklemlerinin çözümünün varlığının ispatında kullanıldığı çözüm için önemli bir araç haline almıştır. Ama bazı pratik durumlarda sabit nokta teoremlerinin şartları çok güçlüdür. Bu yüzden sabit noktanın varlığı garanti değildir. Bu durumda yaklaşık sabit noktalar olarak adlandırılan hemen hemen sabit noktaları dikkate alabiliriz.

Bu bölümde hemen hemen sabit nokta,  $\alpha$ -admissible, asimptotik düzenlilik tanımları ve bunların örnekleri verilmiştir. Kısmi genelleştirilmiş dışbükey büzülmeler ve 2. dereceden kısmi genelleştirilmiş büzülmeler kavramlarını tanıtlıp,  $\alpha$ -tam metrik

uzay- larda bu tür eşlemeler için bazı sabit nokta teoremleri oluşturulmuştur. Ayrıca üzerinde keyfi bir ikili ilişki olan metrik uzaylarda yaklaşıksabit nokta sonuçları ve üzerinde grafik olan grafi metrik uzaylarda yaklaşık sabit nokta sonuçları ele alınmıştır.

**Tanım 2.2.1.**  $(X, d)$  metrik uzay,  $T$  bu uzay üzerinde kendi içine dönüşüm,  $\varepsilon > 0$  verilen bir sayı olmak üzere  $x_0 \in X$  noktası  $d(x_0, Tx_0) < \varepsilon$  ise  $T$  nin bir  $\varepsilon$ -sabit noktası (yaklaşıksabit noktası) olarak adlandırılır. (Reich ve ark., 1978)

Yaklaşıksabit nokta bir dönüşümün noktayı kendisine oldukça yakın bir noktaya götürdüğü durumları tanımlamak için kullanılan bir kavramdır. Bazı durumlarda tam olarak sabit nokta bulmak yerine, yaklaşık sabit nokta ile ilgilenmek yeterlidir.

**Uyarı 2.2.2.** Sabit noktanın tüm  $\varepsilon > 0$  için  $\varepsilon$ -sabit noktaları olduğunu gözlemliyoruz. Ancak bunun tersi doğru değildir.  $(X, d)$  metrik uzay olmak şartıyla verilen  $\varepsilon > 0$  için  $T : X \rightarrow X$  deki bütün  $\varepsilon$ -sabit noktalar kümesi

$$F_\varepsilon(T) := \{x \in X \mid d(x, Tx) < \varepsilon\}$$

olarak tanımlanır. (Latif ve ark., 2015)

**Tanım 2.2.3.**  $(X, d)$  metrik uzay,  $T : X \rightarrow X$  de verilen dönüşüm olmak koşuluyla, bütün  $\varepsilon > 0$  için  $T$  dönüşümünün bir  $\varepsilon$ -sabit noktası varsa,  $T$  nin yaklaşık sabit nokta özelliğine sahip olduğunu söyleriz. Yani

$$\forall \varepsilon > 0, \quad F_\varepsilon(T) \neq \emptyset$$

veya eşdeğer olarak

$$\inf_{x \in X} d(x, Tx) = 0$$

dır.

1996'da Browder ve Petryshyn aşağıdaki kavramları tanımladılar.

**Tanım 2.2.4.** Eğer  $x \in X$  için  $n \rightarrow \infty$  iken  $d(Tx^n, Tx^{n+1}) \rightarrow 0$  oluyorsa,  $(X, d)$  metrik uzayındaki  $T$  kendi içine dönüşümü  $x \in X$  noktasında asimptotik olarak düzenli olarak adlandırılır. Burada  $Tx^n$ ,  $T$  nin  $x$  e  $n$  kere uygulandığını ifade eder.

**Lemma 2.2.5.**  $(X, d)$  metrik uzay olmak koşuluyla,  $X$  üzerinde kendi içine dönüşüm olan  $T$ ,  $z \in X$  de asimptotik olarak düzenli olsun, öyle ise  $T$  yaklaşık sabit nokta özelliğine sahiptir. (Latif ve ark., 2015)

**İspat.**  $n \in \mathbb{N}$  için  $\inf_{x \in X} d(x, Tx) \leq d(Tz^n, Tz^{n+1}) \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$  dır.  $T, z \in X$  de asimptotik olarak düzenli olduğundan

$$d(Tz^n, T(Tz^n)) = d(Tz^n, Tz^{n+1}) \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

dır.

$$\inf_{x \in X} d(x, Tx) = 0$$

olur. Bu da  $T$  nin yaklaşık sabit nokta özelliğine sahip olduğunu gösterir.

2012’de Samet ve arkadaşları aşağıdaki  $\alpha$ –admissible dönüşüm kavramını tanıttılar.

**Tanım 2.2.6.**  $T$  boş olmayan  $X$  kümesi üzerinde kendi içine dönüşüm ve  $\alpha : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  dönüşüm olmak üzere  $x, y \in X$ ,

$$\alpha(x, y) \geq 1 \Rightarrow \alpha(Tx, Ty) \geq 1$$

ise  $T$  dönüşümüne  $\alpha$ –admissible adı verilir.

**Tanım 2.2.7.**  $(X, d)$  metrik uzay olmak üzere  $\alpha : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  dönüşümü verilsin  $X$  metrik uzayına  $\alpha$ –tam denir ancak ve ancak bütün  $n \in \mathbb{N}$  ler için  $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$  olacak biçimdeki her  $\{x_n\}$  Cauchy dizisi  $X$ ’de yakınsaktır.

**Uyarı 2.2.8.** Tam metrik uzaylar aynı zamanda  $\alpha$ –tam metrik uzaydır. Fakat tersi doğru değildir.

**Örnek 2.2.9.** Bütün  $x, y \in X$ ,  $X = (0, \infty)$  üzerinde

$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  metriği  $d(x, y) = |x - y|$  olsun.  $\alpha : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  dönüşümü

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{2} & x, y \in [1, 2] \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlansın.  $(X, d)$  nin tam metrik uzay olmadığı fakat  $\alpha$ -tam metrik olduğu kolayca görülür. Esasında  $\{x_n\}$ ,  $X$ ’ de bir Cauchy dizisi olup bütün  $n \in \mathbb{N}$  ler için

$\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $x_n \in [1, 2]$  dir.  $[1, 2]$ ,  $\mathbb{R}$  nin kapalı alt kümesi olduğundan  $([1, 2], d)$  tam metrik uzaydır ve bu durumda  $x^* \in [1, 2]$  var olup

$$x_n \rightarrow x^*, n \rightarrow \infty$$

dir. (Latif ve ark., 2015)

**Tanım 2.2.10.**  $T : X \rightarrow X$ ,  $\alpha : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  olmak koşuluyla Eğer  $x, y, z \in X$  olmak üzere

i  $T$  bir  $\alpha$ -admissible dönüşüm

ii  $(x, y) \geq 1$  ve  $(y, z) \geq 1 \Rightarrow (x, z) \geq 1$ ,

ise  $T$  üçgensel  $\alpha$ -admissible dönüşümdür.

(Karapınar ve ark., 2013)

**Lemma 2.2.11.**  $T$  bir üçgensel  $\alpha$ -admissible dönüşüm olsun. Kabul edelim ki  $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$  olacak biçimde  $x_0 \in X$  mevcuttur.  $x_{n+1} = Tx_n$  şeklinde  $\{x_n\}$  dizisini tanımlayalım.  $m, n \in \mathbb{N}$  için  $m < n$  olmak üzere  $\alpha(x_m, x_n) \geq 1$  dir. (Karapınar ve ark., 2013)

**Tanım 2.2.12.**  $(X, d)$  metrik uzayı ve  $\alpha : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ ,  $T : X \rightarrow X$  dönüşümleri verilsin,  $X$ ’ de her  $\{x_n\}$  dizisi  $x \in X$  ve her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$x_n \rightarrow x, n \rightarrow \infty \alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1 \Rightarrow Tx_n \rightarrow Tx, n \rightarrow \infty$$

koşulunu sağlıyorsa  $T$  ye  $(X, d)$  üzerinde bir  $\alpha$ -süreklî dönüşüm denir. (Karapınar ve ark., 2013)

**Uyarı 2.2.13.** Eğer  $T$  bir süreklî dönüşüm ise o zaman  $T$  bir  $\alpha$ -süreklî dönüşümdür. Burada  $\alpha : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  bir keyfî dönüşümdür.

(Latif ve ark., 2015)

**Örnek 2.2.14.**  $X = (0, \infty)$  ile  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  bütün  $x, y \in X$  ler için  $d(x, y) = |x - y|$  olarak tanımlanan bir metriktir.  $\alpha : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  ile  $T : X \rightarrow X$  dönüşümü

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1 & x, y \in [1, 2] \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ve

$$Tx = \begin{cases} \frac{x}{2} & x \in [1, 2] \\ x^2 - 6x + 12 & x \in (0, 1) \cup (2, \infty) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.  $x = 1$  de  $T$  nin limitinin olmadığını görmek kolaydır. Bundan dolayı  $T$  sürekli değildir. Şimdi  $T$  nin  $\alpha$ -s sürekliliğini gösterelim. Bütün  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$  olacak biçimde  $X$ 'de  $\{x_n\}$  bir dizi olmak koşuluyla  $n \in \mathbb{N}$  için  $x_n \in [1, 2]$  ve  $Tx_n = \frac{x_n}{2}$  dir. Eğer bazı  $x \in X$  için  $n \rightarrow \infty$  iken burada  $x_n \rightarrow x$  ise  $n \rightarrow \infty$ ,  $Tx_n = \frac{x_n}{2} \rightarrow \frac{x}{2}$  dir. Öyle ise  $T$   $\alpha$ -süreklidir. (Latif ve ark., 2015)

**Tanım 2.2.15.**  $X$  boştan farklı bir küme,  $\alpha : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  dönüşümü verilsin. Eğer tüm  $x, y \in X$  için,

$$(x, z) \geq 1 \text{ ve } \alpha(y, z) \geq 1$$

olmak koşuluyla  $z \in X$  mevcut ise  $X$ ,  $(H)$  özelliğine sahiptir deriz. (Latif ve ark., 2015)

Şimdi kısmi genelleştirilmiş dışbükey büzülme ve 2. dereceden kısmi genelleştirilmiş dışbükey büzülme kavramlarını tanıtaacağız.

**Tanım 2.2.16.**  $(X, d)$  metrik uzay olmak üzere  $a, b \in [0, \infty)$ ,  $a+b < 1$  olacak şekilde  $\alpha : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  dönüşümü var ve aşağıdaki koşulları sağlıyor ise  $T : X \rightarrow X$  dönüşümüne bir kısmi genelleştirilmiş dışbükey büzülme denir.

Tüm  $x, y \in X$  için

$$\alpha(x, y) \geq 1 \Rightarrow d(T^2x, T^2y) \leq ad(Tx, Ty) + bd(x, y). \quad (2.2.1)$$

Bu durumda  $\alpha$  ya  $T$  nin taban dönüşümü denir. Eğer tüm  $x, y \in X$  için  $\alpha(x, y) = 1$  ise  $T$  dışbükey büzülme dönüşümü adını alır.(Latif ve ark., 2015)

**Tanım 2.2.17.**  $(X, d)$  metrik uzayı verilsin. Şayet  $\alpha : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  dönüşümü var ve  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in [0, 1)$  ile  $a_1 + a_2 + b_1 + b_2 < 1$  aşağıdaki koşulları sağlıyor ise  $T : X \rightarrow X$  dönüşümüne 2. dereceden kısmi genelleştirilmiş dışbükey büzülme denir. Her  $x, y \in X$  olmak koşuluyla

$$\alpha(x, y) \geq 1 \Rightarrow d(T^2x, T^2y)$$

$$\leq a_1d(x, Tx) + a_2d(Tx, T^2x) + b_1d(y, Ty) + b_2d(Ty, T^2y) \quad (2.2.2)$$

dir. Bu durumda  $\alpha$  ya  $T$  nin taban dönüşümü denir. Şayet  $x, y \in X$  iken  $\alpha(x, y) = 1$  ise  $T$ , 2. dereceden dışbükey büzülme dönüşümü adını alır.(Latif ve ark., 2015)

Şimdi keyfi bir ikili ilişki ile donatılmış metrik uzayda yaklaşık sabit nokta teoremlerini oluşturmak için gerekli tanım ve kavramları verelim.

$(X, d)$  bir metrik uzay ve  $R$ ,  $X$  üzerinde keyfi ikili ilişki olmak koşuluyla

$$S := R \cup R^{-1}$$

biçiminde ifade edilsin. Dolayısıyla

$$x, y \in X, xSy \Leftrightarrow xRy \text{ veya } yRx$$

dir.  $S$  'nin  $R$  ye simetrik ilişki ile bağlı olduğunu görmek kolaydır.

**Tanım 2.2.18.**  $T$  boş olmayan bir  $X$  kümesi üzerinde kendi içine dönüşüm ve  $R$ ,  $X$  üzerinde bir ikili ilişki olmak koşuluyla

$$x, y \in X, xSy \implies (Tx) S (Ty)$$

önermesi sağlanıyorsa  $T$  karşılaştırma dönüşümü adını alır(Latif ve ark., 2015)

**Tanım 2.2.19.**  $(X, d)$  metrik uzay,  $R$  ise  $X$  üzerinde ikili ilişki olmak üzere  $X$  metrik uzayına  $S$ -tam denir ancak ve ancak tüm  $n \in \mathbb{N}$  için  $\{x_n\}$  Cauchy dizisi  $x_n S x_{n+1}$  koşulunu sağlar ve bu dizi yakınsaktır. (Latif ve ark., 2015)

**Tanım 2.2.20.**  $(X, d)$  metrik uzay,  $X$ 'de  $R$  ikili ilişkisi verilsin. Şayet  $X$  deki her bir  $\{x_n\}$  dizisi için bazı  $x \in X$  için  $n \rightarrow \infty$  iken  $x_n \rightarrow x$  ve tüm  $n \in \mathbb{N}$  için  $x_n S x_{n+1} \implies n \rightarrow \infty$  iken  $Tx_n \rightarrow Tx$  koşulunu sağlıyorsa  $T : X \rightarrow X$   $(X, d)$  de  $S$ -süreklidir. (Latif ve ark., 2015)

**Tanım 2.2.21.**  $(X, d)$  metrik uzayı ile  $X$  üzerinde  $R$  ikili ilişkisi verilsin. Şayet  $a + b < 1$  ile  $a, b \in [0, \infty)$  iken  $x, y \in X$  için

$$xSy \implies d(T^2x, T^2y) \leq ad(Tx, Ty) + bd(x, y)$$

koşulunu sağlıyorsa  $T : X \rightarrow X$  dönüşümüne  $S$  ye göre kısmi genelleştirilmiş dışbükey büzülme dönüşümü denir. (Latif ve ark., 2015)

**Tanım 2.2.22.**  $(X, d)$  metrik uzay,  $X$  üzerinde  $R$  ikili ilişki verilsin. Şayet  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in [0, 1)$ ,  $a_1 + a_2 + b_1 + b_2 < 1$  iken  $x, y \in X$  için,

$$xSy \implies d(T^2x, T^2y) \leq a_1d(x, Tx) + a_2d(Tx, T^2x) + b_1d(y, Ty) + b_2d(Ty, T^2y)$$

koşulu sağlanıyorsa  $T : X \rightarrow X$  dönüşümüne  $S$  ye göre 2.dereceden kısmi genelleştirilmiş dışbükey büzülme dönüşümü denir. (Latif ve ark., 2015)

**Tanım 2.2.23.** Boş kümeden farklı  $X$  kümesi verilsin.  $R$ ,  $X$  üzerinde ikili ilişki olmak koşuluyla tüm  $x, y \in X$  için  $xSz$  ve  $ySz$  olacak biçimde  $z \in X$  var ise,  $X$  in  $(H)$  özelliğine sahiptir. (Latif ve ark., 2015)

$\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$  kümesine  $XX$  kartezyen çarpımının diagonalı (köşegeni) denir.

Köşelerin kümesi  $V(G)$ ,  $X$  ile çakışan ve kenarlarının kümesi  $E(G)$  tüm döngüleri içeren  $G$  grafiğini ele alalım.  $\Delta \subseteq E(G)$  dir.  $G$  nin paralelkenar olmadığını varsayıyoruz, bu yüzden  $G$  yi  $(V(G), E(G))$  çifti ile tanımlıyoruz. Dahası her kenara köşeler arası mesafeyi atayarak  $G$  yi ağırlıklı grafik olarak ele alabiliriz.

**Tanım 2.2.24.**  $X$  grafikle donatılmış boş olmayan bir küme olsun.  $x, y \in X$  için

$$(x, y) \in E(G) \Rightarrow (Tx, Ty) \in E(G)$$

oluyorsa  $T : X \rightarrow X$  e kenar koruyan denir. (Latif ve ark., 2015)

**Tanım 2.2.25.**  $(X, d)$  grafikle donatılmış metrik uzay olsun.  $X$  metrik uzayına  $E(G)$ -tam denir ancak ve ancak tüm  $n \in \mathbb{N}$  için  $X$  de  $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$  olacak biçimdeki tüm  $\{x_n\}$  Cauchy dizileri  $X$  de yakınsaktır. (Latif ve ark., 2015)

**Tanım 2.2.26.**  $T : X \rightarrow X$  dönüşüm ve  $(X, d)$ ,  $G$  grafiği ile donatılmış bir metrik uzay olsun. Şayet  $X$  deki her  $\{x_n\}$  Cauchy dizisi, bazı  $x \in X$  için  $n \rightarrow \infty$  iken  $x_n \rightarrow x$  ve tüm  $n \in \mathbb{N}$  ler için  $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$  iken  $n \rightarrow \infty$ ,  $Tx_n \rightarrow Tx$  oluyorsa o zaman  $T$  ye  $(X, d)$  üzerinde bir  $E(G)$ -süreklî dönüşüm denir. (Latif ve ark., 2015)

**Tanım 2.2.27.**  $G$  grafiğiyle donatılmış  $(X, d)$  metrik uzayı verilsin tüm  $x, y \in X$  ile  $a, b \in [0, \infty)$ ,  $a + b < 1$  için

$$(x, y) \in E(G) \Rightarrow d(T^2x, T^2y) \leq ad(Tx, Ty) + bd(x, y)$$

şartını sağlıyorsa  $T : X \rightarrow X$  dönüşümüne  $E(G)$  ye göre bir kısmi genelleştirilmiş dışbükey büzülme dönüşümü denir. (Latif ve ark., 2015)

**Tanım 2.2.28.**  $(X, d)$   $G$  grafiğiyle donatılmış metrik uzay olmak üzere  $a_1 + a_2 + b_1 + b_2 < 1$  olacak şekilde  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in [0, 1)$  var ve bütün  $x, y \in X$  ler için  $(x, y) \in E(G)$  olduğunda

$$d(T^2x, T^2y) \leq a_1d(x, Tx) + a_2d(Tx, T^2x) + b_1d(y, Ty) + b_2d(Ty, T^2y)$$

şartı sağlanıyorsa  $T : X \rightarrow X$  dönüşümüne 2.dereceden kısmi genelleştirilmiş büzülme dönüşümü denir. (Latif ve ark., 2015)

**Örnek 2.2.29.**  $(X, d)$  metrik uzayı ile  $T : X \rightarrow X$  tanımlı dönüşümü verilsin.  $T$  nin  $G$  grafiğine göre genel kısmi dışbükey büzülme dönüşümü ve 2. dereceden kısmi dışbükey büzülme dönüşümü olduğunu kolaylıkla görürüz. Burada  $G = (V(G), E(G)) := (X, \Delta)$  dir.

**Tanım 2.2.30.**  $G$  grafiği ile donatılmış boştan farklı  $X$  kümesi verilsin. Şayet bütün  $x, y \in X$  ler için  $(x, z) \in E(G)$  ve  $(y, z) \in E(G)$  olacak biçimde  $z \in X$  varsa  $X, (H_E)$  özelliğine sahiptir denir. (Latif ve ark., 2015)

Literatürdeki mevcut çalışmalarından hareketle metrik uzayda bir genelleştirilmiş  $(\alpha, \psi, \phi)$ -rasyonel büzülme dönüşümünü tanıtıyoruz. (Latif ve ark., 2015)

**Tanım 2.2.31.**  $(X, d)$  metrik uzayı ile  $\alpha : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  ve  $T : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  dönüşümleri verilsin.  $T : X \rightarrow X$ ,  $X$ 'de bir kendi içine dönüşüm olsun. Eğer  $\psi \in \Psi$ ,  $\phi \in \Phi$  ve  $\psi_1 \in \Psi_1$  var ise her  $x, y \in X$  ile

$$\frac{1}{2}d(x, Tx) \leq d(x, y) \text{ ve } \alpha(x, y) \geq 1$$

olması

$$\psi d(Tx, Ty) \leq \psi(M_{\psi_1}(x, y)) - \phi(M_{\psi_1}(x, y)) \quad (2.2.3)$$

olduğunu gösterir. Burada

$$M_{\psi_1}(x, y) = \psi_1(d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty)),$$

$$\left( \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2}, \frac{d(y, Ty)[1 + d(x, Tx)]}{1 + d(x, y)}, \frac{d(y, Tx)[1 + d(x, Ty)]}{1 + d(x, y)} \right) \quad (2.2.4)$$

dir. O zaman  $T$ 'ye bir genelleştirilmiş  $(\alpha, \psi, \phi)$ -rasyonel büzülme dönüşümü deriz. (Babu ve ark., 2017)

**Örnek 2.2.32.**  $X = [0, 10)$  genel metrik olsun.  $T : X \rightarrow X$

$$Tx = \begin{cases} \frac{3x}{8} & x \in [0, 1] \text{ ise} \\ x & x \in (1, 10) \text{ ise} \end{cases}$$

ve  $\alpha : X \times X \rightarrow [0, \infty)$

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 2 & x \in [0, 1] \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlarız.  $\alpha(x, y) \geq 1$  a eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul  $x, y \in [0, 1]$  olduğundan

$x, y \in [0, 1]$  ile

$$\frac{1}{2}d(x, Tx) \leq d(x, y)$$

için (3.1.1) eşitsizliğini doğrularız. Bu amaç için

$$\psi(t) = \frac{8}{3}t$$

ve

$$\phi(t) = \begin{cases} 2 & t = 0 \text{ ise} \\ \frac{5t}{3} & t \neq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

den  $\psi, \phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  ve

$$\psi_1(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = \max\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}$$

dan  $\psi_1 : [0, \infty)^6 \rightarrow [0, \infty)$  seçeriz.  $x, y \in [0, 1]$  olsun. Genelliği kaybetmeden  $x \leq y$  v.b,  $\frac{13}{8}x \leq y$ . Şimdi

$$\begin{aligned} \psi(d(Tx, Ty)) &= \psi\left(d\left(\frac{3x}{8}, \frac{3y}{8}\right)\right) = \psi\left(\left|\frac{3y}{8} - \frac{3x}{8}\right|\right) = \frac{8}{3}\left|\frac{3y}{8} - \frac{3x}{8}\right| = |y - x| \\ &\leq M\psi_1(x, y) = \frac{8}{3}M\psi_1 - \frac{5}{8}M\psi_1(x, y) \\ &= \psi M\psi_1(x, y) - \phi(M\psi_1(x, y)). \end{aligned}$$

Buradan  $T$  bir genelleştirilmiş  $(\alpha, \psi, \phi)$ -rasyonel büzülme dönüşümüdür.

(Babu ve ark., 2017)

Aşağıdaki lemma sonraki tartışmamız için kullanışlıdır.

**Lemma 2.2.33.**  $(X, d)$  nin metrik uzay olduğunu varsayalım. 0 olacak biçimde  $\{x_n\}$ ,  $X$  de bir dizi olmak koşuluyla, eğer  $\{x_n\}$  bir Cauchy dizisi değil ise o zaman  $\epsilon > 0$  vardır ve  $d(m_k, n_k) \geq \epsilon$  olacak şekilde  $n_k > m_k \geq k$  ile  $\{m_k\}$  ve  $\{n_k\}$  pozitif tamsayılar dizileridir. Her bir  $k > 0$  için  $m_k$  ya karşılık gelen  $d(x_{m_k}, x_{n_k}) \geq \epsilon$ ,  $d(x_{m_k}, x_{n_{k-1}}) < \epsilon$  ve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{n_k}, x_{m_{k+1}}) = \epsilon$$

$$\text{ii} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{n_k}, x_{m_k}) = \epsilon$$

$$\text{iii} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{m_{k-1}}, x_{n_k}) = \epsilon$$

$$\text{iv} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{n_k}, x_{m_{k+1}}) = \epsilon$$

olacak şekilde en küçük  $n_k$  tamsayısını seçebiliriz.(Babu ve ark., 2011)

$\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}_+$  ve  $\mathbb{R}$  ile sırasıyla pozitif tam sayılar, negatif olmayan reel sayılar ve reel sayılar kümelerini gösterebiliriz. Boştan farklı bir  $X$  kümesi için,  $X$  in boştan farklı bütün alt kümelerinin sınıfını  $N(X)$  ile gösterelim.  $(X, d)$  nin metrik uzay olması koşuluyla,  $X$  in en az bir elemanı olan bütün kapalı alt kümelerinin sınıfı  $CL(X)$  ile, boştan farklı bütün kapalı sınırlı alt kümelerinin sınıfı  $CB(X)$  ile gösterilsin.

**Tanım 2.2.34.**  $A, B \in CL(X)$  için  $H : CL(X) \times CL(X) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$  fonksiyoneli aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$H(A, B) = \begin{cases} \max \{ \sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A) \}, & \text{maksimum olduğunda} \\ \infty, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Her  $A, B \in CL(X)$  için, burada  $d(A, B) = \inf \{ d(a, b) : b \in B \}$ ,  $A$  dan  $B \subseteq X$  'e olan mesafedir. Böyle bir fonksiyonele  $d$  tarafından oluşturulan genelleştirilmiş Pompeiu-Hausdorff metrik uzayı denir.(Kutbi ve ark., 2015)

**Tanım 2.2.35.**  $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonlar sınıfı  $\Psi$  ile gösterilsin.

$\psi_1$   $\psi$  azalmayan bir fonksiyon

$\psi_2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(t) < \infty$  bütün  $t > 0$  için, burada  $\psi^n$ ,  $\psi$  nin  $n$ .iterasyonudur.

Bu fonksiyonlar literatürde bazı kaynaklarda Bianchini-Grandolfi ölçüm fonksiyonları olarak bilinirler.(Kutbi ve ark., 2015)

**Uyarı 2.2.36.** Herbir  $\psi \in \Psi$  için, aşağıdaki iddiaların geçerli olduğu görülebilir.  
 $t > 0$  için

$$1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \psi^n(t) = 0$$

$$2. \quad \psi(t) < t$$

3.  $\psi(0) = 0$ . (Kutbi ve ark., 2015)

**Örnek 2.2.37.**  $k \in [0, 1)$ ,  $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $\psi(t) = kt$  olarak tanımlanmış fonksiyon Bianchini - Grandolfi ölçüm fonksiyonudur.  $\psi(t) = [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ ,

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t & 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{2}t & t = 1 \\ \frac{3}{4}t & t > 1 \end{cases} \quad \text{olarak tanımlanmış fonksiyon Bianchini-Grandolfi ölçüm}$$

fonksiyonudur. (Kutbi ve ark., 2015)

Samet ve arkadaşları  $\alpha_*$ -admissible dönüşüm ve  $\alpha-\psi$  büzülme dönüşümü kavramlarını aşağıda belirtilen şekilde tanıttılar.

**Tanım 2.2.38.**  $(X, d)$  metrik uzayıyla  $T : X \rightarrow X$  dönüşümü verilsin. Şayet  $\alpha : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  ve tüm  $x, y \in X$ ,

$$\alpha(x, y) d(Tx, Ty) \leq \psi(d(x, y))$$

olacak biçimde  $\psi \in \Psi$  dönüşümleri var ise  $T$  ye  $\alpha-\psi$  büzülme dönüşümü adı verilir. (Samet ve ark., 2012)

Asl ve arkadaşları  $\alpha$ -admissible dönüşümü sağlayan çok değerli dönüşümün bir versiyonu olan  $\alpha_*$ -admissible dönüşümü kavramını tanıttılar.

**Tanım 2.2.39.** Boş olmayan  $X$  kümesi ile  $T : X \rightarrow N(X)$ ,  $\alpha : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  dönüşümleri verilsin. Aşağıdaki şartları sağlarsa  $T$  ye  $\alpha_*$ -admissible dönüşüm adı verilir

$$x, y \in X \quad \alpha(x, y) \geq 1 \implies \alpha_*(Tx, Ty) \geq 1.$$

Burada

$$\alpha_*(Tx, Ty) := \inf \{ \alpha(a, b) \mid a \in Tx, b \in Ty \}.$$

(Asl ve ark., 2012)

Samet ve arkadaşları  $\alpha-\psi$  büzülme şartını tek değişkenli versiyondan çoğul değerli versiyona aşağıda gösterildiği gibi genişlettiler.

**Tanım 2.2.40.**  $(X, d)$  metrik uzay,  $T : X \rightarrow CL(X)$  çoğul değerli dönüşümü ve  $\alpha : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  dönüşümü verilsin. Şayet bütün  $x, y \in X$ ,

$$\alpha(x, y) H(Tx, Ty) \leq \psi(d(x, y))$$

olacak biçimde  $\psi \in \Psi$  var ise  $T$  ye bir  $\alpha - \psi$  çoğul değerli büzülme dönüşümü denir. (Asl ve ark.,, 2012)

Ali ve arkadaşları  $(\alpha, \psi, \xi)$ -çoğul değerli büzülme kavramını tanıttılar. Burada  $\xi \in \Xi$  ve  $\Xi$  aşağıdaki koşulları sağlayan  $\xi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonlarının ailesidir.

$\xi_1$   $\xi$  sürekli

$\xi_2$   $\xi$   $[0, \infty)$  da azalmayan

$\xi_3$   $\xi(t) = 0$  ise ancak ve ancak  $t = 0$

$\xi_4$   $\xi$  alt toplamsal.(Ali ve ark., 2014)

**Uyarı 2.2.41.** Her  $t \in (0, \infty)$  için  $(\xi_2)$  ve  $(\xi_3)$  den  $\xi(t) > 0$  elde ederiz.(Kutbi ve ark., 2015)

**Lemma 2.2.42.** Şayet  $\xi \in \Xi$  ise  $(X, d)$  metrik uzay olduğunda  $(X, \xi \circ d)$  de metrik uzaydır.

(Kutbi ve ark., 2015)

**Lemma 2.2.43.**  $(X, d)$  metrik uzay,  $\xi \in \Xi$  ve  $B \in CL(X)$  olmak şartıyla  $x \in X$  var ve  $\xi(d(x, B)) > 0$  ise  $y \in B$  dir, nitekim

$$\xi d(x, y) < q \xi d(x, B)$$

burada  $q > 1$  dir. (Kutbi ve ark., 2015)

**Tanım 2.2.44.**  $(X, d)$  metrik uzay olmak koşuluyla  $\psi \in \Psi$ ,  $\xi \in \Xi$  ve  $\alpha : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  dönüşümleri var ve öyle ki

$$x, y \in X, \alpha(x, y) \geq 1 \Rightarrow \xi H(Tx, Ty) \leq U 3c8 \xi M(x, y)$$

$$M(x, y) = \max \{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty) + d(y, Tx)\}$$

oluyorsa  $T : X \rightarrow CL(X)$  çoğul değerli dönüşümü bir  $(\alpha, \psi, \xi)$ -büzülme dönüşümü olarak adlandırılır.  $\psi \in \Psi$  kesin artan olduğu durumda  $(\alpha, \psi, \xi)$ -büzülme dönüşümüne kesin artan  $(\alpha, \psi, \xi)$ -büzülme dönüşümü denir. (Ali ve ark., 2014)

Mohammedi ve arkadaşları  $\alpha$ -admissible ve  $\alpha_*$ -admissible kavramını aşağıdaki gibi genişlettiler.

**Tanım 2.2.45.**  $X$  boştan farklı kümesi ile  $T : X \rightarrow N(X)$ ,

$\alpha : XxX \rightarrow [0, \infty)$  dönüşümleri verilsin. Bütün  $x \in X$ ,  $y \in Tx$  iken

$\alpha(x, y) \geq 1$ , bütün  $z \in Ty$  iken  $\alpha(y, z) \geq 1$  eşitsizliği sağlanıyorsa

$T$  dönüşümünün  $\alpha$ -admissible olduğunu söylenebilir. (Mohammadi ve ark., 2013)

**Uyarı 2.2.46.**  $\alpha_*$ -admissible dönüşümün aynı zamanda  $\alpha$ -admissible olduğu açıktır.

Fakat bunun tersi doğru olmayabilir. (Mohammadi ve ark., 2013)

**Tanım 2.2.47.**  $(X, d)$  metrik uzayıyla  $\alpha : XxX \rightarrow [0, \infty)$ ,  $T : X \rightarrow CL(X)$  dönüşümleri verilsin. Şayet  $n \rightarrow \infty$  iken  $x_n \xrightarrow{d} x \in X$  ve bütün  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$  eşitsizliği sağlanacak biçimde bütün  $\{x_n\}$  dizileri için,  $n \rightarrow \infty$  iken  $Tx_n \xrightarrow{H} Tx$  oluyorsa yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0 \text{ ve } \alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1 \text{ (her } n \in \mathbb{N} \text{ için)} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} H(Tx_n, Tx) = 0$$

ise  $T$  ye  $(CL(X), H)$  üzerinde bir  $\alpha$ -sürekliliği çoğul değerli dönüşümü deriz. (Kutbi ve ark., 2015)

**Uyarı 2.2.48.** Her  $\alpha$  dönüşümü için  $T$  nin sürekliliğinin  $T'$  nin  $\alpha$ -sürekliliğini gerektirdiğine dikkat edelim. Genellikle tersi doğru değildir. (Kutbi ve ark., 2015)

**Örnek 2.2.49.**  $X = [0, \infty)$ ,  $\lambda \in [10, 20]$  ve  $x, y \in X$  için  $d : XxX \rightarrow \mathbb{R}$  metriği  $d(x, y) = |x - y|$  biçiminde ifade edilsin.  $T : X \rightarrow CL(X)$  ve  $\alpha : XxX \rightarrow [0, \infty)$ .  $T : X \rightarrow CL(X)$  ve  $\alpha : XxX \rightarrow [0, \infty)$

$$Tx = \begin{cases} \{\lambda x^2\}, & x \in [0, 1] \\ \{x\}, & x > 1 \end{cases}$$

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} \cosh(x^2 + y^2), & x, y \in [0, 1] \\ \tanh(x + y), & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.  $(CL(X), H)$  üzerindeki  $T$  çoğul değerli dönüşümünün sürekli olmadığı açıktır. Aslında  $X'$  deki  $\{x_n\} = \{1 + \frac{1}{n}\}$  dizisi için  $x_n = 1 + \frac{1}{n} \xrightarrow{d} 1$  olduğunu fakat  $Tx_n = \{1 + \frac{1}{n}\} \xrightarrow{H} \{1\} \neq \{\lambda\} = T1$  olmadığını görürüz. İleride  $T'$  nin  $(CL(X), H)$  da bir  $\alpha$ -süreklilik çok değerli dönüşüm olduğunu göstereceğiz.  $\{x_n\}$ ,  $X'$  de bir dizi olsun öyle ki  $n \rightarrow \infty$  iken  $x_n \xrightarrow{d} x$  ve  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$  dir. Öyleyse  $\forall n \in \mathbb{N}$  iken  $x, x_n \in [0, 1]$ . Bu nedenle

$Tx_n = \{\lambda x_n^2\} \xrightarrow{H} \{\lambda x^2\} = Tx$  dir. Bu  $T'$  nin  $(CL(X), H)$ ' da bir  $\alpha$ -süreklilik çok değerli dönüşümü olduğunu gösterir. (Kutbi ve ark., 2015)

Şimdi keyfi ikili ilişki ile donatılmış metrik uzaylarda bazı tanımlar verelim.

$(X, d)$  ve  $\check{R}$ ,  $X$  de bir ikili ilişki iken

$$\check{S} := \check{R} \cup \check{R}^{-1}$$

olarak belirtilsin. Yani  $x, y \in X$ ,  $x\check{S}y \iff x\check{R}y$  ya da  $y\check{R}x$ .

**Tanım 2.2.50.** Boştan farklı  $X$  kümesi ile  $X$  üzerinde  $\check{R}$  ikili ilişkisi verilsin. Şayet her  $x \in X$ ,  $y \in Tx$ ,  $x\check{S}y$  olacak şekilde  $z \in Ty$  olduğunda  $y\check{S}x$  elde ediyorsak,  $T : X \rightarrow N(X)$  çok değerli dönüşümüne zayıf karşılaştırmalı dönüşüm denir. (Kutbi ve ark., 2015)

**Tanım 2.2.51.**  $(X, d)$  metrik uzayı  $X$  üzerinde  $\check{R}$  ikili ilişkisi verilsin.  $X$  metrik uzayı  $\check{S}$ -tamdır ancak ve ancak  $X'$  de  $x_n\check{S}x_{n+1}$  olacak şekilde her  $\{x_n\}$  Cauchy dizisi her  $n \in \mathbb{N}$  için  $X'$  e yakınsar. (Kutbi ve ark., 2015)

**Tanım 2.2.52.**  $(X, d)$  metrik uzayı ve  $X$  üzerinde  $\check{R}$  ikili ilişkisini ele alalım. Verilen  $x \in X$  ve  $\{x_n\}$  dizisi için

$$\text{bütün } n \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0 \text{ ve } x_n\check{S}x_{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} H(Tx_n, Tx) = 0$$

koşulunu sağlarsa  $T : X \rightarrow CL(X)$ ' in  $(CL(X), H)$ ' ye göre  $\check{S}$  -süreklilik olduğunu söylenir. (Kutbi ve ark., 2015)

**Tanım 2.2.53.**  $(X, d)$  metrik uzayı,  $\check{R}$ ,  $X$  üzerinde ikili ilişki olmak şartıyla, şayet iki  $\psi \in \Psi$  ve  $\xi \in \Xi$  fonksiyonu var öyle ki

$$x, y \in X \quad x\check{S}y \Rightarrow \xi(H(Tx, Ty)) \leq \psi(\xi(M(x, y)))$$

$$M(x, y) = \max \left\{ d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2} \right\}$$

koşulunu sağlıyor ise  $T : X \rightarrow CL(X)$  dönüşümüne bir  $(\check{S}, \psi, \xi)$ -büzülme dönüşümü adı verilir. Bu durumda  $\psi \in \Psi$  kesin artan olduğunda  $(\check{S}, \psi, \xi)$ -büzülme dönüşümüne bir kesin  $(\check{S}, \psi, \xi)$ -büzülme dönüşümü denir. (Kutbi ve ark., 2015)

Şimdi bir grafik ile donatılmış metrik uzayda bazı temel tanımları verelim.

$(X, d)$  metrik uzayı olmak koşuluyla  $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$  e  $XX$  kartezyen çarpımının bir köşegeni denir. Köşelerin kümesi  $V(G)$ ,  $X$  ile çakışan ve kenarlarının kümesi  $E(G)$  tüm döngüleri içeren  $G$  grafiğini ele alalım, yani  $\Delta \in E(G)$ ,  $G'$  nin paralelkenar olmadığını varsayıyoruz, bu yüzden  $G'$  yi  $(V(G), E(G))$  çifti ile tanımlıyoruz. Dahası her kenara köşeler arası mesafeyi atayarak  $G$  yi ağırlıklı grafik olarak ele alabiliriz.

**Tanım 2.2.54.**  $X$  bir  $G$  grafiği ile donatılmış kümesi boştan farklı ,

$T : X \rightarrow N(X)$  çoğul değerli dönüşüm olmak üzere bütün  $x \in X$  ve  $y \in Tx$  için  $(x, y) \in E(G)$  iken her  $z \in Ty$ ,  $(y, z) \in E(G)$  ise  $T$  nin kenarları zayıf koruduğunu söylenir. (Kutbi ve ark., 2015)

**Tanım 2.2.55.**  $(X, d)$   $G$  grafiği ile donatılmış iken verilen  $x \in X$  ve  $\{x_n\}$  dizisi

$$\text{her } n \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0 \text{ ve } (x_n, x_{n+1}) \in E(G) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} H(Tx_n, Tx) = 0$$

koşulunu sağlıyorsa  $T : X \rightarrow CL(X)$  e  $(CL(X), H)$ ' a göre  $E(G)$ -sürekli dönüşüm deriz. (Kutbi ve ark., 2015)

**Tanım 2.2.56.**  $(X, d)$  bir  $G$  grafiği ile donatılmış bir metrik uzay olsun. Eğer iki  $\psi \in \Psi$  ve  $\xi \in \Xi$  fonksiyonları var öyle ki

$$x, y \in X, (x, y) \in E(G) \Rightarrow \xi(H(Tx, Ty)) \leq \psi(\xi(M(x, y)))$$

$$M(x, y) = \max \left\{ d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2} \right\}$$

ise  $T : X \rightarrow CL$  dönüşümüne  $(E(G), \psi, \xi)$ -büzülme dönüşümü denir. Bu durumda  $\psi \in \Psi$  kesin artan olduğunda  $(E(G), \psi, \xi)$ -büzülme dönüşümü olarak adlandırılır. (Kutbi ve ark., 2015)

Şimdi  $\alpha - \eta$  tam metrik uzay ve  $\alpha - \eta$  sürekli fonksiyon kavramlarını tanıtaacağız.

**Tanım 2.2.57.**  $(X, d)$  metrik uzayı,  $\alpha, \eta : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$  iki dönüşüm olmak üzere  $(X, d)$   $\alpha - \eta$  tam metrik uzaydır ancak ve ancak bütün  $x \in \mathbb{N}$  ler için  $\alpha(x, x_{n+1}) \geq \eta(x, x_{n+1})$  olacak şekilde bütün  $\{x_n\}$  ler Cauchy dizisi  $X$ ' de yakınsaktır. Bütün  $x, y \in X$ ,  $\eta(x, y) = 1$  ise  $X$   $\alpha$ -tam metrik uzaydır denir. Benzer şekilde tüm  $x, y \in X$ ,  $\alpha(x, y) = 1$  ise  $(X, d)$   $\eta$ -tam metrik uzaydır denir. (Hussain ve ark., 2014)

**Örnek 2.2.58.**  $X = (0, \infty)$  kümesi ile  $d(x, y) = |x - y|$  metrik dönüşümü verilsin.  $A$  kümesi  $X$ ' in kapalı alt kümesi olmak koşuluyla  $\alpha, \eta : X \times X \rightarrow [0, +\infty]$  dönüşümleri

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} (x + y)^2 & x, y \in A \text{ için} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\eta(x, y) = 2xy$$

olarak tanımlansın.  $(X, d)$ ' nin tam uzay olmadığı ancak  $\alpha - \eta$ -tam metrik uzay olduğu açıktır. Gerçekten bütün  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq \eta(x_n, x_{n+1})$  olmak üzere  $\{x_n\}$ ,  $X$ ' de bir Cauchy dizisi ise bütün  $n \in \mathbb{N}$  ler için  $x_n \in A$  dır.  $(A, d)$  tam metrik uzay olmasından dolayı  $x^* \in A$  vardır, nitekim  $n \rightarrow \infty$  iken  $x_n \rightarrow x^*$  dir. (Hussain ve ark., 2014)

**Tanım 2.2.59.**  $(X, d)$  uzayı,  $\alpha, \eta : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ ,

$T : X \rightarrow X$  verilsin. Şayet  $x \in X$ ,  $\{x_n\}$  dizisi ile

$$x_n \rightarrow x, n \rightarrow \infty \text{ iken } \alpha(x_n, x_{n+1}) \geq \eta(x_n, x_{n+1}) \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow Tx_n \rightarrow Tx$$

oluyorsa  $T$ ' ye  $(X, d)$  de bir  $\alpha - \eta$  sürekli dönüşümü denir. (Hussain ve ark., 2014)

**Örnek 2.2.60.**  $X = [0, \infty)$  ve  $d(x, y) = |x - y|$ ,  $X$ 'de metrik olmak koşuluyla  $T : X \rightarrow X$  ve  $\alpha, \eta \rightarrow [0, +\infty)$  dönüşümlerinin

$$Tx = \begin{cases} x^5 & x \in [0, 1] \text{ ise} \\ \sin \pi x + 2 & (1, \infty) \text{ ise} \end{cases}$$

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 + 1 & x, y \in [0, 1] \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

$$\eta(x, y) = x^2$$

şeklinde tanımlandığını kabul edelim.  $T$ 'nin sürekli olmadığı fakat  $(X, d)$  üzerinde  $\alpha - \eta$  sürekli olduğu açıktır. Gerçekten  $n \rightarrow \infty$  iken

$x_n \rightarrow x$  ve  $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq \eta(x_n, x_{n+1})$  ise, o zaman  $x_n \in [0, 1]$  ve böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^5 = x^5 = Tx \text{ dir.}$$

(Hussain ve ark., 2014)

**Lemma 2.2.61.**  $\psi \in \Psi$  ise aşağıdaki şartlar sağlanır

i Her  $t \in \mathbb{R}^+$  için  $n \rightarrow \infty$  iken  $(\psi^{(n)}(t))_{n \in \mathbb{N}}$  0'a yakınsar

ii Herhangi bir  $t \in (0, \infty)$  iken  $\psi(t) < t$  dir

iii  $\psi$  0'da süreklidir

iv Keyfi  $t \in \mathbb{R}^+$  için  $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^{(k)}(t)$  serisi yakınsaktır. (Berinde, 2007)

**Tanım 2.2.62.**  $(X, d)$  metrik uzayı ile  $X$  üzerinde  $T$  kendi içine dönüşümü verilsin.

$$M(x, y) = \max \left\{ d(x, y), \frac{d(x, Tx)}{1 + d(x, Tx)}, \frac{d(y, Ty)}{1 + d(y, Ty)}, \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2} \right\}$$

olsun. O zaman

a  $\psi \in \Psi$  olduğunda  $x, y \in X$ ,  $\eta(x, Tx) \leq \alpha(x, y) \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq \psi(M(x, y))$  önermesi doğruysa  $T$  dönüşümüne yeniden düzenlenmiş  $\alpha - \psi$  rasyonel büzülme dönüşümü deriz.

**b** Eğer  $x, y \in X$ ,  $\alpha(x, y) \geq 1 \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq \psi(M(x, y))$  ise  $T$  ye yeniden düzenlenmiş  $\alpha - \psi$  rasyonel büzülme dönüşümü deriz.  $\psi \in \Psi$  dır. (Hussain ve ark., 2014)

**Tanım 2.2.63.** Eğer  $T, G'$  nin kenar koruyanı ise,  $T : X \rightarrow X'$  dönüşümünün bir Banach  $G$ -büzülmesi ya da basit  $G$ -büzülmesi olduğunu söyleyebiliriz. Yani

$$\forall x, y \in X \quad (x, y) \in E(G) \implies (T(x), T(y)) \in E(G)$$

ve  $T$  şu yolla  $G'$  nin ağırlığını azaltır:

$$\begin{aligned} \exists \alpha &\in (0, 1) \quad \forall x, y \in X \\ ((x, y) &\in E(G) \implies d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y)) \end{aligned}$$

dir.(Jachymski, 2008)

**Tanım 2.2.64.** Verilen  $x \in X$  ve  $\{x_n\}$  dizisi için  $n \rightarrow \infty$  iken  $x_n \rightarrow x$ ,  $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$  olması  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $Tx_n \rightarrow Tx$  olmasını gerektiriyorsa  $T : X \rightarrow X$  dönüşümüne  $G$ -süreklı denir.(Jachymski, 2008)

### 3. BULGULAR

#### 3.1. Kısmi Genelleştirilmiş Dış Bükey Büzülme Dönüşümleri için Yaklaşık Sabit Nokta Teoremleri

Şimdi  $\alpha$ -tam metrik uzaylarda kısmi genelleştirilmiş dışbükey büzülme dönüşümleri için yeni yaklaşık sabit nokta teoremini oluşturalım.

**Teorem 3.1.1.**  $(X, d)$  metrik uzayı ile  $T : X \rightarrow X$  kısmi genelleştirilmiş dışbükey büzülmesi ve  $\alpha : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  temel dönüşümü verilsin. Kabul edelim ki  $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$  olacak biçimde  $x_0 \in X$  vardır ve  $T$ ,  $\alpha$ -admissible dır. Bu durumda  $T$  dönüşümünün yaklaşık sabit nokta özelliği vardır Ayrıca eğer  $T$ ,  $\alpha$ -sürekli ve  $(X, d)$   $\alpha$ -tam metrik uzaysa  $T$  ' bir sabit noktaya sahiptir. (Latif ve ark., 2015)

**İspat.** Hipotezdeki  $x_0 \in X$  den ve sonra  $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$  den başlayalım. Tüm  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $x_{n+1} = T^{n+1}x_0$  dan  $\{x_n\}$  dizisini inşa ediyoruz. Eğer  $\tilde{n} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  için  $x_{\tilde{n}} = x_{\tilde{n}+1}$  ise inşa edilecek bir şey yoktur. Bu yüzden tüm  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  için  $x_n \neq x_{n+1}$  olduğunu kabul edelim.

$$\mu = d(Tx_0, T^2x_0) + d(x_0, Tx_0)$$

ve

$$\omega = a + b$$

olsun. Şimdi

$$d(Tx_0, T^2x_0) \leq \mu$$

olduğunu gösterelim. Kısmi genelleştirilmiş dışbükey büzülme şartından  $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$  olduğundan

$$d(T^2x_0, T^3x_0) \leq ad(Tx_0, T^2x_0) + bd(x_0, Tx_0)$$

$$\leq \omega\mu$$

dir.  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$  olmasından anlaşıldığı gibi  $T$ ,  $\alpha$ -admissible ve  $\alpha(x_0, x_1) = \alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$  dir.  $\alpha(Tx_0, T^2x_0) = \alpha(x_1, x_2) \geq 1$  olduğundan

$$\begin{aligned} d(T^3x_0, T^4x_0) &\leq ad(T^2x_0, T^3x_0) + bd(Tx_0, T^2x_0) \\ &\leq ad(Tx_0, T^2x_0) + bd(x_0, Tx_0) + bd(Tx_0, T^2x_0) \\ &\leq ad(x_0, Tx_0) + ad(Tx_0, T^2x_0) + bd(x_0, Tx_0) + bd(Tx_0, T^2x_0) \\ &\leq \omega\mu. \end{aligned}$$

Bu işlemi devam ettirirsek  $d(T^m x_0, T^{m+1} x_0) \leq \omega^l \mu$  olduğunu kolayca görürüz, burada her  $l \in \mathbb{N}$  için  $m = 2l$  veya  $m = 2l + 1$  dir. Bu  $m \rightarrow \infty$  iken  $d(T^m x_0, T^{m+1} x_0) \rightarrow 0$  olduğunu ima eder. Öyle ise  $T$  bir  $x_0 \in X$  noktasında asimptotik olarak düzenlidir. Lemmadan  $T$  nin bir yaklaşık sabit nokta özelliğine sahip olduğu sonucunu çıkarırız. Ardından  $T$  nin bir  $\alpha$ -sürekli ve  $(X, d)$  nin bir  $\alpha$ -sürekli metrik uzay olduğunda  $T$  nin bir sabit noktaya sahip olduğunu gösterelim. Öncelikle iddiamız  $\{x_n\}$  in  $X$  de bir Cauchy dizisi olduğudur.  $m, n \in \mathbb{N}$  olsun öyle ki  $n > m$  dir. Bunu ispatlamak için aşağıdaki durumları ayırt edelim.

**Durum a**  $l \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $m, m = 2l + 1$  şeklinde bir tek sayıdır. Şimdi biz

$$\begin{aligned} &d(T^m x_0, T^n x_0) \\ &\leq d(T^m x_0, T^{m+1} x_0) + d(T^{m+1} x_0, T^{m+2} x_0) + \dots + d(T^{n-1} x_0, T^n x_0) \\ &\leq \omega^l \mu + \omega^l \mu + \omega^{l+1} \mu + \omega^{l+1} \mu + \omega^{l+2} \mu + \dots \\ &\leq 2\omega^l \mu + 2\omega^{l+1} \mu + 2\omega^{l+2} \mu + \dots \\ &\leq \frac{2\omega^l \mu}{1 - \omega} \end{aligned}$$

elde ediyoruz.

**Durum b**  $l \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $m, m = 2l$  şeklinde bir çift sayıdır. Şimdi biz

$$d(T^m x_0, T^n x_0)$$

$$\begin{aligned}
&\leq d(T^m x_0, T^{m+1} x_0) + d(T^{m+1} x_0, T^{m+2} x_0) + \dots + d(T^{n-1} x_0, T^n x_0) \\
&\leq \omega^l \mu + \omega^l \mu + \omega^{l+1} \mu + \omega^{l+2} \mu + \dots \\
&\leq 2\omega^l \mu + 2\omega^{l+1} \mu + 2\omega^{l+2} \mu + \dots \\
&\leq \frac{2\omega^l \mu}{1 - \omega}
\end{aligned}$$

olduğunu elde ederiz. Öyleyse  $n > m$  ve  $m = 2l$  veya  $m = 2l + 1$  için

$d(T^m x_0, T^n x_0) \leq \frac{2\omega^l \mu}{1 - \omega}$  dir.  $m \rightarrow \infty$  iken  $\frac{2\omega^l \mu}{1 - \omega} \rightarrow 0$  olduğundan  $\{x_n\}$  in  $X$  de Cauchy dizisi olduğu açıktır.  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ ,  $\{x_n\}$  in  $X$  de Cauchy olmasından  $X$  in  $\alpha$ -tamlığını kullanarak  $n \rightarrow \infty$  iken  $x_n \rightarrow x^*$  olacak şekilde  $x^* \in X$  bulunur. Bundan dolayı

$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} T x_n = T x^*$  dir ve öyleyse  $T$  bir sabit noktaya sahiptir. Bu da ispatı tamamlar. Şimdi ispatladığımız bu teoremin kullanılabilir olduğunu gösteren bazı örnekler verelim.

**Örnek 3.1.2.**  $X = (0, \infty)$  olsun ve  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  bütün  $x, y \in X$ ,

$d(x - y) = |x - y|$  şeklinde tanımlansın.  $T : X \rightarrow X$  ve  $\alpha : X \times X \rightarrow [0, \infty)$

$$T x = \begin{cases} \frac{x+3}{4} & x \in [1, 2] \\ x & x \in (2, 3) \\ x^2 - 8x + 20 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ve

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} \frac{e^x + e^y + 1}{|e^x - e^y| + 1} & x, y \in [1, 2] \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olarak tanımlansın.  $(X, d)$  'nin metrik uzayı olmadığı,  $T$  nin sürekli olmadığı açıktır. Öyleyse Miandaragh ve arkadaşlarının sonuçları bu duruma uygulanabilir değildir. Ardından Teorem 3.2'nin  $T$  de sabit nokta varlığını garantileyebildiğini gösterelim. İlk olarak  $T$  nin  $a = \frac{2}{3}$  ve  $b = \frac{1}{9}$  ile kısmi genelleştirilmiş dışbükey büzülme olduğunu göstereceğiz.  $\alpha(x, y) \geq 1$  için  $x, y \in [1, 2]$  sahibiz. O halde

$$d(T^2 x, T^2 y) = \left| T\left(\frac{x+3}{4}\right) - T\left(\frac{y+3}{4}\right) \right|$$

$$= \left| \frac{x+15}{16} - \frac{y+15}{16} \right|$$

$$= \frac{1}{16} |x - y|$$

$$\leq \frac{5}{18} |x - y|$$

$$\frac{2}{3} \left| \frac{x+3}{4} - \frac{y+3}{4} \right| + \frac{1}{9} |x - y|$$

$$ad(Tx, Ty) + b(x, y)$$

dir. Bu durumda  $a = \frac{2}{3}$  ve  $b = \frac{1}{9}$  ile  $T$  kısmi genelleştirilmiş dışbükey büzülmedir. Dahası  $T$  nin bir  $\alpha$ -admissible olduğunu görmek kolaydır ve burada  $x_0 = 1.5 \in X$  dir.

$$\alpha(x_0, Tx_0) = \alpha(1.5, T(1.5)) = \alpha(1.5, 1.125) \geq 1.$$

Ayrıca  $T$ ,  $\alpha$ -sürekli dönüşümdür. Basit bir hesaplama ile  $(X, d)$  nin  $\alpha$ -tam metrik uzay olduğunu görürüz. Esasında  $\{x_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  alındığında  $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$  olacak biçimde Cauchy dizisi olsun. O zaman her  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n \in [1, 2]$  dir. Böylece  $(X, d)$   $\alpha$ -tam metrik uzaydır. Bundan dolayı Teorem 3.2.1' yi kullanarak  $T$  nin sabit noktası olduğunu elde ederiz. Bu durumda  $T$  nin 1, 4 ve 5 gibi birkaç sabit noktası vardır. Teorem 3.1.1' nin sabit noktanın tekliğini iddia etmediğini görüyoruz. Sabit noktanın tekliğini elde etmek için  $(H)$  özelliğini ekleyeceğiz. (Latif ve ark., 2015)

**Teorem 3.1.3.** Teorem 3.1.1'nin hipotezine  $(H)$  özelliğini ekleyerek,  $T$  nin sabit noktasının tekliğini elde edelim. (Latif ve ark., 2015)

**İspat.**  $x^*$  ve  $y^*$ ,  $T$  nin sabit noktaları olsun.  $(H)$  özelliğinden  $\alpha(x^*, z) \geq 1$  ve  $\alpha(y^*, z) \geq 1$  koşullarını sağlayacak biçimde  $z \in X$  seçebiliriz.  $T$  bir  $\alpha$ -admissible olduğundan tüm  $m \in \mathbb{N}$  ler için  $\alpha(x^*, T^m z) \geq 1$  ve  $\alpha(y^*, T^m z) \geq 1$  elde ederiz.

$v = d(x^*, T^2z) + d(x^*, Tz)$  ve  $\omega = a + b$  yi yerine koyalım.  $\alpha(x^*, Tz) \geq 1$  olduğundan

$$d(x^*, T^3z) = d(T^2x^*, T^2(Tz))$$

$$\leq ad(x^*, T^2z) + bd(x^*, Tz)$$

$$\leq \omega v$$

elde ederiz.  $\alpha(x^*, T^2z) \geq 1$  den hareketle

$$d(x^*, T^4z) = d(T^2x^*, T^2(T^2z))$$

$$\leq ad(x^*, T^3z) + bd(x^*, T^2z)$$

$$\leq a2d(x^*, T^2z) + abd(x^*, Tz) + bd(x^*, T^2z)$$

$$\leq ad(x^*, T^2z) + bd(x^*, T^2z) + ad(x^*, Tz) + bd(x^*, Tz)$$

$$= \omega v.$$

Ayrıca  $\alpha(x^3, T^3z) \geq 1$  den

$$d(x^{*e}, T^5z) = d(T^2x^*, T^2(T^3z))$$

$$\leq ad(x^*, T^4z) + bd(x^*, T^3z)$$

$$\leq a(\omega v) + b(\omega v)$$

$$= (a + b)(\omega v)$$

$$= \omega(\omega v)$$

$$= \omega^2 v$$

elde ederiz. Benzer şekilde  $\alpha(x^*, T^4z) \geq 1$  den

$$d(x^*, T^6z) = d(T^2x^*, T^2(T^4z))$$

$$\begin{aligned}
&\leq ad(x^*, T^5 z) + bd(x^*, T^4 z) \\
&\leq a[ad(x^*, T^4 z) + bd(x^*, T^3 z)] + bd(x^*, T^4 z) \\
&= (a2 + b)d(x^*, T^4 z) + abd(x^*, T^3 z) \\
&\leq (a + b)d(x^*, T^4 z) + (a + b)d(x^*, T^{3old} z) \\
&\leq (a + b)(\omega v) + (a + b)(\omega v) \\
&= 2(a + b)(\omega v) \\
&= 2\omega(\omega v) \\
&= 2\omega 2v
\end{aligned}$$

olduğunu elde ederiz. İşlemi devam ettirirsek  $d(x^*, T^m z) \leq 2\omega^{l-1}v$  elde ederiz. Burada her  $l \in \mathbb{N}$  için  $m = 2l$  veya  $m = 2l - 1$  dir.  $\omega < 1$  den  $m \rightarrow \infty$  iken  $T^m z \rightarrow x^*$  dir. Benzer şekilde  $m \rightarrow \infty$  iken  $T^m z \rightarrow y^*$  olduğunu ispat edebiliriz. Limitin tekliğinden  $x^* = y^*$  dir ve  $T$  sadece tek sabit noktaya sahiptir. Bu da ispatı tamamlar.

**Sonuç 3.1.4.**  $(X, d)$  metrik uzayı ile  $T : X \rightarrow X$  genelleştirilmiş dışbükey büzülme dönüşümü verilsin.  $\alpha : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ ,  $a, b \in [0, 1)$ ,  $a + b < 1$  olmak üzere

$$\alpha(x, y)d(T^2 x, T^2 y) \leq \alpha d(Tx, Ty) + bd(x, y)$$

olacak şekilde temel dönüşüm olsun. Kabul edelim ki  $T$   $\alpha$ -admissible,  $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$  şeklinde  $x_0 \in X$  vardır. O halde  $T$  yaklaşık sabit nokta özelliğine sahiptir. Ek olarak eğer  $T$  bir  $\alpha$ -süreklî ve  $(X, d)$   $\alpha$ -tam uzaysa  $T$  sabit noktaya sahiptir ve ayrıca  $X$ 'nin  $(H)$  özelliği varsa,  $T$ 'nin sadece tek sabit noktaya sahiptir (Latif ve ark., 2015)

**İspat.**  $\alpha$  temel dönüşümü ile  $T$ 'nin kısmi genelleştirilmiş dışbükey büzülme olduğunu gösterelim. Varsayalım ki  $\alpha(x, y) \geq 1$  ve buradan

$$d(T^2 x, T^2 y) \leq \alpha(x, y)d(Tx, Ty)$$

$$\leq ad(Tx, Ty) + bd(x, y)$$

olsun. Bu  $T$ 'nin temel dönüşümü  $\alpha$  olan bir kısmi genelleştirilmiş dışbükey büzülme olduğunu gösterir. Buradan da istenilen sonuca ulaşırız.

**Sonuç 3.1.5.**  $(X, d)$  metrik uzayı, bütün  $x, y \in X$ 'ler iken

$$[d(T^2x, T^2y) + \tau]\alpha(x, y) \leq ad(Tx, Ty) + bd(x, y) + \tau$$

olacak şekilde  $T : X \rightarrow X$  bir dönüşüm olsun. Burada  $a, b \in [0, 1)$ ,  $a + b < 1$  ve  $\tau \geq 1$  dir.  $T$   $\alpha$ -admissible ve  $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$  biçiminde  $x_0 \in X$  i farzedelim. O halde  $T$  nin yaklaşık sabit nokta özelliği vardır. Ek olarak eğer  $T$   $\alpha$ -sürekli ve  $(X, d)$   $\alpha$ -tam uzay ise  $T$  sabit noktaya sahip, ek olarak  $T$ ,  $(H)$  özelliğine sahipse sabit noktası tektir. (Latif ve ark., 2015)

**İspat.**  $T$  nin temel dönüşümü  $\alpha$  olan bir kısmi genelleştirilmiş dışbükey büzülme olduğunu gösterelim.  $\alpha(x, y) \geq 1$  ve dolayısıyla

$$d(T^2x, T^2y) + \tau \leq [d(Tx, Ty) + \tau]^{\alpha(x, y)}$$

$$\leq ad(Tx, Ty) + bd(x, y) + \tau$$

olduğunu kabul edelim.

$$d(T^2x, T^2y) \leq ad(Tx, Ty) + bd(x, y)$$

dir. Bu  $T$  nin temel dönüşümü  $\alpha$  olan bir kısmi genelleştirilmiş büzülme olduğunu gösterir. Teorem 3.1.1 ve Teorem 3.1.3 den istenen sonucu elde ederiz.

**Sonuç 3.1.6.**  $(X, d)$  metrik uzayı  $T : X \rightarrow X$  dönüşümü verilsin. Öyle ki  $x, y \in X$  için

$$[\tau - 1 + \alpha(x, y)]^{d(T^2x, T^2y)} \leq \tau^{ad(Tx, Ty) + bd(x, y)}$$

dir. Burada  $a, b \in [0, 1)$  ile  $a + b < 1$  ve  $\tau > 1$  dir. Kabul edelim ki  $T$   $\alpha$ -admissible ve  $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$  olacak biçimde  $x_0 \in X$  mevcuttur. O halde  $T$  yaklaşık sabit nokta özelliğine sahiptir. Ek olarak  $T$ ,  $\alpha$ -sürekli ve  $(X, d)$   $\alpha$ -tam metrik uzaysa  $T$

nin sabit noktası vardır, ayrıca  $X$  in  $(H)$  özelliği var olmasından  $T$  nin tek bir sabit noktası vardır. (Latif ve ark., 2015)

**İspat.** Gösterelim ki  $T$  temel dönüşümü  $\alpha$  olan bir kısmi genelleştirilmiş dışbükey büzülmedir.  $\alpha(x, y) \geq 1$  olduğunu kabul edelim ve dolayısıyla

$$\begin{aligned}\tau^{d(T^2x, T^2y)} &\leq [\tau - 1 + \alpha(x, y)]^{d(T^2x, T^2y)} \\ &\leq \tau^{ad(Tx, Ty) + bd(x, y)}\end{aligned}$$

dir.

$$d(T^2x, T^2y) \leq ad(Tx, Ty) + bd(x, y)$$

olması  $T$  nin temel dönüşümü  $\alpha$  olan bir kısmi büzülme dönüşümü olduğunu gösterir. Böylelikle istenen sonuca varılır

**Teorem 3.1.7.**  $(X, d)$  metrik uzayı,  $T : X \rightarrow X$ ,  $\alpha : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  temel dönüşümü ile 2. dereceden bir kısmi genelleştirilmiş dışbükey büzülme dönüşümü olsun. Farzedelim ki  $T$   $\alpha$ -admissible dir. Burada  $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$  olacak biçimde  $x_0 \in X$  vardır. O halde  $T$  yaklaşık sabit nokta özelliğine sahiptir. Ek olarak  $T$   $\alpha$ -süreklili ve  $(X, d)$   $\alpha$ -süreklili metrik uzay ise,  $T$  nin bir sabit noktası vardır. Dahası  $X$ ,  $(H)$  özelliğine sahipken  $T$  tek bir sabit noktaya sahiptir. (Latif ve ark., 2015)

**İspat.** Varsayım olarak  $x_0 \in X$  noktası verilsin ve ayrıca  $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$  olsun. Bütün  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $x_{n+1} = T^{n+1}x_0$  dan  $\{x_n\}$  dizisini oluşturalım.  $x_n = x_{n+1}$  şeklinde  $\tilde{n} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  var ise  $x_{\tilde{n}}$   $T$  de sabit noktadır. O zaman ispat edecek bir şey yoktur. Devamında tüm  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $x_n \neq x_{n+1}$  olduğunu farzedelim.  $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$  ve  $T$  nin,  $\alpha$ -admissible olmasından, bütün  $n \in \mathbb{N}$  için  $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ .  $s = d(Tx_0, T^2x_0) + d(x_0, Tx_0)$   $\mu = 1 - b_2$  ve  $\rho = a_1 + a_2 + b_1$  dir.  $\alpha(x_0, Tx_0)$  olduğundan 2.dereceden kısmi büzülmeden

$$\begin{aligned}d(T^2x_0, T^3x_0) \\ \leq a_1d(x_0, Tx_0) + a_2d(Tx_0, T^2x_0) + b_1d(Tx_0, T^2x_0) + b_2d(T^3x_0, T^2x_0) \\ \leq a_1s + (a_2 + b_1)s + b_2d(T^3x_0, T^2x_0)\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu  $d(T^2x_0, T^3x_0) \leq \frac{\rho}{\mu}s$  olduğunu gösterir. Ayrıca

$$\begin{aligned} & d(T^3x_0, T^4x_0) \\ & \leq a_1d(Tx_0, T^2x_0) + a_2d(T^2x_0, T^3x_0) + b_1d(T^2x_0, T^3x_0) + b_2d(T^3x_0, T^4x_0) \\ & \leq a_1s + (a_2 + b_1)\frac{a_1 + a_2 + b_1}{1 - b_2}s + b_2d(T^3x_0, T^4x_0) \end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla  $d(T^3x_0, T^4x_0) \leq \left(\frac{\rho}{\mu}\right)s$ .

Benzer şekilde  $d(T^4x_0, T^5x_0) \leq \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^2s$  ve  $d(T^5x_0, T^6x_0) \leq \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^2s$  dir. Bu işlemi devam ettirirsek  $d(T^mx_0, T^{m+1}x_0) \leq \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^ls$  buluruz, burada  $l \in \mathbb{N}$  için  $m = 2l$  veya  $m = 2l + 1$  dir. Böylece  $m \rightarrow \infty$  iken  $d(T^mx_0, T^{m+1}x_0) \rightarrow 0$  dir. Bu  $T$  nin  $x_0 \in X$  noktasından asimptotik olarak düzenli olduğunu gösterir. Lemma 3.1.4. den  $T$  nin yaklaşık sabit nokta özelliği vardır. Şimdi  $T$ ,  $\alpha$ -süreklili ve  $(X, d)$   $\alpha$ -tam uzay olduğunda  $T$  nin sabit noktası olduğunu ispatlayacağız. Öncelikle  $\{x_n\}$  nin  $X$  de Cauchy olduğunu iddia ediyoruz.  $m, n \in \mathbb{N}$  ve  $n > m$  olsun. Bu ispat için aşağıdaki durumları irdeleyeceğiz.

**Durum 1**  $m, m = 2l + 1$  şeklinde bir tek sayı olsun. Burada  $l \in \mathbb{N}$  dir.

$$\begin{aligned} & d(T^mx_0, T^nx_0) \\ & \leq d(T^mx_0, T^{m+1}x_0) + d(T^{m+1}x_0, T^{m+2}x_0) + \dots + d(T^{n-1}x_0, T^nx_0) \\ & \leq \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^ls + \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{l+1}s + \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{l+1}s + \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{l+2}s + \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{l+2}s + \dots \\ & \leq 2\left(\frac{\rho}{\mu}\right)^ls + 2\left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{l+1}s + 2\left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{l+2}s + \dots \\ & \leq \frac{2\left(\frac{\rho}{\mu}\right)^ls}{1 - \frac{\rho}{\mu}} \end{aligned}$$

olduğunu elde ederiz.

**Durum 2**  $m, m = 2l$  olacak şekilde bir çift sayı olsun. Burada  $l \in \mathbb{N}$  dir.

$$d(T^mx_0, T^nx_0)$$

$$\begin{aligned}
&\leq d(T^m x_0, T^{m+1} x_0) + d(T^{m+1} x_0, T^{m+2} x_0) + \dots + d(T^{n-1} x_0, T^n x_0) \\
&\leq \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^l s + \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{l+1} s + \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{l+1} s + \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{l+2} s + \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{l+2} s + \dots \\
&\leq 2 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^l s + 2 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{l+1} s + 2 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{l+2} s + \dots \\
&\leq \frac{2 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^l s}{1 - \frac{\rho}{\mu}}
\end{aligned}$$

olduğunu elde ederiz. Bu yüzden  $n > m$  ve  $l \in \mathbb{N}$  için  $m = 2l$  veya  $m = 2l + 1$  olduğunda  $d(T^m x_0, T^n x_0) \leq \frac{2 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^l s}{1 - \frac{\rho}{\mu}}$  olduğu sonucuna varırız. Bu da  $\{x_n\}$  nin  $X$  de bir Cauchy dizisi olduğunu ima eder. Bütün  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$  olduğundan  $X$  in  $\alpha$ -tamlığından  $n \rightarrow \infty$  iken  $x_n \rightarrow x^*$  olacak şekilde  $x^* \in X$  dir.  $T$  nin  $\alpha$ -sürekliliğinden  $n \rightarrow \infty$  iken  $x_{n+1} = T x_n \rightarrow T x^*$  elde ederiz. Limitin tekliğinden  $T x^* = x^*$  elde ederiz ve bu nedenle  $T$  sabit noktaya sahiptir.  $T$  deki sabit noktanın tekliği için Teorem 3.1.1'nin ispatındaki metodun bir benzerini kullanabiliriz. Bu da ispatı tamamlar. Teorem 3.1.7'nin uygulamasından aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

**Sonuç 3.1.8.**  $(X, d)$  metrik uzayı,  $T : X \rightarrow X$  ise temel dönüşümü

$\alpha : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  olan 2. dereceden genelleştirilmiş büzülme eşlemesidir.  $\forall x, y \in X$ ,

$$\alpha(x, y) d(T^2 x, T^2 y) \leq a_1 d(x, T x) + a_2 d(T x, T^2 x) + b_1 d(y, T y) + b_2 d(T y, T^2 y)$$

dir. Burada  $a, b \in [0, 1)$   $a + b < 1$ . Kabul edelim ki  $T$   $\alpha$ -admissible dır ve  $\alpha(x_0, T x_0) \geq 1$  olacak biçimde  $x_0 \in X$  vardır. Ek olarak  $T$  bir  $\alpha$ -sürekli ve  $(X, d)$  bir tam metrik uzaysa, o halde  $T$  nin bir sabit noktası vardır ve ayrıca  $X$ ,  $(H)$  özelliğine sahipse  $T$  tek bir sabit noktaya sahiptir. (Latif ve ark., 2015)

**Uyarı 3.1.9.** Sonuç 3.1.8 nin Miandaragh ve arkadaşlarının (Miandaragh ve ark., 2013) çalışmasındaki teorem 3.1.1'nin bir genelleştirilmesi olduğu kolayca görülür.

**Sonuç 3.1.10.**  $(X, d)$  metrik uzayı,  $T : X \rightarrow X$ , bütün  $x, y$  için

$$\begin{aligned}
&[d(T^2 x, T^2 y) + \tau]^{\alpha(x, y)} \\
&\leq a_1 d(x, T x) + a_2 d(T x, T^2 x) + b_1 d(y, T y) + b_2 d(T y, T^2 y) + \tau
\end{aligned}$$

şeklinde bir dönüşüm olsun,  $a, b \in [0, 1)$  ile  $a + b < 1$  ve  $\tau \geq 1$ . Farzedelim ki  $T$ ,  $\alpha$ -admissible,  $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$  eşitsizliğini sağlayacak biçimde  $x_0 \in X$  noktasıvar olsun. O zaman  $T$  yaklaşık sabit nokta özelliğine sahiptir. Ek olarak  $T$   $\alpha$ -sürekli ve  $(X, d)$   $\alpha$ -tam metrik uzaysa  $T$  nin sabit noktası vardır ve ayrıca  $X$   $(H)$  özelliğine sahipken  $T$  tek bir sabit noktaya sahiptir. (Latif ve ark., 2015)

**Sonuç 3.1.11.**  $(X, d)$  metrik uzayı,  $T : X \rightarrow X$  bütün  $x, y \in X$ ,

$$[\tau - 1 + \alpha(x, y)]^{d(T^2x, T^2y)}$$

$$\leq \tau^{a_1d(x, Tx) + a_2d(Tx, T^2x) + b_1d(y, Ty) + b_2d(Ty, T^2y)}$$

şeklinde bir dönüşüm olsun, burada  $a, b \in [0, 1)$ ,  $a + b < 1$  ve  $\tau \geq 1$  dir. Kabul edelim ki  $T$   $\alpha$ -admissible olduğunu ve  $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$  şeklinde  $x_0 \in X$  olsun. O halde  $T$  yaklaşık sabit nokta özelliğine sahiptir. Ek olarak  $T$   $\alpha$ -sürekli ve  $(X, d)$  bir  $\alpha$ -tam metrik uzaysa o vakit  $T$  sabit noktası vardır ve ayrıca  $X$   $(H)$  özelliğine sahipken  $T$  belli bir sabit noktaya sahiptir. (Latif ve ark., 2015)

**Uyarı 3.1.12.** Teorem 3.1.1, 3.1.4 ve 3.1.7 aşağıdaki sonuçlara genelleştirilebilir.

1. Koşul 2.2.1 büzülme koşullarının bazılarına ve dışbükey büzülme koşullarına göre daha zayıftır. Örneğin genelleştirilmiş dışbükey büzülme şartı (Miandaragh ve ark., 2013) Banach büzülme koşulu (Banach, 1922)
2. Koşul 2.2.2 büzülme koşullarının bazılarından ve dışbükey büzülme koşullarından daha zayıftır, örneğin 2.dereceden genelleştirilmiş büzülme koşulu (Miandaragh ve ark., 2013) Kannan'ın büzülme koşulu (Kannan, 1969) gibi
3. Sabit noktanın varlığı için sadece  $T$ 'nin  $\alpha$ -sürekliliği ve  $X$  in  $\alpha$ -tamlığı gerekmektedir. Halbuki diğer sonuçlar daha güçlü koşullar talep eder.

Sonuç olarak Teorem 3.1.1, Teorem 3.1.3 ve Teorem 3.1.7 Miandaragh ve arkadaşlarının çalışmasının ana sonuçlarını (Miandaragh ve ark., 2013) Banach büzülme teoremini (Banach, 1922) Kannan büzülme teoremini (Kannan, 1969) ve literatürdeki birkaç sonucu genişleterek geliştirmiştir.

### 3.2. Keyfi Bir İkili İlişki ile Donatılmış Metrik Uzayda Yaklaşık Sabit Nokta Teoremleri

**Teorem 3.2.1.**  $(X, d)$  metrik uzayı,  $X$  üzerinde  $R$  ikili ilişkisi ve  $T : X \rightarrow X$ ,  $S$  ye göre bir kısmi genelleştirilmiş dışbükey büzülme dönüşümü verilsin. Kabul edelim ki  $T$  bir büzülme dönüşümü ve  $(x_0)S(Tx_0)$  olacak biçimde  $x_0 \in X$  vardır. Ek olarak  $TS$  sürekli ve  $(X, d)$   $S$ -tam metrik uzaysa, o vakit  $T$  nin sabit noktası vardır ve  $X$  in,  $(H)$  özelliği varsa  $T'$  nin bir tek sabit noktası vardır. (Latif ve ark., 2015)

**İspat.**  $\alpha(x, y) = \begin{cases} 1 & x, y \in xSy \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$

$\alpha : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  dönüşümünü gözönüne alalım.  $(x_0)S(Tx_0)$  olacak şekilde  $x_0 \in X$  in varlığından  $\alpha(x_0, Tx_0) = 1$  elde ederiz.  $T$  karşılaştırmalı dönüşüm olduğundan  $T$ ,  $\alpha$ -admissible dönüşümdür.  $T$ ,  $S$  ye göre bir kısmi genelleştirilmiş dışbükey büzülme dönüşümü olduğundan bütün  $x, y \in X$ ,

$$xSy \Rightarrow d(T^2x, T^2y) \leq ad(Tx, Ty) + bd(x, y)$$

ve böylece

$$\alpha(x, y) \geq 1 \Rightarrow d(T^2x, T^2y) \leq ad(Tx, Ty) + bd(x, y)$$

elde ederiz. Bu  $T$  nin  $\alpha$  temel dönüşümü ile bir kısmi genelleştirilmiş büzülme dönüşümü olduğunu gösterir. Teorem 3.1.1'nin tüm hipotezleri sağlanmıştır. Böylece  $T$  yaklaşık sabit noktaya sahiptir. Üstelik  $T$  nin  $S$ -sürekliliği ve  $X$  in  $S$ -tamlığı  $T$  nin sabit noktası olmasını verir. Son olarak Teorem 3.1.3'den  $T$  belli bir sabit noktaya sahiptir. İspat tamamlanır

**Teorem 3.2.2.**  $(X, d)$  metrik uzayı,  $R$ ,  $X$  de ikili ilişki ve  $T : X \rightarrow X$ ,  $S$  ye göre 2. dereceden kısmi genelleştirilmiş dışbükey büzülme dönüşümü olmak üzere  $T$  büzülme dönüşümü ve  $(x_0)S(Tx_0)$  şeklinde  $x_0 \in X$  mevcut olsun. O zaman  $T$  nin yaklaşık sabit nokta özelliği vardır. Ek olarak  $T$ ,  $S$  sürekli ve  $(X, d)$  bir  $S$ -tam metrik uzaysa  $T$  nin sabit noktası vardır ve  $X$  in  $(H)$  özelliğinden  $T$  nin sabit noktası tektir. (Latif ve ark., 2015)

**İspat.** Bu ispat Teorem 3.2.1'in ispatına benzerdir.

### 3.3. Grafik İle Yaklaşık Sabit Nokta Analizi

Bu bölümde grafik ile donatılmış bir metrik uzayda yaklaşık sabit nokta teoremlerinin varlığını veriyoruz.

**Teorem 3.3.1.**  $(X, d)$   $G$  grafiğiyle donatılmış uzay olmak üzere

$T : X \rightarrow X$ ,  $E(G)$  ye göre kısmi genelleştirilmiş dışbükey büzülme dönüşümü verilsin .  $T$  nin kenar koruyan olduğunu ve  $(x_0, Tx_0) \in E(G)$  olacak biçimde  $x_0 \in X$  var olduğunu farz edelim. O zaman  $T$  yaklaşık sabit nokta özelliğine sahiptir ve  $X$   $(H_E)$  özelliğine sahip olduğunda  $T$  nin sadece bir tek sabit noktası vardır. (Latif ve ark., 2015)

**İspat.**  $\alpha(x, y) = \begin{cases} 1 & x, y \in E(G) \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$  şeklindeki  $\alpha : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  dönüşümünü ele alalım.  $x_0 \in X$ ,  $(x_0, Tx_0) = 1$  elde ederiz.  $T$  kenar koruyan olduğundan,  $T$   $\alpha$ -admissible dönüşümdür.  $T$ ,  $E(G)$  ye göre kısmi genelleştirilmiş dışbükey büzülme dönüşümü olduğundan, her  $x, y \in X$ ,

$$(x, y) \in E(G) \Rightarrow d(T^2x, T^2y) \leq ad(Tx, Ty) + bd(x, y)$$

ve böylece

$$\alpha(x, y) \geq 1 \Rightarrow d(T^2x, T^2y) \leq ad(Tx, Ty) + bd(x, y)$$

elde ederiz. Bu  $T$  nin  $\alpha$  dönüşümüne dayalı bir kısmi genelleştirilmiş dışbükey büzülme olduğunu ima eder. Şimdi Teorem 3.1.1'nin bütün dönüşümleri sağlandı. Bu yüzden  $T$  yaklaşık sabit noktaya sahiptir. Üstelik  $T$  nin  $E(G)$ -sürekliliği ve  $X$  in  $E(G)$ -tamlığı  $T$  nin sabit noktasının varlığını verir. Son olarak Teorem 3.4'den  $T$  nin bir tek sabit noktası vardır. Bu da ispatımızı sonlandırır.

**Teorem 3.3.2.**  $(X, d)$  bir  $G$  grafiği ile donatılmış bir metrik uzay,  $T : X \rightarrow X$ ,  $E(G)$  ye göre 2.dereceden bir kısmi genelleştirilmiş dışbükey büzülme dönüşümü olsun. Kabul edelim ki  $(x_0, Tx_0) \in E(G)$  olacak biçimde  $x_0 \in X$  vardır. O halde  $T$  yaklaşık sabit nokta özelliğine sahiptir. Ek olarak eğer  $E(G)$ -sürekliliği,  $(X, d)$  bir

$E(G)$ -tam metrik uzaysa,  $T$  sabit noktaya sahiptir ve  $X$  in  $(H_E)$  özelliği olduğundan  $T$ 'nin sabit noktası tektir. (Latif ve ark., 2015)

**İspat.** Bu ispat Teorem 3.3.1'in benzeridir.

### 3.4. $\alpha$ -Tam Metrik Uzaylarda Genelleştirilmiş $(\alpha, \psi, \phi)$ -Rasyonel Büzülme Dönüşümlerinin Sabit Noktaları

Tezin bu bölümünde  $\alpha$ -metrik uzaylarda genelleştirilmiş  $(\alpha, \psi, \phi)$  –rasyonel büzülme dönüşümlerini oluşturulmuş ve dönüşümlerin bu sınıfı için kimi sabit nokta sonuçları kanıtlanmıştır

**Teorem 3.4.1.**  $(X, d)$  tam,  $T : X \rightarrow X$ ,  $X$  üzerinde kendi içine dönüşüm olmak koşuluyla, varsayalım ki bütün  $x, y \in X$  ler için  $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  azalmayan, sürekli ve  $\varphi(t) = 0$  dır ancak ve ancak  $t = 0$  olmak üzere

$$\psi(d(Tx, Ty)) \leq \psi(d(x, y)) - \varphi(d(x, y))$$

olsun. O zaman  $T$  nin sadece bir sabit noktası vardır. (Dutta ve ark., 2008)

**Teorem 3.4.2.**  $(X, d)$  tam metrik uzayı ile  $T : X \rightarrow X$

$$\psi(d(Tx, Ty)) \leq \psi(M(x, y)) - \varphi(M(x, y))$$

eşitsizliğini sağlayan kendi içine dönüşümü verilsin. Burada

$$M(x, y) = \max \left\{ (d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2}) \right\}$$

$\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  azalmayan, sürekli ve  $\psi(t) = 0$  ancak ve ancak  $t = 0$  dır ve

$$\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$$

$\varphi(t) = 0$  ile alt sürekli fonksiyondur ancak ve ancak  $t = 0$  dır. Bu taktirde  $T$  nin tek sabit noktası vardır

(Doric ve ark., 2009)

Yakın zamanda Singh, Kama, Sen ve Chough Teorem 3.5.2'nin genelleştirilmesi şeklinde aşağıdaki sonucu ortaya koydular.

**Teorem 3.4.3.**  $(X, d)$  metrik uzayı ile  $X$  de bir  $T$  kendi içine dönüşümü verilsin.  $\forall x, y \in X$  için

$$\frac{1}{2}d(x, Tx) \leq d(x, y)$$

olması

$$\psi(d(Tx, Ty)) \leq \psi(M(x, y)) - \varphi(M(x, y))$$

olduğunu gösterir. Burada

$$M(x, y) = \max \left\{ d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2} \right\}$$

$$\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$$

azalmayan, sürekli ve  $\psi(t) = 0$  dır ancak ve ancak

$$\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$$

ve  $\varphi(t) = 0$  ile alt yarı sürekli fonksiyondur ancak ve ancak  $t = 0$  dır. Bu durumda  $T$  bir tek sabit noktaya sahiptir (Singh ve ark., 2015)

Diğer taraftan Piri ve Kuman metrik uzaylarda aşağıdaki sabit nokta sonuçlarını ispatladılar.

**Teorem 3.4.4.**  $X$  bir tam metrik uzayı ile,  $X$  üzerinde  $T$  kendi içine dönüşümü verilsin. Kabul edelim ki tüm  $x, y \in X$  ile  $Tx \neq Ty$  için  $\tau > 0$  var ve

$$\frac{1}{2}d(x, Tx) \leq d(xy) \Rightarrow \tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y))$$

dir. Burada  $F = -\infty$  ise  $F : (0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$  sürekli, kesin artandır. O halde  $T$  belli bir  $z \in X$  sabit noktasını barındırır ve her bir  $x \in X$  için  $\{T^n x\}$  dizisi  $z'$  ye yakınsar.

$$\Psi = \{\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \mid \psi \text{ sürekli ve azalmayan fonksiyon}\}$$

$$\Phi = \left\{ \phi : \psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0 \right\}$$

ve

$$\Psi_1 = \{\psi_1 = [0, \infty)^6 \rightarrow [0, \infty) :$$

i  $\psi_1$  sürekli ve tüm koordinatlar için azalmayan

ii  $\psi_1(t_1, t_2, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) \Leftrightarrow t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = t_5 = t_6$

iii her  $t > 0$  için  $\psi_1(t_1, t_2, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) \leq t$

olarak ifade edilir.

(Babu ve ark., 2017)

**Uyarı 3.4.5.** Eğer  $\phi \in \Phi$  ise,  $\phi(t) = 0 \Rightarrow t = 0$  dır.

**Teorem 3.4.6.**  $(X, d)$  metrik uzayı ile  $T : X \rightarrow X$  genelleştirilmiş

$(\alpha, \psi, \phi)$ -rasyonel büzülmesi verilsin. Aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim.

i  $(X, d)$   $\alpha$ -tam metrik uzay

ii  $T$  üçgensel  $\alpha$ -admissible dönüşüm

iii  $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$  şeklinde  $x_0 \in X$  vardır

iv  $T$  süreklidir.

O halde  $T$  bir tek sabit nokta barındırır. (Babu ve ark., 2017)

**İspat.** Hipotez (ii) den  $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$  olacak biçimde  $x_0 \in X$  e sahibiz. Bu  $x_0 \in X$  i başlangıç noktası olarak  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $x_{n+1} = Tx_n$  den  $\{x_n\}$  tekrarlı dizisini tanımlayalım. Bazı  $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  için  $x_{n_0+1} = x_{n_0}$  ise  $Tx_{n_0} = x_{n_0+1} = x_{n_0}$  buluruz. Böylece  $x_{n_0}$ ,  $T$ ' nin bir sabit noktasıdır. Buradan genelliği kaybetmeden bütün  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $x_{n+1} \neq x_n$  olduğunu farz edelim.  $T$ ,  $\alpha$ -admissible ve  $\alpha(x_0, x_1) = \alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$  olduğundan  $\alpha(x_1, x_2) = \alpha(Tx_0, Tx_1) \geq 1$  sonucunu çıkarırız. Bu işlemin devamından

$$\text{Her } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1 \quad (3.4.5)$$

elde ederiz. İlk  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$  gösterelim. Bütün

$$n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1,$$

$$\frac{1}{2}d(x_n, Tx_n) \leq d(x_n, Tx_n) = d(x_n, x_{n+1})$$

olduğundan ve (2.2.3) den

$$\psi(d(Tx_n, Tx_{n+1})) \leq M\psi_1(x_n, x_{n+1}) - \phi(M\psi_1(x_n, x_{n+1})) \quad (3.4.6)$$

elde ederiz. Burada

$$\begin{aligned} & M\psi_1(x_n, x_{n+1}) \\ = & \psi_1(d(x_n, x_{n+1}), d(x_n, Tx_n), d(x_{n+1}, Tx_{n+1}), \frac{d(x_n, Tx_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx_n)}{2}, \\ & \frac{d(x_{n+1}, Tx_{n+1})[1 + d(x_n, Tx_n)]}{1 + d(x, x_{n+1})}, \frac{d(x_{n+1}, Tx_n)[1 + d(x_n, Tx_{n+1})]}{1 + d(x_n, x_{n+1})}) \\ = & \psi_1\left(d(x_n, x_{n+1}), d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n+1}, x_{n+2}), \frac{d(x_n, x_{n+2})}{2}, d(x_{n+1}, x_{n+2}), 0\right). \end{aligned}$$

Şimdi bazı  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  için  $d(x_n, x_{n+1}) < d(x_{n+1}, x_{n+2})$  ise  $\psi_1$ ' in (i) özelliğinden

$M\psi_1(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_{n+1}, x_{n+2})$  ye sahibiz ve (3.4.6) den

$$\begin{aligned} \psi(d(x_{n+1}, x_{n+2})) &= \psi(d(Tx_n, Tx_{n+1})) \\ &\leq \psi(M\psi_1(x_n, x_{n+1})) - \phi(M\psi_1(x_n, x_{n+1})) \\ &= \psi(d(x_{n+1}, x_{n+2})) - \phi(M\psi_1(x_n, x_{n+1})) \end{aligned}$$

bulunur. Bu

$$\phi(M\psi_1(x_n, x_{n+1})) = 0$$

olduğunu gösterir, ayrıca  $M\psi_1(x_n, x_{n+1}) = 0$  v.b. olduğunu da gösterir.

$$\begin{aligned} & \psi_1(d(x_n, x_{n+1}), d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n+1}, x_{n+2}), \frac{d(x_n, x_{n+2})}{2}, \\ & d(x_{n+1}, x_{n+2}), 0) = 0 \end{aligned}$$

dır.  $\psi_1$ ' in (ii) özelliği dolayısıyla  $d(x_n, x_{n+1}) = 0$ ,  $x_n \neq x_{n+1}$  bir çelişkidir. Öyleyse tüm  $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$   $d(x_n, x_{n+1}) \geq d(x_{n+1}, x_{n+2})$  dir. Buradan  $\{d(x_n, x_{n+1})\}$  dizisi azalan ve alttan sınırlıdır. Böylece  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = \tau$  olacak biçimde  $\tau \geq 0$  vardır. Şimdi (3.4.6) dan

$$\begin{aligned} \psi(d(x_{n+1}, x_{n+2})) &= \psi(d(Tx_n, Tx_{n+1})) \leq \psi(d(x_n, x_{n+1})) \\ &\quad - \phi(M_{\psi_1}(x_n, x_{n+1})) \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

dir.  $d(x_n, x_{n+1})$  ve  $d(x_{n+1}, x_{n+2})$  sınırlı

$$d(x_n, x_{n+2}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})$$

olduğundan tüm  $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ ,  $\{d(x_n, x_{n+2})\}$  nin bir sınırlı dizi olduğunu elde ederiz. Bundan dolayı  $s'$  ye yakınsayan bir  $\{d(x_{n_k}, x_{n_{k+2}})\}$  alt dizisi var ve böylece  $s \geq 0$  dır. Bu alt diziye karşılık gelen (3.4.7)'in kullanımından

$$\begin{aligned} \psi(d(x_{n_{k+1}}, x_{n_{k+2}})) &= \psi(d(Tx_{n_k}, Tx_{n_{k+1}})) \\ &\leq \psi(d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}})) - \phi(M_{\psi_1}(x_{n_k}, x_{n_{k+1}})) \\ &\leq \psi(d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}})) \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

elde ederiz. (3.4.8) da  $k \rightarrow \infty$ ' a izin verilirken ve  $\psi$ ' nin sürekliliğini kullanarak, (3.4.8)'in aynı  $\psi(\tau)$  limitine yakınsadığı ilk ve son şartları elde ederiz. Böylece

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi(d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}})) - \phi(M_{\psi_1}(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}))$$

var ve  $\psi(\tau)$ 'ya eşittir. Şimdi

$$\begin{aligned} \phi(M_{\psi_1}(x_{n_k}, x_{n_{k+1}})) &= (\phi(M_{\psi_1}(x_{n_k}, x_{n_{k+1}})) \\ &\quad - \psi(d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}})) + \psi(d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}))) \end{aligned}$$

ve  $k \rightarrow \infty$  iken

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} \phi \left( M_{\psi_1} (x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \phi \left( M_{\psi_1} (x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \right) \\
&\quad - \psi \left( d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \right) + \lim_{k \rightarrow \infty} \psi \left( d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \right) \\
&= -\psi(\tau) + \psi(\tau) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde ederiz ve bu

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi M_{\psi_1} (x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) = 0$$

olduğunu ima eder.  $\psi_1$  in süreklilik özelliğinden

$$\psi_1 \left( \tau, \tau, \tau, \tau, \tau, \frac{s}{2}, 0 \right) = 0$$

olur.  $\psi_1$  deki (ii) özelliği dolayısıyla  $r = 0$  ve  $s = 0$  elde ederiz. Öyleyse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0 \quad (3.4.9)$$

dir. Şimdi  $\{x_n\}$  in Cauchy dizisi olduğunu kanıtlayalım. Farz edelim ki  $\{x_n\}$  bir Cauchy dizisi olmasın. Lemma 2'den  $\epsilon > 0$  vardır ve  $\{n_k\}$  ve  $\{m_k\}$  pozitif tamsayıların dizileri  $n_k > m_k \geq k$  ile

$$d(x_{m_k}, x_{n_k}) \geq \epsilon \quad (3.4.10)$$

koşulunu sağlar. (3.4.10) 'u sağlayan en küçük  $n_k$  'yı seçelim. O zaman  $n_k > m_k \geq k$  ile  $d(x_{m_k}, x_{n_k}) \geq \epsilon$ ,  $d(x_{m_k}, x_{n_{k-1}}) < \epsilon$  olur ve Lemma 2.2.33 ün (i) – (iv) koşulları sağlanır. Lemma 2.2.11'den  $\alpha(x_{m_k}, x_{n_k}) \geq 1$  elde ederiz ve (3.5.9) dan

$$\frac{1}{2} d(x_{m_k}, Tx_{m_k}) \leq \frac{1}{2} \epsilon < d(x_{m_k}, x_{n_k})$$

olacak şekilde  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  için seçeriz. (3.1.2) dolayısıyla her  $k \geq n_1$  için

$$\psi \left( d(x_{m_{k+1}}, x_{n_{k+1}}) \right) = \psi \left( d(Tx_{m_k}, Tx_{n_k}) \right) \quad (3.4.11)$$

$$\leq \psi M_{\psi_1}(x_{m_k}, x_{n_k}) - \phi(M_{\psi_1}(x_{m_k}, x_{n_k}))$$

elde ederiz.

$$\begin{aligned} M_{\psi_1}(x_{m_k}, x_{n_k}) &= \psi_1(d(x_{m_k}, x_{n_k}), d(x_{m_k}, Tx_{m_k}), d(x_{n_k}, Tx_{n_k}), \\ &\quad \frac{d(x_{m_k}, x_{n_k}) + d(x_{m_k}, Tx_{n_k})}{2}, \frac{d(x_{n_k}, Tx_{n_k})[1 + d(x_{m_k}, Tx_{n_k})]}{1 + d(x_{n_k}, x_{m_k})}, \frac{d(Tx_{m_k}, x_{n_k})[1 + d(x_{m_k}, Tx_{n_k})]}{1 + d(x_{m_k}, x_{n_k})}), \\ &= \psi_1(d(x_{m_k}, x_{n_k}), d(x_{m_k}, x_{m_{k+1}}), d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}), \frac{d(x_{m_{k+1}}, x_{n_k}) + d(x_{m_k}, x_{n_{k+1}})}{2}, \\ &\quad \frac{d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}})[1 + d(x_{m_k}, x_{m_{k+1}})]}{1 + d(x_{n_k}, x_{m_k})}, \frac{d(x_{m_{k+1}}, x_{n_k})[1 + d(x_{m_k}, x_{n_{k+1}})]}{1 + d(x_{m_k}, x_{n_k})}) \quad (3.4.12) \end{aligned}$$

$k \rightarrow \infty$  için limit alınırken, (3.4.12) ve Lemma 2.2.33 (i) – (iv) kullanarak

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M_{\psi_1}(x_m, x_{n_k}) = \psi_1(\epsilon, 0, 0, \epsilon, 0, \epsilon) \leq \epsilon \quad (3.4.13)$$

elde ederiz. Şimdi  $\psi$  nın sürekliliği ve azalmayan olma özelliği kullanılarak (3.4.11) – (3.4.13) den

$$\begin{aligned} \psi(\epsilon) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(d(x_{m_{k+1}}, x_{n_{k+1}})) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \psi d(M_{\psi_1}(m_k, x_{n_k})) - \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(M_{\psi_1}(m_k, x_{n_k})) \\ &\leq \psi(\epsilon) - \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(M_{\psi_1}(m_k, x_{n_k})) \end{aligned}$$

elde ederiz ve bu yüzden

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi(M_{\psi_1}(m_k, x_{n_k})) = 0$$

dır. Bu

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M_{\psi_1}(m_k, x_{n_k}) = \psi_1(\epsilon, 0, 0, \epsilon, 0, 0) = 0$$

olduğunu ima eder.  $\psi_1$  in (ii) özelliği dolayısıyla  $\epsilon = 0$  elde ederiz, bu çelişkidir. Dolayısıyla  $\{x_n\}$  nin  $X$  de bir Cauchy dizisi olduğu sonucuna varırız. Her  $n$ ,  $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ ,  $(X, d)$  in  $\alpha$ -tamlığından  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z$  biçiminde  $z \in X$  var olup

$T$  nin sürekliliğinden  $\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = Tz$  elde ederiz. Böylece

$$Tz = T \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = z$$

dir.

**Teorem 3.4.7.**  $(X, d)$  metrik uzayı,  $T : X \rightarrow X$  genelleştirilmiş  $(\alpha, \psi, \phi)$  – rasyonel büzülme dönüşümü olmak üzere aşağıdaki şartları sağladığını kabul edelim.

- i  $(X, d)$ ,  $\alpha$ -tam uzay
- ii  $T$  üçgensel  $\alpha$ -admissible dönüşüm
- iii  $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$  olacak biçimde  $x_0 \in X$  vardır
- iv  $x_n \rightarrow z$  olacak biçimde  $\{x_n\}$   $X$  de bir dizi ve tüm  $n \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$  ise, tüm  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $\alpha(x_n, z) \geq 1$  dir.

Bu halde  $T$  'nin yalnızca bir sabit noktası vardır. (Babu ve ark., 2017)

**İspat.** Teorem 3.4.6'nın ispatındakine benzer argümanlardan  $\{x_n\}$ ' in bir Cauchy dizisi olduğunu ve

$\forall n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$  için  $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$  olduğunu elde ederiz.  $(X, d)$  bir  $\alpha$ -tam merik uzay olduğundan  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z$  olacak şekilde  $z \in X$  vardır. (iv) den  $\forall n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$  için  $\alpha(x_n, z) \geq 1$  elde ederiz. Şimdi  $z$ ' nin  $T$ ' nin bir sabit noktası olduğunu gösterelim.

$$\frac{1}{2}d(x_n, Tx_n) \leq d(x_n, z)$$

ya da

$$\frac{1}{2}d(x_{n+1}, Tx_{n+1}) \leq d(Tx_n, z) \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (3.4.14)$$

olduğunu iddia ediyoruz. Bu durumun geçerli olmadığını kabul edelim. Yani

$$\frac{1}{2}d(x_m, Tx_m) > d(x_m, z)$$

ve

$$\frac{1}{2}d(x_{m+1}, Tx_{m+1}) > d(Tx_m, z)$$

olacak şekilde  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  vardır.

$$\begin{aligned}
d(x_m, Tx_m) &\leq d(x_m, z) + d(z, Tx_m) \\
&< \frac{1}{2}d(x_m, Tx_m) + \frac{1}{2}d(x_{m+1}, Tx_{m+1}) \\
&\leq \frac{1}{2}d(x_m, Tx_m) + \frac{1}{2}d(x_m, Tx_m) \\
&= d(x_m, Tx_m)
\end{aligned}$$

ifadesini ele alalım. Bu çelişkidir. Bu yüzden (3.4.14) geçerlidir. Kabul edelim ki

$$\frac{1}{2}d(x_n, Tx_n) \leq d(x_n, z)$$

olsun (2.2.3) den

$$\psi(d(Tx_n, Tz)) \leq \psi(M_{\psi_1}(x_n, z)) - \phi(M_{\psi_1}(x_n, z)) \quad (3.4.15)$$

elde ederiz. Burada

$$\begin{aligned}
M_{\psi_1}(x_n, z) &= (\psi d(x_n, z), d(x_n, Tx_n), d(z, Tz), \frac{d(x_n, Tz) + d(z, Tx_n)}{2}, \\
&\quad \frac{d(z, Tz)[1 + d(x_n, Tx_n)]}{1 + d(x_n, z)}, \frac{d(z, Tz)[1 + d(x_n, Tz)]}{1 + d(x_n, z)}) \quad (3.4.16)
\end{aligned}$$

dir.  $n \rightarrow \infty$  limitini aldığımızda ve (3.4.16) deki  $\psi_1$ 'in sürekliliğini kullanarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{\psi_1}(x_n, z) = \psi_1 \left( 0, 0, d(z, Tz), \frac{d(z, Tz)}{2}, d(z, Tz), 0 \right) \leq d(z, Tz)$$

elde ederiz ve ayrıca  $n \rightarrow \infty$  aldığımızda ve (3.4.15) deki  $\psi$  nin sürekliliğini kullandığımızda

$$\begin{aligned}
\psi(d(z, Tz)) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(M_{\psi_1}(x_n, z)) - \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(M_{\psi_1}(x_n, z)) \\
&\leq \psi \left( d(z, Tz) - \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(M_{\psi_1}(x_n, z)) \right)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(M_{\psi_1}(x_n, z)) = 0$$

olduğunu ima eder. Şimdi  $\phi$  nın özelliğini kullanarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{\psi_1}(x_n, z) = \psi_1(0, 0, d(z, Tz)), \frac{d(z, Tz)}{2}, d(z, Tz), 0 = 0$$

buluruz. Bu da  $d(z, Tz) = 0$  olduğunu gösterir. Buradan  $Tz = z$  dir.

**Teorem 3.4.8.** Teorem 3.4.6 ve Teorem 3.4.7 'nin hipotezlerine ilaveten eğer her  $u, z \in F(T)$  için  $\alpha(u, z) \geq 1$  ise  $F(T)$  nin bütün sabit noktalarının kümesidir. O zaman  $T$  tek bir sabit nokta barındırır. (Babu ve ark., 2017)

**İspat.**  $u$  ve  $z, T$  nin sabit noktaları olsun. Hipotezlerden  $\alpha(u, z) \geq 1$  ve  $0 = \frac{1}{2}d(u, Tu) \leq d(u, z)$  elde ederiz. (2.2.3) den

$$\psi(d(u, z)) = \psi(Tu, Tz) \leq \psi(M_{\psi_1}(u, z)) - \phi(M_{\psi_1}(u, z)) \quad (3.4.17)$$

elde ederiz. Burada

$$M_{\psi_1}(u, z) = \psi_1\left(d(u, z), d(u, Tu), d(z, Tz), \frac{d(u, Tz) + d(z, Tu)}{2}, \frac{d(z, Tz)[1 + d(u, Tu)]}{1 + d(u, z)}\right)$$

$$\psi_1(d(u, z), 0, 0, d(u, z), 0, d(u, z)) \leq d(u, z)$$

dir. Şimdi (3.4.17) eşitsizliğini kullanarak

$$\psi(d(u, z)) \leq \psi(M_{\psi_1}(u, z)) - \phi(M_{\psi_1}(u, z))$$

$$\psi(d(u, z)) - \phi(M_{\psi_1}(u, z))$$

elde ederiz. Bu  $\phi(M_{\psi_1}(u, z)) = 0$  olduğunu gösterir ve buradan  $M_{\psi_1}(u, z) = 0$  dir yani

$$\psi_1(d(u, z), 0, 0, d(u, z), 0, d(u, z)) = 0$$

dir. Şimdi  $\psi_1$  in (ii) özelliğinden  $d(u, z) = 0$  buluruz. Buradan  $u = z$  dir. Öyleyse  $T$  tek bir sabit noktaya sahiptir. Teorem 3.4.6 (Teorem 3.4.7) ve Teorem 3.4.8'nin ispatlarında verilenlere benzer argümanlar ile aşağıdaki teoremleri kolayca ispatlayabiliriz.

**Teorem 3.4.9.**  $(X, d)$  metrik uzayı olsun.  $X'$  de  $T$  kendi içine dönüşümü ve  $\alpha : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  dönüşümü verilsin . Kabul edelim ki  $\psi \in \Psi$  ve  $\phi \in \Phi$  vardır öyle ki  $\forall x, y \in X$  için

$$\frac{1}{2}d(x, Tx) \leq d(x, y) \text{ ve } \alpha(x, y) \geq 1 \quad (3.4.18)$$

olması

$$\begin{aligned} \psi d(Tx, Ty) \leq & \psi \left( \psi_2 \left( d(x, y), d(x, fx), d(x, fy), \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2} \right) \right) \\ & - \phi \left( \psi_2 \left( d(x, y), d(x, fx), d(y, fy), \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

olduğunu gösterir. Burada  $\psi_2 : [0, \infty)^4 \rightarrow [0, \infty)$  sürekli ve her bir koordinat için azalmayandır.

$$\psi_2(t_1, t_2, t_3, t_4) = 0 \Rightarrow t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 0 \text{ ve her } t > 0 \text{ için } \psi_2(t, t, t, t) \leq t \text{ dir.}$$

Dahası aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

- i  $(X, d)$   $\alpha$ -tam uzay
- ii  $T$  üçgensel  $\alpha$ -admissible dönüşüm
- iii  $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$  olacak biçimde  $x_0 \in X$  vardır.

Aşağıdaki koşullardan birinin sağlandığını varsayalım

a  $T$  süreklidir

- b  $\forall n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$  için  $x_n \rightarrow z$  ve  $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$  olmak üzere  $\{x_n\}$ ,  $X$  de dizi ise, bütün  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $\alpha(x_n, z) \geq 1$ . O halde  $T$ ,  $X'$  de tek sabit noktaya sahiptir. (Babu ve ark., 2017)

**Teorem 3.4.10.** Teorem 3.4.9' un hipotezine ek olarak her  $u, z \in F(T)$  için  $\alpha(u, z) \geq 1$  ise burada  $F(T)$ ,  $T'$  nin bütün sabit noktalarının kümesidir. Bu halde  $T$  bir tek sabit noktaya sahiptir. (Babu ve ark., 2017)

**Sonuç 3.4.11.**  $(X, d)$  tam metrik uzayı,  $T : X \rightarrow X$ ,  $X$ ' de kendi içine olmak koşuluyla tüm  $x, y \in X$  için

$$\frac{1}{2}d(x, Tx) \leq d(x, y) \Leftrightarrow \psi(d(Tx, Ty)) \leq \psi(M_{\psi_1}(x, y)) - \phi(M_{\psi_1}(x, y)) \quad (3.4.19)$$

olacak biçimde  $\psi \in \Psi$ ,  $\phi \in \Phi$  ve  $\psi_1 \in \Psi_1$  var ise  $M_{\psi_1}$  (3.1.3) deki gibi tanımlanır. Bundan dolayı  $T$ 'nin  $X$  de belli bir sabit noktası vardır. (Babu ve ark., 2017)

**İspat.**  $\forall x, y \in X$  ve  $\alpha(x, y) = 1$  seçiminden (3.5.19) eşitsizliğinin (3.1.2) eşitsizliğini gerektirdiği açıktır ve Teorem 3.4 8' den aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**Sonuç 3.4.12.**  $(X, d)$  tam uzay,  $T : X \rightarrow X$ , kendi içine olmak koşuluyla Her  $x, y \in X$  için  $\frac{1}{2}d(x, Tx) \leq d(x, y)$  iken

$$\tau + \psi(d(Tx, Ty)) \leq \psi(M_{\psi_1}(x, y)) \quad (3.4.20)$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde  $\psi \in \Psi$ ,  $\tau > 0$  ve  $\psi_1 \in \Psi_1$  var ise  $M_{\psi_1}$  (3.1.3) deki gibi tanımlanır, sonuçta  $T$  nin  $X$  de sabit noktası vardır. (Babu ve ark., 2017)

**İspat.** Bütün  $x, y \in X$  ler için  $\alpha(x, y) = 1$  ve  $\phi(t) = \tau > 0$  seçiminden sonuç elde edilir, (3.4.20) eşitsizliğinin (3.1.12) eşitsizliğini gerektirdiği açıktır ve Teorem (3.5.8)'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Uyarı 3.4.13.** Eğer

$$\psi_1: [0, \infty)^6 \rightarrow [0, \infty), \quad \psi_1(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = \max\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}$$

seçersek  $\psi'$  nin azalmayan olmasından

$$\tau + \psi(d(Tx, Ty)) \leq \psi(d(x, y)) \leq \psi(M_{\psi_1}(x, y))$$

elde ederiz. Teorem(3.4.4) den Sonuç (3.4.12)' nin sonucunu elde ederiz. (Babu ve ark., 2017)

**Sonuç 3.4.14.**  $(X, d)$  metrik uzayı olmak koşuluyla  $T : X \rightarrow X$  , kendi içine dönüşümü ve  $\alpha : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  dönüşümü verilsin .  $\psi_i \in \Psi$ ,  $\phi \in \Phi$  ve  $\psi_1 \in \Psi_1$  olduğunu kabul edelim öyle ki

Bütün  $x, y \in X$  ler için  $\frac{1}{2}d(x, Tx) \leq d(x, y)$  olması

$$\alpha(x, y) \psi(d(Tx, Ty)) \leq \psi(M_{\psi_1}(x, y)) - \phi(M_{\psi_1}(x, y)) \quad (3.4.21)$$

olduğunu gösterir.  $M_{\psi_1}$  (3.1.13) deki gibi tanımlanır. Ayrıca aşağıdaki sonuçların sağlandığını kabul edelim.

- i**  $(X, d)$   $\alpha$ -tam
- ii**  $T$  üçgensel  $\alpha$ -admissible dönüşüm
- iii**  $x_0 \in X$  var öyle ki  $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$  dir.

Aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim

**a**  $T$  süreklidir

**b**  $\forall n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$  için  $x_n \rightarrow z$  ve  $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$  olacak biçimde  $\{x_n\}$  ,  $X$  de bir dizi ise, bütün  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  ler için  $\alpha(x_n, z) \geq 1$  dir.

Böylece  $T$   $X$  de sabit noktaya sahiptir. (Babu ve ark., 2017)

**İspat.**  $x, y \in X$  ile  $\alpha(x, y) \geq 1$  olsun. (3.4.21) den

$$\psi(d(Tx, Ty)) \leq \alpha(x, y) \psi(d(Tx, Ty)) \leq \psi(M_{\psi_1}) \quad (3.4.22)$$

elde ederiz, bu da (2.2.3) eşitsizliğini verir. Buradan (3.4.21) eşitsizliği (2.2.3)ü verir.

Teorem 3.4.6 (Teorem 3.4.7) uygulamalarından  $T$ 'nin bir sabit noktası vardır.

**Sonuç 3.4.15.**  $(X, d)$ ,  $T : X \rightarrow X$ , kendi içine bir dönüşüm olmak koşuluyla  $\psi \in \Psi$  ve  $\phi \in \Phi$  vardır öyle ki tüm  $x, y \in X$  için

$$\frac{1}{2}(x, Tx) \leq d(x, y) \Rightarrow \psi(d(Tx, Ty)) \leq \psi(M(x, y)) - \phi(M(x, y)) \quad (3.4.23)$$

dir. Burada

$$M(x, y) = \max \left\{ d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2} \right\}$$

dir.  $T$ 'nin bir tane sabit noktası vardır. (Babu ve ark., 2017)

**İspat.** Her  $x, y \in X$ ,  $\alpha(x, y) = 1$  seçiminden ve

$$\psi_2 : [0, \infty)^4 \rightarrow [0, \infty) \quad \psi_2(t_1, t_2, t_3, t_4) = \max\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$$

tanımından

$$\psi_2 \left( d(x, y), d(x, fx), d(y, fy), \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2} \right) = \max\{d(x, y),$$

$$d(x, fx), d(y, fy), \frac{d(x, Ty)}{2} + \frac{d(y, Tx)}{2}\}$$

elde ederiz. Böylece (3.4.23) eşitsizliği (3.4.18) eşitsizliğini gerektirir,  $T$  Teorem 3.4.10'un bütün hipotezlerini sağlar ve böylece aşağıdaki sonuçlara varılır.

**Uyarı 3.4.16.**  $\{\psi \mid \psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \psi$  alt yarı sürekli,  $\psi(t) = 0$  ve  $\Leftrightarrow t = 0\}$  kümesi  $\Psi$ 'nin alt kümesi olup Teorem 3.4.3'ün sonucu Sonuç 3.4.15'deki gibidir.

Aşağıdaki örnek Teorem 3.4.6'yı destekler. (Babu ve ark., 2017)

**Örnek 3.4.17.**  $X = [0, \infty)$  ile  $d$  alışılmış metrik olmak koşuluyla  $T : X \rightarrow X$

$$T_x = \begin{cases} \frac{x}{8} & x \in [0, 2] \text{ ise} \\ 2x - \frac{31}{2} & x \in [2, \infty) \text{ ise} \end{cases}$$

ve  $\alpha : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ ,

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 2 & x \in [0, 1] \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olarak tanımlanır.  $x, y \in X$  lerin her biri için  $\alpha(x, y) \geq 1 \iff x, y \in [0, 1]$  olduğundan burada  $\frac{x}{8} = Tx, Ty = \frac{y}{8} \in [0, 1]$  ve böylece  $\alpha(Tx, Ty) \geq 1$  dir.  $\alpha(x, y) \geq 1$  ve  $x, y, z \in X$  için  $\alpha(y, z) \geq 1$  olsun, bu  $x, y, z \in [0, 1]$  olduğunu gösterir, buradan  $\alpha(x, z) \geq 1$  dir. Öyleyse  $T$  bir üçgensel  $\alpha$ -admissible dönüşümdür. Her bir  $x_0 \in [0, 1]$  için  $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$  olduğu açıktır. Şimdi  $T$ ' nin bir genelleştirilmiş  $(\alpha, \psi, \phi)$ -rasyonel büzülme dönüşümü olduğunu gösterelim. Bu amacımız için  $\psi, \phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$

$$\psi(t) = 2t \quad \phi(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \text{ ise} \\ \frac{t}{2} & t \neq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

ve  $\psi_1 = [0, \infty)^6 \rightarrow [0, \infty)$ ,

$$\psi_1(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = \max\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}$$

seçelim.  $\alpha(x, y) \geq 1$  dir ancak ve ancak  $x, y \in [0, 1]$  olduğundan  $x, y \in [0, 1]$  ile  $\frac{1}{2}d(x, Tx) \leq d(x, y)$  için (3.1.12) eşitsizliğini doğruluyoruz.  $x, y \in [0, 1]$  olsun. Genelliği kaybetmeden  $x \leq y$  olduğunu kabul edelim.  $\frac{1}{2}d(x, Tx) \leq d(x, y)$  yani  $\frac{23}{16}x \leq y$  olsun. Şimdi

$$\begin{aligned} \psi(d(Tx, Ty)) &= \psi\left(d\left(\frac{y}{8}, \frac{x}{8}\right)\right) = \psi\left(\left|\frac{y}{8} - \frac{x}{8}\right|\right) = 2\left|\frac{y}{8} - \frac{x}{8}\right| \leq \frac{5}{2}|y - x| \\ &= \frac{5}{2}d(x, y) \leq \frac{5}{2}M_{\psi_1}(x, y) = 2M_{\psi_1} - \frac{1}{2}M_{\psi_1}(x, y) \\ &= \psi(M_{\psi_1}(x, y)) - \phi(M_{\psi_1}(x, y)) \end{aligned}$$

olur. Böylece (3.2.3) eşitsizliği sağlanır. Bundan dolayı  $T$ , Teorem 3.4.6'nın bütün hipotezlerini sağlar ve  $x = 0$  ile  $x = \frac{31}{8}$   $T$ ' nin iki sabit noktasıdır. Aşağıdaki örnek Teorem 3.4.8'i destekler. (Babu ve ark., 2017)

**Örnek 3.4.18.**  $X = [0, \infty)$  alışılmış metrik olsun. Biz  $T \rightarrow X$  i

$$T_x = \begin{cases} \frac{x}{4} & x \in [0, 1] \text{ ise} \\ x + 4 & x \in (1, \infty) \text{ ise} \end{cases}$$

ve  $\alpha : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  yı

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1] \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olarak tanımlarız.  $T'$  nin üçgensel  $\alpha$ -admissible ve  $x_0 \in [0, 1]$  ların her biri için  $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$  olduğunu görmek kolaydır.  $\alpha'$  nin tanımından  $n \rightarrow \infty$  iken  $x_n \rightarrow x$  ve  $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  için  $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$  ile  $\{x_n\}$ ,  $X'$  de bir dizi olsun.  $\{x_n\} \subset [0, 1]$  elde ederiz. Öyleyse  $x \in [0, 1]$  dir. Buradan  $\forall n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$  için  $\alpha(x_n, x) \geq 1$  dir. Şimdi  $T'$  nin bir genelleştirilmiş  $(\alpha, \psi, \phi)$ -rasyonel büzülme dönüşümü olduğunu gösterelim. Bu amacımız için

$$\psi(t) = \frac{4}{3}t$$

ve

$$\phi(t) = \begin{cases} 2 & t = 0 \text{ ise} \\ \frac{t}{3} & t \neq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$\psi, \phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  ve  $\psi_1(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = \max\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}$  ile  $\psi : [0, \infty)^6 \rightarrow [0, \infty)$  seçelim.  $\alpha(x, y) \geq 1$  ancak ve ancak  $x, y \in [0, 1]$  olduğundan  $x, y \in [0, 1]$  ile  $\frac{1}{2}d(x, Tx) \leq d(x, y)$  için (3.1.2) eşitsizliğini doğrularız.  $x, y \in [0, 1]$  olsun. Genelliği keybetmeden  $x \leq y$  olduğunu kabul edelim.  $\frac{1}{2}d(x, Tx) \leq d(x, y)$  yani  $\frac{11}{8} \leq y$  dir. Şimdi

$$\begin{aligned} \psi(d(Tx, Ty)) &= \psi\left(d\left(\frac{y}{4}, \frac{x}{4}\right)\right) = \psi\left(\left|\frac{y}{4} - \frac{x}{4}\right|\right) \\ &= \frac{4}{3} \left|\frac{y}{4} - \frac{x}{4}\right| = \frac{1}{3} |y - x| \leq |y - x| = d(x, y) \\ &\leq M_{\psi_1}(x, y) = \frac{4}{3}M_{\psi_1}(x, y) - \frac{1}{3}M_{\psi_1}(x, y) \\ &= \psi(M_{\psi_1}(x, y)) - \phi(M_{\psi_1}(x, y)) \end{aligned}$$

dir. Buradan  $T$  Teorem 3.4.8'in tüm hipotezlerini sağlar ve  $x = 0$ ,  $T'$  de belli bir sabit noktadır.  $x = 0$  ve  $y = 2$  için burada şunu gözlemliyoruz.

$$\frac{1}{2}d(0, T0) = 0 \leq 2 = |2 - 0| = d(0, 2)$$

ve

$$M(0, 2) = \max \left\{ d(0, 2), d(0, T0), d(2, T2), \frac{d(0, T2) + d(2, T0)}{2} \right\} = 4$$

dir. Bundan dolayı

$$\psi(d(T0, T2)) = \psi(d(0, 6)) = \psi(6) \not\leq \psi(4) \not\leq \psi(4) - \phi(4)$$

dir. Herhangi sürekli ve azalmayan  $\psi$  ve alt yarı sürekli  $\phi$  ile  $\phi(t) = 0$  dır ancak ve ancak  $t = 0$  dir. Bundan dolayı Teorem 3.4.3 uygulanabilir değildir. Bu nedenle Örnek 3.4.18 ve Uyarı 3.4.16 sırasıyla Sonuç 3.4.15 in Teorem 3.5.3'ün genelleştirilmesi ve Teorem 3.4.10'un Teorem 3.4.5'ün genelleştirilmesi olduğunu öne sürmektedir. Benzer şekilde herhangi sürekli ve artan  $F$  dönüşümü ve  $\tau > 0$  için

$$F(d(T0 - T2)) = F(6) \not\leq F(2) \not\leq F(2) - \tau$$

dir. Bundan dolayı Teorem 3.4.4 de uygulanabilir değildir. Bu nedenle sırasıyla Örnek 3.4.18 ve Uyarı 3.4.13 Sonuç 3.4.12 nin Teorem 3.4.4'ün bir genellemesi ve Teorem 3.4.8'nin de Teorem 3.4.4'ün bir genellemesi olduğunu öne sürer. (Babu ve ark., 2017)

### 3.5. $\alpha$ -Tam Metrik Uzaylarda $(\alpha, \psi, \xi)$ -Çoğul Değerli Büzülme Dönüşümleri ve Sabit Nokta Sonuçları

Tezimizin bu bölümünde  $\alpha$ -tam metrik uzaylarda  $(\alpha, \psi, \xi)$  büzülme koşulunu sağlayan çoğul değerli dönüşümleri için Bianichi Grandolfi ölçüm dönüşümleri vasıtasıyla yeni sabit nokta sonuçları oluşturulmuştur. Ayrıca elde edilen sonuçların kullanılabilirliğini göstermek amacıyla, keyfi bir ikili ilişki ve bir grafikte donatılmış metrik uzaylardaki sabit nokta sonuçlarından bazıları verilmiştir

**Teorem 3.5.1.**  $(X, d)$  metrik uzay ve  $T : X \rightarrow CL(X)$  kesin  $(\alpha, \psi, \xi)$  büzülme olmak koşuluyla aşağıdaki durumların sağlandığını varsayalım.

$S_1$   $(X, d)$   $\alpha$ -sürekli uzay

**S<sub>2</sub>**  $T$   $\alpha$ -admissible çok değerli dönüşüm

**S<sub>3</sub>**  $x_0$  ve  $x_1 \in Tx_0$  var olsun öyle ki  $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$

**S<sub>4</sub>**  $T$   $\alpha$ -sürekli dönüşüm.

Bu bağlamda  $T$ 'nin sadece bir sabit noktası mevcuttur. (Kutbi ve ark., 2015)

**İspat.** ( $S_3$ ) deki  $x_0$  ve  $x_1 \in Tx_0$ 'dan başlarsak  $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$  dir.  $x_0 = x_1$  ise,  $x_0$  nın bir sabit noktası olduğunu görürüz. Kabul edelim ki  $x_0 \neq x_1$  olsun.  $x_1 \in Tx_1$  oluyorsa  $x_1$ ' in  $T$ ' in bir sabit noktası olduğunu elde ederiz. O zaman kanıt  $\alpha, \psi, \xi$  büzülme şartından

$$\begin{aligned} \xi(M, (Tx_0, Tx_1)) &\leq \psi(\xi(\max\{d(x_0, x_1), \\ &\quad d(x_0, Tx_0), d(x_1, Tx_1), \frac{d(x_0, Tx_1) + d(x_1, Tx_0)}{2}\})) \\ &= \psi\left(\xi\left(\max\left\{d(x_0, x_1), d(x_1, Tx_1), \frac{d(x_0, Tx_1)}{2}\right\}\right)\right) \\ &\leq \psi\left(\xi\left(\max\left\{d(x_0, x_1), d(x_1, Tx_1), \frac{d(x_0, x_1) + d(x_1, Tx_1)}{2}\right\}\right)\right) \\ &= \psi(\xi(\max\{d(x_0, x_1), d(x_1, Tx_1)\})) \quad (3.5.24) \end{aligned}$$

elde ederiz. Eğer  $\max\{d(x_0, x_1), d(x_1, Tx_1)\} = d(x_1, Tx_1)$  ise elde ettiğimiz

$$\begin{aligned} 0 &< \xi(d(x_1, Tx_1)) \\ &\leq \xi(H(Tx_0, Tx_1)) \\ &\leq (\xi(\max\{d(x_0, x_1), d(x_1, Tx_1)\})) \\ &\leq \psi(\xi(d(x_1, Tx_1))) \end{aligned} \quad (3.5.25)$$

bir çelişkidir. Öyleyse

$$\max\{d(x_0, x_1), d(x_1, Tx_1)\} = d(x_0, x_1)$$

dir. (3.5.24)'den

$$0 < \xi(d(x_1, Tx_1)) \leq \xi(H(Tx_0, Tx_1)) \leq \psi(\xi(d(x_0, x_1))) \quad (3.5.26)$$

elde ederiz. Lemma (3.1.43) de kullanılan  $q > 1$  sabiti için,  $x_2 \in Tx_1$  dir. Öyle ki

$$0 < \xi(d(x_1, x_2)) < q\xi(d(x_1, Tx_1)) \quad (3.5.27)$$

(3.5.26) ve (3.5.27)'den

$$0 < \xi(d(x_1, x_2)) < q\psi(\xi(d(x_0, x_1))) \quad (3.5.28)$$

elde ederiz.  $\psi$  kesin artan fonksiyon olduğundan

$$0 < \psi(\xi(d(x_1, x_2))) < \psi(q\psi(\xi(d(x_0, x_1)))) \quad (3.5.29)$$

elde ederiz.

$$q_1 = \frac{\psi(q\psi(\xi(d(x_0, x_1))))}{\psi(\xi(d(x_1, x_2)))}$$

yerine koyalım ve  $q_1 > 1$  den eğer  $x_1 = x_2$  veya  $x_2 \in Tx_2$  ise  $x_2$  nin  $T$  nin bir sabit noktası olduğunu buluruz. Bu durumda ispat aşıkardır. Öyleyse  $x_1 \neq x_2$  ve  $x_2 \notin Tx_2$  olduğunu kabul edebiliriz.  $x_1 \in Tx_0$ ,  $x_2 \in Tx_1$ ,  $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$  ve  $T$  bir  $\alpha$ -admissible çoğul değerli bir dönüşüm olduğundan  $\alpha(x_1, x_2) \geq 1$  dir.  $(\alpha, \psi, \xi)$ -büzülme şartını uygulayarak

$$\begin{aligned} \xi(H(Tx_1, Tx_2)) &\leq \psi(\xi(\max\{d(x_1, x_2), d(x_1, Tx_1), \\ &\quad d(x_2, Tx_2), \frac{d(x_1, Tx_2) + d(x_2, Tx_1)}{2}\})) \\ &= \psi\left(\xi\left(\max\left\{d(x_1, x_2), d(x_2, Tx_2), \frac{d(x_1, Tx_2)}{2}\right\}\right)\right) \\ &\leq \psi\left(\xi\left(\max\left\{d(x_1, x_2), d(x_2, Tx_2), \frac{d(x_1, x_2) + d(x_2, Tx_2)}{2}\right\}\right)\right) \\ &= \psi(\xi(\max\{d(x_1, x_2), d(x_2, Tx_2)\})) \end{aligned} \quad (3.5.30)$$

elde ederiz. Kabul edelim ki

$$\max\{d(x_1, x_2), d(x_2, Tx_2)\} = d(x_2, Tx_2)$$

olsun.(3.5.30)'dan

$$\begin{aligned}
0 &< \xi(d(x_2, Tx_2)) \\
&\leq \xi(H(Tx_1, Tx_2)) \\
&\leq \psi(\xi(\max\{d(x_1, x_2), d(x_2, Tx_2)\})) \\
&= \psi(\xi(d(x_2, Tx_2)))
\end{aligned} \tag{3.5.31}$$

elde ederiz. Bu çelişkidir. Öyleyse

$$\max\{d(x_1, x_2), d(x_2, Tx_2)\} = d(x_1, x_2)$$

almalıyız.(3.5.30)'dan

$$0 < \xi(d(x_2, Tx_2)) \leq \xi(H(Tx_1, Tx_2)) \leq \psi(\xi(d(x_1, x_2))) \tag{3.5.32}$$

elde ederiz. Lemma 2.2.43 den  $x_3 \in Tx_2$  dir. Öyle ki

$$0 < \xi(d(x_2, x_3)) < q_1 \xi(d(x_2, Tx_2)) \tag{3.5.33}$$

(3.5.32) ve (3.5.33)'den

$$0 < \xi(d(x_2, x_3)) < q_1 \psi(\xi(d(x_1, x_2))) = \psi(q\psi(\xi(d(x_0, x_1)))) \tag{3.5.34}$$

elde ederiz.  $\psi$  nin kesin artan bir fonksiyon olmasından aşağıdaki çıkar

$$0 < \psi(\xi(d(x_2, x_3))) < \psi^2(q\psi(\xi(d(x_0, x_1)))) . \tag{3.5.35}$$

İşleme devam edersek  $X$ ' de bir  $\{x_n\}$  dizisi inşa edebiliriz öyle ki

$$x_n \neq x_{n+1} \in Tx_n, \alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1 \tag{3.5.36}$$

,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  için

$$0 < \xi(d(x_{n+1}, x_{n+2})) < \psi^n(q\psi(d(x_0, x_1))) \tag{3.5.37}$$

$m, n \in \mathbb{N}$  olsun öyle ki  $m > n$  dir. Üçgen eşitsizliğinden

$$\xi(d(x_m, x_n)) \leq \sum_{i=n}^{m-1} \xi(d(x_i, x_{i+1})) < \sum_{i=n}^{m-1} \psi^{i-1}(q\psi(\xi(d(x_0, x_1))))$$

dir.  $\psi \in \Psi$  den  $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \xi(d(x_m, x_n)) = 0$ .  $(\xi_1)$ 'i kullanarak  $\lim_{n,m \rightarrow \infty} d(x_m, x_n) = 0$  elde ederiz. Bu gösteriyor ki  $\{x_n\}$ ,  $(X, d)$  de bir Cauchy dizisidir. (3.6.36) ve  $(X, d)$ ' in  $\alpha$ -tamlığından  $x^* \in X$  dir öyle ki  $n \rightarrow \infty$  iken  $x_n \xrightarrow{d} x^*$  dir.  $T$  çok değerli dönüşümünün  $\alpha$ -sürekliliğinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H(Tx_n, Tx) = 0 \quad (3.5.38)$$

dir. Şimdi

$$d(x^*, Tx^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, Tx) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} H(Tx_n, Tx) = 0$$

elde ediyoruz. Öyleyse  $x^* \in Tx^*$  ve buradan  $T$  bir sabit noktaya sahiptir. Bu ispatı tamamlar.

**Sonuç 3.5.2.**  $(X, d)$  metrik uzay ve  $T : X \rightarrow CL(X)$   $(\alpha, \psi, \xi)$ -kesin büzülme dönüşümü olsun. Aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım.

**S<sub>1</sub>**  $(X, d)$  tam metrik uzay

**S<sub>2</sub>**  $T$ ,  $\alpha$ -admissible çok değerli dönüşüm

**S<sub>3</sub>**  $x_0$  ve  $x_1 \in Tx_0$  olsun öyle ki  $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$

**S<sub>4</sub>**  $T$  bir  $\alpha$ -sürekli çok değerli dönüşüm.

O halde  $T$ ' nin bir sabit noktaya sahiptir. (Kutbi ve ark., 2015)

**Sonuç 3.5.3.**  $(X, d)$  bir metrik uzay ve  $T : X \rightarrow CL(X)$  bir  $(\alpha, \psi, \xi)$ -kesin büzülme dönüşümü olsun. Aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım

**A<sub>1</sub>**  $T$   $\alpha_*$ -admissible çok değerli dönüşüm

**A<sub>2</sub>**  $x_0$  ve  $x_1 \in Tx_0$  olsun öyle ki  $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$

**A<sub>3</sub>**  $T$  bir sürekli çok değerli dönüşüm.

Bu bağlamda  $T$ 'in tek bir sabit noktası mevcuttur. (Kutbi ve ark., 2015)

Şimdi de bu çalışmanın ana sonucunu verelim.

**Teorem 3.5.4.**  $(X, d)$  metrik uzayı ve  $T : X \rightarrow CL(X)$   $(\alpha, \psi, \xi)$ -kesin büzülme olsun. Aşağıdaki koşulların sağlandığını varsayalım.

**S<sub>1</sub>**  $(X, d)$ ,  $\alpha$ - tam uzay

**S<sub>2</sub>**  $T$   $\alpha$ -admissible çok değerli dönüşüm

**S<sub>3</sub>**  $x_0$  ve  $x_1 \in Tx_0$  olsun öyle ki  $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$

**S<sub>4</sub>** Eğer  $\{x_n\}$   $X$ 'de  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n \rightarrow \infty$  ve  $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$  iken  $x_n \xrightarrow{d} x \in X$  şeklinde dizi ise,  $\alpha(x_n, x) \geq 1$  dir.

Bu bağlamda  $T$ 'nin sadece tek sabit noktası mevcuttur. (Kutbi ve ark., 2015)

**İspat.** Teoremin ispatı aşağıdadır.  $\{x_n\}$ ' in bir Cauchy dizisi olduğunu biliyoruz öyle ki  $n \rightarrow \infty$  iken  $x_n \xrightarrow{d} x^*$  ve  $\forall n \in \mathbb{N}$  için

$$\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1 \quad (3.5.39)$$

$(S'_4)$  koşulundan elde ederiz ki  $\forall$   
 $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\alpha(x_n, x^*) \geq 1. \quad (3.5.40)$$

$T$ 'nin  $(\alpha, \beta, \xi)$ -büzülme koşulunu kullanarak her bir  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\xi(H(Tx_n, Tx^*)) \leq \psi(\xi(\max\{d(x_n, x^*), d(x_n, Tx_n), d(x^*, Tx^*), \frac{d(x_n, Tx^*) + d(x^*, Tx_n)}{2}\})) \quad (3.5.41)$$

elde ederiz. Varsayalım ki  $d(x^*, Tx^*) > 0$ .  $\epsilon := \frac{d(x^*, Tx^*)}{2}$ ,  $n \rightarrow \infty$  iken  $x_n \xrightarrow{d} x^*$  olduğundan  $N_1 \in \mathbb{N}$  buluruz, her  $n \geq N_1$ ,

$$d(x^*, x_n) < \frac{d(x^*, Tx^*)}{2} \quad (3.5.42)$$

dir. Dahası her  $n \geq N_1$  iken

$$d(x^*, Tx_n) \leq d(x^*, x_{n+1}) \leq \frac{d(x^*, Tx^*)}{2} \quad (3.5.43)$$

elde ederiz. Ayrıca  $\{x_n\}$  bir Cauchy dizisi olduğundan  $N_2 \in \mathbb{N}$  vardır öyle ki her  $n \geq N_2$  için

$$d(x, Tx) \leq d(x^*, x_{n+1}) < \frac{d(x^*, Tx^*)}{2} \quad (3.5.44)$$

$n \rightarrow \infty$  iken  $d(x_n, Tx^*) \rightarrow d(x^*, Tx^*)$  olmasından  $N_3 \in \mathbb{N}$  bulabiliriz öyle ki her  $n \geq N_3$  için

$$d(x_n, Tx^*) < \frac{3d(x^*, Tx^*)}{2}. \quad (3.5.45)$$

(3.5.42)-(3.5.45) i kullanarak bütün  $n \geq N := \max\{N_1, N_2, N_3\}$  için

$$\max\{d(x^n, Tx_n), d(x_n, Tx_n), d(x^*, Tx^*), \frac{d(x_n, Tx_n^*) + d(x^*, Tx_n)}{2}\} = d(x^*, Tx^*) \quad (3.5.46)$$

buluruz.  $n \geq N$  için (3.5.41) ve üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \xi(d(x^*, Tx^*)) &\leq \xi(d(x^*, x_{n+1})) + \xi(H(Tx_n, Tx^*)) \\ &\leq \xi(d(x^*, x_{n+1})) + \psi(\xi(\max\{d(x_n, x^*), d(x_n, Tx_n), d(x^*, Tx^*) \\ &\quad + \frac{d(x_n + Tx^*) + (x^* + Tx_n)}{2}\})) \\ &= \xi(d(x^*, x_{n+1})) + \psi(\xi(d(x^*, Tx^*))) \end{aligned}$$

buluruz. Yukarıdaki eşitsizlikte  $n \rightarrow \infty$  alırsak şunu elde ederiz:

$$\xi(d(x^*, Tx^*)) \leq \psi(\xi(d(x))).$$

Bu da

$$\xi(d(x^*, Tx^*)) \leq \psi(d(x^*, Tx^*))$$

olmasını gerektirir ve bu bir çelişkidir. Öyleyse  $d(x^*, Tx^*) = 0$ ,  $x^* = Tx^*$ . Bu da ispatı tamamlar.

**Sonuç 3.5.5.**  $(X, d)$  metrik uzayı ve  $T : X \rightarrow CL(X)$  kesin  $(\alpha, \psi, \xi)$  büzülme olduğunda aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim:

**S<sub>1</sub>**  $(X, d)$   $\alpha$ -tam uzay

**S<sub>2</sub>**  $T$ ,  $\alpha$ -admissible çok değerli dönüşüm

**S<sub>3</sub>**  $x_0$  ve  $x_1 \in Tx_0$  var öyle ki  $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$

**S<sub>4</sub>** Eğer  $\{x_n\}$ ,  $X$ 'de tüm  $n \in \mathbb{N}$  iken  $n \rightarrow \infty$  ve  $\alpha(x_n, x) \geq 1$  iken  $x_n \xrightarrow{d} x \in X$  olacak biçimde dizi ise,  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $\alpha(x_n, x) \geq 1$  dir.

Bu bağlamda  $T$ 'in sabit noktası vardır. (Kutbi ve ark., 2015)

**Sonuç 3.5.6.**  $(X, d)$  tam metrik uzayı ile  $T : X \rightarrow CL(X)$  kesin  $(\alpha, \psi, \xi)$ -büzülme dönüşümü verilsin. Aşağıdaki şartların geçerli olduğunu kabul edelim:

**A<sub>1</sub>**  $T$   $\alpha_*$ -admissible çok değerli dönüşüm,

**A<sub>2</sub>**  $x_0$  ve  $x_1 \in Tx_0$  vardır öyle ki  $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$ ,

**A<sub>3</sub>** Eğer  $\{x_n\}$   $X$ ' de  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n \rightarrow \infty$  ve  $\alpha(x_n, x) \geq 1$  iken  $x_n \xrightarrow{d} x \in X$  biçiminde bir dizi ise,  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $\alpha(x_n, x) \geq 1$ .

Bu bağlamda  $T$  in bir sabit noktası vardır.(Ali ve ark., 2014)

**Örnek 3.5.7.**  $X = (-10, 10)$  ve  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  metriği bütün  $x, y \in X$  ler iken  $d(x, y) = |x - y|$  şeklinde tanımlansın.  $T : X \rightarrow CL(X)$  ve  $\alpha : X \times X \rightarrow [0, \infty)$

$$Tx = \begin{cases} [-9, |x|] & x \in (-10, 0) \\ [0, \frac{x}{4}] & x \in [0, 2] \\ [\frac{x+10}{4}, 9] & x \in (2, 10) \end{cases}$$

ve

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} e^{xy} \cosh(x + y) & x, y \in [0, 2] \\ \tanh(e^x - e^y) & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlansın.  $(X, d)$  nin bir tam metrik uzay olmadığı açıktır. Bundan dolayı (Ali ve ark., 2014) sonuçları burada uygulanabilir değildir.

Ardından Teorem 3.6.4 ün  $T'$  deki sabit noktanın varlığını garanti edebileceğini gösterelim.  $\psi, \xi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonları bütün  $t \in [0, \infty)$ ,  $\psi(t) = \frac{t}{2}$  ve  $\xi(t) = \sqrt{t}$  olarak tanımlansın.  $\psi \in \Psi$  ve  $\xi \in \Xi$  olduğunu görmek kolaydır.

Öncelikle  $T'$  nin bir kesin  $(\alpha, \psi, \xi)$ -büzlme dönüşümü olduğunu göstereceğiz.  $x, y \in X$  ve  $\alpha(x, y) \geq 1$  için,  $x, y \in [0, 2]$  ye sahibiz ve buradan

$$\begin{aligned} \xi(H(T_x, T_y)) &= \sqrt{\frac{|x - y|}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{|x - y|} \\ &\leq \frac{1}{2} \sqrt{M(x, y)} \\ &= \psi(\xi(M(x, y))). \end{aligned}$$

Bu  $\psi$  kesin artan fonksiyon olduğunu gösterir. Bundan dolayı  $T$  bir kesin  $(\alpha, \psi, \xi)$  büzlme dönüşümüdür. Dahası  $T$  bir  $\alpha$ -admissible çok değerli dönüşüm olduğunu,  $x_0 = 1 \in X$  ve  $x_1 = \frac{1}{4} = Tx_0$  olduğunu görmek kolaydır öyle ki

$$\alpha(x_0, x_1) = \alpha\left(1, \frac{1}{4}\right) \geq 1.$$

Ayrıca  $T$  bir  $\alpha$ -admissible çok değerli dönüşümdür. Sonuç olarak  $\forall n \in \mathbb{N}$  iken  $n \rightarrow \infty$  ve  $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$  iken  $x_n \xrightarrow{d} x \in X$  olan  $X'$  deki her  $\{x_n\}$  için  $\alpha(x_n, x) \geq 1$  sahibiz. Böylece Teorem 3.5.4 ün  $(S_4)$  şartı sağlanır.

Sonuçta Teorem 3.5.1 ve 3.5.4'ü kullanarak  $T$  dönüşümünün  $X'$  de bir sabit noktası olduğunu elde ederiz. Bu durumda  $T'$  nin  $-2, -1$  ve  $0$  gibi sonsuz sabit noktası vardır. (Kutbi ve ark., 2015)

### 3.6. Keyfi İkili İlişki İle Donatılmış Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Sonuçları

**Teorem 3.6.1.**  $(X, d)$  metrik uzay üzerinde  $\check{R}$  ikili ilişkisi ile

$T : X \rightarrow CL(X)$  kesin  $(\alpha, \psi, \xi)$ -büzülme dönüşümü verilsin. Aşağıdaki koşulların sağlandığını varsayalım:

**S<sub>1</sub>**  $(X, d)$   $\check{S}$  tam metrik uzaydır

**S<sub>2</sub>**  $T$  zayıf büzülme dönüşümüdür

**S<sub>3</sub>**  $x_0$  ve  $x_1 \in Tx_0$  vardır öyle ki  $x_0 \check{S} x_1$

**S<sub>4</sub>**  $T$  bir  $\check{S}$  çok değerli dönüşümüdür.

O halde  $T'$  in sabit noktası vardır. (Kutbi ve ark., 2015)

**İspat.** Teorem 3.6.1'den  $\alpha : X \times X \rightarrow [0, \infty)$

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1 & x, y \in x \check{S} y \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dönüşüm tanımından elde ederiz. Bu ispatı tamamlar. Teorem 3.6.4 ü kullanarak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

**Teorem 3.6.2.**  $(X, d)$  metrik uzay,  $\check{R}$ ,  $X$  üzerinde ikili ilişkisi ve  $T : X \rightarrow CL(X)$  bir kesin  $(\alpha, \psi, \xi)$ -büzülme dönüşümü verisin. Aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim:

**S<sub>1</sub>**  $(X, d)$   $\check{S}$  tam uzaydır

**S<sub>2</sub>**  $T$  zayıf büzülme

**S<sub>3</sub>**  $x_0$  ve  $x_1 \in Tx_0$  vardır öyle ki  $x_0 \check{S} x_1$

**S<sub>4</sub>** Eğer  $\{x_n\}$ ,  $X$  de  $\forall n \in \mathbb{N}, n \rightarrow \infty$  ve  $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$  iken  $x_n \xrightarrow{d} x \in X$  şeklinde dizi ise o zaman  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $x_n \check{S} x$  e sahibiz.

Bu durumda  $T$  sabit bir noktaya sahiptir. (Kutbi ve ark., 2015)

### 3.7. Bir Grafik İle Donatılmış Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Sonuçları

**Teorem 3.7.1.** Üzerinde  $G$  grafiği olan  $(X, d)$  metrik uzayı verilsin.

$T : X \rightarrow CL(X)$  kesin  $(E(G), \psi, \xi)$ -büzülme dönüşümü olmak koşuluyla aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim.

**S<sub>1</sub>**  $(X, d), E(G)$  tam metrik uzayı

**S<sub>2</sub>**  $T$  kenarları zayıf şekilde korur

**S<sub>3</sub>**  $x_0$  ve  $x_1$  kenarları zayıf şekilde korur

**S<sub>4</sub>**  $T$  bir  $E(G)$  çok değerli dönüşüm.

O halde  $T$  in sabit noktası vardır. (Kutbi ve ark., 2015)

**İspat.** Bu sonucu  $\alpha : X \times X \rightarrow [0, \infty)$

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in E(G) \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

tanımından elde edilir.

**Teorem 3.7.2.** Üzerinde bir  $G$  grafiği olan  $(X, d)$  metrik uzayı ve  $T : X \rightarrow CL(X)$  bir kesin  $(\check{S}, \psi, \xi)$ -büzülme dönüşümü verilsin. Aşağıdaki şartların geçerli olduğunu kabul edelim.

**S<sub>1</sub>**  $(X, d), E(G)$ - tam metrik uzay

**S<sub>2</sub>**  $T$  kenarları zayıf şekilde korur

**S<sub>3</sub>**  $x_0$  ve  $x_1 \in Tx_0$  vardır öyle ki  $(x_0, x_1) \in E(G)$

**S<sub>4</sub>** Eğer  $\{x_n\}$   $X'$  de  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $n \rightarrow \infty, (x_n, x_{n+1}) \in E(G)$  iken  $x_n \rightarrow x$  olacak biçimde bir dizi oluyorsa  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$  vardır. (Kutbi ve ark., 2015)

O halde  $T$ 'nin bir sabit noktası vardır.

**Uyarı 3.7.3. 1)**  $G'$  yi  $E(G) = XxX$  olarak kabul edelim, açıkcası  $G$  bağlantılıdır ve bizim Teorem 3.8.1 ve 3.8.2" imiz Nadler" in büzülme prensibini geliştirir (Nadler, 1969) ve tek değerli dönüşüm durumunda Banach büzülme prensibini (Banach, 1922) Kannan büzülme teoremini (Kannan, 1969) Chatterjea'nın büzülme teoremini (Chatterjea, 1972) ve Bianchini ve Grandolfi'nin sabit nokta teoremini geliştirir.

**2)** Teorem 3.8.1 ve 3.8.2 Jachymski (Jachymski, 2008) ve Dinevari ve Frigon 'nun bir grafikte donatılmış kimi bazı genelleştirilmiş sabit nokta sonuçlarıdır.

**3)** Teorem 3.8.1 ve 3.8.2 bir grafik versiyonunda Ali ve arkadaşlarının Teorem 2.6.4'ün sabit nokta sonuçlarının genelleştirilmiş halidir. (Ali ve ark., 2014)

### 3.8. $\alpha-\eta-\psi$ Rasyonel Büzülme Dönüşümleri İçin Sabit Nokta Teoremleri

Bu bölümün amacı  $\alpha - \eta$  tam metrik uzaylarında düzenlenmiş  $\alpha - \eta - \psi$  rasyonel büzülme dönüşümleri için sabit nokta sonuçlarını oluşturmak ve  $\alpha - \eta$  sürekli fonksiyonları ile  $\alpha - \eta$  metrik uzay kavramlarını başlatmaktadır. Uygulama olarak  $\psi$  grafik rasyonel büzülmeleri için bazı Suzuki tipi sabit nokta teoremleri ile yeni sabit nokta teoremleri oluşturulacaktır.

Lineer olmayan analizin güçlü ve klasik bir aracı olan Banach Büzülme Prensibi nden biliyoruz ki,  $\forall x, y \in X$  için  $d(fx, fy) \leq cd(x, y)$  olmak üzere bir  $(X, d)$  tam metrik uzayında  $f$  kendi içine dönüşümü tek bir  $c \in [0, 1)$  sabit noktasına sahiptir. O zamandan beri Banach Büzülme Prensibi çeşitli yönlerden genelleştirilmiştir. 2008'de Suzuki, Banach Büzülme Prensibi'nin ilgi çekici bir genellemesi olan ve ayrıca metrik tamlığını karakterize eden aşağıdaki sonucu kanıtlamıştır.

**Teorem 3.8.1.**  $(X, d)$  tam uzayı ile  $T, X'$  de kendi içine dönüşümü verilsin.  $\theta : [0, 1) \rightarrow (\frac{1}{2}, 1]$  artmayan fonksiyonunu aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$\theta(r) = \begin{cases} 1 & 0 \leq r \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ ise} \\ (1-r)r^{-2} & \frac{\sqrt{5}-1}{2} < r < 2^{-\frac{1}{2}} \text{ ise} \\ (1+r)^{-1} & 2^{-\frac{1}{2}} \leq r < 1 \text{ ise.} \end{cases}$$

Varsayalım ki  $r \in [0, 1)$  olsun, öyle ki  $\forall x, y \in X$  iken

$$\theta(r) d(x, Tx) \leq d(x, y) \text{ iken } d(Tx, Ty) \leq rd(x, y)$$

olur. Bu bağlamda  $T$ ' in bir sabit noktası mevcuttur Dahası  $\forall x \in X$  için  $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x = z$  dir. (Hussain ve ark., 2014)

**Teorem 3.8.2.**  $(X, d)$  uzayı ile  $T$  kendi içine dönüşümü verilsin. Ayrıca kabul edelim ki  $\alpha, \eta : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  iki fonksiyon ve  $\psi \in \Psi$  olsun. Aşağıdaki iddiaların doğru olduğunu kabul edelim:

- i  $(X, d)$   $\alpha - \eta$ - tam metrik uzay
- ii  $T, \eta'$  ye göre  $\alpha$ -admissible dönüşüm
- iii  $T, X$  üzerinde  $\alpha - \eta$ -sürekli dönüşüm
- iv  $\alpha(x_0, Tx_0) \geq \eta(x_0, Tx_0)$  olacak şekilde  $x_0 \in X$  vardır.

O halde  $T$  bir sabit noktaya sahiptir. (Hussain ve ark., 2014)

**İspat.** Öyle bir  $x_0 \in X$  alalım ki  $\alpha(x_0, Tx_0) \geq \eta(x_0, Tx_0)$  olsun.  $\{x_n\}$  dizisi keyfi  $n \in \mathbb{N}$  için  $x_n = T^n x_0 = T x_{n-1}$  ile tanımlanır. En az bir tane  $n \in \mathbb{N}$  için  $x_{n+1} = x_n$  ise,  $x = x_n$   $T$ ' nin sabit noktasıdır ve böylece kanıt tamamlanmış olur. Buradan  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $x_{n+1} \neq x_n$  olduğunu kabul edelim.  $T$ ' in  $\eta'$  ya göre  $\alpha$ -admissible dönüşüm ve  $\alpha(x_0, Tx_0) \geq \eta(x_0, Tx_0)$  olmasından

$$\alpha(x_n, x_{n+1}) = \alpha(Tx_0, T^2x_0) \geq \eta(Tx_0, T^2x_0) = \eta(x_1, x_2)$$

sonucuna varırız. Bu işlemin devamından tüm  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  ler için

$$\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq \eta(x_n, x_{n+1}) = \eta(x_n, Tx_n) \quad (3.8.47)$$

elde ederiz. Şimdi (a)' dan

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq \psi(M(x_{n-1}, x_n)) \quad (3.8.48)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
M(x_{n-1}, x_n) &= \max \left\{ d(x_{n-1}, x_n), \frac{d(x_{n-1}, Tx_{n-1})}{1 + d(x_{n-1}, Tx_{n-1})}, \right. \\
&\quad \left. \frac{d(x_n, Tx_n)}{1 + d(x_n, Tx_n)}, \frac{d(x_{n-1}, Tx_n) + d(x_n, Tx_{n-1})}{2} \right\} \\
&\leq \max \left\{ d(x_{n-1}, x_n), \frac{d(x_{n-1}, x_n)}{1 + d(x_{n-1}, x_n)}, \frac{d(x_n, x_{n+1})}{1 + d(x_n, x_{n+1})}, \frac{d(x_{n-1}, x_{n+1})}{2} \right\} \\
&\leq \max \left\{ d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})}{2} \right\} \\
&= \max \{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\}
\end{aligned} \tag{3.8.49}$$

bu yüzden

$$M(x_{n-1}, x_n) \leq \max \{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\}$$

dir. Şimdi  $\psi'$  nin azalmayan oluşundan

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi \{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\} \tag{3.8.50}$$

sonucunu buluruz. Şimdi en az bir  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\max \{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\} = d(x_n, x_{n+1})$$

ise o zaman

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+1}) &\leq \psi(\max \{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\}) \\
&= \psi(d(x_n, x_{n+1})) \leq d(x_n, x_{n+1})
\end{aligned} \tag{3.8.51}$$

dir. Bu çelişkidir. Bundan dolayı her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi(d(x_{n-1}, x_n)) \tag{3.8.52}$$

elde ederiz. Tümevarımdan

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi^n(d(x_0, x_1)) \tag{3.8.53}$$

elde ederiz.  $N \in \mathbb{N}$  için  $\varepsilon > 0$  sabiti vardır öyle ki

$$\sum_{n \geq N} \psi^n(d(x_0, x_1)) < \epsilon \quad (3.8.54)$$

dir.  $m, n \geq N$  ile  $m, n \in \mathbb{N}$  olsun. Üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}) \leq \sum_{n \geq N} \psi^n(d(x_0, x_1)) < \epsilon \quad (3.8.55)$$

elde edilir. Sonuç olarak  $\lim_{m, n \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0$  dir. Bundan dolayı  $\{x_n\}$  Cauchy olur. Diğer taraftan (3.8.47)' den tüm  $n \in \mathbb{N}$  iken  $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq \eta(x_n, x_{n+1})$  olduğunu biliyoruz. Şimdi  $X$  metrik uzayının  $\alpha$ - $\eta$ -tam oluşundan  $n \rightarrow \infty$  iken  $x_n \rightarrow z$  olmak üzere  $z \in X$  vardır. İlavaten  $T$  bir  $\alpha - \eta$  sürekli dönüşüm olduğundan  $n \rightarrow \infty$  iken  $x_{n+1} = Tx_n \rightarrow Tz$  dir.  $z = Tz$  sağlanmış oldu.

**Örnek 3.8.3.**  $X = (-\infty, -2) \cup [-1, 1] \cup (2, +\infty)$  olsun.

$$d(x, y) = \begin{cases} \max\{|x|, |y|\} & x \neq y \text{ ise} \\ 0 & x = y \text{ ise} \end{cases} \quad (3.8.56)$$

metriği ile donatılmıştır.  $T : X \rightarrow X$ ,  $\alpha, \eta : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  ve  $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  dönüşümleri

$$Tx = \begin{cases} \sqrt{2x^2 - 1} & x \in (-\infty, -3] \text{ ise} \\ x^3 - 1 & x \in (-3, -2) \text{ ise} \\ \frac{1}{4}x^2 & x \in [-1, 0) \text{ ise} \\ \frac{1}{4}x & x \in (0, 1] \text{ ise} \\ 5 + \sin \pi x & x \in (2, 4) \text{ ise} \\ 3x^3 + \ln x + 1 & x \in [4, \infty) \text{ ise} \end{cases} \quad (3.8.57)$$

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 + 1 & x, y \in [-1, 1] \text{ ise} \\ x^2 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

$$\eta(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\psi(t) = \frac{1}{2}t$$

olarak tanımlansın. Açıkcası  $(X, d)$  tam uzay değil fakat  $\alpha - \eta$  tam metrik uzaydır. Aslında  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq \eta(x_n, x_{n+1})$  olacak biçimde  $\{x_n\}$  Cauchy dizisi ise  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $\{x_n\} \subseteq [-1, 1]$  dir.  $([-1, 1], d)$  bir tam uzay olduğundan  $\{x_n\}$  dizisi  $[-1, 1]$  de yakınsaktır.  $\alpha(x, y) \geq \eta(x, y)$  olsun, bu durumda  $x, y \in [-1, 1]$  dir. Diğer taraftan her  $\omega \in [-1, 1]$  için  $T\omega \in [-1, 1]$  dir. Bu durumda  $\alpha(Tx, Ty) \geq \eta(Tx, Ty)$  dir.  $T$   $\eta'$  ye göre  $\alpha$ -admissible dönüşümdür.  $n \rightarrow \infty$  iken  $x_n \rightarrow x$  ve  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $\alpha(x_{n+1}, x_n) \geq \eta(x_n, x_{n+1})$  olacak şekilde  $\{x_n\}$  dizisi alınırsa bu durumda  $\forall n \in \mathbb{N}$  iken  $\{x_n\} \subseteq [-1, 1]$  dir. Bundan dolayı  $\{Tx_n\} \subseteq [-1, 1]$  (Her  $\omega \in [-1, 1]$  için  $T\omega \in [-1, 1]$  olduğundan)  $T[-1, 1]$  de süreklidir.  $n \rightarrow \infty$  iken  $Tx_n \rightarrow T_x$  dir. Yani  $T$  bir  $\alpha - \eta$ -süreklî dönüşümdür. Açıkcası  $\alpha(0, T0) \geq \eta(0, T0)$  dir.  $\alpha(x, y) \geq \eta(x, Tx)$  olsun. Şimdi eğer  $x \notin [-1, 1]$  ya da  $y \notin [-1, 1]$  ise o zaman  $x^2 \geq x^2 + y^2 + 1$  olması  $y^2 + 1 \leq 0$  olmasını gerektiriyorsa bu çelişkidir. O zaman  $x, y \in [-1, 1]$  dir. Şimdi aşağıdaki durumları dikkate alalım:

**i**  $x \neq y$  ile  $x, y \in [-1, 0]$  olsun. O halde

$$d(Tx, Ty) = \frac{1}{4} \max\{x^2, y^2\} \leq \frac{1}{2} \max\{|x|, |y|\} = \psi(d(x, y)) \leq \psi(M(x, y)) \quad (3.8.58)$$

dir.

**ii**  $x, y \in (0, 1]$  ile  $x \neq y$  olsun, bu durumda

$$d(Tx, Ty) = \frac{1}{4} \max\{|x|, |y|\} \leq \frac{1}{2} \max\{|x|, |y|\} = \psi(d(x, y)) \leq \psi(M(x, y)) \quad (3.8.59)$$

**iii**  $x \in (-1, 0)$  ve  $y \in (0, 1)$  olsun, o halde

$$d(Tx, Ty) = \frac{1}{4} \max\{x^2, y^2\} \leq \frac{1}{2} \max\{|x|, |y|\} = \psi(d(x, y)) \leq \psi(M(x, y)) \quad (3.8.60)$$

dir.

**iv**  $x = y \in (0, 1]$ ,  $x = y \in (0, 1]$  ya da  $x = -1, y = 1$  olsun. Bu durumda  $Tx = Ty$  dir. Yani

$$d(Tx, Ty) = 0 \leq \psi(M(x, y)) \quad (3.8.61)$$

dir. Böylece  $T$  bir yeniden  $\alpha-\eta-\psi$ -rasyonel büzülme dönüşümüdür. Buradan Teorem 3.8.2' nin tüm koşulları sağlandı ve  $T$  bir sabit noktaya sahiptir. Burada  $x = 0$ ,  $T$  dönüşümünün bir sabit noktasıdır. Teorem 3.8.2' de her  $x, y \in X$  için  $\eta(x, y) = 1$  seçersek aşağıdaki sonucu elde ederiz. (Hussain ve ark., 2014)

**Sonuç 3.8.4.**  $(X, d)$  uzayı ile  $T \rightarrow X \times X$  dönüşümünü alalım. Ayrıca  $\alpha : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  bir fonksiyon ve  $\psi \in \Psi$  olsun. Kabul edelim ki aşağıdaki iddialar doğru olsun.

- i  $(X, d)$   $\alpha$ -tam uzay
- ii  $T$ ,  $\alpha$ -admissible dönüşüm
- iii  $T$ ,  $X$  üzerinde bir yeniden düzenlenmiş  $\alpha - \psi$ -rasyonel büzülme
- iv  $T$ ,  $X$  üzerinde bir  $\alpha$ -sürekli dönüşüm
- v  $x_0 \in X$  vardır öyle ki  $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ .

Bu bağlamda  $T$ 'nin bir sabit noktası mevcuttur. (Hussain ve ark., 2014)

**Teorem 3.8.5.**  $(X, d)$  metrik uzayı ve  $T$ ,  $X$  üzerinde kendi içine dönüşümünü alalım. Ayrıca  $\alpha, \eta : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  iki fonksiyon ve  $\psi \in \Psi$  olduğunu kabul edelim. Aşağıdaki iddiaların doğru olduğunu kabul edelim.

- i  $(X, d)$ ,  $\alpha - \eta$ - tam metrik uzayı
- ii  $T$ ,  $\eta'$  ye göre  $\alpha$ -admissible dönüşüm
- iii  $T$ ,  $X$  de bir yeniden düzenlenmiş  $\alpha - \eta - \psi$ -rasyonel büzülme
- iv  $\alpha(x_0, Tx_0) \geq \eta(x_0, Tx_0)$  olacak şekilde  $x_0 \in X$  vardır
- v Eğer  $n \rightarrow \infty$  iken  $x_n \rightarrow x$  ile  $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq \eta(x_n, x_{n+1})$  olacak şekilde  $\{x_n\}$ ,  $X$ 'in bir dizisi ise her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\eta(Tx, T^2x_n) \leq \alpha(Tx_n, x) \text{ ya da } \eta(T^2x_n, T^3x_n) \leq \alpha(T^2x_n, x) \quad (3.8.62)$$

eşitsizliklerinden biri sağlanır. Bu bağlamda  $T$ 'nin bir tek sabit noktası mevcuttur.  
(Hussain ve ark., 2014)

**İspat.**  $\alpha(x_0, Tx_0) \geq \eta(x_0, Tx_0)$  olacak biçimde  $x_0 \in X$  vardır.  $n \in \mathbb{N}$  alındığında  $x_n = T^n x_0 = Tx_{n-1}$ ' den  $\{x_n\}$ ,  $X$  de bir dizi olsun. Şimdi Teorem 3.9.2' nin ispatında olduğu gibi  $\forall n \in \mathbb{N}$  iken  $\alpha(x_{n+1}, x_n) \geq \eta(x_{n+1}, x_n)$ ' e sahibiz. Ek olarak  $n \rightarrow \infty$  iken  $x_n \rightarrow z$  biçiminde  $z \in X$  var olup  $d(z, Tz) \neq 0$  dır. (v)' den  $\forall n \in \mathbb{N}$  iken

$$\eta(Tx_{n-1}, T^2x_{n-1}) \leq \alpha(Tx_{n-1}, z) \text{ ya da } \eta(T^2x_{n-1}, T^3x_{n-1}) \leq \alpha(T^2x_{n-1}, z) \quad (3.8.63)$$

eşitsizliklerinden biri sağlanır. Bu taktirde tüm  $n \in \mathbb{N}$  iken

$$\eta(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha(x_n, z) \text{ ya da } \eta(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \alpha(x_{n+1}, z)$$

eşitsizliklerinden biri sağlanır. Bütün  $n \in \mathbb{N}$  için  $\eta(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha(x_n, z)$  eşitsizliği sağlansın. Şimdi (a)'dan

$$\begin{aligned} d(x_{n_k+1}, Tz) &= d(Tx_{n_k}, Tz) \leq \psi(\max\{d(x_{n_k}, z), \\ &\quad \frac{d(x_{n_k}, Tx_{n_k})}{1+d(x_{n_k}, Tx_{n_k})}, \frac{d(z, Tz)}{1+d(z, Tz)}, \frac{d(x_{n_k}, Tz) + d(z, Tx_{n_k})}{2}\}) \\ &= \psi\left(\max\left\{d(x_{n_k}, z), \frac{d(x_{n_k}, x_{n_k+1})}{1+d(x_{n_k}, x_{n_k+1})}, \frac{d(z, Tz)}{1+d(z, Tz)}, \frac{d(x_{n_k}, Tz) + d(z, x_{n_k+1})}{2}\right\}\right) \\ &< \max\left\{d(x_{n_k}, z), \frac{d(x_{n_k}, x_{n_k+1})}{1+d(x_{n_k}, x_{n_k+1})}, \frac{d(z, Tz)}{1+d(z, Tz)}, \frac{d(x_{n_k}, Tz) + d(z, x_{n_k+1})}{2}\right\} \end{aligned} \quad (3.8.64)$$

dir. Bu eşitsizlikte  $k \rightarrow \infty$  iken limit alırsak

$$d(z, Tz) \leq \max\left\{\frac{d(z, Tz)}{1+d(z, Tz)}, \frac{d(z, Tz)}{2}\right\} < d(z, Tz) \quad (3.8.65)$$

dir. Bu çelişkidir. Buradan  $d(z, Tz) = 0$  olması  $z = Tz$  olmasını gerektirir. Benzer bir yöntemle  $\forall n \in \mathbb{N}$  için

$N$  için  $\eta(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \alpha(x_{n+1}, z)$  ise  $z = Tz$  olduğunu elde ederiz.

**Örnek 3.8.6.**  $X = (0, \infty)$  olsun.  $X'$  i genel metrik ile donatalım.  $T : X \rightarrow X$ ,  $\alpha, \eta : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  ve  $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  dönüşümleri

$$Tx = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sin x + \cos x + 3} & x \in (0, 1) \text{ ise} \\ \frac{1}{16}x^2 + 1 & x \in [1, 2] \text{ ise} \\ \frac{x^3+1}{\sqrt{x^2+1}} & x \in (2, \infty) \text{ ise} \end{cases} \quad (3.8.66)$$

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x, y \in [1, 2] \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

$$\eta(x, y) = \frac{1}{4}$$

$$\psi(t) = \frac{1}{4}t$$

olarak tanımlansın.  $(X, d)$ ' nin tam metrik uzay olmadığına dikkat edelim. Fakat bir  $\alpha - \eta$  tam metrik uzaydır. Aslında bütün  $n \in \mathbb{N}$  iken  $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq \eta(x_n, x_{n+1})$  olacak biçimde  $\{x_n\}$  dizisi Cauchy oluyorsa, tüm  $n \in \mathbb{N}$ , alındığında  $\{x_n\} \subseteq [1, 2]$  dir.  $([1, 2], d)$  bir tam metrik uzay olduğundan  $\{x_n\}$  dizisi  $[1, 2] \subset X'$  de yakınsaktır.  $\alpha(x, y) \geq \eta(x, y)$  olsun. Bu durumda  $x, y \in [1, 2]$  dir. Diğer taraftan her  $\omega \in [1, 2]$  için  $T\omega \in [1, 2]$  dir. O zaman  $\alpha(Tx, Ty) \geq \eta(Tx, Ty)$  dir. Yani  $T$ ,  $\eta'$  ye göre  $\alpha$ -admissible dönüşümdür. Eğer  $n \rightarrow \infty$  iken  $x_n \rightarrow x$  ile  $\alpha(x_n, x_{n+1})$  olacak biçimde  $\{x_n\}$ ,  $X'$  de bir Cauchy dizisiyse  $\forall n \in \mathbb{N}$  alındığında  $Tx_n, T^2x_n, T^3x_n \in [1, 2]$  olur. Başka bir ifade ile tüm  $n \in \mathbb{N}$  için  $\psi$

$$\begin{aligned} \eta(Tx_n, T^2x_n) &\leq \alpha(Tx_n, x) \\ \eta(T^2x_n, T^3x_n) &\leq \alpha(T^2x_n, x) \end{aligned} \quad (3.8.67)$$

eşitsizliklerinden biri sağlanır. Açıkcası  $\alpha(0, T0) \geq \eta(0, T0)$  dir.  $\alpha(x, y) \geq \eta(x, Tx)$  olsun. Şimdi eğer  $x \notin [1, 2]$  ya da  $y \notin [1, 2]$  oluyorsa o zaman  $0 \geq \frac{1}{4}$  dür. Bu çelişkidir.

Bu yüzden  $x, y \in [1, 2]$  dir. Öyleyse

$$\begin{aligned}
d(Tx, Ty) &= \frac{1}{16} |x^2 - y^2| = \frac{1}{16} |x - y| |x + y| \\
&\leq \frac{1}{4} |x - y| \\
&= \frac{1}{4} d(x, y) \\
&\leq \frac{1}{4} M(x, y) \\
&= \psi(M(x, y))
\end{aligned} \tag{3.8.68}$$

dir. O halde  $T$  bir yeniden düzenlenmiş  $\alpha - \eta - \psi$  rasyonel büzülme dönüşümüdür. Buradan Teorem 3.9.5 in tüm koşulları sağlanır. Dolayısıyla  $T$  sabit noktaya sahiptir. Burada  $x = 8 - 2\sqrt{14}$ ,  $T$ ' in sabit noktasıdır. Teorem 3.8.5'de her  $x, y \in X$  alındığında  $\eta(x, y) = 1$  alırsak, aşağıda verilen sonucu elde ederiz. (Hussain ve ark., 2014)

**Sonuç 3.8.7.**  $(X, d)$  metrik uzayı ile  $X$  üzerinde  $X$  kendi içine dönüşümü verilsin. İlaveten  $\alpha : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  bir fonksiyon ve  $\psi \in \Psi$  olduğunu kabul edelim. Aşağıdaki önermelerin doğru olduğunu kabul edelim:

- i  $(X, d)$   $\alpha$ -tam uzay
- ii  $T$ ,  $\alpha$ -admissible dönüşüm
- iii  $T$ ,  $X$  üzerinde bir yeniden düzenlenmiş  $\alpha - \psi$ -rasyonel büzülme dönüşümüdür
- iv  $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$  olacak biçimde  $x_0 \in X$  vardır
- v Eğer  $n \rightarrow \infty$  iken  $x_n \rightarrow x$  ile  $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$  olacak şekilde  $\{x_n\}$ ,  $X$ ' in bir dizisi ise her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\alpha(Tx_n, x) \geq 1 \text{ ya da } \alpha(T^2x_n, x) \geq 1$$

sağlanır.

Bu durumda  $T$ 'nin sabit noktası vardır. (Hussain ve ark., 2014)

**Sonuç 3.8.8.**  $(X, d)$  metrik uzayı,  $T$ , dönüşümü sürekli olsun. Burada  $T'$  in yeniden düzenlenmiş rasyonel büzülme dönüşümü olduğunu kabul edelim. Yani  $\psi \in \Psi$  iken

$$\forall x, y \in X, d(Tx, Ty) \leq \psi(M(x, y))$$

dir. Bu zaman  $T$  sabit noktaya sahiptir. (Hussain ve ark., 2014)

**Sonuç 3.8.9.**  $(X, d)$  metrik uzayı ile  $X$  üzerinde  $T$  kendi içine dönüşümü verilsin.  $T'$  nin aşağıdaki rasyonel eşitsizlikleri sağladığını kabul edelim

$$\forall x, y \in X, d(Tx, Ty) \leq r(M(x, y))$$

dir.  $0 \leq r \leq 1$  ve

$$M(x, y) = \max \left\{ d(x, y), \frac{d(x, Tx)}{1 + d(x, Tx)}, \frac{d(y, Ty)}{1 + d(y, Ty)}, \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2} \right\}$$

dir. O halde  $T'$  in bir sabit noktası vardır. (Hussain ve ark., 2014)

### 3.9. Suzuki Tipi Sabit Nokta Sonuçları

**Teorem 3.9.1.**  $(X, d)$  metrik uzayı tam ve  $T \rightarrow X \times X$

bir sürekli dönüşüm olmak koşuluyla bütün  $x, y \in X$  alındığında

$$d(x, Tx) \leq d(x, y) \text{ için } d(Tx, Ty) \leq rM(x, y) \quad (3.9.69)$$

olacak biçimde  $r \in [0, 1)$  olduğunu kabul edelim. Burada

$$M(x, y) = \max \left\{ d(x, y), \frac{d(x, Tx)}{1 + d(x, Tx)}, \frac{d(y, Ty)}{1 + d(y, Ty)}, \frac{d(x, Tx) + d(y, Ty)}{2} \right\} \quad (3.9.70)$$

dir. Bu bağlamda  $T$ 'nin sabit noktası tektir. (Hussain ve ark., 2014)

**İspat.**  $\alpha, \eta : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  ve  $\psi : [0, \infty)$  fonksiyonları keyfi  $x, y \in X$  alındığında

$$\alpha(x, y) = d(x, y), \eta(x, y) = d(x, y) \quad (3.9.71)$$

şeklinde tanımlansın ve  $0 \leq r < 1$  için

$\psi(t) = r(t)$  olsun.  $\forall x, y \in X$  iken  $\eta(x, y) \leq \alpha(x, y)$  olduğu açıktır. Yani Teorem

3.9.2 nin (i) – (v) koşulları sağlanır.  $\eta(x, Tx) \leq \alpha(x, y)$  olsun. O zaman

$d(x, Tx) \leq d(x, y)$  dir. Şimdi 3.9.69'dan  $d(Tx, Ty) \leq rM(x, y) = \psi(M(x, y))$ .

Yani  $T, X$  kümesi üzerinde yeniden düzenlenmiş  $\alpha$ – $\eta$ – $\psi$ -rasyonel büzülme dönüşümüdür.

Teorem 3.8.2' nin tüm koşulları sağlanır ve  $T$  sabit noktaya sahiptir. Sabit noktanın tekliği (3.9.69)'dan rahatlıkla bulunur

.

**Sonuç 3.9.2.**  $(X, d)$  uzayı ile  $X$  üzerindeki bir  $T$  sürekli kendi içine dönüşümü verilsin. Bütün  $x, y \in X$  alındığında

$$d(x, Tx) \leq d(x, y) \text{ iken } d(Tx, Ty) \leq rd(x, y)$$

biçiminde  $r \in [0, 1)$  vardır. Dolayısıyla  $T$  tek sabit nokta içerir. (Hussain ve ark., 2014)

Şimdi  $T'$  nin sürekliliğini kullanmadan aşağıdaki Suzuki tipi sabit nokta teoremini ispatlayalım.

**Teorem 3.9.3.**  $(X, d)$  tam metrik uzay ve  $T, T \rightarrow X \times X$  dönüşümü verilsin  $p : [0, 1) \rightarrow (\frac{1}{2}, 1)$  artmayan dönüşümü

$$p(r) = \frac{1}{1+r} \tag{3.9.72}$$

olarak tanımlansın.  $\forall x, y \in X$  alındığında

$$\begin{aligned} p(r)d(x, Tx) &\leq d(x, y) \text{ iken} \\ d(Tx, Ty) &\leq rd(x, y) \end{aligned} \tag{3.9.73}$$

koşulunu sağlayan  $r \in [0, 1)$  vardır. O halde  $T$  tek bir sabit nokta içerir. (Hussain ve ark., 2014)

**İspat.**  $\forall x, y \in X$  ile  $0 \leq r < 1$  alındığında  $\alpha, \eta : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  ve  $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonları

$$\begin{aligned}\alpha(x, y) &= d(x, y) \\ \eta(x, y) &= p(r) d(x, y) \\ \psi(t) &= rt\end{aligned}\tag{3.9.74}$$

olarak tanımlansın.  $\forall x, y \in X$  iken  $p(r) d(x, y) \leq d(x, y)$  den bütün  $x, y \in X$  alındığında  $\eta(x, y) \leq \alpha(x, y)$  dir. Yani Teorem 3.8.5' in (i) – (iv) şartları doğrudur.  $n \rightarrow \infty$  iken  $x_n \rightarrow x$  ile  $\{x_n\}$  dizi olsun. Her  $n \in \mathbb{N}$  alındığında  $p(r) d(Tx_n, T^2x_n) \leq d(Tx_n, T^2x_n)$  den, sonra (3.9.73)'den her  $n \in \mathbb{N}$  iken

$$d(T^2x_n, T^3x_n) \leq r d(Tx_n, T^2x_n)\tag{3.9.75}$$

elde ederiz.

$$\begin{aligned}\eta(Tx_{n_0}, T^2x_{n_0}) &> \alpha(Tx_{n_0}, x) \\ \eta(T^2x_{n_0}, T^3x_{n_0}) &> \alpha(T^2x_{n_0}, x)\end{aligned}\tag{3.9.76}$$

olacak şekilde  $n_0 \in \mathbb{N}$  vardır. O halde

$$\begin{aligned}p(r) d(Tx_{n_0}, T^2x_{n_0}) &> d(Tx_{n_0}, x) \\ p(r) d(T^2x_{n_0}, T^3x_{n_0}) &> d(Tx_{n_0}, x)\end{aligned}\tag{3.9.77}$$

dır ve ayrıca (3.9.75)'den

$$\begin{aligned}d(Tx_{n_0}, T^2x_{n_0}) &\leq d(Tx_{n_0}, x) + d(T^2x_{n_0}, x) \\ &< p(r) d(Tx_{n_0}, T^2x_{n_0}) + p(r) d(T^2x_{n_0}, T^3x_{n_0}) \\ &\leq p(r) d(Tx_{n_0}, T^2x_{n_0}) + rp(r) d(Tx_{n_0}, T^2x_{n_0}) \\ &= p(r) (1 + r) d(Tx_{n_0}, T^2x_{n_0}) \\ &= d(Tx_{n_0}, T^2x_{n_0})\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu çelişkidir. Buradan  $\forall n \in \mathbb{N}$  için

$$\eta(Tx_n, T^2x_n) \leq \alpha(Tx_n, x)$$

ya da

$$\eta(T^2x_n, T^3x_n) \leq \alpha(T^2x_n, x) \quad (3.9.78)$$

eşitsizliklerinden biri sağlanır. Yani Teorem 3.8.5' in (v) koşulu sağlanır.

$$\eta(x, Tx) \leq \alpha(x, y)$$

olsun. Bu sebepten

$$p(r) d(x, Tx) \leq d(x, y)$$

dir. (3.9.73)' den

$$d(Tx, Ty) \leq rd(x, y) \leq rM(x, y) = \psi(M(x, y))$$

elde ederiz. Teorem 3.8.5' in bütün koşulları sağlandığından  $T$  sabit noktaya sahiptir. Sabit noktanın tekliği kolayca elde edilir.

### 3.10. Büzülme Grafikleri İçin Sabit Nokta Sonuçları

**Teorem 3.10.1.**  $(X, d)$  bir  $G$  grafiğiyle donatılmış metrik uzayı ile  $T \rightarrow X \times X$  dönüşümü verilsin. Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim:

- i Tüm  $x, y \in X$  iken  $(x, y) \in E(G) \Rightarrow (T(x), T(y)) \in E(G)$
- ii  $(x_0, Tx_0) \in E(G)$  olacak şekilde  $x_0 \in X$  vardır
- iii Tüm  $(x, y) \in E(G)$  iken

$$d(Tx, Ty) \leq \psi(M(x, y))$$

olacak şekilde  $(x, y) \in E(G)$  vardır, burada

$$M(x, y) = \max \left\{ d(x, y), \frac{d(x, Tx)}{1 + d(x, Tx)}, \frac{d(y, Ty)}{1 + d(y, Ty)}, \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2} \right\}$$

dir.

**iv**  $T$  dönüşümü  $G$ -sürekli.

**v** Eğer bütün  $n \in \mathbb{N}$  alındığında  $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$  ile  $\{x_n\}$ ,  $X$  de bir Cauchy dizisi ise,  $\{x_n\}$ ,  $X$  de yakınsaktır.

Bu bağlamda  $T$ 'nin bir tek sabit noktası mevcuttur. (Hussain ve ark., 2014)

**İspat.**  $\alpha : X^2 \rightarrow [0, \infty)$  dönüşümünü

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in E(G) \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak ifade edilsin İlk olarak  $T$ 'nin  $\alpha$ -admissible dönüşüm olduğunu ispat edelim.  $(x, y) \in E(G)$  den  $\alpha(x, y) \geq 1$  dir. (i)' den  $(Tx, Ty) \in E(G)$  elde ederiz. Yani  $\alpha(Tx, Ty) \geq 1$  dir. Bu nedenle  $T$  bir  $\alpha$ -admissible dönüşümdür. O zaman

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } x_n \rightarrow x, (x_n, x_{n+1}) \in E(G), \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } Tx_n \rightarrow Tx$$

olmasını sağlar. Bu da  $T$ 'nin  $(X, d)$  üzerinde  $\alpha$ -sürekli olduğunu ima eder. (ii)' den  $(x_0, Tx_0) \in E(G)$  olacak şekilde  $x_0 \in E(G)$  vardır. Yani  $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$  dir.  $(x, y) \in E(G)$ ' den,  $\alpha(x, y) \geq 1$  olsun. (iii)' den  $d(Tx, Ty) \leq \psi(M(x, y))$  elde edilir. Yani

$$\alpha(x, y) \geq 1 \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq \psi(M(x, y))$$

dir. (v) koşulundan  $(X, d)$  bir  $\alpha$ -tam metrik uzaydır. Bundan dolayı Sonuç 3.8.4'ün koşulları sağlanır ve  $T$  sabit noktaya sahiptir.

**Teorem 3.10.2.** Bir  $G$  grafiği ile donatılmış  $(X, d)$  tam uzayı ile  $X$  kümesinde bir  $T$  kendi içine dönüşümü verilsin. Aşağıdaki iddiaların sağlandığını kabul edelim:

**i**  $\forall x, y \in X, (x, y) \in E(G) \implies (T(x), T(y)) \in E(G)$

**ii**  $(x_0, Tx_0) \in E(G)$  olacak biçimde  $x_0 \in X$  vardır

**iii**  $\forall (x, y) \in E(G)$  alındığında  $d(Tx, Ty) \leq \psi(M(x, y))$  olacak şekilde  $\psi \in \Psi$  vardır. Burada

$$M(x, y) = \max \left\{ d(x, y), \frac{d(x, Tx)}{1 + d(x, Tx)}, \frac{d(y, Ty)}{1 + d(y, Ty)}, \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2} \right\}$$

dir.

**iv**  $T, G$  süreklidir.

Öyleyse  $T$  nin bir sabit noktası vardır. (Hussain ve ark., 2014)

**Teorem 3.10.3.** Bir  $G$  grafiği ile donatılmış  $(X, d)$  metrik uzayı ile  $X$  üzerinde bir  $T$  kendi içine dönüşümü verilsin. Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim:

**i** Bütün  $x, y \in X$  için  $(x, y) \in E(G) \implies (T(x), T(y)) \in E(G)$

**ii**  $(x_0, Tx_0) \in E(G)$  olacak şekilde  $x_0 \in X$  vardır

**iii** Bütün  $(x, y) \in E(G)$  için

$$d(Tx, Ty) \leq \psi(M(x, y))$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde  $\psi \in \Psi$  vardır. Burada

$$M(x, y) = \max \left\{ d(x, y), \frac{d(x, Tx)}{1 + d(x, Tx)}, \frac{d(y, Ty)}{1 + d(y, Ty)}, \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2} \right\}$$

dır.

**iv** Eğer  $\{x_n\}$  dizisi  $n \rightarrow \infty$  iken  $x_n \rightarrow x$  ile  $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$  olacak şekildeyse o zaman her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$(Tx_n, x) \in E(G) \text{ ya da } (T^2x_n, x) \in E(G)$$

sağlanır.

v Eğer  $\{x_n\}$ ,  $X'$  de  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$  ile birlikte bir Cauchy dizisi ise, o zaman  $\{x_n\}$ ,  $X'$  de yakınsaktır ya da  $(X, d)$  bir tam metrik uzayıdır.

Öyleyse  $T$  nin bir sabit noktası mevcuttur (Hussain ve ark., 2014)

$(X, d, \leq)$  kısmi sıralı metrik uzay olsun.  $G$  grafiğini

$$E(G) : \{(x, y) \in X \times X : x \leq y\}$$

den tanımlayalım. Bu grafik için Teorem 3.10.1'in (i) koşulu  $T'$  nin bu sıralamaya göre artmayan olduğu anlamına gelir. (Ciric ve ark., 2011) Böylelikle Teorem 3.10.1 ve 3.10.3 den kısmi sıralı metrik uzaylarda aşağıdaki önemli sonuçlar bulunur.

**Teorem 3.10.4.**  $(X, d, \leq)$  kısmi sıralı metrik uzayı ile  $T \rightarrow X \times X$  dönüşümü verilsin. Aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim:

i  $T$  azaltmayan bir dönüşüm

ii  $x_0 \leq Tx_0$  olacak biçimde  $x_0 \in X$  vardır

iii Bütün  $x \leq y$  ler için

$$d(Tx, Ty) \leq \psi(M(x, y))$$

olacak biçimde  $\psi \in \Psi$  vardır. Burada

$$M(x, y) = \max \left\{ d(x, y), \frac{d(x, Tx)}{1 + d(x, Tx)}, \frac{d(y, Ty)}{1 + d(y, Ty)}, \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2} \right\}$$

dir.

iv Verilen  $x \in X$  ve  $\{x_n\}$  dizisi için  $n \rightarrow \infty$  iken  $x_n \rightarrow x$ ,  $x \leq x_{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  iken  $Tx_n \rightarrow x$  vardır ya da  $T$  süreklidir.

v Eğer  $\{x_n\}$   $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $x_n \leq x_{n+1}$  ile  $X'$  de bir Cauchy dizisi oluyorsa  $\{x_n\}$ ,  $X'$  de yakınsaktır veya  $(X, d)$  tam metrik uzayıdır.

Bu bağlamda  $T$ 'nin bir sabit noktası mevcuttur. (Hussain ve ark., 2014)

**Sonuç 3.10.5.**  $(X, d, \leq)$  kısmi sıralı tam metrik uzayı ile  $T : X \rightarrow X$  en az bir tane  $x_0 \leq Tx_0$  olacak şekilde sürekli azalmayan dönüşümü verilsin. Kabul edelim ki  $0 \leq r \leq 1$  iken tüm  $x, y \in X$ ,  $x \leq y$  iken

$$d(Tx, Ty) \leq rd(x, y)$$

olduğu durumda  $T$  bir sabit noktaya sahiptir. (Ran and Reurings, 2004)

**Teorem 3.10.6.**  $(X, d, \leq)$  bir kısmi sıralı uzayı ile  $X$  de bir  $T$  kendi içine dönüşümü verilsin. Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim:

- i  $T$  azalmayan dönüşümdür
- ii  $x_0 \leq Tx_0$  şeklindeki  $x_0 \in X$  vardır
- iii Bütün  $x \leq y$  için

$$d(Tx, Ty) \leq \psi(M(x, y))$$

olacak biçimde  $\psi \in \Psi$  vardır. Burada

$$M(x, y) = \max \left\{ d(x, y), \frac{d(x, Tx)}{1 + d(x, Tx)}, \frac{d(y, Ty)}{1 + d(y, Ty)}, \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2} \right\}$$

dir.

- iv Eğer  $\{x_n\}$   $n \rightarrow \infty$  iken  $x_n \rightarrow x$  ile  $x_n \leq x_{n+1}$  olacak şekilde bir dizi ise o zaman

$$Tx_n \leq x \text{ ya da } T^2x_n \leq x$$

eşitsizliği her  $n \in \mathbb{N}$  için sağlanır.

- v Eğer  $\forall n \in \mathbb{N}$  alındığında  $x_n \leq x_{n+1}$  ile  $\{x_n\}$ ,  $X$  üzerinde Cauchy ise, o zaman  $\{x_n\}$ ,  $X$  de yakınsaktır ya da  $(X, d)$  bir tam metrik uzaydır.

O halde  $T$ 'nin bir sabit noktası vardır. (Hussain ve ark., 2014)

#### 4. İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞINA UYGULAMA

Sıralı metrik uzaylardaki monoton operatörler için sabit nokta teoremleri geniş çapta araştırılmış ve diferensiyel ve integral denklemlerinde çeşitli uygulamalar bulunmuştur. (Agarwal ve ark., 2012), (Hussain ve ark., 2010)

Bu bölümde sonucumuzu bir integral denklemin çözümünün varlığına uygulayacağız.  $X = C([0, T], \mathbb{R})$ ,  $[0, T]$  aralığında tanımlı gerçel sürekli fonksiyonların kümesi olsun ve  $\forall x, y \in X$  iken  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$d(x, y) = \|x - y\|_{\infty} \quad (4.0.79)$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman  $(X, d)$  tam metrik uzaydır. Ayrıca kabul edelim ki bu metrik uzay bir  $G$  grafiği ile donatılmış olsun. İntegral denklemini aşağıdaki gibi düşünelim

$$x(t) = p(t) + \int_0^T S(s) f(s, x(s)) ds \quad (4.0.80)$$

ve  $F : X \rightarrow X$

$$F(x)(t) = p(t) + \int_0^T S(t, s) f(s, x(s)) dx \quad (4.0.81)$$

olarak tanımlansın. Varsayalım ki

**A**  $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  süreklidir

**B**  $p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  süreklidir

**C**  $S : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$  süreklidir

**D**  $\psi \in \Psi$  var öyle ki  $\forall s \in [0, T]$  için  $\rightarrow [0, T]$  için

$$\forall x, y \in X \quad (x, y) \in E(G) \implies (F(x), F(y)) \in E(G) \quad (4.0.82)$$

$$\forall x, y \in X, (x, y) \in E(G) \implies 0$$

$$\leq f(s, x(s)) - f(s, y(s))$$

$$\leq \psi(\max\{\frac{|x(s) - y(s)|}{1 + |x(s) - y(s)|}, \frac{|x(s) - F(x(s))|}{1 + |x(s) - F(x(s))|}, \\ |y(s) - F(y(s))|, \frac{1}{2} [|x(s) - F(y(s))| + |y(s) - F(x(s))|]\})$$

**E**  $(x_0, F(x_0)) \in E(G)$  olacak şekilde  $x_0 \in X$  vardır.

**F** Eğer  $n \rightarrow \infty$  iken  $x_n \rightarrow x$  iken  $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$  olacak şekilde  $\{x_n\}$  dizi, o zaman  $\forall n \in \mathbb{N}$  iken

$$(Fn_x, x) \in E(G) \text{ ya da } (F^2n_x, x) \in E(G) \quad (4.0.83)$$

sağlanır.

**G** Bütün  $t$ ' ler için  $\int_0^T S(t, s) ds \leq 1$  dir.

**Teorem 4.0.7.** (A)-(G) varsayımları altında integral denklemi (4.0.80)  $X = C([0, T], \mathbb{R})$  de bir çözüme sahiptir.(Hussain ve ark., 2014)

**İspat.** (4.0.81)' de tanımlanan  $F : X \rightarrow X$  dönüşümünü dikkate alalım.  $(x, y) \in E(G)$  olsun. (D)' den

$$\begin{aligned} |F(x)(t) - F(y)(t)| &= \left| \int_0^T S(t, s) [f(s, x(s)) - f(s, y(s))] ds \right| \\ &\leq \int_0^T S(t, s) |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \\ &\leq \int_0^T S(t, s) \psi x(\max\{|x(s) - y(s)|, \frac{|x(s) - F(x(s))|}{1 + |x(s) - F(x(s))|}, \\ &\quad \frac{|y(s) - F(y(s))|}{1 + |y(s) - F(y(s))|}, \frac{1}{2} [|x(s) - F(y(s))| + |y(s) - F(x(s))|]\}) ds \\ &\leq \left( \int_0^T S(t, s) ds \right) \psi x(\max\{\|x(s) - y(s)\|, \frac{\|x(s) - F(x(s))\|}{1 + \|x(s) - F(x(s))\|}, \\ &\quad \frac{\|y(s) - F(y(s))\|}{1 + \|y(s) - F(y(s))\|}, \frac{1}{2} [\|x(s) - F(y(s))\| + \|y(s) - F(x(s))\|]\}) \end{aligned}$$

sonucunu çıkarırız.O zaman

$$\|F_x - F_y\|_\infty$$

$$\psi(\max\{\|x(s) - y(s)\|, \frac{\|x(s) - F(x(s))\|}{1 + \|x(s) - F(x(s))\|}, \frac{\|y(s) - F(y(s))\|}{1 + \|y(s) - F(y(s))\|}, \frac{1}{2} [\|x(s) - F(y(s))\| + \|y(s) - F(x(s))\|]\})$$

Yani  $(x, y) \in E(G)$  olması

$$\begin{aligned} & \|F_x - F_y\|_\infty \\ \leq & \psi(\max\{\|x - y\|_\infty, \frac{\|x - F(x)\|_\infty}{1 + \|x - F(x)\|_\infty}, \frac{\|y - F(y)\|_\infty}{1 + \|y - F(y)\|_\infty}, \frac{1}{2} [\|x - F(y)\|_\infty + \|y - F(x)\|_\infty]\}) \end{aligned}$$

olduğunu ima eder.

Teorem 3.10.4 ün bütün hipotezlerinin sağlandığını kolaylıkla görürüz ve buradan  $F$  dönüşümü (4.0.80) integral denkleminin  $X = C([0, T], \mathbb{R})$  de çözümü olan bir sabit noktaya sahiptir.

## KAYNAKLAR

- Agarwal, R. P., Hussain, N. ve Taoudi, M. A., 2012. Fixed point theorems in ordered Banach spaces and applications to nonlinear integral equations. Abstract and Applied Analysis Article ID 245872, 15 pages.
- Ahmad, J., Al-Rawashdeh, A. ve Azam, A., 2015. New fixed point theorems for generalized F-contractions in complete metric spaces. Fixed Point Theory Appl., 80,.
- Alber, I. ve Guerre-Delabriere, S., 1997. Principle of weakly contractive maps in Hilbert spaces. New Results in Operator Theory and Its Applications, Oper. Theory Adv. Appl. 98, Birkhauser, Basel, 1997, 7 – 22.
- Ali, M.U., Kamran, T. ve Karapinar, E., 2014.  $(\alpha, \psi, \xi)$ -Contractive multivalued mappings. *Fixed Point Theory and Applications* 2014(7).<https://doi.org/10.1186/1687-1812-2014-7>
- Ansari, A. H, 2014. Note on contractive type mappings and related fixed point. Proceedings of the 2nd Regional Conference on Math. and Appl., 377-380.
- Asl, J. H., Rezapour, S., & Shahzad, N., 2012. On fixed points of  $\alpha$ - $\psi$ contractive multifunctions. *Fixed Point Theory and Applications*, 2012(212). <https://doi.org/10.1186/1687-1812-2012-212>
- Babu, G.V.R. ve Sailaja, P.D.A., 2011. fixed point theorem of generalized weakly contractive maps in orbitally complete metric spaces. Thai J. of Math.,9(1), 1-10.
- Babu, G. V. R., Tolera, M. D., 2017 Fixed points of generalized  $(\alpha, \psi, \phi)$ -rational contractive mappings in  $\alpha$ -complete metric spaces. Fasciculi Mathematici, 58,115-130.
- Banach, S., 1922. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs applications auxéquations intégrales. Fund. Math., 3 , 133-181.
- Berinde, M., 2006 Approximate fixed point theorems. Stud. Univ. Babes Bolyai, Math., 51(1), 11-25.
- Berinde,V., 2007. *Iterative Approximation of Fixed Points*, Springer, Berlin, Germany.
- Bojor, F., 2012. Fixed point theorems for Reich type contractions on metric spaces with a graph. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 75(9),3895-3901.
- Browder, F. E. ve Petrysyn, W. V., 1966 The solution by iteration of nonlinear functional equation in Banach spaces. Bull. Amer. Math. Soc., 72 , 571-576.

- Chandok, S., Tas, K. ve Ansari, A. H., 2016. Some Fixed Point Results for TAC-type contractive mappings. *J. Funct. Spaces*, Volume 2016, Article ID 1907676, 6 pages.
- Chatterjea, S. K., 1972. "Fixed point theorems," *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, vol. 25pp 727–730,
- Ciric, L., Hussain, N. ve Cakic, N., 2010 "Common fixed points for Ciric type  $f$ -weakcontraction with applications," *Publicationes Mathematicae Debrecen*, vol. 76, no. 1–2, pp. 31–49.
- Ciric, L., Abbas, M., Saadati, R. ve Hussain, N., 2011. "Common fixed points of almost generalized contractive mappings in ordered metric spaces," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 217, no. 12, pp. 5784–5789
- Czerwik, S., 1993. Contraction mappings in b-metric spaces. *Acta Math. Inform. Univ. Ostraviensis*, 1 , 5-11.
- Dey, D., Laha, A. K. ve Saha, M., 2013 Approximate coincidence point of two nonlinear mappings. *Journal of Mathematics*, Vol. 2013, Article ID 962058, 4 pages.
- Dey, D. ve Saha, M., 2013 Approximate fixed point of Reich operator. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, 82(1), 119-123.
- Doric, D., 2009. Common fixed point for generalized  $(\psi, \varphi)$ -weak contractions. *Appl. Math. Lett.*, 22 , 1896-1900.
- Dutta, P. N. ve Choudhury, B. S. A., 2008 generalization of contraction principle in metric spaces. *Fixed Point Theory Appl.*, Article ID 406368, 8 pages.
- Hieu, N. T. ve Dung, N. V., 2015. Some fixed point results for generalized rational type contraction mappings in partially ordered b metric spaces. *Facta Univ. Ser. Math. Inform.*, 30(1), 49-66.
- Hussain, N., Khan, A. R. ve Agarwal, R. P., 2010. "Krasnoselskii and Ky Fan type fixed point theorems in ordered Banach spaces," *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, vol. 11, no. 3, pp. 475–489
- Hussain, N., Salimi, P. ve Latif, A., 2013. "Fixed point results for single and set-valued  $\alpha$ - $\eta$ - $\psi$ -contractive mappings," *Fixed Point Theory and Applications*, vol. 2013, article 212,
- Hussain, N., Karapinar, E., Salimi, P. ve Akbar, F., 2013. " $\alpha$ -admissible mappings and fixed point theorems," *Journal of Inequalities and Applications*, vol. 2013, article 114, 11 pages.
- Hussain, N., Kutbi, M.A. ve Salimi, P., 2013. "Best proximity point results for modified  $\alpha$ - $\psi$ -proximal rational contractions," *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2013, Article ID 927457, 14 pages

- Hussain, N., Al-Mezel, S. ve Salimi, P., 2013. "Fixed points for  $\psi$ -graphic contractions with application to integral equations," *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2013, Article ID 575869, 11 pages.
- Hussain, N. ve Taoudi, M. A. 2013. Krasnoselskii-type fixed point theorems with applications to Volterra integral equations. *Fixed Point Theory and Applications*, 2013(1), 196. <https://doi.org/10.1186/1687-1812-2013-196>
- Hussain, N., Kutbi, M. A. ve Salimi, P., 2014. Fixed Point Theory in  $\alpha$ -complete Metric Spaces with Applications. *Abstract and Applied Analysis*, Vol. 2014, Article ID 280817, 11 pages.
- Istratescu, V. I., 1982. Some fixed point theorems for convex contraction mappings and mappings with convex diminishing diameters, I. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 130(4) , 89-104
- Jachymski, J., 2008. The contraction principle for mappings on a metric space with a graph. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136, 1359-1373.
- Jleli, M., Samet, B., 2014. Fixed point results for F-contractions in b-metric spaces. *J. Inequal. Appl.*, 2014:38, 1-9.
- Kannan, R., 1969. Some results on fixed points II. *Amer. Math. Monthly*, 76, 405-408.
- Karapınar, E., 2010. Fixed point theory for cyclic weak  $\varphi$ -contraction mappings. *Computers and Mathematics with Applications*, 59, 3653-3659.
- Karapınar, E. ve Samet, B., 2012. "Generalized  $\alpha$ - $\psi$  contractive type mappings and related fixed point theorems with applications," *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2012, Article ID 793486, 17 pages.
- Karapınar, E., Kumam, P. ve Salimi, P. 2013. On  $\alpha$ - $\psi$ -Meir-Keeler contractive mappings. *Fixed Point Theory and Applications*, 2013(94). <https://doi.org/10.1186/1687-1812-2013-94>
- Karapınar, E., Roldán, A. ve Martínez-Moreno, 2015. J. Fixed points of generalized multivalued F-contractions in b-metric spaces. *J. Inequal. Appl.*, 2015 : 250 1-11.
- Khan, M. S., Swaleh, M. ve Sessa, S., 1984. Fixed point theorems by altering distances between the points. *Bull. Aust. Math. Soc.*, 30, 1-9.
- Kirk, W. A. A., 1965. fixed point theorem for mappings which do not increase distances. *Amer. Math. Monthly*, 72, 1004 – 1006.
- Kohlenbach, U. ve Leustean, L., 2007. The approximate fixed point property in product spaces. *Nonlinear Anal.*, 66, 806 - 818.
- Kutbi, M. A. ve Sintunavarat, W., 2015. On new fixed point results for  $(\alpha, \psi, \xi)$ -contractive multi-valued mappings on  $\alpha$ -complete metric spaces and their consequences. *Fixed Point Theory and Applications*, 2.

- Latif, A., Sintunavarat, W. ve Ninsri, A., 2007. Approximate fixed point theorems for partial generalized convex contraction mappings in  $\alpha$ -complete metric spaces. *Taiwanese Journal of Mathematics*, The approximate fixed point property in product spaces. *Nonlinear Anal.*, 19, 315-333.
- Miandaragh, M. A., Postolache, M. ve Rezapour, S., 2013. Approximate fixed points of generalized convex contractions. *Fixed Point Theory and Applications*, 2013:255.
- Mlaiki, N., Jleli, M. ve Samet, B., 2015. Fixed point results for contractive type mappings in b-metric spaces. *J. Inequal. Appl.*, 2015:278, 1-14.
- Mohammadi, B., Rezapour, S. ve Naseer, S. 2013. Some results on fixed points of  $\alpha$ - $\psi$ -Ciric generalized multifunctions. *Fixed Point Theory and Applications*, 2013(24). <https://doi.org/10.1186/1687-1812-2013-24>
- Nadler, S. B., 1969 Multi-valued contraction mappings. *Pacific J. Math.*, 30(2), 475-488.
- Nieto, J. J. ve Rodríguez-López, R., 2005. Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations. *Order*, 22, 223-239.
- O'Regan, D., Petruşel, A. ve Petruşel, G., 2011. Fixed point results for nonlinear contractions in metric spaces. *Nonlinear Analysis*, 74, 3123-3131.
- Proinov, P. D. 2007. "A generalization of the Banach contraction principle with high order of convergence of successive approximations," *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, vol. 67, no. 8, pp. 2361–2369 .
- Proinov, P. D., 2010. "New general convergence theory for iterative processes and its applications to Newton-Kantorovich type theorems," *Journal of Complexity*, vol. 26, no. 1, pp. 3–42.
- Ran, A. C. M. ve Reurings, M. C. B., 2004. A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 132(5), 1435–1443.
- Reich, S., 1971. Kannan's Fixed Point Theorem. 4 , 1-11.
- Reich, S., 1978. Approximate selections, best approximations, fixed points, and invariant sets. *J. Math. Anal. Appl.*, 62 (1978), 104-113.
- Rhoades, B. E., 1977. A comparison of various definitions of contractive mappings. *Transactions of the American Mathematical Society*. Vol. 226, 257-290.
- Roldán, A., Martínez-Moreno, J. ve Karapınar, E., 2015 Multivalued generalized F-contractions in b-metric spaces. *Fixed Point Theory Appl.*, 2015:140, 1-11.

- Samet, B., Vetro, C. ve Vetro, P., 2012. Fixed point theorems for alpha-psi contractive type mappings. *Nonlinear Anal.*, 75, 2154-2165.
- Singh, S. L., Kamal, R., De la Sen, M. ve Chugh, R., 2015. *A fixed point theorem for generalized weak contractions*, *Filomat*, **29**(7) , 1481–1490.
- Suzuki, T. A., 2008. Generalized Banach contraction principle that characterizes metric completeness. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136(5), 1861-1869.
- Tijs, S., Torre, A. ve Branzei, R. 2003. Approximate fixed point theorems. *Libertas Mathematica*, 23, 25–39.
- Wardowski, D., 2012. Fixed points of a new type of contractive mappings in complete metric spaces. *Fixed Point Theory Appl.*, 2012:94 , 1-6.
- Zamfirescu, T., 1972. Fixed point theorems in metric spaces. *Arch. Math.*, 23(1), 292-298.

## ÖZGEÇMİŞ

