

**T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TAN H-YÖNTEMİ İLE (G'/G)-AÇILIM YÖNTEMİNİN
KARŞILAŞTIRMASI VE BİRLEŞTİRİLMİŞ
YÖNTEMİN GELİŞTİRİLMESİ**

DOKTORA TEZİ

Tuğba AYDEMİR

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı : UYGULAMALI MATEMATİK
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL

Aralık 2016

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

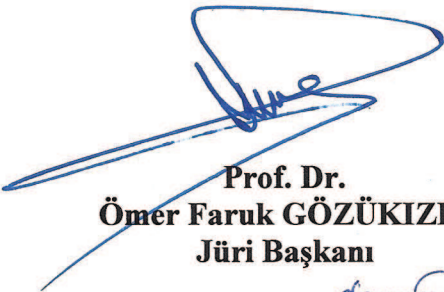
**TANH-YÖNTEMİ İLE (G'/G)-AÇILIM YÖNTEMİNİN
KARŞILAŞTIRMASI VE BİRLEŞTİRİLMİŞ
YÖNTEMİN GELİŞTİRİLMESİ**

DOKTORA TEZİ

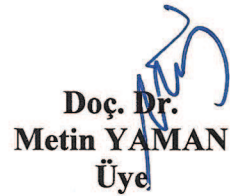
Tuğba AYDEMİR

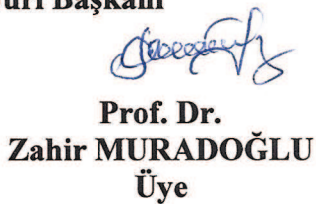
Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

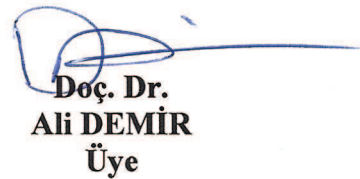
Bu tez 16 / 12 / 2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.


**Prof. Dr.
Ömer Faruk GÖZÜKIZIL**
Jüri Başkanı


**Prof. Dr.
Cemalettin KUBAT**
Üye


**Doç. Dr.
Metin YAMAN**
Üye


**Prof. Dr.
Zahir MURADOĞLU**
Üye


**Doç. Dr.
Ali DEMİR**
Üye

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Tuğba AYDEMİR

16.12.2016

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca bana verdiği desteği, kelimelerle ifade edemeyeceğim kadar büyük olan değerli çalışma arkadaşım Yrd. Doç. Dr. Şamil AKÇAĞIL'a,

Bu çalışma boyunca bana danışmanlık yapan hocam sayın Prof. Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL'a,

Bana doktora eğitimim boyunca her zaman destek veren aileme ve özellikle abim Ahmet AYDEMİR'e,

Son olarak da 2211-Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında sağladığı destekten ötürü TÜBİTAK Bilim İnsani Destekleme Daire Başkanlığı birimine teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	v
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	vi
ÖZET	vii
SUMMARY.....	viii

BÖLÜM 1.

GİRİŞ	1
1.1. Tanımlar	2
1.2. Soliter Dalgaların Tarihi	4
1.3. Dalga Kavramı	6
1.4. Dalga Tipleri	8
1.4.1. Soliter dalgalar ve solitonlar	8
1.4.2. Periyodik dalgalar	8
1.4.3. Kink dalgalar	9
1.4.4. Peakon dalgalar	10
1.4.5. Cuspon dalgalar	11
1.4.6. Kompakton.....	12
1.5. Dispersiyon ve Dissipasyon	12

BÖLÜM 2.

BENJAMİN-BONA-MAHONY-BURGERS TİPİ NONLİNEER KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN (G'/G) -AÇILIM YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMLERİ	15
--	----

2.1. Giriş.....	15
2.2. (G' / G) -Açılım Yöntemi	16
2.3. Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) Denkleminin (G' / G) - Açılım Yöntemi ile Çözümü	19
2.4. Genelleştirilmiş Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) Denkleminin (G' / G) -Açılım Yöntemi ile Çözümü	30

BÖLÜM 3.

GENİŞLETİLMİŞ VE MODİFİYE EDİLMİŞ TANH-YÖNTEMİ İLE (G' / G) -AÇILIM YÖNTEMİ ARASINDA KARŞILAŞTIRMA.....	40
3.1. Giriş.....	40
3.2. Genişletilmiş ve Modifiye Edilmiş Tanh-Yöntemi.....	42
3.3. Genişletilmiş ve Modifiye Edilmiş Tanh-Yöntemi ile (G' / G) - Açılım Yöntemi Arasındaki Bağlantı	44
3.4. Lonngren Dalga Denkleminin İki Yöntemle Çözümü.....	47
3.4.1. (G' / G) -açılım yöntemi ile çözüm	48
3.4.2. Genişletilmiş ve modifiye edilmiş tanh-yöntemi ile çözüm.....	50
3.5. Lonngren Dalga Denkleminde Kullanılan Maple Komutları	56
3.5.1. (G' / G) -açılım yöntemi Maple komutları	56
3.5.2. Genişletilmiş ve modifiye edilmiş tanh-yöntemi ile çözüm Maple komutları.....	56
3.6. İki Yöntemin Benzerlikleri	57

BÖLÜM 4.

BİRLEŞTİRİLMİŞ YÖNTEM	62
4.1. Giriş.....	62
4.2. Tanh-fonksiyon Yöntem Ailesi.....	63
4.2.1. Standart tanh-yöntemi	64
4.2.2. Genişletilmiş tanh-yöntemi	65
4.2.3. Genişletilmiş ve modifiye edilmiş tanh-yöntemi	65

4.2.4. Kompleks tanh-yöntemi.....	67
4.3. Birleştirilmiş Yöntem.....	68
4.4. (G' / G) -açılım Yöntemi Ailesi	71
4.4.1. Genelleştirilmiş (G' / G) -açılım yönteminin yeni yaklaşımı.....	71
4.4.2. $(G' / G, 1 / G)$ -açılım yöntemi	73
4.5. Birleştirilmiş Yöntem ile Diğerlerinin Karşılaştırılması	73
4.6. Lonngren Dalga Denkleminin Birleştirilmiş Yöntemle Çözümü	79
BÖLÜM 5.	
SONUÇLAR VE ÖNERİLER	93
KAYNAKLAR.....	95
ÖZGEÇMİŞ	104

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

KdV	: Korteweg-de Vries
(G' / G)	: G çözüm fonksiyonun ξ değişkenine göre türevine bölümü
$u(x, t)$	: İki değişkenli fonksiyon
ξ	: Dalga değişkeni
u_x	: u fonksiyonunun x değişkenine göre birinci kısmi türevi
u_{xx}	: u fonksiyonunun x değişkenine göre ikinci kısmi türevi
$u'(\xi)$	: u fonksiyonunun ξ değişkenine göre birinci adi türevi
$u''(\xi)$	: u fonksiyonunun ξ değişkenine göre ikinci adi türevi

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1. $u(x, t) = \sec h^2(x - t), -\pi \leq x, t \leq \pi$ soliton çözümün grafiği	8
Şekil 1.2. $u(x, t) = \cos(x - t), -3\pi \leq x, t \leq 3\pi$ periyodik çözümü.....	9
Şekil 1.3. $u(x, t) = 1 - \tanh(x - t), -10 \leq x, t \leq 10$ kink çözümü.....	10
Şekil 1.4. $u(x, t) = e^{- x-t }, -2 \leq x, t \leq 2$ peakon çözümü.....	11
Şekil 1.5. $u(x, t) = e^{- x-t ^{\frac{1}{6}}}, -2 \leq x, t \leq 2$ cuspon çözümü.....	11
Şekil 1.6. $u(x, t) = \cos^{\frac{1}{2}}(x - t), 0 \leq x, t \leq 1$ kompakton çözümü.....	12

ÖZET

Anahtar kelimeler: Lineer Olmayan Kısmi Türevli Denklem, Genişletilmiş ve Modifiye Edilmiş Tanh-Yöntem, (G'/G) -açılım Yöntemi, Birleştirilmiş Yöntem.

Bu çalışmanın amacı, nonlinear kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde yaklaşık 20 yıldır yaygın olarak kullanılan tanh-yöntemi ile (G'/G) -açılım yöntemini tanıtmak ve karşılaştırmaktır. Bölüm 2’de her iki yöntem ile ilgili detaylı bilgi ve uygulamalar verildikten sonra, bölüm 3’de iki yöntemin en sık kullanılan iki üyesi karşılaştırılıp, benzerlikler ve farklılıklar belirlenmiştir. Daha sonra, bölüm 4’de bu iki aile birleştirilmiş yöntem olarak adlandırılan tek bir yöntem altında birleştirilmiştir.

Bu çalışma boyunca, cebirsel işlemler için Maple programı kullanılmıştır.

COMPARISON BETWEEN THE (G'/G) -EXPANSION METHOD AND THE MODIFIED EXTENDED TANH METHOD AND IMPROVING UNIFIED METHOD

SUMMARY

Keywords: Nonlinear Partial Differential Equation, Modified Extended Tanh Method, The (G'/G) -expansion Method, Unified Method.

The aim of this study is to introduce and compare the family of the tanh-methods and the family of the (G'/G) -expansion methods which is widely used to solve nonlinear partial differential equations over 20 years. Giving detailed information with regard to these two methods and applications in section 2, two members of these two families frequently used compared and determined similarities and differences of two methods in section 3. Afterwards, in section 4, these two families are unified in one method which is called unified method.

Maple was used throughout the study for algebraic operations.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Lineer olmayan kısmi türevli denklemler matematiğin önemli alanlarından biridir. Bu önemini özellikle karmaşık fiziksel olayları tanımlamak için kullanılmasından alır. Bu bahsedilen karmaşık olaylar, akışkanlar mekaniği, katıhal fiziği, plazma fiziği, plazma dalga ve kimyasal fizik, hidrodinamik, optik gibi birçok alandan modellenerek, sürekli bir şekilde matematik havuzuna akan denklemlere dönüşürler. Bu nedenle yaklaşık 100 yıldan fazla bir süredir bu denklemlerin nümerik ya da tam çözümleri araştırılmaktadır.

Bir kısmi türevli denklem ile ilgili bir araştırma yapılırken öncelikle varlık-teklik çalışan araştırmacılar, ele alınan problemin çözümünün var olup olmadığı ve eğer varsa bu çözümün tek olup olmadığını araştırırlar. Bu sayede çözümünün var olduğu kanıtlanan problem için diğer aşama ise bu çözüme ya da çözümlere ulaşmaya çalışmaktır.

Lineer olmayan kısmi türevli denklemleri çözmek amacıyla nümerik yöntemlerin yanında, tam çözümler veren birçok yöntem de kullanılmaktadır. Örneğin; ters saçılım yöntemi [1,2], Hirota bilineer yöntemi [3,4], Painlevé açılım yöntemi [5], Backlund dönüşüm yöntemi [6], homojen denge yöntemi [7-10], Riccati denklemi yöntemi [11-13], üstel fonksiyon yöntemi [14], Jacobi eliptik fonksiyonlar yöntemi [15], tanh-yöntem ile (G'/G) -açılım yöntemi bu yöntemlerden bazılarıdır.

Bu tezde, bu yöntemler arasında lineer olmayan kısmi türevli denklemlerin koştan (travelling) dalga tipinde çözümlerini bulmak için literatürde yaklaşık 20 yıldan fazla bir süredir sıklıkla kullanılan tanh-yöntem ile (G'/G) -açılım yöntemi ailesi ve bunlar arasında karşılaştırmaya yer verilecektir. Her iki yöntem ailesi ile ilgili de birçok makale bulunmasının yanında, her ikisinin de ortak noktası, verilen lineer

olmayan kısmi türevli denklemi, adi türevli denkleme çevirerek çözmektir. Tarihsel ortaya çıkışlarına bakıldığında tanh-yöntemin, diğerine göre daha eski olması yanında, her iki yöntemin de zaman içerisinde bir takım değişimler geçirmesi neticesinde, birbirlerinin zayıf kalan yönlerini tamamlayarak, daha farklı çözümler üretmeye yönelik farklı versiyonları ortaya çıkmıştır. Bu farklı versiyonlardan bazıları bilgisayarda gereken işlem yükünü arttırmıştır. Bütün bu avantajlı ve dezavantajlı durumlar göz önüne alınarak, bu tezin 4. bölümünde her iki yöntem ailesinden elde edilen çözümleri de kapsayacak bir yöntem olan birleştirilmiş yöntem geliştirilmiştir.

1.1. Tanımlar

Tanım 1.1. En büyük mertebeden türevi zamana ve boyuta bağlı olan kısmi türevli diferansiyel denklemlere, Sobolev-tipi denklemler denir.

İlk kez Rus matematikçi Sobolev tarafından çalışılmıştır.

a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere

$$u_{tt} - u_{xx} + au_{xxxx} - bu_{xxtt} + u_t u_{xx} + 2u_{xt} = 0 \quad (1.1)$$

Benney-Luke denklemi,

$\mu \in R$ olmak üzere

$$-u_{xxxxt} + u_{xxtt} - u_{tt} + u_{xx} + \mu u_{xxxx} + (u^2)_{xx} = 0 \quad (1.2)$$

geliştirilmiş Boussinesq denklemi,

$\alpha, \beta, \theta \in R$ olmak üzere

$$u_{tt} - u_{xxt} - (\alpha u + \beta u^3 + \theta u^5)_{xx} = 0 \quad (1.3)$$

Pochhammer-Chree denklemi Sobolev-tipi denklemlere örnek verilebilir.

Tanım 1.2. En büyük mertebeden türevinde zamana bağlı türev bir tane ise bu kısmi türevli diferansiyel denklemlere pseudoparabolik denklemler denir.

Bu denklemler Sobolev-tipi denklemlerin özel bir durumudur.

$$u_t + u_{xxt} + u_x + uu_x = 0 \quad (1.4)$$

Korteweg de Vries (KdV) denklemi,

$$u_t - u_{xxt} - \alpha u_{xx} + u_x + uu_x = 0 \quad (1.5)$$

Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) denklemi pseudoparabolik denklemlere örnek verilebilir.

Tanım 1.3. $u(x, t)$ bilinmeyen fonksiyon, $K(u)$, u ve u 'nun x 'e göre türevlerini içeren bir ifade olmak üzere

$$u_t = K(u) \quad (1.6)$$

şeklindeki kısmi türevli denklemlere oluşum (evolution) diferansiyel denklemleri denir. Örneğin;

$$u_t = u(1-u) + u_{xx} \quad (1.7)$$

Fischer denklemi, oluşum (evolution) diferansiyel denklem

1.2. Soliter Dalgaların Tarihi

İskoç John Scott Russel 1834 yılında soliter dalgaları gözlemleyen ilk kişiydi. Russel gözlemlediği bu su tümseklerini “büyük dalga ötelemeleri” diye adlandırdı. Dalga geniş bir zaman aralığında su kanalı boyunca orjinal şeklini muhafaza ederek ilerliyordu.

Russel’in kendi deyimiyle: “ Dar bir kanaldan geçmekte olan ve iki beygir gücüyle giden bir botun hareketini izliyordum. Bot aniden durdu. Kanaldaki hareketli su kütesinin durmadığını gördüm. Bu su kütlesi botun uç kısmı tarafında birikti ve sonra da aniden arka tarafa doğru yayılmaya başladı. Büyük bir hızla tek başına bir dalganın öne doğru geldiğini fark ettim. Bu su kütesinin hızının azalmadan ve şeklini kaybetmeden ilerlemeye devam ettiğini gözlemledim. Atın sırtında olmama rağmen onu takip ettim ve yetiştiğimde ise 8-9 mil hızla ilerlediğin fark ettim. Ancak 1-2 mil sonra kanalın dönüşünde kaybettim. Dalganın ötelenmesi olarak isimlendirdiğim bu eşsiz ve mükemmel doğa olayına 1834 yılının Ağustos ayında şahit olma şansına sahip oldum.”

Russel daha sonra gözlemlediği bu olayı tekrar elde etmek için 1844 yılında bir su tankı inşa eder. Burada yaptığı deney sonucunda büyük dalgaların yer değişimi veya tek kamburlu dalgalar adını verdiği şekil değiştirmeyen bu uzun su dalgalarının a maksimum genlik (amplitude) ve h sonlu su derinliği arasında $c^2 = g(h + a)$ ilişkisini elde etti. Burada g yerçekimi ivmesi ve c dalga hızıdır. İkinci olarak, iki tek dalganın birbirinin içinden geçmesi durumunda dağılmadığını buldu. Su tümseklerinin bu tek kamburlu dalgaları bugün soliter dalgalar veya solitonlar (şeklini koruyan lokal ve yüksek kararlı dalgalar) olarak adlandırılır ve deneysel olarak ilk Russel tarafından keşfedilmiştir.

1895 yılında Diederik Johannes Kortaweg (1848-1941) ile doktora öğrencisi Gustav de Vries (1866-1934) şimdilerde çok iyi bilinen KdV denklemini analitik olarak elde ederek Russel’in bu gözlemlerini matematiksel olarak kanıtladılar. Lineer olmayan terimler ve dispersive terimler içeren KdV denklemi, dispersive ortamlarda sonlu

genliğe sahip uzun dalgaların yayılmasını tanımlar. KdV denklemi lineer olmayan ve saçılım (dispersion) içeren zayıf lineer olmayan uzun dalga çalışmaları için bir başlangıç modelidir. Korteweg ve de Vries'in adlarını taşıyan KdV denklemi 1872'de Boussinesq'in su dalgaları üzerine yaptığı bir çalışmada ele alınmıştı. En basit haliyle KdV denklemi aşağıdaki gibidir.

$$u_t + auu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.8)$$

Burada u_t terimi tek yönde dalga yayılımının zaman oluşumunu (evolution) tanımlar. Ayrıca bu denklem birbiriyle mücadele eden iki etkiyi içerir. Bunlar, dalganın dikliğini gösteren ve uu_x ile temsil edilen lineer olmayan terim ve dalganın yayılımını tanımlayan ve u_{xxx} ile temsil edilen dispersiyon terimidir. Lineer olmayan terim dalgayı sınırlamaya çalışırken dispersiyon terim yaymaya çalışır. Diğer bir ifadeyle, optik fiber ya da sığ su dalga tabakaları gibi lineer olmayan yüzeylerde dispersiyon sayesinde dalga yığınının genişlemesi lineer olmamanın sağladığı daralma etkisi sayesinde tam olarak dengelenebilir. Bu lineer olmayan terimler ve dispersiyon terimleri arasındaki denge tek kamburlu dalgalardan oluşan solitonları ifade eder. Solitonların kararlılığı bu iki etkinin hassas dengesinden kaynaklanır. Bu denklem sonsuzda monoton azalan parçacık özellikli soliton dalgaları karakterize eden soliton çözümleri verir [16].

1965'de Norman J. Zabusky (1929-) ve Martin D. Kruskal (1925-2006) büyük ve küçük soliter dalgaların nonlinear etkileşimini nümerik olarak çalıştılar. Bu etkileşimden çıkan dalgalar şekil ve hızlarını koruyabildikleri için kütle ve enerjilerini de koruyabiliyorlardı. Soliter dalgaların özelliklerini koruyabilen ve parçacık karakterli olan tiplerine Zabusky ve Kruskal tarafından soliton adı verildi. Soliter dalgaların özel bir hali olan soliton ismi bu iki kişi tarafından verilmekle beraber soliter dalga kavramı daha geneldir. Ama fiziksel literatürde, her ne kadar solitonlar, soliter dalgaların özel bir hali gibi gözüксе de soliter dalga ve soliton arasındaki fark belirsizdir. Bununla birlikte genellikle, tek soliton çözüm soliter

dalga olarak ifade edilirken, bir çözümde birden fazla soliton görüldüğünde bu çözüm soliton olarak isimlendirilir [17].

1.3. Dalga Kavramı

Dalgaların matematiksel teorideki dalga kavramına ait bazı tanımlarından bahsedelim. En genel fiziksel tanım yukarı ve aşağı ya da öne ve arkaya doğru hareketlerdir. Ayrıca dalga, enerjiyi bir yerden başka bir yere taşımaya sağlar. Titreşimler periyodik olabileceği gibi, periyodik olmayabilir. Bir dalganın salınımının şiddetine genlik, salınımının sıklığına frekans, dalganın ardışık iki tepe ya da çukur noktası arasındaki uzaklığa da dalga boyu denir. Ses dalgaları, su dalgaları, elektromanyetik dalgalar gibi birçok dalga tipi vardır. En basit dalga yayılımı denkleminin $u(x, t)$ dalganın genliğini ve c 'de dalganın hızını göstermek üzere aşağıdaki gibidir.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad (1.9)$$

Bu denklem f ve g dalganın sırasıyla sağa ve sola yayılımını ifade eden keyfi fonksiyonlar olmak üzere D'Alembert çözümü olarakta bilinen aşağıdaki çözüme sahiptir.

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (1.10)$$

Bu farklı f ve g dalgaları şekillerini değiştirmeksizin yayılım gösterirler. Bu fonksiyonlar genellikle problemde verilen $u(x, 0)$ ve $u_t(x, 0)$ başlangıç değerleri kullanılarak belirlenir. Dalga denkleminin lineer olduğu için süperpozisyon prensibine göre bu iki çözüm toplanabilir. $g=0$ olarak alırsak bu durumda $u_t + u_x = 0$ denkleminin $c=1$ hızına sahip çözümü olan $u(x, t) = f(x - t)$ gibi dalga sadece sağa doğru yayılır.

Diğer bir taraftan, koşan dalga (travelling wave) dalganın yayılımı yönünde hareket eden dalgadır. Koşan dalga, dalganın $u(x,t) = f(x-ct)$ olarak ifade edildiği ve yönünün c 'nin pozitif ve negatif değerine göre tayin edildiği lineer olmayan diferansiyel denklemler ile ilgili çalışmalarda karşımıza çıkar. Eğer çözüm kısmi türevli denklemin sadece iki koordinatı farkına bağlı ise çözüm şeklini tam olarak korur ve bu sebeple soliter dalga olarak isimlendirilir. Soliter bir dalga, $\xi = -\infty$ 'daki asimtotik durumdan $\xi = \infty$ 'daki duruma koşan dalganın geçişini $\xi = x-ct$ ve c dalganın hızı olmak üzere ξ 'de sınırlandıran koşan bir dalgadır.

Solitonlar bir çok fiziksel doğa olayında bulunurlar. Solitonlar fiziksel sistemleri tanımlayan zayıf nonlinear kısmi türevli denklemlerin geniş bir sınıfında ortaya çıkar. Solitonlar, soliter dalgaların elastik dağılma özelliğine sahiptir. Solitonlar birbirleriyle çarpıştıktan sonra şekil ve hızlarını koruyabilirler. KdV denklemin solitonların başlıca modelidir. Soliton ismi Zabusky ve Kruskal tarafından koyulmuştur. Solitonlar parçacık karakterlidir ve çarpışmada formlarını muhafaza ederler. Solitonun tam bir tanımını vermek kolay değildir. Fakat; Drazin [18] solitonu, lineer olmayan bir denklemin aşağıdaki özelliklerine sahip çözümü olarak tarif etmiştir.

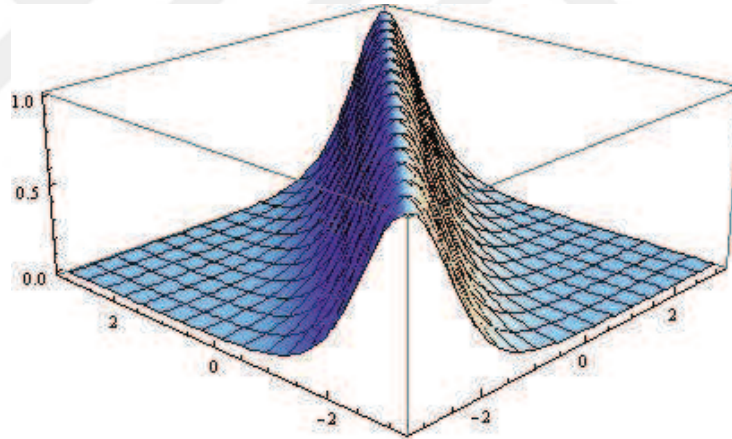
1. Kalıcı formlu soliter bir dalgadır.
2. Sonsuzda sönümlü olması ya da bir sabite yaklaşabilecek şekilde sınırlandırılabilir.
3. Diğer solitonlarla etkileşime geçebilir ve şeklini koruyabilir.
4. Lineer olmayan terimler ve dispersive terimler arasındaki hassas bir denge tarafından oluşturulurlar.

Fiziksel literatürde soliton ve soliter dalga arasındaki fark kesin değildir. Soliter dalgalar dispersive ve dissipative ortamlardaki dalga sürecini tanımlayan lineer olmayan oluşum (evolution) denklemlerinin soliton tipli çözümleri olarak tanımlanabilir. KdV denklemin haricindeki soliter dalga çözümleri $\sec h^2$ tipinde değilse $\sec h$ ya da $\arctan(e^{\alpha x})$ tipinde olabilir.

1.4. Dalga Tipleri

1.4.1. Soliter dalgalar ve solitonlar

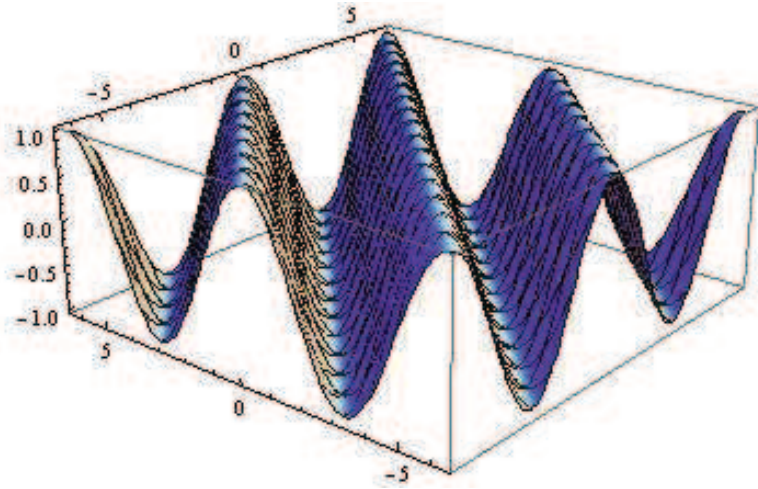
Soliter dalgalar sınırlandırılmış yani lokalize edilmiş hareketli dalga tipleridir. Yani, $\xi = x - ct$ için $\xi \rightarrow \mp\infty$ iken $u'(\xi), u''(\xi)$ ve $u'''(\xi) \rightarrow 0$ olur. Soliton dalga tiplerinin en önemli özelliği diğer soliton dalga tipleri ile etkileşime girdiklerinde özelliklerini korumalarıdır. Soliton dalga tipine güzel bir örnek olarak KdV denklemini verilebilir. Şekil 1.1.'deki gibi sonsuz kanat veya kuyruğa sahip olan eğrilerdir. Şekil 1.1.'de soliter dalga fonksiyonu gösterilmektedir. Görüldüğü gibi grafik sonsuz iki kanada sahiptir.



Şekil 1.1. $u(x,t) = \text{sech}^2(x,t)$, $-\pi \leq x, t \leq \pi$ soliton çözümünün grafiği

1.4.2. Periyodik dalgalar

$\cos(x-t)$ gibi periyodik olan hareketli dalga çeşitleridir. Standart dalga denklemini olan $u_{tt} = u_{xx}$ çözüldüğünde periyodik çözümler elde edilir. Bilindiği gibi bu denklem lineerdir ve bu denklemin bir d'Alambert çözümü mevcuttur. Şekil 1.2.'de $u(x,t) = \cos(x-t)$ fonksiyonu verilmiştir. Şekilden dalganın periyodik olduğu rahatlıkla görülebilir.



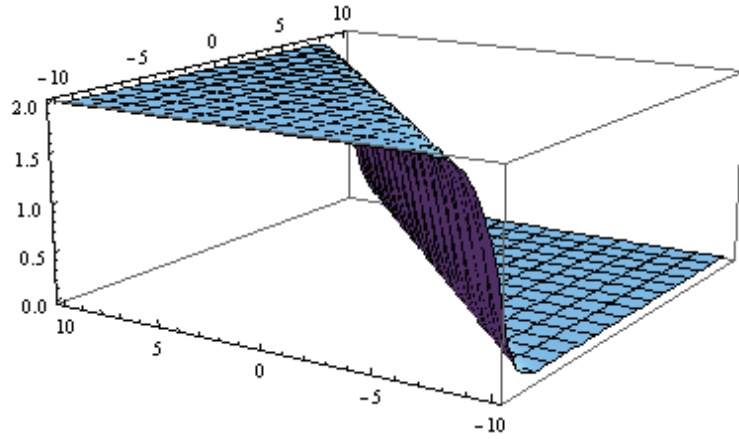
Şekil 1.2. $u(x, t) = \cos(x - t), -3\pi \leq x, t \leq 3\pi$ periyodik çözümü

1.4.3. Kink dalgalar

Bir asimptotik durumdan diğerine geçerken azalan veya artan hareketli dalga türlerine denir. Kink çözümler sonsuzda bir sabit değere yaklaşırlar.

$$u_t + uu_x - \nu u_{xx} = 0 \quad (1.11)$$

Burgers denklemi kink çözüm vermesi ile bilinen bir denklemdir. Denklemden bulunan ν viskozite katsayısıdır. Şekil 1.3.'te $\nu = \frac{1}{2}$ için Burger denkleminin çözümü olan $u(x, t) = 1 - \tanh(x - t), -10 \leq x, t \leq 10$ çözümü verilmektedir.



Şekil 1.3. $u(x,t) = 1 - \tanh(x-t)$, $-10 \leq x, t \leq 10$ kink çözümü

1.4.4. Peakon dalgalar

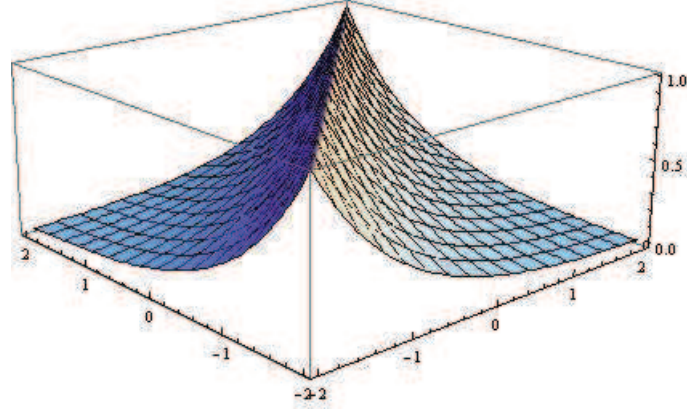
Peakon dalgalar tepeleri olan hareketli dalga tipleridir. Bu durumda, hareketli dalganın tepesi hariç diğer tüm noktaları düzgün (smooth) özellik gösterirler. Camassa-Holm ve Degasperis-Procesi denklemleri

$$u_t - u_{xxt} + (b+1)uu_x = bu_x u_{xx} u_{xxx} \quad (1.12)$$

$b=2$ ve $b=3$ için sırasıyla peakon soliter çözümler vermektedir. Camassa-Holm denklemini

$$u(x,t) = V e^{-|x-t|}$$

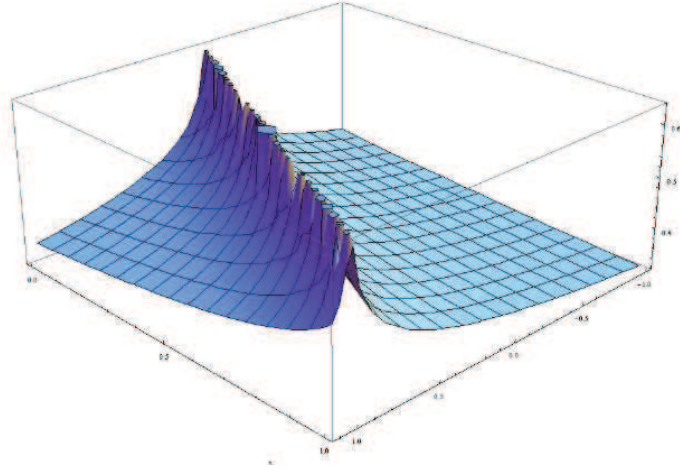
şeklinde bir çözüme sahiptir. Burada V dalga hızını göstermektedir. $V=1$ için elde edilen $u(x,t) = e^{-|x-t|}$, $-2 \leq x, t \leq 2$ çözümü Şekil 1.4.'de verilmektedir.



Şekil 1.4. $u(x,t) = e^{-|x-t|}$, $-2 \leq x, t \leq 2$ peakon çözümü

1.4.5. Cuspon dalgalar

Cuspon dalgalar soliton dalgaların başka bir formudur. Bu dalgaların tepe uçlarında zirveler (cusp) mevcuttur. Şekil 1.5.'de bir cuspon çözüm görülmektedir.

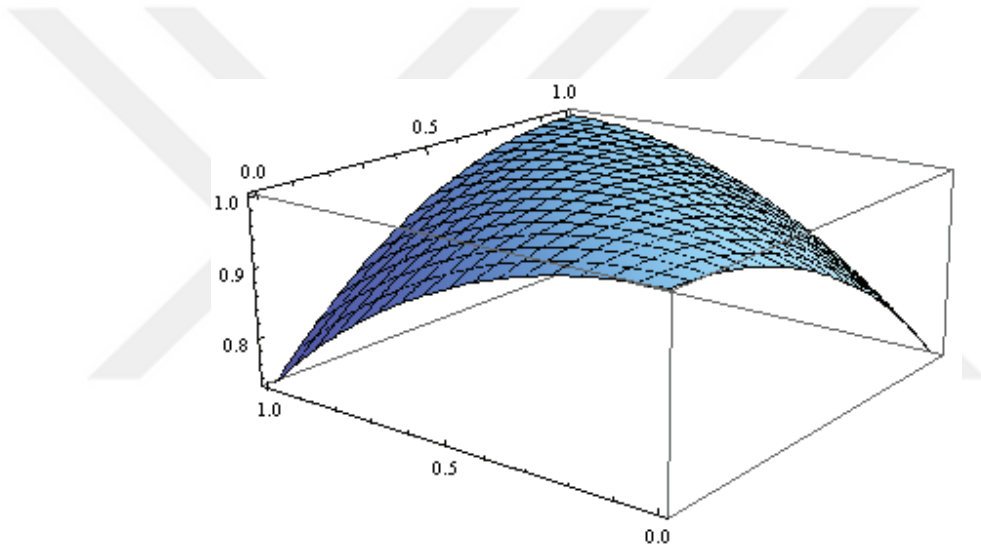


Şekil 1.5. $u(x,t) = e^{-|x-t|^{1/6}}$, $-2 \leq x, t \leq 2$ cuspon çözümü

1.4.6. Kompakton

Başka bir soliton dalga tipidir. Başka kompaktonlar ile çarpışmalarından sonra özelliklerini korurlar ve aynı fazlı (cohorent) şekil ile tekrar ortaya çıkarlar. Soliton çarpışmalara benzer esnek çarpışma özelliği gösterirler.

Şekil 1.6.'da $u(x,t) = \cos^2\left(\frac{1}{2}(x-t)\right), 0 \leq x, t \leq 1$ şeklinde bir kompakton dalga görülmektedir. Rahatlıkla görülebileceği gibi kompakton, üstel kanatları olmayan bir soliter dalgadır.



Şekil 1.6. $u(x,t) = \cos^2\left(\frac{1}{2}(x-t)\right), 0 \leq x, t \leq 1$ kompakton çözümü

1.5. Dispersiyon ve Dissipasyon

Aşağıdaki denklem ele alınırsa,

$$u_t + u_x = 0 \quad (1.13)$$

çözümü olarak

$$(1.14)$$

$$u(x, t) = f(x - t)$$

olur. Bu çözüm fonksiyonuna örnek olarak $\sin(x - t)$, $\cos(x - t)$, e^{x-t} ve daha bir çok fonksiyon verilebilir. Denklem lineer olduğu için süperpozisyon prensibi uygulanarak bu çözümlerin kombinasyonu da bir çözüm olarak alınabilir. (1.14)'deki dalgaların şekilleri dalga yayılırken değişmez.

Fakat dispersiyon terimi olarak adlandırılan üçüncü mertebeden uzaysal türevi ekleyerek (1.13) denklemini aşağıdaki gibi en basit dispersif denklem olarak elde ederiz.

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.15)$$

Dalga çözümünü k dalga sayısı ve w frekans olmak üzere $u(x, t) = e^{i(kx - wt)}$ olarak alalım. Bu çözümü (1.15)'de yerine koyarsak $w = k - k^3$ dispersion ilişkisini elde ederiz. Buradan dalganın yayılma hızı $c = \frac{w}{k} = 1 - k^2$ olur. Bu dispersif dalgalar c dalga hızının dalga sayısına bağlı olarak değiştiği dalga tipleridir. Dispersif etkiler genellikle frekansla dalga hızı arasında bir ilişki sunar.

Diğer taraftan dissipatif terim olarak adlandırılan uzaysal çift mertebeden türev kullanarak (1.13) denklemini aşağıdaki en basit dissipatif denklemi verir.

$$u_t + u_x - u_{xx} = 0 \quad (1.16)$$

Aynı şekilde dalga çözümünü k dalga sayısı ve w frekans olmak üzere $u(x, t) = e^{i(kx - wt)}$ olarak alıp (1.16)'da yerine koyarsak $w = k(1 - ik)$ çözüm $u(x, t) = e^{-k^2 t + ik(x - t)}$ şeklini alır ve bu çözüm dalganın birim hızda hareket ettiğini verir. Ayrıca dissipasyon diğer bir şekilde $u(x, t) = e^{-k^2 t + ik(x - t)}$ çözümünün üstel

sönümü $k \neq 0$ olmak üzere $t \rightarrow \infty$ giderken açıkça görülür. Zamanla enerjisini kaybettiği için genliğini de kaybeden dalgaya dissipatif dalga denir.

Şimdiye kadar lineer denklemlerden bahsettik. Eğer (1.15) ve (1.16)'deki u_x terimini lineer olmayan bir terim olan uu_x ile değiştirirsek sırasıyla aşağıdaki lineer olmayan denklemleri elde ederiz.

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.17)$$

$$u_t + uu_x - u_{xx} = 0 \quad (1.18)$$

Bu iki denkleme sırasıyla literatürde iyi bilinen KdV ve Burgers denklemleri denir. Burada tekrar vurgulamak gerekirse (1.17)'de uu_x 'in lineer olmama etkisi ile u_{xxx} 'in dispersif etkisi arasındaki hassas denge birbirleriyle tamamiyle etkileşim altına girdikten sonra hız ve şeklini koruyarak ayrılan solitonlar meydana getirir. Fakat (1.18)'deki Burgers denkleminde lineer olmayan terim ve dissipatif terim etkilerin kombinasyonu kinkle ortaya çıkarır. KdV denklemi eksponansiyel olarak sönümlü kanatlara sahip olan sech^2 analitik fonksiyonu ile karakterize edilen soliter dalga çözümlerine sahip iken, Burgers denklemini sonsuzda bir sabite yaklaşan $\tanh$ fonksiyonu ile karakterize edilen kink çözümlere sahiptir. Eğer KdV denkleminin iki solitonu çarpışırsa bu solitonların birbirleri içinden kolayca geçtikten sonra değişmeden çıktıkları görülür.

Lineer denklemlerde kullandığımız süperpozisyon prensibinin lineer olmayan dalga denkleminde uygulanamadığına dikkat edilmelidir.

BÖLÜM 2. BENJAMİN-BONA-MAHONY-BURGERS-TİPİ KİSMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN (G'/G)-AÇILIM YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMLERİ

2.1. Giriş

Lineer olmayan kısmi türevli denklemler fizik, matematik ve mühendislik problemlerinde sıkça karşımıza çıkmaktadır. Bu denklemlerin koşan (travelling) dalga çözümlerini bulmak için birçok farklı çözüm yöntemi kullanılmaktadır. Bu yöntemlerden bazıları ters saçılım yöntem [1,2], Hirota bilineer yöntem [3,4], Backlund dönüşüm [6], homojen denge yöntemi [7-10], Riccati denklemi yöntemi [11-13], üstel fonksiyon yöntemi [14], Darboux dönüşüm [19], tanh-fonksiyon yöntem [20,21], sin-cos yöntemi [22], (G'/G) -açılım yöntemi [23,24] ve modifiye edilmiş basit denklem [25-27] yöntemidir.

Bu bölümde öncelikle, bu yöntemler arasında son zamanlarda öne çıkan, ilk olarak Wang ve Zhang [23] tarafından ortaya atılmış ve daha sonra sıklıkla [24-49] lineer olmayan kısmi türevli denklemlerin çözümünü bulmak için kullanılmış (G'/G) -açılım yöntemi kullanılarak Benjamin-Bona-Mahony-Burgers-tipi denklemlerin koşan (travelling) dalga çözümleri bulunacaktır.

Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) denkleminin en sık kullanılan ve karşılaşılan şekli

$$u_t - u_{xxt} - \alpha u_{xx} + u_x + uu_x = 0 \quad (2.1)$$

olarak ifade edilir. Burada $u(x, t)$ bir akışkanın yatay x yönündeki hızı ve α pozitif bir sabittir. Bu denklemin genel hali olarak, α pozitif bir sabit, $\beta \in R$ ve $g(u) \in C^2$ olacak şekilde

$$u_t - u_{xxt} - \alpha u_{xx} + \beta u_x + (g(u))_x = 0 \quad (2.2)$$

verilen genelleştirilmiş Benjamin-Bona-Mahony-Burgers denklemdir. αu_{xx} dissipatif terimi genellikle su dalgalarının yayılımı sırasında karşımıza çıkmaktadır. (2.2)'de verilen bu denklem için Akçağıl ve Gözükızıl tanh-yöntem kullanarak

$g(u) = uu_x$, $g(u) = \frac{u^2}{2}$ ve $g(u) = \frac{u^3}{2}$ durumları için çözümler [50] elde etmişlerdir.

(G'/G) -açılım yöntemi ile Benjamin-Bona-Mahony-Burgers-tipindeki bazı denklemlerin çözümleri bulunduktan sonra ve bulunan çözümler Akçağıl ve Gözükızıl'ın tanh-yöntem ile bulduğu çözümlerle kıyaslanacaktır. Böylece iki yöntem arasındaki benzerlik daha somut bir şekilde gösterilmiş olacaktır.

2.2. (G'/G) -açılım Yöntemi

x , t bağımsız değişkenler ve $u(x, t)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere $u(x, t)$ 'nin en yüksek mertebeden türevini ve lineer olmayan terimler içeren, iki değişkenli lineer olmayan bir kısmi türevli denklem aşağıdaki gibi verilsin.

$$P(u, u_t, u_x, u_{xt}, u_{xx}, u_{tt}, \dots) = 0 \quad (2.3)$$

(G'/G) -açılım metodunu uygulamak için aşağıda verilen 6 adım kullanılır.

Adım 1. (2.3) denkleminin koşan (travelling) dalga çözümlerini bulmak için bağımsız x ve t değişkenleri tek bir değişken olan $\xi = x - ct$ dalga değişkeni adı

verilen değişken yardımıyla birleştirilir. Burada c dalğanın hızını göstermektedir. $u(x, t) = U(\xi)$ ve $\xi = x - ct$ olmak üzere (2.3) denkleminde kullanılarak (2.3)'deki lineer olmayan kısmi türevli denklem adi türevli denkleme aşağıdaki gibi dönüştürülür.

$$P(U, cU', U', cU'', c^2U'', U'', \dots) = 0 \quad (2.4)$$

Adım 2. Eğer gerekiyorsa (2.4) denkleminde integre edilip, işlemlerde kolaylık olması açısından integral sabiti sıfır olarak alınabilir.

Adım 3. $G = G(\xi)$ fonksiyonu ikinci mertebeden lineer

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0 \quad (2.5)$$

adi türevli denkleminin bir çözümü olmak üzere (2.4) denkleminin çözümleri lineer

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^M a_i \left(\frac{G'}{G} \right)^i \quad (2.6)$$

şeklinde verilen $\left(\frac{G'}{G} \right)$ 'nin bir polinomunu gerçeklesin. Burada λ, μ ve $0 \leq i \leq M$ olmak üzere a_i 'ler daha sonra belirlenecek olan sabitlerdir. M pozitif tamsayısı (2.4) denklemindeki en yüksek mertebeden türevli terimler ile lineer olmayan terimler arasında kurulacak ve bir sonraki adımda anlatılacak olan dengeleme prosedürü ile belirlenir.

(2.5) denkleminin çözümleri kullanılarak $\left(\frac{G'}{G} \right)$

$$\left(\frac{G'}{G}\right) = \begin{cases} -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \frac{\left(c_1 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi\right) + c_2 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi\right) \right)}{\left(c_1 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi\right) + c_2 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi\right) \right)}, & \lambda^2 - 4\mu > 0 \\ -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \frac{\left(-c_1 \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi\right) + c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi\right) \right)}{\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi\right) \right)}, & \lambda^2 - 4\mu < 0 \\ -\frac{\lambda}{2} + \left(\frac{c_2}{c_1 + c_2 \xi} \right), & \lambda^2 - 4\mu = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

şeklinde elde edilir.

Adım 4. M pozitif tamsayısı (2.4) denklemdeki en yüksek mertebeden türevli terimler ile lineer olmayan terimler arasında kurulacak dengeleme prosedürü ile aşağıdaki gibi belirlenir.

Eğer $u(\xi)$ derecesi $D[u(\xi)] = M$ olarak tanımlanırsa buna bağlı olarak (2.4) denklemdeki diğer oluşabilecek ifadelerin dereceleri

$$D\left[\frac{d^q u}{d\xi^q}\right] = M + q, \quad D[u^r] = Mr,$$

$$D\left[u^r \left(\frac{d^q u}{d\xi^q}\right)^s\right] = s(M + q) + Mr,$$

şeklinde hesaplanabilir. En yüksek mertebeden türevli terim ile lineer olmayan terim arasında kurulan bu derecelendirmeler eşitlenerek elde edilen basit denklemden M değerine ulaşılır.

Adım 5. (2.4) denklemini çözmek için, denklemde $u(\xi)$ yerine (2.6) ifadesi ve (2.5) denklemi yardımıyla $u(\xi)$ 'nin ξ 'ye bağlı türevleri bulunarak yerine konulur.

Yapılan bu işlemlerden sonra, elde edilen ifadede $\left(\frac{G'}{G}\right)$ 'nin aynı dereceden terimleri düzenlenerek oluşan bu katsayılardan elde edilen cebirsel denklemler sıfıra eşitlenip çözülerek, bu denklemlerden a_i, c, λ, μ değerleri bulunur.

Adım 6. Adım 5'de elde edilen a_i, c, λ, μ değerleri ve (2.5)'den elde edilen çözümler yardımıyla bulunan (2.7) çözümleri (2.6)'da yerine konarak (2.3) lineer olmayan kısmi türevli denkleminin çözümleri elde edilir.

2.3. Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) Denkleminin (G'/G) -açılım Yöntemi ile Çözümü

α pozitif bir sabit olmak üzere

$$u_t - u_{xxt} - \alpha u_{xx} + u_x + uu_x = 0 \quad (2.8)$$

Benjamin-Bona-Mahony-Burgers denklemi yukarıdaki gibidir. $\xi = x - ct$ dalga değişkeni kullanılarak bu denklem aşağıdaki adi türevli denkleme dönüştürülür.

$$(1-c)U + cU'' - \alpha U' + \frac{U^2}{2} = 0 \quad (2.9)$$

Diğer bölümlerde tekrar üzerinde durmadan geçebilmek için bu dönüşümü biraz daha açmak gerekirse

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -c \frac{\partial U}{\partial \xi} = -cU',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = c^2 U'',$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} = U',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = U'',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial t} = -c \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = -cU'',$$

şeklinde zincir kuralı uygulanılarak (2.8)'deki her bir terimin dönüşümü yapılır.

Dengeleme sabitini bulmak için en yüksek mertebeden türevli terim U'' ile lineer olmayan terim $\frac{U^2}{2}$ arasında, adım 4'de belirtildiği gibi kurulan derecelendirmeler aşağıdaki gibi eşitlenirse

$$M+2=2M$$

denkleminde $M=2$ bulunur. Bu değere adım 4'deki bu pratik işlem tercih edilmezse aşağıdaki gibi de varılabilir.

$G'' + \lambda G' + \mu G = 0$ denkleminin her iki tarafını $G \neq 0$ olmak üzere G ile bölünürse üzere

$$\frac{G''}{G} = -\lambda \frac{G'}{G} - \mu \quad (2.10)$$

elde edilir. (2.10) hem $\left(\frac{G'}{G}\right)$ 'nin türevinde hem de Maple komutlarında sıklıkla kullanılacaktır. Öncelikle

$$\left(\frac{G'}{G}\right)' = -\left(\frac{G'}{G}\right)^2 - \lambda \frac{G'}{G} - \mu \quad (2.11)$$

olacaktır. (2.6)'yı açık yazarak (2.9)'da kullanılacak olan U 'nun birinci, ikinci türevleri ve karesi aşağıdaki gibidir.

$$U = a_0 + a_1 \frac{G'}{G} + a_2 \left(\frac{G'}{G}\right)^2 + \dots + a_M \left(\frac{G'}{G}\right)^M \quad (2.12)$$

$$U' = -\left(a_1 + 2a_2 \frac{G'}{G} + \dots + Ma_M \left(\frac{G'}{G}\right)^{M-1}\right) \left(\left(\frac{G'}{G}\right)^2 + \lambda \frac{G'}{G} + \mu\right) \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} U'' = & \left(a_1 + 2a_2 \frac{G'}{G} + \dots + Ma_M \left(\frac{G'}{G}\right)^{M-1}\right) \left(2\left(\frac{G'}{G}\right) + \lambda\right) \left(\left(\frac{G'}{G}\right)^2 + \lambda \frac{G'}{G} + \mu\right) \\ & + \left(2a_2 + \dots + M(M-1)a_M \left(\frac{G'}{G}\right)^{M-2}\right) \left(\left(\frac{G'}{G}\right)^2 + \lambda \frac{G'}{G} + \mu\right)^2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$U^2 = a_0^2 + \dots + a_M^2 \left(\frac{G'}{G}\right)^{2M} \quad (2.15)$$

(2.12)'den (2.15)'e kadar olan ifadeler (2.9)'da yerine konulursa

$$\begin{aligned}
& (1-c) \left(a_0 + \dots + a_M \left(\frac{G'}{G} \right)^M \right) \\
& + c \left(\left(a_1 + 2a_2 \frac{G'}{G} + \dots + Ma_M \left(\frac{G'}{G} \right)^{M-1} \right) \left(2 \left(\frac{G'}{G} \right) + \lambda \right) \left(\left(\frac{G'}{G} \right)^2 + \lambda \frac{G'}{G} + \mu \right) \right. \\
& \quad \left. + \left(2a_2 + \dots + M(M-1)a_M \left(\frac{G'}{G} \right)^{M-2} \right) \left(\left(\frac{G'}{G} \right)^2 + \lambda \frac{G'}{G} + \mu \right)^2 \right) \\
& + \alpha \left(\left(a_1 + 2a_2 \frac{G'}{G} + \dots + Ma_M \left(\frac{G'}{G} \right)^{M-1} \right) \left(\left(\frac{G'}{G} \right)^2 + \lambda \frac{G'}{G} + \mu \right) \right) + \frac{\left(a_0^2 + \dots + a_M^2 \left(\frac{G'}{G} \right)^{2M} \right)}{2} = 0
\end{aligned} \tag{2.16}$$

elde edilen bu ifade de terimler düzenlendiğinde $2M$ ve $M+2$ kuvvetlerinin eşitliğinden $M=2$ sonucuna ulaşılmış olur.

Dengeleme sabiti bulunduktan sonra tekrar (2.12)-(2.15) arasında elde edilen ifadelerde kullanılarak veya doğrudan (2.16)'da yerine konularak $\left(\frac{G'}{G} \right)$ 'nin kuvvetlerinin oluşturduğu bir cebirsel denklem sistemine ulaşılır. Bu denklem sistemi bu çalışma için Maple 12 kullanılarak çözülmüştür. Fakat istenirse diğer matematik programları da kullanılarak bu hesaplamalar yapılabilir. Maple 12 kullanılarak yapılan hesaplamalar sonucunda aşağıdaki çözüm gruplarına ulaşılır.

$$\begin{aligned}
\textbf{Grup 1.} \quad c &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{25+24\alpha^2}}{10}, \quad \lambda = \mp \sqrt{4\mu + \frac{c-1}{6c}}, \quad a_2 = -12c, \quad a_1 = -12c\lambda - \frac{12\alpha}{5}, \\
a_0 &= -12c\mu + c - 1 - \frac{6\alpha\lambda}{5};
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
\textbf{Grup 2.} \quad c &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{25+24\alpha^2}}{10}, \quad \lambda = \mp \sqrt{4\mu + \frac{c-1}{6c}}, \quad a_2 = -12c, \quad a_1 = -12c\lambda - \frac{12\alpha}{5}, \\
a_0 &= -12c\mu + c - 1 - \frac{6\alpha\lambda}{5};
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Grup 3. $c = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{25-24\alpha^2}}{10}$, $\lambda = \mp \sqrt{4\mu + \frac{1-c}{6c}}$, $a_2 = -12c$, $a_1 = -12c\lambda - \frac{12\alpha}{5}$,
 $a_0 = -12c\mu + c - 1 - \frac{6\alpha\lambda}{5}$; (2.19)

Grup 4. $c = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{25-24\alpha^2}}{10}$, $\lambda = \mp \sqrt{4\mu + \frac{1-c}{6c}}$, $a_2 = -12c$, $a_1 = -12c\lambda - \frac{12\alpha}{5}$,
 $a_0 = -12c\mu + c - 1 - \frac{6\alpha\lambda}{5}$; (2.20)

Grup 5. $c = 0$, $\lambda = \mp \sqrt{4\mu + \frac{1}{\alpha^2}}$, $a_2 = 0$, $a_1 = -2\alpha$, $a_0 = -1 - \alpha\lambda$; (2.21)

Yukarıdaki çözüm grupları sırasıyla (2.6)'da yerine konulursa $\lambda^2 - 4\mu > 0$ olduğunda sırasıyla

$$\xi = x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{25+24\alpha^2}}{10} \right) t \text{ ve } c = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{25+24\alpha^2}}{10} \text{ iken}$$

$$u_1(x, t) = \frac{3(c-1)}{2} - \frac{6\alpha}{5} \sqrt{\frac{c-1}{6c}} \left(\frac{c_1 \sinh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{c-1}{6c}} \xi\right) + c_2 \cosh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{c-1}{6c}} \xi\right)}{c_1 \cosh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{c-1}{6c}} \xi\right) + c_2 \sinh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{c-1}{6c}} \xi\right)} \right) - \frac{c-1}{2} \left(\frac{c_1 \sinh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{c-1}{6c}} \xi\right) + c_2 \cosh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{c-1}{6c}} \xi\right)}{c_1 \cosh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{c-1}{6c}} \xi\right) + c_2 \sinh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{c-1}{6c}} \xi\right)} \right)^2, \quad (2.22)$$

$$\xi = x - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{25+24\alpha^2}}{10} \right) t \text{ ve } c = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{25+24\alpha^2}}{10} \text{ iken}$$

$$\begin{aligned}
u_2(x,t) = & \frac{3(c-1)}{2} - \frac{6\alpha}{5} \sqrt{\frac{c-1}{6c}} \left(\frac{c_1 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-1}{6c}}\xi\right) + c_2 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-1}{6c}}\xi\right)}{c_1 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-1}{6c}}\xi\right) + c_2 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-1}{6c}}\xi\right)} \right) \\
& - \frac{c-1}{2} \left(\frac{c_1 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-1}{6c}}\xi\right) + c_2 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-1}{6c}}\xi\right)}{c_1 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-1}{6c}}\xi\right) + c_2 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-1}{6c}}\xi\right)} \right)^2,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\xi = x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{25-24\alpha^2}}{10} \right) t \text{ ve } c = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{25-24\alpha^2}}{10} \text{ iken}$$

$$\begin{aligned}
u_3(x,t) = & \frac{c-1}{2} - \frac{6\alpha}{5} \sqrt{\frac{1-c}{6c}} \left(\frac{c_1 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-c}{6c}}\xi\right) + c_2 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-c}{6c}}\xi\right)}{c_1 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-c}{6c}}\xi\right) + c_2 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-c}{6c}}\xi\right)} \right) \\
& + \frac{c-1}{2} \left(\frac{c_1 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-c}{6c}}\xi\right) + c_2 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-c}{6c}}\xi\right)}{c_1 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-c}{6c}}\xi\right) + c_2 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-c}{6c}}\xi\right)} \right)^2,
\end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\xi = x - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{25-24\alpha^2}}{10} \right) t \text{ ve } c = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{25-24\alpha^2}}{10} \text{ iken}$$

$$\begin{aligned}
u_4(x, t) = & \frac{c-1}{2} - \frac{6\alpha}{5} \sqrt{\frac{1-c}{6c}} \left(\frac{c_1 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-c}{6c}}\xi\right) + c_2 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-c}{6c}}\xi\right)}{c_1 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-c}{6c}}\xi\right) + c_2 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-c}{6c}}\xi\right)} \right) \\
& + \frac{c-1}{2} \left(\frac{c_1 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-c}{6c}}\xi\right) + c_2 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-c}{6c}}\xi\right)}{c_1 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-c}{6c}}\xi\right) + c_2 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-c}{6c}}\xi\right)} \right)^2, \quad (2.25)
\end{aligned}$$

ve

$$u_5(x, t) = -1 - \left(\frac{c_1 \sinh\left(\frac{x}{2\alpha}\right) + c_2 \cosh\left(\frac{x}{2\alpha}\right)}{c_1 \cosh\left(\frac{x}{2\alpha}\right) + c_2 \sinh\left(\frac{x}{2\alpha}\right)} \right), \quad (2.26)$$

hiperbolik dalga çözümleri elde edilir. Eğer $c_1 \neq 0$, $c_2^2 < c_1^2$ olmak üzere

$$\xi_0 = \tanh^{-1}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)$$

olacak şekilde aşağıda verilen hiperbolik fonksiyon özdeşliği göz önüne alınarak

$$\tanh(\xi + \xi_0) = \frac{\sinh \xi \cosh \xi_0 + \sinh \xi_0 \cosh \xi}{\cosh \xi \cosh \xi_0 + \sinh \xi_0 \sinh \xi} = \frac{c_1 \sinh \xi + c_2 \cosh \xi}{c_1 \cosh \xi + c_2 \sinh \xi},$$

(2.22)-(2.26) çözümlerinde yerine konulursa sırasıyla

$$\xi = x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{25+24\alpha^2}}{10} \right) t \quad \text{ve} \quad c = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{25+24\alpha^2}}{10} \quad \text{iken}$$

$$u_1(x, t) = c - 1 - \frac{6\alpha}{5} \sqrt{\frac{c-1}{6c}} \tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-1}{6c}}\xi + \xi_0\right) + \frac{c-1}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-1}{6c}}\xi + \xi\right) \quad (2.27)$$

$$\xi = x - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{25+24\alpha^2}}{10} \right) t \text{ ve } c = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{25+24\alpha^2}}{10} \text{ iken}$$

$$u_2(x, t) = c - 1 - \frac{6\alpha}{5} \sqrt{\frac{c-1}{6c}} \tanh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{c-1}{6c}} \xi + \xi_0\right) + \frac{c-1}{2} \sec^2 h^2\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{c-1}{6c}} \xi + \xi_0\right), \quad (2.28)$$

$$\xi = x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{25-24\alpha^2}}{10} \right) t \text{ ve } c = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{25-24\alpha^2}}{10} \text{ iken}$$

$$u_3(x, t) = c - 1 - \frac{6\alpha}{5} \sqrt{\frac{1-c}{6c}} \tanh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-c}{6c}} \xi + \xi_0\right) - \frac{c-1}{2} \sec^2 h^2\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-c}{6c}} \xi + \xi_0\right), \quad (2.29)$$

$$\xi = x - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{25-24\alpha^2}}{10} \right) t \text{ ve } c = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{25-24\alpha^2}}{10} \text{ iken}$$

$$u_4(x, t) = c - 1 - \frac{6\alpha}{5} \sqrt{\frac{1-c}{6c}} \tanh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-c}{6c}} \xi + \xi_0\right) - \frac{c-1}{2} \sec^2 h^2\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-c}{6c}} \xi + \xi_0\right), \quad (2.30)$$

$$u_5(x, t) = -1 - \tanh\left(\frac{x}{2\alpha} + \xi_0\right), \quad (2.31)$$

çözümlerine ulaşılır. α pozitif bir sabit olduğu için bulunan çözüm grupları incelenirse $\lambda^2 - 4\mu$ 'nün değerinin her zaman sıfırdan büyük olduğu sonucuna ulaşılır. Böylece (2.8)'deki Benjamin-Bona-Mahony-Burgers denklemi için trigonometrik ve rasyonel çözümlerinin olmadığı sonucuna ulaşılır. Burada çözüm için kullanılan Maple kodları aşağıdaki gibidir.

> u:=x+y*g+z*g^2;

> du:=(y+2*z*g)*(g^2+l*g+m);

$$> \text{ddu}:=2*z*(g^2+l*g+m)^2+(y+2*z*g)*(2*g+l)*(g^2+l*g+m);$$

$$> \text{collect}(\text{expand}(2*(1-c)*u+2*c*\text{ddu}-2*a*du+u^2=0),g);$$

$$\begin{aligned} > \text{dsolve}(\{z=-12*c, 20*c*z*l+4*a*z+4*c*y+2*y*z=0, \\ &6*c*y*l+2*x*z+4*a*z*l+8*c*z*l^2-2*c*z+16*c*z*m+2*z+2*a*y+y^2=0, \\ &2*y+12*c*z*l*m+2*x*y+2*a*y*l+4*c*y*m+4*a*z*m-2*c*y+2*c*y*l^2=0, \\ &2*x-2*c*x+2*a*y*m+4*c*z*m^2+2*c*y*l*m+x^2=0\},[x,y,z,l,c]); \end{aligned}$$

Diğer taraftan Akçağıl ve Gözükızıl [50] makalelerinde aynı denklem ile ilgili aşağıdaki çözüm gruplarını elde etmişlerdir.

$$V = \frac{\alpha}{10\mu} \text{ ve } \mu = \frac{-5 + \sqrt{25 + 24\alpha^2}}{24\alpha} \text{ iken}$$

$$u_1(x, t) = \frac{3\alpha - 30\mu}{20\mu} - \frac{12\alpha\mu}{5} \tanh \mu(x - Vt) - \frac{6\alpha\mu}{5} \tanh^2 \mu(x - Vt), \quad (2.32)$$

$$V = \frac{\alpha}{10\mu} \text{ ve } \mu = \frac{5 + \sqrt{25 - 24\alpha^2}}{24\alpha} \text{ iken}$$

$$u_2(x, t) = \frac{\alpha - 10\mu}{20\mu} - \frac{12\alpha\mu}{5} \tanh \mu(x - Vt) - \frac{6\alpha\mu}{5} \tanh^2 \mu(x - Vt), \quad (2.33)$$

$$V = \frac{\alpha}{20\mu} \text{ ve } \mu = \frac{-5 + \sqrt{25 + 24\alpha^2}}{48\alpha} \text{ iken}$$

$$\begin{aligned} u_3(x, t) = & \frac{\alpha - 20\mu}{16\mu} - \frac{12\alpha\mu}{5} \tanh \mu(x - Vt) - \frac{3\alpha\mu}{5} \tanh^2 \mu(x - Vt) \\ & - \frac{12\alpha\mu}{5} \coth \mu(x - Vt) - \frac{3\alpha\mu}{5} \coth^2 \mu(x - Vt), \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$V = \frac{\alpha}{20\mu} \text{ ve } \mu = \frac{5 + \sqrt{25 - 24\alpha^2}}{48\alpha} \text{ iken}$$

$$\begin{aligned} u_4(x, t) = & \frac{3\alpha - 60\mu}{80\mu} - \frac{12\alpha\mu}{5} \tanh \mu(x - Vt) - \frac{3\alpha\mu}{5} \tanh^2 \mu(x - Vt) \\ & - \frac{12\alpha\mu}{5} \coth \mu(x - Vt) - \frac{3\alpha\mu}{5} \coth^2 \mu(x - Vt), \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$V = \frac{\alpha}{10\mu} \text{ ve } \mu = \frac{-5 + \sqrt{25 + 24\alpha^2}}{24\alpha} \text{ iken}$$

$$\begin{aligned} u_5(x, t) = & \frac{3\alpha - 30\mu}{20\mu} - \frac{12\alpha\mu}{5} \tanh \mu(x - Vt) - \frac{3\alpha\mu}{5} \tanh^2 \mu(x - Vt) \\ & - \frac{12\alpha\mu}{5} \coth \mu(x - Vt) - \frac{6\alpha\mu}{5} \coth^2 \mu(x - Vt), \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$V = \frac{\alpha}{10\mu} \text{ ve } \mu = \frac{5 + \sqrt{25 - 24\alpha^2}}{24\alpha} \text{ iken}$$

$$u_6(x, t) = \frac{\alpha - 10\mu}{20\mu} - \frac{12\alpha\mu}{5} \coth \mu(x - Vt) - \frac{6\alpha\mu}{5} \coth^2 \mu(x - Vt), \quad (2.37)$$

$$V = \frac{\alpha}{10\mu} \text{ ve } \mu = \frac{5 - \sqrt{25 - 24\alpha^2}}{24\alpha} \text{ iken}$$

$$u_7(x, t) = \frac{\alpha - 10\mu}{20\mu} - \frac{12\alpha\mu}{5} \coth \mu(x - Vt) - \frac{6\alpha\mu}{5} \coth^2 \mu(x - Vt), \quad (2.38)$$

$$V = \frac{\alpha}{20\mu} \text{ ve } \mu = \frac{5 - \sqrt{25 - 24\alpha^2}}{48\alpha} \text{ iken}$$

$$u_8(x, t) = \frac{3\alpha - 60\mu}{80\mu} - \frac{12\alpha\mu}{5} \tanh \mu(x - Vt) - \frac{3\alpha\mu}{5} \tanh^2 \mu(x - Vt) - \frac{12\alpha\mu}{5} \coth \mu(x - Vt) - \frac{3\alpha\mu}{5} \coth^2 \mu(x - Vt), \quad (2.39)$$

$$V = \frac{\alpha}{10\mu} \text{ ve } \mu = \frac{5 - \sqrt{25 - 24\alpha^2}}{24\alpha} \text{ iken}$$

$$u_9(x, t) = \frac{\alpha - 10\mu}{20\mu} - \frac{12\alpha\mu}{5} \tanh \mu(x - Vt) - \frac{6\alpha\mu}{5} \tanh^2 \mu(x - Vt), \quad (2.40)$$

(2.22)-(2.25) çözümlerinde c değeri yerine konur ve $c_2 = 0$ alınırsa [50]'deki tanh-fonksiyon çözümlerine, $c_1 = 0$ alınırsa coth-fonksiyon çözümlerine ulaşılır. Örneğin, (2.32)'deki çözüme (2.22)'de $c_2 = 0$ alınarak ulaşılabilir. Fakat (G'/G) -açılım yöntemini kullanarak örneğin (2.34)'deki gibi her iki fonksiyonun kombinasyonu olan çözümler ulaşılamaz.

Somut olarak bu örnekten de görülebileceği gibi (G'/G) -açılım yöntemi ayrı ayrı tanh ve coth hiperbolik fonksiyonlarına ait olan çözüm kümelerini vermesine rağmen ikisinin kombinasyonu olan çözümleri vermekte başarısız olmaktadır. Her ne kadar bu denklemin trigonometrik fonksiyon içeren çözümleri olmasa da aynı durum trigonometrik fonksiyon içeren çözümler için de geçerlidir.

Ayrıca bilgisayar çözümlerini yapmaya çalışırken tanh-yöntem ile kıyaslanırsa, çözüme götüren değerleri elde etmek bilgisayarı oldukça zorlamaktadır. Bu durumun yaratacağı zorluk ise, daha karmaşık ve zor lineer olmayan kısmi türevli denklemlerin çözümlerini ararken güçlü olmayan bir bilgisayar ile çalışılıyorsa, bilgisayara girilen verilerden sonuçlara ulaşılamayabilir.

2.4. Genelleştirilmiş Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) Denkleminin (G'/G)-açılım Yöntemi ile Çözümü

$$u_t - u_{xxt} - \alpha u_{xx} + \beta u_x + (g(u))_x = 0 \quad (2.41)$$

Benjamin-Bona-Mahony-Burgers denkleminin çözümü $g(u) = uu_x$ ve $g(u) = \frac{u^2}{2}$ durumları için incelenecektir.

Durum 1. $g(u) = uu_x$ olarak (2.40) denkleminde yerine koyup $\xi = x - ct$ dalga değişkeni kullanılarak denklem, aşağıdaki adi türevli denkleme dönüştürülür.

$$(\beta - c)U + cU'' - \alpha U' + UU' = 0 \quad (2.42)$$

UU' ile kullanılarak U''

$$2M + 1 = M + 2,$$

Denklemden $M=1$ olmak üzere dengeleme sabiti bulunur. O halde denklemin çözümleri

$$U = a_0 + a_1 \left(\frac{G'}{G} \right), \quad (2.43)$$

kullanılarak sırasıyla takip edilmesi gereken basamaklar uygulanırsa a_0, a_1, c 'nin değerleri için sadece aşağıdaki değerler elde edilir.

$$a_0 = \beta\lambda + \alpha, a_1 = 2\beta, c = \beta. \quad (2.44)$$

(2.44)'de bulunan bu çözüm grubu (2.43)'de yerine yazıldıktan sonra, (2.7)'deki durumlar sırasıyla gözönüne alınarak aşağıdaki çözümlere ulaşılır.

$\lambda^2 - 4\mu > 0$ olduğunda

$$u_1(x, t) = \alpha + \beta \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \frac{\left(c_1 \sinh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} (x - \beta t) \right) + c_2 \cosh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} (x - \beta t) \right) \right)}{\left(c_1 \cosh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} (x - \beta t) \right) + c_2 \sinh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} (x - \beta t) \right) \right)}, \quad (2.45)$$

$\lambda^2 - 4\mu < 0$ olduğunda

$$u_2(x, t) = \alpha + \beta \sqrt{4\mu - \lambda^2} \frac{\left(-c_1 \sin \left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} (x - \beta t) \right) + c_2 \cos \left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} (x - \beta t) \right) \right)}{\left(c_1 \cos \left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} (x - \beta t) \right) + c_2 \sin \left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} (x - \beta t) \right) \right)}, \quad (2.46)$$

son olarak $\lambda^2 - 4\mu = 0$ olduğunda

$$u_3(x, t) = \alpha + 2\beta \left(\frac{c_2}{c_1 + c_2(x - \beta t)} \right) \quad (2.47)$$

çözümleri elde edilir. Akçağıl ve Gözükızıl [50]'in makalesinde ise elde edilen çözümler

$$u_1(x, t) = \alpha + 2\beta k \tanh k(x - \beta t), \quad (2.48)$$

$$u_2(x, t) = \alpha + 2\beta k \coth k(x - \beta t), \quad (2.49)$$

$$u_3(x, t) = \alpha + 2\beta k \tanh k(x - \beta t) + 2\beta k \coth k(x - \beta t), \quad (2.50)$$

şeklindedir. Açıkça gözükmemektedir ki $\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} = 2k$ alınarak sırasıyla $c_2 = 0$ ve $c_1 = 0$ değerleri (2.45)'de yerine konarak (2.48) ve (2.49) çözümleri elde edilmektedir. Fakat (2.50) çözümü (G'/G) -açılım yöntemi ile elde edilememektedir.

Diğer taraftan (G'/G) -açılım yöntemi trigonometrik ve rasyonel fonksiyonları içeren çözümleri vermede avantajlı olduğu gözükse bile aslında tanh-yöntemde yapılan bir takım basit değişikliklerle bu çözümlerinde elde edilebileceği ilerideki bölümlerde görülecektir.

Burada çözüm için kullanılan Maple kodları aşağıdaki gibidir.

```
> u:=x+y*g;

> du:=collect(expand(-y*(g^2+l*g+m)),g);

> ddu:=collect(expand((2*y*g+y*l)*(g^2+l*g+m)),g);

> collect(expand(-c*u+c*ddu-a*du+b*u+u*du=0),g);

> dsolve({2*c*y-y^2=0,3*c*y*l+a*y-x*y-y^2*l=0,
b*y+2*c*y*m+a*y*l+c*y*l^2-c*y-x*y*l-y^2*m=0,
-c*x-x*y*m+c*y*l*m+a*y*m+b*x=0},{x,y,c,l});
```

Durum 2. $g(u) = \frac{u^2}{2}$ olarak (2.40) denkleminde yerine koyup $\xi = x - ct$ dalga değişkeni kullanılarak denklem aşağıdaki adi türevli denkleme dönüştürülür.

$$(c - \beta)U - cU'' + \alpha U' + \frac{U^2}{2} = 0 \quad (2.51)$$

$\frac{U^2}{2}$ ile kullanılarak U''

$$2M = M + 2,$$

Denklemden $M=2$ olmak üzere dengeleme sabiti bulunur. O halde denklemin çözümleri

$$U = a_0 + a_1 \left(\frac{G'}{G} \right) + a_2 \left(\frac{G'}{G} \right)^2, \quad (2.52)$$

ifadesi kullanılarak sırasıyla takip edilmesi gereken basamaklar uygulanırsa a_0, a_1, a_2, c için sadece aşağıdaki değerler elde edilir.

$$\begin{aligned} \text{Grup 1. } c &= \frac{\beta}{2} + \frac{\sqrt{25\beta^2 + 24\alpha^2}}{10}, \quad \lambda = \mp \sqrt{4\mu + \frac{c-\beta}{6c}}, \quad a_2 = -12c, \quad a_1 = -12c\lambda - \frac{12\alpha}{5}, \\ a_0 &= -12c\mu + c - \beta - \frac{6\alpha\lambda}{5}; \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} \text{Grup 2. } c &= \frac{\beta}{2} - \frac{\sqrt{25\beta^2 + 24\alpha^2}}{10}, \quad \lambda = \mp \sqrt{4\mu + \frac{c-\beta}{6c}}, \quad a_2 = -12c, \quad a_1 = -12c\lambda - \frac{12\alpha}{5}, \\ a_0 &= -12c\mu + c - \beta - \frac{6\alpha\lambda}{5}; \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \text{Grup 3. } c &= \frac{\beta}{2} + \frac{\sqrt{25\beta^2 - 24\alpha^2}}{10}, \quad \lambda = \mp \sqrt{4\mu + \frac{\beta-c}{6c}}, \quad a_2 = -12c, \quad a_1 = -12c\lambda - \frac{12\alpha}{5}, \\ a_0 &= -12c\mu + c - \beta - \frac{6\alpha\lambda}{5}; \end{aligned} \quad (2.55)$$

Grup 4. $c = \frac{\beta}{2} - \frac{\sqrt{25\beta^2 - 24\alpha^2}}{10}$, $\lambda = \mp \sqrt{4\mu + \frac{\beta - c}{6c}}$, $a_2 = -12c$, $a_1 = -12c\lambda - \frac{12\alpha}{5}$,
 $a_0 = -12c\mu + c - \beta - \frac{6\alpha\lambda}{5}$; (2.56)

Grup 5. $c = 0$, $\lambda = \mp \sqrt{4\mu + \frac{\beta^2}{\alpha^2}}$, $a_2 = 0$, $a_1 = -2\alpha$, $a_0 = -\beta - \alpha\lambda$; (2.57)

Yukarıdaki çözüm grupları sırasıyla (2.52)'de yerine konulursa $\lambda^2 - 4\mu > 0$ olduğunda sırasıyla

$$\xi = x - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\sqrt{25\beta^2 + 24\alpha^2}}{10} \right) t \text{ ve } c = \frac{\beta}{2} + \frac{\sqrt{25\beta^2 + 24\alpha^2}}{10} \text{ iken}$$

$$u_1(x, t) = \frac{3(c - \beta)}{2} - \frac{6\alpha}{5} \sqrt{\frac{c - \beta}{6c}} \left(\frac{c_1 \sinh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{c - \beta}{6c}} \xi\right) + c_2 \cosh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{c - \beta}{6c}} \xi\right)}{c_1 \cosh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{c - \beta}{6c}} \xi\right) + c_2 \sinh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{c - \beta}{6c}} \xi\right)} \right)$$

$$- \frac{c - \beta}{2} \left(\frac{c_1 \sinh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{c - \beta}{6c}} \xi\right) + c_2 \cosh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{c - \beta}{6c}} \xi\right)}{c_1 \cosh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{c - \beta}{6c}} \xi\right) + c_2 \sinh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{c - \beta}{6c}} \xi\right)} \right)^2, \quad (2.58)$$

$$\xi = x - \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\sqrt{25\beta^2 + 24\alpha^2}}{10} \right) t \text{ ve } c = \frac{\beta}{2} - \frac{\sqrt{25\beta^2 + 24\alpha^2}}{10} \text{ iken}$$

$$\begin{aligned}
u_2(x, t) = & \frac{3(c-\beta)}{2} - \frac{6\alpha}{5} \sqrt{\frac{c-\beta}{6c}} \left(\frac{c_1 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-\beta}{6c}}\xi\right) + c_2 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-\beta}{6c}}\xi\right)}{c_1 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-\beta}{6c}}\xi\right) + c_2 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-\beta}{6c}}\xi\right)} \right) \\
& - \frac{c-\beta}{2} \left(\frac{c_1 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-\beta}{6c}}\xi\right) + c_2 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-\beta}{6c}}\xi\right)}{c_1 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-\beta}{6c}}\xi\right) + c_2 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-\beta}{6c}}\xi\right)} \right)^2, \tag{2.59}
\end{aligned}$$

$$\xi = x - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\sqrt{25\beta^2 - 24\alpha^2}}{10} \right) t \text{ ve } c = \frac{\beta}{2} + \frac{\sqrt{25\beta^2 - 24\alpha^2}}{10} \text{ iken}$$

$$\begin{aligned}
u_3(x, t) = & \frac{c-\beta}{2} - \frac{6\alpha}{5} \sqrt{\frac{\beta-c}{6c}} \left(\frac{c_1 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta-c}{6c}}\xi\right) + c_2 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta-c}{6c}}\xi\right)}{c_1 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta-c}{6c}}\xi\right) + c_2 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta-c}{6c}}\xi\right)} \right) \\
& + \frac{c-\beta}{2} \left(\frac{c_1 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta-c}{6c}}\xi\right) + c_2 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta-c}{6c}}\xi\right)}{c_1 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta-c}{6c}}\xi\right) + c_2 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta-c}{6c}}\xi\right)} \right)^2, \tag{2.60}
\end{aligned}$$

$$\xi = x - \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\sqrt{25\beta^2 - 24\alpha^2}}{10} \right) t \text{ ve } c = \frac{\beta}{2} - \frac{\sqrt{25\beta^2 - 24\alpha^2}}{10} \text{ iken}$$

$$u_4(x,t) = \frac{c-\beta}{2} - \frac{6\alpha}{5} \sqrt{\frac{\beta-c}{6c}} \left(\frac{c_1 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta-c}{6c}}\xi\right) + c_2 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta-c}{6c}}\xi\right)}{c_1 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta-c}{6c}}\xi\right) + c_2 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta-c}{6c}}\xi\right)} \right) + \frac{c-\beta}{2} \left(\frac{c_1 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta-c}{6c}}\xi\right) + c_2 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta-c}{6c}}\xi\right)}{c_1 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta-c}{6c}}\xi\right) + c_2 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta-c}{6c}}\xi\right)} \right)^2, \quad (2.61)$$

ve

$$u_5(x,t) = -\beta - \beta \left(\frac{c_1 \sinh\left(\frac{\beta x}{2\alpha}\right) + c_2 \cosh\left(\frac{\beta x}{2\alpha}\right)}{c_1 \cosh\left(\frac{\beta x}{2\alpha}\right) + c_2 \sinh\left(\frac{\beta x}{2\alpha}\right)} \right), \quad (2.62)$$

hiperbolik dalga çözümleri elde edilir.

Bulunan çözüm grupları incelenirse $\lambda^2 - 4\mu$ 'nün değerinin her zaman sıfırdan büyük olduğu için (2.40)'daki Benjamin-Bona-Mahony-Burgers denklemi için hiçbir zaman trigonometrik ve rasyonel çözümlere ulaşılamayacağı sonucuna ulaşılır. Burada çözüm için kullanılan Maple kodları aşağıdaki gibidir.

```
> u:=x+y*g+z*g^2;
```

```
> du:=(y+2*z*g)*(g^2+l*g+m);
```

```
> ddu:=2*z*(g^2+l*g+m)^2+(y+2*z*g)*(2*g+l)*(g^2+l*g+m);
```

```
> collect(expand(2*(c-b)*u-2*c*ddu+2*a*du-u^2=0),g);
```

```
> dsolve({z=-12*c,-4*a*z-20*c*z*l-4*c*y-2*y*z=0,
```

```
-y^2+2*c*z-8*c*z*l^2-6*c*y*l-4*a*z*l-16*c*z*m-2*b*z-2*a*y-2*x*z=0,
```

$$\begin{aligned} & -12c^*z^*l^*m+2c^*y-2c^*y^*l^2-2a^*y^*l-2x^*y-4a^*z^*m-4c^*y^*m-2b^*y=0, \\ & -2a^*y^*m-4c^*z^*m^2-2b^*x-x^2-2c^*y^*l^*m+2c^*x=0\}, \{x,y,z,c,l\}); \end{aligned}$$

Diğer taraftan Akçağıl ve Gözükızıl'ın [50] makalelerinde aynı denklem ile ilgili aşağıdaki çözüm gruplarını elde etmişlerdir.

$$V = \frac{\alpha}{10\mu} \text{ ve } \mu = \frac{5\beta + \sqrt{25\beta^2 - 24\alpha^2}}{24\alpha} \text{ iken}$$

$$u_1(x,t) = \frac{10\mu\beta - \alpha}{20\mu} - \frac{12\alpha\mu}{5} \tanh \mu(x - Vt) + \frac{6\alpha\mu}{5} \tanh^2 \mu(x - Vt) \quad (2.63)$$

$$V = \frac{\alpha}{10\mu} \text{ ve } \mu = \frac{5\beta - \sqrt{25\beta^2 - 24\alpha^2}}{24\alpha} \text{ iken}$$

$$u_2(x,t) = \frac{10\mu\beta - \alpha}{20\mu} + \frac{12\alpha\mu}{5} \tanh \mu(x - Vt) + \frac{6\alpha\mu}{5} \tanh^2 \mu(x - Vt) \quad (2.64)$$

$$V = \frac{\alpha}{10\mu} \text{ ve } \mu = \frac{-5\beta + \sqrt{25\beta^2 + 24\alpha^2}}{24\alpha} \text{ iken}$$

$$u_3(x,t) = \frac{30\mu\beta - 3\alpha}{20\mu} + \frac{12\alpha\mu}{5} \tanh \mu(x - Vt) + \frac{6\alpha\mu}{5} \tanh^2 \mu(x - Vt) \quad (2.65)$$

$$V = \frac{\alpha}{20\mu} \text{ ve } \mu = \frac{-5\beta + \sqrt{25\beta^2 + 24\alpha^2}}{48\alpha} \text{ iken}$$

$$\begin{aligned} u_4(x,t) &= \frac{20\mu\beta - \alpha}{16\mu} + \frac{12\alpha\mu}{5} \tanh \mu(x - Vt) + \frac{3\alpha\mu}{5} \tanh^2 \mu(x - Vt) \\ &+ \frac{12\alpha\mu}{5} \coth \mu(x - Vt) + \frac{3\alpha\mu}{5} \coth^2 \mu(x - Vt), \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$V = \frac{\alpha}{20\mu} \text{ ve } \mu = \frac{5\beta + \sqrt{25\beta^2 - 24\alpha^2}}{48\alpha} \text{ iken}$$

$$\begin{aligned} u_5(x, t) = & \frac{60\mu\beta - 3\alpha}{80\mu} + \frac{12\alpha\mu}{5} \tanh \mu(x - Vt) + \frac{3\alpha\mu}{5} \tanh^2 \mu(x - Vt) \\ & + \frac{12\alpha\mu}{5} \coth \mu(x - Vt) + \frac{3\alpha\mu}{5} \coth^2 \mu(x - Vt), \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$V = \frac{\alpha}{20\mu} \text{ ve } \mu = \frac{5\beta - \sqrt{25\beta^2 - 24\alpha^2}}{48\alpha} \text{ iken}$$

$$\begin{aligned} u_6(x, t) = & \frac{60\mu\beta - 3\alpha}{80\mu} + \frac{12\alpha\mu}{5} \tanh \mu(x - Vt) + \frac{3\alpha\mu}{5} \tanh^2 \mu(x - Vt) \\ & + \frac{12\alpha\mu}{5} \coth \mu(x - Vt) + \frac{3\alpha\mu}{5} \coth^2 \mu(x - Vt), \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$V = \frac{\alpha}{10\mu} \text{ ve } \mu = \frac{-5\beta + \sqrt{25\beta^2 + 24\alpha^2}}{24\alpha} \text{ iken}$$

$$u_7(x, t) = \frac{30\mu\beta - 3\alpha}{20\mu} + \frac{12\alpha\mu}{5} \coth \mu(x - Vt) + \frac{6\alpha\mu}{5} \coth^2 \mu(x - Vt), \quad (2.69)$$

$$V = \frac{\alpha}{10\mu} \text{ ve } \mu = \frac{5\beta + \sqrt{25\beta^2 - 24\alpha^2}}{24\alpha} \text{ iken}$$

$$u_8(x, t) = \frac{10\mu\beta - \alpha}{20\mu} + \frac{12\alpha\mu}{5} \coth \mu(x - Vt) + \frac{6\alpha\mu}{5} \coth^2 \mu(x - Vt) \quad (2.70)$$

$$V = \frac{\alpha}{10\mu} \text{ ve } \mu = \frac{5\beta - \sqrt{25\beta^2 - 24\alpha^2}}{24\alpha} \text{ iken}$$

$$u_9(x, t) = \frac{10\mu\beta - \alpha}{20\mu} + \frac{12\alpha\mu}{5} \coth \mu(x - Vt) + \frac{6\alpha\mu}{5} \coth^2 \mu(x - Vt) \quad (2.71)$$

Benzer şekilde (2.58)-(2.61) çözümlerinde c değeri yerine konur ve $c_2 = 0$ alınırsa [38]'daki tanh-fonksiyonu içeren çözümlerine, $c_1 = 0$ alınırsa coth-fonksiyonu içeren çözümlerine ulaşılır. Fakat (G'/G) -açılım yöntemini kullanarak 2.3. bölümünün sonunda da belirtildiği gibi örneğin (2.68)'deki gibi her iki fonksiyonun kombinasyonu olan çözümler ulaşılamaz.

Sonuç olarak, (G'/G) -açılım yöntemi ile elde edilen çözümler ve daha fazlası tanh-yöntem ile elde edilir. Tanh-yöntemin zaman içerisinde nasıl geliştiği, dördüncü bölümde gösterilecektir. (G'/G) -açılım yöntemi, tanh-yöntemin ilk uygulandığı şekliyle kıyaslandığında daha farklı ve geniş bir çözüm ailesi sunduğu sanılabilir. Fakat üçüncü ve dördüncü bölümde değinilecek olan tanh-yöntem ailesinin gelişmesi ile eksik olan çözüm grupları tamamlanmış ve hatta daha geniş bir çözüm kümesi elde edilir hale gelmiştir. Ayrıca tanh-yöntem ile kıyaslandığında (G'/G) -açılım yönteminin özellikle bilgisayar çözümlerinde son derece hantal olduğu görülebilir [51].

BÖLÜM 4. BİRLEŞTİRİLMİŞ YÖNTEM

4.1. Giriş

Farklı fiziksel olayları tanımlar ve modellerken lineer olmayan kısmi türevli denklemlerle bilimsel alanda sürekli karşılaşılmaması nedeniyle, bu denklemleri çözmek için birçok farklı yöntem geliştirilip, uygulanmaktadır. Özellikle son yıllarda gelişen özel matematik programlarının da yardımıyla lineer olmayan kısmi türevli denklemlerin tam çözümlerini doğrudan bulmaya yönelik çeşitli yöntemlere olan ilgi her geçen gün katlanarak artmaktadır. Bu yöntemler arasında son yıllarda öne çıkan ve sıklıkla kullanılan tanh-fonksiyon yöntem ailesi ve (G'/G) -açılım yöntemi ailesidir. Tanh yöntemi, literatüre Malfliet [52-55] tarafından kazandırılmış ve yöntemin birçok versiyonu [66-75] daha sonra bazı makalelerde sıklıkla kullanılmıştır. (G'/G) -açılım yöntemi ise Wang ve Zhang [23] tarafından bulunmuş ve aynı şekilde lineer olmayan kısmi türevli denklemlerin çözümlerini bulmak için yöntemin çeşitli versiyonları geliştirilmiş ve bir çok makalede [24-49] kullanılmıştır.

Yaklaşık 20 yıldır lineer olmayan oluşum (evolution) denklemlerinin koşan (travelling) dalga çözümlerini bulmak için her iki yöntem ailesi de sıklıkla kullanılmaktadır. Bunlar arasında en sık kullanılan tanh-fonksiyon yöntem ailesinin üyeleri olan ve tarihsel gelişim sırasına göre; tanh-yöntem, genişletilmiş tanh-yöntem, genişletilmiş ve modifiye edilmiş tanh-yöntem ve son olarak kompleks tanh-yöntemdir. Diğer taraftan (G'/G) -açılım yöntemi ailesinin üyeleri arasından da genelleştirilmiş (G'/G) -açılım yönteminin yeni yaklaşımı (The new approach of generalized (G'/G) -expansion method) ve $(G'/G, 1/G)$ -açılım yöntemi olmak üzere yönteme ait yeni yaklaşımlar bulunmaktadır. Her iki yöntem ailesinin ve geliştirilen değişik versiyonlarının verdiği çözümler, aynı olmakla birlikte farklı da

olabilmektedir. Özellikle bu farklı çözümlere ulaşabilmek için, çözüm grubunu tamamlayıcı olması açısından ailenin diğer üyelerinin kullanılmasına ihtiyaç duyulabilmektedir.

Bu bölümün amacı lineer olmayan kısmi türevli denklemlerin çözümlerini bulmak için yaygın olarak kullanılan tanh-fonksiyon yöntemleri ailesi ve (G'/G) -açılım yöntem ailesi tarafından elde edilen çözümler de dahil, daha çok çözüm üreten bir yöntem geliştirerek bu iki aileyi tek bir yöntem çatısı altında toplamaktır. Bunları yaparken her iki yöntemin avantajlarını dikkate alınarak, uygulanacak işlem yükü hafifletilecektir.

Önceki bölümde, (G'/G) -açılım yöntemi, genişletilmiş ve modifiye edilmiş tanh-yöntemin özel bir durumu olduğunu gösterilmişti. Birleştirilmiş yöntem olarak adlandırılacak olan yöntem sayesinde; daha önce Kudryashov'un da birçok yöntemlerin karşılaştırılması ile ilgili makalelerinde bahsettiği [76-78] gibi aynı çözümün birçok farklı formda verilmiş çözümlerinden kaçınarak daha fazla çözüme, daha şık ve düzenli bir biçimde ulaşılabilinecektir. Yani hem tanh-yöntem ailesinin hem de (G'/G) -açılım yöntemi ailesinin verdiği çözümleri de verebilen, daha genel, daha şık ve daha fazla çözüm veren bir yöntem sunulacaktır.

4.2. Tanh-Fonksiyon Yöntem Ailesi

x, t bağımsız değişkenler ve $u(x, t)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere, $u(x, t)$ 'nin en yüksek mertebeden türevini içeren ve lineer olmayan terimler içeren iki değişkenli lineer olmayan bir kısmi türevli denklem aşağıdaki gibi verilsin.

$$P(u, u_t, u_x, u_{xt}, u_{xx}, u_{tt}, \dots) = 0 \quad (4.1)$$

(4.1) denkleminin koşan (travelling) dalga çözümlerini bulmak için bağımsız x ve t değişkenleri tek bir değişken olan, dalga değişkeni ile $\xi = x - ct$ şeklinde

birleştirilir. Burada c dalganın hızını göstermektedir. $u(x, t) = u(\xi)$ olarak kabul edilip $\xi = x - ct$, (4.1) denkleminde kullanılarak (4.1)'deki kısmi türevli denklem adi türevli denkleme aşağıdaki gibi dönüştürülür.

$$P(U, cU', U', cU'', c^2U'', U'', \dots) = 0 \quad (4.2)$$

4.2.1. Standart tanh-yöntemi

Standart tanh-yöntem; yöntem ailesine ait, Malfliet [52] tarafından ilk olarak ortaya çıkan yöntemdir. (4.2)'deki gibi adi türevli denkleme çevrilen denklemin çözümleri aşağıdaki gibi Y 'nin polinomları şeklinde ifade edilir.

$$u(\xi) = S(Y) = \sum_{i=0}^M a_i Y^i \quad (4.3)$$

Burada a_i daha sonra belirlenecek sabitler ve $Y = Y(\xi)$ olmak üzere aşağıdaki fonksiyon

$$Y = \tanh(k(\xi + \xi_0)) \quad (4.4)$$

ve ξ_0 'da keyfi bir sabit olsun.

(4.2) denkleminin çözümünü bulmak için (4.3) ve (4.4)'ü kullanmadan önce (4.3)'de bulunan ve dengeleme sabiti denilen sayı en yüksek mertebeden türevli terimler ile lineer olmayan terimler arasında kurulacak dengeleme prosedürü pratik olarak bulunabilir.

Daha önceden de söylenildiği gibi (4.3)'ü, M bulunduktan sonra (4.2) denkleminde yerine koyarak Y 'nin kuvvetlerinden oluşan bir denkleme ulaşılır. Daha sonra Y 'nin katsayılarının sıfıra eşitlenerek oluşturulan cebirsel denklemler Maple, Mathematica

gibi matematik programları kullanılarak çözülmesi vasıtasıyla a_i, k, c 'ye ait değerlere ulaşılır. Bulunan bu değerler (4.3) ve (4.4)'de yerine konursa denkleme ait sadece tanh-fonksiyonlarını içeren çözümleri elde edilmiş olur.

4.2.2. Genişletilmiş tanh-yöntemi

Yukarıdaki hemen hemen her basamağın aynı olması yanında yöntemin farkı (4.3)'de alınan ifadenin genişletilmesi ile ortaya çıkmaktadır. Yani genişletilmiş tanh-yöntem kullanılarak çözüm yaparken (4.3)'de kullanılan ifade

$$u(\xi) = S(Y) = a_0 + \sum_{i=1}^M (a_i Y^i + b_i Y^{-i}) \quad (4.5)$$

şeklinde genişletilir. Standart tanh-yöntemdeki gibi M dengeleme sabiti bulunur ve (4.5) ifadesi $Y = \tanh(k(\xi + \xi_0))$ olacak şekilde (4.2)'de yerine koyulur. Böylece a_i, b_i, k, c 'ye ait değerler bulunur ve (4.5)'de yerine konarak çözüme ulaşılır. Bu yöntem standart tanh-yöntemin bir sonraki versiyonu olarak düşünülürse, yöntemin katkısının tanh-fonksiyonlarını içeren çözümlerin yanında, tanh-coth-fonksiyonlarını içeren çözümleri verdiği görülmüş olunur. Böylece standart tanh-yöntemde bulunan çözümlerle birlikte, özellikle tanh-coth çözümlerinin ortaya çıkmasıyla çözüm sayısı artmış olur.

Daha genel ifade edilirse, eğer $b_i = 0$ olan çözüm grupları, standart tanh-yöntemdeki çözümleri verir ve bu nedenle kolayca görülebilir ki genişletilmiş tanh-yöntem ile elde edilen çözüm kümesi standart tanh-yönteme göre daha büyüktür.

4.2.3. Genişletilmiş ve modifiye edilmiş tanh-yöntemi

Genişletilmiş ve modifiye edilmiş tanh-yöntemde de, diğer iki tanh-yöntemde yapıldığı gibi lineer olmayan kısmi türevli denklem adi türevli denkleme $\xi = x - ct$ kullanılarak dönüştürülür ve yine aynı şekilde dengeleme katsayısı bulunur.

$\phi = \phi(\xi)$ fonksiyonu

$$\phi' = b + \phi^2 \quad (4.6)$$

değişkenlerine ayrılabilir (sabit katsayılı Riccati) adi türevli denkleminin bir çözümü olmak üzere (4.2) denkleminin çözümleri

$$u(\xi) = S(\phi) = A_0 + \sum_{i=1}^M [A_i \phi^i + B_i \phi^{-i}], \quad (4.7)$$

şeklinde verilen ϕ 'nin bir fonksiyonunu gerçeklesin. Burada $1 \leq i \leq M$ olmak üzere A_0, A_i, B_i daha sonra belirlenecek olan sabitlerdir.

(4.6) denklemi ve (4.7) ifadesi (4.2) adi türevli denkleminde yerine konarak, ϕ 'nin kuvvetlerinin katsayılarını oluşturan ve A_0, A_i, B_i, b, c terimlerinin oluşturduğu cebirsel denklemleri sıfıra eşitleyerek çözülmesi vasıtasıyla A_0, A_i, B_i, b, c terimlerinin değerleri elde edilir.

Burada (4.6)'da bulunan değişkenlerine ayrılabilir (sabit katsayılı Riccati) adi türevli denklemin çözümleri, ξ_0 keyfî bir sabit olmak üzere

$$\phi = \begin{cases} \begin{cases} -\sqrt{-b} \tanh(\sqrt{-b}(\xi + \xi_0)) \\ -\sqrt{-b} \coth(\sqrt{-b}(\xi + \xi_0)) \end{cases}, b < 0 \\ \begin{cases} \sqrt{b} \tan(\sqrt{b}(\xi + \xi_0)) \\ -\sqrt{b} \cot(\sqrt{b}(\xi + \xi_0)) \end{cases}, b > 0 \\ -\frac{1}{\xi + \xi_0}, b = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

şeklindedir. Bulunan A_0, A_i, B_i, b, c değerleri ve (4.8)'deki çözümler (4.7)'de yerine yazılarak (4.2) nonlinear kısmi türevli denklemin çözümleri bulunmuş olur.

Genişletilmiş ve modifiye edilmiş tanh-yöntemin bir önceki yöntemden farklı olarak sunduğu avantajlar, öncelikle değişkenlerine ayrılabilir (sabit katsayılı Riccati) adi diferansiyel denklemi kullanarak daha kolay bir şekilde (4.7)'nin türevi alınabilmektedir. Bu kolay türev alma işleminin en büyük avantajı, Maple, Mathematica gibi bilgisayar programları kullanırken çözüm bulmada etkisini göstermektedir. Teknik olarak sağladığı avantajların yanında (4.8)'deki çözümler nedeniyle artık denkleme ait sadece tanh, coth ve bunların kombinasyonu olan çözümler değil, trigonometrik ve rasyonel fonksiyon çözümlerine de ulaşılabilirdiği görülmektedir. Bu durum da bir önceki yöntem ile kıyaslanacak olursa ulaşılabilecek olan çözüm sayısını neredeyse iki katına çıkarmaktadır.

4.2.4. Kompleks tanh-yöntemi

Kompleks tanh-yöntemde de yine diğer yöntemlerde olduğu gibi lineer olmayan kısmi türevli denklem adi türevli denkleme çevrilir ve dengeleme sabitini bulmak için uygulanan prosedür aynen uygulanır. Yöntemin farklılaştığı nokta ise çözüm yaparken $i = \sqrt{-1}$ ve ξ_0 keyfî bir sabit olmak üzere

$$u(\xi) = \sum_{n=0}^M a_n \tanh^n(ik(\xi + \xi_0)), \quad (4.9)$$

şeklinde ifade edilir. Önceki yöntemlerdeki gibi (4.9)'daki ifade (4.2)'de yerine konur, elde edilen cebirsel denklemler bilgisayar programında çözülür ve yerine konarak çözümlere ulaşılır.

Kompleks tanh-yöntem ile ilgili çok fazla makale bulunmamaktadır [65]. Çünkü yöntemde elde edilen çözümlere birkaç özdeşlik kullanılarak genişletilmiş ve modifiye edilmiş tanh-yöntemi vasıtasıyla kolayca ulaşılabilir. Yöntemin

daha sonra kullanılmamasının en önemli gerekçesi diğer yöntemlere göre gereksiz bir şekilde bilgisayar çözümlerini zorlaştırırken, bir yandan da ya aynı çözümleri vermekte ya da çözüm kümesini daraltmaktadır. (4.9)'daki ifadeden de anlaşılabilir gibi çözümler tanh veya tan fonksiyonları şeklindedir. Aslında yöntemde (4.9)'daki n sayısı $-M \leq n \leq M$ seçilir ve hiperbolik ve trigonometrik fonksiyonları birleştiren özdeşlikler kullanılarak, yöntemin eksiklikleri rahatlıkla giderilebilir. Ama genişletilmiş ve modifiye edilmiş tanh-yöntemin (4.6) denklemini kullanarak çözüme gitmesine kıyasla, bilgisayar uygulamalarında zorluğa yol açabilir.

4.3. Birleştirilmiş Yöntem

Bu bölümde önceki bölümlerdeki tüm tanh-yöntemler birleştirilerek en geniş çözüm kümesini veren ve aynı zamanda bilgisayara uygulanması en kolay olacak şekilde düzenlenen bir yöntem verilecektir.

x, t bağımsız değişkenler ve $u(x, t)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere $u(x, t)$ 'nin en yüksek mertebeden türevini içeren ve nonlinear terimlerini içeren, iki değişkenli lineer olmayan bir kısmi türevli denklem aşağıdaki gibi verilsin.

$$P(u, u_t, u_x, u_{xt}, u_{xx}, u_{tt}, \dots) = 0 \quad (4.10)$$

Adım 1. (4.10) denkleminin koşan (travelling) dalga çözümlerini bulmak için bağımsız x ve t değişkenleri tek bir değişken olan, dalga değişkeni ile $\xi = x - ct$ şeklinde birleştirilir. Burada c dalga hızını göstermektedir. $u(x, t) = u(\xi)$ olarak kabul edilip $\xi = x - ct$ (4.11) denkleminde kullanılarak (4.10)'daki kısmi türevli denklem adi türevli denkleme aşağıdaki gibi dönüştürülür.

$$P(U, cU', U', cU'', c^2U'', U'', \dots) = 0 \quad (4.11)$$

Adım 2. Eğer gerekliyse (4.11) denklemi integre edilip, işlemlerde kolaylık olması açısından integral sabiti sıfır olarak alınabilir

Adım 3. $\phi = \phi(\xi)$ olmak üzere aşağıdaki değişkenlerine ayrılabilir (sabit katsayılı Riccati) diferansiyel denklemini sağlasın.

$$\phi' = b + \phi^2 \quad (4.12)$$

a_i, b_i, b sonradan bulunacak sabitler olmak üzere (4.11) denkleminin çözümü

$$u(\xi) = a_0 + \sum_{i=1}^M (a_i \phi^i(\xi) + b_i \phi^{-i}(\xi)) \quad (4.13)$$

şeklinde ifade edilir.

Adım 4. (4.11)'in dengeleme sabitini elde ederken en yüksek mertebeden türevli terim ile lineer olmayan terim arasında aşağıdaki derecelendirmeler vasıtasıyla kurulan derecelendirmeler eşitlenerek elde edilen basit denklemden M değerine ulaşılır.

$$D \left[\frac{d^q u}{d\xi^q} \right] = M + q, \quad D[u^r] = Mr,$$

$$D \left[u^r \left(\frac{d^q u}{d\xi^q} \right)^s \right] = s(M + q) + Mr,$$

Adım 5. (4.12) ve (4.13), (4.11)'de yerine konarak ϕ 'nin kuvvetlerinin katsayılarından oluşan bir cebirsel denklem sistemine ulaşılır. Bu denklem sistemi bilgisayar da çözülerek a_i, b_i, b, c 'ye ait değerler elde edilir.

Adım 6. Adım 5’de elde edilen değerler (4.13) yerine konduktan sonra (4.12) denkleminin aşağıda verilen çözümleri de yerine konarak (4.10) denkleminin çözümlerine ulaşılır.

(4.12) değişkenlerine ayrılabilir (sabit katsayılı Riccati) adi diferansiyel denklemin çözümleri

1.Grup : $b < 0$ olduğunda, $A \neq 0$ ve B iki reel sabit sayı olacak şekilde alınırsa

$$\phi(\xi) = \begin{cases} \frac{\sqrt{-(A^2 + B^2)b} - A\sqrt{-b} \cosh(2\sqrt{-b}(\xi + \xi_0))}{A \sinh(2\sqrt{-b}(\xi + \xi_0)) + B}, \\ \frac{-\sqrt{-(A^2 + B^2)b} - A\sqrt{-b} \cosh(2\sqrt{-b}(\xi + \xi_0))}{A \sinh(2\sqrt{-b}(\xi + \xi_0)) + B}, \\ \sqrt{-b} + \frac{-2A\sqrt{-b}}{A + \cosh(2\sqrt{-b}(\xi + \xi_0)) - \sinh(2\sqrt{-b}(\xi + \xi_0))}, \\ -\sqrt{-b} + \frac{2A\sqrt{-b}}{A + \cosh(2\sqrt{-b}(\xi + \xi_0)) + \sinh(2\sqrt{-b}(\xi + \xi_0))}, \end{cases} \quad (4.14)$$

2.Grup : $b > 0$ olduğunda, $A \neq 0$ ve B iki reel sabit sayı olacak şekilde alınırsa

$$\phi(\xi) = \begin{cases} \frac{\sqrt{(A^2 - B^2)b} - A\sqrt{b} \cos(2\sqrt{b}(\xi + \xi_0))}{A \sin(2\sqrt{b}(\xi + \xi_0)) + B}, \\ \frac{-\sqrt{(A^2 - B^2)b} - A\sqrt{b} \cos(2\sqrt{b}(\xi + \xi_0))}{A \sin(2\sqrt{b}(\xi + \xi_0)) + B}, \\ i\sqrt{b} + \frac{-2Ai\sqrt{b}}{A + \cos(2\sqrt{b}(\xi + \xi_0)) - i \sin(2\sqrt{b}(\xi + \xi_0))}, \\ -i\sqrt{b} + \frac{2Ai\sqrt{b}}{A + \cos(2\sqrt{b}(\xi + \xi_0)) + i \sin(2\sqrt{b}(\xi + \xi_0))}, \end{cases} \quad (4.15)$$

3.Grup: $b = 0$ olduğunda

$$\phi(\xi) = -\frac{1}{\xi + \xi_0}, \quad (4.16)$$

ξ_0 keyfi bir sabit olmak üzere, 3 çözüm ailesi şeklinde ifade edilir.

4.4. (G'/G)-açılım Yöntemi Ailesi

Bu bölümde (G'/G) -açılım yöntemi ailesinin üyelerinden, genelleştirilmiş (G'/G) -açılım yönteminin yeni yaklaşımı (The new approach of generalized (G'/G) -expansion method) [90-94] ve $(G'/G, 1/G)$ -açılım yöntemi [95-102] verilecektir. (4.1) denkleminin koşan (travelling) dalga çözümlerini bulmak için, denklemin adi türevli denkleme çevirmek ve ortaya çıkan denklemin dengeleme sabitini bulmak için uygulanan adımlar, tanh-yöntem ailesinde uygulanan adımlarla aynıdır. Aşağıda her iki yöntemin farklılaştığı noktalar verilecektir.

4.4.1. Genelleştirilmiş (G'/G)-açılım yönteminin yeni yaklaşımı

$G = G(\xi)$ olmak üzere aşağıdaki diferansiyel denklemini sağlasın.

$$G(\xi)G''(\xi) = AG^2(\xi) + BG(\xi)G'(\xi) + CG'(\xi)^2 \quad (4.17)$$

a_i 'ler sonradan bulunacak sabitler ve A,B,C reel parametreler olmak üzere (4.2) denkleminin çözümü

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^M a_i \left(\frac{G'}{G} \right)^i \quad (4.18)$$

şeklinde ifade edilir. (4.17) diferansiyel denkleminin çözümleri

1. Durum : $B \neq 0$ ve $\Delta = B^2 + 4A - 4AC > 0$ iken

$$\left(\frac{G'}{G}\right) = \frac{B}{2(1-C)} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2(1-C)} \frac{C_1 \sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi\right) + C_2 \cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi\right)}{C_1 \cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi\right) + C_2 \sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi\right)} \quad (4.19)$$

2. Durum : $B \neq 0$ ve $\Delta = B^2 + 4A - 4AC < 0$ iken

$$\left(\frac{G'}{G}\right) = \frac{B}{2(1-C)} + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2(1-C)} \frac{-C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi\right)}{C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi\right)} \quad (4.20)$$

3. Durum : $B = 0$ ve $\Delta = A(C-1) > 0$ iken

$$\left(\frac{G'}{G}\right) = \frac{\sqrt{\Delta}}{(1-C)} \frac{-C_1 \sin(\sqrt{\Delta}\xi) + C_2 \cos(\sqrt{\Delta}\xi)}{C_1 \cos(\sqrt{\Delta}\xi) + C_2 \sin(\sqrt{\Delta}\xi)} \quad (4.21)$$

4. Durum : $B = 0$ ve $\Delta = A(C-1) < 0$ iken

$$\left(\frac{G'}{G}\right) = \frac{\sqrt{-\Delta}}{(1-C)} \frac{C_1 \sinh(\sqrt{-\Delta}\xi) + C_2 \cosh(\sqrt{-\Delta}\xi)}{C_1 \cosh(\sqrt{-\Delta}\xi) + C_2 \sinh(\sqrt{-\Delta}\xi)} \quad (4.22)$$

şeklindedir. (4.17) ve (4.18), (4.2)'de yerine konarak $\left(\frac{G'}{G}\right)$ 'nin kuvvetlerinin

katsayılarından oluşan bir cebirsel denklem sistemine ulaşılır. Bu denklem sistemi

bilgisayar da çözülerek a_i, c, A, B, C 'ye ait değerler elde edilir. Bu değerler (4.18)'de yerine konduktan sonra (4.17) denkleminin yukarıda verilen çözümleri de kullanılarak (4.1) denkleminin çözümlerine ulaşılır.

4.4.2. (G'/G,1/G)-açılım yöntemi

Bu yöntemin bir önceki yöntemden farklılaştığı nokta, (4.1) denklemini (4.2)'deki gibi adi türevli denkleme çevirdikten ve dengeleme sabiti bulunduktan sonra

$$u(\xi) = \begin{cases} \sum_{i=0}^M a_i \left(\frac{A_1 \cosh(k\xi) + A_2 \sinh(k\xi)}{A_1 \sinh(k\xi) + A_2 \cosh(k\xi) + C} \right)^i + \sum_{i=1}^M b_i \frac{(A_1 \cosh(k\xi) + A_2 \sinh(k\xi))^{i-1}}{(A_1 \sinh(k\xi) + A_2 \cosh(k\xi) + C)^i}, \\ \sum_{i=0}^M a_i \left(\frac{A_1 \cos(k\xi) - A_2 \sin(k\xi)}{A_1 \sin(k\xi) + A_2 \cos(k\xi) + C} \right)^i + \sum_{i=1}^M b_i \frac{(A_1 \cos(k\xi) - A_2 \sin(k\xi))^{i-1}}{(A_1 \sin(k\xi) + A_2 \cos(k\xi) + C)^i} \end{cases} \quad (4.23)$$

(4.2)'de u yerine yukarıdaki ifadeler konularak a_i, b_i, c, k değerleri bulunur ve bu değerler (4.23)'de yerine konarak (4.1) denkleminin çözümlerine ulaşılır.

4.5. Birleştirilmiş Yöntem ile Diğerlerinin Karşılaştırılması

Teorem 1: Birleştirilmiş yöntem, tanh-fonksiyon yöntem ailesinden daha fazla çözüm verir [103].

Kanıt : Tanh-fonksiyon yöntem ailesine bakıldığında, genişletilmiş ve modifiye edilmiş tanh-yöntemin, aileye ait diğer yöntemlerin verdiği tüm çözüm gruplarını da verdiği için birleştirilmiş yöntemi, bu yöntemle karşılaştıralım. Buna göre yöntem; 4.2. bölümde verildiği şekliyle tanh, coth, tan, cot, tanh-coth, tan-cot ve rasyonel fonksiyon olmak üzere ele alınan kısmi türevli denklem için en fazla 7 tipte çözüm sunmaktadır. Diğer taraftan; kolayca görülebilir ki, ξ_0 keyfi bir sabit olduğu için,

$$\tanh\left(x - \frac{\pi}{2}i\right) = \coth(x) \quad \text{ve} \quad \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cot(x) \quad \text{gözönüne alınarak,} \quad (4.8)'de$$

bulunan hiperbolik ve trigonometrik çiftlerin birbirine eşit olmakta ve böylece aynı çözümün farklı formları ortaya çıkmaktadır. Aslında yöntem; hiperbolik, trigonometrik ve rasyonel fonksiyonların her birinden sadece birer çözüm vermekte ve 7 tipte çözüm değil, $\tanh$, $\tan$, $\tanh\text{-coth}$, $\tan\text{-cot}$ ve rasyonel fonksiyon olmak üzere en fazla 5 tipte çözüm vermektedir.

Birleştirilmiş yöntem ise (4.14),(4.15) ve (4.16)'da verilen hiperbolik, trigonometrik ve rasyonel fonksiyon olmak üzere, genişletilmiş ve modifiye edilmiş $\tanh$ -yöntemin çözümlerini de içeren daha genel ve daha fazla çözüm grubu vermektedir. Aşağıda ifade edildiği gibi; $\tanh$ ve $\tan$ fonksiyonunu içeren çözümler, $B = 0$ alınırsa, (4.14) ve (4.15)'deki birinci ifadelerden

$$\begin{aligned} \frac{A\sqrt{-b} - A\sqrt{-b} \cosh(2\sqrt{-b}(\xi + \xi_0))}{A \sinh(2\sqrt{-b}(\xi + \xi_0))} &= \frac{\sqrt{-b}(1 - \cosh(2\sqrt{-b}(\xi + \xi_0)))}{\sinh(2\sqrt{-b}(\xi + \xi_0))} \\ &= -\sqrt{-b} \tanh(\sqrt{-b}(\xi + \xi_0)), \\ \frac{A\sqrt{b} - A\sqrt{b} \cos(2\sqrt{b}(\xi + \xi_0))}{A \sin(2\sqrt{b}(\xi + \xi_0))} &= \frac{\sqrt{b}(1 - \cos(2\sqrt{b}(\xi + \xi_0)))}{\sin(2\sqrt{b}(\xi + \xi_0))} = \sqrt{b} \tan(\sqrt{b}(\xi + \xi_0)) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. O halde birleştirilmiş yöntem, $\tanh$ -fonksiyon yöntem ailesinden daha fazla çözüm verir.

Teorem 2: Birleştirilmiş yöntem, genelleştirilmiş (G'/G) -açılım yönteminin yeni yaklaşımından daha fazla çözüm verir.

Kanıt : Öncelikle genelleştirilmiş (G'/G) -açılım yönteminin yeni yaklaşımında kullanılan aşağıdaki yardımcı denklemin (4.12)'deki değişkenlerine ayrılabilir (sabit katsayılı Riccati) adi diferansiyel denkleme eşit olduğunu gösterelim. Bu yüzden

$$G(\xi)G''(\xi) = AG^2(\xi) + BG(\xi)G'(\xi) + CG'(\xi)^2 \quad (4.24)$$

denkleminin her iki tarafını $G^2(\xi)$ 'ye bölüp $\frac{G''(\xi)}{G(\xi)} = \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)' + \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^2$ eşitliğini kullanırsak (4.24) denklemi

$$\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)' + \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^2 = A + B\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right) + C\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^2 \quad (4.25)$$

denklemine dönüşür. Buradan da (4.25) denklemi tam kareye dönüştürülürse

$$\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)' = (C-1)\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} + \frac{B}{2(C-1)}\right)^2 + \frac{4A(C-1) - B^2}{4(C-1)} \quad (4.26)$$

elde edilir. (4.26)'da $\phi(\xi) = \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} + \frac{B}{2(C-1)}$, $a = C-1$, ve $b = \frac{4A(C-1) - B^2}{4(C-1)}$

alınırsa (4.26) denklemi

$$\phi'(\xi) = b + a\phi^2(\xi) \quad (4.27)$$

denklemine, yani (4.12)'deki denkleme dönüşmüş olur. (4.27) denkleminde bulunan a değeri sebebiyle elde edilecek çözümler ile (4.12) denkleminin çözümleri arasındaki fark aşağıdaki gibi olur.

$$\phi(\xi) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{-ab}}{a} \tanh(\sqrt{-ab}(\xi + \xi_0)) \\ -\frac{\sqrt{-ab}}{a} \coth(\sqrt{-ab}(\xi + \xi_0)) \end{cases}, ab < 0;$$

$$\phi(\xi) = \begin{cases} \frac{\sqrt{ab}}{a} \tan(\sqrt{ab}(\xi + \xi_0)) \\ -\frac{\sqrt{ab}}{a} \cot(\sqrt{ab}(\xi + \xi_0)) \end{cases}, ab > 0;$$

(4.19)-(4.22)'de verilen çözüm gruplarını aşağıdaki hiperbolik ve trigonometrik özdeşlikler gözönünde bulundurularak düzenlenirse

$$\tanh a\xi_0 = \frac{c_2}{c_1} \text{ olmak üzere}$$

$$\begin{aligned} \tanh(a(\xi + \xi_0)) &= \frac{\sinh a\xi \cosh a\xi_0 + \sinh a\xi_0 \cosh a\xi}{\cosh a\xi \cosh a\xi_0 + \sinh a\xi_0 \sinh a\xi} = \frac{c_1 \sinh a\xi + c_2 \cosh a\xi}{c_1 \cosh a\xi + c_2 \sinh a\xi}, \\ \coth(a(\xi + \xi_0)) &= \frac{\cosh a\xi \cosh a\xi_0 + \sinh a\xi_0 \sinh a\xi}{\sinh a\xi \cosh a\xi_0 + \sinh a\xi_0 \cosh a\xi} = \frac{c_1 \cosh a\xi + c_2 \sinh a\xi}{c_1 \sinh a\xi + c_2 \cosh a\xi}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\text{ve } \tan a\xi_0 = -\frac{c_2}{c_1} \text{ olmak üzere}$$

$$\begin{aligned} \tan(a(\xi + \xi_0)) &= \frac{\sin a\xi \cos a\xi_0 + \sin a\xi_0 \cos a\xi}{\cos a\xi \cos a\xi_0 - \sin a\xi_0 \sin a\xi} = -\frac{-c_1 \sin a\xi + c_2 \cos a\xi}{c_1 \cos a\xi + c_2 \sin a\xi}, \\ \cot(a(\xi + \xi_0)) &= \frac{\cos a\xi \cos a\xi_0 - \sin a\xi_0 \sin a\xi}{\sin a\xi \cos a\xi_0 + \sin a\xi_0 \cos a\xi} = -\frac{c_1 \cos a\xi + c_2 \sin a\xi}{-c_1 \sin a\xi + c_2 \cos a\xi} \end{aligned} \quad (4.29)$$

bu çözüm grupları ile (4.27)'nin çözüm grupları arasında eşitlik aşağıdaki gibi kurulur.

$$(4.19) \text{ ve } (4.20)'de; \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \phi(\xi) + \frac{B}{2(1-C)} \text{ dönüşümü, } (4.19) \text{ için } (4.28)'deki$$

hiperbolik özdeşlikler, (4.20) için (4.29)'daki trigonometrik özdeşlikler kullanılarak

$$\text{ve yukarıda elde edilen } a = C - 1, \text{ ve } b = \frac{4A(1-C) + B^2}{4(1-C)} = \frac{-\Delta}{4a} \text{ eşitlikleri}$$

kullanılarak, bu çözümler sırasıyla aşağıdaki hale dönüşür.

$$\phi(\xi) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{-ab}}{a} \tanh(\sqrt{-ab}(\xi + \xi_0)) \\ -\frac{\sqrt{-ab}}{a} \coth(\sqrt{-ab}(\xi + \xi_0)) \end{cases}, ab < 0; \quad (4.30)$$

$$\phi(\xi) = \begin{cases} \frac{\sqrt{ab}}{a} \tan(\sqrt{ab}(\xi + \xi_0)) \\ -\frac{\sqrt{ab}}{a} \cot(\sqrt{ab}(\xi + \xi_0)) \end{cases}, ab > 0.$$

Diğer taraftan (4.21) ve (4.22)'de verilen çözümler; (4.19) ve (4.20)'nin $B = 0$ alınarak kolayca elde edilebilen özel durumları olduğu rahatlıkla görülebilir.

(4.30)'daki çözümlerden de görüleceği üzere öncelikle yöntemin (4.19)-(4.22)'deki gibi farklı 4 grup çözüm kümesi değil, ikiye ikiye özdeş olmak üzere farklı iki grup çözüm kümesi verdiği görülmekte, yani bulunan çözümler tekrar farklı bir formda elde edilmektedir. Buradan da yukarıda elde edilen (4.30)'da bulunan çözümlerin (4.18)'de yerine konulması ile elde edilen çözümlerden dolayı, genelleştirilmiş (G'/G) -açılım yönteminin yeni yaklaşımı yönteminin sadece tanh, ve tan fonksiyonu şeklinde çözümler verdiğini, hatta genişletilmiş ve modifiye edilmiş tanh-yöntemi ile kıyaslırsak tanh-coth ve tan-cot kombinasyonu olan çözümleri bile vermediği için diğer yöntemlere kıyasla uygulaması güç ve oldukça zayıf bir yöntem olduğu görülür. O halde birleştirilmiş yöntem, genelleştirilmiş (G'/G) -açılım yönteminin yeni yaklaşımından daha fazla çözüm verir.

Teorem 3: Birleştirilmiş yöntem, $(G'/G, 1/G)$ -açılım yönteminden daha fazla çözüm verir.

Kanıt : $(G'/G, 1/G)$ -açılım yönteminde (4.23)'deki birinci ifadede

$$\begin{aligned} \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y, \\ \sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \end{aligned} \quad (4.31)$$

ve $\tanh(k\xi_0) = \frac{A_2}{A_1}$ alınırsa,

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \sum_{i=0}^M a_i \left(\frac{\cosh(k(\xi + \xi_0))}{\sinh(k(\xi + \xi_0)) + C} \right)^i + \sum_{i=1}^M b_i \frac{(\cosh(k(\xi + \xi_0)))^{i-1}}{(\sinh(k(\xi + \xi_0)) + C)^i} \\ &= a_0 + \sum_{i=1}^M \left(\frac{a_i \cosh^i(k(\xi + \xi_0)) + b_i \cosh^{i-1}(k(\xi + \xi_0))}{(\sinh(k(\xi + \xi_0)) + C)^i} \right), \end{aligned}$$

sadeleşmiş hali elde edilir. Bu elde edilen ifade, (4.14)'deki birinci ve ikinci çözüm tipine ait aşağıdaki hiperbolik çözümler ile karşılaştırılınca,

$$u(\xi) = a_0 + \sum_{i=1}^M \left(a_i \left(-\frac{A\sqrt{-b} \cosh(2\sqrt{-b}(\xi + \xi_0)) \pm \sqrt{-(A^2 + B^2)b}}{A \sinh(2\sqrt{-b}(\xi + \xi_0)) + B} \right)^i + b_i \left(-\frac{A\sqrt{-b} \cosh(2\sqrt{-b}(\xi + \xi_0)) \pm \sqrt{-(A^2 + B^2)b}}{A \sinh(2\sqrt{-b}(\xi + \xi_0)) + B} \right)^{-i} \right)$$

ifadesinin toplam işareti altındaki ilk teriminin binom açılımına ait ilk iki terimi alınarak oluşturulduğu aşıkardır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \cos(x \mp y) &= \cos x \cos y \pm \sin x \sin y, \\ \sin(x \mp y) &= \sin x \cos y \mp \cosh x \sinh y \end{aligned} \quad (4.32)$$

ve $\tan(k\xi_0) = \frac{A_2}{A_1}$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
u(\xi) &= \sum_{i=0}^M a_i \left(\frac{\cos(k(\xi + \xi_0))}{\sin(k(\xi + \xi_0)) + C} \right)^i + \sum_{i=1}^M b_i \frac{(\cos(k(\xi + \xi_0)))^{i-1}}{(\sin(k(\xi + \xi_0)) + C)^i} \\
&= a_0 + \sum_{i=1}^M \left(\frac{a_i \cos^i(k(\xi + \xi_0)) + b_i \cos^{i-1}(k(\xi + \xi_0))}{(\sin(k(\xi + \xi_0)) + C)^i} \right),
\end{aligned}$$

sadeleşmiş hali elde edilir. Bu elde edilen ifade, (4.15)'deki altıncı ve yedinci çözüm grubuna ait aşağıdaki trigonometrik çözümler ile karşılaştırılınca,

$$u(\xi) = a_0 + \sum_{i=1}^M \left(a_i \left(-\frac{A\sqrt{b} \cos(2\sqrt{b}(\xi + \xi_0)) \pm \sqrt{(A^2 - B^2)b}}{A \sin(2\sqrt{b}(\xi + \xi_0)) + B} \right)^i + b_i \left(-\frac{A\sqrt{b} \cos(2\sqrt{b}(\xi + \xi_0)) \pm \sqrt{(A^2 - B^2)b}}{A \sin(2\sqrt{b}(\xi + \xi_0)) + B} \right)^{-i} \right)$$

ifadesinin benzer şekilde, toplam işareti altındaki ilk teriminin binom açılımına ait ilk iki terimi alınarak oluşturulduğu görülür. Böylece kolayca görülebilir ki, $(G'/G, 1/G)$ -açılım yöntem, birleştirilmiş yönteme kıyasla daha az çözüm verir. Ayrıca bulunan çözümler, birleştirilmiş yöntem kullanılarak da bulunabilen çözümlerdir. O halde birleştirilmiş yöntem, $(G'/G, 1/G)$ -açılım yönteminden daha fazla çözüm verir.

4.6. Lonngren Dalga Denkleminin Birleştirilmiş Yöntemle Çözümü

Bu bölümde üçüncü bölümde hem (G'/G) -açılım yöntemi hem de genişletilmiş ve modifiye edilmiş tanh-yöntem ile çözülen, Lonngren dalga denklemi, birleştirilmiş yöntem ile çözülecektir. Öncelikle

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_{xx} - \alpha u + \beta u^2) + u_{xx} = 0 \quad (4.33)$$

$\xi = x - ct$ dalga değişkeni kullanılarak, adi türevli denkleme dönüştürülür.

$$c^2 U'' + (1 - \alpha c^2) U + \beta c^2 U^2 = 0 \quad (4.34)$$

(4.33) denkleminde en yüksek mertebeden terim U'' ile nonlinear terim U^2 arasında dengeleme yaparak, $M + 2 = 2M$ 'den $M = 2$ olarak dengeleme sabiti bulunur. Yani (4.33)'ün çözümleri, a_0, a_1, a_2, b_1, b_2 daha sonra belirlenecek değerler olmak üzere

$$U(\xi) = b_2 \phi^{-2} + b_1 \phi^{-1} + a_0 + a_1 \phi + a_2 \phi^2 \quad (4.35)$$

şeklinde yazılır. (4.35) ve türevleri, (4.34) denkleminde yerine yazılıp, ϕ 'nin her kuvvetinin katsayıları sıfıra eşitlenerek a_0, a_1, a_2, b_1, b_2 ve c 'den oluşan cebirsel bir denklem sistemi bulunur. Bu denklem sistemi Maple kullanılarak çözümlerse, aşağıdaki çözüm gruplarına ulaşılır.

$$\text{Grup 1. } c = \mp \frac{1}{\sqrt{\alpha + 4b}}, \quad b_2 = 0 = b_1, \quad a_2 = -\frac{6}{\beta}, \quad a_1 = 0, \quad a_0 = -\frac{6b}{\beta}; \quad (4.36)$$

$$\text{Grup 2. } c = \mp \frac{1}{\sqrt{\alpha - 4b}}, \quad b_2 = 0 = b_1, \quad a_2 = -\frac{6}{\beta}, \quad a_1 = 0, \quad a_0 = -\frac{2b}{\beta}; \quad (4.37)$$

$$\text{Grup 3. } c = \mp \frac{1}{\sqrt{\alpha - 4b}}, \quad b_2 = -\frac{6b^2}{\beta}, \quad b_1 = 0, \quad a_1 = 0 = a_2, \quad a_0 = -\frac{2b}{\beta}; \quad (4.38)$$

$$\text{Grup 4. } c = \mp \frac{1}{\sqrt{\alpha + 4b}}, \quad b_2 = -\frac{6b^2}{\beta}, \quad b_1 = 0, \quad a_1 = 0 = a_2, \quad a_0 = -\frac{6b}{\beta}; \quad (4.39)$$

$$\text{Grup 5. } c = \mp \frac{1}{\sqrt{\alpha - 16b}}, \quad b_2 = -\frac{6b^2}{\beta}, \quad b_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{6}{\beta}, \quad a_1 = 0, \quad a_0 = \frac{4b}{\beta}; \quad (4.40)$$

Grup 6. $c = \mp \frac{1}{\sqrt{\alpha+16b}}, b_2 = -\frac{6b^2}{\beta}, b_1 = 0, a_2 = -\frac{6}{\beta}, a_1 = 0, a_0 = \frac{12b}{\beta}.$ (4.41)

(4.36)-(4.41)'de bulunan bu çözüm grupları (4.35)'de yerine yazıldıktan sonra, (4.15),(4.16) ve (4.17)'daki durumlar sırasıyla gözönüne alınarak $b < 0$ olduğunda, $A \neq 0$ ve B iki reel sabit sayı olacak şekilde alınırsa

$$u_1(x,t) = -\frac{6b}{\beta} - \frac{6}{\beta} \left(\frac{\sqrt{-(A^2+B^2)b} - A\sqrt{-b} \cosh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+4b}} + \xi_0\right)\right)}{A \sinh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+4b}} + \xi_0\right)\right) + B} \right)^2, \quad (4.42)$$

$$u_2(x,t) = -\frac{6b}{\beta} - \frac{6}{\beta} \left(\frac{\sqrt{-(A^2+B^2)b} + A\sqrt{-b} \cosh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+4b}} + \xi_0\right)\right)}{A \sinh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+4b}} + \xi_0\right)\right) + B} \right)^2, \quad (4.43)$$

$$u_3(x,t) = -\frac{6b}{\beta} - \frac{6}{\beta} \left(\sqrt{-b} + \frac{-2A\sqrt{-b}}{A + \cosh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+4b}} + \xi_0\right)\right) - \sinh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+4b}} + \xi_0\right)\right)} \right)^2, \quad (4.44)$$

$$u_4(x,t) = -\frac{6b}{\beta} - \frac{6}{\beta} \left(-\sqrt{-b} + \frac{2A\sqrt{-b}}{A + \cosh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+4b}} + \xi_0\right)\right) + \sinh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+4b}} + \xi_0\right)\right)} \right)^2, \quad (4.45)$$

$$u_5(x, t) = -\frac{2b}{\beta} - \frac{6}{\beta} \left(\frac{\sqrt{-(A^2 + B^2)b} - A\sqrt{-b} \cosh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha - 4b}} + \xi_0\right)\right)}{A \sinh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha - 4b}} + \xi_0\right)\right) + B} \right)^2, \quad (4.46)$$

$$u_6(x, t) = -\frac{2b}{\beta} - \frac{6}{\beta} \left(\frac{\sqrt{-(A^2 + B^2)b} + A\sqrt{-b} \cosh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha - 4b}} + \xi_0\right)\right)}{A \sinh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha - 4b}} + \xi_0\right)\right) + B} \right)^2, \quad (4.47)$$

$$u_7(x, t) = -\frac{2b}{\beta} - \frac{6}{\beta} \left(\sqrt{-b} + \frac{-2A\sqrt{-b}}{A + \cosh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha - 4b}} + \xi_0\right)\right) - \sinh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha - 4b}} + \xi_0\right)\right)} \right)^2, \quad (4.48)$$

$$u_8(x, t) = -\frac{2b}{\beta} - \frac{6}{\beta} \left(-\sqrt{-b} + \frac{2A\sqrt{-b}}{A + \cosh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha - 4b}} + \xi_0\right)\right) + \sinh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha - 4b}} + \xi_0\right)\right)} \right)^2, \quad (4.49)$$

$$u_9(x, t) = -\frac{2b}{\beta} - \frac{6b^2}{\beta} \left(\frac{A \sinh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha - 4b}} + \xi_0\right)\right) + B}{\sqrt{-(A^2 + B^2)b} - A\sqrt{-b} \cosh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha - 4b}} + \xi_0\right)\right)} \right)^2, \quad (4.50)$$

$$u_{10}(x, t) = -\frac{2b}{\beta} - \frac{6b^2}{\beta} \left(\frac{A \sinh \left(2\sqrt{-b} \left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-4b}} + \xi_0 \right) \right) + B}{\sqrt{-(A^2 + B^2)b} + A\sqrt{-b} \cosh \left(2\sqrt{-b} \left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-4b}} + \xi_0 \right) \right)} \right)^2, \quad (4.51)$$

$$u_{11}(x, t) = -\frac{2b}{\beta} - \frac{6b^2}{\beta \left(\sqrt{-b} + \frac{-2A\sqrt{-b}}{A + \cosh \left(2\sqrt{-b} \left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-4b}} + \xi_0 \right) \right) - \sinh \left(2\sqrt{-b} \left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-4b}} + \xi_0 \right) \right)} \right)^2}, \quad (4.52)$$

$$u_{12}(x, t) = -\frac{2b}{\beta} - \frac{6b^2}{\beta \left(-\sqrt{-b} + \frac{2A\sqrt{-b}}{A + \cosh \left(2\sqrt{-b} \left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-4b}} + \xi_0 \right) \right) + \sinh \left(2\sqrt{-b} \left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-4b}} + \xi_0 \right) \right)} \right)^2}, \quad (4.53)$$

$$u_{13}(x, t) = -\frac{6b}{\beta} - \frac{6b^2}{\beta} \left(\frac{A \sinh \left(2\sqrt{-b} \left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+4b}} + \xi_0 \right) \right) + B}{\sqrt{-(A^2 + B^2)b} - A\sqrt{-b} \cosh \left(2\sqrt{-b} \left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+4b}} + \xi_0 \right) \right)} \right)^2, \quad (4.54)$$

$$u_{14}(x, t) = -\frac{6b}{\beta} - \frac{6b^2}{\beta} \left(\frac{A \sinh \left(2\sqrt{-b} \left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+4b}} + \xi_0 \right) \right) + B}{\sqrt{-(A^2 + B^2)b} + A\sqrt{-b} \cosh \left(2\sqrt{-b} \left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+4b}} + \xi_0 \right) \right)} \right)^2, \quad (4.55)$$

$$u_{15}(x, t) = -\frac{6b}{\beta} - \frac{6b^2}{\beta \left(\sqrt{-b} + \frac{-2A\sqrt{-b}}{A + \cosh \left(2\sqrt{-b} \left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+4b}} + \xi_0 \right) \right) - \sinh \left(2\sqrt{-b} \left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+4b}} + \xi_0 \right) \right)} \right)^2}, \quad (4.56)$$

$$u_{16}(x, t) = -\frac{6b}{\beta} - \frac{6b^2}{\beta \left(-\sqrt{-b} + \frac{2A\sqrt{-b}}{A + \cosh \left(2\sqrt{-b} \left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+4b}} + \xi_0 \right) \right) + \sinh \left(2\sqrt{-b} \left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+4b}} + \xi_0 \right) \right)} \right)^2}, \quad (4.57)$$

$$u_{17}(x, t) = \frac{4b}{\beta} - \frac{6}{\beta} \left(\frac{\sqrt{-(A^2 + B^2)b} - A\sqrt{-b} \cosh \left(2\sqrt{-b} \left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-16b}} + \xi_0 \right) \right)}{A \sinh \left(2\sqrt{-b} \left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-16b}} + \xi_0 \right) \right) + B} \right)^2 - \frac{6b^2}{\beta} \left(\frac{A \sinh \left(2\sqrt{-b} \left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-16b}} + \xi_0 \right) \right) + B}{\sqrt{-(A^2 + B^2)b} - A\sqrt{-b} \cosh \left(2\sqrt{-b} \left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-16b}} + \xi_0 \right) \right)} \right)^2, \quad (4.58)$$

$$u_{18}(x, t) = \frac{4b}{\beta} - \frac{6}{\beta} \left(\frac{\sqrt{-(A^2 + B^2)b} + A\sqrt{-b} \cosh \left(2\sqrt{-b} \left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-16b}} + \xi_0 \right) \right)}{A \sinh \left(2\sqrt{-b} \left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-16b}} + \xi_0 \right) \right) + B} \right)^2 - \frac{6b^2}{\beta} \left(\frac{A \sinh \left(2\sqrt{-b} \left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-16b}} + \xi_0 \right) \right) + B}{\sqrt{-(A^2 + B^2)b} + A\sqrt{-b} \cosh \left(2\sqrt{-b} \left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-16b}} + \xi_0 \right) \right)} \right)^2, \quad (4.59)$$

$$u_{19}(x, t) = \frac{4b}{\beta} - \frac{6}{\beta} \left(\sqrt{-b} + \frac{-2A\sqrt{-b}}{A + \cosh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-16b}} + \xi_0\right)\right) - \sinh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-16b}} + \xi_0\right)\right)} \right)^2$$

$$- \frac{6b^2}{\beta \left(\sqrt{-b} + \frac{-2A\sqrt{-b}}{A + \cosh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-16b}} + \xi_0\right)\right) - \sinh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-16b}} + \xi_0\right)\right)} \right)^2}, \quad (4.60)$$

$$u_{20}(x, t) = \frac{4b}{\beta} - \frac{6}{\beta} \left(-\sqrt{-b} + \frac{2A\sqrt{-b}}{A + \cosh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-16b}} + \xi_0\right)\right) + \sinh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-16b}} + \xi_0\right)\right)} \right)^2$$

$$- \frac{6b^2}{\beta \left(-\sqrt{-b} + \frac{2A\sqrt{-b}}{A + \cosh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-16b}} + \xi_0\right)\right) + \sinh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-16b}} + \xi_0\right)\right)} \right)^2}, \quad (4.61)$$

$$u_{21}(x, t) = -\frac{12b}{\beta} - \frac{6}{\beta} \left(\frac{\sqrt{-(A^2 + B^2)b} - A\sqrt{-b} \cosh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+16b}} + \xi_0\right)\right)}{A \sinh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+16b}} + \xi_0\right)\right) + B} \right)^2$$

$$- \frac{6b^2}{\beta} \left(\frac{A \sinh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+16b}} + \xi_0\right)\right) + B}{\sqrt{-(A^2 + B^2)b} - A\sqrt{-b} \cosh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+16b}} + \xi_0\right)\right)} \right)^2, \quad (4.62)$$

$$u_{22}(x,t) = -\frac{12b}{\beta} - \frac{6}{\beta} \left(\frac{\sqrt{-(A^2+B^2)b} + A\sqrt{-b} \cosh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+16b}} + \xi_0\right)\right)}{A \sinh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+16b}} + \xi_0\right)\right) + B} \right)^2 - \frac{6b^2}{\beta} \left(\frac{A \sinh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+16b}} + \xi_0\right)\right) + B}{\sqrt{-(A^2+B^2)b} + A\sqrt{-b} \cosh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+16b}} + \xi_0\right)\right)} \right)^2, \quad (4.63)$$

$$u_{23}(x,t) = -\frac{12b}{\beta} - \frac{6}{\beta} \left(\frac{\sqrt{-b} + \frac{-2A\sqrt{-b}}{A + \cosh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+16b}} + \xi_0\right)\right) - \sinh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+16b}} + \xi_0\right)\right)}}{6b^2} \right)^2 - \frac{\beta \left(\frac{\sqrt{-b} + \frac{-2A\sqrt{-b}}{A + \cosh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+16b}} + \xi_0\right)\right) - \sinh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+16b}} + \xi_0\right)\right)}}{6b^2} \right)^2}{\beta}, \quad (4.64)$$

$$u_{24}(x,t) = -\frac{12b}{\beta} - \frac{6}{\beta} \left(\frac{-\sqrt{-b} + \frac{2A\sqrt{-b}}{A + \cosh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+16b}} + \xi_0\right)\right) + \sinh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+16b}} + \xi_0\right)\right)}}{6b^2} \right)^2 - \frac{\beta \left(\frac{-\sqrt{-b} + \frac{2A\sqrt{-b}}{A + \cosh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+16b}} + \xi_0\right)\right) + \sinh\left(2\sqrt{-b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+16b}} + \xi_0\right)\right)}}{6b^2} \right)^2}{\beta}, \quad (4.65)$$

(4.33) denklemine ait hiperbolik çözümler elde edilir. $b > 0$ olduğunda, $A \neq 0$ ve B iki reel sabit sayı olacak şekilde alınırsa

$$u_{25}(x,t) = -\frac{6b}{\beta} - \frac{6}{\beta} \left(\frac{\left| \sqrt{(A^2 - B^2)b} - A\sqrt{b} \cos \left(2\sqrt{b} \left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha + 4b}} + \xi_0 \right) \right) \right|^2}{A \sin \left(2\sqrt{b} \left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha + 4b}} + \xi_0 \right) \right) + B} \right) \quad (4.66)$$

$$u_{26}(x,t) = -\frac{6b}{\beta} - \frac{6}{\beta} \left(\frac{\left| \sqrt{(A^2 - B^2)b} + A\sqrt{b} \cos \left(2\sqrt{b} \left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha + 4b}} + \xi_0 \right) \right) \right|^2}{A \sin \left(2\sqrt{b} \left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha + 4b}} + \xi_0 \right) \right) + B} \right) \quad (4.67)$$

$$u_{27}(x,t) = -\frac{6b}{\beta} - \frac{6}{\beta} \left(i\sqrt{b} + \frac{-2Ai\sqrt{b}}{A + \cos \left(2\sqrt{b} \left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha + 4b}} + \xi_0 \right) \right) - i \sin \left(2\sqrt{b} \left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha + 4b}} + \xi_0 \right) \right)} \right)^2, \quad (4.68)$$

$$u_{28}(x,t) = -\frac{6b}{\beta} - \frac{6}{\beta} \left(-i\sqrt{b} + \frac{2Ai\sqrt{b}}{A + \cos \left(2\sqrt{b} \left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha + 4b}} + \xi_0 \right) \right) + i \sin \left(2\sqrt{b} \left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha + 4b}} + \xi_0 \right) \right)} \right)^2, \quad (4.69)$$

$$u_{29}(x,t) = -\frac{2b}{\beta} - \frac{6}{\beta} \left(\frac{\left| \sqrt{(A^2 - B^2)b} + A\sqrt{b} \cos \left(2\sqrt{b} \left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha - 4b}} + \xi_0 \right) \right) \right|^2}{A \sin \left(2\sqrt{b} \left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha - 4b}} + \xi_0 \right) \right) + B} \right) \quad (4.70)$$

$$u_{30}(x,t) = -\frac{2b}{\beta} - \frac{6}{\beta} \left(\frac{\left| \sqrt{(A^2 - B^2)b} - A\sqrt{b} \cos \left(2\sqrt{b} \left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha - 4b}} + \xi_0 \right) \right) \right|^2}{A \sin \left(2\sqrt{b} \left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha - 4b}} + \xi_0 \right) \right) + B} \right) \quad (4.71)$$

$$u_{31}(x, t) = -\frac{2b}{\beta} - \frac{6}{\beta} \left(i\sqrt{b} + \frac{-2Ai\sqrt{b}}{A + \cos\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-4b}} + \xi_0\right)\right) - i\sin\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-4b}} + \xi_0\right)\right)} \right)^2, \quad (4.72)$$

$$u_{32}(x, t) = -\frac{2b}{\beta} - \frac{6}{\beta} \left(-i\sqrt{b} + \frac{2Ai\sqrt{b}}{A + \cos\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-4b}} + \xi_0\right)\right) + i\sin\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-4b}} + \xi_0\right)\right)} \right)^2, \quad (4.73)$$

$$u_{33}(x, t) = -\frac{2b}{\beta} - \frac{6b^2}{\beta} \left(\frac{A \sin\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-4b}} + \xi_0\right)\right) + B}{\sqrt{(A^2 - B^2)b} - A\sqrt{b} \cos\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-4b}} + \xi_0\right)\right)} \right)^2, \quad (4.74)$$

$$u_{34}(x, t) = -\frac{2b}{\beta} - \frac{6b^2}{\beta} \left(\frac{A \sin\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-4b}} + \xi_0\right)\right) + B}{\sqrt{(A^2 - B^2)b} + A\sqrt{b} \cos\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-4b}} + \xi_0\right)\right)} \right)^2, \quad (4.75)$$

$$u_{35}(x, t) = -\frac{2b}{\beta} - \frac{6b^2}{\beta \left(i\sqrt{b} + \frac{-2Ai\sqrt{b}}{A + \cos\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-4b}} + \xi_0\right)\right) - i\sin\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-4b}} + \xi_0\right)\right)} \right)^2}, \quad (4.76)$$

$$u_{36}(x, t) = -\frac{2b}{\beta} - \frac{6b^2}{\beta \left(-i\sqrt{b} + \frac{2Ai\sqrt{b}}{A + \cos\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-4b}} + \xi_0\right)\right) + i \sin\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-4b}} + \xi_0\right)\right)} \right)^2}, \quad (4.77)$$

$$u_{37}(x, t) = -\frac{6b}{\beta} - \frac{6b^2}{\beta} \left(\frac{A \sin\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+4b}} + \xi_0\right)\right) + B}{\sqrt{(A^2 - B^2)b} - A\sqrt{b} \cos\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+4b}} + \xi_0\right)\right)} \right)^2 \quad (4.78)$$

$$u_{38}(x, t) = -\frac{6b}{\beta} - \frac{6b^2}{\beta} \left(\frac{A \sin\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+4b}} + \xi_0\right)\right) + B}{\sqrt{(A^2 - B^2)b} + A\sqrt{b} \cos\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+4b}} + \xi_0\right)\right)} \right)^2 \quad (4.79)$$

$$u_{39}(x, t) = -\frac{6b}{\beta} - \frac{6b^2}{\beta \left(i\sqrt{b} + \frac{-2Ai\sqrt{b}}{A + \cos\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+4b}} + \xi_0\right)\right) - i \sin\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+4b}} + \xi_0\right)\right)} \right)^2}, \quad (4.80)$$

$$u_{40}(x, t) = -\frac{6b}{\beta} - \frac{6b^2}{\beta \left(-i\sqrt{b} + \frac{2Ai\sqrt{b}}{A + \cos\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+4b}} + \xi_0\right)\right) + i \sin\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+4b}} + \xi_0\right)\right)} \right)^2}, \quad (4.81)$$

$$u_{41}(x, t) = \frac{4b}{\beta} - \frac{6}{\beta} \left[\frac{\sqrt{(A^2 - B^2)b} - A\sqrt{b} \cos\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha - 16b}} + \xi_0\right)\right)}{A \sin\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha - 16b}} + \xi_0\right)\right) + B} \right]^2 - \frac{6b^2}{\beta} \left[\frac{A \sin\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha - 16b}} + \xi_0\right)\right) + B}{\sqrt{(A^2 - B^2)b} - A\sqrt{b} \cos\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha - 16b}} + \xi_0\right)\right)} \right]^2 \quad (4.82)$$

$$u_{42}(x, t) = \frac{4b}{\beta} - \frac{6}{\beta} \left[\frac{\sqrt{(A^2 - B^2)b} + A\sqrt{b} \cos\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha - 16b}} + \xi_0\right)\right)}{A \sin\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha - 16b}} + \xi_0\right)\right) + B} \right]^2 - \frac{6b^2}{\beta} \left[\frac{A \sin\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha - 16b}} + \xi_0\right)\right) + B}{\sqrt{(A^2 - B^2)b} + A\sqrt{b} \cos\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha - 16b}} + \xi_0\right)\right)} \right]^2 \quad (4.83)$$

$$u_{43}(x, t) = \frac{4b}{\beta} - \frac{6}{\beta} \left[i\sqrt{b} + \frac{-2Ai\sqrt{b}}{A + \cos\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha - 16b}} + \xi_0\right)\right) - i \sin\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha - 16b}} + \xi_0\right)\right)} \right]^2 - \frac{6b^2}{\beta} \left[i\sqrt{b} + \frac{-2Ai\sqrt{b}}{A + \cos\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha - 16b}} + \xi_0\right)\right) - i \sin\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha - 16b}} + \xi_0\right)\right)} \right]^2, \quad (4.84)$$

$$u_{44}(x, t) = \frac{4b}{\beta} - \frac{6}{\beta} \left(-i\sqrt{b} + \frac{2Ai\sqrt{b}}{A + \cos\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-16b}} + \xi_0\right)\right) + i\sin\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-16b}} + \xi_0\right)\right)} \right)^2$$

$$\beta \left(-i\sqrt{b} + \frac{2Ai\sqrt{b}}{A + \cos\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-16b}} + \xi_0\right)\right) + i\sin\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha-16b}} + \xi_0\right)\right)} \right)^2, \quad (4.85)$$

$$u_{45}(x, t) = -\frac{12b}{\beta} - \frac{6}{\beta} \left(\frac{\sqrt{(A^2 - B^2)b} - A\sqrt{b} \cos\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+16b}} + \xi_0\right)\right)}{A \sin\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+16b}} + \xi_0\right)\right) + B} \right)^2$$

$$\beta \left(\frac{A \sin\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+16b}} + \xi_0\right)\right) + B}{\sqrt{(A^2 - B^2)b} - A\sqrt{b} \cos\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+16b}} + \xi_0\right)\right)} \right)^2, \quad (4.86)$$

$$u_{46}(x, t) = -\frac{12b}{\beta} - \frac{6}{\beta} \left(\frac{\sqrt{(A^2 - B^2)b} + A\sqrt{b} \cos\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+16b}} + \xi_0\right)\right)}{A \sin\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+16b}} + \xi_0\right)\right) + B} \right)^2$$

$$\beta \left(\frac{A \sin\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+16b}} + \xi_0\right)\right) + B}{\sqrt{(A^2 - B^2)b} + A\sqrt{b} \cos\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+16b}} + \xi_0\right)\right)} \right)^2, \quad (4.87)$$

$$u_{47}(x,t) = -\frac{12b}{\beta} - \frac{6}{\beta} \left(i\sqrt{b} + \frac{-2Ai\sqrt{b}}{A + \cos\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+16b}} + \xi_0\right)\right) - i\sin\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+16b}} + \xi_0\right)\right)} \right)^2$$

$$-\frac{\beta \left(i\sqrt{b} + \frac{-2Ai\sqrt{b}}{A + \cos\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+16b}} + \xi_0\right)\right) - i\sin\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+16b}} + \xi_0\right)\right)} \right)^2}{6b^2} \quad (4.88)$$

$$u_{48}(x,t) = -\frac{12b}{\beta} - \frac{6}{\beta} \left(-i\sqrt{b} + \frac{2Ai\sqrt{b}}{A + \cos\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+16b}} + \xi_0\right)\right) + i\sin\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+16b}} + \xi_0\right)\right)} \right)^2$$

$$-\frac{\beta \left(-i\sqrt{b} + \frac{2Ai\sqrt{b}}{A + \cos\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+16b}} + \xi_0\right)\right) + i\sin\left(2\sqrt{b}\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha+16b}} + \xi_0\right)\right)} \right)^2}{6b^2}, \quad (4.89)$$

(4.33) denkleminde ait trigonometrik çözümler elde edilir. Son olarak $b=0$ olmak üzere

$$u_{49}(x,t) = -\frac{6}{\beta \left(x \mp \frac{t}{\sqrt{\alpha}} + \xi_0 \right)^2}. \quad (4.90)$$

(4.33) denkleminde ait rasyonel çözüm de elde edilerek denklemin çözümleri bulunmuş olur.

BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Tanh-yöntem ve (G'/G) -açılım yöntemi yaklaşık 20 yıldan fazla bir süredir lineer olmayan kısmi türevli denklemlerin çözümünde kullanılmaktadır. Tanh-yöntemi, (G'/G) -açılım yöntemi ve her ikisinin farklı versiyonları matematiksel literatürde geniş bir yer kaplamaktadır. Bunlar, tanh-fonksiyon ailesi için standart tanh-yöntemi, genişletilmiş tanh-yöntemi, genişletilmiş ve modifiye edilmiş tanh-yöntemi ve kompleks tanh-yöntemi; (G'/G) -açılım yöntemi için ise (G'/G) -açılım yöntemi, genelleştirilmiş (G'/G) -açılım yönteminin yeni yaklaşımı ve $(G'/G, 1/G)$ -açılım yöntemidir.

Bunlardan yaygın olarak kullanılan (G'/G) -açılım yöntemi ve genişletilmiş ve modifiye edilmiş tanh-yöntem arasında karşılaştırma yapılmış ve tanh-yöntem ailesinin en çok çözüm veren üyesi olmasının yanında genişletilmiş ve modifiye edilmiş tanh-yönteminin, (G'/G) -açılım yöntemine göre daha çok çözüm verdiği gösterilmiştir.

(G'/G) -açılım yöntemi ailesine ait farklı çözümler veren, genelleştirilmiş (G'/G) -açılım yönteminin yeni yaklaşımı ve $(G'/G, 1/G)$ -açılım yöntemi göz önünde bulundurularak her iki ailenin de çözüm gruplarını veren, çok daha az işlem yükü gerektiren birleştirilmiş yöntem geliştirilmiştir.

Bulunan bu sonuç neticesinde, hem tanh-yöntem ailesinin hem de (G'/G) -açılım yöntemi ailesinin verdiği çözüm gruplarını ve daha fazlasını, tek bir yöntem altında veren, bilgisayara uygulaması kolay olan birleştirilmiş yöntem geliştirilmiştir.

Daha sonra yapılacak araştırmalar için bahsedilen iki yöntem ailesi veya literatürdeki diğerk çözüm yöntemleri beraber kullanılırken, yöntemler arasındaki benzerlikler ya da farklılıklar göz önüne alınarak problem çözümüne gidilmelidir. Böylece hem var olan yöntemler geliştirilerek daha yeni yöntemlere ulaşılabilir, hem de bulunan bu yöntemler ile ayrı ayrı birçok yöntem kullanılarak elde edilebilecek sonuçlara tek bir şekilde ulaşılabilir. Bilhassa bu yöntemlerin uygulanmasında Maple, Mathematica gibi programlar kullanıldığı için, bu yöntemlerin birleştirilip, aynı çözümleri veren hatta daha geniş çözüm kümeleri veren yöntemlere dönüştürölmeleri, bilgisayar kullanılarak yapılan hesaplamaları sadeleştirir.



KAYNAKLAR

- [1] Ablowitz, M.J., Clarkson, P.A., Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering Transform, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [2] Ablowitz, M.J., Segur, H., Solitons and the inverse scattering transform, Siam, Philadelphia, Pa, USA, 1981.
- [3] Hirota, R., The direct method in soliton theory, Cambridge University Pres, Cambridge, 2004.
- [4] Hirota, R., Direct method of finding exact solutions of nonlinear evolution equations, in: R. Bullough, P. Caudrey (Eds.), Backlund Transformations, Springer: Berlin, p. 1157, 1980.
- [5] Weiss, J., Tabor M., Carnevale G., The painleve property for partial differential equations. J. Math. Phys 24, 522-526, 1983.
- [6] Miura, M.R., Backlund transformation, Springer, Berlin, Germany, 1978.
- [7] Wang, M.L., Solitary wave solutions for variant Boussinesq equations. Phys. Lett. A 199, 169-172, 1995.
- [8] Khalfallah, M., Exact travelling wave solutions of the Boussinesq-Burgers equation, Mathematical and Computer Modelling 49, 666-671, 2009.
- [9] Zhao, X., Wang, L., Sun, W., The repeated homogeneous balance method and its applications to nonlinear partial differential equations. Solitons and Fractals 28, 448-453, 2006.
- [10] Akçağıl, Ş., Aydemir, T., Gözükızıll, Ö.F., Comparison between the new (G'/G) -expansion method and extended homogeneous balance method. New Trends in Mathematical Sciences 3, no:4, 223–236, 2015.
- [11] Yan, Z., Zhang, H., New explicit solitary wave solutions and periodic wave solutions for Whitham-Broer-Kaup equation in shallow water. Phys. Letter A 285, 355-362, 2001.

- [12] Naher, H., Abdullah, F.A., The modified Benjamin-Bona-Mahony equation via extended generalized Riccati equation mapping method. *Appl. Math. Sci.* 6, 5495-5512, 2012.
- [13] Naher, H., Abdullah, F.A., New travelling wave solutions by extended generalized Riccati equation mapping method of (2+1)-dimensional evolution equation. *J. Appl. Math.*, p.18, 2012.
- [14] He, J.H., Wu, X.H., Exp-function method for nonlinear wave equations. *Chaos Solitons Fractals* 30, 700-708, 2006.
- [15] Liu, S., Fu, Z., Zhao, Q., Jacobi elliptic function method and periodic wave solutions of nonlinear wave equations. *Phys. Lett. A* 289, 69-74, 2001.
- [16] Wazwaz, A., Partial differential equations and solitary waves theory, Springer 2009.
- [17] Zabusky, N.J., Kruskal, M.D., Interaction of solitons incollisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett.*, 15(6), 240-243, 1965.
- [18] Drazin, P.G., Johnson, R.S., Solitons: An Introduction, Cambridge University Press, Cambridge 1996.
- [19] Matveev, V.B., Salle, M.A., Darboux transform and Solitons, Springer, Berlin, Germany, 1991.
- [20] Malfliet, W., The tanh method: A tool for solving certain classes of nonlinear PDEs. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* , Vol 28 no.17, pp. 2013-2935, 2005.
- [21] Akçağıl, Ş., Gözükcızıl, Ö.F., The tanh-coth method for some nonlinear pseudoparabolic equations with exact solutions. *Advances in Difference Equations* 143, 2013.
- [22] Yan, C.T., A simple transformation for nonlinear waves. *Physics Letter A* 224, 77-84, 1996.
- [23] Wang, M.L., Li, X., Zhang, J., The (G'/G) -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolutions equations in mathematical physics. *Physics Letter A* 372, 417-423, 2008.
- [24] Zayed, E.M.E., Travelling wave solutions for higher dimensional nonlinear evolution equations using the (G'/G) -expansion method. *Journal of Applied Mathematics and Informatics*, Vol. 28, pp. 383-395, 2010.

- [25] Jawad, A.J.M., Petkovic, M.D., Biswas, A., Modified simple equation method for nonlinear evolution equations. *Applied Mathematics and Computation*, Vol.217, no.2, pp. 869-877, 2010.
- [26] Zayed, E.M.E., A note on the modified simple equation method applied to Sharma-Tasso-Olver equation. *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 218, no.7, 3962-3964, 2011.
- [27] Zayed, E.M.E., İbrahim, S.A.H., Exact solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics using the modified simple equation method. *Chinese Physics Letters*, Vol.29, no.6, Article ID060201, 2012.
- [28] Gözükızıl, Ö.F., Aydemir, T., Exact travelling wave solutions for some nonlinear partial differential equations by using (G'/G) -expansion method. *New Trends in Mathematical Sciences* 3, no:4, 211-222, 2015.
- [29] Akçağıl, Ş., Aydemir, T., Gözükızıl, Ö.F., Exact travelling wave solutions of nonlinear pseudoparabolic equations by using the (G'/G) -expansion method. *New Trends in Mathematical Sciences* 4, no:4, 55-66, 2016.
- [30] Aslan, I., Öziş, T., Analytical study on two nonlinear evolution equations by using (G'/G) -expansion method. *Appl. Math. Comp.* 209, 425-429, 2009.
- [31] Zayed, E.M.E., The (G'/G) -expansion method and its application to some nonlinear evolution equations. *J. Appl. Math. Comp.* 30, 89-103, 2009.
- [32] Zayed, E.M.E., Gepreel, K.A., Some applications of the (G'/G) -expansion method to nonlinear partial differential equations. *Appl. Math. Comp.* 212, 1-13, 2009.
- [33] Borhanifar, A., Zamiri, A.M., Application of the (G'/G) -expansion method for the Zhiber-Shabat equation and other related equations. *Math. Comp. Model.* 549 (9-10), 2109-2116, 2012.
- [34] Zayed, E.M.E., Gepreel, K.A., The (G'/G) -expansion method for finding traveling wave solutions of nonlinear partial differential equations in mathematical physics. *J. Math. Phys.* 50, 013502, 2008.
- [35] Ebadi, G., Biswas, A., Application of the (G'/G) -expansion method for nonlinear diffusion equation with nonlinear source. *Journal of the Franklin Institute* 347, 1391-1398, 2010.

- [36] Kim, H., Sakthivel, R., Travelling wave solutions for time delayed nonlinear evolution equations. *Applied Mathematics Letters* 23, 527-532, 2010.
- [37] Malik, A., Chand, F., Mishra, S.C., Exact travelling wave solutions of some nonlinear equations by (G'/G) -expansion method. *Applied Mathematics and Computation* 216, 2596-2612, 2010.
- [38] Kabir, M.M., Borhanifar, A., Abazari, R., Application of (G'/G) -expansion method to Regularized Long Wave (RLW) equation. *Computers and Mathematics with Applications* 61, 2044-2047, 2011.
- [39] Feng, J., Li, W., Wan, Q., (G'/G) -expansion method to seek the traveling wave solution of Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov equation. *Applied Mathematics and Computation* 217, 5860-5865, 2011.
- [40] Jabbari, A., Kheiri, H., Bekir, A., Exact solutions of the coupled Higgs equation and the Maccari system using Hes semi-inverse method and (G'/G) -expansion method. *Computers and Mathematics with Applications* 62, 2177-2186, 2011.
- [41] Kraenkel, R.A., Manikandan, K., Senthilvelan, M., On certain new exact solutions of a diffusive predator-prey system. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 18, 1269-1274, 2013.
- [42] Taha, W.M., Noorani, M.S.M., Hashim, I., New application of the (G'/G) -expansion method for thin film equations. *Abstract and Applied Analysis*, 6 pages. Article ID 535138, 2013.
- [43] Taha, W.M., Noorani, M.S.M., Exact solutions of equation generated by the Jaulent–Miodek Hierarchy by (G'/G) -expansion method. *Mathematical Problems in Engineering*, 7 pages, Article ID 39283, 2013.
- [44] Zhang, J., Wei, X., A generalized (G'/G) -expansion method and its applications. *Physics Letter A* 372, 3653-3658, 2008.
- [45] Aslan, I., Ozis, T., On the validity and reliability of the (G'/G) -expansion method by using higher-order nonlinear equations. *Appl. Math. Comput.* 211 531-536, 2009.
- [46] Bekir, A., Cevikel, A.Ç., New exact travelling wave solutions of nonlinear physical models. *Chaos Solitons Fractals* 41, 1733-1739, 2009.

- [47] Ganji, D.D., Abdollahzadeh, M., Exact traveling solutions of some nonlinear evolution equation by (G'/G) -expansion method. J. Math. Phys. 50, 2009.
- [48] Wang, M., Zhang, J., Li, X., Application of the (G'/G) -expansion to travelling wave solutions of the Broer-Kaup and the approximate long water wave equations. Appl. Math. Comput., 321-326, 2008.
- [49] Ling-Xiao, L., Ming-Liang, W., The (G'/G) -expansion method and travelling wave solutions for a higher-order nonlinear Schrödinger equation Appl. Math. Comput. 208, 440-445, 2009.
- [50] Akçağıl, Ş., Gözükızıllı, Ö.F., Exact solutions of Benjamin-Bona-Mahony-Burgers-type nonlinear pseudo-parabolic equations. Boundary Value Problems 144, 2012.
- [51] Aydemir, T., Gözükızıllı, Ö.F., Exact travelling wave solutions of the Benjamin-Bona-Mahony-Burgers type nonlinear pseudoparabolic equations by using the (G'/G) -expansion method. Manas Journal of Engineering, Vol 4, no.1, 21-37, 2016.
- [52] Malfliet, W., Solitary wave solutions of nonlinear wave equations. Am. J. Phys. 60 (7), 650-654, 1992.
- [53] Malfliet, W., Hereman, W., The tanh method. I: Exact solutions of nonlinear evolution and wave equations. Phys. Scr. 54, 563-568, 1996.
- [54] Malfliet, W., Hereman, W., The tanh method. II: Perturbation technique for conservative systems. Phys. Scr. 54, 569-575, 1996.
- [55] Malfliet, W., Hereman, W., The tanh method: a tool to solve nonlinear partial differential equations with symbolic software, Proceedings 9th World Multi-Conference on Systemics, Cybernetics and Informatics, Orlando, FL, 165-168, 2005.
- [56] Wazwaz, A.M., The tanh method for travelling wave solutions of nonlinear equations. Appl. Math. Comput. 154 (3), 713-723, 2004.
- [57] Wazwaz, A.M., The tanh method: exact solutions of the Sine-Gordon and the Sinh-Gordon equations. Appl. Math. Comput. 49, 565-574, 2005.
- [58] Wazwaz, A.M., The tanh and the sine-cosine methods for a reliable treatment of the modified equal width equation and its variants. Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 11 (2), 148-160, 2006.

- [59] Wazwaz, A.M., The tanh and the sine-cosine methods for compact and noncompact solutions of the nonlinear Klein-Gordon equation. *Appl. Math. Comput.* 167 (2), 1179-1195, 2005.
- [60] Wazwaz, A.M., The tanh method: solitons and periodic solutions for the Dodd-Bullough-Mikhailov and the Tzitzeica-Dodd-Bullough equations. *Chaos, Solitons Fractals* 25 (1), 55-63, 2005.
- [61] Wazwaz, A.M., The tanh method for generalized forms of nonlinear heat conduction and Burgers-Fisher equations. *Appl. Math. Comput.* 169, 321-338, 2005.
- [62] Wazwaz, A.M., Travelling wave solutions of generalized forms of Burgers, Burgers-KdV and Burgers-Huxley equations. *Appl. Math. Comput.* 169, 639-656, 2005.
- [63] Wazwaz, A.M., The extended tanh method for new solitons solutions for many forms of the fifth-order KdV equations. *Appl. Math. Comput.* 184 (2), 1002-1014, 2007.
- [64] Wazwaz, A.M., New solitary wave solutions to the modified forms of Degasperis-Procesi and Camass-Holm equations. *Appl. Math. Comput.*, 2006.
- [65] Khuri, S.A., A complex tanh-function method applied to nonlinear equations of Schrödinger type. *Chaos, Solitons and Fractals* 20, 1037-1040, 2004.
- [66] Feng, X., Exploratory approach to explicit solution of nonlinear evolutions equations. *International Journal of Theoretical Physics* 39, 207-222, 2002.
- [67] Li, Z.B., Liu, Y.P., Rath, A Maple package for finding travelling solitary wave solutions to nonlinear evolution equations. *Computer Physics Communications* 148, 256-266, 2002.
- [68] Peng, Y.Z., A mapping method for obtaining exact travelling wave solutions to nonlinear evolution equations. *Chinese Journal of Physics* 41, 103-110, 2003.
- [69] Yomba, E., Construction of new soliton-like solutions of the $(2 + 1)$ dimensional dispersive long wave equation. *Chaos, Solitons & Fractals* 20, 1135-1139, 2004.
- [70] Jawada, A.J.M., Petkovic', M.D., Biswas, A., Soliton solutions of Burgers equations and perturbed Burgers equation. *Applied Mathematics and Computation* 216, 3370-3377, 2009.

- [71] Fan, E., Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations. *Physics Letters A* 277, 212-218, 2000.
- [72] Fan, E., Travelling wave solutions for generalized Hirota-Satsuma coupled KdV systems. *Zeitschrift fur Naturforschung A* 56, 312-318, 2001.
- [73] El-Wakil, S.A., El-Labany, S.K., Zahran, M.A., Sabry, R., Modified extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation* 161, 403-412, 2005.
- [74] El-Wakil, S.A., El-Labany, S.K., Zahran, M.A., Sabry, R., Modified extended tanh-function method for solving nonlinear partial differential equations. *Physics Letters A* 299, 179-188, 2002.
- [75] Akçağıl, Ş., Aydemir, T., New exact solutions for the Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov, the Newell-Whitehead-Segel and the Rabinovich wave equations by using a new modification of the tanh-coth method. *Cogent Mathematics* (2016), 3:1193104, <http://dx.doi.org/10.1080/23311835.2016.1193104>.
- [76] Kudryashov, N.A., Loguinova, N.B., Be careful with the Exp-function method. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 14, 1881-1890, 2009.
- [77] Kudryashov, N.A., On "new travelling wave solutions" of the KdV and KdV-Burgers equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 14, 1891-1900, 2009.
- [78] Kudryashov, N.A., Seven common errors in finding exact solutions of nonlinear differential equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 14, 3507-3529, 2009.
- [79] Ayati, Z., Comparing between (G'/G) -expansion method and tanh-method. *Open Engineering*, Vol. 4, Issue 4, 334-340, 2014.
- [80] Parkes, E.J., Observations on the basic (G'/G) expansion method method for finding solutions to nonlinear evolution equations. *Applied Mathematics and Computation* 217, 1759-1763, 2010.
- [81] Parkes, E.J., A note on "New travelling wave solutions to the Ostrovsky equation". *Applied Mathematics and Computation* 217, 3575-3577, 2010.
- [82] Korpusev, M.O., Blow up in nonclassical nonlocal equations, URSS 8, Moscow, Russia, 2011.
- [83] Rabinovich, M. I., *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Radiofizika* 17, no. 3, 477-510, 1974.

- [84] Rabinovich, M.I., Trubetskov, D.I., Introduction in theory of waves, Nauka, Moscow, Russia, 1984.
- [85] Lonngren, K.E., Hsuan, H.C.S., Ames, W.F., On the soliton, invariant, and shock solutions of a fourth-order nonlinear equation. J. Math. Anal. Appl. 52 538-545, 1975.
- [86] Akçağıl, Ş., Aydemir, T., Comparison between the (G'/G) -expansion method and the modified extended tanh method. Open Physics 14, 88-99, 2016.
- [87] Abazari, R., The (G'/G) -expansion method for Tzitzéica type nonlinear evolution equations. Mathematical and Computer Modelling 52, 1834-1845, 2010.
- [88] Bekir, A., Uygun, F., Exact travelling wave solutions of nonlinear evolution equations by using the (G'/G) -expansion method. Arab Journal of Mathematical Sciences 18, 73-85, 2012.
- [89] Wazwaz, A.M., The tanh method: exact solutions of the sine-Gordon and the sinh-Gordon equations. Applied Mathematics and Computation 167, 1196-1210, 2005.
- [90] Liu, X., Zhang, W., Li, Z., Application of improved (G'/G) -expansion method to travelling wave solutions of two nonlinear evolution equations, Advances in Applied Mathematics and Mechanics Vol. 4, No.1,122-130, 2015.
- [91] Naher, H., Abdullah, F.A., New generalized and improved new approach of generalized (G'/G) -expansion method for nonlinear evolution equations in mathematical physics, Journal of the Egyptian Mathematical Society vol.22, issue 3, 390-395, 2014.
- [92] Alam, M.N., Akbar, M.A., The new approach of the generalized (G'/G) -expansion method for nonlinear evolution equations, Ain Shams Engineering Journal vol.5, issue 2, 595-603, 2014.
- [93] Alam, M.N., Akbar, M.A., Mohyud-Din, S.T., General traveling wave solutions of the strain wave equation in microstructured solids via the new approach of generalized (G'/G) -expansion method, Alexandria Engineering Journal 53, 233-241, 2014.

- [94] Alam, M.N., Akbar, M.A., Traveling wave solutions for the mKdV equation and the Gardner equations by new approach of the generalized (G'/G) -expansion method, Journal of the Egyptian Mathematical Society vol.22, issue 3, 402-406, 2014.
- [95] Demiray, S., Ünsal, Ö., Bekir, A., Exact solutions of nonlinear wave equations using $(G'/G, 1/G)$ -expansion method. Journal of the Egyptian Mathematical Society 23(1), 78-84, 2015.
- [96] Kaplan, M., Bekir, A., Özer, M., Solving nonlinear evolution equation system using two different methods. Open Physics 13 383-388, 2015.
- [97] L-Xiao, L., E-Qiang, L., M-Liang, L., The $(G'/G, 1/G)$ -expansion method and its application to travelling wave solutions of the Zakharov equations. Appl Math-A J Chinese Univ.25(4), 454-462, 2010.
- [98] Zayed, E.M.E., Hoda İbrahim, S.A., Abdelaziz, M.A.M., Traveling wave solutions of the nonlinear (3+1)-dimensional Kadomtsev-Petviashvili equation using the two variables $(G'/G, 1/G)$ -expansion method. J Appl Math. 2012,1-8, 2012.
- [99] Zayed, E.M.E., Abdelaziz, M.A.M., The two-variable $(G'/G, 1/G)$ -expansion method for solving the nonlinear KdV-mKdV equation, Math Probl Eng. 2012, 1-14, 2012.
- [100] L-Xiao, L., M-Liang, L., The $(G'/G, 1/G)$ -expansion method and travelling wave solutions for a higher-order nonlinear schrödinger equation. Appl. Math. Comput. 208(2), 440-445, 2009.
- [101] Zhang, J.I., Wang, U.M., Wang, M.L., Exact solutions to the two nonlinear equations, Acta Physica Sinica 52 (7), 1574-1578, 2003.
- [102] Inan, I.E., Ugurlu, Y., New Applications of the $(G'/G, 1/G)$ -Expansion Method, Acta Physica Polonica 128, 245-252, 2015.
- [103] Gözükcızıl, Ö.F., Akçağıl, Ş., Aydemir, T., Unification of all hyperbolic tangent function methods. Open Physics Ms. No. OPENPHYS-D-16-00079R1 in press.

ÖZGEÇMİŞ

Tuğba AYDEMİR 2005 yılında Hacettepe Üniversitesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Matematik Öğretmenliği (Almanca) Bölümü'nden mezun oldu. 2003-2009 yılları arasında çeşitli eğitim kurumlarında Matematik Öğretmeni olarak görev yaptı. 2011 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimini bitirerek aynı yıl doktora eğitimine başladı. Almanca ve İngilizce bilen Tuğba Aydemir, Şubat 2009 beri Yalova Üniversitesi Rektörlüğü'nde Eğitim-Öğretim Planlamacısı olarak görev yapmaktadır.