

**T.C.  
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TARIMSAL DENEME PLANLARININ BAYESIAN YÖNTEMİ İLE  
ANALİZLERİ**

**Ebru KAYA BAŞAR**

**DOKTORA TEZİ  
ZOOTEKNİ ANABİLİM DALI**

**2016**

**T.C.  
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TARIMSAL DENEME PLANLARININ BAYESIAN YÖNTEMİ İLE  
ANALİZLERİ**

**Ebru KAYA BAŞAR**

**DOKTORA TEZİ  
ZOOTEKNİ ANABİLİM DALI**

**(Bu tez Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından  
2012.03.0121.005 nolu proje ile desteklenmiştir.)**

**2016**

T.C.  
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TARIMSAL DENEME PLANLARININ BAYESIAN YÖNTEMİ İLE  
ANALİZLERİ

Ebru KAYA BAŞAR

DOKTORA TEZİ  
ZOOTEKNİ ANABİLİM DALI

Bu tez .../.../2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mehmet Ziya FIRAT  
Prof. Dr. M. Soner BALCIOĞLU  
Prof. Dr. Ayşe ANAFARTA  
Doç. Dr. Doğan NARİNÇ  
Yrd. Doç. Dr. Burcu MESTAV



## ÖZET

### TARIMSAL DENEME PLANLARININ BAYESIAN YÖNTEMİ İLE ANALİZLERİ

Ebru KAYA BAŞAR

Doktora Tezi, Zootekni Anabilim Dalı  
Danışman: Prof. Dr. Mehmet Ziya FIRAT  
Aralık 2016, 119 sayfa

Denemelerin planlanması ve analizleri; mühendislik, tıp, doğa bilimleri, sosyal bilimler gibi alanlarda olduğu kadar ziraat alanında çalışan araştırmacılar için de oldukça önemlidir. Olabilirlik fonksiyonu ile önsel dağılımlar kullanılarak elde edilen sonsal dağılımın yorumlanması olarak özetlenen Bayesci yöntem Markov Zinciri Monte Carlo yöntemlerinin geliştirilmesi ile beraber kompleks modellerin üstesinden kolaylıkla gelebilmektedir.

Bu çalışmanın amacı tesadüf parselleri deneme planı, tesadüf bloklarında faktöriyel denemeler, iç içe deneme planları ve genel doğrusal karışık model gibi tarımsal denemelerde sıklıkla kullanılan deneme planlarının klasik yaklaşıma alternatif olarak Bayesci yöntem ile çözümlerini sunmaktır.

**ANAHTAR KELİMELER:** Deneme desenleri, Bayesci yöntem, Önsel Dağılım.

**JÜRİ:** Prof. Dr. Mehmet Ziya FIRAT (Danışman)  
Prof. Dr. M. Soner BALCIOĞLU  
Prof. Dr. Ayşe ANAFARTA  
Doç. Dr. Doğan NARİNÇ  
Yrd. Doç. Dr. Burcu MESTAV

## **ABSTRACT**

### **ANALYSIS OF AGRICULTURAL EXPERIMENTAL DESIGN BY BAYESIAN METHODS**

**Ebru KAYA BAŞAR**

**PhD Thesis in Animal Science**

**Supervisor: Prof. Dr. Mehmet Ziya FIRAT**

**December 2016, 119 pages**

Experimental design and analysis is an invaluable tool in agricultural research as in engineering, medicine, natural sciences and social sciences. The advancements in Markov Chain Monte Carlo methods allowed Bayesian method which could be summarized as interpretation of posterior distributions which are obtained through likelihood function and prior distributions, to overcome complex models.

The aim of this study is to give alternative solutions to randomized complete block design, factorial design, nested design and general linear mixed model which are commonly used in agricultural experimental designs by using Bayesian methods.

**KEYWORDS:** Experimental designs, Bayesian analysis, Prior distribution.

**COMMITTEE:** Prof. Dr. Mehmet Ziya FIRAT (Supervisor)  
Prof. Dr. Soner BALCIOĞLU  
Prof. Dr. Ayşe ANAFARTA  
Assoc. Prof. Dr. Doğan NARİNÇ  
Asst. Prof. Dr. Burcu MESTAV

## ÖNSÖZ

Bayes teoreminin ortaya çıkışı 18. yüzyıla dayansa da klasik yaklaşımda ortaya çıkan yenilikler ve Bayesci hesaplama zorluklarından dolayı uzun süre klasik yaklaşımın gölgesi altında kalmıştır. Markov Zinciri Monte Carlo yöntemlerinin geliştirilmesi ve bilgisayar teknolojisindeki hızlı yükseliş ile günümüzde klasik yaklaşıma alternatif olarak kullanılan bir istatistiksel yöntem haline gelmiştir.

Tarımsal alanda yapılan çalışmalarda sıklıkla kullanılan istatistiksel yöntemlerden biri de deneme planlaması yöntemleridir. Bu nedenle bu çalışmada bilinen bazı deneme planlarının klasik yöntemlerle çözümü yerine Bayesci çözümleri ele alınmıştır. Bu amaçla gerçek deneme planlarından elde edilen veri setleri kullanılmıştır ve yöntemin uygulanabilirliği gösterilmiştir. Yapılan bu çalışmanın, uygulamaların yaygınlaştırılmasında katkısı olmasını dilerim.

Ayrıca, çalışmada kullanılan terim dizgisine ilişkin kısa bir bilgi vermek isterim. Bazı terimlerin literatürde fikir birliğine varılmış tek bir karşılığı bulunmamaktadır. Bu nedenle çalışma boyunca “Bayesci”, Bayes görüşüne ait anlamında kullanılmıştır. “Prior Distribution”, Önsel Dağılım; “Likelihood Function” Olabilirlik Fonksiyonu; “Posterior Distribution”, Sonsal Dağılım olarak kullanıldı. Bunun yanı sıra “Informative – Noninformative Prior” için Bilgi içeren ve Bilgi içermeyen önsel dağılım, “Proper-Improper Prior” için Belirli ve Belirsiz önsel dağılım, “Conjugate Prior” için ise Eşlenik önsel dağılım ifadeleri kullanıldı.

Bana bu konuda çalışma olanağı veren ve değerli eleştirileri ile yol gösteren danışmanım Sayın Prof. Dr. Mehmet Ziya FIRAT’a, Tez İzleme Komitesi üyesi olarak sağladıkları değerli katkıları için Sayın Prof. Dr. Ayşe ANAFARTA ve Sayın Prof. Dr. M. Soner BALCIOĞLU’na ve çalışma arkadaşlarım Arş. Gör. Emre KARAMAN’a ve Uzman Nilgün YAPICI’ya teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmada kullanılan veri setleri için Prof. Dr. Sahriye SÖNMEZ’e ve Öğr. Gör. Dilek Saadet ÜRAS’a teşekkür ederim.

Son olarak, sonsuz destekleri ile hep yanımda olan aileme ve çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Hülya BAYRAK’a şükranlarımı sunarım.

## İÇİNDEKİLER

|                                                                      |      |
|----------------------------------------------------------------------|------|
| ÖZET.....                                                            | i    |
| ABSTRACT.....                                                        | ii   |
| ÖNSÖZ.....                                                           | iii  |
| İÇİNDEKİLER.....                                                     | iv   |
| SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....                                  | vi   |
| ŞEKİLLER DİZİNİ.....                                                 | vii  |
| ÇİZELGELER DİZİNİ.....                                               | viii |
| 1. GİRİŞ.....                                                        | 1    |
| 2. KURAMSAL BİLGİLER ve KAYNAK TARAMASI .....                        | 3    |
| 2.1. Deneme Planlaması.....                                          | 3    |
| 2.2. Bayesci Yaklaşımın Oluşumu ve Katkıda Bulunanlar.....           | 7    |
| 2.3. Bayesci Yorumlama.....                                          | 8    |
| 2.3.1. Bayes teoremi.....                                            | 8    |
| 2.3.2. Önsel (Prior) dağılım.....                                    | 10   |
| 2.3.2.1. Bilgi içeren ve içermeyen önsel dağılımlar.....             | 10   |
| 2.3.2.2. Belirli ve belirsiz önsel dağılımlar.....                   | 11   |
| 2.3.2.3. Eşlenik önsel dağılımlar.....                               | 12   |
| 2.3.3. Sonsal (Posterior) dağılım.....                               | 13   |
| 2.3.4. Bayesci yorumlamanın temel kavramları.....                    | 14   |
| 2.3.4.1. Nokta tahmini.....                                          | 14   |
| 2.3.4.2. Bayesci güven aralıkları.....                               | 15   |
| 2.3.4.3. Marjinal ve koşullu sonsal dağılımlar.....                  | 16   |
| 2.3.4.4. Hipotez testleri.....                                       | 16   |
| 2.4. Markov zinciri Monte Carlo (MCMC) simülasyonu.....              | 17   |
| 2.4.1. Metropolis algoritması.....                                   | 19   |
| 2.4.2. Metropolis Hasting (MH) algoritması.....                      | 20   |
| 2.4.2.1. Gibbs örnekleme.....                                        | 20   |
| 2.4.2.2. Rastsal yürüyüş Metropolis algoritması.....                 | 21   |
| 2.4.3. Yakınsamanın değerlendirilmesi.....                           | 22   |
| 2.4.3.1. Görsel değerlendirme.....                                   | 22   |
| 2.4.3.2. İstatistiksel testler ile değerlendirme.....                | 24   |
| 2.5. Yazılım Programı.....                                           | 25   |
| 3. MATERYAL VE METOT.....                                            | 27   |
| 3.1. Materyal.....                                                   | 27   |
| 3.2. Metot.....                                                      | 27   |
| 3.2.1. Tesadüf parselleri deneme planı.....                          | 27   |
| 3.2.2. Tesadüf bloklarında tek faktörlü deneme planı.....            | 31   |
| 3.2.3. Tesadüf bloklarında iki faktörlü faktöriyel deneme planı..... | 33   |
| 3.2.4. İç içe deneme planı.....                                      | 37   |
| 3.2.5. Genel doğrusal karışık model.....                             | 39   |
| 4. BULGULAR ve TARTIŞMA.....                                         | 41   |
| 4.1. Veri Analizi.....                                               | 41   |

|                                                                                |     |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.2 Tesadüf Parselleri Deneme Planı.....                                       | 41  |
| 4.3. Tesadüf Bloklarında Tek Faktörlü Deneme Planı.....                        | 48  |
| 4.4. Tesadüf Bloklarında İki Faktörlü Faktöriyel Denemeler.....                | 52  |
| 4.5. İç içe Deneme Planı.....                                                  | 57  |
| 4.5.1. Uygulama 1.....                                                         | 57  |
| 4.5.2. Uygulama 2.....                                                         | 62  |
| 4.6. Genel Doğrusal Karışık Model.....                                         | 63  |
| 5. SONUÇ.....                                                                  | 69  |
| 6. KAYNAKLAR.....                                                              | 71  |
| 7. EKLER.....                                                                  | 77  |
| Ek-1: Rastsal etkili tesadüf parselleri deneme planının bayesci<br>çözümü..... | 77  |
| Ek-2: Tesadüf bloklarında tek faktörlü deneme planı bayesci<br>çözümü.....     | 81  |
| Ek-3: Tesadüf bloklarında faktöriyel deneme planı bayesci<br>çözümü.....       | 87  |
| Ek-4: İç içe deneme planının bayesci çözümü .....                              | 99  |
| Ek-5: Genel doğrusal karışık model bayesci çözümü.....                         | 105 |
| Ek-6: İz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri.....                     | 108 |
| Ek-7: İz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri.....                     | 112 |
| Ek-8: Öz kardeşlerin 305 gün süt verimleri (kg).....                           | 119 |
| ÖZGEÇMİŞ                                                                       |     |

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

### Simgeler

|          |         |
|----------|---------|
| $\infty$ | Oransal |
| $\chi^2$ | Ki kare |

### Kısaltmalar

|       |                                                       |
|-------|-------------------------------------------------------|
| ANOVA | Varyans analizi                                       |
| BF    | Bayes faktör                                          |
| HPD   | En yüksek sonsal yoğunluk bölgesi                     |
| IG    | Ters (Inverse) Gama dağılımı                          |
| MCSE  | Monte Carlo standart hatası                           |
| MH    | Metropolis-Hasting                                    |
| ML    | En çok olabilirlik                                    |
| MCMC  | Markov zinciri Monte Carlo (Markov Chain Monte Carlo) |
| N     | Normal dağılım                                        |
| REML  | Kısıtlanmış en çok olabilirlik                        |

## ŞEKİLLER DİZİNİ

|                                                                                                                                                                                                        |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil.2.1 Farklı veri seti ve önsel dağılımların sonsal dağılım üzerine etkisi...                                                                                                                      | 13 |
| Şekil 2.2. $\theta$ parametresi için iz grafikleri: a) Markov Zinciri durağan dağılıma ulaşması b) Markov Zincirinin iyi karışmadığı (yüksek otokorelasyon) c) Yakınsama gerçekleşmediği durumlar..... | 23 |
| Şekil 2.3. Gecikmelere karşı otokorelasyon grafiği: a) Düşük otokorelasyon, b) Yüksek otokorelasyon.....                                                                                               | 23 |
| Şekil 4.1. a) Genel ortalamaya ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri b) Sulama etkisinin 1. seviyesine ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri.....                          | 43 |
| Şekil 4.2.a) Sulama etkisinin 2. seviyesine ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri b) Sulama etkisinin 2. seviyesine ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri.....             | 44 |
| Şekil 4.3.a) S1-S2'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri b) S1-S3'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri.....                                                           | 45 |
| Şekil 4.4.a) S2-S3'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri b) Hata varyansına ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri.....                                                   | 46 |
| Şekil 4.5.a) Genel ortalamaya ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri b) Hata varyansına ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri.....                                          | 50 |
| Şekil 4.9.a) Genel ortalamaya ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri b) Hata varyansına ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri.....                                          | 54 |
| Şekil 4.17.a) Genel ortalamaya ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri b) Cinsiyete ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri.....                                               | 58 |
| Şekil 4.18.a) DT'ye ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri b) Hata varyansına ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri.....                                                    | 59 |
| Şekil 4.19.a) $\sigma_\alpha^2$ 'ye ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri b) $\sigma_{\beta(\alpha)}^2$ 'ye ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri.....                     | 60 |
| Şekil 4.20.a) Genel ortalamaya ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri b) hys'ye ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri.....                                                  | 65 |
| Şekil 4.21. dim'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri.....                                                                                                                             | 66 |

|                                                                                                                                                                                                                     |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Şekil 4.22.a) $\sigma_{\alpha}^2$ 'ye ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri                                                                                                                           |     |
| b) $\sigma_{\epsilon}^2$ 'ye ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri.....                                                                                                                               | 67  |
| Şekil 4.6.a) B1'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri b) B2'ye<br>ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri c) B3'e ait iz,<br>otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikler.....            | 108 |
| Şekil 4.7.a) S1'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri b) S2'ye<br>ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri c) S3'e ait iz,<br>otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri.....           | 109 |
| Şekil 4.8.a) S1-S2'ye ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri<br>b) S1-S3'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri<br>c) S1-S4'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri.....  | 110 |
| Şekil 4.9.a) S2-S3'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri<br>b) S2-S4'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri<br>c) S3-S4'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri.....   | 111 |
| Şekil 4.10.a) B1'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri<br>b) B2'ye ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri<br>c) B3'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri.....          | 112 |
| Şekil 4.11.a) S1'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri<br>b) S2'ye ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri<br>c) S3'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri.....          | 113 |
| Şekil 4.12.a) T1'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri b) T2'ye<br>ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri c) S1-S2'ye ait<br>iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri.....      | 114 |
| Şekil 4.13.a) S1-S3'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri<br>b) S1-S4'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri<br>c) S2-S3'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri.....  | 115 |
| Şekil 4.14.a) S2-S4'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri<br>b) S1-T1'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri<br>c) S1-T2'ye ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri..... | 116 |
| Şekil 4.15.a) S2-T1'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri<br>b) S2-T2'ye ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri<br>c) S3-T1'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri..... | 117 |
| Şekil 4.16. S3-T2'ye ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri.....                                                                                                                                       | 118 |

## ÇİZELGELER DİZİNİ

|                                                                                            |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Çizelge 2.1. Eşlenik dağılımlar.....                                                       | 12  |
| Çizelge 2.2. Yakınsama testleri ve yorumlanması.....                                       | 24  |
| Çizelge 4.1. Tanımlayıcı istatistikler.....                                                | 41  |
| Çizelge 4.2. Model parametreleri için teşhis testleri.....                                 | 47  |
| Çizelge 4.3. Model parametreleri için sonsal özet istatistikleri.....                      | 47  |
| Çizelge 4.4. Tanımlayıcı istatistikler.....                                                | 48  |
| Çizelge 4.5. Model parametreleri için teşhis testleri.....                                 | 51  |
| Çizelge 4.6. Model parametreleri için sonsal örnek özet istatistikleri.....                | 52  |
| Çizelge 4.7. Model parametreleri için teşhis testleri.....                                 | 55  |
| Çizelge 4.8. Model parametreleri için sonsal özet istatistikleri.....                      | 56  |
| Çizelge 4.9. Tanımlayıcı istatistikler.....                                                | 57  |
| Çizelge 4.10. Model parametreleri için teşhis testleri.....                                | 61  |
| Çizelge 4.11. Model parametreleri için sonsal özet istatistikleri.....                     | 61  |
| Çizelge 4.13. Ortalama ve varyans unsurları için ANOVA, ML, REML,<br>Bayesci sonuçlar..... | 63  |
| Çizelge 4.14. Model parametreleri için teşhis testleri.....                                | 68  |
| Çizelge 4.15. Model parametreleri için sonsal özet istatistikleri.....                     | 68  |
| Çizelge 4.12. Öz kardeşlerin 305 gün süt verimleri (kg).....                               | 119 |

## 1. GİRİŞ

Günümüzde tarım, tıp, endüstri, ekonomi, çevre bilimlerinden kalite kontrolüne kadar hemen her alanda ortaya çıkan problemlerin çözümünde istatistik biliminden yararlanılmaktadır. İstatistik, veri seti ile hipotezler arasındaki ilişkiye odaklanan matematiksel ve kavramsal bir disiplindir. Veri seti, popülasyondaki bireylere ait ölçümlerin bir setidir. Hipotez ise bilimsel çalışmanın amacını ifade eden genel bir cümledir. İstatistiksel bir hipotez tüm örnek uzayını bir olasılık dağılımı ile açıklayabilen genel bir cümle olarak tanımlanabilir. İstatistiksel yöntemler bir örneklem ışığında, olasılık teorisini kullanarak istatistiksel hipotezleri matematiksel ve kavramsal anlamda değerlendirmeyi sağlar.

İstatistik biliminin gelişim sürecinde klasik (Frekansçı, Berkeley) yaklaşım ve Bayesci yaklaşım olmak üzere iki yaklaşım etkili olmuştur. Bu yaklaşımlar pek çok konu ve kavramı farklı yorumladığı için biri diğerine alternatif olmuştur. Örneğin, klasik yaklaşım parametreyi bilinmeyen bir sabit değişken olarak değerlendirir ve olasılığın frekansa dayalı tahminine dayanır. Bu tahmine göre bir olayın ortaya çıkma olasılığı, defalarca yapılan denemeler sonucunda o olayın ortaya çıkma sıklığıdır. Bayesci yaklaşım ise parametreyi bir olasılık dağılımına sahip şansa bağlı bir değişken olarak tanımlar. Bayesci yaklaşımda bir olayın ortaya çıkma olasılığı, o olaya ilişkin ön bilgi ile denemeden elde edilen verinin birleştirilmesiyle elde edilir (Ekici, 2009). Bayesci yaklaşıma göre belirsizlikler olasılıklarla ifade edilmektedir. Klasik yaklaşımda ise belirsizliklere varsayımlar doğrultusunda yaklaşarak kabul edilmesi ya da kabul edilmemesi yönünde karar verilir.

Bayesci yaklaşım, klasik yaklaşımın aksine sadece örneklem bilgisini değil örneklem bilgisi ile bir teoriden ya da araştırmanın başında sübjektif olarak belirlenen önsel dağılımı birleştirerek karar verme yöntemlerine farklı bir bakış açısı getiren bir tahmin yöntemidir. Her ne kadar Bayes teoreminin ortaya çıkışı 18. yüzyıla dayansa da uzun süre klasik yaklaşımın gölgesi altında kalmıştır. Bunun nedenleri klasik yaklaşımda yaşanan ilerleme, bazı klasik istatistikçilerin Bayesci yaklaşımda önsel bilgi ile analize dahil edilen sübjektif bilgiyi kabul etmemeleri ve bir diğeri ise Bayesci yöntemlerdeki sayısal integrallerin fazlalığından kaynaklanan hesaplama zorluklarıdır. Ancak klasik bir istatistikçi olan Freedman, verilerden çıkarsama yapılacağı zaman, en tutucu istatistikçinin bile, bazı varsayımları ve önsel bilgileri kullanmak zorunda kalacağını ifade etmiştir. Bu önsel bilgilerin karar verme sürecinde nasıl kullanılacağı ve analize temel oluşturan bu varsayımların nasıl test edileceği noktasında Bayesci yaklaşım önsel bilgilerin formüle edilmesiyle parametreler için sonsal dağılımın pratik olarak elde edilmesini sağlayan ideal bir yöntem olarak ortaya çıkmaktadır. Bayesci yaklaşımda genel olarak analitik çözümleme ve sayısal çözümleme söz konusudur. Yüksek boyutlu modellerin veya eşlenik olmayan önsel dağılımların olduğu durumlarda sonsal dağılımların elde edilmesi güçtür ve bileşik sonsal dağılımlardan parametreler için koşullu sonsal dağılımları elde etmek zor olacaktır. Bu gibi problemlerin üstesinden gelmek için analitik çözümleme yerine Markov Zinciri Monte Carlo yöntemleri gibi sayısal çözümlemeler tercih edilmektedir. Böylece Markov Zinciri Monte Carlo yöntemlerinin geliştirilmesi ve bilgisayar teknolojisindeki hızlı yükseliş ile Bayesci yaklaşım günümüzde klasik yaklaşıma alternatif olarak kullanılan bir istatistiksel yöntem haline gelmiştir (Gelfand ve Smith 1990, Gelfand vd. 1990).

Hemen her probleme özel geliştirilen istatistik yöntemlerin en sık kullanılanlarından biri de deneme planlaması yöntemleridir. İlk olarak 1920'lerde ünlü istatistikçi Ronald A. Fisher tarafından temelleri atılan denemelerin planlanması ve analizleri; mühendislik, tıp, doğa bilimleri, sosyal bilimler, ziraat ve benzeri alanlarda çalışan araştırmacılar için oldukça önemlidir. Bu nedenle deneme planlamasında kullanılan yöntemlerin ve bu yöntemlerin dayandıkları temel ilkelerin çok iyi anlaşılması gerekmektedir. ANOVA ile başlayan deneme planlaması yöntemleri faktöriyel denemelerle çeşitlenmiş ve bugün Taguchi yöntemine kadar uzanmaktadır. Bayes teoremine dayanarak yapılandırılan Bayesci yaklaşım birçok istatistiksel yöntem de olduğu gibi deneme planlarının analizinde de klasik yaklaşıma alternatif olarak kullanılmaktadır.

Literatürdeki gelişmeler ışığında belirlenmiş olan bu çalışmanın amacı; tesadüf parselleri, tesadüf bloklarında tek faktörlü deneme planı, tesadüf bloklarında faktöriyel denemeler, iç içe sınıflandırılmış deneme planı ve genel doğrusal karışık model gibi tarımsal denemelerde sıklıkla kullanılan deneme planlarının Bayesci analiz yöntemleri kullanılarak çözümlerini elde etmek ve sayısal örneklerle sonuçların uygulanabilirliğini göstermektir. Ayrıca çalışma sonunda yöntemin üstünlükleri ve zayıf yönleri de tartışılacaktır. Bu amaç doğrultusunda aşağıda, tez çalışmasının bölümlerinin içerikleri kısaca verilmiştir.

Birinci bölümde, tez konusuna giriş yapılmış ve tezin amacı anlatılmıştır.

İkinci bölümde kuramsal bilgiler ve kaynak taraması yer almaktadır. Bu bölümde deneme planlamasının ortaya çıkışı hakkında kısaca bilgi verildikten sonra temel kavramlara değinilmiştir. Sonrasında Bayesci yorumlamanın tarihsel gelişim sürecinden bahsedilmiştir. Bayes Teoremi ve Bayesci yaklaşımda önemli yere sahip önsel dağılımlar tanıtılmıştır. Bayesci kavramlardan bahsedilmiştir ve Markov Zinciri Monte Carlo (MCMC) yöntemleri ele alınmıştır. MCMC yöntemlerinden, Metropolis-Hasting, Gibbs örnekleme ve rastsal yürüyüş Metropolis algoritmaları tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde materyal ve metot bulunmaktadır. Bu bölümde tez çalışmasında kullanılan veri setleri ve tarımsal denemelerde sıklıkla kullanılan belli başlı deneme planları tanıtılmıştır. Ayrıca bu deneme planlarının Bayesci yaklaşım kullanılarak çözümleri elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde bulgular ve tartışma yer almaktadır. Her bir tarımsal deneme planı için SAS programında PROC MCMC prosedürü kullanılarak elde edilen Bayesci sonuçlar verilmiş ve bu sonuçlar tartışılmıştır.

Tezin beşinci ve son bölümünde ise sonuçlar bulunmaktadır. Çalışma Bayesci yönteminin avantajları ve dezavantajlarının değerlendirilmesiyle sonlandırılmıştır.

## 2. KURAMSAL BİLGİLER ve KAYNAK TARAMALARI

Bu bölümde tez konusu ile ilgili kuramsal bilgilere ve kaynak taramalarına yer verilmiştir. Bu amaç doğrultusunda öncelikle deneme planlamasının kısa bir tarihçesi verildikten sonra deneme planlaması tanıtılmış sonrasında ise Bayesci yaklaşımın oluşumu ve katkı sağlayanlara değinilmiştir.

### 2.1. Deneme Planlaması

Deneme planlaması çalışmaları 1920’li yıllarda Ronald Fisher tarafından farklı gübre ve gübre dozları ile iklim koşullarının ve sulama düzeylerinin çeşitli ürünler üzerine etkilerini belirlemek amacıyla geliştirilmiştir. Fisher, Londra’daki Rothamsted Tarımsal Denemeler İstasyonu’ndaki tamamen yetiştirme niteliğindeki denemelerin veri analizi ve istatistikinden sorumlu araştırmacı olarak görev yapmaktaydı. Yapılan bu çalışmalar sonucunda, çeşitli özel durumları daha kolay çözmeye ve hedefe daha çabuk ulaşma olanakları ortaya çıkmıştır. Sonrasında Yates, Fisher ve arkadaşları günümüzde hala kullanılan ortogonal (dik) tasarımlar ve Latin kare tasarımları gibi birçok kavram ve yöntemin öncülüğünü yapmışlardır. Varyans analizi (ANOVA) ve çok etkenli tasarımlar ile ilgili çalışmalar yürütmüşlerdir. Tesadüf bloklarından başlayan deneme planları, tek faktörlü denemeler için Latin kare, çok faktörlü denemeler için bölünmüş parsellere kadar ulaşmış; eksik bloklardan Latisle başlayan deneme planları Youden Kare ve etkilerin karıştırılmasına kadar uzanan bir gelişme göstermiştir (Açıkgöz 1993).

1940’lı yıllarda II. Dünya Savaşı’nın etkisi ile bilim, silah sanayi hizmetine yoğunlaşmıştır. 1950’li yıllarda ise üretimde kaliteyi artırma görüşü yaygınlaşmıştır ve sanayi ürünlerinde kaliteyi geliştirmek amacıyla istatistiksel yöntemler özellikle de deneme planlaması çalışmaları artmıştır. 1951 yılında Box ve Wilson optimum durumların belirlenmesi için Cevap Yüzeylerini geliştirmiştir. Cevap yüzeylerinin uygulama alanlarının genişlemesiyle model yapılarında da değişiklikler olmuş ve bu değişiklikler özellikle Poisson ve Gama modellerinin cevap yüzeyi yönteminde kullanılması fikrini ortaya çıkarmıştır (Baş 2010). Bununla beraber Bayesci denemeler de gündeme gelmiştir (Myers 1999).

Denemeler, bazı olaylar üzerinde bir veya daha fazla sayıdaki faktörün etkisini araştırmak ve bu olaylara ilişkin süreç hakkında çalışmalar yapmak olarak tanımlanabilir. Denemelerin amacı, sistem hakkında bilgi elde etmek ve sistem üzerindeki yeni koşulların etkisini ortaya çıkarmaktır. Deneme planlamasının temel fikri, kontrol değişkenlerinin değerlerini uygun bir şekilde seçerek ilgilenilen değerler hakkında istatistiksel yorumlama geliştirmektir. Tahmin problemlerinde, genellikle küçük varyanslı tahminler arzu edildiğinden, kontrol değişkenleri küçük değişkenliğe ulaşmak için seçilir. Ancak burada neyin tahmin edileceği ve nasıl tahmin edileceği önemlidir. Araştırmacı, denemenin amacını tanımlayarak bir deneme planının seçimi için çeşitli kriterler üretir. Deneme planı, denemenin tüm yönünü açıkça belirtmeli ve deneme başlamadan önce kontrol edilebilir değişkenlerin değerleri seçilmelidir. Kontrol değişkenleri; muamelenin seçimini, tamamen muamelelerin tanımlanmasını, bloklama faktörünün seçimini, rastsallaştırmanın nasıl yapılacağını, kullanılacak deneysel birimlerin tanımlarını, yürütülecek denemenin süresini, örnek büyüklüğünü ve her bir muameleye paylaştırılan gözlemlerin oranının seçimini içerir. Bunların hepsi denemenin

durumu ile ilgilidir. Deneme tasarlandığında, veri toplanmadan önce bu kararlar alınır ve veri sınırlı kaynaklar ile kısıtlandırılır (Chaloner ve Verdinelli 1995).

İstatistiksel deneme planlaması; denemenin planlama sürecidir. Böylece uygun veri toplanacak ve istatistiksel yöntemlerle analiz edilecektir. Geçerli sonuçlar ve objektif çıkarsamalar elde edilecektir. Veri setinden anlamlı sonuçlar elde etmek için deneme planlamasına istatistiksel yaklaşım gereklidir. Deneysel hatalara maruz kalan bir veri seti olduğunda, istatistiksel yöntemler analiz için tek objektif yaklaşımdır. Bunun için herhangi bir deneysel probleme iki bakış açısı bulunmaktadır: denemenin planlanması ve verinin istatistiksel analizi. Bu iki konu yakından ilişkilidir. Çünkü analiz yöntemi direk olarak deneme çalışmasına bağlıdır.

Denemenin planlanmasında üç temel prensip bulunmaktadır. Bunlar rastsallaştırma, tekerrür ve bloklama'dır. Rastsallaştırma deneme planlamasında denemenin temelini oluşturan köşe taşıdır. Rastsallaştırma ile söylenmek istenen hem deneme materyalinin atanması hem de yapılacak olan denemenin sırasının ikisinin birden rastgele olmasıdır. İstatistiksel yöntemler, gözlemlerin birbirinden bağımsız dağılan rastsal değişkenler olmasını gerektirir. Rastsallaştırma genellikle bu varsayımı geçerli kılar. Tekerrür, her bir faktör kombinasyonunun bağımsız tekrarı anlamındadır. Tekerrürün iki önemli özelliği vardır. Birincisi araştırmacıya deneme hatasını tahmin etme imkanı sağlar. Bu hatanın tahmini gözlenen farklılıkların gerçekten istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığının ölçülmesinde temel bir ölçüm birimi olarak kullanılır. İkinci olarak eğer örneklem ortalaması  $\bar{y}$ , denemedeki faktör seviyelerinden bir tanesinin gerçek ortalamasını tahmin etmede kullanılırsa, tekerrür bu parametrenin araştırmacı tarafından daha hassas olarak elde etmesine olanak sağlar. Tekerrür muameleler arası değişkenlik ile muameleler içi değişkenliği gösterir. Bloklama ise, ilgilendiğimiz faktörler arasında hassas bir şekilde karşılaştırma yapmamıza izin veren bir yöntemdir. Genellikle bloklama, gürültü (deneyi etkileyebilecek ancak bizim ilgilenmediğimiz) faktörlerinden kaynaklanan değişkenliği yok etmekte ya da azaltmakta kullanılır.

Deneme planlamasının en temel amaçlarından biri deneme birimleri arasındaki varyasyonun ölçüsü olan deneme hatasını minimum yapmaktır. Deneme desenlerinin analizinde, denemelerin gösterdiği varyasyonda; gerçek varyasyonla birlikte belirlenemeyen belirlense bile ortadan kaldırılamayan sistematik varyans vardır. Bu sistematik varyanslar sistematik hatalara neden olur ve ancak doğru bir deneme planlaması ile azaltılabilir. Deneme desenlerinin kullanılması, gerçek varyasyona ulaşmada önemli bir yöntemdir.

Sosyal bilimlerden mühendisliğe kadar her alanda kullanılan denemeler ziraat alanında yapılan çalışmalarda da önemli yer tutmaktadır. Tarımsal üretimi arttırma olanaklarını ortaya çıkarmayı hedefleyen araştırmalar, karşılaşılabilecek tüm durumları göz önünde bulundurur. Tarımsal denemelerde amaç, karşılaştırmalar sonucunda en uygun ekonomik verime sahip; çeşit, yöntem veya materyalin belirlenmesidir. Bu materyal tarla denemelerinde bitki, gübre çeşidi; bitkilerde hastalık ve böceklerin veya zararlı otların kontrolü için zirai ilaçlar olurken zooteknide ise hayvanlardır.

Deneme planlaması adımları şöyle özetlenebilir:

1. Problemin belirlenmesi
2. Yanıt değişkeninin seçimi
3. Faktör, seviye ve aralıkların belirlenmesi
4. Deneme deseninin seçilmesi
5. Denemenin yapılması
6. Verinin istatistiksel analizinin yapılması
7. Sonuçlar ve önerilerin elde edilmesi

Problemin belirlenmesi, yanıt değişkeninin seçimi, faktör, seviye ve aralıkların belirlenmesi denemelerin ön hazırlığını oluşturur. Bu çalışmada verilerin istatistiksel analizi maddesine ağırlık verilecektir. Verilerin analizinde kullanılan istatistiksel yöntemler sonuçların objektif olmasını sağlar.

Bayesci yöntem istatistiğin birçok alanında olduğu gibi deneme planlamasında da hızla bir ilerleme kaydetmiş ve popülerlik kazanmıştır. Bayesci çalışmalarda adından ilk söz ettirenlerden biri olan Hill (1965, 1967) dengeli bir veri setinin tek yönlü sınıflandırma modelinin Bayesci prensipleri kullanarak varyans unsurlarının tahminini elde etmiştir.

Lindley (1972) “İki yönlü varyans analizinin Bayesci çözümü” adlı tezinde iki yönlü varyans analizi için klasik istatistiksel analiz yerine alternatif olarak Bayesci çözümünü elde etmiştir. Daha sonra çok fazla sayıda iki yönlü sınıflandırma, iç içe deneme modeli gibi benzer çalışmalar yapılmıştır (Khuri ve Sahai 1985).

Box ve Tiao (1973) her bir varyans unsurunun marjinal sonsal dağılımlarını elde etmek için sayısal integrasyon kullanırken Broemeling (1985) analitik yaklaşımı kullanmıştır.

Chaloner ve Verdinelli (1995) çalışmalarında, bilimsel araştırmaların en önemli bölümü olan deneme planlamasını Bayesci yöntemler açısından ele almışlardır. Genellikle denemeyi yürütmek için bir önsel bilgi mevcut olduğundan, ideal olarak Bayesci yöntemlerin deneysel tasarıma katkıda bulunmak için uygun olduklarını ve ayrıca Bayesci karar kuramının yürütülen denemenin sonuçlarının kesinliğini arttıracaklarını belirtmiştir.

David (1996), etki aktarımlı deneme planı (crossover design) için Bayesci yöntemleri ele almış ve klasik yöntem ile karşılaştırmıştır. Çalışmada, dört farklı önsel bilgi kullanılarak etki aktarımlı deneme planlarının hiyerarşik Bayesci analizi ele alınmıştır. Böylece, sonsal dağılım üzerinde ortaya çıkan önsel bilginin etkisi araştırılmıştır.

Simon ve Freedman (1997) çalışmalarında, 2x2 faktöriyel deneme deseni için Bayesci analiz uygulamıştır. Bu çalışmaya göre, Bayesci yaklaşım, interaksiyonun olup olmadığı varsayımından kaçınır ve bu gibi deneme planlarının analizinde esneklik sağlar. Sonuçların normal yanıt değişkenine sahip dengeli faktöriyel denemeler için geliştirilebileceği söylenmiştir.

Besag ve Higdon (1999) çalışmalarında, tarımsal denemelerin analizine Bayesci yöntem ile yaklaşmıştır. Besag ve Kempton (1986) örneğini kullanarak hem klasik hem de Bayesci çözümlerini elde etmişlerdir. Markov Zinciri Monte Carlo (MCMC) yöntemi kullanarak bir tohum denemesinin Bayesci analizinin mümkün olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca MCMC'nin verimdeki değişkenlik için iki ve tek boyutlu modeller, Gaussian olmayan olabilirlik ve önsel dağılımı içeren temel varsayımlardaki değişimlere kolayca izin verdiğini göstermiştir. Böylece Bayesci yaklaşımın, klasik yaklaşımın sadece dolaylı olarak ilgilenilen önemli sorulara doğrudan cevaplar sağladığını belirtmişlerdir.

Khuri (2000) ise çalışmasında varyans unsurlarının tahmini için deneme planlamasının geçmişi ve geleceği literatürünün geniş bir kapsamına yer vermiştir. Ayrıca genetik, istatistiksel süreç kontrolü ve kalite gelişimi gibi alanlarda kullanılan denemeler için varyans unsurlarının önemini vurgulamıştır. Özellikle genetik alanında varyans unsurlarının fonksiyonlarından genetik parametreler elde edildiğini ve bunun doğru bir şekilde tahmininin önemine dikkat çekmiştir.

Çiftlik hayvanlarında ekonomik önemi olan ürünlerin miktarını arttırmak amacıyla yapılan çalışmalarda şansa bağlı etkiye ve hataya ait varyans unsurları oldukça önem taşımaktadır. Örneğin, sadece hayvan ıslahında değil bitki ıslahında da önemli etkiye sahip bir parametre olan kalıtım derecesinin hesaplanabilmesi için bu varyans unsurları bilinmelidir. Kalıtım derecesi aşağıdaki eşitlikte gösterildiği gibi hesaplanır.

$$h^2 = 4\sigma_\alpha^2 / (\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2)$$

Ayrıca varyans unsurları zootekni de çiftlik hayvanlarının genetik ıslah, teori ve uygulamalarında özellikle genetik varyasyon kaynaklarını belirlemede ve seçilecek damızlık adayı erkek ve dişi çiftlik hayvanlarının, ekonomik değeri yüksek özellikler bakımından damızlık değerlerini belirlemede kullanılmaktadır (Fırat ve Bek 1997a). Genetik ve çevresel etkilere ait varyans unsurlarının tahminleri, ıslah planlarının formüle edilmesini, boğa ve ineklerin değerlendirilmesi için gerekli yöntemlerin geliştirilmesini mümkün kılmıştır (Galiç 2002). Böylece deneme planlarına göre kurulmuş seleksiyon denemelerinden elde edilen verilerin analizi, ıslah ve genetik araştırmalar için oldukça önemlidir. Varyans unsurlarının tahmini için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Bunlardan en önemlileri Varyans Analizi (ANOVA), Maksimum Olabilirlik (ML), Kısıtlanmış Maksimum Olabilirlik (REML) ve Bayesci yöntemlerdir.

Wright vd (2000) yaptıkları çalışmada hayvan ıslahında, bir sonraki nesil için hayvan seçmede kullanılan hayvanların bireysel damızlık değerini tahmin etmek için REML ve Bayesci yöntemlerini kullanarak sonuçları karşılaştırmışlardır. Doğrusal karışık model altında verinin geleneksel analizi varyans unsurlarının REML tahminlerini içermektedir. Daha sonra bu tahminler damızlık değer için en iyi yansız tahmin edicilerin elde edilmesinde kullanılmıştır. Aynı model için verinin Bayesci analizi eldeki tüm parametreleri kullanmıştır. Seçme kriteri, varyans unsurlarının değerlerine bağlı olduğundan Bayesci analiz geleneksel analizden farklı seçim sonuçları vermiştir.

Rao ve Sanjeev (2001), Gibbs örneklemesini kullanarak baba bir üvey kardeş veri seti için tek yönlü varyans analizi modelinde kalıtım derecesini tahmin etmiştir.

Benzer şekilde, Kumar vd (2004) farklı örnek büyüklüklerinde ve üç farklı kalıtım derecesi değerlerinde iki yönlü iç içe deneme planları kurarak kalıtım derecesinin ML, REML, ANOVA ve Bayesci tahmini elde edilmiştir ve sonuçları karşılaştırmıştır. Özellikle küçük örnek büyüklüklerinde, kalıtım derecesi tahmini yapmak için Bayesci yöntemin daha uygun olduğunu belirtmiştir. Çalışmada, klasik yöntemlerle kalıtım derecesi hesaplandığında varyans unsurları ML tahmininde negatif elde edilmiştir. REML tahmini kullanıldığında negatif tahminden kurtulmak için REML tahmini “0” olarak hesaplamıştır. Bayesci yöntemin ise bu zorlukların üstesinden geldiğini ve varyans unsurlarını tahmin ettiğini göstermiştir.

Wang ve Hsu (2006) tesadüf blokları deneme planı için eklemeli karışık modelin Bayesci analizini vermiştir.

## 2.2. Bayesci Yaklaşımın Oluşumu ve Katkıda Bulunanlar

Bayes teoremi, İngiltere’de yaşayan rahip ve matematikçi Thomas Bayes (?-1761), tarafından Royal Society’de sunulmuştur ancak 1763 yılında ölümünden sonra arkadaşı Richard Price tarafından The Royal Society yayınlarından Philosophical Transactions dergisinde “An Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances” adlı çalışma ile yayınlanmıştır (Bolstad 2004). Daha sonra Pierre Simon Laplace bu formülü daha genel kapsamı ile 1773 yılında yeniden keşfetmiştir. Ancak Bayes’in geçmişteki çalışmalarını yok saymıştır (Robert 2007). 19. yüzyılda Bayes prensipleri yaygın hale gelmiştir (Stigler 1986). Fakat bu yüzyılın sonlarına doğru itirazlar ve eleştiriler ortaya çıkmaya başlamıştır. Venn (1886) ve Bertrand (1889) tekdüze (uniform) önsel dağılımın seçimine ve yeniden parametrelendirme paradoksuna odaklanmışlardır (Zabell 1989). Daha sonra, Edgeworth, Karl Pearson ve Keynes’in Bayesci yaklaşımın formülasyonunu geliştirmesine rağmen, öncelikle Kolmogorov ve ardından Fisher, Bayesci yaklaşımdan uzaklaşmışlardır.

Bayesci istatistik üzerine ilk modern bilimsel çalışma Jeffrey (1939) tarafından yapılmıştır. Jeffrey’nin bu çalışması, bilgi içermeyen önsel bilgi fikrinin yanı sıra tahmin edilen dağılımları, Bayes Faktörü ve belirsiz önsel bilgi kavramlarını da içermektedir. Ancak bu çalışma, Fisher’in olabilirlik (likelihood) istatistiği ve Neyman’ın güven aralığı kavramını geliştirdiği döneme denk geldiği için bu çalışmaların gölgesinde kalmış ve aynı başarıyı yakalayamamıştır (Robert 2007).

1930’lardan 1970’lere kadar Gini ve B. de Finetti tarafından Bayesci yaklaşım çalışmalarına teşebbüsler olmuştur. Ancak baskın olan Neyman-Pearson paradigması karşısında çok da popülerlik kazanamamıştır. Fakat buna rağmen Bayes topluluğu büyümeyi sürdürmüş ve Savage (1954) ve Lindley (1965, 1971) gibi kişiler tarafından bilimsel çalışmalar üretilmeye devam edilmiştir.

Bayesci istatistikte bazı matematiksel yapıların çözüme kavuşturulamaması önemli bir engeldi ve model seçiminde elde edilen bazı sonsal (posterior) yapıların integral hesaplamalarının çözülmesi imkansızdı. Ancak N. Metropolis, Markov Zinciri Monte Carlo tekniğinde temel oluşturacak çalışmaları gerçekleştirmiştir. W.K. Hastings Markov Zinciri Monte Carlo tekniğinin istatistik alanındaki uygulamalarını geliştirmiştir.

P.H. Peskun, ve S. Geman'ın çalışmalarıyla, A.E. Gelfand ve A.F.M. Smith'in katkılarıyla bu sorun aşılmıştır (Ekici 2005).

Berger (2000), Bayesci istatistiğin bugünü ve geleceği hakkındaki çalışmasında yeni hesaplama araçları sayesinde Bayesci istatistiğin itici bir güce kavuştuğunu ve bu yaklaşım ile istatistiksel modellemeye olan ilginin hızla arttığını vurgulamıştır.

Günümüzde ise Bayesci yaklaşıma olan ilgi artarak devam etmektedir ve birçok alanda uygulanmaktadır. Bunlar; genetikte (Beaumont vd 2002, Beerli 2006, Hoeschele ve VanRaden 1993, Murphy ve Mutalik 1969, Sorensen ve Gianola 2002), zootekni de (Blasco 2001, Firat vd 1997b, 1997c) olarak gösterilebilir. Bunların yanı sıra, ders notu ve kitap gibi farklı şekillerde çok sayıda kaynak bulunmaktadır (Besag vd 1995, Casella ve George 1992, Chib ve Greenberg 1995, Kass vd 1998). Mevcut Bayesci istatistiğin enerjisi diğer alanlarda olduğu kadar günümüzde Bayesci çalışmaların yüzdesinden de görülebilir. Bu da yeni nesil araştırmacıların 20. yüzyıldaki meslektaşlarına göre Bayesci istatistiği daha çok önemsediklerini göstermektedir.

### 2.3. Bayesci Yorumlama

Bu bölümde, Bayesci istatistiğin temel kavramlarına, Markov Zinciri Monte Carlo yöntemlerine, yakınsama teşhislerine ve sonsal dağılımdan elde edilen özet istatistiklere değinilmiştir. Bayesci bir analiz; istatistiksel modelleme, hesaplama ve model kontrolü olmak üzere üç adımda gerçekleşir. Bu çalışma ilk iki adım üzerine yoğunlaşmıştır. Model kontrolü için Dey vd (2000) ve Gelman vd (2005) çalışmalarına bakılabilir.

#### 2.3.1. Bayes teoremi

İstatistikte önemli teoremlerden biri olan Bayes teoremi, herhangi bir durumun modelini oluşturmada evrensel doğruları ve gözlemleri kullanarak sonuçlar üretmeyi amaçlar.

$S$  örnek uzayının bir ayrımını oluşturan  $A_1, A_2, \dots, A_n$  olayları ele alınsın. Bu olaylar ikişer ikişer ayrıktır ve hepsinin birleşimi  $S$  kümesine eşittir. Diğer herhangi bir olayda  $B$  olsun.

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = S \text{ ve } \forall i, j \text{ için } A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$B = S \cap B = (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)$$

Burada  $A_i \cap B$  kümeleri de ikişer ikişer aralarında ayrıktır.

Çarpım teoremini uygulayarak yani  $P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B/A_i)$  eşitliğini aşağıdaki eşitlikte yerine yazarak;

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + \dots + P(A_n)P(B/A_n) \quad (2.1)$$

kısacası  $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B/A_i)$  elde edilir.

Diğer taraftan, herhangi bir  $i$  için,  $A_i$  'nin  $B$ 'ye göre koşullu olasılığı aşağıdaki formül ile tanımlanmıştır.

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

Bu denklemde Eşitlik (2.1)'deki  $P(B)$  yerine konulursa

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + \dots + P(A_n)P(B/A_n)} \quad (2.2)$$

eşitliği elde edilir. Bu (2.2) numaralı eşitlik de  $P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B/A_i)$  eşitliği yerine konulursa Bayes teoremi aşağıdaki gibi elde edilir

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B/A_i)} \quad (2.3)$$

Böylece Bayes teoremi, bir stokastik süreç sırasında ortaya çıkan rastgele  $A$  olayı ile rastgele  $B$  olayı için koşullu olasılıklar ve marjinal olasılıklar arasındaki ilişkiyi gösterir.

Bayes teoremi veriler toplandıktan sonra parametreler hakkında olasılıksal yorumlar yapmaya yardımcı bir teoremdir. Araştırmalarda veriler elde edildikten sonra parametrelerin koşullu dağılımı sonsal dağılım olup, bu dağılım örneklem bilgisi ile parametre hakkındaki önsel bilginin birleşimi olarak yorumlanır. Parametrelere ait önsel bilgiler uygun dağılımlarla modelleme sürecine dahil edilir. Sonsal dağılımın elde edilmesinde ilk adım, gözlemlerin ve olasılıkların ortak olasılık dağılımlarının elde edilmesidir. İstatistiksel bir modelde  $\theta$  bilinmeyen parametreyi,  $y$  ise gözlemlenen verileri temsil ettiğinde, parametreye ait önsel dağılım  $p(\theta)$  ve olabilirlik fonksiyonu  $p(y|\theta)$  ile gösterilir. Burada  $p(\theta, y)$  ortak olasılık dağılımı, veriye ait olabilirlik fonksiyonu ile önsel dağılımın çarpımı şeklinde aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$p(\theta, y) = p(y|\theta) \times p(\theta). \quad (2.4)$$

Koşullu olasılık formülü kullanılarak, model parametrelerine ilişkin  $\theta$  parametresine ait sonsal dağılım aşağıdaki gibi elde edilir

$$p(\theta|y) = \frac{p(\theta, y)}{p(y)} = \frac{p(y|\theta)p(\theta)}{p(y)} \quad (2.5)$$

Toplam olasılık kuralından  $p(y)$ 'yi yeniden düzenlersek eşitlik

$$p(\theta|y) = \frac{p(y|\theta)p(\theta)}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(y|\theta)p(\theta)d\theta} \quad (2.6)$$

şeklinde elde edilir. Burada  $p(y)$ , sonsal dağılımın integralinin 1'e eşit olmasını sağlayan normalleştirme sabitidir ve göz ardı edilebilir. Böylece

$$p(\theta|y) \propto p(y|\theta)p(\theta) \quad (2.7)$$

elde edilir ve “Sonsal yoğunluğun, olabilirlik fonksiyonu ile önsel dağılımın çarpımına oransal olduğu” söylenir. Sonuç olarak da

$$\text{Sonsal dağılım} \propto \text{Olabilirlik fonksiyonu} \times \text{Önsel dağılım}$$

yazılır (Congdon P. D. 2010).

### 2.3.2. Önsel (Prior) dağılım

Şüphesiz ki; Bayesci analizin en kritik ve en çok eleştirilen noktası, önsel dağılımın belirlenmesidir. Çünkü önsel dağılım bilindiğinde, sonsal kayıplar minimum yapılır, en yüksek sonsal yoğunluk bölgesi (HPD) hesaplanır ve tahmin edilen dağılımı bulmak için parametreler integralle atılarak yorumlama neredeyse mekanik bir hale getirilebilir. Bayesci yorumlama için önsel dağılım bir anahtardır ve bu önsel dağılımın belirlenmesi, yorumlama için en önemli adımdır. Bir yere kadar, önsel dağılımı belirlemek çok zordur. Pratikte, mevcut önsel bilginin, önsel dağılımı belirlemek için yeterli olduğu durumlar çok nadirdir. Bu açıdan birçok olasılık dağılımı bu bilgi ile uyumludur.

Önsel dağılımlar bilgi içermeye durumlarına, olasılık yoğunluk fonksiyonlarının tanımına ve sahip oldukları dağılıma göre incelenebilir. Bilgi içermeye durumuna göre bilgi içeren (informative) ve bilgi içermeyen (non-informative) önsel dağılımlar olarak adlandırılır. Olasılık yoğunluk fonksiyonlarının tanımına göre belirli (proper) ve belirsiz (improper) önsel dağılımlar ve sahip oldukları dağılıma göre eşlenik (conjugate) önsel dağılımlar olarak adlandırılır.

#### 2.3.2.1. Bilgi içeren ve bilgi içermeyen önsel dağılımlar

Bilgi içeren önsel dağılımlar değişken hakkında belirli, özel bir bilgi sağlar. Bilgi içeren önsel bir dağılım genellikle sonsal dağılım üzerinde bir etkiye sahiptir. Bu tarz önsel bilgiler pratikte dikkatle ele alınmalıdır. Araştırmacılar istatistiksel yorumlama

yapmak için geçmişteki deneyimleri ile mevcut çalışmadan elde ettikleri veriyi birleştirirler. Nispeten küçük varyansa sahip bir normal dağılım, bilgi içeren bir önsel dağılıma örnek gösterilebilir.

Mevcut tek bilgi, örneklem dağılımı olduğunda önsel bilgi örneklem dağılımından elde edilir. Bu nedenle böyle önsel bilgiler, bilgi içermeyen olarak adlandırılırlar. Ancak bilgi içermeyen önsellerin, mevcut parametreler ile ilgili tam bilgisizlik (total ignorance) durumunu temsil etmesi beklenemez. Ayrıca birçok araştırmacı tarafsızlığından dolayı bilgi içermeyen önsel dağılımları tercih etmektedir. Başlıca bilgi içermeyen önsel dağılımlar; default veya referans (reference), yaygın/dağınım (diffuse), zayıf (weak), etkisiz (vague), dikdörtgen (flat, uniform) ve Jeffrey'nin önsel dağılımıdır (Box ve Tiao 1973, Robert 2007, Demirhan 2004). Önsel bilgi olmadığı durumlarda sonsal dağılımda olabilirlik fonksiyonunu baskın kılan default veya referans (reference) önsel dağılım kullanılabilir. Bilgi içermeyen önsel dağılımlardan en yaygın kullanılan dikdörtgen önsel dağılımdır. Bu dağılım parametreye belirlenen bir aralıkta aynı olasılık değerlerini atar. Zayıf, etkisiz, yaygın gibi belirsiz önsel dağılımlar ise varyansı çok büyük ( $10^{10}$  gibi) dağılımlardır.

Bir diğer bilgi içermeyen önsel dağılım Jeffrey'nin bilgi içermeyen önsel dağılımıdır. 1939'da Jeffrey tarafından

$$f(\theta) \propto |I(\theta|y)|^{1/2} \quad (2.8)$$

olarak verilmiştir. Burada  $I(\theta|y)$ , dağılımın temelini oluşturan Fisher'in bilgi matrisidir ve

$$I(\theta|y) = -E_{\theta} \left[ \left( \frac{\partial \log f(y|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right]$$

şeklinde tanımlanır. Jeffrey'nin önsel dağılımı yerel olarak tekdüzedir ve bundan dolayı da bilgi içermeyen bir önsel dağılımdır. Jeffrey'nin önsel dağılımının bir diğer özelliği ise bire bir transformasyonlarda değişmez (invariant) olmasıdır (Jeffrey 1946). Önsel dağılımlar hakkında daha çok teorik ve uygulamalı bilgi Berger ve Bernardo (1989) ve Tibshirani (1989)'nin çalışmalarında bulunabilir.

### 2.3.2.2. Belirli ve belirsiz önsel dağılımlar

Belirli ve belirsiz önsel dağılımları tanımlamak, diğer önsel dağılımları tanımlamaktan nispeten daha kolaydır. Eğer bir önsel dağılımın; kesikli dağılımlar için toplamı, sürekli dağılımlar için integrali sonlu ise belirli, sonsuz ise belirsiz önsel dağılımdır. Belirli ve belirsiz önsel dağılımlara birçok örnek vardır. Bunlardan en basiti Bayesci doğrusal regresyon analizinde görülür. Regresyon katsayıları için normal dağılım önsel dağılım olarak seçilebilir. Normal dağılımın varyansı sonlu olduğu sürece normal dağılımın integrali sonlu olacaktır ve bu durum belirli bir önsel dağılıma örnektir. Tipik bir belirsiz önsel dağılım örneği de  $\alpha = 0$  ve  $\beta = 0$  olan Beta(0,0) dağılımıdır. Belirli

bir önsel dağılım daima belirli bir sonsal dağılıma neden olur. Ancak, belirsiz bir önsel dağılım daima bir belirli sonsal dağılıma götürmez. Bazı belirsiz önsel dağılımlar belirsiz sonsal dağılım oluştururken, bazıları belirli sonsal dağılım oluşturur. Buna da doğrusal bir modelde regresyon katsayıları için sınırlandırılmamış tekdüze önsel dağılım örnek olarak verilebilir. Bu önsel dağılım ile regresyon katsayılarının sonsal dağılımı normal dağılımdır. Sınırlandırılmamış tekdüze önsel dağılım belirsiz bir önsel dağılım olmasına rağmen sonsal dağılım belirli bir önsel dağılımdır. Ancak doğrusal bir modelde artıkların varyansı için sonsal dağılımın özelliği önsel dağılıma bağlıdır. Belirsiz önsel bir dağılımda varyansın belirsizliğini tanımlamak için  $\pi(\sigma^2) = 1/\sigma^2$  olarak tanımlanır.  $\sigma^2$  için bir belirsiz önsel bilgi, belirsiz bir sonsal bilgiye neden olur. Bu nedenle belirsiz önsel bilgiler dikkatle kullanılmalıdır (Che 2011).

### 2.3.2.3. Eşlenik önsel dağılımlar

Eşlenik önsel dağılım, olabilirlik fonksiyonunun dağılım yapısından faydalanılarak elde edilir. Bayesci olasılık teorisinde, sonsal dağılım, önsel dağılım ile aynı dağılım ailesinden olduğu zaman buna eşlenik olma (conjugacy) adı verilir. Eşlenik önsel bilgi, Raiffa ve Schlaifer (1961) tarafından öne sürülmüştür.

Eşlenik bir önsel dağılım seçmek, matematiksel olarak hesaplamaları kolaylaştırmanın yanı sıra her zaman aynı popülasyondan yeni örnekler alınmasını mümkün kılar. Böylece ilgilenilen parametreye ilişkin önsel bilgiler yeniden gözden geçirilir ve daha tutarlı sonuçlara ulaşmak mümkün olur (Consonni ve Veronose 1992, Diaconis ve Ylvisaker 1979).

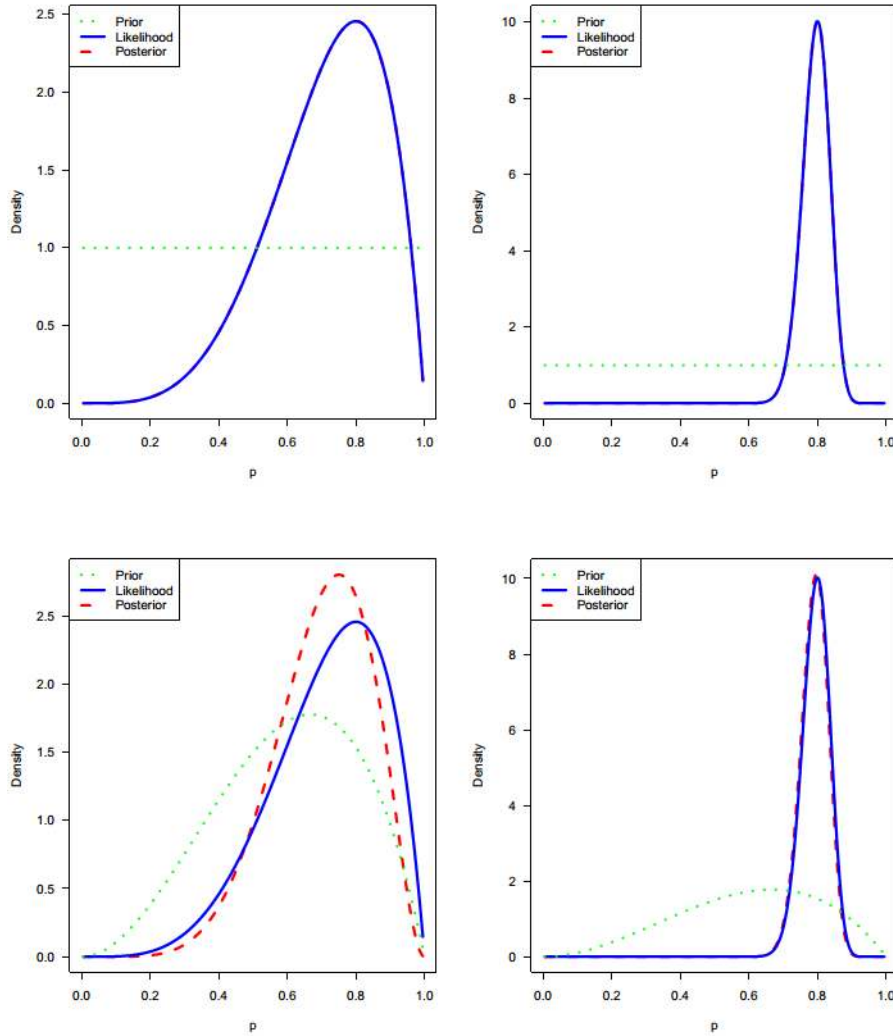
Çizelge 2.1. Eşlenik dağılımlar

| Olabilirlik                                       | Önsel Dağılım             | Sonsal Dağılım                                                            |
|---------------------------------------------------|---------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| $Bernolli(p)$                                     | $Beta(\alpha, \beta)$     | $Beta(\alpha + \sum x_i, \beta + n - \sum x_i)$                           |
| $Binom(m, p)$                                     | $Beta(\alpha, \beta)$     | $Beta(\alpha + \sum x_i, \beta + mn - \sum x_i)$                          |
| $Negatif Binom(r, p)$                             | $Beta(\alpha, \beta)$     | $Beta(\alpha + nr, \beta + \sum x_i)$                                     |
| $Gama(\alpha, \beta)$                             | $Gama(\alpha_0, \beta_0)$ | $Gama(\alpha_0 + n, \beta_0 + \sum x_i)$                                  |
| $Poisson(\lambda)$                                | $Gama(\alpha_0, \beta_0)$ | $Gama(\alpha_0 + \sum x_i, \beta_0 + n)$                                  |
| $Normal(\mu, \tau)$<br>( $\tau$ biliniyorken)     | $Normal(\mu_0, \tau_0)$   | $Normal((\mu_0\tau_0 + \tau \sum x_i)/(\tau_0 + n\tau), \tau_0 + n\tau)$  |
| $Normal(\mu, \tau)$<br>( $\mu$ biliniyorken)      | $Gama(\alpha, \beta)$     | $Gama(\alpha + (n/2), (n-1)S^2)$                                          |
| $Log Normal(\mu, \tau)$<br>( $\tau$ biliniyorken) | $Normal(\mu_0, \tau_0)$   | $Normal((\mu_0\tau_0 + \tau \prod x_i)/(\tau_0 + n\tau), \tau_0 + n\tau)$ |
| $Log Normal(\mu, \tau)$<br>( $\mu$ biliniyorken)  | $Gama(\alpha, \beta)$     | $Gama(\alpha + (n/2), (n-1)S^2)$                                          |

$S^2$  : Örnek Varyansı

Gaussian aile en yaygın kullanılan eşlenik ailedir. Eğer olabilirlik fonksiyonu Gaussian ise sonsal dağılımın Gaussian olmasını sağlamak için Gaussian önsel bilgi seçilmelidir. Her bir örneklem dağılımı için  $X_1, X_2, \dots, X_n$  varsayımı altında, olabilirlik fonksiyonuna göre eşlenik önsel dağılım ve buna karşılık gelen sonsal dağılımlar Çizelge 2.1’de özetlenmiştir.

Şekil 2.1’de farklı veri setlerinin ve farklı önsel dağılımların sonsal dağılım üzerindeki etkisi gösterilmiştir.



Şekil.2.1. Farklı veri seti ve önsel dağılımların sonsal dağılım üzerine etkisi

### 2.3.3. Sonsal (Posterior) dağılım

Bu bölümde parametrenin sonsal dağılımı kavramı hakkında kısaca bilgi verilmiştir. Önsel dağılım gibi, bir parametrenin sonsal dağılımı da gerçek bir dağılım değildir. Sonsal dağılım, parametre hakkındaki sübjektif önsel bilgi ile denemeden sonra elde edilen mevcut bilgi birleştirilerek parametre hakkındaki güncelleştirilmiş inanç derecesini temsil etmektedir. Sonsal dağılım, önsel dağılımdan daha dar olacaktır. Diğer

bir deyişle, veri setini gözlemledikten sonra parametrenin gerçek değeri hakkında önceki tahmininden daha da emin olunur.

### 2.3.4. Bayesci yorumlamanın temel kavramları

İlgilenilen parametre için koşullu sonsal dağılım olarak da adlandırılan sonsal dağılım elde edildiğinde, bu parametre hakkındaki tüm bilgi bu dağılımdan elde edilebilir. Bu dağılım, önsel inancı ve mevcut veri setinden elde edilen bilgiyi (likelihood) içerir. Bir sonsal dağılım grafiği parametreler hakkında tüm bilgiyi gösterir. Sonsal dağılım aslında yorumlaması güç bir dağılımdır ve genellikle rakamsal yorumlamalar yapılmak istenir. Bu amaçla merkezi eğilim ölçüleri ve merkezi yayılım ölçüleri kullanılır. Ayrıca dağılım yüzdeleri ve bunun yanı sıra parametreyi içeren en yüksek olabilirliğe sahip aralıklar da kullanılır. Bu aralıklar, Bayesci güven aralıklarıdır ve klasik yaklaşımdaki güven aralıklarına benzerler.

#### 2.3.4.1. Nokta tahmini

İstatistikte, klasik yaklaşım olabilirlik fonksiyonunun maksimizasyonuna dayanırken Bayesci yaklaşım ise olasılık dağılımının integrallemesine dayanır. Örneğin  $\theta$  parametresinin sonsal dağılımdan elde edilen ortalaması

$$\bar{\theta} = \int \theta p(\theta|y) d\theta$$

şeklinde elde edilir. Bu değer sıklıkla kullanılan merkezi eğilim ölçüsüdür. Dağılım ağır (heavy) kuyruğa sahip olduğunda sonsal ortalama çok fazla etkilenir. Tek taraflı ağır kuyruğa sahip bir dağılım için sonsal ortalama olasılığın çoğundan oldukça uzaktır. Beta dağılımı 0 ile 1 arasında sınırlandığından ağır kuyruğa sahip değildir. Sonsal ortalama Beta dağılımına sahip bir sonsal için iyi bir merkezi eğilim ölçüsüdür.

Sonsal mod, sonsal dağılımı maksimum yapan değerdir ve sonsal dağılım sürekli ise sonsal yoğunluğun türevinin 0'a eşitlenmesiyle elde edilir. Bir merkezi eğilim ölçüsü olarak sonsal mod bazı dezavantajlara sahiptir. Birincisi, 1'in veya dağılımın sonlarında olabilir. Böylece tüm dağılımın temsilcisi olarak gösterilemez. İkincisi, çoklu yerel maksimumlar olabilir. Fonksiyon 0'a eşitlenip çözüldüğünde; yerel maksimumlar kadar yerel minimumlar da elde edilir. Sonsal mod,

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} f(\theta|y)$$

değeridir.

Sonsal medyan, sonsal ölçümlerin yarısı bu değer üstünde diğer yarısı da bu değer altında yer alan değerdir. Sonsal medyan,

$$\int_0^{\tilde{\theta}} f(\theta|y) d\theta = 0.5$$

integralini sağlayan  $\tilde{\theta}$  değeridir.

Bu değerler merkezi eğilim ölçüleridir ve dağılımın konumu hakkında bilgi verir. Sonsal dağılım hakkında ilgilenilen bir diğer nokta da nasıl yayıldığıdır. Eğer dağılım, büyük bir yayılıma sahip ise gözlenen veri analiz edildikten sonra bile parametre hakkındaki bilgi hala kesin değildir. Sonsal dağılımın varyansı,

$$Var(\theta|y) = \int (\theta - \bar{\theta})^2 p(\theta|y) d\theta$$

dır. Ağır kuyruklu dağılımlar, sonsal varyanstan çok etkilenir. Bir ağır kuyruklu dağılım için varyans çok büyük olacaktır ancak yine de olasılığın çoğu dağılımın ortasına yaklaşacaktır. Ayrıca varyans karesel bir ifade olduğundan yorumlamayı güçleştirir. Bu dezavantajın üstesinden gelmek için sonsal standart sapma kullanılır. Bu değer, sonsal varyansın kareköküdür. Ortalama ile karşılaştırıldığında ağır kuyruklu dağılımlardan daha az etkilenir.

#### 2.3.4.2. Bayesci güven aralıkları

Frekansçı (klasik) yaklaşım; olasılığı, tekrarlanan olayların frekansı olarak tanımlarken Bayesci yaklaşım, değerler hakkındaki inancın derecesi olarak tanımlar. Bunun sonucu olarak, frekansçı yaklaşım, model parametrelerini sabit, veri setini ise rastsal olarak ele alır. Bayesci yaklaşım da ise model parametreleri rastsal iken veri seti sabittir. Bu iki farklı yaklaşım, popülasyonu tanımda ve tanımlamada model parametrelerine ait sınır değerlerini başka bir deyişle parametrenin belirli değerler arasında yer aldığı (veya Bayesci yaklaşıma göre yer alma olasılığının) bilgisini de farklı yorumlar.

Bayesci yaklaşımda, klasik yaklaşımın güven aralığı (confidence interval) tanımlaması yerine, güvenilir aralık (credible interval), Bayesci aralık (Bayesian interval) veya En Yüksek Sonsal Yoğunluk Bölgesi (Highest Posterior Density Region) tanımlamaları kullanılmaktadır. Yüzde 95’lik güven aralıkları 0,95’lik sonsal olasılık aralıklarına oldukça benzer çıkacaktır. Ancak Bayesci yaklaşımda güven aralığı; tanımlamada farklı olduğu gibi yorumlamada da farklıdır. Bayesci yaklaşımda sonsal dağılımın ortalaması için örneğin 0,95 güven düzeyinde bir güven aralığından söz ediyorsak “Bu aralığın sonsal dağılımın ortalamasını içermesi olasılığına olan inanç derecesi 0.95’dir.” şeklinde yorumlanır.

Bayesci yöntemde hesaplanan sonsal dağılıma göre y veri seti verilmişken  $\theta$ ’nın parametre uzayının belirli bir  $\bar{R}$  alt bölgesinde bulunması olasılığı;

$$P\{\theta \in \bar{R}|y\} = \int_{\bar{R}} P(\theta|y) d\theta$$

dır. Bu ifadede, kapsanacak olasılık miktarı 0,95 olarak belirlenirse aranılan bölgenin sınırlarına ya da aralığın değerlerine ulaşılabilir.

$$P\{\theta \in \bar{R}|y\} = \int_{\bar{R}} P(\theta|y) d\theta = (1 - \alpha) = 0,95$$

Bu bölge veya aralık “En yüksek sonsal yoğunluk” bölgesi olarak adlandırılır. Çünkü bölge içindeki her bir noktanın olasılık yoğunluğu, bölge dışındaki noktaların her birinden daha büyüktür (Box ve Tiao 1973). Bu yönü ile klasik yaklaşımdaki en küçük güven aralığına benzer olarak Bayesci yaklaşımda en yüksek sonsal yoğunluk bölgesi elde edilir.

#### 2.3.4.3. Marjinal ve koşullu sonsal dağılımlar

Klasik yaklaşımda olduğu gibi Bayesci yaklaşımda da esas amaç ilgilenilen parametre için çıkarsama yapmaktır. Parametre sayısının birden fazla olduğu durumlarda, veriden gelen olabilirlik fonksiyonu ve önsel dağılımların çarpımı sonrasında ortak sonsal dağılım elde edilir. İlgilendiğimiz parametre üzerinden diğer parametrelerin etkisini kaldırmak için ortak sonsal dağılımdan ilgilenmediğimiz parametreleri integralle atarak ilgilendiğimiz parametre için marjinal sonsal yoğunluk fonksiyonu elde edilir. Örneğin  $\theta_1$  için marjinal sonsal dağılım aşağıdaki gibi elde edilir.

$$f(\theta_1|y) = \int \int \dots \int f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n|y) d\theta_2 d\theta_3 \dots d\theta_n$$

Marjinal sonsal dağılım, diğer olayların ortaya çıkmasından bağımsız olarak bir olayın ortaya çıkma olasılığı olarak tanımlanabilir. Ancak parametreler arasında bir koşulluluk yapısı söz konusu ise yani diğer olayların ortaya çıkma olasılığı verildiğinde ilgilendiğimiz olayın ortaya çıkma olasılığı ile ilgileniyorsak koşullu sonsal dağılım dikkate alınır. Koşullu sonsal dağılım aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$f(\theta_1|\theta_2^*, \dots, \theta_n^*, y) = \frac{f(\theta_1, \theta_2 = \theta_2^*, \dots, \theta_n = \theta_n^*|y)}{\int f(\theta_1, \theta_2 = \theta_2^*, \dots, \theta_n = \theta_n^*|y) d\theta_2 \dots d\theta_n}$$

#### 2.3.4.4. Hipotez testleri

İstatistikte popülasyonu anlamaya ve çözmeye çalışırken parametrelere ilişkin iddiaların yer aldığı bazı önermelerden faydalanılır. Hipotez olarak adlandırılan bu önermelerde öne sürülenler araştırmacının karar vermesini sağlayan bir test sürecinden geçer. Hipotez testi sürecinde parametrenin iddia edilen değere eşit olup olmadığı veya sözü edilen aralıkta bulunup bulunmadığı test edilir ve böylece popülasyon ile ilgili belirsizlikler kısmen aydınlatılmış olur.

İstatistiksel bir hipotezi test etme problemi Bayesci yöntemi çalışanlar ile klasik yöntem çalışanlar arasında önemli bir tartışma noktası olmuştur. Klasik istatistik yaklaşımı bir red bölgesi oluşturup, ilişkili olasılıkları hesaplayarak bir test istatistiği yardımıyla hipotezi test ederken; Bayesci yaklaşım da ise klasik yaklaşıma göre daha sezgisel yöntemler kullanılmaktadır. Bunlardan biri Bayes faktörü kullanarak  $H_0$  hipotezinin doğruluğuna dair kanıtın gücünü vermektir.

Bayesci hipotez testleri mevcut denemeden elde edilen veri seti verildiğinde, sonsal dağılıma yoğunlaşır. Parametre uzayı  $\Theta$  ile gösterilsin ve bu uzay  $\Theta_0$  ve  $\Theta_1$  olmak üzere iki alt uzaya ayrılsın. Bu durumda;

$$\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$$

ve

$$\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$$

dir. İki hipotez altındaki önsel olasılıklar ve sonsal olasılıklar şöyledir:

$$\pi_0 = \Pr(\theta \in \Theta_0) \text{ ve } \pi_1 = \Pr(\theta \in \Theta_1)$$

$$p_0 = \Pr(\theta \in \Theta_0 | y) \text{ ve } p_1 = \Pr(\theta \in \Theta_1 | y)$$

Buradan  $\pi_1/\pi_0$  önsel odds oranı ve  $p_1/p_0$  sonsal odds oranıdır. Böylece, Bayes faktör sonsal odds oranının önsel odds oranına oranı olarak elde edilir

$$BF = \frac{p_1/p_0}{\pi_1/\pi_0} = \frac{p_1\pi_0}{p_0\pi_1}.$$

Bu yaklaşımda hipotezlerin olasılıkları karşılaştırılarak karar verildiği için genellikle hipotez testi yerine hipotezlerin karşılaştırılması ifadesi kullanılmaktadır.

Bayesci yaklaşım, hipotezlere olasılık tayin eder. Yani, bir hipotez kabul veya red edilmez, onun sahip olduğuna inanılan olasılığı belirlenir. Ancak Bayesci yaklaşım çift taraflı hipotez testleri söz konusu olduğunda biraz zayıftır. Çünkü sürekli bir dağılımda parametrenin 0'a eşit olma olasılığı 0'dır.

Bayesci yaklaşımda bilinen süreç burada da geçerlidir. Hipotezlerin önsel olasılıkları belirlenir ve daha sonra sonsal olasılıklarına ulaşılır. Burada karar verme Bayes faktörde sonsal olasılığı en fazla olan hipotezden yanadır.

Ortalamalar arasındaki farkı yorumlamanın bir diğer yolu ise sonsal güven aralıklarının sıfırı içerip içermemesine göre karar vermektir. Eğer sonsal güven aralığı "0"ı içeriyorsa ilgilendiğimiz parametrenin model üzerinde herhangi bir etkisinin olmadığı şeklindeki yorumlamadır (McCarthy 2007). Bu çalışmada, parametrelerin anlamlılığını değerlendirmek için güven aralıkları kullanılmıştır.

## 2.4. Markov zinciri Monte Carlo (MCMC) simülasyonu

$\theta$ 'nın önsel dağılımı ile sonsal dağılımının aynı olduğu yani eşlenik önsel bilgi olma durumunda sonsal yoğunluk ve marjinal olabilirlik analitik olarak elde edilebilir.  $\theta$  küçük boyutlu (low-dimensional) olduğunda sayısal integral ve Laplace yakınsaması gibi

yakınsamalar integralleri elde etmek için bir alternatiftir (Raftery 1996). Ancak yakınsamaların mümkün olmadığı ve integrali elde etmek için  $p(y)$ 'nin inatçı (intractable) olduğu ve böylece  $p(\theta|y)$ 'den doğrudan örnekler elde edilemediği durumlarla karşılaşılabilir. Bu gibi durumlarda,  $p(\theta|y)$ 'nin analitik formu bilinmesine gerek duymadan  $p(\theta|y)$ 'den örnek elde etmek için Markov Zinciri Monte Carlo (MCMC) yöntemleri kullanılır (Congdon 2010). MCMC yöntemleri araştırmacılara çok boyutlu karışık modellerin çözümü için sağladığı kolaylıktan dolayı Bayesci yöntemlerin gelişmesine çok büyük katkı sağlamıştır.

Bayesci yaklaşımda karşılaşılan en ciddi zorluk sonsal dağılımların elde edilmesinde çok katlı integrallerin kullanılmasıdır. Çok katlı integrallerin hesaplanması için bir olasılık dağılımından simülasyon yardımı ile birbirinden bağımsız örnek çeken MCMC yöntemleri kullanılır. MCMC yöntemi, her bir simülasyon değerinin bir önceki değere bağlı olduğu zincir değeri üretir. Mevcut gözlem bir önceki örneğe bağlı olduğundan Markov zinciri olarak adlandırılır. İlk olarak matematiksel fizik ve atom bombası çalışan bir grup fizikçi tarafından sonrasında da uzay bilimleri ve görüntü çözümlemesinde kullanılmıştır (Ntzoufras 2009, Robert ve Casella 2011). Metropolis Hasting (MH) algoritması ve Gibbs örnekleme algoritması en çok kullanılan MCMC yöntemleridir. Gibbs örnekleme, Metropolis Hasting algoritmasının özel bir durumudur.

Bir sonraki alt bölüme geçmeden, bu bölümde son olarak MCMC yöntemlerini daha iyi anlayabilmek için önemli birkaç kavrama kısaca yer verilmiştir.

*Denge (equilibrium) dağılımı:* Çekilen parametreler sabit bir değer yerine bir dağılıma yakınsadığı için MCMC yöntemi bir stokastik süreçtir. Bu dağılıma MCMC algoritmasının denge veya hedef dağılımı adı verilir. Denge dağılımı kavramı MCMC algoritmasını kurmak için kullanılan Markov zinciri ile ilgilidir. Böyle zincirler  $t > B$  zaman sonra dengeye ulaşır. Böylece Markov zincirinde  $\theta^{(t)}$  ve  $\theta^{(t+1)}$ 'in dağılımı aynı ve eşit denge dağılımına sahip olacaktır. Dağılım her ikisi içinde bir kere dengeye ulaşır ve MCMC denge dağılımından bağımlı rastsal değişkenler üretilir.

*Algoritmanın yakınsaması:* MCMC algoritmasının yakınsama terimi ile algoritmanın dengeye ulaştığı ve hedef dağılımdan değerler ürettiği anlaşılır. Genellikle, doğru hedef dağılımından örnekler elde etmek için algoritmanın ne kadar çalıştırılacağı belli değildir. Algoritmanın yakınsaması parametrelere tayin edilen başlangıç değerlerine, zincir sayısına ve modelin etkin bir şekilde işleyip işlemediğine bağlıdır. Yakınsamayı görmek için iz grafikleri ve birkaç tanı testi geliştirilmiştir.

*İterasyon:* İterasyon, sonsal dağılımdan tüm parametre seti için değerler üreten algoritmanın bir döngüsünü ifade eder. Genellikle üretilen değerlerin bir gözlemini göstermek için kullanılır. Örneğin,  $\theta^{(t)}$ , algoritmanın  $t$ . iterasyonunda üretilen  $\theta$  rastsal değişkenler vektörünün değerlerini gösterir.

*Toplam iterasyon sayısı (T):* MCMC algoritmasının toplam iterasyonlarının sayısını göstermektedir.

*Zincirin başlangıç değeri:* Zinciri başlatmak için kullanılan değerler, başlangıç değerleri olarak adlandırılır. Eğer bu başlangıç değerleri en yüksek sonsal olasılık bölgesinden uzak ise başlangıç değerleri sonsal özetleri etkileyebilir ve üretilen örnek büyüklüğü  $T$  bu etkiyi elemine etmek için yetersiz kalabilir. Algoritmanın ilk iterasyonlarını kaldırarak veya büyük iterasyon sayıları için algoritmayı çalıştırarak veya farklı başlangıç değerleri alıp farklı örnekler elde ederek başlangıç değerinin etkisinden kurtulabilir veya bu etki azaltılabilir.

Bazı araştırmacılar ise başlangıç değerlerini sonsal dağılımın merkezine yakın olacak şekilde sağlamak için, başlangıç değerleri olarak parametrelerin modunu veya en çok olabilirlik (ML) tahminlerini kullanırlar. Birçok araştırmacıya göre ML seçeneği, genellikle zayıf bir başlangıç sağlar. Diğer başlangıç noktaları, bilgi içermeyen önsel dağılımların kullanıldığı önsel dağılımın moduna veya medyanına dayanır. Sonuçta, çoklu modları olan problemler için farklı başlangıç noktaları olan çoklu zincirlerin kullanılması önerilir (Brooks 1998, Kass vd 1998).

*Burn-in periyot:* Örnekte başlangıç değerinin etkisini kaldırmak için periyotta ilk  $B$  tane iterasyonun atılmasıdır. Eğer üretilen örnek yeterince büyük ise sonsal özetlerin hesaplanmasında bu periyodun etkisi küçüktür.

*Seyreltme aralığı (Thinning interval):* Daha öncede belirtildiği gibi MCMC algoritmasından üretilen örnekler bağımsız değildir. Bu nedenle, üretilen değerlerin otokorelasyonlarını incelemek gerekir ve  $L$  (lag) gecikmeleri göstermek üzere otokorelasyonun düşük olduğunu gösteren  $L > 1$  örnek gecikmesi seçilir. Daha sonra her  $L$  iterasyonda üretilen ilk değerleri alarak bağımsız örnek oluşturulur. Örneğin, bunun için üç iterasyonun gecikmesi alınırsa her üç iterasyonda bir değer alınır. Ayrıca bu yöntem fazla depolama alanına ihtiyaç duyan çok boyutlu problemlerde hesaplama hızlılığını artırır.

*Burn-in atıldıktan sonra kalan kısım  $T'$ :* Bu değer burn-in periyodu atıldıktan sonra geriye kalan iterasyon sayısıdır ( $T' = T - B$ ). Ayrıca  $L > 1$  olarak alınırsa, iterasyonların toplam sayısı, sonsal analiz için kullanılan son bağımsız örneğe karşılık gelir.

#### 2.4.1. Metropolis algoritması

Amerikalı fizik ve bilgisayar bilimci N.C. Metropolis tarafından sunulan Metropolis algoritması, herhangi bir boyuttaki hedef dağılımdan tesadüfi örnekler üretmek için kullanılır. Bilinen bir hedef dağılımın kullanıldığı Gibbs örneklemesinden daha genel bir algoritmadır. Bu algoritma kısaca şöyle özetlenebilir.  $f(\theta|y)$  olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip tek değişkenli bir dağılımdan örnekler elde edilmek istensin. Metropolis algoritmasında  $\theta$  için başlangıç değeri  $\theta^0$  ve simetrik bir  $q(\theta^{t+1}|\theta^t)$  hedef yoğunluk fonksiyonu alınır. Bu algoritma,  $(t+1)$ . iterasyonda  $\theta^t$  parametre değeri için hedef yoğunluk fonksiyonundan yeni bir örnek üretme ve bu üretilen örneğin kabul veya reddine karar verme algoritmasıdır. Eğer yeni elde edilen örnek kabul edilirse, algoritma yeni örnek ile başlar ve süreç tekrarlanır.

### 2.4.2. Metropolis Hasting (MH) algoritması

Metropolis Hasting algoritması, Metropolis algoritmasının genelleştirilmişidir. 1970 yılında Hasting tarafından önerilen (proposal) asimetrik dağılımların üstesinden gelmek için önerilmiştir. MH algoritmasında, önerilen dağılım  $q$ , ne seçilirse seçilsin denge dağılımına ulaşacaktır. Ancak yine de pratikte, zayıf seçimler denge dağılıma ulaşmayı oldukça geciktireceği için önerilen dağılımın seçimi önemlidir. MH algoritması şöyle özetlenebilir:

1.  $\theta^{(0)}$  başlangıç değeri seçilir.
2.  $q(\theta'|\theta)$  önerilen dağılımdan yeni aday nokta  $\theta'$  değerleri üretilir.
3.  $\alpha = \min\left(1, \frac{f(\theta'|y)q(\theta|\theta')}{f(\theta|y)q(\theta'|\theta)}\right)$  değeri hesaplanır.
4. Üretilen aday nokta  $\alpha$  olasılıkla kabul edilir;  $\theta^{(t)} = \theta'$ , aksi takdirde  $\theta^{(t)} = \theta$  alınır.

Üretilen aday nokta kabul edilmezse yeni bir aday nokta üretilir ve işlemlere yakınsama sağlanıncaya kadar devam edilir.

MH algoritmasının özel durumları Gibbs örnekleme, rastsal yürüyüş (random walk) Metropolis, tek bileşenli MH, bağımsız örnekleycidir (independence sampler). Bir sonraki alt başlıklarda bunlardan en sık kullanılanları Gibbs örnekleme ve rastsal yürüyüş Metropolis algoritması kısaca tanıtılmıştır.

#### 2.4.2.1. Gibbs örnekleme

Geman ve Geman (1984) tarafından sunulan Gibbs örnekleme, karmaşık stokastik modeller hakkında yorumlamalar yapmak için oldukça güçlü bir yöntemdir. Gelfand ve Smith (1990) bu yöntemin Bayesci yorumlamayla olan ilişkisini göstermişlerdir. Gibbs örnekleme sırası ile bütün koşullu dağılımlardan örnekleme yaparak modeldeki parametrelerin hepsinin ortak sonsal yoğunluk dağılımına örnek değerler üretir. Şöyle ki, Gibbs örnekleme her zaman yeni bir değere doğru gider ve en önemlisi “önerilen bir dağılım” tanımına gerek duymaz. Basit mantıksal dayanağı ve uygulama kolaylığından dolayı da bu yöntem oldukça yaygın hale gelmiştir. Ancak diğer taraftan, parametre uzayı karışık olduğunda veya parametreler arasında yüksek korelasyon bulunduğu yeterli olmayabilir (Ntzoufras 2009).

Gibbs örneklemesinin algoritması aşağıdaki adımlarla özetlenebilir:

1.  $\theta^{(0)}$  başlangıç değeri seçilir.
2.  $t = 1, 2, \dots, T$  için aşağıdaki adımlar tekrarlanır.
  - a.  $\theta = \theta^{(t-1)}$  alınır.
  - b.  $j = 1, 2, \dots, d$  için  $\theta_j \sim f(\theta_j | \theta_{-j}, \mathbf{y})$
  - c.  $\theta^{(t)} = \theta$  alınır ve bu, algoritmanın  $(t+1)$ . iterasyonunda üretilen değerlerin seti olarak alınır.

$$\begin{aligned}
& f(\theta_1 | \theta_2^{(t-1)}, \theta_3^{(t-1)}, \dots, \theta_p^{(t-1)}, \mathbf{y}) \text{ tam koşullu dağılımından } \theta_1^{(t)} \text{ için} \\
& f(\theta_2 | \theta_1^{(t)}, \theta_3^{(t-1)}, \dots, \theta_p^{(t-1)}, \mathbf{y}) \text{ tam koşullu dağılımından } \theta_2^{(t)} \text{ için} \\
& f(\theta_3 | \theta_1^{(t)}, \theta_2^{(t)}, \dots, \theta_p^{(t-1)}, \mathbf{y}) \text{ tam koşullu dağılımından } \theta_3^{(t)} \text{ için} \\
& \cdot \\
& \cdot \\
& f(\theta_j | \theta_1^{(t)}, \theta_2^{(t)}, \dots, \theta_{j-1}^{(t-1)}, \theta_{j+1}^{(t-1)}, \dots, \theta_p^{(t-1)}, \mathbf{y}) \text{ tam koşullu dağılımından } \theta_j^{(t)} \text{ için} \\
& \cdot \\
& \cdot \\
& f(\theta_p | \theta_1^{(t)}, \theta_2^{(t)}, \dots, \theta_{p-1}^{(t)}, \mathbf{y}) \text{ tam koşullu dağılımından } \theta_p^{(t)} \text{ için}
\end{aligned}$$

yeni parametre değerleri elde edilir.

#### 2.4.2.2. Rastsal yürüyüş Metropolis algoritması

Metropolis algoritması önerilen dağılım olarak sadece simetrik dağılımları  $q(\theta'|\theta) = q(\theta|\theta')$  alır. Rastsal yürüyüş Metropolis algoritması,  $q(\theta'|\theta) = q(\theta' - \theta)$  için özel durumdur. Bu algoritma için kabul olasılığı yine hedef dağılıma bağlıdır ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\alpha = \min \left( 1, \frac{f(\theta'|y)}{f(\theta|y)} \right) = \min \left( 1, \frac{f(y|\theta')f(\theta)}{f(y|\theta)f(\theta')} \right)$$

Bu algoritmada genellikle önerilen dağılım çok değişkenli normal dağılımdır ( $q(\theta'|\theta) \sim N_d(\theta, \bar{S}_0)$ ). Bu gösterimde  $d$ ,  $\theta$ 'nın boyutudur. Kovaryans matrisi  $\bar{S}_0$ , algoritmanın yakınsama hızını kontrol etmektedir.  $\bar{S}_{ii}$  varyanslarının değerleri mevcut değerler ile önerilen değerlerin birbirine ne kadar yaklaştığını gösterir. Algoritma, parametre uzayını incelemek için çok sayıda iterasyona ihtiyaç duyduğundan  $\bar{S}_{ii}$ 'nin küçük değerleri yüksek kabul oranlarına neden olur ve yakınsama yavaşlar. Bu durum, analiz sonuçlarında büyük otokorelasyonların gözlenmesine neden olur. Diğer taraftan, önerilen varyans  $\bar{S}_{ii}$ 'nin büyük değerleri düşük kabul oranları verecektir. Sonuç olarak, büyük iterasyonlar için algoritma aynı değerlerde kalacaktır ve yine parametre uzayı için zayıf bir inceleme olacak ve yüksek otokorelasyonlu bir örnek elde edilecektir.  $\bar{S}_0$ 'nin elemanlarını belirtmek için araştırmacı, istenilen kabul oranına ulaşmaya kadar birkaç değer kullanarak örnekleyicinin performansını test etmelidir (Roberts ve Rosenthal 2001, Ntzoufras 2009). Bu deneysel prosedür önerilen dağılımın ayarlanması olarak adlandırılır. Rastsal yürüyüş algoritmasında optimum kabul oranı Roberts vd (1997) ve Neal ve Roberts'e (2008) göre 0,25 civarında; büyük boyutlu ve tek değişkenli durumlarda 0,23'den 0,45'e kadar olabilir (Roberts ve Rosenthal 2001). Springelhalter vd (2003) ise bu kabul oranını 0,20 ile 0,40 arasında önermektedir. Bu aralık, kabul oranları hassas bir şekilde ayarlansa dahi kazanımın çok fazla olmayacağını gözlemleyen Roberts ve Rosenthal'ın (2001) önerdiği 0,10 ile 0,40 aralığı ile uyumludur (Ntzoufras 2009).

Etkili bir Metropolis algoritması çalıştırmak için önerilen ve hedef sonsal dağılımlarının korelasyon matrisi eşdeğer olmalıdır. Köşegen  $\bar{S}_0$ , örneğin bağımsız normal hedef dağılımları kullanarak küçük bir örnek çalıştırmak ve hedef sonsal dağılımın korelasyon yapısını kabaca tahmin etmek iyi bir strateji olacaktır. Böylece, tahmin edilen varyans kovaryans matrisi  $\tilde{\Sigma}_0$  kullanılarak algoritmayı tekrar çalıştırmak uygun olacaktır. Sonsal varyans kovaryans matrisi tahmin edildikten sonra Gelman vd (1995) önerilen varyans kovaryans matrisinin  $\bar{S}_0 = c^2 \tilde{\Sigma}_0$  olacağını belirtmişlerdir. Bu eşitlikte  $c^2 \approx 5,8/d$  'dir ve  $d$ , parametre vektörünün boyutudur.

### 2.4.3. Yakınsamanın değerlendirilmesi

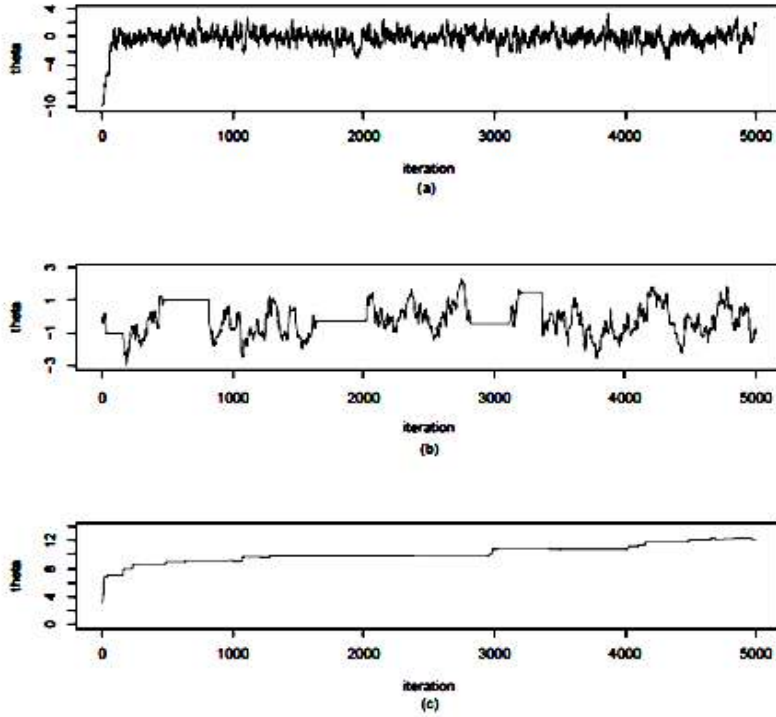
Markov zincirinin yakınsamasının değerlendirilmesi için birkaç yöntem vardır. Bu yöntemleri, iz grafikleri, otokorelasyon grafikleri gibi grafiklerin izlenmesi ile yapılan görsel değerlendirme ve istatistiksel olarak yakınsamanın testler ile değerlendirilmesi şeklinde iki alt bölümde incelenebilir.

#### 2.4.3.1. Görsel değerlendirme

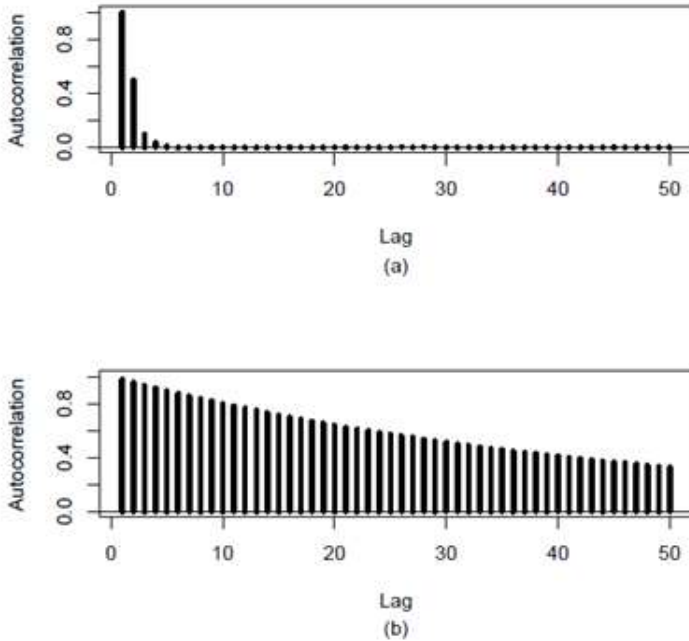
Zincirin yakınsaması için kullanılan en önemli yöntemlerden biri görsel değerlendirmedir. Bu parametrelerin iz grafiklerini ve otokorelasyon grafiklerini incelemek ile mümkündür.

Bir parametrenin iz grafiği, zincirin durağan bir dağılıma yakınsayıp yakınsamadığı veya daha uzun bir burn-in periyoda ihtiyaç olup olmadığı veya zincirin iyi karışıp karışmadığı gibi durumlar hakkında bilgi verir. Şekil 2.2 birkaç farklı durum için iz grafiği örnekleri vermektedir. Şekil 2.2a bir değişken için iyi bir iz grafiği örneğidir. Zincirin durağan bir dağılıma hızlıca ulaştıktan sonra iyi bir şekilde karıştığını göstermektedir. Şekil 2.2b Markov zincirinin iyi bir şekilde karışmadığını ve modelde muhtemel bir sorunun olduğunu gösterir. Şekil 2.2c ise Markov zincirinin herhangi bir dağılıma yakınsayamadığını göstermektedir.

MCMC algoritmasından elde edilen sonsal örnek, veri setinden farklı örneklerin seçilmesi ile elde edilir ve MCMC'den çekilen bu ardışık örnekler arasında yüksek korelasyon vardır. Bu korelasyon türü de otokorelasyon olarak adlandırılır. Otokorelasyon grafiği, ardışık gözlemlere karşı gecikmeler (lag) arasındaki korelasyonu göstermektedir. Yüksek bir otokorelasyon, zincirdeki zayıf bir karışımı gösterir. Şekil 2.3 düşük otokorelasyon (a) ve yüksek otokorelasyonu (b) göstermektedir.



Şekil 2.2.  $\theta$  parametresi için iz grafikleri: a) Markov Zinciri durağan dağılıma ulaşması b) Markov Zincirinin iyi karışmadığı (yüksek otokorelasyon) c) Yakınsama gerçekleşmediği durumlar



Şekil 2.3. Gecikmelere (lag) karşı otokorelasyon grafiği: a) Düşük otokorelasyon, b) Yüksek otokorelasyon

#### 2.4.3.2. İstatistiksel testler ile değerlendirme

Markov zincirinin yakınsamasını değerlendirmek amacıyla birçok istatistiksel test geliştirilmiştir. Bu testlerin tanımlamaları ve yorumlamaları Çizelge 2.2’de kısaca verilmiştir.

Çizelge 2.2. Yakınsama testleri ve yorumlanması

| Test                                     | Tanım                                                                                                                                                             | Yorumlama                                                                                                                |
|------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Gelman-Rubin                             | Farklı başlangıç değerlerine sahip paralel zincirlerin tümünün aynı hedef dağılıma ulaşp ulaşmadıklarını test eder.                                               | Varyans oranına dayanan tek yönlü testtir. Büyük $\hat{R}_c$ değeri yakınsama olmadığını gösterir.                       |
| Geweke                                   | Markov zincirinin ilk ve son kısmının ortalamalarını karşılaştırarak yakınsamanın gerçekleşip gerçekleşmediğini test eder.                                        | z-skor testine dayanan iki yönlü testtir. Büyük mutlak z değerleri yakınsamanın olmadığını gösterir.                     |
| Heidelberger-Welch (durağanlık testi)    | Markov zincirinin durağan bir süreç olup olmadığını test eder. Başarısızlık, daha uzun bir Markov zincirine ihtiyaç duyulduğunu gösterir.                         | Cramer-Von Mises istatistiğine dayanan tek yönlü bir testtir. Küçük p değerleri yakınsamanın gerçekleşmediğini gösterir. |
| Heidelberger-Welch (yarı-genişlik testi) | Örnek büyüklüğünün, ortalama tahmin için gereken kesinliğe sahip olup olmadığını gösterir. Başarısızlık, daha uzun Markov zincirine ihtiyaç duyulduğunu gösterir. | Göreceli yarı-genişlik istatistiği önceden belirlenen kesinlik ölçüsünden daha büyük ise ret edilir.                     |
| Raftery-Lewis                            | Tahmin edilen yüzdeliklerin kesinliğini değerlendirmek amacıyla kullanılır. Hatalar daha uzun bir zincire ihtiyaç olduğunu gösterir.                              | İhtiyaç duyulan toplam örnek sayısı Markov zincirinden küçük ise red edilir.                                             |
| Otokorelasyon                            | Markov zinciri örnekleri arasındaki bağımlılığı ölçer.                                                                                                            | Uzun gecikmeler arasındaki yüksek korelasyon zayıf bir karışım olduğunu gösterir.                                        |
| Etkili örnek büyüklüğü                   | Otokorelasyon ile ilgilidir. Markov zincirinin karışımını ölçer.                                                                                                  | Etkili örnek büyüklüğü ve mevcut iterasyon arasındaki büyük farklılık zayıf bir karışımı gösterir.                       |

SAS Institute Inc. 2006. Preliminary Capabilities for Bayesian Analysis in SAS/STAT Software. Cary, NC. 22 s.

Çalışmada yakınsamayı ve otokorelasyonu değerlendirmek amacıyla geliştirilen testlerden Geweke Z testi, Etkili örnek büyüklüğü ve Monte Carlo Standart Hata değerleri kullanılmıştır. Bu teşhis testleri aşağıda daha detaylı olarak ele alınmıştır.

**Geweke z testi:** Tek bir Markov zincirinde yakınsamanın gerçekleşip gerçekleşmediğini değerlendirmek amacıyla Geweke (1992) tarafında bir z-testi önerilmiştir. Bu teste göre, toplam uzunluğu ( $M$ ) Markov zincirinden kısa olan ilki Markov zincirinin ilk kısmından ( $M_1$ ) diğeri Markov zincirinin son kısmından ( $M_2$ ) olacak şekilde iki zincir belirlenir.

$$M_1 + M_2 < M$$

Bu z testi iki zincirin ortalamalarını karşılaştırarak Markov zincirindeki yakınsamayı değerlendirir. İki zincir ortalaması anlamlı bir şekilde farklı ise yakınsamanın

gerçekleşmediği söylenir.

**Etkili örnek büyüklüğü (ESS):** Etkili örnek büyüklüğü aşağıdaki gibi tanımlanır (Kass vd. 1998).

$$ESS = \frac{M}{1 + 2 \sum_{h=1}^{\infty} \rho_h(\theta)}$$

Burada  $M$ , mevcut sonsal örnek büyüklüğü ve  $\rho_h(\theta)$ ,  $\theta$  parametresi için  $h$ . gecikmedeki otokorelasyondur. Pratikte  $\sum_{h=1}^{\infty} \rho_h(\theta)$ ,  $\sum_{h=1}^H \rho_h(\theta)$  ile değiştirilir. Pozitif bir sayı olan  $H$ , korelasyon zamanı olarak adlandırılır ve  $h > H$  olduğundan  $\rho_h(\theta) \approx 0$ 'dır. Otokorelasyon her zaman pozitif olduğu için etkili örnek büyüklüğü mevcut sonsal örnek büyüklüğünden daha küçüktür. Mevcut örnek büyüklüğünden oldukça küçük bir sonsal örnek büyüklüğü Markov zincirindeki zayıf karışımı gösterir.

**Monte Carlo standart hatası:** Bayesci yaklaşımda sonsal tahminlerin tümünü elde etmek MCMC yöntemlerine dayanır. Sadece sınırlı sayıda örnek kullanıldığında tahminlerdeki belirsizliğe ek olarak tahminlerin kesinliği belirsizliği eklenir. Bu kesinliği ölçen sonsal ortalama tahminin standart hatası, Monte Carlo standart hatası (MCSE) olarak adlandırılır ve

$$MCSE = \frac{\hat{\sigma}_i}{\sqrt{m}}$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $m$ , etkili örnek büyüklüğü sayısıdır. Tahminlerdeki kesinlik için analiz sonucunda bu değerin 0,05'den küçük olması beklenir.

Sonsal standart sapma ile MCSE arasında farklılıklar vardır. Sonsal standart sapma parametredeki belirsizliği tanımlarken, Monte Carlo standart hatası, MCMC simülasyonunun bir sonucu olarak sadece parametre tahminindeki belirsizliği tanımlar. Sonsal standart sapma veri setindeki örnek büyüklüğünün bir fonksiyonu iken MCSE simülasyondaki iterasyon sayısının bir fonksiyonudur.

## 2.5. Yazılım Programı

MCMC algoritmasını kullanarak Bayesci analiz yapmak için birçok mevcut paket program vardır. Bunlardan sıklıkla kullanılanlar WinBUGS, SAS programının MCMC ve MIXED prosedürü ve R programındaki MCMCglmm paketidir. Bu çalışmada analizler için SAS programının MCMC prosedürü kullanılmıştır.

SAS programında veri analizi iki adımda gerçekleştirilmektedir. Birinci adım veri setinin tanımlanmasıdır. İkinci adım ise ilgili prosedürün seçilip istenen ihtiyaçlar doğrultusunda kodun yazılmasıdır. Bayesci analiz için ilgili prosedür PROC MCMC'dir. Bu prosedür oldukça karışık modellerin üstesinden kolaylıkla gelmektedir. Bu prosedür olabilirlik fonksiyonuna, önsel dağılımlara ve eğer model hiyerarşik bir modelse hiper-

parametreler için de önsel dağılımlara ihtiyaç duyar. Parametreler için önsel dağılımlar PRIOR cümlesinde, veri için olabilirlik ise MODEL cümlesinde yer alır. Default algoritma Random walk metropolis algoritmasıdır ve normal proposal dağılım kullanır. Bu nedenle eğer seed number kullanılmazsa her çalıştırmada biraz farklı sonuçlar elde edilir. PROC MCMC sonsal örnekleri output da saklar ve sonraki analizler için kullanır. Ayrıca PROC MCMC özet istatistiklerini, teşhis grafiklerini ve teşhis testlerini de verir.



### 3. MATERYAL ve METOT

Tezin bu bölümünde çalışmada kullanılan materyallerin ve yöntemin tanıtılmasına yer verilmiştir.

#### 3.1. Materyal

Çalışmada kullanılan farklı deneme planları için farklı veri setleri kullanılmıştır.

Tesadüf parselleri deneme planı, tesadüf bloklarında tek faktörlü deneme planı ve tesadüf bloklarında faktöriyel deneme planı için Akdeniz Üniversitesi Ziraat Fakültesi Toprak Bilimi ve Bitki Besleme Bölümü'nde Yüksek Lisans çalışması olarak yapılan “Farklı Toprak Tekstürlerinde Yetiştirilen Biber Bitkisinin (*Capricum annum L.*) Verim, Kalite ve Bitki Besin Maddesi İçerikleri Üzerine Sulama Suyu Tuzluluk Düzeylerindeki Değişimin Etkileri” adlı çalışmanın veri seti kullanılmıştır. Tesadüf parselleri deneme planı için 4 farklı sulama yönteminin bulunduğu 48 tane bitkide ölçülen potasyum (K) miktarları kullanılmıştır. Tesadüf bloklarında tek faktörlü deneme planı için 4 farklı sulama yönteminin 48 bitkideki sodyum miktarı üzerine etkisi araştırılmıştır. Deneme 4 farklı blok üzerine kurulmuştur. Tesadüf bloklarında faktöriyel deneme planı için ise 4 farklı sulama ve 3 farklı tekstür türünün olduğu 4 bloklu deneme planı için 48 bitkinin boy uzunlukları kullanılmıştır.

İç içe deneme planı için iki farklı veri seti kullanılmıştır. Kullanılan veri setlerinden birincisi Güneydoğu Anadolu Bölgesi'nde yetiştirilen İvesi kuzularına ait cinsiyet (1:erkek, 2:dişi), doğum tipi (1:tekli doğum, 2:çoklu doğum) ve canlı ağırlık verileri kullanılmıştır. Diğer veri seti ise büyük bir sürü popülasyonundan, bu popülasyonu temsil edecek kadar boğa ve inekler şansa bağlı olarak seçilerek çiftleştirilmeleri sonucu elde edilen öz kardeşlerin aynı yıla ait yaşa göre düzeltilmiş süt verim kayıtlarıdır (305 gün) (Fırat 2000).

Son olarak genel doğrusal karışık model için Güneydoğu Anadolu Bölgesi'nde yetiştirilen İvesi koyunlarına ait sürü-yıl-mevsim faktörü, laktasyon süresi ve 120 günlük süt verimleri kullanılmıştır.

#### 3.2. Metot

Bu bölümde çalışmada kullanılacak olan deneme planları tanıtılmış ve Bayesci çözümleri verilmiştir.

##### 3.2.1. Tesadüf parselleri deneme planı

Tek bir faktörün farklı seviyeleri veya  $a$  tane muamelesi olduğunu varsayalım ve bu faktör seviyeleri karşılaştırılsın.  $a$  tane muamelenin her birinden gözlenen yanıt bir şansa bağlı değişkendir. Böyle bir denemeden elde edilen gözlemler aşağıdaki model yardımı ile kolayca tanımlanabilir.

$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, a \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

Burada  $y_{ij}$ ,  $ij$ . gözlem değerini,  $\mu_i$   $i$ . muamele veya faktör seviyesinin ortalaması ve  $\varepsilon_{ij}$  ise ölçümü içeren denemedeki diğer tüm değişim kaynaklarını kapsayan tesadüfi hata bileşenidir. Değişkenlik, kontrol edilemeyen faktörlerden, muamelelerin uygulandığı deneysel birimler arasındaki farktan (test materyali gibi) ve sürecin arkasındaki gürültü faktöründen (zaman boyunca değişkenlik, çevresel değişkenlerin etkisi gibi) kaynaklanabilir. Hataların sıfır ortalamaya sahip olduğu varsayılır ve böylece  $E(y_{ij}) = \mu_i$  'dir. Eşitlik (3.1) ortalamalar modeli olarak adlandırılır. Veri seti için alternatif model Eşitlik 3.2'deki gibi tanımlanabilir.

$$\mu_i = \mu + \alpha_i \quad i = 1, 2, \dots, a \quad (3.2)$$

Modelin bu formunda,  $\mu$  tüm muameleler için ortaktır ve genel ortalama olarak adlandırılır.  $\alpha_i$  ise tek bir parametredir ve  $i$ . muamele etkisi olarak adlandırılır. Eşitlik 3.2 genellikle sabit etkiler modeli olarak adlandırılır.

Hem ortalamalar modeli hem de etkiler modeli, doğrusal modellerdir. Şöyle ki, yanıt değişkeni  $y_{ij}$ , model parametrelerinin doğrusal bir fonksiyonudur. Modelin her iki formunun da kullanışlı olmasına rağmen deneme planlaması literatüründe en çok karşılaşılan model etkiler modelidir. Ayrıca, Eşitlik (3.2) (veya eşitlik 3.1) sadece tek bir faktör araştırıldığı için tesadüf parselleri deneme planı olarak adlandırılır. Bu deneme planında amaç, muamele ortalamaları hakkındaki uygun hipotezleri test etmek ve bu muamele ortalamalarını tahmin etmektir. Hipotez testleri için, model hataları ortalaması 0, varyansı  $\sigma^2$  olan Normal dağılıma sahip ve birbirinden bağımsız rastsal değişkenler oldukları varsayılır. Faktörlerin tüm seviyeleri için varyanslar eşit kabul edilir. Gözlemlerin  $y_{ij} \sim N(\mu + \alpha_i, \sigma_e^2)$  dağılıma sahip olduğu ve bu gözlemler karşılıklı olarak bağımsız olduğu varsayılır.

Tesadüf parselleri deneme planını kısaca hatırlattıktan sonra bu deneme planı için Bayesci çözüme geçebiliriz. Muamele etkisinin sabit değişken olduğu varsayımı altında tesadüf parselleri deneme planı model parametreleri için önsel dağılımlar; genel ortalama  $\mu$  için Tekdüze dağılım, muamele etkisi  $\alpha_i$  için Tekdüze dağılım, hata varyansı  $\sigma_e^2$  için ise Ters-Gama dağılımı olarak alınmıştır. Bu önsel dağılımlar aşağıda gösterilmiştir.

$$\mu \propto \text{sabit}$$

$$\{\alpha_i\} \propto \text{sabit}$$

$$[\sigma_e^2 | \nu_e, S_e^2] \sim IG\left(\frac{\nu_e^2}{2}, \frac{\nu_e^2 S_e^2}{2}\right)$$

$$f(\sigma_e^2 | \nu_e, S_e^2) \propto (\sigma_e^2)^{-\frac{1}{2}(\nu_e+2)} \exp\left\{-\frac{\nu_e S_e^2}{2\sigma_e^2}\right\}$$

Tesadüf parselleri deneme planı için olabilirlik fonksiyonu ise aşağıdaki gibi yazılır.

$$L = f(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}an} (\sigma_e^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_e^2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \mu - \alpha_i)^2 \right\}$$

burada  $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \{\alpha_i\}, \sigma_e^2)$ 'dir. Olabilirlik ve önsel dağılımları kullanarak elde edilen ortak sonsal yoğunluk fonksiyonu ise şöyledir:

$$f(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) \propto (\sigma_e^2)^{-\frac{1}{2}(an + \nu_e + 2)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \mu - \alpha_i)^2 + \nu_e S_e^2}{\sigma_e^2} \right] \right\} \quad (3.3)$$

Ortak sonsal yoğunluk fonksiyonunu elde ettikten sonra her bir model parametresi için tam koşullu sonsal yoğunluk fonksiyonlarını elde etmek gerekir. Bunun için ortak sonsal yoğunluk fonksiyonundan ilgilenilen parametreyi içeren terimleri alarak gerekli düzenlemeler yapılır.

$\mu$ 'nün tam koşullu sonsal yoğunluk fonksiyonunu elde etmek için Eşitlik (3.3)'teki üstel ifadede  $\mu$  içeren terimler alınır. Bu eşitlikteki üstel ifadeyi Eşitlik (3.4) olarak gösterirsek ve bu ifadedeki karesel terimi açarsak Eşitlik (3.5)'i elde ederiz.

$$\left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \mu - \alpha_i)^2}{\sigma_e^2} \right] \right\} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \mu - \alpha_i)^2 &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij}^2 + \mu^2 + \alpha_i^2 - 2\mu y_{ij} - 2y_{ij} - \alpha_i + 2\mu \alpha_i) \\ &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n y_{ij}^2 + an\mu^2 + n \sum \alpha_i^2 - 2\mu \sum \sum y_{ij} - 2 \sum \sum y_{ij} \alpha_i + 2n\mu \sum \alpha_i \end{aligned} \quad (3.5)$$

Eşitlik (3.5)'de  $\mu$  içeren terimler alınır ve düzenlenirse Eşitlik (3.6) elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \left\{ -\frac{1}{2\sigma_e^2} \left[ an\mu^2 + 2n\mu \sum \alpha_i - 2\mu \sum \sum y_{ij} \right] \right\} \\
&= -\frac{1}{2\sigma_e^2} \left[ an\mu^2 + 2n\mu \sum \alpha_i - 2\mu y_{..} \right] \\
&= -\frac{1}{2\sigma_e^2} \left[ an\mu^2 - 2\mu(y_{..} - n \sum \alpha_i) \right] \\
&= \frac{1}{2} \frac{\left[ \mu^2 - 2\mu(\bar{y}_{..} - \bar{\alpha}_{..}) \right]}{\sigma_e^2 / an} \\
&= -\frac{1}{2} \frac{\mu \left[ \mu - 2(\bar{y}_{..} - \bar{\alpha}_{..}) \right]}{\sigma_e^2 / an}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Eşitlik (3.6)'dan  $\mu$  'nün ortalaması  $(\bar{y}_{..} - \bar{\alpha}_{..})$  ve varyansı  $\sigma_e^2 / an$  olan Normal dağılıma sahip olduğu görülür. Bu ifadeyi biraz daha düzenlemek için  $w_{ij} = y_{ij} - \alpha_i$  olsun.

$$\sum \sum w_{ij} = \sum \sum (y_{ij} - \alpha_i) = an(\bar{y}_{..} - \bar{\alpha}_{..})$$

Bundan dolayı  $\mu$  'nün tam koşullu dağılımı

$$[\mu | \sigma_{\alpha}^2, \sigma_e^2, \{\alpha_i\}, \{y_{ij}\}] \sim N \left( \frac{\sum \sum w_{ij}}{an}, \frac{\sigma_e^2}{an} \right)$$

olarak gösterilir.

$\{\alpha_i\}$  'nin tam koşullu sonsal dağılımını elde etmek için Eşitlik (3.4)'de üstel ifadedeki  $\alpha_i$  'yi içeren terimler alınır ve Eşitlik 3.7 elde edilir.

$$\begin{aligned}
\sum \sum (y_{ij} - \mu - \alpha_i)^2 &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\sum \sum (\alpha_i^2 - 2y_{ij}\alpha_i + 2\mu\alpha_i)}{\sigma_e^2} \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{n \sum \alpha_i^2 - 2n \sum \sum y_{ij}\alpha_i + 2n\mu \sum \alpha_i}{\sigma_e^2} \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\left[ n \sum \alpha_i^2 - 2n \sum \alpha_i (\bar{y}_{i.} - \mu) \right]}{\sigma_e^2} \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\sum \alpha_i^2 - \sum \alpha_i (\bar{y}_{i.} - \mu)}{\sigma_e^2 / n} \right\}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Eşitlik 3.7'den  $\{\alpha_i\}$ 'ler ortalaması  $(\bar{y}_i - \mu)$  ve varyansı  $\frac{\sigma_e^2}{n}$  olan Normal dağılıma sahiptir. Özetle  $\{\alpha_i\}$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımı

$$[\{\alpha_i\} | \mu, \sigma_\alpha^2, \sigma_e^2, \{y_{ij}\}] \sim N\left(\bar{y}_i - \mu, \frac{\sigma_e^2}{n}\right)$$

şeklinde gösterilir.

Benzer şekilde  $\sigma_e^2$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımı  $\chi^2$  dağılımı gösterir.

$$\frac{(an + v_e) \left( \sum \sum (y_{ij} - \mu - \alpha_i)^2 + v_e S_e^2 \right)}{\sigma_e^2} \sim \chi_{(an+v_e)}^2$$

ya da

$$[\sigma_e^2 | \mu, \{\alpha_i\}, \{y_{ij}\}] \sim IG\left(\frac{an + v_e}{2}, \frac{\sum \sum (y_{ij} - \mu - \alpha_i)^2 + v_e S_e^2}{2}\right)$$

şeklinde Ters-Gama dağılımına sahiptir.

Muamele etkisinin şansa bağlı değişken olduğu tesadüf parselleri deneme planının Bayesci çözümü ise Ek-1'de verilmiştir.

### 3.2.2. Tesadüf bloklarında tek faktörlü deneme planı

Faktöriyel deneme planları birkaç faktörün ortak etkisini araştırmak için tarımsal denemelerde kullanılan önemli deneme planlarından biridir (Fisher 1935). Deneme materyali tek yönlü heterojenlik gösterdiği zaman heterojenliği ortadan kaldırmak için uygun sayıda bloklama yapılır. Her bir blok muamele sayısı kadar parsel bölünür ve her bir blok içerisinde, her bir muamele tesadüfi olarak dağıtılır. Bu deneme planı için matematiksel model aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ijk} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, a \\ j = 1, 2, \dots, b \\ k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (3.8)$$

Burada  $y_{ijk}$   $i$ . bloktaki  $j$ . muamelenin  $k$ . tekerrürüne ait gözlem değerini,  $\mu$  genel ortalamayı,  $\alpha_i$   $i$ . blok etkisini,  $\beta_j$   $j$ . muamele etkisini ve  $e_{ijk}$  tesadüfi hatayı göstermektedir.

Model için olabilirlik fonksiyonu ise şöyle tanımlanır.

$$L = f(\{y_{ijk}\} | \mu, \{\alpha_i\}, \{\beta_j\}, \sigma_e^2) = f(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}) \text{ şeklinde gösterilirse,}$$

$$f(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}) \propto (\sigma_e^2)^{-\frac{abn}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \mu - \alpha_i - \beta_j)^2}{\sigma_e^2} \right] \right\}$$

yazılır. Model parametreleri için önsel dağılımlar

$$\mu \propto \text{sabit}$$

$$\{\alpha_i\} | \sigma_\alpha^2 \sim N(0, \sigma_\alpha^2)$$

$$\{\beta_j\} | \sigma_\beta^2 \sim N(0, \sigma_\beta^2)$$

$$\sigma_i^2 | \nu_i, S_i^2 \sim IG\left(\frac{\nu_i}{2}, \frac{\nu_i S_i^2}{2}\right) \quad i = \alpha, \beta$$

$$\sigma_e^2 | \nu_e, S_e^2 \sim IG\left(\frac{\nu_e}{2}, \frac{\nu_e S_e^2}{2}\right)$$

olarak alınsın.

Olabilirlik ve önsel dağılımları kullanarak her bir değişken için tam koşullu sonsal dağılımlar elde edilir.

$$f(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) \propto L(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}) \times f(\mu) \times f(\{\alpha_i\}) \times f(\{\beta_j\}) \times f(\sigma_\alpha^2) \times f(\sigma_\beta^2) \times f(\sigma_e^2)$$

Sonsal dağılım kullanılarak ilgilenilen model parametreleri için tam koşullu sonsal dağılımları elde edilir. Modeldeki her bir parametre için tam koşullu sonsal dağılımlar aşağıda verilmiştir. Detaylı hesaplamalar Ek-2’de bulunmaktadır.

$$[\mu | \{\alpha_i\}, \{\beta_j\}, \sigma_\alpha^2, \sigma_\beta^2, \sigma_e^2, \{y_{ijk}\}] \sim N\left(\frac{\bar{y}_{...} - \bar{\alpha} - \bar{\beta}}{abn}, \frac{\sigma_e^2}{abn}\right)$$

$$\begin{aligned}
\left[ \alpha_i \middle| \mu, \{\beta_j\}, \sigma_\alpha^2, \sigma_\beta^2, \sigma_e^2, \{y_{ijk}\} \right] &\sim N \left( \frac{n\sigma_\alpha^2(b\bar{y}_{i..} - b\mu)}{bn\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2}, \frac{\sigma_\alpha^2\sigma_e^2}{bn\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2} \right) \\
\left[ \beta_j \middle| \mu, \{\alpha_i\}, \sigma_\alpha^2, \sigma_\beta^2, \sigma_e^2, \{y_{ijk}\} \right] &\sim N \left( \frac{n\sigma_\beta^2 \left( \left( a\bar{y}_{.j.} - a\mu - \sum_{i=1}^a \alpha_i \right) \right)}{an\sigma_\beta^2 + \sigma_e^2}, \frac{\sigma_\beta^2\sigma_e^2}{an\sigma_\beta^2 + \sigma_e^2} \right) \\
\left[ \sigma_\alpha^2 \middle| \mu, \{\alpha_i\}, \{\beta_j\}, \sigma_\beta^2, \sigma_e^2, \{y_{ijk}\} \right] &\sim IG \left( \frac{a + \nu_a}{2}, \frac{\sum_{i=1}^a \alpha_i^2 + \nu_a S_a^2}{2} \right) \\
\left[ \sigma_\beta^2 \middle| \mu, \{\alpha_i\}, \{\beta_j\}, \sigma_\alpha^2, \sigma_e^2, \{y_{ijk}\} \right] &\sim IG \left( \frac{b + \nu_b}{2}, \frac{\sum_{j=1}^b \beta_j^2 + \nu_b S_b^2}{2} \right) \\
\left[ \sigma_e^2 \middle| \mu, \{\alpha_i\}, \{\beta_j\}, \sigma_\alpha^2, \sigma_\beta^2, \{y_{ijk}\} \right] &= \left[ \sigma_e^2 \middle| \cdot \right] \\
\left[ \sigma_e^2 \middle| \cdot \right] &\sim IG \left( \frac{abn + \nu_e}{2}, \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{l=1}^n (y_{ijk} - \mu - \alpha_i - \beta_j)^2 + \nu_e S_e^2}{2} \right)
\end{aligned}$$

### 3.2.3. Tesadüf bloklarında iki faktörlü faktöriyel deneme planı

Bu deneme planı için matematiksel modeli aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\beta\gamma)_{jk} + e_{ijkl} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, a \\ j = 1, 2, \dots, b \\ k = 1, 2, \dots, c \\ l = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (3.9)$$

Burada  $y_{ijkl}$   $i$ . bloktaki  $j$ . ve  $k$ . muamelenin  $l$ . tekerrürüne ait gözlem değerini,  $\mu$  genel ortalamayı,  $\alpha_i$   $i$ . blok etkisini,  $\beta_j$   $j$ . muamele etkisini,  $\gamma_k$   $k$ . muamele etkisini,  $(\beta\gamma)_{jk}$   $j$ .

muamele ile  $k$ . muamelenin etkileşim etkisini ve  $e_{ijkl}$  tesadüfi hatayı göstermektedir. Model için olabilirlik fonksiyonu ise şöyle tanımlanır.

$$L = f(\{y_{ijkl}\} | \mu, \{\alpha_i\}, \{\beta_j\}, \{\gamma_k\}, \{(\beta\gamma)_{jk}\}, \sigma_e^2) = f(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}) \text{ şeklinde gösterilirse,}$$

$$f(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}) \propto (\sigma_e^2)^{-\frac{abcn}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^n (y_{ijkl} - \mu - \alpha_i - \beta_j - \gamma_k - \beta\gamma_{jk})^2}{\sigma_e^2} \right] \right\}$$

yazılır. Model parametreleri için önsel dağılımlar ise

$$\mu \propto \text{sabit}$$

$$\{\alpha_i\} | \sigma_\alpha^2 \sim N(0, \sigma_\alpha^2)$$

$$\{\beta_j\} | \sigma_\beta^2 \sim N(0, \sigma_\beta^2)$$

$$\{\gamma_k\} | \sigma_\gamma^2 \sim N(0, \sigma_\gamma^2)$$

$$\{(\beta\gamma)_{jk}\} | \sigma_{\beta\gamma}^2 \sim N(0, \sigma_{\beta\gamma}^2)$$

$$\sigma_i^2 | \nu_i, S_i^2 \sim IG\left(\frac{\nu_i}{2}, \frac{\nu_i S_i^2}{2}\right) \quad i = \alpha, \beta, \gamma, (\beta\gamma)$$

$$\sigma_e^2 | \nu_e, S_e^2 \sim IG\left(\frac{\nu_e}{2}, \frac{\nu_e S_e^2}{2}\right)$$

olarak alınmıştır.

Olabilirlik ve her bir model parametresi için önsel dağılımların çarpımı sonucu elde edilen ortak sonsal yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$f(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) \propto L(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}) \times f(\mu) \times f(\{\alpha_i\}) \times f(\{\beta_j\}) \times f(\{\gamma_k\}) \times f(\{(\beta\gamma)_{jk}\}) \times f(\sigma_i^2) \times f(\sigma_e^2)$$

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) &\propto (\sigma_e^2)^{-\frac{(abcn+\nu_e+2)}{2}} \times (\sigma_\alpha^2)^{-\frac{1}{2}(a+\nu_a+2)} \times (\sigma_\beta^2)^{-\frac{1}{2}(b+\nu_b+2)} \\
&\times (\sigma_\gamma^2)^{-\frac{1}{2}(c+\nu_c+2)} \times (\sigma_{\beta\gamma}^2)^{-\frac{1}{2}(bc+\nu_{bc}+2)} \\
&\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^n (y_{ijkl} - \mu - \alpha_i - \beta_j - \gamma_k - \beta\gamma_{jk})^2 + \nu_e S_e^2}{\sigma_e^2} \right] \right\} \\
&\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \alpha_i^2 + \nu_a S_a^2}{\sigma_\alpha^2} + \frac{\sum_{i=1}^a \beta_i^2 + \nu_b S_b^2}{\sigma_\beta^2} \right] \right\} \\
&\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \gamma_i^2 + \nu_c S_c^2}{\sigma_\gamma^2} + \frac{\sum_{i=1}^a \beta\gamma_i^2 + \nu_{bc} S_{bc}^2}{\sigma_{\beta\gamma}^2} \right] \right\}
\end{aligned}$$

Modeldeki her bir parametre için tam koşullu sonsal dağılımlar aşağıda verilmiştir. Tam koşullu sonsal dağılımların detaylı elde edilişi Ek-3’de yer almaktadır.

$$[\mu] \sim N \left( \frac{\bar{y}_{....} - \bar{\alpha} - \bar{\beta} - \bar{\gamma} - (\bar{\beta}\bar{\gamma})}{abcn}, \frac{\sigma_e^2}{abcn} \right)$$

$$[\{\alpha_i\}] \sim N \left( \frac{n\sigma_\alpha^2 \left( bc\bar{y}_{i...} - bc\mu - c \sum_{j=1}^b \beta_j - b \sum_{k=1}^c \gamma_k - \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \beta\gamma_{jk} \right)}{bcn\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2}, \frac{\sigma_\alpha^2 \sigma_e^2}{bcn\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2} \right)$$

$$[\{\beta_j\}] \sim N \left( \frac{n\sigma_\beta^2 \left( ac\bar{y}_{.j..} - ac\mu - c \sum_{i=1}^a \alpha_i - a \sum_{k=1}^c \gamma_k - \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \beta\gamma_{jk} \right)}{acn\sigma_\beta^2 + \sigma_e^2}, \frac{\sigma_\beta^2 \sigma_e^2}{acn\sigma_\beta^2 + \sigma_e^2} \right)$$

$$[\{\gamma_k\}|\cdot] \sim N \left( \frac{n\sigma_\gamma^2 \left( ab\bar{y}_{..k} - ab\mu - b \sum_{i=1}^a \alpha_i - a \sum_{j=1}^b \beta_j - a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \beta\gamma_{jk} \right)}{abn\sigma_\gamma^2 + \sigma_e^2}, \frac{\sigma_\gamma^2 \sigma_e^2}{abn\sigma_\gamma^2 + \sigma_e^2} \right)$$

$$[(\beta\gamma)_{jk}|\cdot] \sim N \left( \frac{n\sigma_{(\beta\gamma)}^2 \left( a\bar{y}_{.jk} - a\mu - \sum_{i=1}^a \alpha_i - a \sum_{j=1}^b \beta_j \right)}{an\sigma_{\beta\gamma}^2 + \sigma_e^2}, \frac{\sigma_{\beta\gamma}^2 \sigma_e^2}{an\sigma_{\beta\gamma}^2 + \sigma_e^2} \right)$$

$$[\sigma_\alpha^2|\cdot] \sim IG \left( \frac{a + \nu_\alpha}{2}, \frac{\sum_{i=1}^a \alpha_i^2 + \nu_\alpha S_\alpha^2}{2} \right)$$

$$[\sigma_\beta^2|\cdot] \sim IG \left( \frac{b + \nu_\beta}{2}, \frac{\sum_{j=1}^b \beta_j^2 + \nu_\beta S_\beta^2}{2} \right)$$

$$[\sigma_\gamma^2|\cdot] \sim IG \left( \frac{c + \nu_\gamma}{2}, \frac{\sum_{k=1}^c \gamma_k^2 + \nu_\gamma S_\gamma^2}{2} \right)$$

$$[\sigma_{\beta\gamma}^2|\cdot] \sim IG \left( \frac{bc + \nu_{\beta\gamma}}{2}, \frac{\sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \beta\gamma_{jk}^2 + \nu_{\beta\gamma} S_{\beta\gamma}^2}{2} \right)$$

$$[\sigma_e^2|\cdot] \sim IG \left( \frac{abcn + \nu_e}{2}, \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^n (y_{ijkl} - \mu - \alpha_i - \beta_j - \gamma_k - \beta\gamma_{jk})^2 + \nu_e S_e^2}{2} \right)$$

### 3.2.4. İç içe deneme planı

Bazı denemelerde örnekler iki veya daha fazla adımda seçilir. A faktörünün  $a$  seviyesinin B faktörünün ise  $b$  seviyesinin olduğu iki faktörlü bir deneme planı ele alınsın. B'nin seviyeleri A'nın seviyelerinin içine yerleşmiştir. İki seviyeli iç içe deneme planı için model aşağıdaki gibidir.

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + e_{ijk} \quad i = 1, 2, \dots, a; j = 1, 2, \dots, b; k = 1, 2, \dots, n \quad (3.10)$$

burada  $y_{ijk}$  A faktörünün  $i$ . seviyesi ve B faktörünün  $j$ . seviyesindeki  $k$ . gözlem değerini;  $\mu$  genel ortalamayı,  $\alpha_i$  A faktörünün  $i$ . seviyesinin etkisini;  $\beta_{j(i)}$  A faktörünün  $i$ . seviyesi içindeki B faktörünün  $j$ . seviyesinin etkisini ve  $e_{ijk}$  ortalaması 0, varyansı  $\sigma_e^2$  olan Normal dağılıma sahip rastsal hata terimini göstermektedir ( $e_{ijk} \sim N(0, \sigma_e^2)$ ). Buna göre model için olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi yazabilir.

$$L(\theta|\mathbf{y}) = f(\mu, \{\alpha_i\}, \{\beta_{j(i)}\}, \sigma_\alpha^2, \sigma_{\beta(\alpha)}^2, \sigma_e^2 | \{y_{jk}\})$$

$$L(\theta|\mathbf{y}) \propto (\sigma_e^2)^{-\frac{1}{2}abn} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \mu - \alpha_i - \beta_{j(i)})^2}{\sigma_e^2} \right] \right\}$$

Modeldeki her bir parametre için önsel dağılımlar şöyledir:

$$\mu \propto \text{sabit}$$

$$f(\{\alpha_i\} | \sigma_\alpha^2) \propto (\sigma_\alpha^2)^{-\frac{1}{2}a} \exp \left( -\frac{\sum_{i=1}^a \alpha_i^2}{2\sigma_\alpha^2} \right)$$

$$f(\{\beta_{j(i)}\} | \sigma_{\beta(\alpha)}^2) \propto (\sigma_{\beta(\alpha)}^2)^{-\frac{1}{2}ab} \exp \left( -\frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \beta_{j(i)}^2}{2\sigma_{\beta(\alpha)}^2} \right)$$

$$f(\sigma_\alpha^2 | \nu_\alpha, S_\alpha^2) \propto (\sigma_\alpha^2)^{-\frac{1}{2}(\nu_\alpha+2)} \exp \left\{ -\frac{\nu_\alpha S_\alpha^2}{2\sigma_\alpha^2} \right\}$$

$$f\left(\sigma_{\beta(\alpha)}^2 \mid \nu_{\beta(\alpha)}, S_{\beta(\alpha)}^2\right) \propto \left(\sigma_{\beta(\alpha)}^2\right)^{-\frac{1}{2}(\nu_{\beta(\alpha)}+2)} \exp\left\{-\frac{\nu_{\beta(\alpha)} S_{\beta(\alpha)}^2}{2\sigma_{\beta(\alpha)}^2}\right\}$$

$$f\left(\sigma_e^2 \mid \nu_e, S_e^2\right) \propto \left(\sigma_e^2\right)^{-\frac{1}{2}(\nu_e+2)} \exp\left\{-\frac{\nu_e S_e^2}{2\sigma_e^2}\right\}$$

Olabilirlik fonksiyonu ve önsel dağılımların çarpımından aşağıdaki ortak sonsal dağılım elde edilir.

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y}) &\propto L(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y}) \times f(\mu) \times f(\{\alpha_i\} \mid \sigma_\alpha^2) \times f(\{\beta_{j(i)}\} \mid \sigma_{\beta}^2) \\ &\quad \times f(\sigma_\alpha^2 \mid \nu_\alpha, S_\alpha^2) \times f(\sigma_{\beta(\alpha)}^2 \mid \nu_{\beta(\alpha)}, S_{\beta(\alpha)}^2) \times f(\sigma_e^2 \mid \nu_e, S_e^2) \\ f(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y}) &\propto \left(\sigma_\alpha^2\right)^{-\frac{1}{2}(a+\nu_\alpha+2)} \times \left(\sigma_{\beta(\alpha)}^2\right)^{-\frac{1}{2}(ab+\nu_{\beta(\alpha)}+2)} \times \left(\sigma_e^2\right)^{-\frac{1}{2}(abn+\nu_e+2)} \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \mu - \alpha_i - \beta_{j(i)})^2 + \nu_e S_e^2}{\sigma_e^2} + \frac{\sum_{i=1}^a \alpha_i^2 + \nu_\alpha S_\alpha^2}{\sigma_\alpha^2}\right]\right\} \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \beta_{j(i)}^2 + \nu_{\beta(\alpha)} S_{\beta(\alpha)}^2}{\sigma_{\beta(\alpha)}^2}\right]\right\} \end{aligned}$$

Ortak sonsal olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edildikten sonra  $\mu$ ,  $\{\alpha_i\}$ ,  $\{\beta_{j(i)}\}$ ,  $\sigma_\alpha^2$ ,  $\sigma_{\beta(\alpha)}^2$  ve  $\sigma_e^2$  parametrelerinin tam koşullu sonsal dağılımları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\left[\mu \mid \{\alpha_i\}, \{\beta_{j(i)}\}, \sigma_\alpha^2, \sigma_{\beta(\alpha)}^2, \sigma_e^2, \{y_{ijk}\}\right] \sim N\left(\bar{y}_{...} - \bar{\alpha} - \beta_{j(i)}, \frac{\sigma_e^2}{abn}\right)$$

$$\left[\{\alpha_i\} \mid \mu, \{\beta_{j(i)}\}, \sigma_\alpha^2, \sigma_{\beta(\alpha)}^2, \sigma_e^2, \{y_{ijk}\}\right] = \left[\{\alpha_i\} \mid \cdot\right]$$

$$\left[\{\alpha_i\} \mid \cdot\right] \sim N\left(\left(\frac{\sigma_\alpha^2}{bn\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2}\right)n(b(\bar{y}_{i..} - \mu) - b\bar{\beta}_{j(i)}), \frac{\sigma_\alpha^2 \sigma_e^2}{bn\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2}\right)$$

$$\left[\{\beta_{j(i)}\} \mid \mu, \{\alpha_i\}, \sigma_\alpha^2, \sigma_{\beta(\alpha)}^2, \sigma_e^2, \{y_{ijk}\}\right] = \left[\{\beta_{j(i)}\} \mid \cdot\right]$$

$$\begin{aligned}
[\{\beta_{j(i)}\}] &\sim N\left(\frac{n^2\sigma_{\beta(\alpha)}^2\sum_{i=1}^a\sum_{j=1}^b(\bar{y}_{ij} - \mu - \alpha_i)}{n\sigma_{\beta(\alpha)}^2 + \sigma_e^2}, \frac{\sigma_e^2\sigma_{\beta(\alpha)}^2}{n\sigma_{\beta(\alpha)}^2 + \sigma_e^2}\right) \\
[\sigma_\alpha^2|\mu, \{\alpha_i\}, \{\beta_{j(i)}\}, \sigma_{\beta(\alpha)}^2, \sigma_e^2, \{y_{ijk}\}] &\sim IG\left(\frac{a + \nu_\alpha}{2}, \frac{\sum_{i=1}^a \alpha_i^2 + \nu_\alpha S_\alpha^2}{2}\right) \\
[\sigma_{\beta(\alpha)}^2|\mu, \{\alpha_i\}, \{\beta_{j(i)}\}, \sigma_\alpha^2, \sigma_e^2, \{y_{ijk}\}] &\sim IG\left(\frac{ab + \nu_{\beta(\alpha)}}{2}, \frac{\sum_{i=1}^a\sum_{j=1}^b \beta_{j(i)}^2 + \nu_{\beta(\alpha)} S_{\beta(\alpha)}^2}{2}\right) \\
[\sigma_e^2|\mu, \{\alpha_i\}, \{\beta_{j(i)}\}, \sigma_\alpha^2, \sigma_{\beta(\alpha)}^2, \{y_{ijk}\}] &= [\sigma_e^2] \\
[\sigma_e^2] &\sim IG\left(\frac{abn + \nu_e}{2}, \frac{\sum_{i=1}^a\sum_{j=1}^b\sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \mu - \alpha_i - \beta_{j(i)})^2 + \nu_e S_e^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

Tam koşullu sonsal dağılımların detaylı elde edilişi Ek-4’de verilmiştir.

### 3.2.5. Genel doğrusal karışık model

Genel doğrusal karışık model aşağıdaki gibi yazılır.

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{e} \quad (3.11)$$

burada,  $\mathbf{y}$ ,  $N \times 1$  boyutlu gözlemlerin vektörüdür.  $\boldsymbol{\beta}$ ,  $p \times 1$  boyutlu sabit etkiler vektörünü,  $\mathbf{u}$ ,  $A \times 1$  boyutlu rastsal etkiler vektörünü göstermektedir.  $\mathbf{X}$  ve  $\mathbf{Z}$  sırasıyla,  $N \times p$  ve  $N \times A$  boyutlu  $\boldsymbol{\beta}$  ve  $\mathbf{u}$  ile ilişkili tasarım matrisleridir. Bu model için verilen genel varsayımlar aşağıdaki gibidir.

$$[\mathbf{y}|\boldsymbol{\beta}, \mathbf{u}, \sigma_e^2] \sim N(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{I}_N \sigma_e^2)$$

$$[\mathbf{u}|\sigma_a^2] \sim N(0, \mathbf{I}_A \sigma_a^2)$$

$$[\mathbf{e}|\sigma_e^2] \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_N \sigma_e^2)$$

$$\text{cov}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i'}) = \text{cov}(\mathbf{u}, \mathbf{e}) = \mathbf{0}, \forall i \neq i'.$$

Bu varsayımlar doğrultusunda modelin olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır.

$$L(\mathbf{y}|\boldsymbol{\beta}, \mathbf{u}, \sigma_a^2, \sigma_e^2) \propto (\sigma_e^2)^{-\frac{N}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_e^2}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{Z}\mathbf{u})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{Z}\mathbf{u})\right\}$$

Model parametreleri için önsel dağılımlar ise

$$\boldsymbol{\beta} \propto \text{sabit}$$

$$f(\mathbf{u}|\sigma_a^2) \propto (\sigma_a^2)^{-\frac{A}{2}} \exp\left\{-\frac{\mathbf{u}'\mathbf{u}}{2\sigma_a^2}\right\}$$

$$f(\sigma_i^2|\nu_i, S_i^2) \propto (\sigma_i^2)^{-\frac{1}{2}(\nu_i+2)} \exp\left(-\frac{\nu_i S_i^2}{2\sigma_i^2}\right), \quad i = a, e$$

şeklinde tanımlanır. Böylece ortak sonsal yoğunluk fonksiyonu

$$f(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{u}, \sigma_a^2, \sigma_e^2|\mathbf{y}) \propto f(\mathbf{y}|\boldsymbol{\beta}, \mathbf{u}, \sigma_a^2, \sigma_e^2) f(\boldsymbol{\beta}) p(\mathbf{u}|\sigma_a^2) \prod_{i=a,e} f(\sigma_i^2|\nu_i, S_i^2)$$

şeklinde yazılır. Buradan hareketle her bir model parametresi için tam koşullu sonsal dağılım aşağıda verilmiştir. Bunların detaylı çözümleri ise Ek-5'de verilmiştir.

$$[\boldsymbol{\beta}|\mathbf{u}, \sigma_a^2, \sigma_e^2, \mathbf{y}] \sim N((\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'(\mathbf{y} - \mathbf{Z}\mathbf{u}), (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \sigma_e^2)$$

$$[\mathbf{u}|\boldsymbol{\beta}, \sigma_a^2, \sigma_e^2, \mathbf{y}] \sim N\left(\left(\mathbf{Z}'\mathbf{Z} + \mathbf{I}_A \frac{\sigma_e^2}{\sigma_a^2}\right)^{-1} \mathbf{Z}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}), \left(\mathbf{Z}'\mathbf{Z} + \mathbf{I}_A \frac{\sigma_e^2}{\sigma_a^2}\right)^{-1} \sigma_e^2\right)$$

$$[\sigma_a^2|\boldsymbol{\beta}, \mathbf{u}, \sigma_e^2, \mathbf{y}] \sim IG\left(\frac{A + \nu_s}{2}, \frac{\mathbf{u}'\mathbf{u} + \nu_a S_a^2}{2}\right)$$

$$[\sigma_e^2|\boldsymbol{\beta}, \mathbf{u}, \sigma_a^2, \mathbf{y}] \sim IG\left(\frac{N + \nu_e}{2}, \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{Z}\mathbf{u})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{Z}\mathbf{u}) + \nu_e S_e^2}{2}\right)$$

#### 4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde tarımsal deneme planları için Bayesci veri analizlerine yer verilmiştir. Her bir deneme planı için SAS programında PROC MCMC prosedürü kullanılarak elde edilen bulgular ve tartışmalar yer almaktadır.

##### 4.1. Veri Analizi

Bu bölümde tarımsal denemelerde sıklıkla kullanılan deneme planları için gerçek denemelerden elde edilen veri setlerinin Bayesci çözümleri verilmiştir. SAS programının PROC MCMC prosedürü kullanılarak her bir deneme planı için Bölüm 3.1’de detayları verilen veri setlerinin Bayesci analizleri yapılmıştır. Öncelikle her bir deneme planı için veri setlerinin ön kontrolleri yapılmış ve daha sonra veri seti için model belirlenmiştir. Modeldeki her bir parametre için önsel dağılımlar belirlendikten sonra her bir parametre için tam koşullu sonsal dağılımlar elde edilmiştir. Son olarak da her bir veri setinin SAS programında PROC MCMC prosedürü kullanılarak elde edilen analiz sonuçları verilmiştir.

##### 4.2. Tesadüf Parselleri Deneme Planı

Tesadüf parselleri deneme planı için 4 farklı sulama yönteminin 48 bitkideki potasyum miktarına etkisi incelenmiştir. Veri setine ilişkin tanımlayıcı istatistikler Çizelge 4.1’de verilmiştir. Buna göre, sulama etkisinin seviyeleri  $2,9191 \pm 0,2603$ ,  $2,8691 \pm 0,3578$ ,  $2,8691 \pm 0,2490$  ve  $2,9216 \pm 0,4011$ ’dir.

Çizelge 4.1. Tanımlayıcı istatistikler

| Sulama | N  | Ortalama | Std Sapma | Min. | Max. |
|--------|----|----------|-----------|------|------|
| 1      | 12 | 2,9191   | 0,2603    | 2,43 | 3,19 |
| 2      | 12 | 2,8691   | 0,3578    | 2,42 | 3,62 |
| 3      | 12 | 2,8691   | 0,2490    | 2,55 | 3,34 |
| 4      | 12 | 2,9216   | 0,4011    | 2,42 | 3,57 |

Farklı sulama yöntemlerinin bitkideki potasyum miktarına etkilerini incelemek amacıyla aşağıdaki model kullanılmıştır.

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \quad i = 1,2,3,4 \quad j = 1,2,\dots,12$$

Model parametreleri için önsel dağılımlar aşağıdaki gibi belirlenmiştir.

$$\mu \sim N(0,10^4)$$

$$\{\alpha_i\} \sim N(0,10^4)$$

$$\sigma_e^2 \sim IG(0,01,0,01)$$

Genel ortalama için ortalaması 0, varyansı  $10^4$  olan Normal dağılım, sulama etkisi ve hata varyansı için ise bilgi içermeyen önsel dağılımlar seçilmiştir. Sulama etkisinin seviyeleri arasında fark olup olmadığı incelenmiştir ve sulama etkisinin 4. seviyesi referans sınıf olarak alınmıştır. Asıl ilgilendiğimiz durum sulamanın seviyeleri arasında fark olup olmadığı olduğu için sulamanın seviyeleri arasındaki farklar aşağıdaki gibi gösterilmiştir.

$$\psi_{12} = S1 - S2$$

$$\psi_{13} = S1 - S3$$

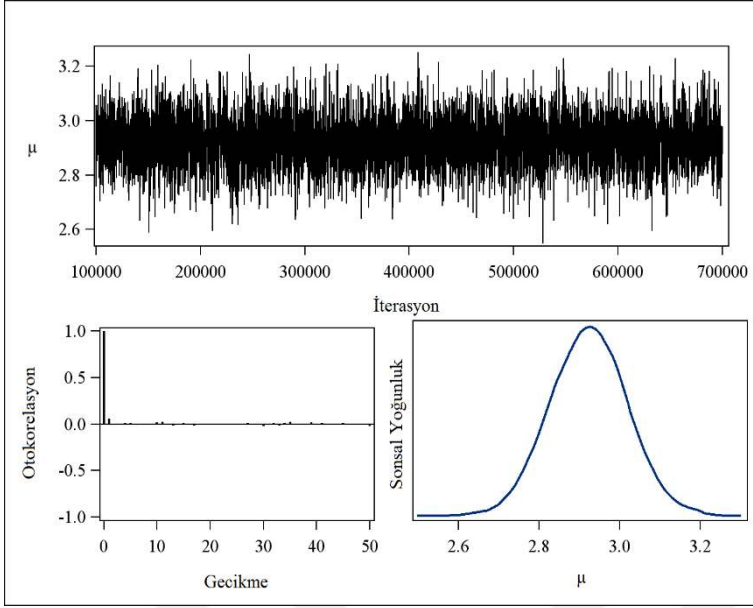
$$\psi_{23} = S2 - S3$$

Burada S1, S2 ve S3 sulamanın ilk üç seviyesini göstermektedir.

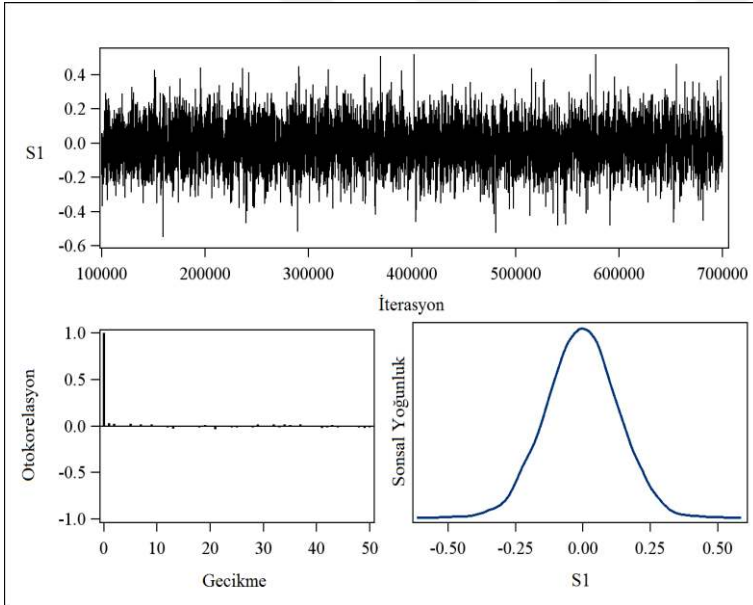
Veri setinin Bayesci çözümü için Markov zinciri 700.000, bur-in periyot 100.000 ve seyreltme aralığı ise 100 olarak alınmıştır. Bunun sonucu toplam 6000 örnek elde edilmiştir. Şekil 4.1-4.4 genel ortalama, sulama etkisinin 1., 2. ve 3. seviyesi, sulama etkileri arasındaki farkların ve hata varyansı için iz grafiklerini, otokorelasyon grafiklerini ve sonsal yoğunluk grafiklerini göstermektedir. Her bir grafikte de Markov zincirinin başarılı bir şekilde yakınsamayı gerçekleştirdiği görülmektedir. Otokorelasyon grafikleri incelendiğinde ise her parametre için otokorelasyonun bulunmadığı görülmektedir. Ayrıca sonsal dağılımın neredeyse normal dağıldığı görülmektedir. Bu grafiklere göre tüm parametreler için yakınsamanın sağlandığı söylenir.

Çizelge 4.2’de ise yakınsamayı değerlendirmek için Geweke z testi ve diğer teşhis istatistikleri verilmiştir. Mutlak değerce büyük z değerleri ve  $p > 0,05$  değerleri bütün parametreler için yakınsamanın gerçekleştiğini göstermektedir. Çizelgede etkili örnek büyüklüğü (ESS) ve etkinlik incelendiğinde tüm parametreler için yakınsamanın sağlandığı görülmektedir. Ayrıca Monte Carlo standart hata değerleri de (MCSE) 0,05’den küçüktür. Burada verilen yakınsama testleri sonuçları ile Şekil 4.1-4.4 sonuçlarının tutarlı olduğu görülmektedir.

Hem görsel hem de teşhis testleri ile parametreler için Markov zincirinin yakınsadığına karar verildikten sonra parametreler için elde edilen sonsal özet istatistiklerinin güvenilir olduğu söylenir. Çizelge 4.3’de ise tüm değişkenler için sonsal özet istatistikleri verilmiştir.



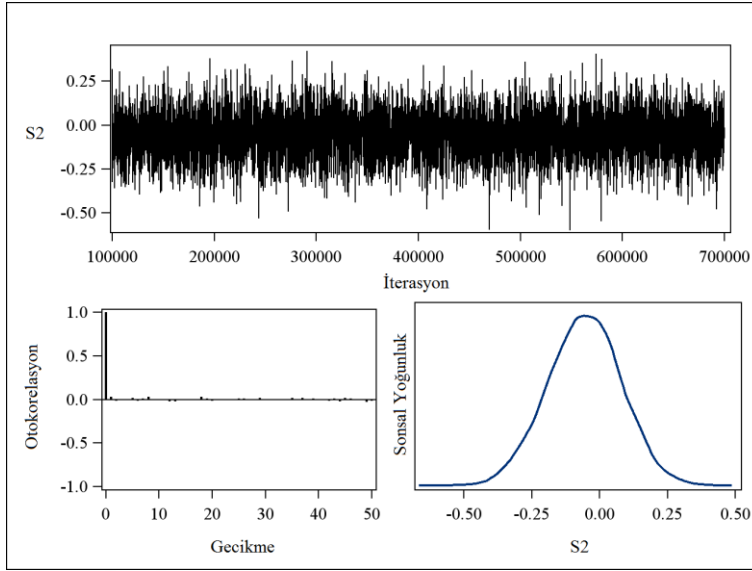
(a)



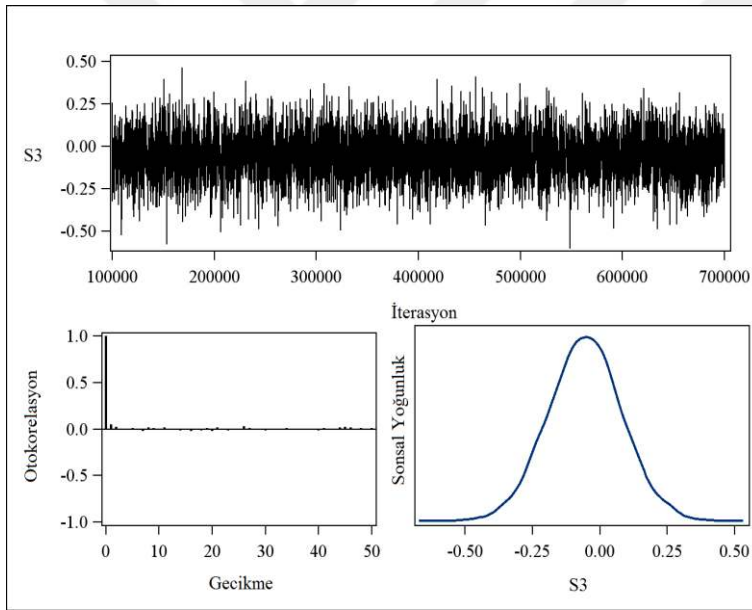
(b)

Şekil 4.1.a) Genel ortalamaya ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri

b) Sulama etkisinin 1. seviyesine ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri



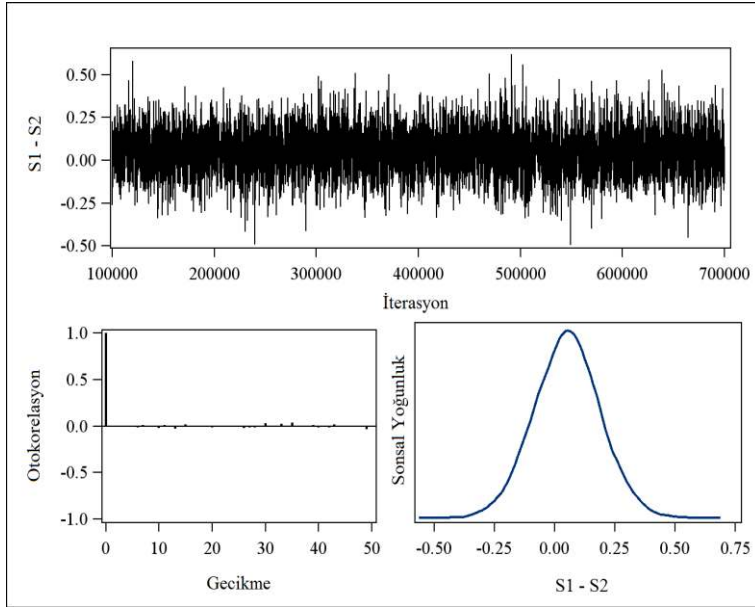
(a)



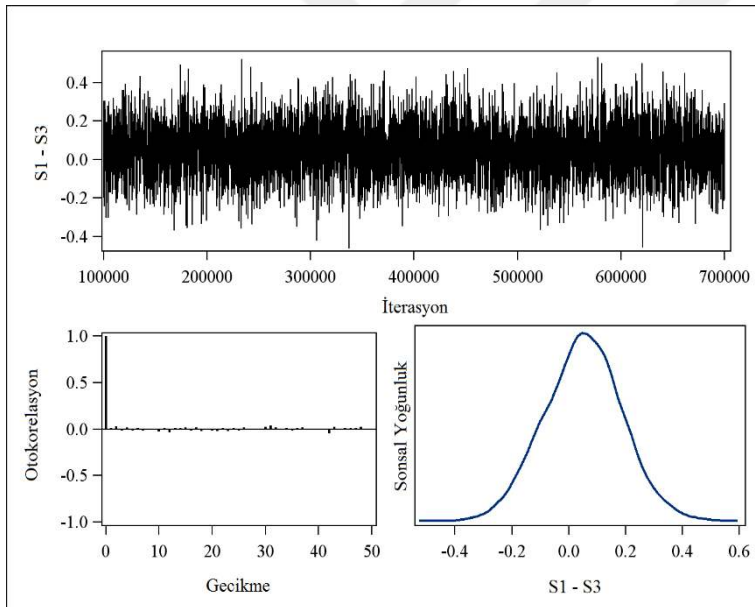
(b)

Şekil 4.2.a) Sulama etkisinin 2. seviyesine ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri

b) Sulama etkisinin 3. seviyesine ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri



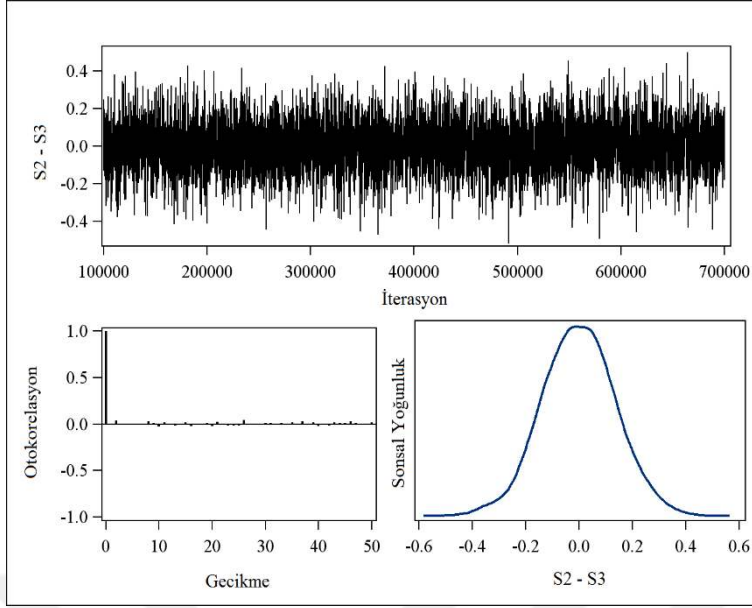
(a)



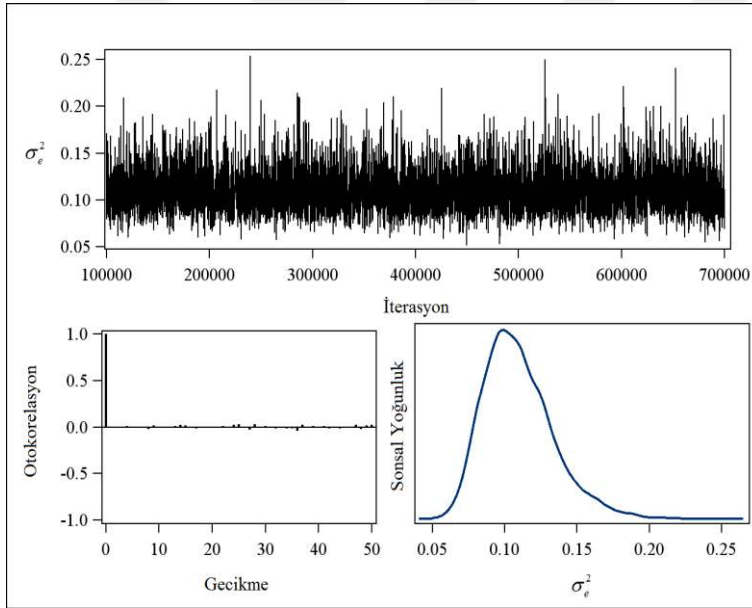
(b)

Şekil 4.3.a)  $S1-S2$ 'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri

b)  $S1-S3$ 'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri



(a)



(b)

Şekil 4.4.a) S2-S3'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri  
 b) Hata varyansına ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri

Çizelge 4.2. Model parametreleri için teşhis testleri

| Parametre    | Geweke z | p değeri | Sonsal örnek büyüklüğü | MCSE   | ESS    | Etkinlik |
|--------------|----------|----------|------------------------|--------|--------|----------|
| $\mu$        | 0,8661   | 0,3864   | 6000                   | 0,0013 | 5393,4 | 0,8989   |
| $S1$         | -0,8916  | 0,3726   | 6000                   | 0,0018 | 5404,1 | 0,9007   |
| $S2$         | -1,2904  | 0,1969   | 6000                   | 0,0017 | 5846,4 | 0,9744   |
| $S3$         | -0,5329  | 0,5941   | 6000                   | 0,0018 | 5246,8 | 0,8745   |
| $\psi_{12}$  | 0,4183   | 0,6758   | 6000                   | 0,0017 | 6000,0 | 1,0000   |
| $\psi_{13}$  | -0,2411  | 0,8095   | 6000                   | 0,0018 | 5726,5 | 0,9544   |
| $\psi_{23}$  | -0,5701  | 0,5686   | 6000                   | 0,0017 | 6000,0 | 1,0000   |
| $\sigma_e^2$ | -0,8142  | 0,4155   | 6000                   | 0,0003 | 6000,0 | 1,0000   |

S: Sulama faktörünün seviyeleri

Çizelge 4.3. Model parametreleri için sonsal özet istatistikleri

| Parametre    | Ortalama | Standart Sapma | Eşit Kuyruk Aralık |        | HPD (%95) |           |
|--------------|----------|----------------|--------------------|--------|-----------|-----------|
|              |          |                | %2.5               | %97.5  | HPD (sol) | HPD (sağ) |
| $\mu$        | 2,9233   | 0,0952         | 2,7381             | 3,1132 | 2,7464    | 3,1197    |
| $S1$         | -0,0042  | 0,1332         | -0,2638            | 0,2558 | -0,2614   | 0,2568    |
| $S2$         | -0,0561  | 0,1353         | -0,3262            | 0,2011 | -0,3286   | 0,1961    |
| $S3$         | -0,0549  | 0,1364         | -0,3270            | 0,2170 | -0,3219   | 0,2192    |
| $\psi_{12}$  | 0,0518   | 0,1369         | -0,2165            | 0,3244 | -0,2231   | 0,3137    |
| $\psi_{13}$  | 0,0507   | 0,1361         | -0,2183            | 0,3217 | -0,2254   | 0,3112    |
| $\psi_{23}$  | -0,0011  | 0,1377         | -0,2775            | 0,2715 | -0,2529   | 0,2908    |
| $\sigma_e^2$ | 0,1098   | 0,0241         | 0,0723             | 0,1658 | 0,0699    | 0,1616    |

S: Sulama faktörünün seviyeleri

Çizelge 4.3'e göre genel ortalama ( $\mu$ ) 2,9233, sulama etkisinin seviyeleri ( $S1, S2, S3$ ) sırasıyla -0,0042, -0,0561 ve -0,0549 olarak elde edilmiştir. Sulama etkisinin seviyeleri arasındaki farklar ise sırasıyla 0,0518 ( $\psi_{12}$ ), 0,0507 ( $\psi_{13}$ ) ve -0,0011 ( $\psi_{23}$ ) olarak bulunmuştur. Sulama seviyeleri arasında fark olup olmadığı ise HPD aralıkları incelenerek değerlendirilmiştir. Buna göre sulama etkisinin seviyelerinin farklarının HPD aralıkları 0'ı içerdiği için tüm sulama seviyelerinin farkları arasında istatistiksel olarak fark olmadığı görülmektedir.

#### 4.3. Tesadüf Bloklarında Tek Faktörlü Deneme Planı

Bu deneme planlaması için 4'er seviyesi bulunan blok ve sulama etkisinin bitkilerdeki sodyum miktarına etkisi incelenmiştir ve bu amaçla Eşitlik 3.8'deki model kullanılmıştır. Modeldeki  $\mu$ ,  $\alpha$  ve  $\beta$ 'lar sırasıyla genel ortalamayı, blok etkisini ve sulama etkisini göstermektedir. Bölüm 3.2.2 ve Ek-2'deki Bayesci çözümler  $\alpha_i$  ve  $\beta_j$  etkilerinin şansa bağlı değişkenler olduğu varsayılarak verilmiştir. Burada ise sabit değişken olarak alınmıştır. Bu veri seti için tanımlayıcı istatistikler Çizelge 4.4'de verilmiştir.

Çizelge 4.4. Tanımlayıcı istatistikler

| Blok | Sulama | N | Ortalama | Std.   | Min.   | Max.   |
|------|--------|---|----------|--------|--------|--------|
|      |        |   |          | Sapma  |        |        |
| 1    | 1      | 3 | 0,9766   | 0,1171 | 0,8900 | 1,1100 |
|      | 2      | 3 | 1,4900   | 0,1777 | 1,3500 | 1,6900 |
|      | 3      | 3 | 1,9666   | 0,0709 | 1,8900 | 2,0300 |
|      | 4      | 3 | 2,4066   | 0,3716 | 1,9800 | 2,6600 |
| 2    | 1      | 3 | 1,0300   | 0,2424 | 0,8900 | 1,3100 |
|      | 2      | 3 | 1,5700   | 0,1153 | 1,4600 | 1,6900 |
|      | 3      | 3 | 2,0533   | 0,2328 | 1,8900 | 2,3200 |
|      | 4      | 3 | 2,2966   | 0,3611 | 1,8900 | 2,5800 |
| 3    | 1      | 3 | 1,0633   | 0,2050 | 0,9400 | 1,3000 |
|      | 2      | 3 | 1,5866   | 0,1900 | 1,4000 | 1,7800 |
|      | 3      | 3 | 2,1166   | 0,1001 | 2,0200 | 2,2200 |
|      | 4      | 3 | 2,4500   | 0,4250 | 2,0300 | 2,8800 |
| 4    | 1      | 3 | 1,1233   | 0,2400 | 0,9700 | 1,4000 |
|      | 2      | 3 | 1,500    | 0,3386 | 1,2800 | 1,8900 |
|      | 3      | 3 | 2,1700   | 0,0916 | 2,0900 | 2,2700 |
|      | 4      | 3 | 2,5733   | 0,3594 | 2,1700 | 2,8600 |

Modeldeki her bir parametre için bilgi içermeyen önsel dağılım kullanılmıştır. Bilgi içermeyen önsel dağılımı ifade etmek için genel ortalamaya, blok etkisine ve sulama etkisine ortalaması 0, varyansı ise oldukça büyük bir Normal dağılım seçilmiştir. Hata varyansı için ise bilgi içermeyen önsel dağılımı göstermesi için parametreleri 0,001 olan Ters-Gama dağılımı verilmiştir. Bu önsel dağılımlar aşağıda gösterilmiştir.

$$\mu \sim N(0, 10^4)$$

$$\{\alpha_i\} \sim N(0, 10^4)$$

$$\{\beta_j\} \sim N(0, 10^4)$$

$$\sigma_e^2 \sim IG(0,001,0,001)$$

Parametre vektörü  $\theta$  ile gösterilmek üzere,  $\theta = \{\mu, \{\alpha_i\}, \{\beta_j\}, \sigma_e^2\}$  olmasına rağmen asıl ilgilenilen sulamalar arası farklılıklardır. Bu faktörlerin seviyelerinin ikili karşılaştırmaları aşağıdaki gibi gösterilmiştir.

$$\psi_{12} = S1 - S2$$

$$\psi_{13} = S1 - S3$$

$$\psi_{14} = S1 - S4$$

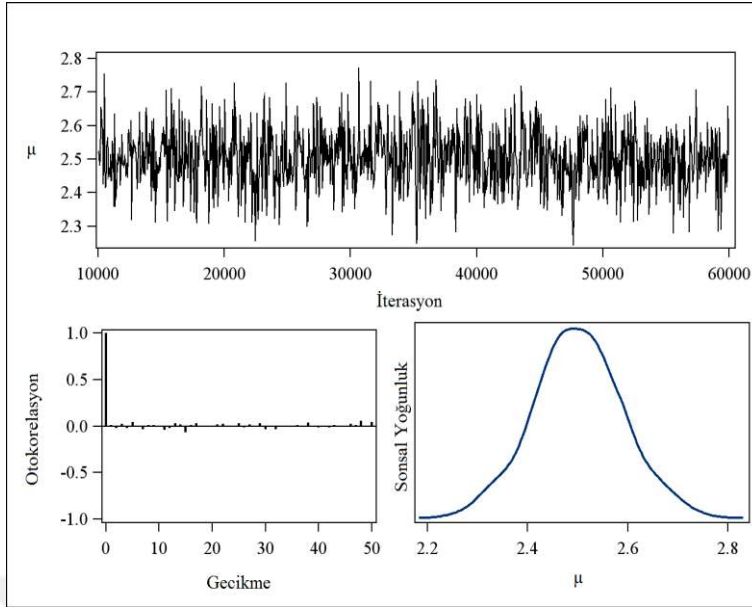
$$\psi_{23} = S2 - S3$$

$$\psi_{24} = S2 - S4$$

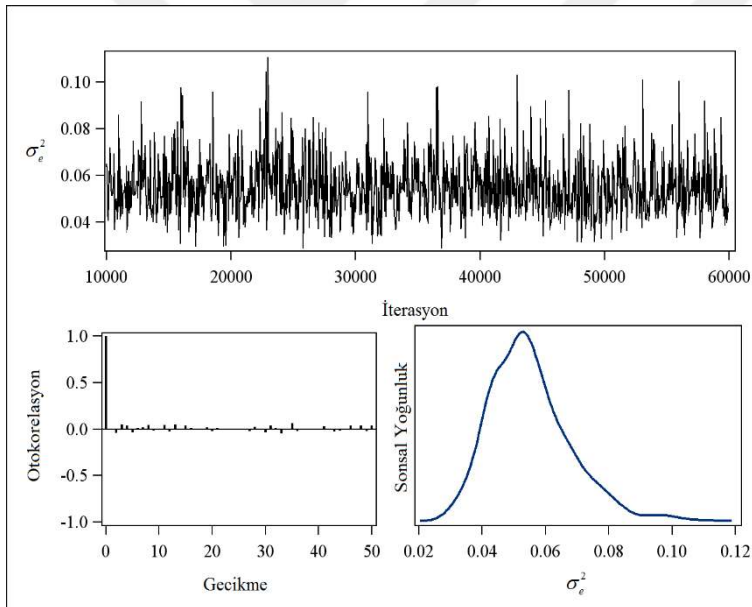
$$\psi_{34} = S3 - S4$$

Veri setinin Bayesci çözümü için Markov zinciri 60.000, bur-in periyot 10.000, seyreltme aralığı ise 50 olarak alınmak suretiyle toplam 1000 örnek elde edilmiştir. Şekil 4.5-4.8 genel ortalama, hata varyansı, blok seviyeleri, sulama seviyeleri ve sulama seviyeleri arasındaki farklar için iz grafiklerini, otokorelasyon grafiklerini ve sonsal yoğunluk grafiklerini göstermektedir. Grafik sayısı fazla olduğundan bu bölümde sadece genel ortalama ve hata varyansına ilişkin iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafiğini gösteren Şekil 4.5'e yer verilmiştir. Blok etkisinin seviyeleri, sulama etkisinin seviyeleri ve sulama etkisinin seviyeleri arasındaki farklara ilişkin grafikler Şekil 4.6-4.8 ise Ek-6'da bulunmaktadır. Bu grafiklerin her biri incelendiğinde Markov zincirinin yakınsadığı, otokorelasyonun olmadığı ve genel ortalama için sonsal dağılımın normal dağıldığı, hata varyansının sonsal dağılımının sağa çarpık bir dağılım olduğu görülmektedir. Benzer şekilde Şekil 4.6-4.8 incelendiğinde blok etkisinin seviyeleri, sulama etkisinin seviyeleri ve sulama etkisinin seviyeleri arasındaki farklara ilişkin otokorelasyon iz grafiğinden yakınsamanın gerçekleştiği görülmektedir. Otokorelasyon grafikleri ise otokorelasyon bulunmadığını ve sonsal dağılımların neredeyse normal dağıldığını göstermektedir.

Çizelge 4.5'de yakınsamayı değerlendirmek için Geweke z testi ve diğer teşhis istatistikleri verilmiştir. Mutlak değerce büyük z değerleri ve  $p > 0,05$  değerleri bütün parametreler için yakınsamanın gerçekleştiğini göstermektedir. Çizelgede etkili örnek büyüklüğü (ESS) ve etkinlik incelendiğinde tüm parametreler için Markov zincirinin iyi bir şekilde karıştığı ve otokorelasyonun bulunmadığı görülmektedir. Ayrıca Monte Carlo standart hata değerleri de (MCSE) 0,05'den küçüktür.



(a)



(b)

Şekil 4.5.a) Genel ortalamaya ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri

b) Hata varyansına ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri

Çizelge 4.5. Model parametreleri için teşhis testleri

| Parametre    | Geweke z | p değeri | Sonsal örnek büyüklüğü | MCSE    | ESS    | Etkinlik |
|--------------|----------|----------|------------------------|---------|--------|----------|
| $\mu$        | 0,2294   | 0,8186   | 1000                   | 0,00291 | 932,9  | 0,9329   |
| B1           | -1,3796  | 0,1677   | 1000                   | 0,00308 | 1000,0 | 1,0000   |
| B2           | -1,7037  | 0,0884   | 1000                   | 0,00310 | 1000,0 | 1,0000   |
| B3           | -0,3550  | 0,7226   | 1000                   | 0,00273 | 1283,9 | 1,2839   |
| S1           | 0,9293   | 0,3527   | 1000                   | 0,00288 | 1000,0 | 1,0000   |
| S2           | 0,3002   | 0,7640   | 1000                   | 0,00315 | 915,4  | 0,9154   |
| S3           | -0,6381  | 0,5234   | 1000                   | 0,00329 | 855,3  | 0,8553   |
| $\psi_{12}$  | 0,7135   | 0,4755   | 1000                   | 0,00290 | 1000,0 | 1,0000   |
| $\psi_{13}$  | 1,6438   | 0,1002   | 1000                   | 0,00286 | 1002,7 | 1,0027   |
| $\psi_{14}$  | 0,9293   | 0,3527   | 1000                   | 0,00288 | 1000,0 | 1,0000   |
| $\psi_{23}$  | 0,8706   | 0,3840   | 1000                   | 0,00297 | 1000,0 | 1,0000   |
| $\psi_{24}$  | 0,3002   | 0,7640   | 1000                   | 0,00315 | 915,4  | 0,9154   |
| $\psi_{34}$  | -0,6381  | 0,5234   | 1000                   | 0,00329 | 855,3  | 0,8553   |
| $\sigma_e^2$ | 0,1443   | 0,8853   | 1000                   | 0,00039 | 1003,8 | 1,0038   |

B: Blok, S: Sulama, ESS: Etkili örnek büyüklüğü

Hem görsel grafikler hem de teşhis testleri ile parametreler için Markov zincirinin yakınsadığına karar verildikten sonra parametreler için elde edilen sonsal özet istatistikleri güvenilir olduğu söylenir. Çizelge 4.6'da genel ortalama, blok etkisini ve sulama etkisinin tüm seviyeleri için sonsal özet istatistikleri verilmiştir. Ayrıca sulama etkisinin seviyeleri arasındaki farklar için özet istatistikler verilmiştir. Bu çizelgeye göre genel ortalamanın değeri ( $\mu$ ) 2,5, blok etkisinin seviyeleri (B1, B2, B3) sırasıyla -0,1351, -0,1024, -0,0409 ve sulama etkisinin seviyeleri (S1, S2, S3) sırasıyla -0,0042, -0,0561 ve -0,0549 olarak elde edilmiştir. Sulama etkisinin seviyeleri arasındaki farklar ise sırasıyla -0,4841 ( $\psi_{12}$ ), -1,0244 ( $\psi_{13}$ ), -1,3827 ( $\psi_{14}$ ), -0,5403 ( $\psi_{23}$ ), -0,8986 ( $\psi_{24}$ ), -0,3583 ( $\psi_{34}$ ) olarak bulunmuştur. HPD aralıklarına göre blok etkisi istatistiksel olarak anlamlı değildir. Ancak sulama etkisi istatistiksel olarak anlamlıdır. Sulama etkisinin seviyeleri arasındaki farkların HPD aralıkları 0'ı içermediği için tüm sulama seviyelerinin farkları arasında istatistiksel olarak anlamlı fark olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.6. Model parametreleri için sonsal özet istatistikleri

| Parametre    | Ortalama | Standart Sapma | Eşit Kuyruk Aralık |         | HPD (%95) |           |
|--------------|----------|----------------|--------------------|---------|-----------|-----------|
|              |          |                | %2.5               | %97.5   | HPD (sol) | HPD (sağ) |
| $\mu$        | 2,500    | 0,0889         | 2,3205             | 2,6812  | 2,3083    | 2,6655    |
| B1           | -0,1351  | 0,0973         | -0,3282            | 0,0626  | -0,3342   | 0,0510    |
| B2           | -0,1024  | 0,0980         | -0,2937            | 0,0987  | -0,2823   | 0,1048    |
| B3           | -0,0409  | 0,0976         | -0,2292            | 0,1490  | -0,2114   | 0,1650    |
| S1           | -1,3827  | 0,0910         | -1,5498            | -1,1998 | -1,5477   | -1,1985   |
| S2           | -0,8986  | 0,0954         | -1,0868            | -0,7064 | -1,0728   | -0,6983   |
| S3           | -0,3583  | 0,0962         | -0,5455            | -0,1793 | -0,5392   | -0,1768   |
| $\psi_{12}$  | -0,4841  | 0,0917         | -0,6729            | -0,3165 | -0,6702   | -0,3157   |
| $\psi_{13}$  | -1,0244  | 0,0907         | -1,2104            | -0,8371 | -1,2240   | -0,8629   |
| $\psi_{14}$  | -1,3827  | 0,0910         | -1,5498            | -1,1998 | -1,5477   | -1,1985   |
| $\psi_{23}$  | -0,5403  | 0,0940         | -0,7170            | -0,3510 | -0,7338   | -0,3724   |
| $\psi_{24}$  | -0,8986  | 0,0954         | -1,0868            | -0,7064 | -1,0728   | -0,6983   |
| $\psi_{34}$  | -0,3583  | 0,0962         | -0,5455            | -0,1793 | -0,5392   | -0,1768   |
| $\sigma_e^2$ | 0,0550   | 0,0126         | 0,0346             | 0,0842  | 0,0333    | 0,0805    |

B: Blok, S: Sulama

#### 4.4. Tesadüf Bloklarında İki Faktörlü Faktöriyel Denemeler

Blok ve sulama etkisinin 4'er, tekstür etkisinin ise 3 seviyesinin bulunduğu bir deneme planında 48 bitkinin bitki boyu ölçülmüştür. Bu deneme planlaması için Eşitlik 3.9'daki model kullanılmıştır ve blok, faktör ve faktör etkileşimlerinin bitki boyu üzerindeki etkisi incelenmiştir. Bölüm 3.2.3 ve Ek-3'deki Bayesci çözümler  $\alpha_i$ ,  $\beta_j$ ,  $\gamma_k$  ve  $(\beta\gamma)_{jk}$  etkileri şansa bağlı değişkenler olarak alınmıştır. Burada ise sabit değişkenler olarak alınmıştır. Model parametreleri için önsel dağılımlar aşağıdaki gibi belirlenmiştir.  $\mu$ ,  $\alpha_i$ ,  $\beta_j$ ,  $\gamma_k$  ve  $(\beta\gamma)_{jk}$  için ortalaması 0, varyansı  $10^4$  olan Normal dağılım, hata varyansı için ise ölçek ve şekil parametreleri 0,001 olan Ters-Gama dağılımı kullanılmıştır.

$$\mu \sim N(0, 10^4)$$

$$\{\alpha_i\} \sim N(0, 10^4)$$

$$\{\beta_j\} \sim N(0, 10^4)$$

$$\{\gamma_k\} \sim N(0, 10^4)$$

$$\{(\beta\gamma)_{jk}\} \sim N(0, 10^4)$$

$$\sigma_e^2 \sim IG(0,001, 0,001)$$

Parametre vektörü  $\theta$  ile gösterilmek üzere,  $\theta = \{\mu, \{\alpha_i\}, \{\beta_j\}, \{\gamma_k\}, \{(\beta\gamma)_{jk}\}\}$  olmasına rağmen asıl ilgilenilen sulamalar arası ve tekstürler arası farklılıklardır. Bu faktörlerin seviyelerinin ikili karşılaştırmaları aşağıdaki gibi gösterilmiştir.

$$\psi_{sulama12} = S1 - S2$$

$$\psi_{sulama13} = S1 - S3$$

$$\psi_{sulama14} = S1 - S4$$

$$\psi_{sulama23} = S2 - S3$$

$$\psi_{sulama24} = S2 - S4$$

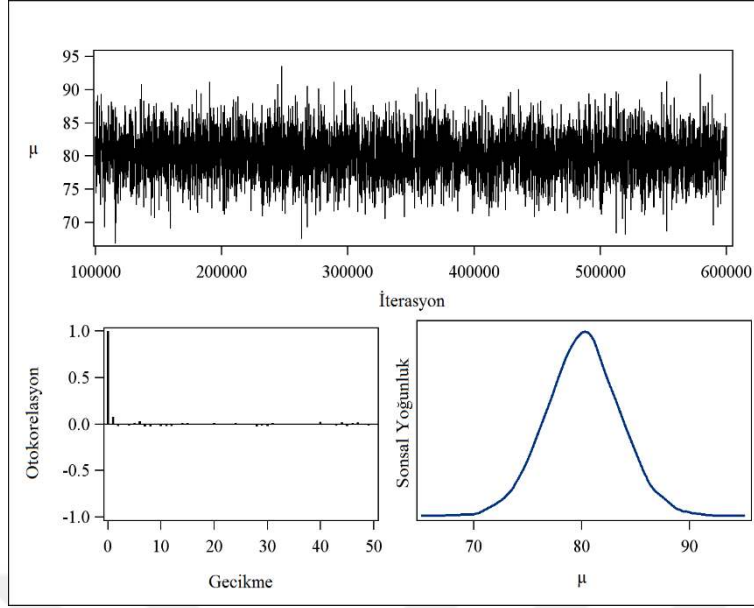
$$\psi_{sulama34} = S3 - S4$$

$$\psi_{tekstur12} = T1 - T2$$

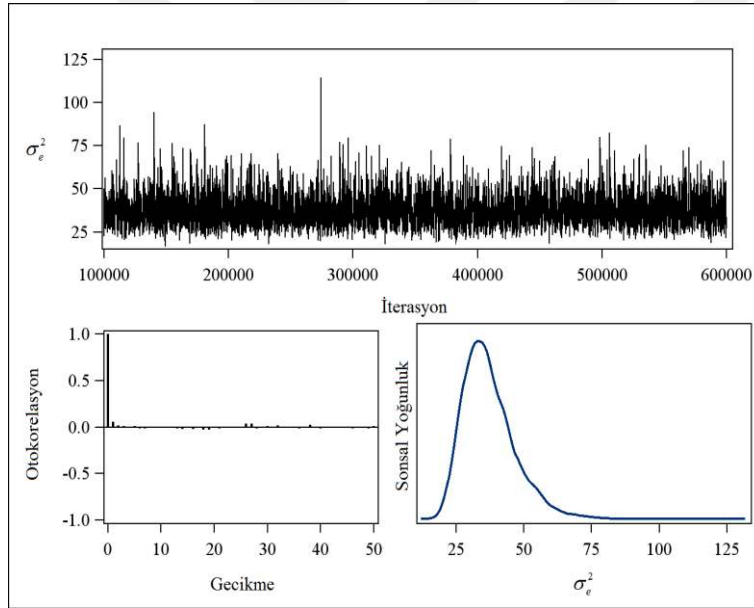
$$\psi_{tekstur13} = T1 - T3$$

$$\psi_{tekstur23} = T2 - T3$$

Veri setinin Bayesci çözümü için Markov zinciri 600.000, bur-in periyot 100.000, seyreltme aralığı ise 100 olarak alınmıştır. Sonuçta toplam olarak 5000 örnek elde edilmiştir. Şekil 4.9 genel ortalama ve hata varyansı için iz grafiğini, otokorelasyon grafiğini ve sonsal yoğunluk grafiklerini göstermektedir. Ayrıca Ek-7’de blok etkisine, sulama etkisine, tekstür etkisine, sulama tekstür interaksyonuna, sulamanın seviyeleri arasındaki farklara ve tekstürün seviyeleri arasındaki farklara ait iz grafikleri, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri verilmiştir (Şekil 4.10-4.16). Her bir grafikte Markov zincirinin yakınsadığı ve otokorelasyonun olmadığı görülmektedir.



(a)



(b)

Şekil 4.9.a) Genel ortalamaya ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri

b) Hata varyansına ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri

Çizelge 4.7’de ise yakınsamayı değerlendirmek için teşhis istatistikleri verilmiştir. Burada verilen yakınsama istatistikleri Şekil 4.9-4.16 ile de tutarlıdır. Mutlak değerce büyük  $z$  değerleri ve  $p > 0,05$  değerleri bütün parametreler için yakınsamanın gerçekleştiğini göstermektedir. Çizelgede etkili örnek büyüklüğü (ESS) ve etkinlik incelendiğinde tüm parametreler için otokorelasyonun bulunmadığı görülmektedir.

Çizelge 4.7. Model parametreleri için teşhis testleri

| Parametre          | Geweke z | p değeri | Sonsal örnek büyüklüğü | MCSE   | ESS    | Etkinlik |
|--------------------|----------|----------|------------------------|--------|--------|----------|
| $\mu$              | 1,2225   | 0,2215   | 5000                   | 0,0505 | 4505,4 | 0,9011   |
| B1                 | 0,3454   | 0,7298   | 5000                   | 0,0366 | 4675,6 | 0,9351   |
| B2                 | -0,7160  | 0,4740   | 5000                   | 0,0375 | 4439,9 | 0,8880   |
| B3                 | -0,2304  | 0,8178   | 5000                   | 0,0409 | 3765,4 | 0,7531   |
| S1                 | -0,8791  | 0,3794   | 5000                   | 0,0657 | 4382,4 | 0,8765   |
| S2                 | -0,6713  | 0,5020   | 5000                   | 0,0650 | 4362,5 | 0,8725   |
| S3                 | -0,0843  | 0,9328   | 5000                   | 0,0645 | 4436,6 | 0,8873   |
| T1                 | -1,5446  | 0,1224   | 5000                   | 0,0627 | 4606,4 | 0,9213   |
| T2                 | -0,1711  | 0,8642   | 5000                   | 0,0621 | 4796,0 | 0,9592   |
| ST11               | 0,8424   | 0,3995   | 5000                   | 0,0931 | 4282,3 | 0,8565   |
| ST12               | 0,1209   | 0,9038   | 5000                   | 0,0897 | 4678,6 | 0,9357   |
| ST21               | 0,6420   | 0,5209   | 5000                   | 0,0880 | 4700,0 | 0,9400   |
| ST22               | -0,0244  | 0,9806   | 5000                   | 0,0986 | 3816,1 | 0,7632   |
| ST31               | 1,2298   | 0,2188   | 5000                   | 0,0949 | 4023,2 | 0,8046   |
| ST32               | -1,1803  | 0,2379   | 5000                   | 0,0950 | 4143,9 | 0,8288   |
| $\psi_{sulama12}$  | -0,1330  | 0,8942   | 5000                   | 0,0649 | 4403,2 | 0,8806   |
| $\psi_{sulama13}$  | -0,7442  | 0,4568   | 5000                   | 0,0663 | 4140,4 | 0,8281   |
| $\psi_{sulama14}$  | -0,8791  | 0,3794   | 5000                   | 0,0657 | 4382,4 | 0,8765   |
| $\psi_{sulama23}$  | -0,6379  | 0,5236   | 5000                   | 0,0664 | 4043,5 | 0,8087   |
| $\psi_{sulama24}$  | -0,6713  | 0,5020   | 5000                   | 0,0650 | 4362,5 | 0,8725   |
| $\psi_{sulama34}$  | -0,0843  | 0,9328   | 5000                   | 0,0645 | 4436,6 | 0,8873   |
| $\psi_{tekstur12}$ | -1,5682  | 0,1168   | 5000                   | 0,0605 | 5152,8 | 1,0306   |
| $\psi_{tekstur13}$ | -1,5446  | 0,1224   | 5000                   | 0,0627 | 4606,4 | 0,9213   |
| $\psi_{tekstur23}$ | -0,1711  | 0,8642   | 5000                   | 0,0621 | 4796,0 | 0,9592   |
| $\sigma_e^2$       | -0,0391  | 0,9688   | 5000                   | 0,1490 | 4231,7 | 0,8463   |

B: Blok, S: Sulama, T: Tekstür, ST: Sulama×Tekstür, ESS: Etkili örnek büyüklüğü

Çizelge 4.8. Model parametreleri için sonsal özet istatistikleri

| Parametre          | Ortalama | Standart Sapma | Eşit Kuyruk Aralık |         | HPD (%95) |           |
|--------------------|----------|----------------|--------------------|---------|-----------|-----------|
|                    |          |                | %2.5               | %97.5   | HPD (sol) | HPD (sağ) |
| $\mu$              | 80,1395  | 3,3899         | 73,4362            | 86,9281 | 73,5103   | 86,9581   |
| B1                 | -3,8424  | 2,5003         | -8,8649            | 1,0164  | -8,9582   | 0,8821    |
| B2                 | -0,6017  | 2,4974         | -5,5667            | 4,2974  | -5,5439   | 4,3112    |
| B3                 | 0,4643   | 2,5107         | -4,3818            | 5,5360  | -4,2961   | 5,5812    |
| S1                 | 11,2871  | 4,3509         | 2,6079             | 19,8474 | 2,4190    | 19,4773   |
| S2                 | 25,0884  | 4,2918         | 16,6248            | 33,4907 | 16,8536   | 33,6464   |
| S3                 | 20,0656  | 4,2987         | 11,7520            | 28,7975 | 11,6110   | 28,5436   |
| T1                 | -6,9394  | 4,2561         | -15,4561           | 1,3446  | -15,7243  | 1,0306    |
| T2                 | -13,1446 | 4,2996         | -21,4864           | -4,6154 | -21,5931  | -4,7719   |
| ST11               | -1,3001  | 6,0937         | -13,2698           | 10,8766 | -13,7037  | 10,2210   |
| ST12               | 1,4708   | 6,1384         | -10,7295           | 13,4575 | -10,3428  | 13,7079   |
| ST21               | -6,5277  | 6,0344         | -18,5554           | 5,3020  | -18,7352  | 5,0216    |
| ST22               | -13,8224 | 6,0882         | -25,8126           | -1,8147 | -26,1791  | -2,2801   |
| ST31               | -8,2846  | 6,0211         | -20,4887           | 3,2926  | -19,9764  | 3,5066    |
| ST32               | -0,8359  | 6,1175         | -12,8533           | 11,2506 | -12,6679  | 11,3427   |
| $\psi_{sulama12}$  | -13,8012 | 4,3093         | -22,4408           | -5,3654 | -22,2731  | -5,3010   |
| $\psi_{sulama13}$  | -8,7784  | 4,2672         | -17,1191           | -0,0620 | -17,1816  | -0,2083   |
| $\psi_{sulama14}$  | 11,2871  | 4,3509         | 2,6079             | 19,8474 | 2,4190    | 19,4773   |
| $\psi_{sulama23}$  | 5,0228   | 4,2230         | -3,3442            | 13,2222 | -3,3373   | 13,2242   |
| $\psi_{sulama24}$  | 25,0884  | 4,2918         | 16,6248            | 33,4907 | 16,8536   | 33,6464   |
| $\psi_{sulama34}$  | 20,0656  | 4,2987         | 11,7520            | 28,7975 | 11,6110   | 28,5436   |
| $\psi_{tekstur12}$ | 6,2052   | 4,3462         | -2,5835            | 14,7017 | -2,3323   | 14,8971   |
| $\psi_{tekstur13}$ | -6,9394  | 4,2561         | -15,4561           | 1,3446  | -15,7243  | 1,0306    |
| $\psi_{tekstur23}$ | -13,1446 | 4,2996         | -21,4864           | -4,6154 | -21,5931  | -4,7719   |
| $\sigma_e^2$       | 37,1758  | 9,6929         | 22,9493            | 60,3272 | 21,2398   | 56,4448   |

B: Blok, S: Sulama, T: Tekstür, ST: Sulama×Tekstür

Hem görsel grafikler hem de teşhis testleri ile parametreler için Markov zincirinin

yakınsadığına karar verildikten sonra ilgilenilen parametrelere ait sonsal özet istatistiklerinin güvenilir olduğu söylenir. Çizelge 4.8’de genel ortalama, blok etkisi, sulama etkisi, tekstür etkisi, sulama ve tekstür interaksyon etkisinin tüm seviyeleri için sonsal özet istatistikleri verilmiştir. Bu çizelgeye göre genel ortalamanın değeri ( $\mu$ ) 80,1395, blok etkisinin seviyeleri (B1, B2, B3) sırasıyla -3,8424, -0,6017, -0,4643 ve sulama etkisinin seviyeleri (S1, S2, S3) sırasıyla 11,2871, 25,0884, 20,0656 ve tekstür etkisinin seviyeleri (T1, T2) -6,9394 ve -13,1446 olarak elde edilmiştir. HPD aralıklarına göre blok etkisi istatistiksel olarak anlamlı değildir. Ancak sulama etkisi ve tekstürün 1. seviyesinin etkisi istatistiksel olarak anlamlı bulunmaktadır. İnteraksiyon etkisi incelendiğinde ise sadece ST22 istatistiksel olarak anlamlıdır. Ayrıca sulama ve tekstür etkilerinin seviyeleri arasındaki farklar için de özet istatistikler verilmiştir. Buna göre, sulama etkisinin 1-2, 1-3, 1-4, 2-4, 3-4 seviyeleri ve tekstür etkisinin 2-3 seviyeleri arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark bulunmaktadır.

#### 4.5. İç içe Deneme Planı

İç içe deneme planının Eşitlik 3.10’da verilen modeli kullanılarak elde edilen Bayesci çözümü için iki farklı veri seti kullanılmıştır.

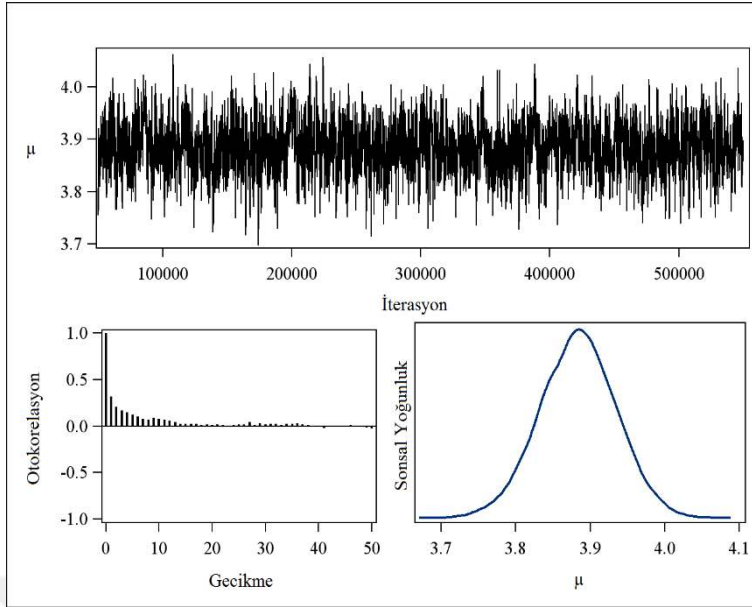
##### 4.5.1. Uygulama 1

İç içe deneme planı ile ilgili uygulama için Güneydoğu Anadolu Bölgesi’nde yetiştirilen 6243 baş İvesi kuzularına ait cinsiyet (1:erkek, 2:dişi), doğum tipi (1:tekli doğum, 2:çoklu doğum) ve doğum ağırlığı kullanılmıştır. 75 baş koç ve her koçun çiftleştiği 157 baş koyun (koç içi koyun) şansa bağlı değişkenler olarak alınmıştır. Veri setine ait tanımlayıcı istatistikler Çizelge 4.9’de verilmiştir.

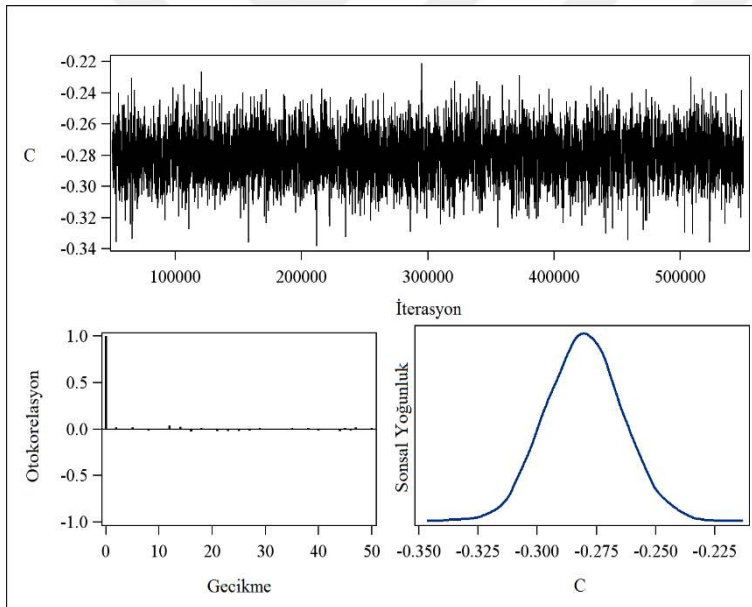
Çizelge 4.9. Tanımlayıcı istatistikler

| C | DT | N    | Ortalama | Std    | Min.   | Max.   |
|---|----|------|----------|--------|--------|--------|
|   |    |      |          | Sapma  |        |        |
| 1 | 1  | 2607 | 4,8216   | 0,7641 | 2,1000 | 7,2000 |
|   | 2  | 459  | 4,2389   | 0,6687 | 2,4000 | 6,2000 |
| 2 | 1  | 2733 | 4,5344   | 0,7455 | 1,9000 | 7,6000 |
|   | 2  | 444  | 3,9873   | 0,6216 | 2,3000 | 6,2000 |

Çalışmada model parametrelerinden genel ortalama, cinsiyet ve doğum tipi için ortalaması 0, varyansı  $10^6$  olan Normal dağılım, varyans unsurları için ise ölçek ve şekil parametreleri 0,01 olan Ters-Gama dağılımı seçilmiştir.



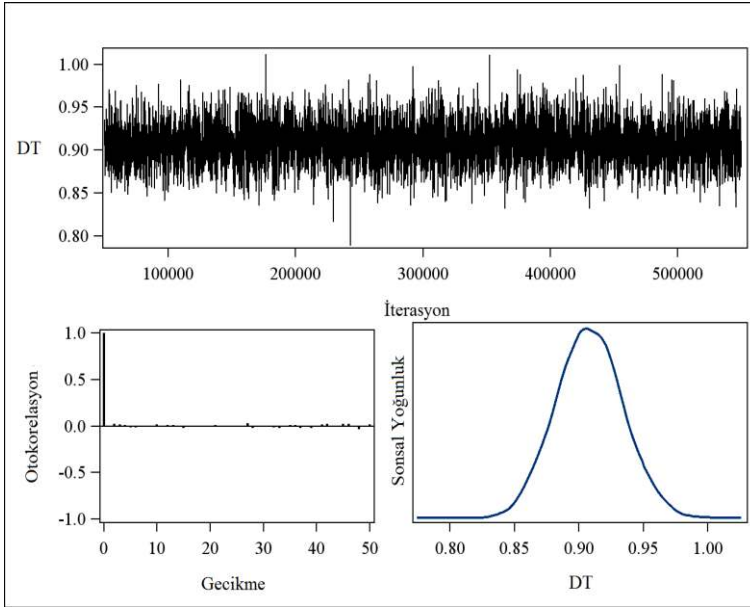
(a)



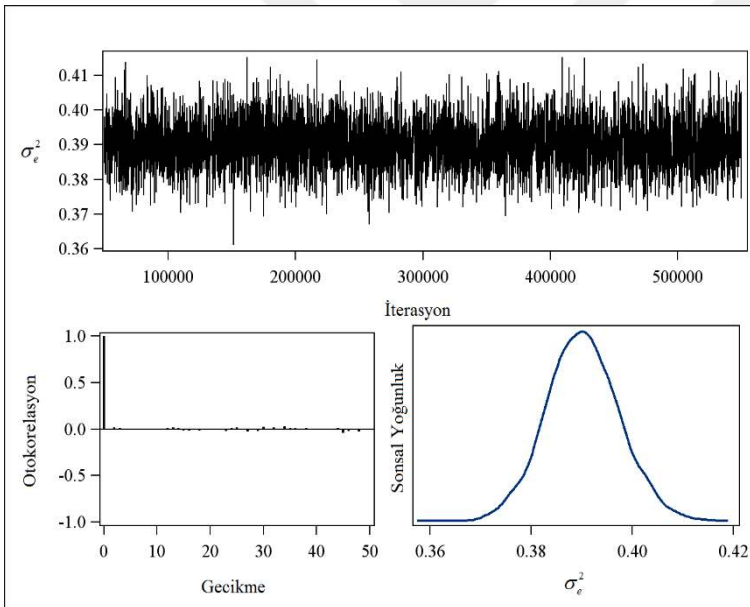
(b)

Şekil 4.17.a) Genel ortalamaya ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri

b) Cinsiyete ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri



(a)



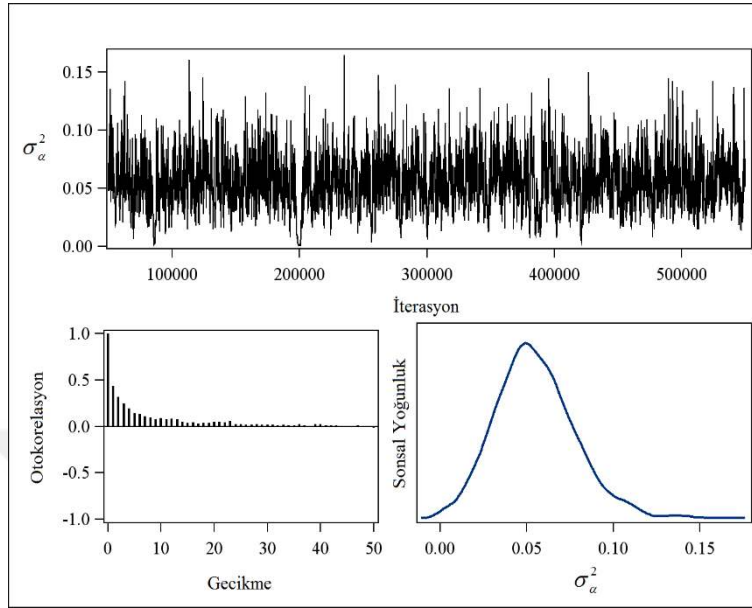
(b)

Şekil 4.18.a) DT'ye ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri

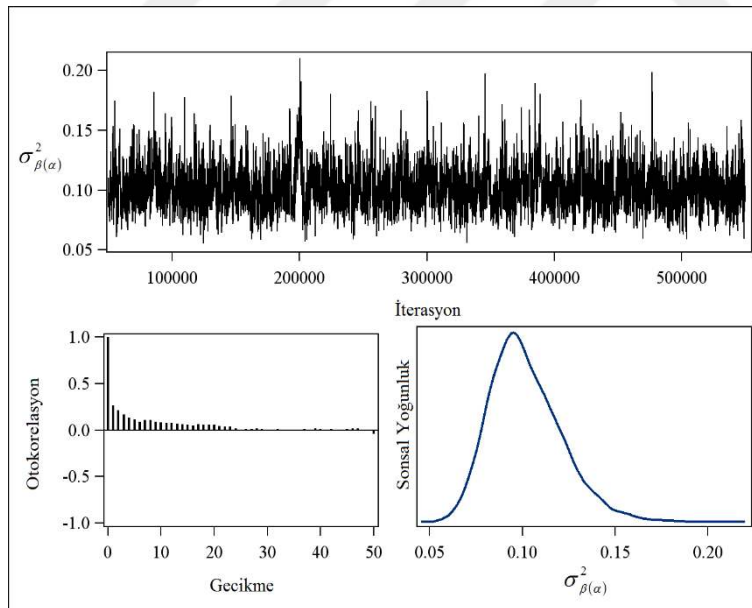
b) Hata varyansına ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri

Veri setinin Bayesci çözümü için Markov zinciri 550.000, burn-in periyot 50.000, seyreltme aralığı ise 100 olarak alınmıştır. Toplam 5000 örnek elde edilmiştir. Şekil 4.17-4.19'da genel ortalama, doğum tipi (DT), cinsiyet (C), koç varyansı, koç içi koyun varyansı ve hata varyansı için iz grafiklerini, otokorelasyon grafiklerini ve sonsal yoğunluk grafiklerini göstermektedir. Doğum tipi, cinsiyet ve hata varyansına ait grafikler incelendiğinde Markov zincirinin iyi bir şekilde karıştığı otokorelasyonun

olmadığı ve yakınsamanın sağlandığı görülmektedir. Genel ortalama, koç varyansı ve koç içi koyun varyansının grafikleri incelendiğinde ise yakınsamanın sağlandığı ancak çok düşük bir otokorelasyonun bulunduğu görülmektedir.



(a)



(b)

Şekil 4.19.a)  $\sigma_{\alpha}^2$ 'ye ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri

b)  $\sigma_{\beta(\alpha)}^2$ 'ye ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri

Çizelge 4.10'da ise yakınsamayı değerlendirmek için Geweke z testi ve diğer

teşhis istatistikleri verilmiştir. Mutlak değerce büyük  $z$  değerleri ve  $p>0,05$  değerleri tüm parametreler için yakınsamanın gerçekleştiğini göstermektedir. Çizelgede etkili örnek büyüklüğü (ESS) ve etkinlik incelendiğinde  $\mu$ ,  $\sigma_{\alpha}^2$  ve  $\sigma_{\beta(\alpha)}^2$  parametrelerindeki düşük otokorelasyon burada görülmektedir. Çizelge 4.10'da verilen teşhis istatistikleri Şekil 4.17-4.19 ile de tutarlıdır.

Çizelge 4.10. Model parametreleri için teşhis testleri

| Parametre                  | Geweke  | $p$ değeri | Sonsal örnek büyüklüğü | ESS    | Etkinlik |
|----------------------------|---------|------------|------------------------|--------|----------|
| $\mu$                      | 1,3557  | 0,1752     | 5000                   | 1042,2 | 0,2084   |
| C                          | -1,0682 | 0,2854     | 5000                   | 5000,0 | 1,0000   |
| DT                         | -1,8488 | 0,0645     | 5000                   | 5000,0 | 1,0000   |
| $\sigma_{\alpha}^2$        | -1,5026 | 0,1329     | 5000                   | 632,2  | 0,1264   |
| $\sigma_{\beta(\alpha)}^2$ | 1,9713  | 0,0587     | 5000                   | 858,0  | 0,1716   |
| $\sigma_e^2$               | 0,2680  | 0,7887     | 5000                   | 5000,0 | 1,0000   |

C: Cinsiyet, DT: Doğum tipi

Hem görsel grafikler hem de teşhis testleri ile parametreler için Markov zincirinin yakınsadığına karar verildikten sonra parametrelere ait sonsal özet istatistiklerinin güvenilir olduğu söylenir. Çizelge 4.11'de ise tüm değişkenler için sonsal özet istatistikleri verilmiştir.

Çizelge 4.11. Model parametreleri için sonsal özet istatistikleri

| Parametre                  | Ortalama | Standart Sapma | Eşit Kuyruk Aralık |        | HPD (%95) |           |
|----------------------------|----------|----------------|--------------------|--------|-----------|-----------|
|                            |          |                | %2.5               | %97.5  | HPD (sol) | HPD (sağ) |
| $\mu$                      | 3,8836   | 0,0506         | 3,7818             | 3,9824 | 3,7889    | 3,9882    |
| C                          | 0,2802   | 0,0160         | 0,3105             | 0,2482 | 0,3102    | 0,2479    |
| DT                         | 0,9082   | 0,0258         | 0,8587             | 0,9591 | 0,8576    | 0,9579    |
| $\sigma_{\alpha}^2$        | 0,0548   | 0,0227         | 0,0146             | 0,1055 | 0,0108    | 0,1000    |
| $\sigma_{\beta(\alpha)}^2$ | 0,1020   | 0,0193         | 0,0710             | 0,1450 | 0,0698    | 0,1427    |
| $\sigma_e^2$               | 0,3902   | 0,00716        | 0,3761             | 0,4047 | 0,3758    | 0,4041    |

C: Cinsiyet, DT: Doğum tipi

Kuzuların doğum ağırlığı  $3,88 \pm 0,0506$  kg olarak tahmin edilmiştir. Erkek ve dişi kuzular arasında doğum ağırlığı bakımından dişilerin aleyhine olmak üzere 0,28 kg.'lık bir fark tespit edilmiştir. Erkeklerde doğum ağırlığı daha yüksektir. Doğum ağırlığı bakımından

doğum tipinin etkisi incelendiğinde çoklu doğumların aleyhine 0,90 kg.'lık bir fark bulunmaktadır (Macit ve Aksoy 1997, Kuthick ve Dobes 2006, Şireli vd. 2015).

#### 4.5.2. Uygulama 2

Ek-6'da verilen Çizelge 4.12'de büyük bir sürü popülasyonundan, bu popülasyonu temsil edecek kadar boğa ve inekler şansa bağlı olarak seçilerek çiftleştirilmeleri sonucu elde edilen öz kardeşlerin aynı yıla ait yaşa göre düzeltilmiş süt verim kayıtları (305 gün) bulunmaktadır. Bu veri seti Çizelge 4.12'nin ilk sütununda yer almaktadır. Diğer üç sütundaki veri setleri birinci veri setinin modifiye edilmesi ile elde edilmiştir (Fırat 2000). Bu uygulamada amaç dört ayrı veri setini ANOVA, ML, REML ve Bayesci yöntemi kullanarak varyans unsurlarını tahmin etmek ve karşılaştırmaktır.

$\mu$ , genel ortalamayı  $\sigma_{\alpha}^2$ ,  $\sigma_{\beta(\alpha)}^2$  ve  $\sigma_e^2$  ise sırasıyla boğa, boğa içi inek ve hataya ait varyans unsurlarını göstermektedir. Genel ortalama için dört veri setinde de önsel bilgi olarak genel ortalamaların REML tahminleri kullanılmıştır. Varyans unsurları için ise bilgi içermeyen önsel dağılımı göstermek amacıyla ölçek ve şekil parametreleri 0,001 olan Ters-Gama dağılımları kullanılmıştır. Bu dört veri setindeki her bir parametre için kullanılan önsel dağılımlar şöyledir:

Birinci veri seti için  $f(\mu) \sim N(5932,1000)$ ,

İkinci veri seti için  $f(\mu) \sim N(5707,1000)$ ,

Üçüncü veri seti için  $f(\mu) \sim N(6582,1000)$ ,

Dördüncü veri seti için  $f(\mu) \sim N(6584,1000)$ .

Dört veri setindeki varyans unsurları için de  $f(\sigma_{\alpha}^2) \sim IG(0,001,0,001)$ ,  $f(\sigma_{\beta(\alpha)}^2) \sim IG(0,001,0,001)$  ve  $f(\sigma_e^2) \sim IG(0,001,0,001)$  olarak alınmıştır.

ANOVA, ML ve REML tahminleri SAS programında PROC MIXED prosedürü kullanılarak, Bayesci tahminler ise PROC MCMC prosedürü kullanılarak elde edilmiştir. 550.000 uzunluğunda bir zincir çalıştırılmıştır. Zincirin ilk 50.000 iterasyonu burn in periyot olarak atılmış ve seyreltme aralığı 100 alınmıştır. Sonuçta 5000 sonsal örnek elde edilmiştir. 4 farklı yöntem ve 4 farklı veri seti için genel ortalama ve varyans unsurları tahminleri Çizelge 4.13'de verilmiştir.

Çizelge 4.13'e göre birinci veri seti için dört yöntem kullanılarak yapılan analiz sonuçlarında her bir parametre değeri için sonuçlar benzer çıkmıştır. İkinci veri setinde boğa içi dişi ait varyansın  $\sigma_{\beta(\alpha)}^2$ , ANOVA tahmini negatif bir değerken ML ve REML tahminleri 0 olarak elde edilmiştir. Bayesci yaklaşımda ise  $\sigma_{\beta(\alpha)}^2$  değeri tahmin edilmiştir.

Benzer şekilde üçüncü veri setinde boğa varyansı  $\sigma_{\alpha}^2$ , dördüncü veri setinde ise hem  $\sigma_{\alpha}^2$ 'nin hem de  $\sigma_{\beta(\alpha)}^2$ 'nin ANOVA tahminleri negatif, ML ve REML tahminleri ise 0 olarak elde edilmiştir. Varyans unsurlarının analizinde ANOVA yönteminin negatif tahminlerde bulunması ve olabilirlik yöntemine dayanan ML ve REML tahminlerinde ise negatif tahmin sorununu çözmek için tahmin değerlerini 0'a sabitlemesi ilgilenilen varyans unsurları için tahmin yapmayı engellemektedir. Ancak Bayesci yaklaşım bu zorlukların üstesinden gelerek varyans unsurlarını tahmin etme imkanı sağlamaktadır (Kumar vd 2004). Veri seti 4 boğa, her bir boğanın çiftleştiği 5 dişi ve toplam 20 yavruya ait süt verimi bulunan küçük bir veri seti olduğundan boğa varyansı, boğa içi dişi varyansı ve hata varyansı az bilgi içermektedir ve klasik yaklaşımdaki çözümlere göre biraz daha büyük çıkmaktadır (Wolfinger ve Kassman 2000, Waldmann ve Ericson 2006).

Çizelge 4.13. Ortalama ve varyans unsurları için ANOVA, ML, REML, Bayesci sonuçlar

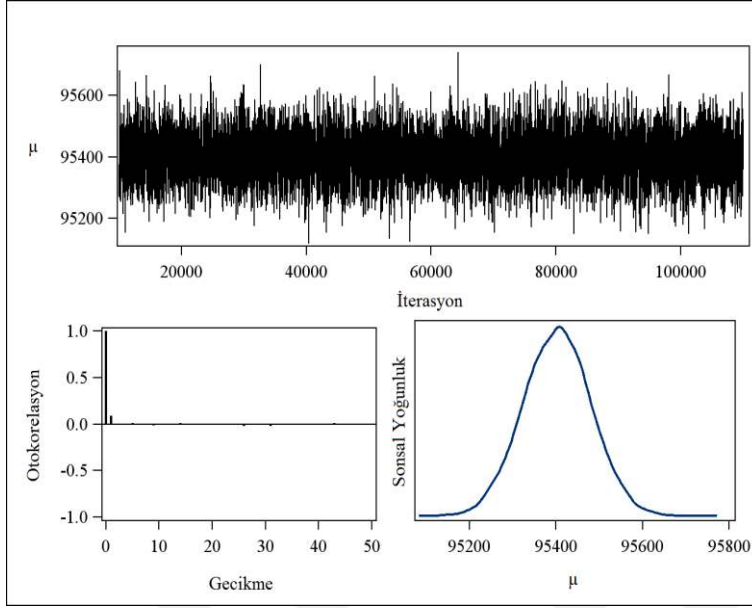
| Yöntem              | $\mu$  | $\sigma_{\alpha}^2$ | $\sigma_{\beta(\alpha)}^2$ | $\sigma_e^2$ |
|---------------------|--------|---------------------|----------------------------|--------------|
| <b>1. Veri Seti</b> |        |                     |                            |              |
| ANOVA               | 5931,9 | 259296              | 97566                      | 689557       |
| ML                  | 5931,9 | 172355              | 97567                      | 689557       |
| REML                | 5931,9 | 259297              | 97567                      | 689557       |
| Bayesci             | 5932,1 | 242245              | 105617                     | 783492       |
| <b>2. Veri Seti</b> |        |                     |                            |              |
| ANOVA               | 5706,9 | 1101634             | -12864                     | 54107        |
| ML                  | 5706,9 | 823985              | 0                          | 42673        |
| REML                | 5706,9 | 1100051             | 0                          | 42673        |
| Bayesci             | 5707,2 | 1666066             | 997,3                      | 45168,6      |
| <b>3. Veri Seti</b> |        |                     |                            |              |
| ANOVA               | 6581,9 | -10245              | 32510                      | 107957       |
| ML                  | 6581,9 | 0                   | 20501                      | 107958       |
| REML                | 6581,9 | 0                   | 24392                      | 107981       |
| Bayesci             | 6582,3 | 3208,8              | 23281,1                    | 116674       |
| <b>4. Veri Seti</b> |        |                     |                            |              |
| ANOVA               | 6584,4 | -1333,6             | -16480                     | 68712        |
| ML                  | 6584,4 | 0                   | 0                          | 50339        |
| REML                | 6584,4 | 0                   | 0                          | 51629        |
| Bayesci             | 6582,7 | 916,2               | 331,3                      | 54455,7      |

#### 4.6. Genel Doğrusal Karışık Model

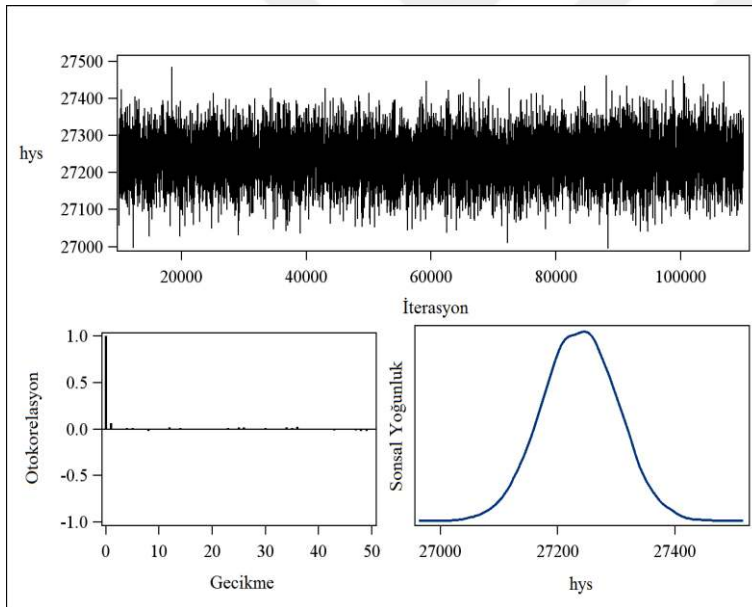
Güneydoğu Anadolu Bölgesi'nde yetiştirilen İvesi koyunlarına ait şansa bağlı koç etkisi, sabit sürü-yıl-mevsim etkisi ve sağılan gün sayısı etkisinin 120 günlük süt verimine etkilerini incelemek amacıyla genel doğrusal karışık bir model oluşturulmuştur. Bu amaçla Eşitlik (3.11)'de verilen model kullanılmıştır. Çalışmada model parametrelerinden genel ortalama, sürü-yıl-mevsim (hys) ve sağılan gün sayısı (dim) için ortalaması 0, varyansı 1e6 olan Normal dağılım, varyans unsurları için ise ölçek ve şekil parametreleri 0,01 olan Ters-Gama dağılımı seçilmiştir.

Veri setinin Bayesci çözümü için Markov zinciri 110.000, burn-in periyot 10.000, seyreltme aralığı ise 10 olarak alınmıştır. Toplam 10.000 örnek elde edilmiştir. Şekil 4.20-4.22 genel ortalama, hys, dim, koç varyansı ve hata varyansı için iz grafiğini, otokorelasyon grafiğini ve sonsal yoğunluk grafiklerini göstermektedir. Her bir grafikte Markov zincirinin yakınsadığı, otokorelasyonun olmadığı ve sonsal dağılımın neredeyse normal dağıldığı görülmektedir.

Çizelge 4.14’de ise yakınsamayı değerlendirmek için Geweke z testi ve diğer teşhis istatistikleri verilmiştir. Mutlak değerce büyük z değerleri ve  $p > 0,05$  değerleri bütün parametreler için yakınsamanın gerçekleştiğini göstermektedir. Çizelgede etkili örnek büyüklüğü (ESS) ve etkinlik incelendiğinde tüm parametreler için otokorelasyonun bulunmadığı görülmektedir. Yakınsamanın kontrolü için yapılan teşhis testleri sonucu ile görsel olarak izlenen iz grafikleri, otokorelasyon grafikleri ve yoğunluk grafiklerinin tutarlı olduğu görülmektedir.



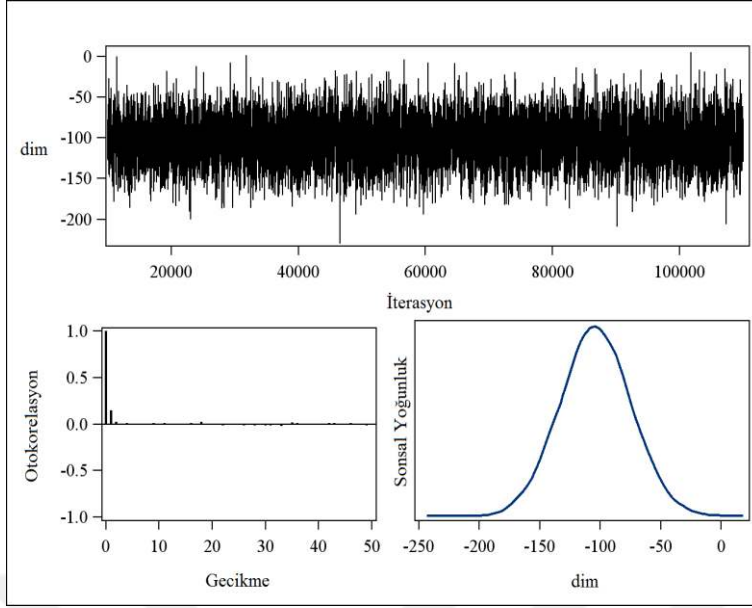
(a)



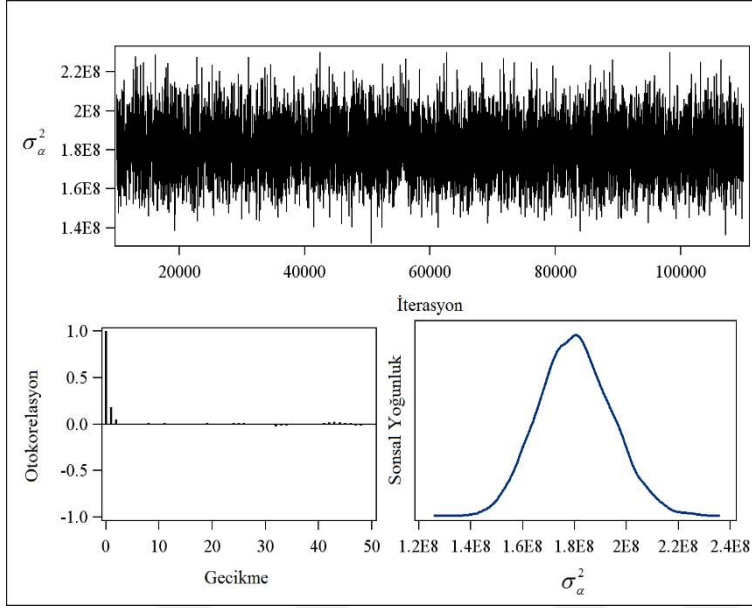
(b)

Şekil 4.20.a) Genel ortalamaya ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri

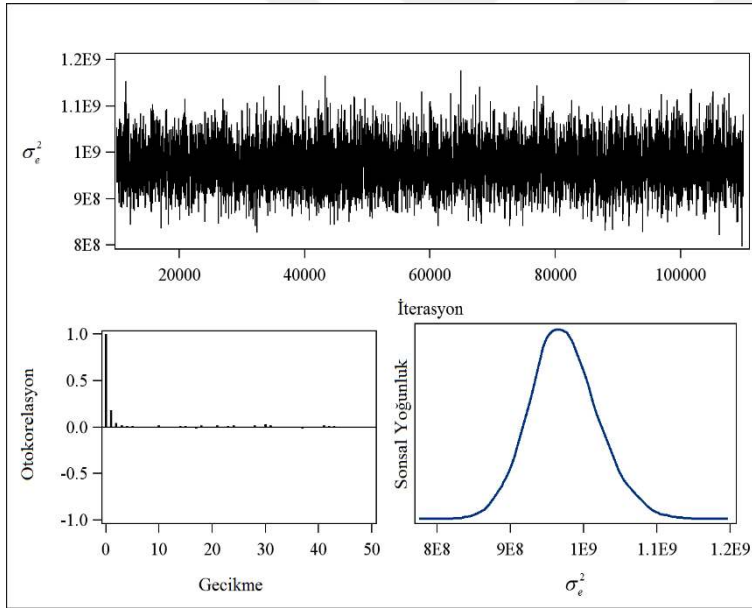
b) hys'ye ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri



Şekil 4.21. dim'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri



(a)



(b)

Şekil 4.22.a)  $\sigma_{\alpha}^2$ 'ye ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri

b)  $\sigma_{\epsilon}^2$ 'ye ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri

Çizelge 4.14. Model parametreleri için teşhis testleri

| Parametre           | Geweke z | p değeri | Sonsal örnek büyüklüğü | MCSE        | ESS    | Etkinlik |
|---------------------|----------|----------|------------------------|-------------|--------|----------|
| $\mu$               | 0,9543   | 0,3399   | 10000                  | 0,01 8536,3 | 0,8536 |          |
| hys                 | -0,9584  | 0,3378   | 10000                  | 0,01 8865,8 | 0,8866 |          |
| dim                 | -1,3219  | 0,1862   | 10000                  | 0,01 7452,0 | 0,7452 |          |
| $\sigma_{\alpha}^2$ | -0,2550  | 0,7987   | 10000                  | 0,01 6729,9 | 0,6730 |          |
| $\sigma_e^2$        | 1,7232   | 0,0849   | 10000                  | 0,01 6869,7 | 0,6870 |          |

Çizelge 4.15. Model parametreleri için sonsal özet istatistikleri

| Parametre           | Ortalama | Standart Sapma | Eşit Kuyruk Aralık |          | HPD (%95) |           |
|---------------------|----------|----------------|--------------------|----------|-----------|-----------|
|                     |          |                | %2.5               | %97.5    | HPD (sol) | HPD (sağ) |
| $\mu$               | 95402,9  | 77,7308        | 95249,6            | 95556,5  | 95242,4   | 95546,9   |
| hys                 | 27237,4  | 63,7503        | 27112,4            | 27361,3  | 27113,5   | 27362,2   |
| dim                 | -103,8   | 29,0635        | -160,8             | -46,6087 | -159,0    | -45,4524  |
| $\sigma_{\alpha}^2$ | 1,8036E8 | 13943372       | 1,5409E8           | 2,0869E8 | 1,5349E8  | 2,0793E8  |
| $\sigma_e^2$        | 9,7346E8 | 46222119       | 8,864E8            | 1,0706E9 | 8,8903E8  | 1,0726E9  |

Çizelge 4.15’de model parametreleri için sonsal özet istatistikleri bulunmaktadır. Buna göre koyunların süt verimi  $95402,9 \pm 77,73$  gr’dır. Hys 1. gruptaki bir hayvanın ortalama verimi 2. gruptakine göre ortalamanın  $27237,4 \pm 63,75$  gr üstündedir. Sağılan gün sayısı (dim) arttıkça süt verimi 103,8 gr azalmaktadır.

## 5. SONUÇ

Deneme planlaması yöntemleri her alanda olduğu gibi ziraatte yapılan denemelerin analizinde de oldukça önemli yer tutmaktadır. Deneme planlaması yöntemleri deneme desenlerini kullanarak mümkün olan tüm faktörleri modele dahil ederek toplam deney sayısını azaltmak suretiyle sonuçlar elde etmeyi amaçlar. Bu deneme desenleri çalışmadaki ihtiyaç ve şartlara göre en basitten en karmaşığa çeşitlilik göstermektedir.

İstatistik gelişirken frekansçı ve Bayesci olmak üzere iki yaklaşım etkili olmuştur. Bayesci yöntem genellikle katlı integraller içerdiğinden, çözümlemesi klasik ML yöntemlerinden daha karmaşıktır. Birçok durumda, çoklu integrallerin açık formu mevcut değildir ve bu durum Bayesci yöntemin uygulamasını kısıtlamaktadır. Bayesci yöntem, ML yönteminden önce önerilmesine rağmen sayısal integraller için bilgisayar teknolojisindeki ilerleme ve MCMC yöntemlerinin geliştirilmesiyle çok yakın geçmişte kullanılabilir hale gelmiştir.

Bayesci yöntem uygulanırken doğru sonuçlar elde etmek için MCMC hakkında tecrübe gerekmektedir. MCMC örneklemesinde yakınsamanın gerçekleşmediği durumlarda sonuçlarda yanıltıcı olacaktır. Bu durumda, yakınsamanın gerçekleşmesini sağlamak amacıyla farklı önsel dağılımlar ve daha uzun zincir uzunlukları kullanılabilir. Eğer mümkünse Bayesci yöntem sonuçlarını ML yöntemlerinin sonuçları ile karşılaştırmak doğru bir düşünce olacaktır. İki yöntem sonuçları kıyaslanamayacak kadar farklı ise MCMC konusunda daha dikkatli olmak gerekir. Farklı modellerle ve farklı önsel bilgiler ile daha fazla analiz yapmak sonuçların doğruluğunu arttıracaktır. Tam ve eksiksiz bir yakınsama testi yoktur. İz grafiklerini inceleyerek görsel teşhiste bulunmak en kullanışlı yaklaşımdır. Geweke testi iz grafikleri iyi görüldüğünde bile istatistiksel olarak anlamlı çıkabilir (MSUG 2013). Farklı teşhis testleri kullanarak oluşabilecek farklı sorunlardan kaçınılabilir. Bu nedenle çalışmada hem görsel grafiklerden hem de farklı teşhis testlerinden yararlanılmıştır.

Her yöntem de olduğu gibi Bayesci yönteminde bazı avantajları ve dezavantajları bulunmaktadır. Sadece veri setindeki bilgiyi değil önsel dağılım bilgisini de kullanmak Bayesci yöntemin avantajlarından biridir. Büyük örnek büyüklüklerine ihtiyaç duymaksızın kesin tahminler verir. Olabilirlik prensibinden ayrılmaz ve yorumlanabilir sonuçlar elde etmeyi sağlar. Hiyerarşik modeller, eksik gözlem gibi çok geniş uygulama alanına sahiptir. Ancak bunların yanı sıra bazı dezavantajları bulunmaktadır. Bunlardan en önemlisi önsel bilginin seçimi konusudur. Önsel bilgiyi belirlemek oldukça zordur. Küçük örnek büyüklüklerinde bilgi içeren önsel bilgi kullanıldığında sonsal dağılım önsel bilgiden çok fazla etkilenir. Simülasyondan dolayı her seferinde çok az da olsa farklı sonuçlar verir.

Klasik yaklaşımda varyans unsurları için negatif tahmin değeri elde edildiği durumlarda Bayesci yaklaşım özellikle küçük örnek büyüklüğüne sahip veri setlerinde bu zorluğun üstesinden gelerek varyans unsurları için pozitif tahmin değerleri elde etmektedir.

Bu tez çalışmasında tarımsal denemelerde sıklıkla kullanılan deneme planlarının alışıla gelmiş klasik çözümleri yerine Bayesci çözümleri ele alınmıştır. Öncelikle her bir deneme planı tanıtılmıştır. Sonrasında bu deneme planlarının teorik olarak Bayesci çözümü elde edilmiştir ve gerçek veri setleri kullanılarak Bayesci analizin uygulamasına yer verilmiştir. SAS programında PROC MCMC prosedürü kullanılarak model parametreleri için iz grafikleri, teşhis testleri ve sonsal özetler elde edilmiştir. Her bir parametrenin yakınsamayı gerçekleştirip gerçekleştirmediği hem yakınsama testleri ile hem de görsel iz grafikleri ile kontrol edilmiştir. Yakınsamanın gerçekleşmediği durumlarda zincir uzunluğu arttırılmış ve otokorelasyonun olduğu durumlarda seyreltme aralığı arttırılmıştır veya farklı önsel dağılımlar kullanılmıştır. Yakınsamanın gerçekleşmesi ile parametrelerin güvenilir sonsal tanımlayıcı istatistikleri elde edilmiştir ve sonuçların nasıl yorumlanacağı gösterilmiştir.

Sonuç olarak çalışmalarda oldukça önem taşıyan deneme planları ve deneme planlarının analizini klasik yöntemle alternatif olarak Bayesci yaklaşım ile elde etmek mümkündür. Bu tez çalışması ile farklı deneme planlarının Bayesci çözümlerini kullanmanın uygun ve etkili bir yöntem olduğu ortaya çıkmaktadır.

**KAYNAKLAR**

- AÇIKGÖZ, N. 1993. Tarımda Araştırma ve Deneme Metotları. Ege Üniversitesi Ofset Atölyesi, İzmir.
- BEAUMONT, M.A., ZHANG, W. and BALDING, D.J. 2002. Approximate Bayesian Computation in Population Genetics. *Genetics*, 162 (4): 2025.
- BEERLI, P. 2006. Comparison of Bayesian and Maximum-Likelihood Inference of Population Genetic Parameters. *Bioinformatics*, 22 (3): 341.
- BERGER, J.O. 2000. Bayesian Analysis: A look at today and thoughts of tomorrow. *Journal of the American Statistical Association*, 95, 1296-1277.
- BERGER, J.O. and BERNARDO, J.M. 1989. Estimating a Product of Means: Bayesian Analysis with Reference Priors. *Journal of the American Statistical Association*, 200-207.
- BERNARDO, J.M. 1979. Reference Posterior Distributions for Bayesian Inference. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 113-147.
- BERTRAND, J. 1889. Calcul des Probabilites. Gauthier-Villars, Paris.
- BESAG, J. and KEMPTON, R.A. 1986. Statistical analysis of field experiments using neighbouring plots. *Biometrics*, 42:231-251.
- BESAG, J., GREEN, P., HIGDON, D. and MENGENSEN, K. 1995. Bayesian Computation and Stochastic Systems. *Statistical Science*, 3-41.
- BESAG, J. and HIGDON, D. 1999. Bayesian analysis of agricultural field experiments. *Journal of the Royal Statistical Society Statistical Methodology Series B*, 61(1): 691-746.
- BLASCO, A. 2001. A Bayesian Controversy in Animal Breeding. *Journal of Animal Science*, 79: 2023-2046.
- BROEMELING, L. 1985. Bayesian analysis of linear models. Marcel Dekker.
- BROOKS, S. 1998. Markoc chain Monte Carlo method and its application. *The Statistician*, 47: 69-100.
- BOLSTAD, W.M. 2004. Introduction to Bayesian Statistics. John Wiley & Sons, Inc. New Jersey.
- BOX G.E.P. and TIAO G.C. 1973. Bayesian Inference in Statistical Analysis. Addison-Wesley.

- CASELLA, G. and GEORGE, E.I. 1992. Explaining the Gibbs Sampler. *American Statistician*, 167-174.
- CHALONER K. and VERDINELLI I. 1995. Bayesian Experimental Design: A Review. *Statistical Science*, 10(3): 273-304.
- CHE, X. 2011. Bayesian Statistics and Its Application to Quantitative Trait Loci Mapping. PhD Thesis, University of California Riverside, 171p.
- CHIB, S. and GREENBERG, E. 1995. Understanding the Metropolis-Hasting Algorithm. *American Statistician*, 327-335.
- CONGDON, P. D. 2010. Applied Bayesian Hierarchical Methods. A Chapman and Hall / CRC Press, London.
- CONSONNI, G. and VERONESE, P. 1992. Conjugate Priors for Exponential Families Having Quadratic Variance Functions. *Journal of the American Statistical Association*, 1123-1127.
- DEMİRHAN H. 2004. Logaritmik doğrusal modellerde parametrelerin ve beklenen göze sıklıklarının bayesci kestirimi. Yüksek lisans tezi, Hacettepe Üniversitesi, Ankara, 89 s.
- DEY, D., GHOSH, S.K. and MALLICK, B.K. 2000. Generalized Linear Models: A Bayesian Perspective. *CRC*.
- DIACONIS, P. and YLVISAKER, D. 1979. Conjugate Priors for Exponential Families. *The Annals of Statistics*, 269-281.
- EKİCİ, O. 2005. Bayesian Regresyon ve WinBUGS ile Bir Uygulama. Yüksek lisans tezi, İstanbul Üniversitesi, İstanbul, 115 s.
- EKİCİ, O. 2009. İstatistikte Bayesci ve Klasik Yaklaşımın Kavramsal Farklılıkları. *Balıkesir Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 12 (21): 89-101.
- FIRAT, M.Z. 2000. Dengeli iki-seviyeli şansa bağlı iç-içe sınıflandırılmış deneme planlarında varyans unsurlarının tahmini için varyans analiz, maksimum olabilirlik ve kısıtlanmış maksimum olabilirlik metotlarının karşılıklı olarak incelenmesi. *Anadolu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi*, 1: 105-103.
- FIRAT, M.Z. ve BEK, Y. 1997a. Varyans unsurlarının tahmini için maksimum olabilirlik metotlarının karşılaştırmalı olarak incelenmesi. *Ç.Ü. Ziraat Fakültesi Dergisi*, 12 (1): 1-8.
- FIRAT, M.Z., THEOBALD, C.M., and THOMPSON, R. 1997b. Univariate Analysis of Test Day Milk Yield of British Holstein-Friesian Heifers Using Gibbs Sampling. *Acta. Agric. Scand. Sect. A, Animal Science*, 47:213-220.

- FIRAT, M.Z., THEOBALD, C.M. and THOMPSON, R. 1997c. Multivariate Analysis of Test Day Milk Yield of British Holstein-Friesian Heifers Using Gibbs Sampling. *Acta. Agric. Scand. Sect. A, Animal Science*, 47:221-229.
- FISHER, R. A. 1935. The Design of Experiments. Collier Macmillan, London.
- GALİÇ, A. 2002. Hayvan Islahında Boğa Modelinin Gibbs Örneklemesi Kullanılarak Bayesian Analizi. Yüksek lisans tezi, Akdeniz Üniversitesi, Antalya, 40 s.
- GELFAND, A.E. and SMITH, A.F. 1990. Sampling-based approaches to calculating marginal densities. *Journal of the American Statistical Association*, 85: 398-409.
- GELFAND, A.E., HILLS, S.E., RACINE-POON, A., SMITH, A.F. 1990. Illustration of Bayesian inference in normal data models using Gibbs sampling. *Journal of the American Statistical Association*, 85: 972-985.
- GELMAN, A. MECHELEN, I.V., VERBEKE, G., HEITJAN, D.F., MEULDERS, M. 2005. Multiple Imputation for Model Checking: Completed-data Plots with Missing and Latent Data. *Biometrics*, 61 (1): 74-85.
- GEMAN, S. and GEMAN, D. 1984. Stochastic relaxation, Gibbs distribution and the Bayesian restoration of images. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6: 721-741.
- GEWEKE J. 1992. Evaluating the Accuracy of Sampling-Based Approaches to the Calculation of Posterior Moments. In Bayesian Statistics 4, Bernardo, J. M., Berger, J. O., Dawid, A. P. and Smith, A. F. M. (eds.), 169- 193. Oxford: Oxford University Press.
- GIANOLA, A. and FERNANDO, R.L. 1986. Bayesian methods in animal breeding theory. *Journal of Animal Science*, 63 (1): 217-244.
- HASTING, W. 1970. Monte Carlo sampling methods using Markov Chains and their applications. *Biometrika*, 57: 97-109.
- HILL, B.M. 1965. Inference about variance components in the one-way model. *Journal of the American Statistical Association*, 60: 806-825.
- HILL, B.M. 1967. Correlated errors in the random model. *Journal of the American Statistical Association*, 62:1387-1400.
- HOESCHELE, I. and VANRADEN, P.M. 1993. Bayesian Analysis of Linkage Between Genetic Markers and Quantitative Trait Loci. II. combining Prior Knowledge with Experimental Evidence. *TAG Theoretical and Applied Genetics*, 85 (8): 946-952.
- JEFFREYS, H. 1939. *Theory of Probability*. Oxford University Press, London.

- JEFFREYS, H. 1946. An Invariant form for the Prior Probability in Estimation Problems. *Proceeding of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 453-461.
- KASS, R.E., CARLIN, B.P., GELMAN, A., NEAL, R.M. 1998. Marcov Chain Monte Carlo in Practice: A Roundtable Discussion. *The American Statistician*, 52: 93-100.
- KHURI, A. I. and SAHAI, H. 1985. Variance components analysis: a selective literature survey. *International Statistical Review*, 53: 279-300.
- KHURI, A. I. 2000. Designs for Variance Components Estimation: Past and Present. *International Statistical Review*, 68(3): 311-322.
- KUMAR, S., RAO, A.R., and BHATIA, V.K. 2004. Bayesian Estimation of Heritability in Animal Breeding Experiments Under 2-way Nested Classification. *Journal of the Indian Society of Agricultural Statistics*, 58 (3): 352-362.
- KUTHICK, J. and DOBES, I. 2006. Effect of some factors on growth of lambs from crossing between the Improved Wallachian and East Friesian. *Czech Journal of Animal Science*, 71:845-849.
- LINDLEY, D.V. 1965. Introduction to Probability and Statistics from a Bayesian Viewpoint (parts I and II). Cambridge University Press, Cambridge.
- LINDLEY, D.V. 1971. *Bayesian Statistics, A Review*. SIAM, Philadelphia.
- LINDLEY, D.V. 1972. A Bayesian Solution For Two-Way Analysis of Variance. University Collage London, The Research and Development Division, The American Collage Testing Program.
- MACIT, M. ve AKSOY, A. 1997. Atatürk Üniversitesi Tarım İşletmesinde Yetiştirilen İvesi ve Morkaraman Kuzuların Yarı Entansif Şartlarda Besi Performansları Bakımından Karşılaştırılması. *Atatürk Üniversitesi Ziraat Fakültesi Dergisi*, 28(3):454-463.
- MCCARTHY, M.A. 2007. Bayesian Methods for ecology. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- METROPOLIS, N., ROSENBLUTH, A., ROSENBLUTH, M., TELLER, M., TELLER, A. 1953. Equations of state calculations by fast computing machine. *Journal of Chemical Physics*, 1087-1092.
- MURPHY, E. A. and MUTALIK, G. S. 1969. The Application of Bayesian Methods in Genetic Counselling. *Human Heredity*, 19 (2): 126-151.

- NEAL, P. and ROBERTS, G. 2008. Optimal scaling for random walk Metropolis on spherically constrained target densities. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 10: 277-297.
- NTZOUFRAS, I. 2009. Bayesian Modeling Using WinBUGS. A John Wiley&Sons, Inc., New Jersey.
- ORAL ERBAŞ, S. ve OLMUŞ, H. 2006. Deney Düzenleri ve İstatistik Analizleri. Gazi Kitabevi, Ankara.
- RAFTERY, A. 1996. Approximate Bayes Factors and accounting for model uncertainty in generalized linear models. *Biometrika*, 83: 251-266.
- RAIFFA, H. and SCHLAIFER, R. 1961. Applied Statistical Decision Theory. Division of Research Graduate School of Business Administration Harvard University Boston.
- RAO, A.R. and SANJEEV, K. 2001. Bayesian estimation of heritability using Gibbs Sampling for half-sib mating design. *Ind. J. Appl. Statist.* 6:12-26.
- ROBERT, C. P. 2007. The Bayesian Choise from Desicion-Theoretic Foundations to Computational Implementation. Springer Science Business Media, LLC, New York, USA.
- ROBERT, C. and CASELLA, G. 2011. A short history of Markov Chain Monte Carlo: Subjective Recollections from Incomplete Data. *Statistical Science*, 1: 102-115.
- ROBERTS, G., and ROSENTHAL, J. 2001. Optimal scaling for various Metropolis-Hasting algorithms. *Statistical Science*, 16: 351-367.
- ROBERTS, G., GELMAN, A. and GILKS, W. 1997. Weak convergence and optimal scaling of random walk Metropolis algorithms. *The Annals of Statistics*, 7: 110-120.
- SAS Institute Inc. 2006. Preliminary Capabilities for Bayesian Analysis in SAS/STAT Software. Cary, NC. 22 s.
- SAVAGE, L.J. 1954. The Foundations of Statistical Inference. J. Wiley, New York.
- SCHLAIFER, R. and RAIFFA, H. 1961. Applied Statistical Decision Theory.
- SIMON, R. and FREEDMAN, LS. 1997. Bayesian design and analysis of two x two factorial clinical trials. *Biometrics*, 53(2): 456-464.
- SORENSEN, D. and GIANOLA, D. 2002. Likelihood, Bayesian and MCMC Methods in Quantitative Genetics. *Springer*.

- SPIEGELHALTER, D., THOMAS, A., BEST, N., LUNN, D. 2003. *WinBUGS User Manuel, Version 1.4, MRC Biostatistics Unit, Institute of Public Health and Department of Epidemiology and Public Health. Imperial College School of Medicine, UK.* <http://www.mrc-bsu.cam.ac.uk/software/bugs/>
- STIGLER, S. 1986. *The History of Statistics*. Belknap, Harvard.
- ŞİRELİ H. D., VURAL M.E., KARATAŞ A., AKÇA N., KONCAGÜL S., TEKEL N. 2015 Birth and weaning weights of Awassi lambs raised in the GAP International Agricultural Research and Training Center. *Ankara Üniversitesi Veterinerlik Fakültesi Dergisi*, 62: 139-145.
- TIBSHIRANI, R. 1989. Noninformative Priors for One Parameter of many. *Biometrika*, 76 (3): 604.
- VENN, J. 1886. *The Logic of Chance*. Macmillan, London.
- WALDMANN, P. and ERICSSON, T. 2006. Comparison of REML and Gibbs sampling estimates of multi-trait genetic parameters in Scots pine. *Theoretical and Applied Genetics*, 112: 1441–1451.
- WANG, J. and HSU, J. S. J. 2006. Bayesian Analysis of the Additive Mixed Model for Randomized Block Designs. *Aus. N. Z. J. Stat.* 48 (2): 225-236.
- WOLFINGER, R.D. and KASSMAN, R.E. 2000. Nonconjugate bayesian analysis of variance component models. *Biometrics*, 56: 768-774.
- WRIGHT, D.R., STERN, H.S. and BERGER, J.P. 2000. Comparing Traditional and Bayesian Analyses of Selection Experiments in Animal Breeding. *Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics*, 5 (2): 240-256.
- XIAOHONG, C. Bayesian Statistics and Its Application to Quantitative Trait Loci Mapping. Ph.D Thesis. University of California Riverside, 157 p.
- ZABELL, S.L. 1989. R.A. Fisher on the history of inverse probability. *Statistical Science*, 4: 247-263.

## 7. EKLER

### Ek-1. Rastsal etkili tesadüf parselleri deneme planının bayesci çözümü

Muamele etkisinin rastsal değişken olduğu varsayımı altında tesadüf parselleri deneme planı model parametreleri genel ortalama  $\mu$  için Uniform bir dağılım, muamele etkisi  $\alpha_i$  için Normal dağılım, muamele varyansı ve hata varyansı  $\sigma_\alpha^2$  ve  $\sigma_e^2$  için ise Ters-Gama dağılımı önsel dağılım olarak alınmıştır.

$f(\{\alpha_i\} | \sigma_\alpha^2) \sim N(0, \sigma_\alpha^2)$  olduğundan açık bir şekilde aşağıdaki gibi yazılır.

$$f(\{\alpha_i\} | \sigma_\alpha^2) \propto (\sigma_\alpha^2)^{-\frac{1}{2}a} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\alpha^2} \sum \alpha_i^2\right\}$$

$f(\sigma_\alpha^2 | v_\alpha, S_\alpha^2) \sim \chi^{-2}$  yani  $\frac{v_\alpha S_\alpha^2}{\sigma_\alpha^2} \sim \chi_\alpha^2$  ya da  $f(\sigma_\alpha^2 | v_\alpha, S_\alpha^2) \sim IG\left(\frac{v_\alpha}{2}, \frac{v_\alpha S_\alpha^2}{2}\right)$  ise açık bir şekilde

$$f(\sigma_\alpha^2 | v_\alpha, S_\alpha^2) \propto (\sigma_\alpha^2)^{-\frac{1}{2}(v_\alpha+2)} \exp\left\{-\frac{v_\alpha S_\alpha^2}{2\sigma_\alpha^2}\right\}$$

yazılır. Benzer şekilde  $\sigma_e^2$  'de Ters-Gama önsel dağılıma sahiptir.

$$f(\sigma_e^2 | v_e, S_e^2) \propto (\sigma_e^2)^{-\frac{1}{2}(v_e+2)} \exp\left\{-\frac{v_e S_e^2}{2\sigma_e^2}\right\}$$

Tesadüf parselleri deneme planı için olabilirlik fonksiyonu ise aşağıdaki gibidir:

$$L = f(\mathbf{y} | \mu, \{\alpha_i\}, \sigma_\alpha^2, \sigma_e^2) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}an} (\sigma_e^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_e^2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \mu - \alpha_i)^2\right\}$$

Olabilirlik ve önsel dağılımları kullanarak elde edilen ortak sonsal yoğunluk fonksiyonu ise şöyledir:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) &\propto (\sigma_e^2)^{-\frac{1}{2}(an+v_e+2)} (\sigma_\alpha^2)^{-\frac{1}{2}(a+v_\alpha+2)} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum \sum (y_{ij} - \mu - \alpha_i)^2 + v_e S_e^2}{\sigma_e^2} \right]\right\} \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum \alpha_i^2 + v_\alpha S_\alpha^2}{\sigma_\alpha^2} \right]\right\} \end{aligned} \quad (7.1)$$

burada  $\theta = (\mu, \{\alpha_i\}, \sigma_\alpha^2, \sigma_e^2)$ 'dır.

$\mu$  'nün tam koşullu sonsal dağılımının elde edilişi:

$\mu$  'nün tam koşullu sonsal yoğunluk fonksiyonunu elde etmek için ortak sonsal yoğunluk fonksiyonunda üstel ifadedeki  $\mu$  içeren terimler alınır.

$$\left\{ -\frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \mu - \alpha_i)^2}{\sigma_e^2} \right\} \text{ bu ifadeyi açarsak Eşitlik (7.2) elde edilir.}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \mu - \alpha_i)^2 &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij}^2 + \mu^2 + \alpha_i^2 - 2\mu y_{ij} - 2y_{ij} - \alpha_i + 2\mu \alpha_i) \\ &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n y_{ij}^2 + an\mu^2 + n \sum \alpha_i^2 - 2\mu \sum \sum y_{ij} - 2 \sum \sum y_{ij} \alpha_i + 2n\mu \sum \alpha_i \end{aligned} \quad (7.2)$$

Bu eşitlik düzenlenirse;

$$\begin{aligned} &\left\{ -\frac{1}{2\sigma_e^2} [an\mu^2 + 2n\mu \sum \alpha_i - 2\mu \sum \sum y_{ij}] \right\} \\ &= -\frac{1}{2\sigma_e^2} [an\mu^2 + 2n\mu \sum \alpha_i - 2\mu y_{..}] \\ &= -\frac{1}{2\sigma_e^2} [an\mu^2 - 2\mu(y_{..} - n \sum \alpha_i)] \\ &= \frac{1}{2} \frac{[\mu^2 - 2\mu(\bar{y}_{..} - \bar{\alpha}_{..})]}{\sigma_e^2 / an} \end{aligned}$$

elde edilir.

**Teorem 7.1.**  $p(\theta) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_e^2} (\theta' A \theta - 2\theta a) \right\}$  ise  $\theta$  ortalaması  $A^{-1}a$  ve varyansı  $A^{-1}\sigma_e^2$  olan normal bir dağılıma sahiptir ve  $\theta \sim N(A^{-1}a, A^{-1}\sigma_e^2)$  olarak gösterilir.

Teorem 7.1'den  $\mu$  'nün ortalaması  $(\bar{y}_{..} - \bar{\alpha}_{..})$  ve varyansı  $\sigma_e^2 / an$  olan normal dağılıma sahip olduğu görülür. Burada  $y_{ij} - \alpha_i = w_{ij}$  olsun. O halde

$$\sum \sum w_{ij} = \sum \sum (y_{ij} - \alpha_i) = an(\bar{y}_{..} - \bar{\alpha}_{..})$$

olur. Bu düzenlemeden sonra  $\mu$  'nün tam koşullu sonsal dağılımı ortalaması  $\left( \frac{\sum \sum w_{ij}}{an} \right)$

ve varyansı  $\left( \frac{\sigma_e^2}{an} \right)$  olan bir normal dağılımdır ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$[\mu | \sigma_\alpha^2, \sigma_e^2, \{\alpha_i\}, \mathbf{y}] \sim N \left( \frac{\sum \sum w_{ij}}{an}, \frac{\sigma_e^2}{an} \right)$$

$\{\alpha_i\}$  'nin tam koşullu sonsal dağılımının elde edilişi:

$\{\alpha_i\}$  'nin tam koşullu sonsal dağılımını elde etmek için Eşitlik (7.1)'de üstel ifadedeki  $\alpha_i$  içeren terimler alınır.

$$\left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum \sum (y_{ij} - \mu - \alpha_i)^2}{\sigma_e^2} + \frac{\sum \alpha_i^2}{\sigma_\alpha^2} \right] \right\} \quad (7.3)$$

Eşitlik (7.3)'ü açıp  $\alpha_i$  içeren terimler alınır ve Eşitlik (7.4) elde edilir.

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\sum \sum (\alpha_i^2 - 2y_{ij}\alpha_i + 2\mu\alpha_i)}{\sigma_e^2} + \frac{\sum \alpha_i^2}{\sigma_\alpha^2} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{n \sum \alpha_i^2 - 2n\bar{y}_i \alpha_i + 2n\mu \sum \alpha_i}{\sigma_e^2} + \frac{\sum \alpha_i^2}{\sigma_\alpha^2} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{[n \sum \alpha_i^2 - 2n \sum \alpha_i (\bar{y}_i - \mu)]}{\sigma_e^2/n} + \frac{\sum \alpha_i^2}{\sigma_\alpha^2} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\sum \alpha_i^2 - \sum \alpha_i (\bar{y}_i - \mu)}{\sigma_e^2/n} + \frac{\sum \alpha_i^2}{\sigma_\alpha^2} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \left[ \sum \alpha_i^2 - \frac{2n\sigma_\alpha^2 \sum \alpha_i (\bar{y}_i - \mu)}{\sigma_e^2 + n\sigma_\alpha^2} \right] / \frac{\sigma_\alpha^2 \sigma_e^2}{\sigma_e^2 + n\sigma_\alpha^2} \right\} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Teorem 7.1'den yararlanarak  $\{\alpha_i\}$  'nin ortalaması  $\frac{\sigma_\alpha^2 (\bar{y}_i - \mu)}{\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2/n}$  ya da  $\frac{n\sigma_\alpha^2 (\bar{y}_i - \mu)}{\sigma_e^2 + n\sigma_\alpha^2}$  ve

varyansı  $\frac{\sigma_\alpha^2 \sigma_e^2}{\sigma_e^2 + n\sigma_\alpha^2}$  olan Normal dağılıma sahiptir. Böylece  $\{\alpha_i\}$  'nin tam koşullu sonsal dağılımını aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$$[\{\alpha_i\} | \mu, \sigma_\alpha^2, \sigma_e^2, \mathbf{y}] \sim N\left(\frac{n\sigma_\alpha^2(\bar{y}_{i.} - \mu)}{\sigma_e^2 + n\sigma_\alpha^2}, \frac{\sigma_\alpha^2\sigma_e^2}{\sigma_e^2 + n\sigma_\alpha^2}\right)$$

$\sigma_\alpha^2$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımının elde edilişi:

$\sigma_\alpha^2$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımını elde etmek için Eşitlik (7.1)'deki üstel ifadedeki  $\sigma_\alpha^2$ 'yi içeren terimler alınır. Şöyle ki;

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\sum \alpha_i^2 + v_a S_a^2}{\sigma_\alpha^2}\right]\right\} = \exp\left\{-\frac{(\sum \alpha_i^2 + v_a S_a^2)/2}{\sigma_\alpha^2}\right\}$$

olduğundan  $\frac{(a+v_a)(\sum \alpha_i^2 + v_a S_a^2)}{\sigma_\alpha^2}$  olarak verilen  $\chi_{(a+v_a)}^2$  dağılımına ya da  $IG\left(\frac{a+v_a}{2}, \frac{\sum \alpha_i^2 + v_a S_a^2}{2}\right)$  şeklindeki Ters-Gama dağılımına sahiptir. Sonuç olarak  $\sigma_\alpha^2$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımı,

$$[\sigma_\alpha^2 | \mu, \{\alpha_i\}, \sigma_e^2, \mathbf{y}] \sim IG\left(\frac{a+v_a}{2}, \frac{\sum \alpha_i^2 + v_a S_a^2}{2}\right)$$

olarak yazılır.

$\sigma_e^2$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımının elde edilişi:

$\sigma_e^2$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımı benzer adımları izleyerek,

$$\frac{(an+v_e)(\sum \sum (y_{ij} - \mu - \alpha_i)^2 + v_e S_e^2)}{\sigma_e^2} \sim \chi_{(an+v_e)}^2$$

ya da

$$[\sigma_e^2 | \mu, \{\alpha_i\}, \sigma_\alpha^2, \mathbf{y}] \sim IG\left(\frac{an+v_e}{2}, \frac{\sum \sum (y_{ij} - \mu - \alpha_i)^2 + v_e S_e^2}{2}\right)$$

şeklinde elde edilir.

**Ek-2. Tesadüf bloklarında tek faktörlü deneme planı bayesci çözümü**

Olabilirlik ve önsel dağılımları kullanarak her bir değişken için tam koşullu sonsal dağılımlar elde edilir.

$$f(\theta|\mathbf{y}) \propto L(\mathbf{y}|\theta) \times f(\mu) \times f(\{\alpha_i\}) \times f(\{\beta_j\}) \times f(\sigma_\alpha^2) \times f(\sigma_\beta^2) \times f(\sigma_e^2)$$

$$\begin{aligned} f(\theta|\mathbf{y}) \propto & (\sigma_e^2)^{-\frac{(abn+v_e+2)}{2}} \times (\sigma_\alpha^2)^{-\frac{1}{2}(a+v_a+2)} \times (\sigma_\beta^2)^{-\frac{1}{2}(b+v_b+2)} \\ & \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \mu - \alpha_i - \beta_j)^2 + v_e S_e^2}{\sigma_e^2} \right] \right\} \\ & \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \alpha_i^2 + v_a S_a^2}{\sigma_\alpha^2} + \frac{\sum_{j=1}^b \beta_j^2 + v_b S_b^2}{\sigma_\beta^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (7.5)$$

$\mu$  'nün tam koşullu sonsal dağılımının elde edilişi:

Eşitlik (7.5)'deki üstel ifadede sadece  $\mu$  içeren ifadeleri alırsak ve  $\mu$  içeren ifadeleri düzenlersek;

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \mu - \alpha_i - \beta_j)^2 + v_e S_e^2}{\sigma_e^2} \right] \right\} \\ & = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (\mu^2 - 2\mu y_{ijk} + 2\mu \alpha_i + 2\mu \beta_j)}{\sigma_e^2} \right] \right\} \\ & = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{abn\mu^2 - 2\mu \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk} + 2bn\mu \sum_{i=1}^a \alpha_i + 2an\mu \sum_{j=1}^b \beta_j}{\sigma_e^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\text{Not: } \bar{y}_{...} = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk}}{abcn}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^a \alpha_i}{a}, \quad \bar{\beta} = \frac{\sum_{j=1}^b \beta_j}{b}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(\mu | \alpha_i, \beta_j, \sigma_\alpha^2, \sigma_\beta^2, \sigma_e^2, \mathbf{y}) &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_e^2} [abn\mu^2 - 2abn\mu(\bar{y}_{...} - \bar{\alpha} - \bar{\beta})] \right\} \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_e^2} [abn(\mu^2 - 2\mu(\bar{y}_{...} - \bar{\alpha} - \bar{\beta}))] \right\} \end{aligned} \quad (7.6)$$

Eşitlik (7.6)'ın, Teorem 7.1 kullanılarak ortalaması  $\left( \frac{\bar{y}_{...} - \bar{\alpha} - \bar{\beta}}{abn} \right)$  ve varyansı  $\left( \frac{\sigma_e^2}{abn} \right)$  olan Normal dağılıma sahip olduğu elde edilir. Sonuç olarak,

$$[\mu | \{\alpha_i\}, \{\beta_j\}, \sigma_\alpha^2, \sigma_\beta^2, \sigma_e^2] \sim N\left( \frac{\bar{y}_{...} - \bar{\alpha} - \bar{\beta}}{abn}, \frac{\sigma_e^2}{abn} \right) \text{ yazılır.}$$

$\{\alpha_i\}$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımının elde edişi:

Eşitlik (7.5)'deki üstel ifadede sadece  $\alpha_i$  içeren ifadeleri alırsak ve  $\alpha_i$  içeren ifadeleri düzenlersek Eşitlik (7.7) elde edilir.

$$\begin{aligned} f(\{\alpha_i\} | \mu, \{\beta_j\}, \sigma_\alpha^2, \sigma_\beta^2, \sigma_e^2, \mathbf{y}) &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \alpha_i - \beta_j)^2 \right] \right\} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \alpha_i^2}{\sigma_\alpha^2} \right] \right\} \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (\alpha_i^2 - 2y_{ijk}\alpha_i + 2\mu\alpha_i + 2\alpha_i\beta_j)}{\sigma_e^2} + \frac{\sum_{i=1}^a \alpha_i^2}{\sigma_\alpha^2} \right] \right\} \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{bn \sum_{i=1}^a \alpha_i^2 - 2 \sum_{i=1}^a \alpha_i \left( bn\bar{y}_{i..} - bn\mu - n \sum_{j=1}^b \beta_j \right)}{\sigma_e^2} + \frac{\sum_{i=1}^a \alpha_i^2}{\sigma_\alpha^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{bn \sum_{i=1}^a \alpha_i^2}{\sigma_e^2} + \frac{\sum_{i=1}^a \alpha_i^2}{\sigma_\alpha^2} - \frac{2n \sum_{i=1}^a \alpha_i \left( b\bar{y}_{i..} - b\mu - \sum_{j=1}^b \beta_j \right)}{\sigma_e^2} \right] \right\} \\
& \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{bn\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2}{\sigma_\alpha^2 \sigma_e^2} \right) \sum_{i=1}^a \alpha_i^2 - \frac{2n \sum_{i=1}^a \alpha_i \left( by_{i..} - b\mu - \sum_{j=1}^b \beta_j \right)}{\sigma_e^2} \right] \right\} \\
& \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_e^2} \left[ \left( \frac{bn\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2}{\sigma_\alpha^2} \right) \sum_{i=1}^a \alpha_i^2 - 2n \sum_{i=1}^a \alpha_i \left( by_{i..} - b\mu - \sum_{j=1}^b \beta_j \right) \right] \right\} \quad (7.7)
\end{aligned}$$

Benzer şekilde Teorem (7.1)'den yararlanarak  $\alpha_i$  'nin tam koşullu sonsal dağılımı

$$\left[ \alpha_i \mid \mu, \{\beta_j\}, \sigma_\alpha^2, \sigma_\beta^2, \sigma_e^2 \right] \sim N \left( \frac{n\sigma_\alpha^2(by_{i..} - b\mu)}{bn\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2}, \frac{\sigma_\alpha^2 \sigma_e^2}{bn\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2} \right)$$

olarak elde edilir.

$\{\beta_j\}$  'nin tam koşullu sonsal dağılımının elde edilişi:

$\{\beta_j\}$  'nin tam koşullu sonsal dağılımını elde etmek için benzer şekilde Eşitlik (7.5)'deki üstel ifadede sadece  $\beta_j$  içeren ifadeler alınır ve  $\beta_j$  içeren ifadeler düzenlenir. Böylece Eşitlik (7.8) elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \alpha_i - \beta_j)}{\sigma_e^2} + \frac{\sum_{j=1}^b \beta_j^2}{\sigma_\beta^2} \right] \right\} \\
& \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (\beta_j^2 - 2y_{ijk}\beta_j + 2\mu\beta_j + 2\alpha_i\beta_j)}{\sigma_e^2} + \frac{\sum_{j=1}^b \beta_j^2}{\sigma_\beta^2} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{an \sum_{j=1}^b \beta_j^2 - 2 \sum_{j=1}^b \beta_j \left( an \bar{y}_{.j} - an\mu - n \sum_{i=1}^a \alpha_i \right)}{\sigma_e^2} + \frac{\sum_{j=1}^b \beta_j^2}{\sigma_\beta^2} \right] \right\} \\
& \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{an \sum_{j=1}^b \beta_j^2}{\sigma_e^2} + \frac{\sum_{j=1}^b \beta_j^2}{\sigma_\beta^2} - \frac{2n \sum_{j=1}^b \beta_j \left( a \bar{y}_{.j} - a\mu - \sum_{i=1}^a \alpha_i \right)}{\sigma_e^2} \right] \right\} \\
& \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{an \sigma_\beta^2 + \sigma_e^2}{\sigma_\beta^2 \sigma_e^2} \right) \sum_{j=1}^b \beta_j^2 - \frac{2n \sum_{j=1}^b \beta_j \left( a \bar{y}_{.j} - a\mu - \sum_{i=1}^a \alpha_i \right)}{\sigma_e^2} \right] \right\} \quad (7.8)
\end{aligned}$$

Teorem (7.1) yardımıyla  $\beta_j$ 'nin ortalaması  $\left( \frac{n \sigma_\beta^2 \left( \left( a \bar{y}_{.j} - a\mu - \sum_{i=1}^a \alpha_i \right) \right)}{an \sigma_\beta^2 + \sigma_e^2} \right)$  ve varyansı  $\left( \frac{\sigma_\beta^2 \sigma_e^2}{an \sigma_\beta^2 + \sigma_e^2} \right)$  olan Normal dağılıma sahip olduğu görülür.

$$\left[ \beta_j \mid \mu, \{\alpha_i\}, \sigma_\alpha^2, \sigma_\beta^2, \sigma_e^2 \right] \sim N \left( \frac{n \sigma_\beta^2 \left( \left( a \bar{y}_{.j} - a\mu - \sum_{i=1}^a \alpha_i \right) \right)}{an \sigma_\beta^2 + \sigma_e^2}, \frac{\sigma_\beta^2 \sigma_e^2}{an \sigma_\beta^2 + \sigma_e^2} \right)$$

$\sigma_\alpha^2$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımının elde edilişi:

Eşitlik (7.5)'de tüm  $\sigma_\alpha^2$  içeren ifadeler alınıp düzenlenirse elde edilen ifadenin parametreleri  $\left( \frac{a + \nu_\alpha}{2}, \frac{\sum_{i=1}^a \alpha_i^2 + \nu_\alpha S_\alpha^2}{2} \right)$  olan Ters-Gama dağılımına sahip olduğu görülür.

Şöyle ki tüm  $\sigma_\alpha^2$  içeren ifadeleri düzenlersek Eşitlik (7.9) elde edilir.

$$\propto (\sigma_\alpha^2)^{-\frac{1}{2}(a+v_\alpha+2)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \alpha_i^2 + v_\alpha S_\alpha^2}{\sigma_\alpha^2} \right] \right\} \quad (7.9)$$

Eşitlik (7.9)'un da parametreleri  $\left( \frac{a+v_\alpha}{2} \right)$  ve  $\left( \frac{\sum_{i=1}^a \alpha_i^2 + v_\alpha S_\alpha^2}{2} \right)$  olan Ters-Gama dağılımına sahip olduğu görülür.

$$[\sigma_\alpha^2 | \mu, \{\alpha_i\}, \{\beta_j\}, \sigma_\beta^2, \sigma_e^2] \sim IG \left( \frac{a+v_\alpha}{2}, \frac{\sum_{i=1}^a \alpha_i^2 + v_\alpha S_\alpha^2}{2} \right)$$

$\sigma_\beta^2$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımının elde edilişi:

Benzer şekilde Eşitlik (7.5)'teki tüm  $\sigma_\beta^2$  içeren ifadeler alınıp düzenlenirse Eşitlik (7.10) elde edilir.

$$\propto (\sigma_\beta^2)^{-\frac{1}{2}(b+v_\beta+2)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{j=1}^b \beta_j^2 + v_\beta S_\beta^2}{\sigma_\beta^2} \right] \right\} \quad (7.10)$$

Sonuç olarak parametreleri  $\left( \frac{b+v_\beta}{2} \right)$  ve  $\left( \frac{\sum_{j=1}^b \beta_j^2 + v_\beta S_\beta^2}{2} \right)$  olan Ters-Gama dağılımı elde edilir ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$[\sigma_\beta^2 | \mu, \{\alpha_i\}, \{\beta_j\}, \sigma_\alpha^2, \sigma_e^2] \sim IG \left( \frac{b+v_\beta}{2}, \frac{\sum_{j=1}^b \beta_j^2 + v_\beta S_\beta^2}{2} \right)$$

$\sigma_e^2$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımının elde edilişi:

Benzer şekilde Eşitlik (7.5)'den parametreleri  $\left(\frac{abn + v_e}{2}\right)$  ve

$$\left( \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{l=1}^n (y_{ijk} - \mu - \alpha_i - \beta_j)^2 + v_e S_e^2}{2} \right)$$

olan Ters-Gama dağılımı elde edilir.

$$\left[ \sigma_e^2 \middle| \mu, \{\alpha_i\}, \{\beta_j\}, \sigma_\alpha^2, \sigma_\beta^2 \right] \sim IG \left( \frac{abn + v_e}{2}, \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{l=1}^n (y_{ijk} - \mu - \alpha_i - \beta_j)^2 + v_e S_e^2}{2} \right)$$

**Ek-3. Tesadüf bloklarında iki faktörlü faktöriyel deneme planı bayesci çözümü**

Tesadüf bloklarında iki faktörlü faktöriyel deneme planı için olabilirlik fonksiyonu şöyle tanımlanır.

$$L = f(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}) \propto (\sigma_e^2)^{-\frac{abcn}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^n (y_{ijkl} - \mu - \alpha_i - \beta_j - \gamma_k - (\beta\gamma)_{ij})^2}{\sigma_e^2} \right] \right\}$$

Model parametreleri için kullanılan önsel dağılımlar ise aşağıdaki gibidir.

$$f(\mu) \propto \text{sabit}$$

$$f(\{\alpha_i\} | \sigma_\alpha^2) \sim N(0, \sigma_\alpha^2)$$

$$f(\{\beta_j\} | \sigma_\beta^2) \sim N(0, \sigma_\beta^2)$$

$$f(\{\gamma_k\} | \sigma_\gamma^2) \sim N(0, \sigma_\gamma^2)$$

$$f(\{(\beta\gamma)_{jk}\} | \sigma_{\beta\gamma}^2) \sim N(0, \sigma_{\beta\gamma}^2)$$

$$f(\left(\sigma_i^2\right) | \nu_i, S_i^2) \sim IG\left(\frac{\nu_i}{2}, \frac{\nu_i S_i^2}{2}\right) \quad i = \alpha, \beta, \gamma, (\beta\gamma)$$

$$f(\left(\sigma_e^2\right) | \nu_e, S_e^2) \sim IG\left(\frac{\nu_e}{2}, \frac{\nu_e S_e^2}{2}\right)$$

Olabilirlik ve önsel dağılımlar kullanılarak sonsal dağılım elde edilir.

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) &\propto L(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}) \times f(\mu) \times f(\{\alpha_i\}) \times f(\{\beta_j\}) \times f(\{(\beta\gamma)_{jk}\}) \\ &\quad \times f(\sigma_\alpha^2) \times f(\sigma_\beta^2) \times f(\sigma_\gamma^2) \times f(\sigma_{\beta\gamma}^2) \times f(\sigma_e^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) \propto & \left(\sigma_e^2\right)^{-\frac{(abcn+v_e+2)}{2}} \times \left(\sigma_\alpha^2\right)^{-\frac{1}{2}(a+v_a+2)} \times \left(\sigma_\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}(b+v_b+2)} \\
& \times \left(\sigma_\gamma^2\right)^{-\frac{1}{2}(c+v_c+2)} \times \left(\sigma_{(\beta\gamma)}^2\right)^{-\frac{1}{2}(bc+v_{bc}+2)} \\
& \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^n (y_{ijkl} - \mu - \alpha_i - \beta_j - \gamma_k - (\beta\gamma)_{jk})^2 + v_e S_e^2}{\sigma_e^2} \right] \right\} \\
& \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \alpha_i^2 + v_a S_a^2}{\sigma_\alpha^2} + \frac{\sum_{i=1}^a \beta_i^2 + v_b S_b^2}{\sigma_\beta^2} \right] \right\} \\
& \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \gamma_i^2 + v_c S_c^2}{\sigma_\gamma^2} + \frac{\sum_{i=1}^a (\beta\gamma)_i^2 + v_{bc} S_{bc}^2}{\sigma_{(\beta\gamma)}^2} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{7.11}$$

$\mu$  'nün tam koşullu sonsal dağılımının elde edilişi:

Sonsal yoğunluk fonksiyonunda sadece  $\mu$  içeren ifadeleri alır ve düzenlersek Eşitlik (7.12) elde edilir.

$f(\mu|\{\alpha_i\},\{\beta_j\},\{\gamma_k\},\{(\beta\gamma)_{jk}\},\sigma_\alpha^2,\sigma_\beta^2,\sigma_\gamma^2,\sigma_{\beta\gamma}^2,\sigma_e^2,\mathbf{y})=f(\mu|.)$  ile gösterilsin.

$$f(\mu|.) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^n (\mu^2 - 2\mu y_{ijkl} + 2\mu \alpha_i + 2\mu \beta_j + 2\mu \gamma_k + 2\mu (\beta\gamma)_{jk})}{\sigma_e^2} \right] \right\}$$

$$f(\mu|\cdot) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{abcn\mu^2 - 2\mu \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^n y_{ijkl} + 2bcn\mu \sum_{i=1}^a \alpha_i + 2acn\mu \sum_{j=1}^b \beta_j}{\sigma_e^2} \right] \right\}$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{2abn\mu \sum_{k=1}^c \gamma_k + 2an\mu \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\beta\gamma)_{jk}}{\sigma_e^2} \right] \right\}$$

Not:

$$\bar{y}_{....} = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^n y_{ijkl}}{abcn}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^a \alpha_i}{a}, \quad \bar{\beta} = \frac{\sum_{j=1}^b \beta_j}{b}, \quad \bar{\gamma} = \frac{\sum_{k=1}^c \gamma_k}{c}, \quad (\bar{\beta\gamma})_{jk} = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{l=1}^n (\beta\gamma)_{jkl}}{bc}$$

$$\Rightarrow f(\mu|\cdot) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_e^2} [abcn\mu^2 - 2abcn\mu(\bar{y}_{....} - \bar{\alpha} - \bar{\beta} - \bar{\gamma} - (\bar{\beta\gamma}))] \right\}$$

$$\Rightarrow f(\mu|\cdot) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_e^2} [abcn(\mu^2 - 2\mu(\bar{y}_{....} - \bar{\alpha} - \bar{\beta} - \bar{\gamma} - (\bar{\beta\gamma})))] \right\} \quad (7.12)$$

Teorem 7.1 kullanılarak Eşitlik (7.11)'in ortalaması  $\left( \frac{\bar{y}_{....} - \bar{\alpha} - \bar{\beta} - \bar{\gamma} - (\bar{\beta\gamma})}{abcn} \right)$  ve varyansı  $\left( \frac{\sigma_e^2}{abcn} \right)$  olan Normal dağılıma sahip olduğu elde edilir. Sonuç olarak,

$$[\mu|\alpha_i, \beta_j, \gamma_k, (\beta\gamma)_{jk}, \sigma_\alpha^2, \sigma_\beta^2, \sigma_\gamma^2, \sigma_{\beta\gamma}^2, \sigma_e^2, \mathbf{y}] \sim N \left( \frac{\bar{y}_{....} - \bar{\alpha} - \bar{\beta} - \bar{\gamma} - (\bar{\beta\gamma})}{abcn}, \frac{\sigma_e^2}{abcn} \right), \text{ dir.}$$

$\{\alpha_i\}$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımının elde edilişi:

$\{\alpha_i\}$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımını elde etmek için sonsal yoğunluk fonksiyonundaki üstel ifadede sadece  $\alpha_i$  içeren ifadeler alınır ve  $\alpha_i$  içeren ifadeler düzenlenir.

$$f(\{\alpha_i\}|\cdot) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^n (y_{ijkl} - \alpha_i - \beta_j - \gamma_k - (\beta\gamma)_{jk})^2 + \frac{\sum_{i=1}^a \alpha_i^2}{\sigma_\alpha^2} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
f(\{\alpha_i\}) &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^n (\alpha_i^2 - 2y_{ijkl}\alpha_i + 2\mu\alpha_i + 2\alpha_i\beta_j + 2\alpha_i\gamma_k + 2\alpha_i(\beta\gamma)_{jk})}{\sigma_e^2} \right] \right\} \\
&\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \alpha_i^2}{\sigma_\alpha^2} \right] \right\} \\
&\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{bcn \sum_{i=1}^a \alpha_i^2 - 2 \sum_{i=1}^a \alpha_i \left( bcn\bar{y}_{i\dots} - bcn\mu - cn \sum_{j=1}^b \beta_j - bn \sum_{k=1}^n \gamma_k - n \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\beta\gamma)_{jk} \right)}{\sigma_e^2} \right] \right\} \\
&\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \alpha_i^2}{\sigma_\alpha^2} \right] \right\} \\
&\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{bcn \sum_{i=1}^a \alpha_i^2}{\sigma_e^2} + \frac{\sum_{i=1}^a \alpha_i^2}{\sigma_\alpha^2} - \frac{2n \sum_{i=1}^a \alpha_i \left( bcn\bar{y}_{i\dots} - bcn\mu - c \sum_{j=1}^b \beta_j - b \sum_{k=1}^c \gamma_k - \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\beta\gamma)_{jk} \right)}{\sigma_e^2} \right] \right\} \\
&\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{bcn\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2}{\sigma_\alpha^2 \sigma_e^2} \right) \sum_{i=1}^a \alpha_i^2 - \frac{2n \sum_{i=1}^a \alpha_i \left( bcn\bar{y}_{i\dots} - bcn\mu - c \sum_{j=1}^b \beta_j - b \sum_{k=1}^c \gamma_k - \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\beta\gamma)_{jk} \right)}{\sigma_e^2} \right] \right\} \\
&\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_e^2} \left[ \left( \frac{bcn\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2}{\sigma_\alpha^2} \right) \sum_{i=1}^a \alpha_i^2 - n \sum_{i=1}^a \alpha_i \left( bcn\bar{y}_{i\dots} - bcn\mu - c \sum_{j=1}^b \beta_j - b \sum_{k=1}^c \gamma_k - \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\beta\gamma)_{jk} \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

Sonuç olarak

$$[\{\alpha_i\}] \sim N \left( \frac{n\sigma_\alpha^2 \left( bcy_{i...} - bc\mu - c \sum_{j=1}^b \beta_j - b \sum_{k=1}^c \gamma_k - \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\beta\gamma)_{jk} \right)}{bcn\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2}, \frac{\sigma_\alpha^2 \sigma_e^2}{bcn\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2} \right)$$

elde edilir.

$\{\beta_j\}$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımının elde edilişi:

$\{\beta_j\}$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımını elde etmek için benzer şekilde Eşitlik 7.11'deki üstel ifadede yer alan  $\beta_j$ 'ler alınır ve  $\beta_j$  içeren ifadeler düzenlenir. Böylece Eşitlik (7.13) elde edilir.

$$\begin{aligned} f(\beta_j | \cdot) &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^n (y_{ijkl} - \alpha_i - \beta_j - \gamma_k - (\beta\gamma)_{jk})}{\sigma_e^2} + \frac{\sum_{j=1}^b \beta_j^2}{\sigma_\beta^2} \right] \right\} \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^n (\beta_j^2 - 2y_{ijkl}\beta_j + 2\mu\beta_j + 2\alpha_i\beta_j + 2\gamma_k\beta_j + 2(\beta\gamma)_{jk}\beta_j)}{\sigma_e^2} + \frac{\sum_{j=1}^b \beta_j^2}{\sigma_\beta^2} \right] \right\} \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{acn \sum_{j=1}^b \beta_j^2 - 2 \sum_{j=1}^b \beta_j \left( acn\bar{y}_{.j..} - acn\mu - cn \sum_{i=1}^a \alpha_i - an \sum_{k=1}^c \gamma_k - n \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\beta\gamma)_{jk} \right)}{\sigma_e^2} \right] \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{j=1}^b \beta_j^2}{\sigma_\beta^2} \right] \right\} \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{acn \sum_{j=1}^b \beta_j^2}{\sigma_e^2} + \frac{\sum_{j=1}^b \beta_j^2}{\sigma_\beta^2} - \frac{2n \sum_{j=1}^b \beta_j \left( ac\bar{y}_{.j..} - ac\mu - c \sum_{i=1}^a \alpha_i - a \sum_{k=1}^c \gamma_k - \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\beta\gamma)_{jk} \right)}{\sigma_e^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{acn\sigma_\beta^2 + \sigma_e^2}{\sigma_\beta^2 \sigma_e^2} \right) \sum_{j=1}^b \beta_j^2 - \frac{2n \sum_{j=1}^b \beta_j \left( ac\bar{y}_{.j..} - ac\mu - c \sum_{i=1}^a \alpha_i - a \sum_{k=1}^c \gamma_k - \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\beta\gamma)_{jk} \right)}{\sigma_e^2} \right] \right\} \\
& \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_e^2} \left[ \left( \frac{acn\sigma_\beta^2 + \sigma_e^2}{\sigma_\beta^2} \right) \sum_{j=1}^b \beta_j^2 - 2n \sum_{j=1}^b \beta_j \left( ac\bar{y}_{.j..} - ac\mu - c \sum_{i=1}^a \alpha_i - a \sum_{k=1}^c \gamma_k - \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\beta\gamma)_{jk} \right) \right] \right\} \\
(7.13)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitlik 7.13'den de  $\beta_j$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımının parametreleri aşağıdaki gibi verilen bir Normal dağılıma olduğu görülür.

$$[\{\beta_j\}] \sim N \left( \frac{n\sigma_\beta^2 \left( ac\bar{y}_{.j..} - ac\mu - c \sum_{i=1}^a \alpha_i - a \sum_{k=1}^c \gamma_k - \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\beta\gamma)_{jk} \right)}{acn\sigma_\beta^2 + \sigma_e^2}, \frac{\sigma_\beta^2 \sigma_e^2}{acn\sigma_\beta^2 + \sigma_e^2} \right)$$

$\{\gamma_k\}$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımının elde edilişi:

$\{\gamma_k\}$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımını elde etmek için Eşitlik 7.11'deki üstel ifadede yer alan  $\gamma_k$ 'ler alınır ve  $\gamma_k$  içeren ifadeler düzenlenir.

$$\begin{aligned}
f(\{\gamma_k\}) & \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^n (y_{ijkl} - \alpha_i - \beta_j - \gamma_k - (\beta\gamma)_{jk})}{\sigma_e^2} + \frac{\sum_{k=1}^c \gamma_k^2}{\sigma_\gamma^2} \right] \right\} \\
f(\{\gamma_k\}) & \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^n (\gamma_k^2 - 2y_{ijkl}\gamma_k + 2\mu\gamma_k + 2\alpha_i\gamma_k + 2\beta_j\gamma_k + 2(\beta\gamma)_{jk}\gamma_k)}{\sigma_e^2} \right] \right\} \\
& \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{k=1}^c \gamma_k^2}{\sigma_\gamma^2} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f(\{\gamma_k\}) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{abn \sum_{k=1}^c \gamma_k}{\sigma_e^2} \right] \right\} \\
& \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ -\frac{2 \sum_{k=1}^c \gamma_k \left( abn \bar{y}_{...k} - abn \mu - bn \sum_{i=1}^a \alpha_i - an \sum_{j=1}^b \beta_j - an \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\beta \gamma)_{jk} \right)}{\sigma_e^2} \right] \right\} \\
& \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{j=1}^b \gamma_j^2}{\sigma_\gamma^2} \right] \right\} \\
& f(\{\gamma_k\}) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{abn \sum_{k=1}^c \gamma_k^2}{\sigma_e^2} + \frac{\sum_{k=1}^c \gamma_k^2}{\sigma_\gamma^2} \right] \right\} \\
& \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ -\frac{2n \sum_{k=1}^c \gamma_k \left( ab \bar{y}_{...k} - ab \mu - b \sum_{i=1}^a \alpha_i - a \sum_{j=1}^b \beta_j - a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\beta \gamma)_{jk} \right)}{\sigma_e^2} \right] \right\} \\
& f(\{\gamma_k\}) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{abn \sigma_\gamma^2 + \sigma_e^2}{\sigma_\gamma^2 \sigma_e^2} \right) \sum_{k=1}^c \gamma_k^2 \right] \right\} \\
& \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ -\frac{2n \sum_{k=1}^c \gamma_k \left( ab \bar{y}_{...k} - ab \mu - b \sum_{i=1}^a \alpha_i - a \sum_{j=1}^b \beta_j - a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\beta \gamma)_{jk} \right)}{\sigma_e^2} \right] \right\} \\
& f(\{\gamma_k\}) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2 \sigma_e^2} \left[ \left( \frac{abn \sigma_\gamma^2 + \sigma_e^2}{\sigma_\gamma^2} \right) \sum_{k=1}^c \gamma_k^2 \right] \right\} \\
& \times \exp \left\{ -\frac{1}{2 \sigma_e^2} \left[ -2n \sum_{k=1}^c \gamma_k \left( ab \bar{y}_{...k} - ab \mu - b \sum_{i=1}^a \alpha_i - a \sum_{j=1}^b \beta_j - a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\beta \gamma)_{jk} \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

Teorem 7.1 kullanılarak  $\gamma_k$  'nın parametreleri aşağıdaki gibi olan Normal bir dağılıma sahip olduğu söylenir.

$$[\{\gamma_k\}] \sim N \left( \frac{n\sigma_\gamma^2 \left( ab\bar{y}_{...k} - ab\mu - b \sum_{i=1}^a \alpha_i - a \sum_{j=1}^b \beta_j - a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\beta\gamma)_{jk} \right)}{abn\sigma_\gamma^2 + \sigma_e^2}, \frac{\sigma_\gamma^2 \sigma_e^2}{abn\sigma_\gamma^2 + \sigma_e^2} \right)$$

$\{(\beta\gamma)_{jk}\}$  'nın tam koşullu sonsal dağılımının elde edilişi:

$\{(\beta\gamma)_{jk}\}$  'nın tam koşullu sonsal dağılımını elde etmek için Eşitlik 7.11'deki üstel ifadede yer alan  $\beta\gamma_{jk}$  'lar alınır ve  $\beta\gamma_{jk}$  içeren ifadeler düzenlenir.

$$\begin{aligned} f(\{(\beta\gamma)_{jk}\}) &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^n (y_{ijkl} - \alpha_i - \beta_j - \gamma_k - (\beta\gamma)_{jk})}{\sigma_e^2} + \frac{\sum_{k=1}^c (\beta\gamma)_{jk}^2}{\sigma_{(\beta\gamma)}^2} \right] \right\} \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^n ((\beta\gamma)_{jk}^2 - 2y_{ijkl}(\beta\gamma)_{jk}) + 2\mu(\beta\gamma)_{jk} + 2\alpha_i(\beta\gamma)_{jk} + 2\beta_j(\beta\gamma)_{jk}}{\sigma_e^2} \right] \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\beta\gamma)_{jk}^2}{\sigma_{(\beta\gamma)}^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{an \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\beta\gamma)_{jk} - 2 \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\beta\gamma)_{jk} \left( an\bar{y}_{.jk.} - an\mu - n \sum_{i=1}^a \alpha_i - an \sum_{j=1}^b \beta_j \right)}{\sigma_e^2} \right] \right\}$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\beta\gamma)_{jk}^2}{\sigma_{(\beta\gamma)}^2} \right] \right\}$$

$$\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{an \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\beta\gamma)_{jk}^2}{\sigma_e^2} \right] \right\}$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\beta\gamma)_{jk}^2}{\sigma_{(\beta\gamma)}^2} - \frac{2n \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\beta\gamma)_{jk} \left( an\bar{y}_{.jk.} - an\mu - n \sum_{i=1}^a \alpha_i - an \sum_{j=1}^b \beta_j \right)}{\sigma_e^2} \right] \right\}$$

$$\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{an\sigma_{(\beta\gamma)}^2 + \sigma_e^2}{\sigma_{(\beta\gamma)}^2 \sigma_e^2} \right) \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\beta\gamma)_{jk}^2 - \frac{2n \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\beta\gamma)_{jk} \left( an\bar{y}_{.jk.} - an\mu - n \sum_{i=1}^a \alpha_i - an \sum_{j=1}^b \beta_j \right)}{\sigma_e^2} \right] \right\}$$

$$\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_e^2} \left[ \left( \frac{an\sigma_{(\beta\gamma)}^2 + \sigma_e^2}{\sigma_{(\beta\gamma)}^2} \right) \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\beta\gamma)_{jk}^2 - \frac{2n \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\beta\gamma)_{jk} \left( a\bar{y}_{.jk.} - a\mu - \sum_{i=1}^a \alpha_i - a \sum_{j=1}^b \beta_j \right)}{\sigma_e^2} \right] \right\}$$

Teorem 7.1'den

$$[(\beta\gamma)_{jk}] \sim N \left( \frac{n\sigma_{(\beta\gamma)}^2 \left( a\bar{y}_{.jk} - a\mu - \sum_{i=1}^a \alpha_i - a \sum_{j=1}^b \beta_j \right)}{an\sigma_{(\beta\gamma)}^2 + \sigma_e^2}, \frac{\sigma_{(\beta\gamma)}^2 \sigma_e^2}{an\sigma_{(\beta\gamma)}^2 + \sigma_e^2} \right)$$

elde edilir.

$\sigma_\alpha^2$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımının elde edilişi:

Eşitlik 7.11'de yer alan tüm  $\sigma_\alpha^2$  içeren ifadeler alınıp düzenlenirse elde edilen

ifadenin parametreleri  $\left( \frac{a + \nu_\alpha}{2}, \frac{\sum_{i=1}^a \alpha_i^2 + \nu_\alpha S_\alpha^2}{2} \right)$  olan Ters-Gama dağılımına sahip

olduğu görülür.

$$f(\sigma_\alpha^2 | \cdot) \propto (\sigma_\alpha^2)^{\frac{1}{2}(a + \nu_\alpha + 2)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \alpha_i^2 + \nu_\alpha S_\alpha^2}{\sigma_\alpha^2} \right] \right\}$$

$$[\sigma_\alpha^2 | \mu, \{\alpha_i\}, \{\beta_j\}, \{\gamma_k\}, \{(\beta\gamma)_{jk}\}, \sigma_\beta^2, \sigma_\gamma^2, \sigma_{\beta\gamma}^2, \sigma_e^2, \mathbf{y}] \sim IG \left( \frac{a + \nu_\alpha}{2}, \frac{\sum_{i=1}^a \alpha_i^2 + \nu_\alpha S_\alpha^2}{2} \right)$$

$\sigma_\beta^2$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımının elde edilişi:

Benzer şekilde Eşitlik 7.11'de üstsel ifadede yer alan tüm  $\sigma_\beta^2$  içeren ifadeler alınıp düzenlenirse

$$\propto (\sigma_\beta^2)^{\frac{1}{2}(b + \nu_\beta + 2)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{j=1}^b \beta_j^2 + \nu_\beta S_\beta^2}{\sigma_\beta^2} \right] \right\}$$

sonuçta parametreleri  $\left( \frac{b + \nu_\beta}{2}, \frac{\sum_{j=1}^b \beta_j^2 + \nu_\beta S_\beta^2}{2} \right)$  olan Ters-Gama dağılımı elde edilir ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\left[ \sigma_\beta^2 \mid \mu, \{\alpha_i\}, \{\beta_j\}, \{\gamma_k\}, \{(\beta\gamma)_{jk}\}, \sigma_\alpha^2, \sigma_\gamma^2, \sigma_{\beta\gamma}^2, \sigma_e^2, \{y_{ijk}\} \right] \sim IG \left( \frac{b + \nu_b}{2}, \frac{\sum_{j=1}^b \beta_j^2 + \nu_b S_b^2}{2} \right)$$

$\sigma_\gamma^2$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımının elde edilişi:

Benzer şekilde

$$f(\sigma_\gamma^2 \mid \cdot) \propto (\sigma_\gamma^2)^{-\frac{1}{2}(c + \nu_\gamma + 2)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{k=1}^c \gamma_k^2 + \nu_\gamma S_\gamma^2}{\sigma_\gamma^2} \right] \right\}$$

yazılır ve

$$\left[ \sigma_\gamma^2 \mid \mu, \{\alpha_i\}, \{\beta_j\}, \{\gamma_k\}, \{(\beta\gamma)_{jk}\}, \sigma_\alpha^2, \sigma_\beta^2, \sigma_{\beta\gamma}^2, \sigma_e^2, \{y_{ijk}\} \right] \sim IG \left( \frac{c + \nu_c}{2}, \frac{\sum_{k=1}^c \gamma_k^2 + \nu_c S_c^2}{2} \right)$$

olarak gösterilir.

$\sigma_{(\beta\gamma)}^2$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımının elde edilişi:

Benzer şekilde

$$f(\sigma_{(\beta\gamma)}^2 \mid \cdot) \propto (\sigma_{(\beta\gamma)}^2)^{-\frac{1}{2}(bc + \nu_{\beta\gamma} + 2)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\beta\gamma)_{jk}^2 + \nu_{\beta\gamma} S_{\beta\gamma}^2}{\sigma_{(\beta\gamma)}^2} \right] \right\}$$

yazılır ve

$$\left[ \sigma_{\beta\gamma}^2 \middle| \mu, \{\alpha_i\}, \{\beta_j\}, \{\gamma_k\}, \{(\beta\gamma)_{jk}\}, \sigma_\alpha^2, \sigma_\beta^2, \sigma_\gamma^2, \sigma_e^2, \{y_{ijk}\} \right] \sim IG \left( \frac{bc + v_{\beta\gamma}}{2}, \frac{\sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\beta\gamma)_{jk}^2 + v_{\beta\gamma} S_{\beta\gamma}^2}{2} \right)$$

olarak gösterilir.

$\sigma_e^2$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımının elde edilişi:

Benzer şekilde

$$\propto (\sigma_e^2)^{-\frac{1}{2}(abcn+v_e+2)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^n (y_{ijkl} - \mu - \alpha_i - \beta_j - \gamma_k - (\beta\gamma)_{jk}) + v_e S_e^2}{\sigma_e^2} \right] \right\}$$

yazılır ve

$$[\sigma_e^2] \sim IG \left( \frac{abcn + v_e}{2}, \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^n (y_{ijkl} - \mu - \alpha_i - \beta_j - \gamma_k - (\beta\gamma)_{jk}) + v_e S_e^2}{2} \right)$$

olarak gösterilir.

**Ek-4. İç içe deneme planının bayesci çözümü**

İç içe deneme planı için ortak sonsal yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$f(\theta|y) \propto (\sigma_\alpha^2)^{-\frac{1}{2}(a+v_\alpha+2)} (\sigma_{\beta(\alpha)}^2)^{-\frac{1}{2}(ab+v_{\beta(\alpha)}+2)} (\sigma_e^2)^{-\frac{1}{2}(abn+v_e+2)}$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \mu - \alpha_i - \beta_{j(i)})^2 + v_e S_e^2}{\sigma_e^2} + \frac{\sum_{i=1}^a \alpha_i^2 + v_\alpha S_\alpha^2}{\sigma_\alpha^2} \right] \right\} \quad (7.14)$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \beta_{j(i)}^2 + v_{\beta(\alpha)} S_{\beta(\alpha)}^2}{\sigma_{\beta(\alpha)}^2} \right] \right\}$$

$\mu$  'nün tam koşullu sonsal dağılımının elde edilmesi:

$\mu$  'nün tam koşullu sonsal dağılımını elde etmek için Eşitlik 7.14'deki üstsel ifadedeki  $\mu$  'yü içeren ifadeleri alıp düzenlersek

$$\left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \mu - \alpha_i - \beta_{j(i)})^2}{\sigma_e^2} \right] \right\}$$

$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \mu - \alpha_i - \beta_{j(i)})^2$  ifadesi açılırsa,

$$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n ((y_{ijk} - \mu) - (\alpha_i + \beta_{j(i)}))^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n ((y_{ijk} - \mu)^2 - 2(y_{ijk} - \mu)(\alpha_i + \beta_{j(i)}) + (\alpha_i + \beta_{j(i)})^2)$$

$$= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk}^2 + \mu^2 - 2\mu y_{ijk} - 2y_{ijk} \alpha_i - 2y_{ijk} \beta_{j(i)} + 2\mu \alpha_i + 2\mu \beta_{j(i)} + \alpha_i^2 + \beta_{j(i)}^2 + 2\alpha_i \beta_{j(i)})$$

$$= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk} + abn\mu^2 - 2\mu \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk} - 2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk} \alpha_i - 2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk} \beta_{j(i)} + 2bn\mu \sum_{i=1}^a \alpha_i$$

$$+ 2n\mu \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \beta_{j(i)} + bn \sum_{i=1}^a \alpha_i^2 + n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \beta_{j(i)}^2 + 2n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \alpha_i \beta_{j(i)}$$

İfadeyi açtıktan sonra  $\mu$  içeren terimler alınır,

$$\left\{ -\frac{1}{2\sigma_e^2} \left[ abn\mu^2 - 2\mu \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk} + 2bn\mu \sum_{i=1}^a \alpha_i + 2n\mu \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \beta_{j(i)} \right] \right\}$$

Burada  $\bar{y}_{...} = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk}}{abn} \Rightarrow \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk} = abn\bar{y}_{...}$  ve  $\bar{\alpha}_{.} = \frac{\sum_{i=1}^a \alpha_i}{a} \Rightarrow \sum_{i=1}^a \alpha_i = a\bar{\alpha}_{.}$  dir ve bu ifadeler yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2\sigma_e^2} \left[ abn\mu^2 - 2abn\mu\bar{y}_{...} + 2bn\mu \sum_{i=1}^a \alpha_i + 2n\mu \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \beta_{j(i)} \right] \\ &= -\frac{1}{2\sigma_e^2} \left[ abn\mu^2 - 2\mu(abn\bar{y}_{...} - abn\bar{\alpha}_{.} - abn\bar{\beta}_{j(i)}) \right] \\ &= -\frac{1}{2\sigma_e^2} \left[ abn\mu^2 - 2abn\mu(\bar{y}_{...} - \bar{\alpha}_{.} - \bar{\beta}_{j(i)}) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\left[ \mu^2 - 2\mu(\bar{y}_{...} - \bar{\alpha}_{.} - \bar{\beta}_{j(i)}) \right]}{\sigma_e^2 / abn} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\mu \left[ \mu - 2(\bar{y}_{...} - \bar{\alpha}_{.} - \bar{\beta}_{j(i)}) \right]}{\sigma_e^2 / abn} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece  $\mu$  ortalaması  $(\bar{y}_{...} - \bar{\alpha}_{.} - \bar{\beta}_{j(i)})$  ve varyansı  $\sigma_e^2 / abn$  olan Normal dağılıma sahiptir ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\left[ \mu | \{ \alpha_i \}, \{ \beta_{j(i)} \}, \sigma_\alpha^2, \sigma_{\beta(\alpha)}^2, \{ y_{ijk} \} \right] \sim N \left( (\bar{y}_{...} - \bar{\alpha}_{.} - \bar{\beta}_{j(i)}), \sigma_e^2 / abn \right)$$

$\{ \alpha_i \}$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımının elde edilişi:

Eşitlik 7.14'deki üstsel ifadede  $\alpha_i$  içeren terimler alınır.

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk} + abn\mu^2 - 2\mu \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk} - 2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk} \alpha_i \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk} \beta_{j(i)} + 2bn\mu \sum_{i=1}^a \alpha_i + 2n\mu \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \beta_{j(i)} + bn \sum_{i=1}^a \alpha_i^2 \right. \\ &\quad \left. + n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \beta_{j(i)}^2 + 2n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \alpha_i \beta_{j(i)} + \frac{\sum_{i=1}^a \alpha_i^2}{\sigma_\alpha^2} \right] \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \left[ \frac{bn \sum_{i=1}^a \alpha_i^2 + 2n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \alpha_i \beta_{j(i)} - 2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk} \alpha_i + 2bn\mu \sum_{i=1}^a \alpha_i}{\sigma_e^2} + \frac{\sum_{i=1}^a \alpha_i^2}{\sigma_\alpha^2} \right]$$

Burada  $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk} = bn\bar{y}_{i..}$  yazılırsa;

$$= -\frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^a \alpha_i^2 \left( \frac{bn\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2}{\sigma_\alpha^2 \sigma_e^2} \right) + \frac{2n \sum_{i=1}^a \alpha_i \sum_{j=1}^b \beta_{j(i)}}{\sigma_e^2} - \frac{2bn \sum_{i=1}^a \alpha_i (\bar{y}_{i..} - \mu)}{\sigma_e^2} \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^a \alpha_i^2 \left( \frac{bn\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2}{\sigma_\alpha^2 \sigma_e^2} \right) - \frac{2n \sum_{i=1}^a \alpha_i \left[ b(\bar{y}_{i..} - \mu) - \sum_{j=1}^b \beta_{j(i)} \right]}{\sigma_e^2} \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \left( \frac{bn\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2}{\sigma_\alpha^2 \sigma_e^2} \right) \left[ \sum_{i=1}^a \alpha_i^2 - \left( \frac{\sigma_\alpha^2 \sigma_e^2}{bn\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2} \right) \frac{2n \sum_{i=1}^a \alpha_i \left[ b(\bar{y}_{i..} - \mu) - \sum_{j=1}^b \beta_{j(i)} \right]}{\sigma_e^2} \right]$$

$$\propto -\frac{1}{2} \left( \frac{bn\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2}{\sigma_\alpha^2 \sigma_e^2} \right) \times \left\{ \left[ \sum_{i=1}^a \alpha_i - \left( \frac{\sigma_\alpha^2}{bn\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2} \right) n \left( b(\bar{y}_{i..} - \mu) - \sum_{j=1}^b \beta_{j(i)} \right) \right]^2 - \left( \frac{\sigma_\alpha^2}{bn\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2} \right)^2 n^2 \left( b(\bar{y}_{i..} - \mu) - \sum_{j=1}^b \beta_{j(i)} \right)^2 \right\}$$

eşitliği elde edilir. Buradan  $\{\alpha_i\}$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımı

$$[\{\alpha_i\} | \mu, \{\beta_{j(i)}\}, \sigma_\alpha^2, \sigma_{\beta(\alpha)}^2, \{y_{ijk}\}] = [\{\alpha_i\} | \cdot]$$

$$[\{\alpha_i\} | \cdot] \sim N \left( \left( \frac{\sigma_\alpha^2}{bn\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2} \right) n \left( b(\bar{y}_{i..} - \mu) - b\bar{\beta}_{j(i)} \right), \frac{\sigma_\alpha^2 \sigma_e^2}{bn\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2} \right)$$

elde edilir.

$\{\beta_{j(i)}\}$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımının elde edilişi:

Eşitlik 7.14'deki üstsel ifadede  $\{\beta_{j(i)}\}$  içeren terimler alınır,

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\sigma_e^2} \left[ -2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk} \beta_{j(i)} + 2n\mu \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \beta_{j(i)} + n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \beta_{j(i)}^2 + 2n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \alpha_i \beta_{j(i)} \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \beta_{j(i)}^2}{\sigma_{\beta(\alpha)}^2} \\
&= -\frac{1}{2} \left[ \frac{n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \beta_{j(i)}^2 + 2n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \alpha_i \beta_{j(i)} - 2n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \beta_{j(i)} \bar{y}_{ij.} + 2n\mu \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \beta_{j(i)} + \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \beta_{j(i)}^2}{\sigma_{\beta(\alpha)}^2}}{\sigma_e^2} + \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \beta_{j(i)}^2}{\sigma_{\beta(\alpha)}^2} \right] \\
&= -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{n\sigma_{\beta(\alpha)}^2 + \sigma_e^2}{\sigma_{\beta(\alpha)}^2 \sigma_e^2} \right) \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \beta_{j(i)}^2 - \frac{2n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \beta_{j(i)} (\bar{y}_{ij.} - \mu - \alpha_i)}{\sigma_e^2} \right] \\
&= -\frac{1}{2} \left( \frac{n\sigma_{\beta(\alpha)}^2 + \sigma_e^2}{\sigma_{\beta(\alpha)}^2 \sigma_e^2} \right) \left[ \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \beta_{j(i)}^2 - \frac{2n\sigma_{\beta(\alpha)}^2}{n\sigma_{\beta(\alpha)}^2 + \sigma_e^2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \beta_{j(i)} (\bar{y}_{ij.} - \mu - \alpha_i) + \frac{n^2 \sigma_{\beta(\alpha)}^2}{(n\sigma_{\beta(\alpha)}^2 + \sigma_e^2)} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{ij.} - \mu - \alpha_i)^2 \right] \\
&\quad - \frac{n^2 \sigma_{\beta(\alpha)}^4}{(n\sigma_{\beta(\alpha)}^2 + \sigma_e^2)} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{ij.} - \mu - \alpha_i)^2 \\
&= -\frac{1}{2} \left( \frac{n\sigma_{\beta(\alpha)}^2 + \sigma_e^2}{\sigma_{\beta(\alpha)}^2 \sigma_e^2} \right) \left( \left[ \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \beta_{j(i)} - \frac{n^2 \sigma_{\beta(\alpha)}^2}{n\sigma_{\beta(\alpha)}^2 + \sigma_e^2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{ij.} - \mu - \alpha_i) \right]^2 - \frac{n^2 \sigma_{\beta(\alpha)}^4}{(n\sigma_{\beta(\alpha)}^2)^2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{ij.} - \mu - \alpha_i)^2 \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left( \frac{n\sigma_{\beta(\alpha)}^2 + \sigma_e^2}{\sigma_{\beta(\alpha)}^2 \sigma_e^2} \right)
\end{aligned}$$

Bu düzenlemelerden sonra  $\{\beta_{j(i)}\}$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımı

$$f(\{\beta_{j(i)}\}) \sim N \left( \frac{n^2 \sigma_{\beta(\alpha)}^2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{ij.} - \mu - \alpha_i)}{n \sigma_{\beta(\alpha)}^2 + \sigma_e^2}, \frac{\sigma_e^2 \sigma_{\beta(\alpha)}^2}{n \sigma_{\beta(\alpha)}^2 + \sigma_e^2} \right)$$

elde edilir.

$\sigma_\alpha^2$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımının elde edilişi:

Eşitlik 7.14'de  $\sigma_\alpha^2$  içeren ifadeler alınsın.

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \alpha_i^2 + \nu_\alpha S_\alpha^2}{\sigma_\alpha^2} \right] \right\} = \exp \left\{ -\frac{\left( \sum_{i=1}^a \alpha_i^2 + \nu_\alpha S_\alpha^2 \right) / 2}{\sigma_\alpha^2} \right\}$$

Buradan  $\sigma_\alpha^2$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımının Ters-Gama dağılımına sahip olduğu görülür.

$$\frac{(S + \nu_\alpha) \left( \sum_{i=1}^a \alpha_i^2 + \nu_\alpha S_\alpha^2 \right)}{\sigma_\alpha^2} \sim \chi_{(S+\nu_\alpha)}^2 \text{ veya } IG \left( \frac{S + \nu_\alpha}{2}, \frac{\sum_{i=1}^a \alpha_i^2 + \nu_\alpha S_\alpha^2}{2} \right)$$

$\sigma_{\beta(\alpha)}^2$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımının elde edilişi:

$\sigma_\alpha^2$ 'ye benzer şekilde Eşitlik 7.14'de  $\sigma_{\beta(\alpha)}^2$  içeren terimler alınır.

$$\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \beta_{j(i)}^2 + \nu_{\beta(\alpha)} S_{\beta(\alpha)}^2}{\sigma_{\beta(\alpha)}^2} \right] \right\}$$

$\sigma_{\beta(\alpha)}^2$ 'nin tam koşullu dağılımı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{(S + \nu_{\beta(\alpha)}) \left( \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \beta_{j(i)}^2 + \nu_{\beta(\alpha)} S_{\beta(\alpha)}^2 \right)}{\sigma_{\beta(\alpha)}^2} \sim \chi_{S+\nu_{\beta(\alpha)}}^2$$

$\sigma_e^2$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımının elde edilişi:

$$\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \mu - \alpha_i - \beta_{j(i)})^2 + \nu_e S_e^2}{\sigma_e^2} \right] \right\}$$

$$\frac{(S_n + \nu_e) \left( \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \mu - \alpha_i - \beta_{j(i)})^2 \right)}{\sigma_e^2} \sim \chi_{(S_n + \nu_e)}^2$$

veya

$$[\sigma_e^2 \mid \mu, \{\alpha_i\}, \{\beta_{j(i)}\}, \sigma_\alpha^2, \sigma_{\beta(\alpha)}^2, \{y_{ijk}\}] \sim IG \left( \frac{S_n + \nu_e}{2}, \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \mu - \alpha_i - \beta_{j(i)})^2 + \nu_e S_e^2}{2} \right)$$

**Ek-5. Genel doğrusal karışık model bayesci çözümü**

Genel doğrusal karışık model için ortak sonsal yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned}
 f(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{u}, \sigma_a^2, \sigma_e^2 | \mathbf{y}) &\propto f(\mathbf{y} | \boldsymbol{\beta}, \mathbf{u}, \sigma_a^2, \sigma_e^2) f(\boldsymbol{\beta}) f(\mathbf{u} | \sigma_a^2) \prod_{i=a,e} f(\sigma_i^2 | \nu_i, S_i^2) \\
 f(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{u}, \sigma_a^2, \sigma_e^2 | \mathbf{y}) &\propto (\sigma_e^2)^{-\frac{N}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_e^2} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{Z}\mathbf{u})' (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{Z}\mathbf{u}) \right\} \\
 &\quad \times (\sigma_a^2)^{-\frac{A}{2}} \exp \left\{ -\frac{\mathbf{u}'\mathbf{u}}{2\sigma_a^2} \right\} \\
 &\quad \times (\sigma_a^2)^{-\frac{1}{2}(\nu_a+2)} \exp \left\{ -\frac{\nu_a S_a^2}{2\sigma_a^2} \right\} (\sigma_e^2)^{-\frac{1}{2}(\nu_e+2)} \exp \left\{ -\frac{\nu_e S_e^2}{2\sigma_e^2} \right\}
 \end{aligned} \tag{7.15}$$

olarak elde edilir.

$\boldsymbol{\beta}$  'nin tam koşullu sonsal dağılımının elde edilişi:

$\boldsymbol{\beta}$  'nin tam koşullu sonsal dağılımını elde etmek için ortak sonsal yoğunluk fonksiyonunda  $\boldsymbol{\beta}$  içeren terimler alınır.

$$\begin{aligned}
 f(\boldsymbol{\beta} | \mathbf{u}, \sigma_a^2, \sigma_e^2, \mathbf{y}) &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_e^2} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{Z}\mathbf{u})' (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{Z}\mathbf{u}) \right\} \\
 &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_e^2} \left[ -\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{Z}\mathbf{u}) - (\mathbf{y} - \mathbf{Z}\mathbf{u})' \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \right] \right\} \\
 &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_e^2} \left[ -\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{Z}\mathbf{u} - \mathbf{y}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}'\mathbf{Z}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \right] \right\} \\
 &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_e^2} \left[ \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y} + 2\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{Z}\mathbf{u} \right] \right\} \\
 &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_e^2} \left[ \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'(\mathbf{y} - \mathbf{Z}\mathbf{u}) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Teorem 7.1'den,  $\mathbf{A} = \mathbf{X}'\mathbf{X}$  ve  $\mathbf{a} = \mathbf{X}'(\mathbf{y} - \mathbf{Z}\mathbf{u})$  alınarak,  $\boldsymbol{\beta}$  'nin tam koşullu sonsal dağılımı

$$\left[ \boldsymbol{\beta} | \mathbf{u}, \sigma_a^2, \sigma_e^2, \mathbf{y} \right] \sim N \left( (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'(\mathbf{y} - \mathbf{Z}\mathbf{u}), (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \sigma_e^2 \right)$$

elde edilir.

$\mathbf{u}$  'nun tam koşullu sonsal dağılımının elde edilişi:

$\mathbf{u}$ 'un tam koşullu sonsal dağılımını elde etmek için Eşitlik 7.15'de  $\mathbf{u}$  içeren terimler alınır.

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{u}|\boldsymbol{\beta}, \sigma_a^2, \sigma_e^2, \mathbf{y}) &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_e^2}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{Z}\mathbf{u})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{Z}\mathbf{u})\right\} \exp\left\{-\frac{\mathbf{u}'\mathbf{u}}{2\sigma_a^2}\right\} \\
 &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_e^2}\left[-\mathbf{u}'\mathbf{Z}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{Z}\mathbf{u}) - (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'\mathbf{Z}\mathbf{u}\right]\right\} \exp\left\{-\frac{\mathbf{u}'\mathbf{u}}{2\sigma_a^2}\right\} \\
 &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_e^2}\left[-\mathbf{u}'\mathbf{Z}'\mathbf{y} + \mathbf{u}'\mathbf{Z}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\mathbf{u} - \mathbf{y}'\mathbf{Z}\mathbf{u} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{Z}\mathbf{u}\right]\right\} \exp\left\{-\frac{\mathbf{u}'\mathbf{u}}{2\sigma_a^2}\right\} \\
 &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_e^2}\left[\mathbf{u}'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\mathbf{u} - 2\mathbf{u}'\mathbf{Z}'\mathbf{y} + 2\mathbf{u}'\mathbf{Z}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\right]\right\} \exp\left\{-\frac{\mathbf{u}'\mathbf{u}}{2\sigma_a^2}\right\} \\
 &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_e^2}\left[\mathbf{u}'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\mathbf{u} - 2\mathbf{u}'\mathbf{Z}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})\right]\right\} \exp\left\{-\frac{\mathbf{u}'\mathbf{u}}{2\sigma_a^2}\right\} \\
 &\propto \exp\left\{-\frac{(\sigma_a^2)^{-1}}{2\sigma_e^2}\left[\sigma_a^2\mathbf{u}'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\mathbf{u} - 2\sigma_a^2\mathbf{u}'\mathbf{Z}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + \sigma_e^2\mathbf{u}'\mathbf{u}\right]\right\} \\
 &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_e^2}\left[\mathbf{u}'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\mathbf{u} - 2\mathbf{u}'\mathbf{Z}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + \frac{\sigma_e^2}{\sigma_a^2}\mathbf{u}'\mathbf{u}\right]\right\} \\
 &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_e^2}\left[\mathbf{u}'\left(\mathbf{Z}'\mathbf{Z} + \mathbf{I}_A \frac{\sigma_e^2}{\sigma_a^2}\right)\mathbf{u} - 2\mathbf{u}'\mathbf{Z}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})\right]\right\}
 \end{aligned}$$

Teorem 7.1'den,  $\mathbf{A} = \left(\mathbf{Z}'\mathbf{Z} + \mathbf{I}_A \frac{\sigma_e^2}{\sigma_a^2}\right)$  ve  $\mathbf{a} = \mathbf{Z}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$  alınarak  $\mathbf{u}$ 'nun tam koşullu sonsal dağılımı

$$\left[\mathbf{u}|\boldsymbol{\beta}, \sigma_a^2, \sigma_e^2, \mathbf{y}\right] \sim N\left[\left(\mathbf{Z}'\mathbf{Z} + \mathbf{I}_A \frac{\sigma_e^2}{\sigma_a^2}\right)^{-1} \mathbf{Z}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}), \left(\mathbf{Z}'\mathbf{Z} + \mathbf{I}_A \frac{\sigma_e^2}{\sigma_a^2}\right)^{-1} \sigma_e^2\right]$$

elde edilir.

$\sigma_a^2$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımının elde edilişi:

$\sigma_a^2$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımını elde etmek için Eşitlik 7.15'de  $\sigma_a^2$  içeren terimler alınır.

$$f(\sigma_a^2 | \boldsymbol{\beta}, \mathbf{u}, \sigma_e^2, \mathbf{y}) \propto (\sigma_a^2)^{-\frac{A}{2}} \exp\left\{-\frac{\mathbf{u}'\mathbf{u}}{2\sigma_a^2}\right\} \times (\sigma_a^2)^{-\frac{1}{2}(v_a+2)} \exp\left\{-\frac{v_a S_a^2}{2\sigma_a^2}\right\}$$

$$f(\sigma_a^2 | \boldsymbol{\beta}, \mathbf{u}, \sigma_e^2, \mathbf{y}) \propto (\sigma_a^2)^{-\frac{1}{2}(A+v_s+2)} \exp\left\{-\frac{\mathbf{u}'\mathbf{u} + v_a S_a^2}{2\sigma_a^2}\right\}$$

Buradan  $\sigma_a^2$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımının Ters-Gama dağılımı olduğu görülür ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$[\sigma_a^2 | \boldsymbol{\beta}, \mathbf{u}, \sigma_e^2, \mathbf{y}] \sim IG\left(\frac{A+v_s}{2}, \frac{\mathbf{u}'\mathbf{u} + v_a S_a^2}{2}\right)$$

$\sigma_e^2$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımının elde edilişi:

$\sigma_e^2$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımını elde etmek için Eşitlik 7.15'de  $\sigma_e^2$  içeren terimler alınır.

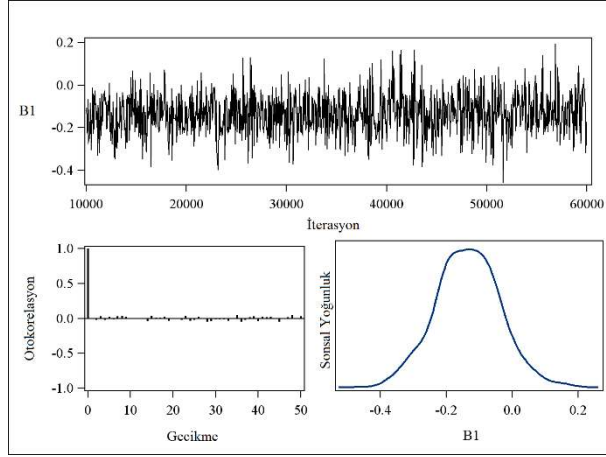
$$f(\sigma_e^2 | \boldsymbol{\beta}, \mathbf{u}, \sigma_a^2, \mathbf{y}) \propto (\sigma_e^2)^{-\frac{N}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_e^2}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{Z}\mathbf{u})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{Z}\mathbf{u})\right\} \\ \times (\sigma_e^2)^{-\frac{1}{2}(v_e+2)} \exp\left\{-\frac{v_e S_e^2}{2\sigma_e^2}\right\}$$

$$f(\sigma_e^2 | \boldsymbol{\beta}, \mathbf{u}, \sigma_a^2, \mathbf{y}) \propto (\sigma_e^2)^{-\frac{1}{2}(N+v_e+2)} \exp\left\{-\frac{(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{Z}\mathbf{u})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{Z}\mathbf{u}) + v_e S_e^2}{2\sigma_e^2}\right\}$$

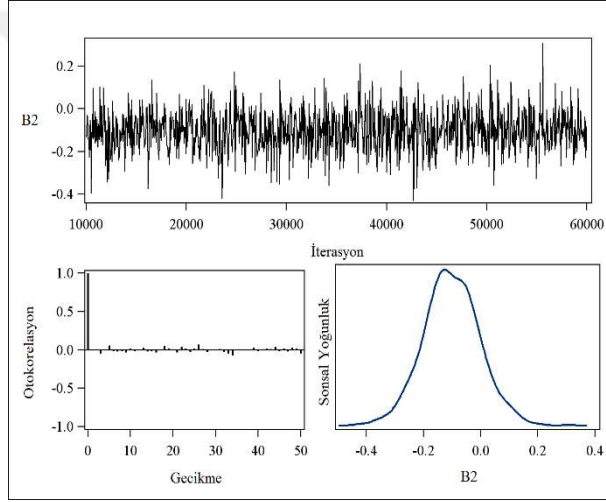
Buradan  $\sigma_e^2$ 'nin tam koşullu sonsal dağılımının Ters-Gama dağılımı olduğu görülür.

$$[\sigma_e^2 | \boldsymbol{\beta}, \mathbf{u}, \sigma_a^2, \mathbf{y}] \sim IG\left(\frac{N+v_e}{2}, \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{Z}\mathbf{u})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{Z}\mathbf{u}) + v_e S_e^2}{2}\right)$$

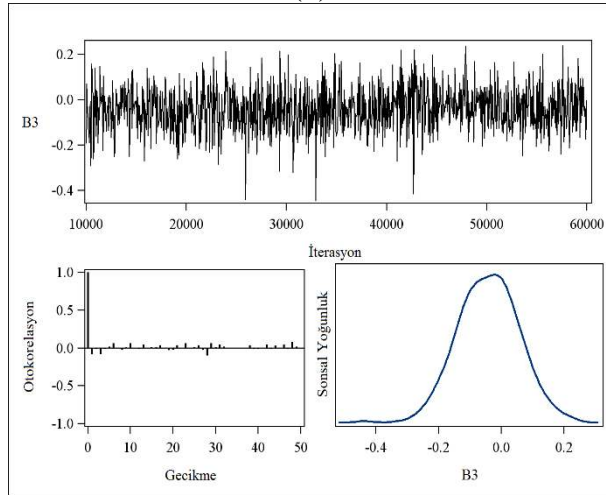
### Ek- 6. İz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri



(a)

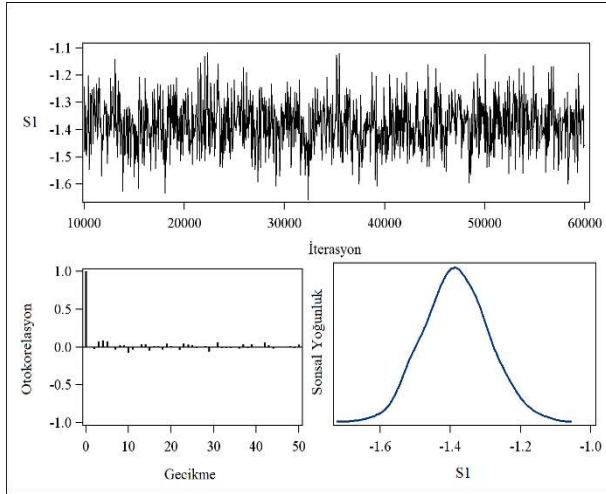


(b)

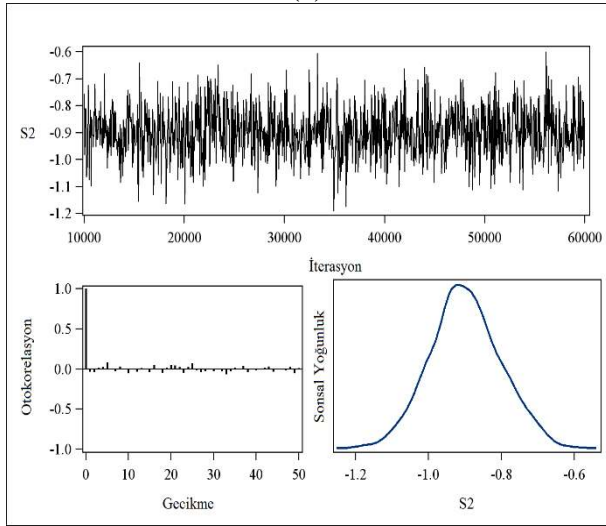


(c)

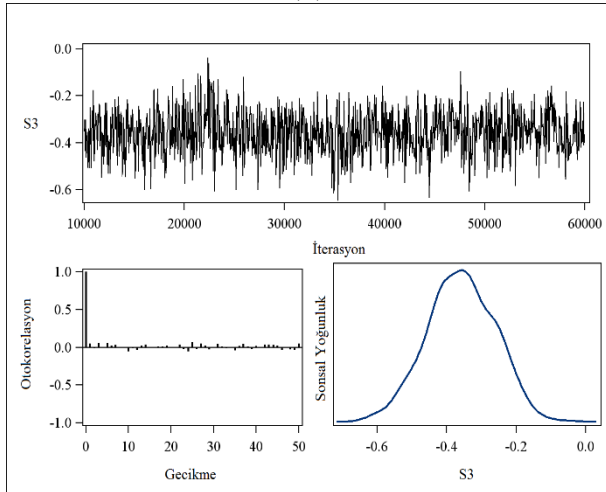
Şekil 4.6.a) B1'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri  
 b) B2'ye ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri  
 c) B3'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri



(a)

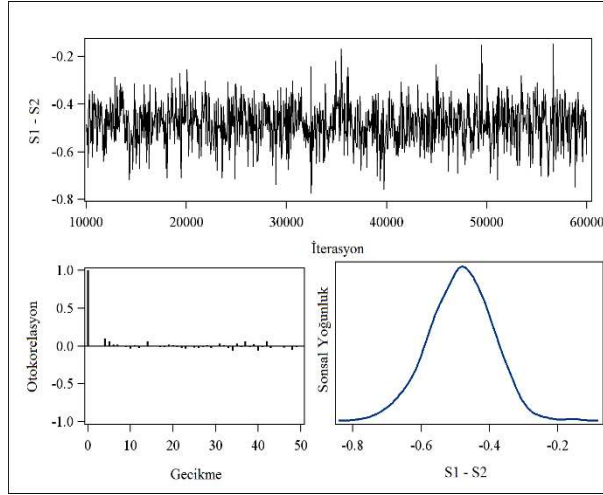


(b)

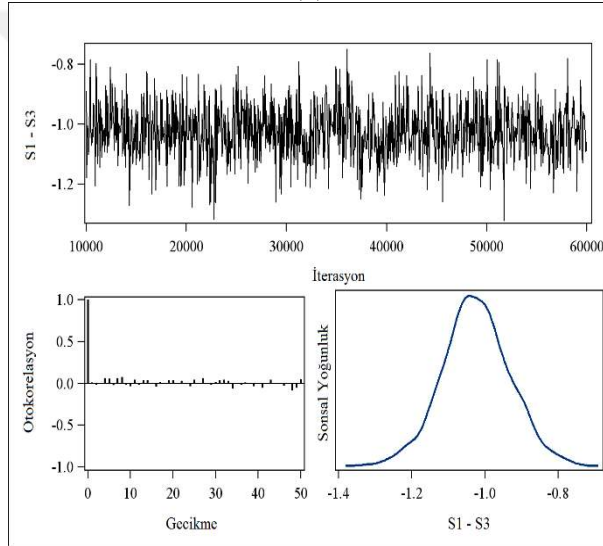


(c)

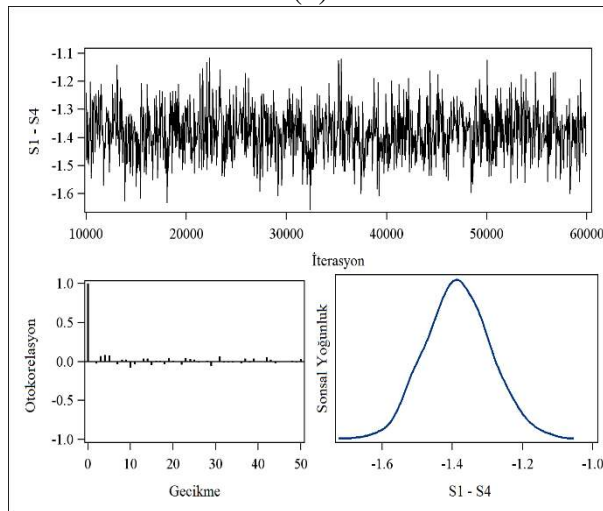
Şekil 4.7.a) S1'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri  
 b) S2'ye ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri  
 c) S3'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri



(a)



(b)

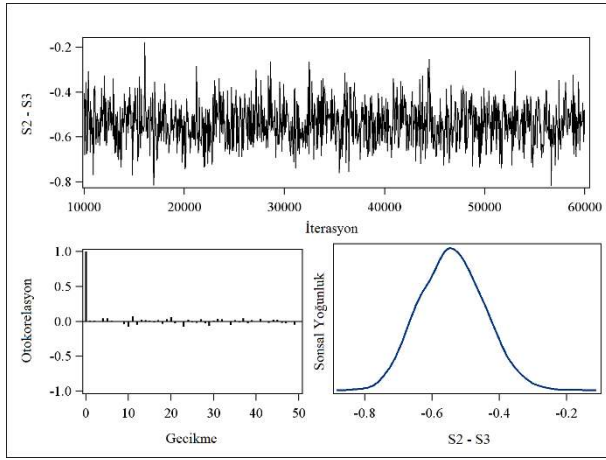


(c)

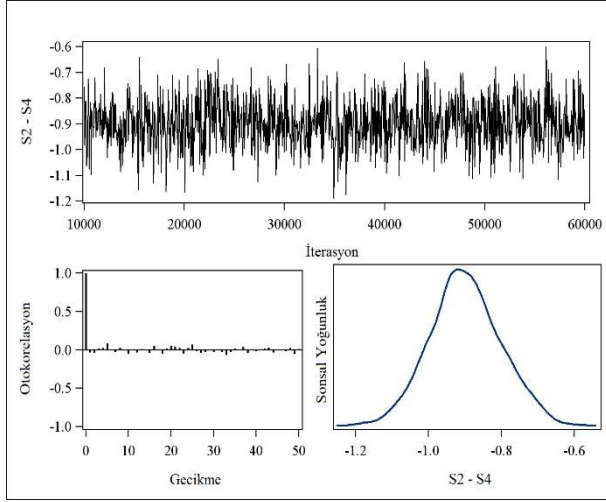
Şekil 4.8.a) S1-S2'ye ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri

b) S1-S3'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri

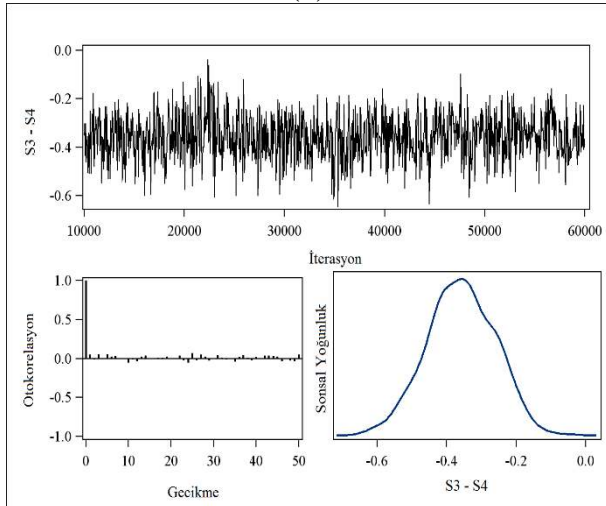
c) S1-S4'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri



(a)



(b)

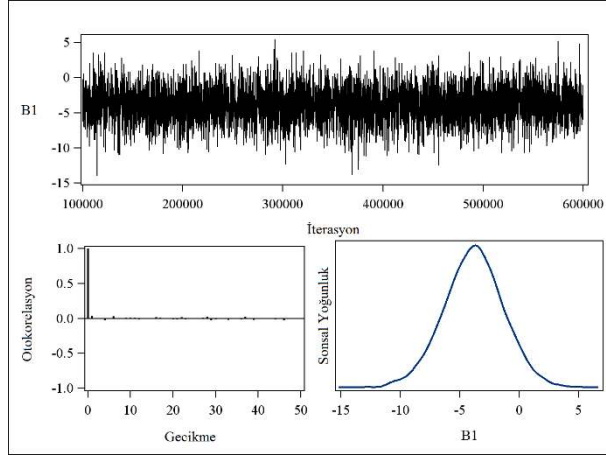


(c)

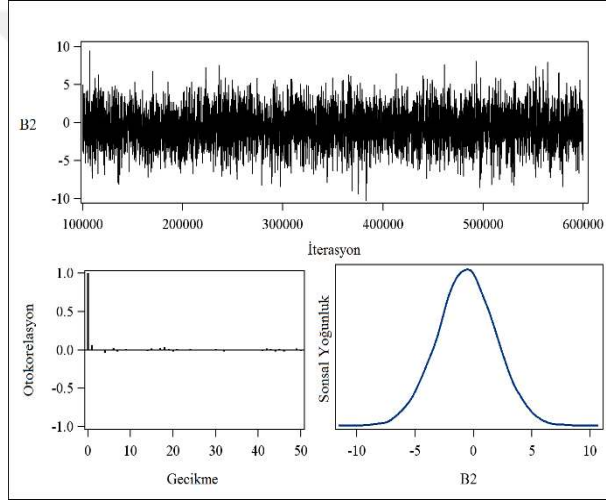
Şekil 4.9.a) S2-S3'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri

b) S2-S4'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri

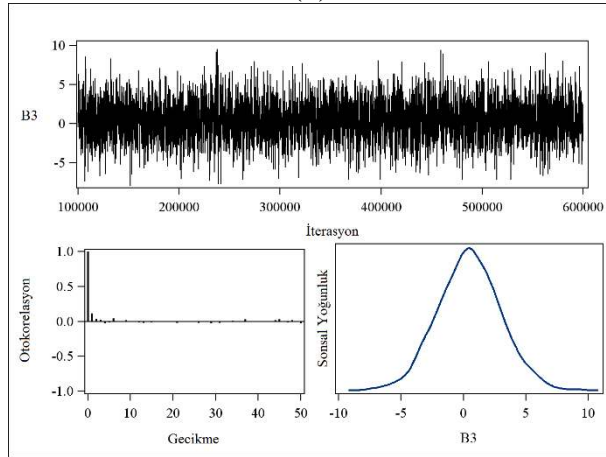
c) S3-S4'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri

**Ek- 7. İz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri**

(a)

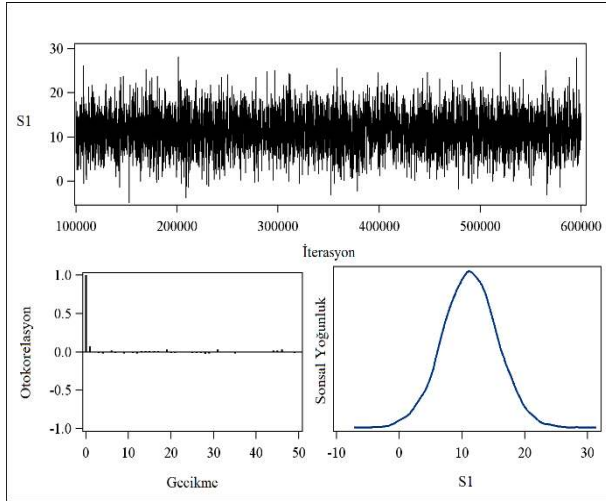


(b)

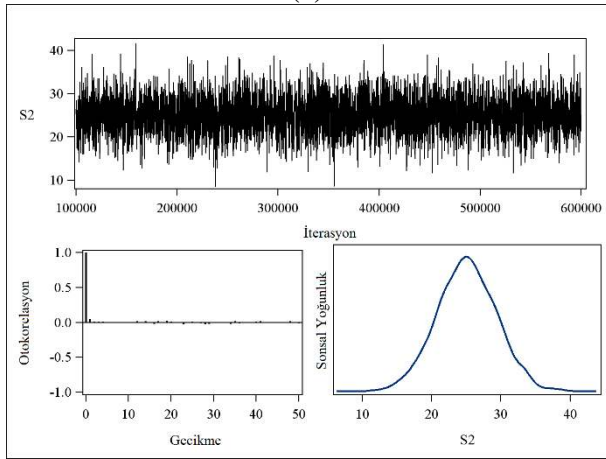


(c)

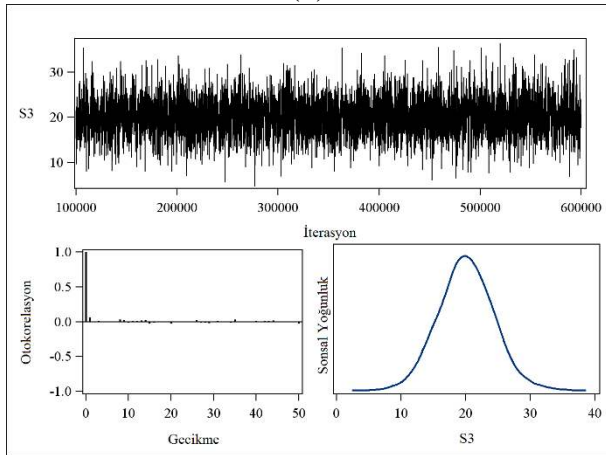
Şekil 4.10.a) B1'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri  
 b) B2'ye ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri  
 c) B3'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri



(a)

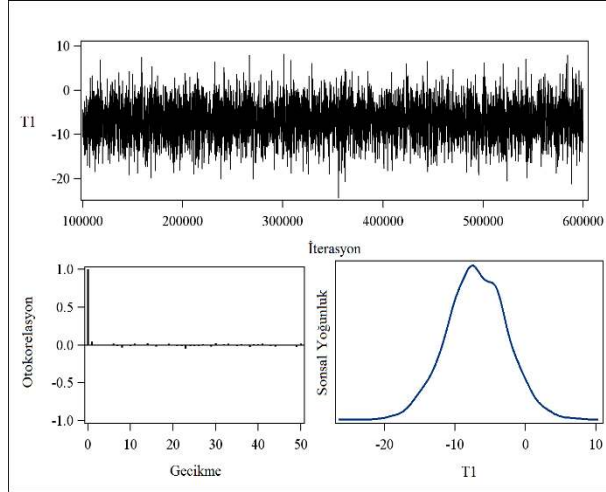


(b)

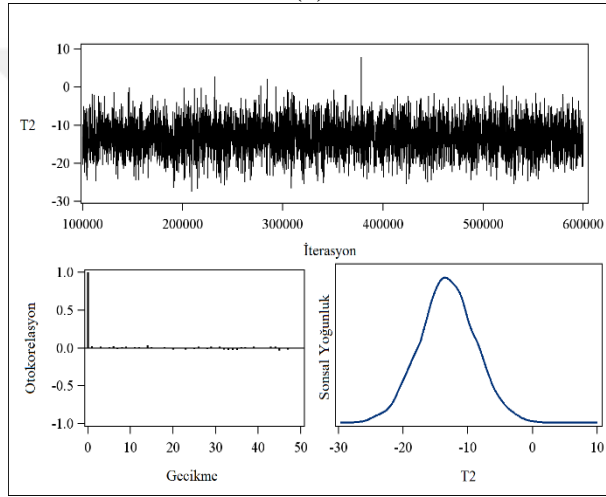


(c)

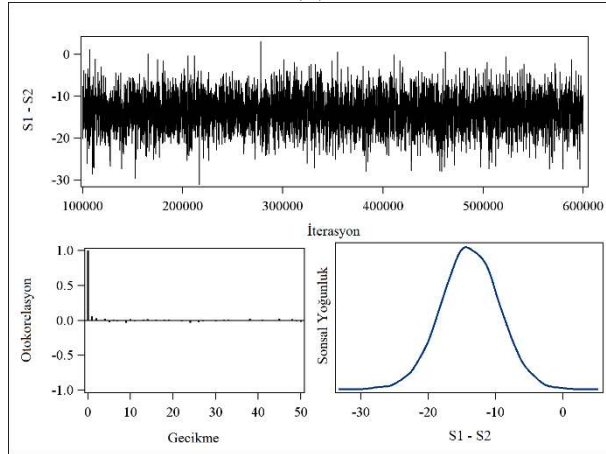
Şekil 4.11.a) S1'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri  
 b) S2'ye ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri  
 c) S3'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri



(a)

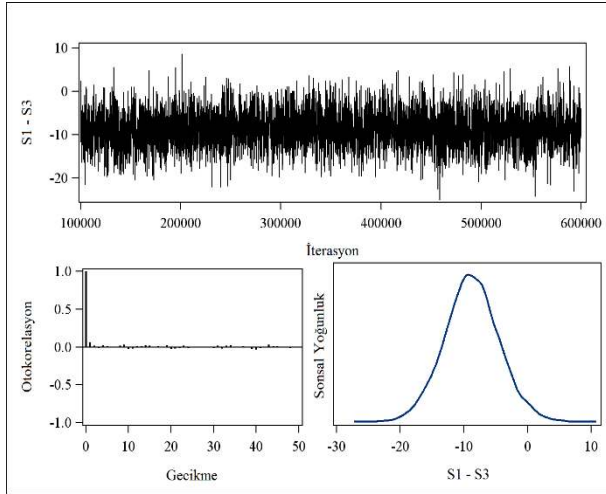


(b)

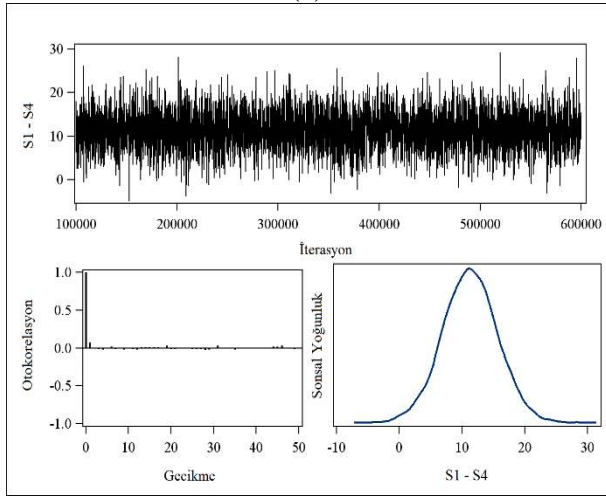


(c)

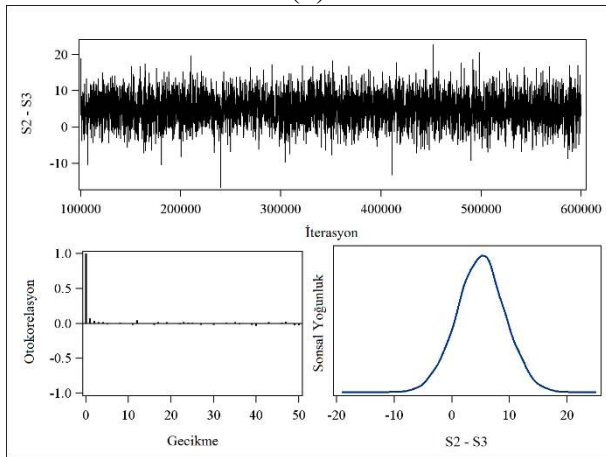
Şekil 4.12.a) T1'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri  
 b) T2'ye ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri  
 c) S1-S2'ye ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri



(a)

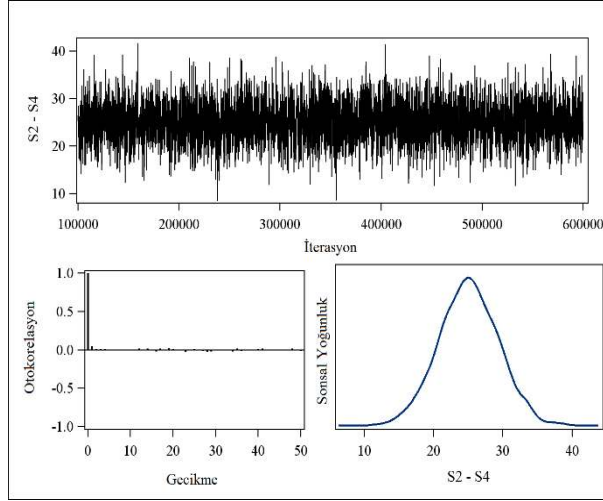


(b)

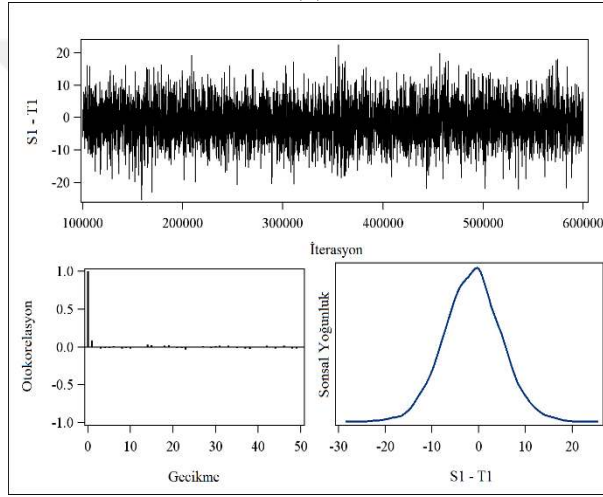


(c)

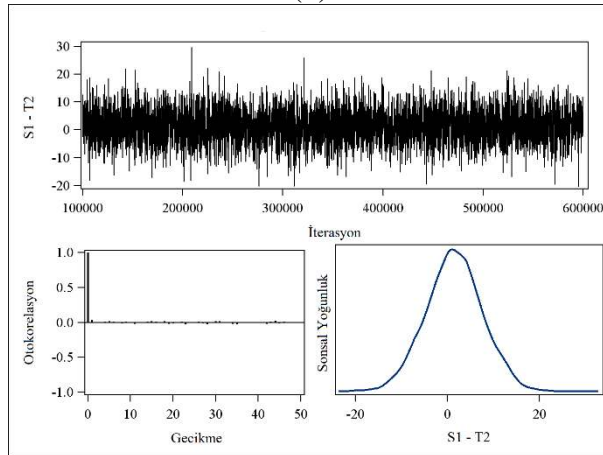
Şekil 4.13.a)  $S1-S3$ 'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri  
 b)  $S1-S4$ 'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri  
 c)  $S2-S3$ 'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri



(a)

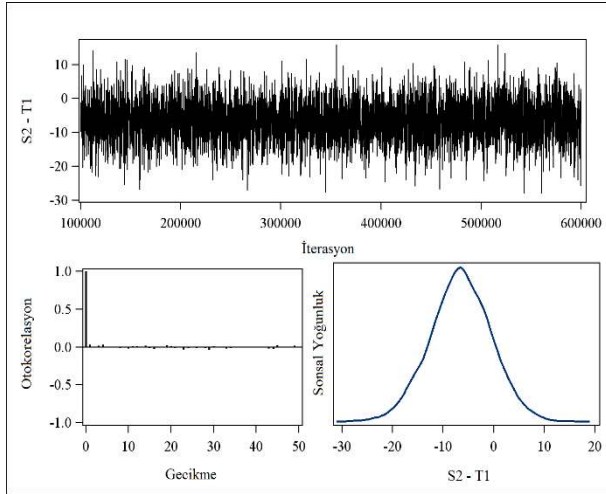


(b)

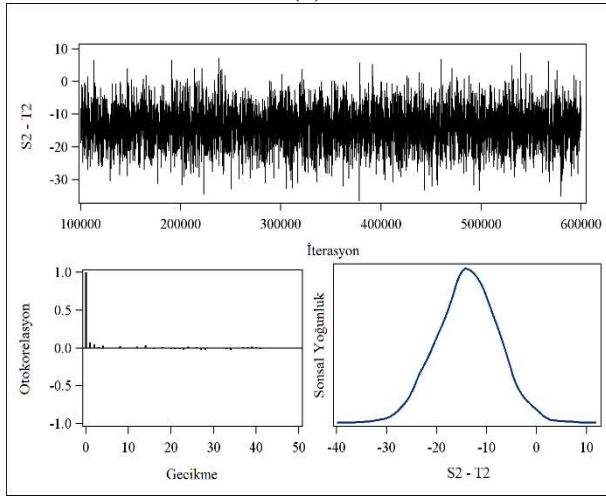


(c)

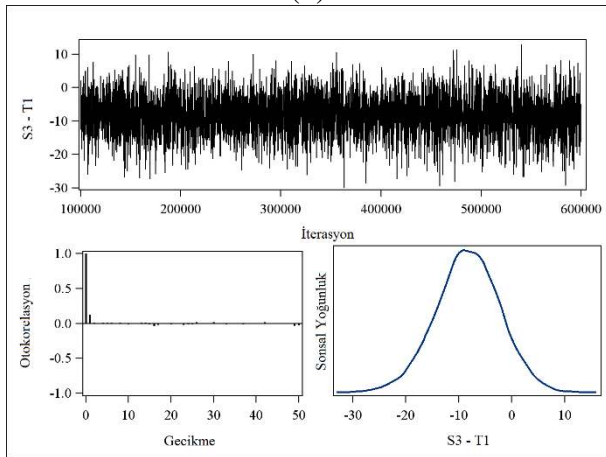
Şekil 4.14.a)  $S2-S4$ 'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri  
 b)  $S1-T1$ 'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri  
 c)  $S1-T2$ 'ye ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri



(a)

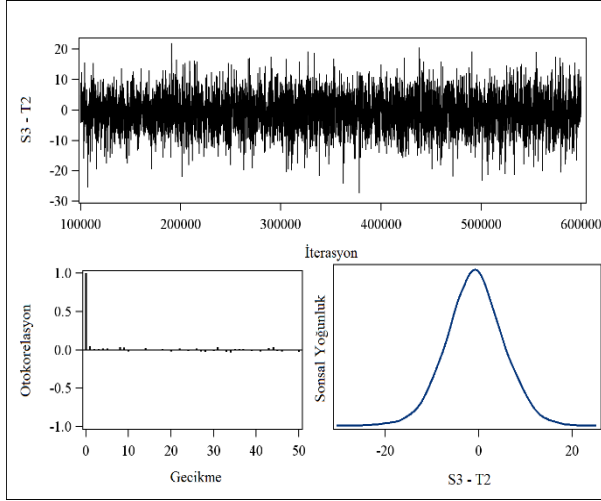


(b)



(c)

Şekil 4.15.a)  $S2 - T1$ 'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri  
 b)  $S2 - T2$ 'ye ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri  
 c)  $S3 - T1$ 'e ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri



Şekil 4.16. S3-T2'ye ait iz, otokorelasyon ve sonsal yoğunluk grafikleri

**Ek-8. Öz Kardeşlerin 305 gün süt verimleri (kg)**

Çizelge 4.12. Öz kardeşlerin 305 gün süt verimleri (kg)

| Boğa | Dişi | Öz kardeşlerin süt verimi |      |              |      |              |      |              |      |
|------|------|---------------------------|------|--------------|------|--------------|------|--------------|------|
|      |      | 1. Veri seti              |      | 2. Veri seti |      | 3. Veri seti |      | 4. Veri seti |      |
| 1    | 1    | 4379                      | 6560 | 6379         | 6560 | 6379         | 6560 | 6679         | 6560 |
|      | 2    | 5560                      | 7733 | 6560         | 6733 | 6560         | 6733 | 6560         | 6333 |
|      | 3    | 4637                      | 5639 | 6637         | 6639 | 6637         | 6639 | 6637         | 6639 |
|      | 4    | 5726                      | 5576 | 6726         | 6576 | 6726         | 6576 | 6826         | 6576 |
|      | 5    | 4968                      | 4574 | 6968         | 6574 | 6968         | 6574 | 6968         | 6574 |
| 2    | 6    | 5355                      | 7057 | 4355         | 4057 | 6355         | 7057 | 6355         | 7057 |
|      | 7    | 4605                      | 4180 | 4605         | 4180 | 6605         | 6180 | 6605         | 6180 |
|      | 8    | 4393                      | 4530 | 4393         | 4530 | 6393         | 6530 | 6393         | 6530 |
|      | 9    | 5195                      | 7024 | 4195         | 4024 | 6195         | 7024 | 6195         | 7024 |
|      | 10   | 6137                      | 4748 | 4137         | 4748 | 6137         | 6748 | 6137         | 6748 |
| 3    | 11   | 6253                      | 6666 | 6253         | 6666 | 6253         | 6666 | 6553         | 6666 |
|      | 12   | 5553                      | 6026 | 6553         | 6026 | 5553         | 6026 | 6453         | 6726 |
|      | 13   | 6268                      | 7575 | 6268         | 6575 | 6268         | 6575 | 6268         | 6575 |
|      | 14   | 7112                      | 6382 | 6112         | 6382 | 7112         | 6382 | 6612         | 6782 |
|      | 15   | 5840                      | 7316 | 6840         | 6316 | 6840         | 7316 | 6840         | 6316 |
| 4    | 16   | 6246                      | 5595 | 5246         | 5595 | 6246         | 6595 | 6946         | 6795 |
|      | 17   | 5400                      | 6440 | 5400         | 5440 | 6400         | 6440 | 6400         | 6440 |
|      | 18   | 7301                      | 6615 | 5301         | 5615 | 7301         | 6615 | 6801         | 6515 |
|      | 19   | 5453                      | 6592 | 5453         | 5592 | 6453         | 6592 | 6453         | 6592 |
|      | 20   | 7374                      | 6693 | 5374         | 5693 | 7374         | 6693 | 6374         | 6693 |

## ÖZGEÇMİŞ



1983 yılında İstanbul'da doğdu. İlk, orta, lise öğrenimini Antalya'da tamamladı. 2002 yılında girdiği Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü'nden 2006 yılında mezun oldu. Şubat 2007-Aralık 2008 yılları arasında, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı. 2009 yılında Akdeniz Üniversitesi Ziraat Fakültesi Zootečni Bölümü'nde doktora öğrenimine başladı ve bu tarihten 2015 Şubat'a kadar aynı bölümde Araştırma Görevlisi olarak görev yaptı.

