

T.C.
ADİYAMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEDAVİ İLE SALGIN HASTALIK MODELLERİNİN
NİTELİKLİ ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NARİN KILINÇ

DOÇ. DR. ÖZLEM AK GÜMÜŞ

ADİYAMAN, 2023

ÖZET

TEDAVİ İLE SALGIN HASTALIK MODELLERİNİN NİTELİKLİ ANALİZİ

NARİN KILINÇ

Matematik Anabilim Dalı

Adıyaman Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Ocak/2023

Doç. Dr. Özlem AK GÜMÜŞ

Bu tezde, tedavi ve göç etkisine maruz kalan bir sürekli SIR salgın hastalık modellerini ayırıklaştırarak elde edilen fark zamanlı SIR salgın hastalık modellerinin kompleks dinamik yapısını analiz ediyoruz. Burada ayırıklaştırma işlemi için ileri Euler metodunu kullanıyoruz. Öncelikle üç boyutlu sistemi iki boyutlu sisteme indirgeyerek modelin denge noktalarının varlığını gösteriyoruz. Ardından, elde edilen denge noktalarından pozitif denge noktasının kararlılık şartlarını, flip çatallanma ve Neimark-Sacker çatallanmanın görünürlüğünü araştırıyoruz. Bu durumu, modelin denge noktalarının topolojik bir sınıflandırmasını yaparak sunuyoruz. Kaos kontrol stratejisini kullanıyoruz. Analitik sonuçları desteklemek için zengin nümerik simülasyonlar gerçekleştiriyoruz. Tüm bu analizleri göçün dinamikler üzerindeki etkisini göstermek için göç içeren ve göç içermeyen modellere uyguluyoruz.

Anahtar Kelimeler: SIR model; Kararlılık; Flip çatallanma; Neimark-Sacker çatallanma; Göç.

ABSTRACT

QUALITATIVE ANALYSIS OF THE EPIDEMIC DISEASE MODELS WITH TREATMENT

NARİN KILINÇ

Department of Mathematics

Adiyaman University, Graduate Education Sciences, January/2023

Assoc. Prof Dr. Özlem AK GÜMÜŞ

In this thesis, we analyze the complex dynamic nature of discrete-time SIR epidemic models obtained by discretizing a continuous SIR epidemic model exposed to treatment and immigration effects. Here we use the forward Euler method for discretization. First of all, we show the existence of equilibrium points of the model by reducing the three-dimensional system to the two-dimensional system. Next, we investigate the stability conditions of the obtained positive equilibrium point, the visibility of Flip and Neimark-Sacker bifurcation. We present this situation by making a topological classification of the equilibrium points of the model. We use the chaos control strategy. We perform numerical simulations to support analytical results. We apply all these analyzes for models with and without immigration to show the effect of immigration on dynamics.

Key Words: SIR model; Stability; Flip bifurcation; Neimark-Sacker bifurcation; Immigration.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans Eğitimim boyunca her daim sabır, hoşgörü ve güler yüz göstererek yardımcı olan, tez hazırlama sürecinde üstün bilgi birikimini aktararak yönlendiren, araştırmaya sevk eden tecrübelerinden faydalandığım ve her zaman göstermiş olduğu desteklerinden dolayı değerli hocam Sayın Doç. Dr. Özlem AK GÜMÜŞ 'e en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Her zaman desteğini esirgemeyen kıymetli aileme sonsuz teşekkür ederim.



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Adıyaman Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Narin KILINÇ

2023/January 30

STATEMENT OF COMPLIANCE WITH ETHICAL PRINCIPLES AND RULES

I hereby truthfully declare that this thesis is an original work prepared by me; that I have behaved in accordance with the scientific ethical principles and rules throughout the stages of preparation, data collection, analysis and presentation of my work; that I have cited the sources of all the data and information that could be obtained within the scope of this study, and included these sources in the references section; and that this study has been scanned for plagiarism with “scientific plagiarism detection program” used by Adıyaman University, and that “it does not have any plagiarism” whatsoever. I also declare that, if a case contrary to my declaration is detected in my work at any time, I hereby express my consent to all the ethical and legal consequences that are involved.

Narin KILINÇ

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
BAŞLIK SAYFASI.....	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI.....	ii
FINAL APPROVAL FOR THESIS.....	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	vii
STATEMENT OF COMPLIANCE WITH ETHICAL PRINCIPLES AND RULES.....	viii
İÇİNDEKİLER.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xii
TABLOLAR DİZİNİ.....	xiv
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	5
3. TEMEL TANIM VE SONUÇLAR.....	11
3.1. Birinci Basamaktan Lineer Fark Denklemleri	15
3.2. İkinci Basamaktan Lineer Fark Denklemleri	16
3.3. k . Basamaktan Lineer Fark Denklemleri	18
3.4. Sabit Katsayılı Lineer Homojen Sistemler	25
3.5. Vektör Fark Denklemleri	27
3.6. k . Basamaktan Skaler Lineer Homojen Denklemler	29
3.7. Birinci Basamaktan Lineer Olmayan Otonom Fark Denklemleri	32
3.8. Lineerleştirme Yöntemi	35
4. MATERYAL VE METOT.....	37
4.1. Birinci Dereceden Sistemlerde Kararlılık	39
4.2. İleri Euler Yöntemi	43
5. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	44
5.1. Doymuş Ve Kitle Eylemi İnsidans Oranlarına Bağlı Salgın Hastalık Modellerinin Tedavi İle Analizi	44

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
5.2. Tedavi İle Kitle-Eylem İnsidans Oranına Bağlı (5.4) SIR Salgın Modelinin Analizi.....	46
5.3. Tedavi İle Doymuş İnsidans Oranına Bağlı SIR Salgın Modelinin Analizi.....	48
5.4. Tedavi İle Göç İçeren SIR Salgın Hastalık Modelinin Analizi.....	49
5.4.1. Lokal kararlılık.....	50
5.4.2. Flip çatallanma analizi.....	52
5.4.3. Neimark-Sacker çatallanmasının analizi.....	53
5.5. Kaos Kontrol.....	54
5.5.1. (5.4) Modeli için kaos kontrol analizi.....	54
5.5.2. (5.6) Modeli için kaos kontrol analizi.....	56
6. NÜMERİK SİMÜLASYONLAR.....	57
7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	67
KAYNAKÇA.....	68
ÖZGEÇMİŞ	

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\Re$	: Reel Sayılar
$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar
d	: Popülasyondaki doğal ölüm oranı
γ	: Enfekte bireylerin doğal iyileşme oranı
ε	: Hastalığa bağlı ölüm oranı
A	: Doğum yoluyla popülasyona eklenen bireyler
λ	: Enfeksiyon katsayısı
k	: Tedavi fonksiyonu
z	: İyileşme, hastalığa bağlı ve doğal ölüm oranları toplamı
δ	: Ayrıklaştırma adımı
J	: Jakobiyen matris
μ, λ	: Karakteristik kökler
S	: Hastalığa henüz yakalanmamış ve yakalanmaya açık sağlıklı bireyler
I	: Hasta olmuş bireyler
R	: İyileşen ve hastalığa bağışıklık kazanan bireyler
E	: Hastalığı taşıyan ama bulaştırmayan bireyler
M	: Pasif bağışıklığa sahip olanlardan oluşan popülasyon
(S^*, I^*)	: Sistemin pozitif denge noktası
$F(\mu), F(\lambda)$	: Karakteristik polinomlar
$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial x}$	: f ve g fonksiyonlarının x değişkenine göre kısmi türevleri
SI	: S, I değerlerinin olduğu model tipi
SIS	: S, I, S değerlerinin olduğu model tipi
SIR	: S, I, R değerlerinin olduğu model tipi
$SIRS$	: S, I, R, S değerlerinin olduğu model tipi
$SEIR$	: S, E, I, R değerlerinin olduğu model tipi
$MSEIR$	: M, S, E, I, R değerlerinin olduğu model tipi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 6.1-(a). $A = 3; d = 0.1; k = 0.2; z = 0.3; \lambda = 1; \delta = 0.3665$ ve $(x_0, y_0) = (2.1, 0.9)$ parametre değerleri ile (6.1) sisteminin zaman serisi grafiği.....	58
Şekil 6.1-(b). $A = 3; d = 0.1; k = 0.2; z = 0.3; \lambda = 1; \delta = 0.4$ ve $(x_0, y_0) = (2.1, 0.9)$ parametre değerleri ile (6.1) sistemin zaman serisi grafiği.....	58
Şekil 6.2-(a). $A = 3; d = 0.1; k = 0.2; z = 0.3; \lambda = 1; \delta = 0.3665$ ve $(x_0, y_0) = (2.1, 0.9)$ parametre değerleri ile (6.1) sisteminin faz grafiği.....	58
Şekil 6.2-(b). $A = 3; d = 0.1; k = 0.2; z = 0.3; \lambda = 1; \delta = 0.4$ ve $(x_0, y_0) = (2.1, 0.9)$ parametre değerleri ile (6.1) sistemin faz grafiği.....	58
Şekil 6.3. $A = 3; d = 0.1; k = 0.2; z = 0.3; \lambda = 1; \delta = 0.3665$ ve $(x_0, y_0) = (0.1, 0.1)$ parametre değerleri ile (6.1) sistemin flip çatallanma grafiği.....	59
Şekil 6.4. $A = 3; d = 0.5; k = 0.2; z = 0.3; \lambda = 1; \delta = 0.3665$ ve $(x_0, y_0) = (2.1, 0.9)$ parametre değerleri ile (6.2) sisteminin Neimark-sacker çatallanma grafiği.....	59
Şekil 6.5. $A = \frac{1}{2}; \lambda = 1; k = 0.5; z = 0.5; d = 0.1; \delta = 1$ ve $(x_0, y_0) = (1, 1)$ parametre değerleri ile (6.3) sisteminin zaman serisi grafiği.....	60
Şekil 6.6. $A = \frac{1}{2}; \lambda = 1; k = 0.5; z = 0.5; d = 0.1; \delta = 1; \alpha = 0.1$ ve $(x_0, y_0) = (1, 1)$ parametre değerleri ile (6.4) sisteminin zaman serisi grafiği.....	61
Şekil 6.7-(a). $A = 3; d = 0.1; k = 0.2; z = 0.3; \lambda = 1; p = 0.01; q = 0.1$ ve $\delta = 0.289$, $(x_0, y_0) = (2.1, 0.9)$ parametre değerleri ile (6.5) sisteminin zaman serisi grafiği.....	61
Şekil 6.7-(b). $A = 3; d = 0.1; k = 0.2; z = 0.3; \lambda = 1; p = 0.01; q = 0.1$ ve $\delta = 0.32$ $(x_0, y_0) = (2.1, 0.9)$ parametre değerleri ile (6.5) sisteminin zaman serisi grafiği.....	61
Şekil 6.8-(a). $A = 3; d = 0.1; k = 0.2; z = 0.3; \lambda = 1; p = 0.01; q = 0.1$, $\delta = 0.29$, $(x_0, y_0) = (2.1, 0.9)$ parametre değerleri ile (6.5) sisteminin faz grafiği.....	62

Şekil 6.8-(b). $A = 3; d = 0.1; k = 0.2; z = 0.3; \lambda = 1; p = 0.01; q = 0.1,$ $\delta = 0.35, (x_0, y_0) = (2.1, 0.9)$ parametre değerleri ile (6.5) sisteminin faz grafiği.....	62
Şekil 6.9-(a). $A = 3; d = 0.1; k = 0.2; z = 0.3; \lambda = 1; p = 0.2; q = 0.1$ ve $\delta = 0.287, (x_0, y_0) = (2.1, 0.9)$ parametre değerleri ile (6.6) sisteminin zaman serisi grafiği.....	63
Şekil 6.9-(b). $A = 3; d = 0.1; k = 0.2; z = 0.3; \lambda = 1; p = 0.2; q = 0.1$ ve $\delta = 0.31, (x_0, y_0) = (2.1, 0.9)$ parametre değerleri ile (6.6) sisteminin zaman serisi grafiği.....	63
Şekil 6.10-(a). $A = 3; d = 0.1; k = 0.2; z = 0.3; \lambda = 1; p = 0.2; q = 0.1,$ $\delta = 0.29, (x_0, y_0) = (2.1, 0.9)$ parametre değerleri ile (6.6) sisteminin faz grafiği.....	63
Şekil 6.10-(b). $A = 3; d = 0.1; k = 0.2; z = 0.3; \lambda = 1; p = 0.2; q = 0.1,$ $\delta = 0.35, (x_0, y_0) = (2.1, 0.9)$ parametre değerleri ile (6.6) sisteminin faz grafiği.....	63
Şekil 6.11-(a). $A = 3; d = 0.1; k = 0.2; z = 0.3; \lambda = 1; p = 0.01; q = 0.1,$ $0 < \delta < 0.35, (x_0, y_0) = (2.1, 0.9)$ parametre değerleri ile (6.5) sisteminin flip çatallanma grafiği.....	64
Şekil 6.11-(b). $A = 3; d = 0.1; k = 0.2; z = 0.3; \lambda = 1; p = 0.2; q = 0.1,$ $0 < \delta < 0.32, (x_0, y_0) = (2.1, 0.9)$ parametre değerleri ile (6.6) sisteminin flip çatallanma grafiği.....	64
Şekil 6.12-(a). $A = 3; d = 0.1; k = 1; z = 1; \lambda = 1; p = 0.01; q = 0.1, 0 < \delta < 0.55$ $\delta = 0.5581, (x_0, y_0) = (2.1, 0.9)$ parametre değerleri (6.5) sisteminin Neimark-sacker çatallanma grafiği.....	64
Şekil 6.12-(b). $A = 3; d = 0.1; k = 1; z = 1; \lambda = 1; p = 0.2; q = 0.1, 0 < \delta < 0.5$ $\delta = 0.4949$ ve $(x_0, y_0) = (2.1, 0.9)$ parametre değerleri ile (6.6) sisteminin Neimark-sacker çatallanma grafiği.....	64
Şekil 6.13. $A = 3; d = 0.1; k = 1; z = 1; \lambda = 1; \delta = 0.52$ parametre değerleri ile (5.4) sisteminin kaos kontrol grafiği.....	65
Şekil 6.14. $A = 3; d = 0.1; k = 1; z = 1; \lambda = 1; p = 0.01; q = 0.1; \delta = 0.5$ parametre değerleri ile (5.6) sisteminin kaos kontrol grafiği.....	66

TABLÖLAR DİZİNİ

Sayfa

Tablo 5.1. Parametrelerin Epidemiyojik Anlamları.....	45
--	----



1.GİRİŞ

Dünyadaki canlılar birbirlerine doğrudan ya da dolaylı olarak bağlıdırlar. Bir canlı grubundaki sayısal değişim diğer canlı gruplarının sayısında değişime yol açmaktadır. Hayatı dengede tutan bu bağdan dolayı canlı nüfusundaki sayısal değişimi incelemek önem arz etmektedir. Nüfus; salgın hastalıklar, aşırı avlanma ve toplu göç vb. faktörlerden etkilenmektedir. Özellikle de salgın hastalıklar nüfus istatistiğini değiştiren faktörlerin başında gelmektedir. Pandemi; dünyada çok hızlı bir şekilde geniş alana yayılan ve birden fazla ülkeyi etkisi altına alan salgın hastalıkların genel adı olarak ifade edilmektedir. Bir hastalığın pandemi sayılabilmesi için üç kriterinin olması gerektiği bilinir. Bunlar, ortaya çıkan yeni bir virüsün olması veya mutasyona uğramış bir etkenin olması, bireylere kolayca yayılabilmesi, insandan insana çok kolay ve sürekli bir biçimde bulaşması sayılabilir.

Veba, AIDS, Kolera, Ebola, Çiçek Hastalığı, İspanyol Gribi ve günümüzde yaşadığımız Covid-19 ve diğer salgınlar dünya üzerinde büyük kayıplara yol açan salgın hastalıklardır. Bu hastalıklardan sırasıyla bahsederek, salgın hastalıklar hakkında bilgi sahibi olmak yararlı olacaktır. Veba ‘kara ölüm’ olarak da bilinmektedir. Ateş, baş ağrısı, halsizlik ve nefes darlığı veba hastalığının belirtileri olarak bildirilmiştir. Veba hastalığının, pirelerin insanları ısırmasıyla geçtiği bilinmekle beraber enfekte olan bireyden duyarlı olan bireye bulaştığı da bilinmektedir. HIV hastalığı; ‘insan bağışıklığı yetmezliği virüsü’ olarak tanımlanmaktadır. HIV virüsü bağışıklık sistemindeki hücrelere zarar vererek bağışıklık sistemini zayıflatan ve bunun etkisiyle kişinin diğer hastalıklarla savaşma yeteneğini etkileyen bir virüstür. HIV enfeksiyonundan etkilenen kişi; iki ila altı hafta sonra hasta olup, bir veya iki hafta süren kısa süreli gribe benzer bir hastalık yaşadığı gözlemlenmiştir. Bu belirtiler son bulduktan sonra HIV virüsü bağışıklık sistemini çökertmeye devam etse de uzun yıllar herhangi yeni bir belirtiye neden olmadığı bilinmekle beraber bu virüs insanlarda bağışıklık sistemini çökerterek AIDS hastalığına sebep olduğu gözlemlenmiştir. Kolera ise ‘Vibrio cholerae’ adlı bakterinin neden olduğu akut ve şiddetli ishale sebep olan hastalık olduğu gözlemlenmiş ve geçmişte birçok ülkede salgına neden olmuştur. Ülkemizde yaşanan en büyük kolera salgını Balkan Savaşları sırasında yaşanmış olduğu bilinir. Kolera bakterisi ile bulaşmış yiyecekleri yiyen veya suyu yutan kişilere hastalığın bulaşacağı bildirilmektedir. Ebola virüsü insanlarda virüs kaynaklı olan kanamalı ateş gibi komplikasyonlara sebebiyet vermektedir. Ebola hastalığının ana belirtileri ateş, şiddetli baş ağrısı ve eklem ağrıları olarak

gözükmektedir. Çiçek hastalığı, binlerce yıldır insanları etkileyen bulaşıcı, şekil bozucu ve genellikle ölümcül bir hastalık olmakla birlikte bu hastalığın ilk belirtileri enfeksiyon kaptıktan 10 ile 14 gün sonra ortaya çıktığı görülmüştür. Ateş, baş ağrısı, halsizlik, şiddetli sırt ağrısı Çiçek hastalığının belirtileri olarak sayılmaktadır. Çiçek hastalığında çiçek virüsü, hastaya temasla, hastaya ait eşyaların kullanımıyla, solumayla veya sineklerle bulaşmaktadır. Tarihteki ilk aşının çiçek aşısı olduğu bilinmektedir. Yakın tarihte yaşanmış salgınlar ise SARS 2003 gribi, A H1N5 (kuş gribi) 2007 gribi, A H1N1 (domuz gribi) 2009, MERS 2012 gribi, A H7N9 2013 ve son olarak ta günümüzdeki SARS-COV-2 (COVID-19). Bir solunum yolu hastalığı olan COVID-19, başta 2019 yılının Aralık ayında Çin'in Wuhan şehrinde ortaya çıkmıştır. Ana belirtileri; yorgunluk, ateş, kuru öksürük, nefes darlığı ve kas ağrısıdır. Şu an bazı modifikasyonları ile devam eden SARS-COV-2, 2019 yılında Dünya Sağlık Örgütü (WHO) tarafından Coronavirus Hastalığı (COVID-19) olarak isimlendirilmiştir. Hızlı bir şekilde bulaşarak birçok ülkeye yayılan bu salgın, 11 Mart 2020 tarihinde 4000'den fazla insanın ölümüne yol açmış bu yüzden pandemi olarak ilan edilmiştir. Günümüzün son salgın hastalığının Covid-19 olduğunu söylesek de insan hayatı devam ettiği sürece salgın hastalıkların var olacağı gerçeğini yok sayamayız. Çünkü Covid-19 pandemisinde olduğu gibi insanoğlu uzun yıllardan beri salgın hastalıklarla mücadele vermektedir. Hastalıkların tahmini, yayılma durumlarının incelenmesi, hastalıklarla mücadelede ve onların kontrol altına alınması şu an ve gelecekte karşımıza çıkabilecek salgın hastalıklarla başa çıkabilmek için önem arz etmektedir. Uygun tedavi ve aşılama gibi durumların hastalığı önlemede ve ölüm oranlarını azaltmada etkisinin büyük olduğu tartışmasız kabul edilmektedir. Bunun yanında izolasyon ve karantina uygulaması salgın hastalıkların yayılmasını önlemede destek verici nitelikteki durumlardır.

Günümüzde matematiksel mantıkla kurulan modeller sayesinde nüfus değişimi ve hastalıkların gidişatını tahmin etmek mümkündür. Salgın hastalık modelleri [1,2,3-5 ve buradaki referanslar], av-avcı modelleri [6-11], konukçu parazitoid modeller [8,12,13], balık popülasyon modelleri [14,15] ve göç etkili modeller [16-21] yoğun olarak çalışılan modellerdendir. Salgın hastalıklar, nüfus değişimi üzerinde önemli bir etkiye sahip olduğu için matematiksel modeller yardımıyla hastalıklar üzerine sonuçlar çıkarmak önemlidir. Bu nedenle hastalıkların modellenmesi ve bu modellerin analizi çalışmaları özellikle son yıllarda oldukça popüler hale geldi. Aynı zamanda kuş gribi, domuz gribi, Zika, Ebola, SARS, MERS, Covid-19 gibi hastalıkların modellenmesi ve analizi sayesinde hastalık

sürecinin kontrolü için de sonuçlar elde etmek mümkün oldu. Hastalıkların süreçleri SI, SIS, SIR, SIRS, SEIR, SEIRS, MSEIR ve MSEIRS vb. uygun modeller ile temsil edilerek hastalıklar ayrıntılı bir biçimde incelenmeye çalışılmıştır. Bu matematiksel modeller fark ya da sürekli zaman modelleri ile ifade edilirler. Fark zamanlı modeller fark denklemleri ile oluşturulurken, sürekli zaman modelleri ise diferansiyel denklemlerle oluşturulmaktadır. Bu modellerin modifiye edilmiş versiyonları ile popülasyonların davranışları ve bu davranışlara bağlı olarak ortaya çıkan sonuçlar ayrıntılı bir şekilde analiz edilmeye çalışılır. Bir çok çalışma sürekli [22] ve fark zamanlı modellerde [1,2,6-9,23] kompleks davranışlar ve bu kaotik davranışların kontrolünü içerir ([6,8,23]ve buradaki referanslar).

Hastalık için belirli zamanlarda ortaya çıkan değişimler sebebiyle hastalığın örneklendirilmesine uygun olan fark zamanlı modellerin kullanımı artmıştır. Özellikle son yıllarda fark denklemlerine dayalı fark zamanlı modeller, salgın hastalıkların modellenmesinde ve analiz edilmesinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Matematiksel modellerin analiz edilmesi kadar hastalıklar üzerine elde edilen teorik bilgileri doğrulamakta bir o kadar önemlidir. Diferansiyel denklem veya sistemler ayrıştırılarak fark modeli olarak da ifade ve analiz edilebilirler [5,6].

Bireyler arasındaki etkileşimin değişen oranları hastalığın seyrini etkiler. Salgın hastalıkların yayılmasında etkileşimin en aza indirilmesi beklenir. Bir kişinin belirli bir süre içinde bir hastalığa yakalanma olasılığını belirleyen hastalık ölçüsü “insidans” olarak tanımlanır. Yani insidans, bir hastalığın yeni teşhis edilen vakalarının sayısıdır. Bazı epidemiyologlar insidansı bir topluluktaki yeni vaka sayısını belirtmek için kullansa da; diğerleri insidansı, nüfus birimi başına yeni vaka sayısını belirtmek için kullanır. Literatür incelendiğinde bilinear insidans oranı [24-26], lineer olmayan (doymuş) insidans oranı [27-30] ya da standart insidans oranı [26,31] göz önüne alınarak salgın hastalık modellerinin dinamikleri incelenmiştir. Farklı insidans oranlarına bağlı olarak ele alınan hastalık modellerinde tedavinin etkilerini görmek için farklı tedavi fonksiyonları modele dahil edilmiştir. Hastalığa bağlı olarak farklı tedavi olanakları için sabit, doğrusal ya da doymuş tedavi fonksiyonları ile çalışılmıştır [24,28-30,32].

Bu tez çalışmasında amacımız tedavi ile kitle-eylem (bilinear) insidansı ve doymuş (lineer olmayan) insidans etkileşim oranlarına bağlı olan ve göç içeren sürekli SIR salgın hastalık modelini İleri Euler Yöntemi ile ayrıklaştırarak analiz edip, dinamiklerini

incelemektir. Elde edilen sonuçlar SageMath [33] kullanılarak nümerik simülasyonlarla desteklenir.



2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde Referanslar kısmında verilen makalelerin içerikleri ile ilgili bilgilerin verilmesi amaçlanmıştır. Böylece çalışma konumuzun seçimi ve analizinin daha iyi anlaşılması sağlanacaktır.

Gümüş ve diğerleri [1] çalışmalarında fark zamanlı SIR salgın modelinin hastalıklı ve hastaliksız denge noktalarının asimptotik kararlılığını incelemişlerdir. Ayrıca period-doubling çatallanmanın ortaya çıkmasını sağlayan durumlar ile birlikte sonuçlarını faz portreleri ve çatallanma diyagramlarını sunarak doğrulamışlardır. Gümüş ve Acer [2] tarafından yapılan çalışmada, enfekte bireylerin durumunu belirleyen eşik parametresini bulmayı ve enfekte bireylerin sayısını belirlemeyi amaçlamışlardır. Öncelikle ele aldıkları fark zamanlı salgın modelinin denge noktalarının varlığını araştırmışlar ve hasta birey sayısına göre tek bir pozitif denge noktasının varlığını belirlemişlerdir. Ardından, lokal asimptotik kararlılık koşulları, eşik parametresine göre incelemişlerdir. Modelin denge noktalarının davranışlarını açıklamak için topolojik bir sınıflandırma yapılmıştır. Son olarak verilen modelde “period-doubling” çatallanmanın oluşum koşulları elde edilmiş ve SageMath kullanılarak elde edilen teorik sonuçlar nümerik örneklerle doğrulanmıştır. Gümüş ve diğerleri [3] çalışmalarında aşılama etkisini içeren fark zamanlı bir salgın modelin hastalıklı denge noktasının lokal ve global kararlılığını incelemişlerdir. Belirli parametre değerlerine göre elde edilen sayısal sonuçların, fark modelinin çoklu periyodik yörüngelere, yarı periyodik yörüngelere ve kaotik davranışlar dahil olmak üzere daha karmaşık dinamik davranışları ortaya çıkaracağını göstermişlerdir. Kaotik davranışı destekleyen Maksimum Lyapunov üsteli hesabına bağlı diyagramlar verilmiştir. Gümüş ve diğerleri [4] çalışmalarında COVID-19'a karşı sürü bağışıklığının sağlanabileceği iddialarının aksine, tedaviye yanıt veren çoğu hastanın iyileştikten sonra bağışıklığını da kaybedebileceği fikrine dayanan tedavi işlevine sahip yeni bir değiştirilmiş SIRS modeli düşünmüşler ve bu modelin nitelikli analizini yapmışlardır. Gümüş ve Baran [5] çalışmalarında tedavisiz ve tedavi fonksiyonlu SIR salgın hastalık modelinin kararlılık ve flip çatallanmasını araştırmışlardır. Elde edilen sonuçlar nümerik simülasyonlarla doğrulanmıştır. Gümüş ve Feckan [6] çalışmalarında hasat etkisine maruz kalan sürekli bir av-avcı modelini ileri Euler metoduyla ayırıştırarak elde edilen modelin dinamik davranışını araştırmışlardır. Modelin denge noktalarının kararlılık şartlarını sunmuşlar ve ayrıca merkez manifold teoremi ve çatallanma teorisini kullanarak modelin Neimark-Sacker çatallanmasına maruz kaldığını

göstermişlerdir. Neimark-Sacker çatallanmasını kontrol etmek için kontrol stratejisi kullanırlar. Elde edilen teorik sonuçları göstermek için sayısal simülasyonlara yer verirler. Gümüş [7] çalışmasında avın avcıya dönüşme etkinliğine ve avcının üremeye başlamadan önce av tüketimine tabi olan gereken minimum eşiği gözönüne alarak fark zamanlı bir av-avcı sistemin kararlılığını ve çatallanmasını araştırmıştır. Modelin av-avcı sayısına bağlı olan tek pozitif denge noktasında Neimark-Sacker çatallanmasına maruz kaldığı sonucuna varmıştır. Ayrıca teorik sonuçları göstermek için sayısal örnekler vermiştir. Din ve diğerleri [8] çalışmalarında değiştirilmiş ayırık zamanlı bir konakçı-parazitoid modelinin pozitif denge noktasının var olduğu ve pozitif denge noktasının tekliği araştırılarak, ele alınan modelin kararlılık ve Neimark-sacker çatallanma analizi yapılarak modelin kaotik davranışını incelemişlerdir. Kaos kontrol stratejisi kullanmışlardır ve elde edilen tüm sonuçları sayısal örneklerle desteklemişlerdir. Din [9] çalışmasında birim kare başına büyüme oranına bağlı modelde holling tip 2 fonksiyonel cevap kullanarak değiştirilmiş bir av-avcı modelinin niteliksel davranışını incelemiştir. Sürekli av-avcı sisteminin ayrıklaştırarak çözümlerin pozitifliği, sınırlılığı ve denge noktasının lokal asimptotik kararlılığını araştırmıştır. Önerilen modelin zengin dinamiklerini sunmuştur. Ayrıca, ayırık zamanlı bir av-avcı model durumunda çözümlerin sınırlılığı ve dengenin lokal asimptotik kararlılığı araştırılmıştır. Merkez manifold teoremi ve çatallanma teorisi yardımıyla kesikli-zaman modelinin period-doubling ve Neimark-sacker çatallanmasına maruz kalıp kalmadığını araştırmıştır. Son olarak, çatallanmalar için hibrit geribildirim kontrol yöntemi ve sayısal simülasyonlar sunmuştur. Selvam ve Janagaraj [10] çalışmalarında fonksiyonel tepki ile kesirli dereceli fark av-avcı sistemin denge noktalarının kararlılık durumlarını incelemişlerdir. Teorik sonuçların daha iyi anlaşılmasını sağlayan sayısal örnekler vererek zengin dinamikler sunmuşlardır. Selvam ve diğerleri [11] çalışmalarında Allee etkisi ve Holling tip II tepkisi ile Gauss tipi bir kesirli dereceli av-avcı modelinin kararlılık koşullarını elde etmişlerdir. Ayrıca sistemin flip ve Neimark-Sacker çatallanma ürettiğini göstermişlerdir. Bu ele alınan ayrıklaştırılmış sistemin karşılık geldiği sürekli versiyonundan çok daha zengin ve karmaşık dinamikler sergilediği ortaya çıkarılmıştır. Gümüş ve diğerleri [12] çalışmalarında Allee etkisine maruz kalan bir konukçu-parazitoid modelinin dinamik davranışını çalışmışlardır. Önerilen konukçu-parazitoid modelinin denge noktaları hesaplanmış ve bu denge noktalarının kararlılık durumları analiz edilmiştir. Teorik bulgular, sayısal örneklerle desteklenmiş ve zaman serisi diyagramları çatallanma diyagramları, faz portreleri ile çalışma

zenginleştirilmiştir. Gümüş ve Bilgi [13] çalışmalarında Pennycuick büyüme formuna bağlı bir konukçu-parazitoid modeli önermişler ve bu modelin denge noktalarının kararlılığını araştırmışlardır. Dahası göç parametresi ve Allee etkisine maruz kalan konukçu-parazitoid modelinin denge noktalarının kararlılıkları incelenerek bazı sonuçlara varılmıştır. Gümüş ve diğerleri [14] çalışmalarında hasat ile fark zamanlı bir popülasyon modelinin kompleks dinamik davranışını incelemişlerdir. Çatallanma ve kaos kontrol durumu ve maksimum Lyapunov üsleri hesabı bu dinamik davranışı göstermek için diyagramlar ile sunulmuştur. Gümüş [15] çalışmasında Allee etkisi ile ve bu etki olmadan doğrusal olmayan fark zamanlı bir popülasyon modelinin denge noktasının lokal ve global kararlılığını araştırmıştır. Li ve diğerleri [16] maruz kalan, enfekte ve iyileşmiş dönemdeki bulaşıcı güce sahip bir SEIR salgın modelini analiz etmişlerdir. Jian-quan ve diğerleri [17] çalışmalarında genel temas oranı ve her sınıfın sürekli göçü ile SIR ve SIRS tipi salgın hastalık modellerini analiz etmişlerdir. SIR modelinin hastaliksız ve endemik denge noktasının global asimptotik kararlılık şartlarını elde etmişlerdir. Khan ve diğerleri [18] çalışmalarında sabit göç ve doğrusal olmayan insidans fonksiyonu ile salgın hastalık modelini analiz etmişlerdir. Enatsu ve diğerleri [19] çalışmalarında enfektiflerin göçü ile SIS salgın hastalık modeli üzerinde çalışmışlardır. Zeb ve diğerleri [20] çalışmalarında sabit göç ve genel doğrusal olmayan insidans fonksiyonu ile salgın hastalık modelini araştırmışlardır. Yıldız ve diğerleri [21] çalışmalarında sığınak etkisi de dahil olmak üzere ayrı bir Lotka-Volterra tipi av-avcı modelinin karmaşık dinamik yapısını analiz etmişlerdir. Karahisarlı ve diğerleri [22] çalışmalarında zaman gecikmeleri olmadan ve gecikmelerle HIV enfeksiyonu altında tümör bağışıklık hücrelerinin etkileşiminin dinamiklerini yöneten matematiksel bir modeli gözönüne almışlardır. Tümör hücreleri, yardımcı T hücreleri, enfekte yardımcı T hücreleri ve virüs hücreleri arasındaki etkileşimler, iki farklı zaman gecikmesini içeren gecikmeli diferansiyel denklemler kullanılarak açıklanmaya çalışılmıştır. Elde edilen sonuçların HIV enfeksiyonu durumunda bağışıklık sistemi ile tümör gelişimi arasındaki bağlantıların daha iyi anlaşılmasına yardımcı olduğu vurgulanmıştır. Ott ve diğerleri [23] çalışmalarında temel dinamik denklemler hakkında keyfi olarak yüksek boyutlu bir sistemin kaotik zaman sinyalini kontrol etmek için bir durum sunulmuştur. Olası sonsuz sayıdaki faz uzayı değişkenlerinden bir veya birkaçının dinamiklerinin modellenmesini gerektiren bir geri besleme formülü elde etmişlerdir. Li ve diğerleri [24] çalışmalarında doymuş tedavi ve kitle-eylem insidans (çift doğrusal insidans) oranı ile SIR salgın modelinin hastalıklı ve

hastaliksız dengelerin varlığı ve kararlılığı için şartlar vermişlerdir. Ayrıca model kararlı limit döngüleri, geriye doğru çatallanma, Hopf çatallanması ve Bognadov-Takens çatallanmaları sergilediği gösterilmiştir. Son olarak teorik sonuçları doğrulamak için sayısal örnekler verilmiştir. Wang ve diğerleri [25] çalışmalarında bilinear insidans oranına sahip SIR salgın modelini ele almışlardır. Kuluçka süresine sahip bir SIR salgın hastalık modeli, konakçı popülasyonun duyarlılığının lojistik denklemi karşıladığı ve insidans hızının basit kitle eylemi insidansı olduğu varsayımı altında inceleme yapmışlardır. Hastalığın hangi şartlar altında bitip bitmeyeceğini veya hangi durumlarda endemik kalacağını hesaplamışlardır. Hastalığın hopf çatallanma şartlarını incelemişlerdir. Hethcote [26] çalışmasında bulaşıcı hastalıkların popülasyonlarda yayılmasını açıklayan birçok modelin matematiksel analizini vermiş ve bu modellerin belirli hastalıklara uygulandığını vurgulamıştır. Burada klasik epidemik modellerde kullanılan bilinear ve standart insidans oranlarına bağlı SIR, SEIR ve MSEIR modellerinin analizi verilir. Wang ve Jiang [27] çalışmalarında doymuş (lineer olmayan) insidans oranına ve tedaviye sahip bir SIS epidemik modeli üzerinde durmuşlardır. Modelin endemik ve hastaliksız denge noktasını analiz etmek için kararlılık teorisi ve kalitatif teoriyi kullanırlar. Son olarak endemik denge ve hastaliksız dengenin tam yapılanmasını incelemişlerdir. Zhang ve Liu [28] çalışmalarında doymuş insidans oranına ve doymuş tedavi fonksiyonuna sahip bir salgın modelini incelemişlerdir. Burada tedavi işlevi, enfekte bireylerin sayısı arttığında ve tıbbi durum sınırlı olduğunda gecikmiş tedavinin etkisini tanımlar. Yeterli tedavi sağlandığında hastalığın yok olmasını sağlayan global kararlılık durumunun ortaya çıktığı ve bununla birlikte, tedavinin gecikme etkisi güçlü olduğunda geriye doğru bir çatallanma olduğu gösterilmiştir. Hastaliksız denge ve endemik dengenin global asimptotik olarak kararlı olması için bazı yeterli koşullar elde edilerek çalışmalarını sürdürmüşlerdir. Bu makaledeki matematiksel sonuçlar da göstermiş ki hastalığın kontrolü için geçerli yöntemler; hastalara zamanında tedavi verilmesi, tedavi etkinliğinin artırılması ve enfeksiyon katsayısının azaltılmasıdır. Zhou ve diğerleri [29] çalışmalarında doymuş insidans oranına sahip bir SIS modeline doymuş bir tedavi fonksiyonu ekleyerek inceleme yapmışlardır. Tedavi işlevi, tıbbi durumun sınırlı olduğu ve enfekte bireylerin sayısının fazla olduğu durumlarda gecikmiş tedavinin etkisi tanımlanmış ve geriye doğru çatallanma elde edilmiştir. Salgın hastalığın yayılmasını kontrol altına almak için tedavi kapasitesinin artırılması gerektiğine değinilmiştir. Matematiksel analiz ve sayısal simülasyonlar ile sistemin Hopf ve Bognadov-Takens çatallanmaya sahip olduğu

gösterilir. Pérez ve diğerleri [30] çalışmalarında insan popülasyonlarında bulaşıcı hastalıkların yayılmasını tanımlamak için doymuş insidans ve doymuş tedaviye bağlı bir model ele almışlardır. Lojistik büyüme ile bir SIR salgın modelini göz önüne alarak doğrusal olmayan bir insidans oranı ve doymuş Holling tip II tedavi oranını modele eklemişler ve salgın hastalıklarla ele alınan daha önceki modelleri geliştirerek analiz etmişlerdir. Ayrıca hastalığın bulaşma hızı ve tedavi parametresi değiştiğinde modelin Bognadov-Takens çatallanmasına maruz kaldığını da göstermişlerdir. Sonuçları tanımlamak için faz portreleri ve çatallanma diyagramları çizmişlerdir. Parsamanesh ve diğerleri [31] çalışmalarında aşılama ve hayati dinamikleri olan fark zamanlı salgın hastalık modelinin nitelikli analizini yapmışlardır. Matematiksel modellerin popülasyonda enfeksiyonun seyrini incelemek ve hangi şartlar altında hastalığın yok edileceğini veya devam edeceğini araştırmak için yararlı bir araç olduğuna vurgu yapılmış ve bir SIS salgın hastalık modeli ele alınarak dinamikleri incelenmiştir. Muroya ve diğerleri [32] çalışmalarında lineer olmayan insidans oranlarına sahip gecikme dağılımlı SIRS salgın modelinin hastalıklı ve hastalıksız denge noktalarının global asimptotik kararlılık şartlarını verirler. Burada geniş bir SIRS modeli sınıfı için çok faydalı olduğu vurgulanmıştır. Kapçak [33] çalışmasında, bir ve iki boyutlu fark dinamik sistemlerin matematiksel ve geometrik analizi için SageMath'te etkileşimli araçlarını sunmuşlardır. Capasso ve Serio [34] çalışmalarında Kermack-McKendrick deterministik modeli genelleştirilerek enfektiflerin sayısına bağımlılığın lineer olmayan sınırlı bir fonksiyon ile meydana gelebileceği bir etkileşim terimi tanımlanmıştır. Gümüş ve Kılınç [35] çalışmalarında doymuş tedavi ve doymuş insidansa sahip SIR salgın hastalık modelinin kararlılık, flip ve Neimark-sacker çatallanmasını araştırmışlardır. Elde edilen sonuçları nümerik simülasyonlarla doğrulamışlardır. Gümüş ve diğerleri [36] çalışmalarında ayrık zamanlı bir SIR salgın modelinin kompleks dinamik davranışını inceleyerek temel üreme sayısı birden azsa hastalıklardan arınmış denge noktasının genel olarak asimptotik kararlı olduğunu, temel üreme sayısı birden fazlaysa endemik denge noktasının global olarak asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir. Diekmann [37] adlı kitabında bulaşıcı hastalıkların matematiksel epidemiyolojisi üzerine analizlerden bahsetmiştir. Gümüş ve diğerleri [38] çalışmalarında Allee etkisi olan ve olmayan hasat etkisine maruz kalan gecikmeli ayrık zamanlı popülasyon modelinin denge noktasının lokal kararlılığını incelemişlerdir. Liu ve Xiao [39] çalışmalarında ayrık zamanlı bir av-avcı sisteminin dinamiklerini araştırarak sistemin hopf ve flip çatallanmaya sahip olduğunu göstermişlerdir.

Din [40] çalışmasında Lotka-Volterra modelinin denge noktalarını, denge noktalarının lokal asimptotik kararlılığını ve global davranışını analiz etmiştir. Wang ve Ruan [41] çalışmalarında enfektif bireylerin sabit bir iyileşme oranı ile salgın model ele alırlar. Sınırlı kaynakların salgın hastalığın yayılması üzerindeki etkisini incelerler. Büyük bir tedavi kapasitesine gerek olmadan hastalığın sonlandırılabilceği bulunmuştur. Belirli parametre değişimlerinde hastalığın yayılması durumunun başlangıç şartlarına bağlı olabileceği vurgulanmıştır. Ayrıca modelin Hopf çatallanması ve homoklinik çatallanma dahil bir dizi çatallanmaya maruz kaldığı da gösterilmiştir. Wang [42] çalışmasında sınırlı bir tedavi olanağına sahip bir SIR salgın modelinde tedavi büyüklüğünün modele etkisini araştırmıştır. Tedavi oranının, yeterli tedavi kapasitesine sahip olduğunda enfektiflerin sayısı ile orantılı olduğu ve enfektiflerin sayısı fazla olduğunda ise yetersiz kalan tedavi nedeniyle tedavinin sabit olduğu varsayılmaktadır. Kapasite küçükse (yetersiz tedavi varsa), iki kararlı endemik denge noktası ve geriye doğru bir çatallanma meydana geldiği görülmüştür. Zhou ve Fan [43] çalışmalarında bir SIR salgın modelinin dinamiklerini ele alarak sınırlı tıbbi kaynakların ve bunların tedarik etkinliğinin bulaşıcı hastalıkların bulaşmasını nasıl etkilediğini araştırmışlardır. Değişen miktarda tıbbi kaynaklarla ve bunların tedarik verimliliği ile ele alınan modelin hem geriye doğru çatallanması hem de Hopf çatallanması ortaya çıkardığı görülmüştür. Kararlılık ve çatallanma için yeterli şartlar oluşturulmuş ve yorumlanmıştır. Teorik bilgileri desteklemek için sayısal simülasyonlar sunulmuştur. Ufuktepe ve Kapçak [44] çalışmalarında bir ve iki boyutlu fark dinamik sistemleri için Mathematica programı ile grafiksel paketler sunar.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm fark denklem ya da sistemler üzerine bilinmesi gerekli olan kavramları içerir [46].

Tanım 3.1: x bilinmeyen bir fonksiyon ve $n \in \mathbb{N}$ ve $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ bağımsız değişken olmak üzere

$$F(n, x(n), x(n+1), \dots, x(n+k)) = 0 \quad (3.1)$$

eşitliğine bir *fark denklemi* denir.

Tanım 3.2: Her $n \in \mathbb{N}$ için, $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı bir $x(n)$ fonksiyonu (3.1) yani $F(n, x(n), x(n+1), \dots, x(n+k)) = 0$ denklemini sağlıyorsa, o zaman $x(n)$ fonksiyonuna $\mathbb{N}$ üzerinde (3.1) fark denkleminin bir *çözümü* denir. k yıncı basamaktan bir fark denklemin,

$$\psi(n, x, c_1, c_2, \dots, c_k) = 0$$

veya

$$x = \varphi(n, c_1, c_2, \dots, c_k)$$

şeklinde k tane $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathfrak{R}$ keyfi sabitlerini içeren çözümüne *genel çözüm* adı verilir.

Genel çözümünden elde edilen çözümlere de *özel çözüm* denir.

Teorem 3.1: k yıncı basamaktan lineer olmayan skaler fark denklemi

$$x(n+k) = f(n, x(n), x(n+1), \dots, x(n+k-1)), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

ve

$$x(0) = a_0, x(1) = a_1, \dots, x(k-1) = a_{k-1} \quad (3.3)$$

başlangıç koşulları verilsin. f fonksiyonu bağlı olduğu değişkenlere göre tanımlı ise, o zaman (3.2)-(3.3) başlangıç değer probleminin bir tek çözümü vardır.

İspat : $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ değerleri belli olduğundan (3.2) den $n=0$ için $x(k)$ tek şekilde belirlidir, $x(k)$ değeri bilindiğinden yine (3.2) den $n=1$ için $x(k+1)$ değeri bulunur. Bu yolla $n \geq k$ için bütün $x(n)$ değerleri tek şekilde elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 3.3: $a_1(n), a_2(n), \dots, a_k(n)$ katsayıları ile $f_n, n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve $[n_0, \infty) = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots\}$ üzerinde $a_k(n) \neq 0$ olmak üzere

$$x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + \dots + a_k(n)x(n) = f(n) \quad (3.4)$$

biçiminde yazılan bir denkleme k yıncı basamaktan lineer fark denklemi denir. Bu denklem $f(n) = 0$ ise lineer homojen fark denklemi, aksi halde homojen olmayan fark denklemi adını alır. Buna göre k yıncı basamaktan bir lineer homojen fark denklemi

$$x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + \dots + a_k(n)x(n) = 0 \quad (3.5)$$

biçiminde ifade edilir. Ayrıca, bütün $a_i(n)$ katsayıları $a_i(n) \equiv a_i$ şeklinde sabit ise, (3.4) denkleminde *sabit katsayılı fark denklemi* denir. Bütün $a_i(n)$ katsayıları $a_i(n) \equiv a_i$ değişken ise, (3.4) denkleminde *değişken katsayılı fark denklemi* denir.

Teorem 3.2: Katsayıları $a_1(n), a_2(n), \dots, a_k(n)$ olan, $f_n, n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve $[n_0, \infty)$ üzerinde $a_k(n) \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + \dots + a_k(n)x(n) = f(n), \quad (3.6)$$

$$x(n_0) = a_0, \quad x(n_0+1) = a_1, \dots, x(n_0+k-1) = a_{k-1} \quad (3.7)$$

başlangıç değer problemi $n \geq n_0$ için tek bir $x(n)$ çözümüne sahiptir.

İspat: (3.7) koşulları yardımıyla (3.6) dan önce $n = n_0$ için $x(n_0+k)$ değeri, ardından $n = n_0+1$ için $x(n_0+k+1)$ değeri ve bu işleme benzer biçimde devam edilerek $x(n_0+k+2), x(n_0+k+3), \dots$ değerleri hesaplanır. Buradan (3.6)-(3.7) nin bir çözümü

$$x(n_0), x(n_0+1), x(n_0+2), \dots, x(n_0+k-1), x(n_0+k), x(n_0+k+1), x(n_0+k+2), \dots$$

şeklinde bulunur. Böylece çözümün varlığının ispatı tamamdır. Çözümün tek olduğunu göstermek için $x(n)$ den farklı bir $x^*(n)$ çözümü daha var olsun. Bu $x^*(n)$ çözümü benzer biçimde (3.6) ve (3.7) yardımıyla hesap edildiği zaman her $n \geq n_0$ için diğer çözümün $x(n)$ çözümümüyle aynı olduğu görülür. O halde bulunan çözüm tektir.

Tanım 3.4: $f_1(n), f_2(n), \dots, f_r(n)$ fonksiyonları $n \geq n_0$ için tanımlı olsunlar.

Her $n \geq n_0$ için,

$$c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n) + \dots + c_r f_r(n) = 0 \quad (3.8)$$

olacak biçimde $c_1, c_2, \dots, c_r$ sabitlerinin hepsi birden sıfır değil ise $\{f_1(n), f_2(n), \dots, f_r(n)\}$ cümlesine $[n_0, \infty)$ üzerinde *lineer bağımlıdır* denir. (3.8) eşitliği her $n \geq n_0$ için yalnız ve yalnız $c_1 = c_2 = \dots = c_r = 0$ durumunda sağlanıyorsa $\{f_1(n), f_2(n), \dots, f_r(n)\}$ cümlesine $[n_0, \infty)$ üzerinde *lineer bağımsızdır* denir.

Tanım 3.5: *Temel cümle*; (3.5) in k tane lineer bağımsız çözümünün cümlesine denir.

Tanım 3.6: $x_1(n), x_2(n), \dots, x_r(n)$ fonksiyonlarının $W(n)$ ile gösterilen *Casoratyanı*

$$W(n) = \det \begin{pmatrix} x_1(n) & \dots & x_r(n) \\ x_1(n+1) & \dots & x_r(n+1) \\ \vdots & & \vdots \\ x_1(n+r-1) & \dots & x_r(n+r-1) \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır.

Lemma 3.1 (Abel lemması): $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$ fonksiyonları (3.5) in homojen denkleminin çözümleri ve $W(n)$ onların casoratyanı olsun. Bu durumda $n \geq n_0$ için

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a_k(i) \right) W(n_0)$$

dır.

Sonuç 3.1: $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$ fonksiyonları (3.5) in çözümleri ve her $n \geq n_0$ için $a_k(n) \neq 0$ olmak üzere her $n \geq n_0$ sayısına karşılık $W(n) \neq 0$ olması için gerek ve yeter şart $W(n_0) \neq 0$ dır.

Teorem 3.3: (3.5) homojen denkleminin $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$ çözümlerinin bir temel cümle oluşturması için gerekli ve yeterli şartın herhangi bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısına karşılık $W(n_0) \neq 0$ olmasıdır.

Teorem 3.4: Her $n \geq n_0$ için $a_k(n) \neq 0$ ise (3.5) lineer homojen fark denklemi üzerinde bir temel cümleye sahip olur.

Teorem 3.5: (3.5) homojen denkleminin k tane lineer bağımsız çözümü; $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$ olsun. Bu durumda (3.5) in genel çözümü

$$x(n) = c_1 x_1(n) + c_2 x_2(n) + \dots + c_k x_k(n)$$

dir, burada $c_1, c_2, \dots, c_k$ lar keyfi sabitlerdir.

Uyarı 3.1: V , k yıncı basamaktan (3.5) homojen denkleminin bütün çözümlerinin cümlesi olmak üzere $+$ ve $\cdot$ işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

(i) $x, y \in V$ ve $t \in \mathbb{N}$ için,

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t)$$

(ii) $x \in V$ ve b bir sabit olmak üzere

$$(bx)(t) = bx(t).$$

Bu durumda $(V, +, \cdot)$, k boyutlu bir lineer vektör uzayıdır.

Teorem 3.6: (3.5) homojen denkleminin genel çözümü $x_h(t)$ ve (3.4) homojen olmayan denkleminin özel çözümü $x_p(t)$ ise, o halde (3.4) denkleminin genel çözümü

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

dir.

3.1. Birinci Basamaktan Lineer Fark Denklemleri

Tanım 3.1.1: Birinci basamaktan lineer homojen olmayan

$$x(n+1) = a(n)x(n) + g(n), \quad n \geq n_0 \geq 0, \quad (3.1.1)$$

fark denklemi ve

$$x(n_0) = x_0 \quad (3.1.2)$$

başlangıç koşulundan meydana gelen probleme *başlangıç değer problemi* denir; burada $a(n)$ katsayısı ve $g(n)$, $[n_0, \infty)$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar olup her $n \geq n_0$ için $a(n) \neq 0$ dır. (3.1.1) e ilişkin homojen denklem

$$x(n+1) = a(n)x(n), \quad n \geq n_0 \geq 0 \quad (3.1.3)$$

dir.

Teorem 3.1.1: (3.1.3) homojen fark denklemi ve (3.1.2) başlangıç şartından elde edilen problemin tek bir çözümü

$$x(n) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right) x_0 \quad (3.1.4)$$

olup (3.1.1)-(3.1.2) başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$x(n) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right) x_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left(\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i) \right) g(r) \quad (3.1.5)$$

dir.

3.2. İkinci Basamaktan Lineer Fark Denklemleri

a_1, a_2 reel sabit katsayıları ve $a_2 \neq 0$ olmak üzere; ikinci basamaktan sabit katsayılı lineer homojen

$$x(n+2) + a_1x(n+1) + a_2x(n) = 0 \quad (3.2.1)$$

fark denklemini göz önüne alalım. λ^n biçiminde bir çözüm bu denklem için aranırsa,

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \quad (3.2.2)$$

yazabiliriz. Bu denkleme (3.2.1) in *karakteristik denklemi* denir. (3.2.2) denkleminin λ_1 ve λ_2 köklerine *karakteristik kökler* denir. (3.2.1) homojen fark denkleminin genel çözümü λ_1, λ_2 köklerine bağlı olarak üç farklı durumda hesaplanır.

Durum 1. λ_1 ve λ_2 kökleri reel ve birbirinden farklı ise, o halde $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n\}$ cümlesi (3.2.1) denkleminin bir temel cümlesi olur. Buradan (3.2.1) in genel çözümü

$$x(n) = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$$

şeklindedir; burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

Durum 2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ olsun. Bu durumda (3.2.1) denkleminin bir temel cümlesi $\{\lambda^n, n\lambda^n\}$ olur ve genel çözüm

$$x(n) = (c_1 + c_2n)\lambda^n$$

dir; burada c_1 ve c_2 denklemin keyfi sabitleridir.

Durum 3. $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ve $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ olmak üzere; burada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\beta \neq 0$ dır. Bu durumda (3.2.1) in bir temel cümlesi $\{r^n \cos n\theta, r^n \sin n\theta\}$ dır. Aynı zamanda

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

dir ve (3.2.1) in genel çözümü

$$x(n) = c_1 r^n \cos n\theta + c_2 r^n \sin n\theta$$

veya

$$x(n) = A r^n \cos(n\theta - \beta)$$

şeklinde elde edilir; burada c_1 , c_2 , A ve B keyfi sabitlerdir.

3.3. k . Basamaktan Lineer Fark Denklemleri

Tanım 3.3.1: k yıncı basamaktan lineer sabit katsayılı homojen

$$x(n+k) + a_1 x(n+k-1) + \dots + a_k x(n) = 0 \quad (3.3.1)$$

fark denklemi formundadır; burada $a_i, i = 1, 2, \dots, k$, katsayıları reel sabitler olup $a_k \neq 0$ dır.

İkinci basamaktan lineer ve sabit katsayılı homojen denklemde olduğu gibi (3.3.1) denkleminin λ^n şeklinde bir çözümü aranır,

$$\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_k = 0 \quad (3.3.2)$$

denklemini elde edilir. Bu denkleme *karakteristik denklem* ve denklemin köklerine de *karakteristik kökler* adı verilir. (3.3.1) fark denkleminin çözüm kümeleri karakteristik köklere bağlı olarak kolaylıkla hesaplanabilir.

Tanım 3.3.2: Birinci basamaktan k boyutlu lineer homojen ve homojen olmayan fark denklem sistemleri sırasıyla,

$$x(n+1) = A(n)x(n), \quad (3.3.3)$$

$$x(n+1) = A(n)x(n) + f(n) \quad (3.3.4)$$

şeklinde tanımlanırlar; n bağımsız değişken ve $x(n) = (x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n))^T$ bilinmeyen vektör değerli fonksiyondur; $A(n) = (a_{ij}(n))$, $k \times k$, $n \geq n_0$ için singüler olmayan katsayı matrisi ve $f(n) = (f_1(n), f_2(n), \dots, f_k(n))^T$ bir kolon matrisidir. Ayrıca (3.3.3) veya (3.3.4) sisteminin $x(n_0) = x_0$ şartı ile beraber ele alınmasına bir *başlangıç değer problemi* denir ve böyle bir problemin çözümü $x(n) = x(n, n_0, x_0)$ şeklinde gösterilir; burada $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{k0})^T$ verilmiş bir sabit vektördür.

Teorem 3.3.1: Her bir $x_0 \in \mathbb{R}^k$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ için

$$x(n+1) = A(n)x(n), \quad x(n_0) = x_0, \quad (3.3.5)$$

başlangıç değer probleminin tek bir $x(n) = x(n, n_0, x_0)$ çözümü vardır.

İspat: (3.3.5) den

$$n = n_0 \text{ için } x(n_0 + 1, n_0, x_0) = A(n_0)x(n_0) = A(n_0)x_0;$$

$$n = n_0 + 1 \text{ için } x(n_0 + 2, n_0, x_0) = A(n_0 + 1)x(n_0 + 1) = A(n_0 + 1)A(n_0)x_0;$$

$$n = n_0 + 2 \text{ için } x(n_0 + 3, n_0, x_0) = A(n_0 + 2)x(n_0 + 2) = A(n_0 + 2)A(n_0 + 1)A(n_0)x_0$$

ve bu biçimde işleme devam edersek,

$$x(n_0 + n - n_0, n_0, x_0) = A(n_0 + n - n_0 - 1) \dots A(n_0 + 1) A(n_0) x_0$$

veya

$$x(n, n_0, x_0) = A(n-1) \dots A(n_0 + 1) A(n_0) x_0$$

elde edilir. Bu ise,

$$\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) = \begin{cases} A(n-1)A(n-2)\dots A(n_0+1)A(n_0), & n > n_0 \\ I, & n = n_0 \end{cases}$$

olmak üzere;

$$x(n, n_0, x_0) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) \right) x_0 \quad (3.3.6)$$

biçiminde yazılabilir. Böylece (3.3.5) probleminin tek bir çözümü vardır ve bu çözüm (3.3.6) şeklinde olur.

Tanım 3.3.3: $n \geq n_0$ için $\phi_1(n), \phi_2(n), \dots, \phi_k(n)$ fonksiyonları tanımlı olsunlar. Her $n \geq n_0 \geq 0$ için,

$$c_1 \phi_1(n) + c_2 \phi_2(n) + \dots + c_k \phi_k(n) = 0 \quad (3.3.7)$$

olacak şekilde $c_1, c_2, \dots, c_k$ sabit katsayılarının hepsi sıfırdan farklı ise, bu durumda $\{\phi_1(n), \phi_2(n), \dots, \phi_k(n)\}$ cümlesine $n \geq n_0$ üzerinde *lineer bağımlıdır* denir. (3.3.7) denklemi için her $n \geq n_0$ için yalnız ve yalnız $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ halinde sağlanıyor ise, o halde

$\{\phi_1(n), \phi_2(n), \dots, \phi_k(n)\}$ cümlesine $n \geq n_0$ üzerinde *lineer bağımsızdır* denir; burada $\phi_i(n) = (\phi_{1i}(n), \phi_{2i}(n), \dots, \phi_{ki}(n))^T$; $i = 1, 2, \dots, k$ dır.

Sonuç 3.1.1: $\Phi(n)$ kolonları (3.3.3) ün çözüm kümelerinden meydana gelen $k \times k$ tipinde bir matris olmak üzere, $\Phi(n)$

$$\Phi(n+1) = A(n)\Phi(n) \quad (3.3.8)$$

matris fark denkleminin bir çözümüdür.

İspat: (3.3.3) ün $\phi_1(n), \phi_2(n), \dots, \phi_k(n)$ çözümleri için

$$\Phi(n) = (\phi_1(n), \phi_2(n), \dots, \phi_k(n))$$

matrisi göz önüne alındığı zaman,

$$\Phi(n+1) = (A(n)\phi_1(n), A(n)\phi_2(n), \dots, A(n)\phi_k(n))$$

$$\Phi(n+1) = A(n)(\phi_1(n), \phi_2(n), \dots, \phi_k(n))$$

$$\Phi(n+1) = A(n)\Phi(n)$$

elde edilir. O halde; $\Phi(n)$, (3.3.8) denklemini sağlar.

Tanım 3.3.4: $\Phi(n)$, $n \geq n_0$ için singüler olmayan bir matris olmak üzere (3.3.8) denklemini sağlasın. O halde, $\Phi(n) = (\phi_1(n), \phi_2(n), \dots, \phi_k(n))$ şeklinde ele alınan matrise (3.3.3) sisteminin bir *temel matrisi* denir ve $\{\phi_1(n), \phi_2(n), \dots, \phi_k(n)\}$ cümlesine de (3.3.3) sisteminin bir *temel çözümler cümlesi* denir; burada $\phi_1(n), \phi_2(n), \dots, \phi_k(n)$, (3.3.3) ün $n \geq n_0$ üzerinde lineer bağımsız çözümleridir.

Teorem 3.3.2: (Sistem için sabitlerin değişimi formülü)

$$x(n+1) = A(n)x(n) + f(n) \quad , \quad x(n_0) = x_0 \quad (3.3.9)$$

başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$x(n, n_0, x_0) = \Phi(n, n_0)x_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \Phi(n, r+1) f(r) \quad (3.3.10)$$

veya açık bir biçimde,

$$x(n, n_0, x_0) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) \right) x_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left(\prod_{i=r+1}^{n-1} A(i) \right) f(r) \quad (3.3.11)$$

dir; burada $\Phi(n)$, (3.3.3) ün bir temel matrisidir.

İspat: (3.3.9) sisteminin bir özel çözümü,

$$x_p(n, n_0, 0) = \sum_{r=n_0}^{n-1} \Phi(n, r+1) f(r)$$

olmak üzere (3.3.9) probleminin tek çözümü,

$$x(n, n_0, x_0) = \Phi(n, n_0)x_0 + x_p(n, n_0, 0)$$

dır.

Sonuç 3.3.1: Sabit bir A matrisi ele alındığı zaman (3.3.9) un tek bir çözümü

$$x(n, n_0, x_0) = A^{n-n_0} x_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} A^{n-r-1} f(r) \quad (3.3.12)$$

dir.

Uyarı 3.3.1: k yıncı basamaktan skaler bir denklem, mutlaka birinci basamaktan k boyutlu bir sisteme eşdeğerdir. Bunun için k yıncı basamaktan lineer skaler

$$y(n+k) + c_1(n)y(n+k-1) + \dots + c_k(n)y(n) = f(n) \quad (3.3.13)$$

denklemini ele alalım ve

$$x_1(n) = y(n), x_2(n) = y(n+1), x_3(n) = y(n+2), \dots, x_k(n) = y(n+k-1) \quad (3.3.14)$$

dönüşümünü seçelim. Bu dönüşüm (3.3.13) denklemine uygulanırsa,

$$\begin{cases} x_1(n+1) = x_2(n), \\ x_2(n+1) = x_3(n), \\ \vdots \\ x_{k-1}(n+1) = x_k(n), \\ x_k(n+1) = -c_k(n)x_1(n) - c_{k-1}(n)x_2(n) - \dots - c_1(n)x_k(n) + f(n) \end{cases} \quad (3.3.15)$$

sistemi elde edilir. (3.3.15) sisteminin sahip olduğu çözüm,

$$(x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n))$$

şeklinde sıralı k lıdır. (3.3.14) dönüşümü nedeniyle (3.3.13) skaler denklemine karşılık gelen çözümü $y(n) = x_1(n)$ dir. Tam tersi $y(n)$, (3.3.13) ün bir çözümü olursa, bu durumda (3.3.15) sistemine karşılık gelen çözümü

$$(y(n), y(n+1), y(n+2), \dots, y(n+k-1))$$

dir. Öte yandan (3.3.15) sistemi

$$A(n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -c_k(n) & -c_{k-1}(n) & -c_{k-2}(n) & -c_{k-3}(n) & \cdots & -c_1(n) \end{pmatrix}, \quad (3.3.16)$$

ve

$$x(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \\ \vdots \\ x_k(n) \end{pmatrix}, \quad B(n) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(n) \end{pmatrix}$$

olsun.

$$x(n+1) = A(n)x(n) + B(n) \quad (3.3.17)$$

biçiminde bir matris-vektör şeklinde yazılabilir. Özel olarak $f(n) \equiv 0$ ve $c_i(n) = c_i$, $1 \leq i \leq k$ sabit ise, o halde sabit katsayılı

$$x(n+1) = Ax(n) \quad (3.3.18)$$

homojen sistemi bulunur. Böylece A matrisinin özdeğerleri ile k yıncı basamaktan sabit katsayılı skaler

$$y(n+k) + c_1 y(n+k-1) + \dots + c_k y(n) = 0 \quad (3.3.19)$$

homojen denkleminin karakteristik kökleri aynı sayılardır. Yani A matrisinin karakteristik denklemi, (3.3.19) denkleminin

$$\lambda^k + c_1 \lambda^{k-1} + \dots + c_{k-1} \lambda + c_k = 0$$

karakteristik denklemine eşittir.

3.4. Sabit Katsayılı Lineer Homojen Sistemler

Bu kısımda $n \geq n_0$ için tanımlı k bilinmeyenli k denklemden oluşan sabit katsayılı lineer homojen

$$\begin{cases} x_1(n+1) = a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \dots + a_{1k}x_k(n), \\ x_2(n+1) = a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + \dots + a_{2k}x_k(n), \\ \vdots \\ x_k(n+1) = a_{k1}x_1(n) + a_{k2}x_2(n) + \dots + a_{kk}x_k(n) \end{cases}$$

fark denklem sistemi ele alınmaktadır; sistemin bilinmeyenleri $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$ olup $1 \leq i, j \leq k$, a_{ij} katsayıları verilen reel sabitlerdir. Böyle bir sistem daima

$$x(n+1) = Ax(n), \quad n \geq n_0 \quad (3.4.1)$$

biçiminde vektör-matris formu yazılabilir; burada $A = (a_{ij})$, $k \times k$ boyutlu reel singüler olmayan bir matris ve $x(n) = ((x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n))^T$ dir. (3.4.1) sisteminin

$$x(n_0) = x_0 \quad (3.4.2)$$

başlangıç şartını sağlayan çözümünün

$$x(n, n_0, x_0) = A^{n-n_0} x_0 \quad (3.4.3)$$

biçiminde olduğunu biliyoruz. Burada $A^0 = I$, $k \times k$ tipinde birim matrisidir.

Çözümün bulunabilmesi esas olarak A^n matrisinin hesabına bağlıdır. Putzer Algoritması ve Jordan kanonik formu gibi yöntemler bulunmaktadır. Bunun için öncelikle aşağıdaki tanımı bilmek gerekir.

Tanım 3.4.1: Bir $A = (a_{ij})$, $k \times k$ reel matrisini ele alalım.

$$A\xi = \lambda\xi \quad (3.4.4)$$

olacak biçimde sıfırdan farklı bir $\xi \in \mathbb{C}^k$ vektörü varsa, λ sayısına A nın bir *özdeğeri* ve ξ vektörüne ise A nın bir *özvektörü* denir; $\mathbb{C}^k$, k boyutlu kompleks uzaydır. (3.4.4) eşitliği eşdeğer olarak

$$(A - \lambda I)\xi = 0 \quad (3.4.5)$$

biçiminde yazılabilir. Bu denklemin sıfırdan farklı bir çözümüne sahip olması için gerek ve yeter şart

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (3.4.6)$$

veya açık olarak,

$$p(\lambda) = \lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + a_2\lambda^{k-2} + \dots + a_{k-1}\lambda + a_k = 0 \quad (3.4.7)$$

dir.

(4.3.6) ya da (4.3.7) denklemi A nın *karakteristik denklemi* olarak bilinir. Karakteristik denklemin λ kökleri daima A matrisinin özdeğerleridir. A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ ise, o halde (3.4.7) denklemi

$$p(\hat{\lambda}) = \prod_{j=1}^k (\hat{\lambda} - \hat{\lambda}_j) \quad (3.4.8)$$

şeklinde yazılabilir (özdeğerlerin hepsi veya bir kısmı birbirine eşit olabilir).

3.5. Vektör Fark Denklemleri

Tanım 3.5.1: k boyutlu

$$x(n+1) = f(n, x(n)), \quad x(n_0) = x_0 \quad (3.5.1)$$

vektör fark denklemi ele alalım. Burada $x \in \mathfrak{R}^k$, $f : \mathbb{N} \times \mathfrak{R}^k \rightarrow \mathfrak{R}^k$ olmak üzere $f(n, x)$ fonksiyonu x değişkenine göre sürekli ve $x_0 \in \mathfrak{R}^k$, verilmiş bir sabit vektördür. (3.5.1) denkleminde $f(n, x(n)) \equiv f(x(n))$ ise o zaman (3.5.1) denklemine *otonom denklem* denir.

Her $n \in \mathbb{Z}$ ve N pozitif bir tamsayısı olmak üzere;

$$f(n + N, x) = f(n, x)$$

ise $f(n, x)$ fonksiyonuna n ye göre *periyodiktir* denir.

Tanım 3.5.2: Her $n \geq n_0$ için $f(n, x^*) = x^*$ eşitliğini sağlayan $x^* \in \mathfrak{R}^k$ noktasına (3.5.1) denkleminde *bir denge noktası ya da sabit çözümü* denir. Özel olarak $x^* = 0$ denge noktası artık *sıfır çözümü* olur; yani $x(n) = 0$ dır. $x^* \neq 0$ ise;

$$y(n) = x(n) - x^*$$

dönüşümü yardımıyla (3.5.1) denklemi

$$y(n+1) = f(n, y(n) + x^*) - x^* \equiv g(n, y(n)) \quad (3.5.2)$$

denklemine indirgenir. Bu denklem $y(n) = 0$ çözümüne sahiptir, yani (3.5.1) in sıfırdan farklı $x = x^*$ sabit çözümü (3.5.2) nin sıfır çözümüne karşılıktır. Bundan dolayı bazı dökümanlarda genelliği bozmadığı için sıfırdan farklı bir denge noktası yerine orjin noktası ele alınır.

Tanım 3.5.3: $\mathfrak{R}^k$ üzerinde bir *norm* aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\|\cdot\|: \mathfrak{R}^k \rightarrow \mathfrak{R}$ fonksiyonudur:

- a) $\|x\| \geq 0, \forall x \in \mathfrak{R}^k$,
- b) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = (0, 0, \dots, 0)$,
- c) $\|cx\| = |c|\|x\|, \forall c \in \mathfrak{R} \text{ ve } \forall x \in \mathfrak{R}^k$
- d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in \mathfrak{R}^k$.

Bazı norm örnekleri şunlardır; $x \in \mathfrak{R}^k$ için,

Öklid normu : $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2}$,

Maksimum norm: $\|x\| = \{\max_{1 \leq i \leq k} |x_i|\}$,

L_1 normu: $\|x\| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_k|$.

Tanım 3.5.4: Verilen bir $\varepsilon > 0$ için $\|x_0 - x^*\| < \delta$ olduğu zaman

$$\|x(n, n_0, x_0) - x^*\| < \varepsilon, \quad n \geq n_0 \geq 0,$$

olacak biçimde bir $\delta = \delta(\varepsilon, n_0) > 0$ sayısı var ise x^* denge noktasına *kararlıdır* denir.

$\delta = \delta(\varepsilon)$ ise x^* denge noktasına *düzgün kararlıdır* denir.

Tanım 3.5.5: $\|x_0 - x^*\| < \mu$ olduğu zaman

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, n_0, x_0) = x^*$$

olacak şekilde bir $\mu = \mu(n_0)$ sayısı varsa x^* denge noktasına *atraktif*(çekicidir) denir. Eğer μ, n_0 dan bağımsız ise, o zaman x^* denge noktası *düzgün atraktif denge noktası* adını alır. Başka bir deyişle her $\varepsilon > 0$ ve her $n_0 \geq 0$ için $\|x_0 - x^*\| < \mu$ olduğu zaman

$$\|x(n, n_0, x_0) - x^*\| < \varepsilon, \quad n \geq n_0 + N$$

olacak biçimde $\mu > 0$ ve $N = N(\varepsilon) > 0$ sayıları var ise o halde x^* a *düzgün atraktif denge noktası* denir.

Tanım 3.5.6: Kararlı ve atraktif olan denge noktasına *asimptotik kararlı* denir. Düzgün kararlı ve düzgün atraktif olan bir denge noktasına ise *düzgün asimptotik kararlı* denir.

3.6. k. Basamaktan Skaler Lineer Homojen Denklemler

Bu kısımda k . basamaktan skaler lineer sabit katsayılı homojen,

$$x(n+k) + c_1 x(n+k-1) + c_2 x(n+k-2) + \dots + c_k x(n) = 0 \quad (3.6.1)$$

fark denklemi ele alınmaktadır; burada c_i ifadeleri reel sabitler olup $c_k \neq 0$ dır. Buna ilişkin karakteristik polinom

$$c(\lambda) = \lambda^k + c_1 \lambda^{k-1} + c_2 \lambda^{k-2} + \dots + c_k \quad (3.6.2)$$

dir.

Teorem 3.6.1: (3.6.1) in sıfır çözümlerinin asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter şart (3.6.2) nin her μ karakteristik kökü için $|\mu| < 1$ olmasıdır. Ayrıca (3.6.1) in sıfır çözümünün

kararlı olması için ise gerek ve yeter şart , $|\mu|=1$ eşitliğini sağlayan μ lar basit olmak üzere $|\mu| \leq 1$ dir. Diğer taraftan $|\mu|=1$ olacak biçimde katlı karakteristik kökler var ise, o halde (3.6.1) in sıfır çözümü kararsızdır.

Şimdi (3.6.1) in karakteristik köklerinin birim çember içinde kalmasını sağlayan Schur-Cohn kriterini ifade etmek için önce aşağıdaki tanımı verelim:

Tanım 3.6.1: Bir $A=(a_{ij})$ matrisinin iç matrisleri, ilk ve son satırlarıyla ilk ve son sütunlarının ve o matrisin kendisinin atılmasıyla ardışık olarak elde edilen matrislerin tümü olarak bulunur. Bütün iç matrislerin determinantlarının hepsi pozitif olan bir A matrisine *pozitif iç matrislidir* denir. Örnek verecek olursak aşağıdaki matrislerin iç matrisleri yanlarında gösterilmiştir:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3 \times 3} \text{ matrisinin iç matrisi kendisi ve } (a_{22}),$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}_{4 \times 4} \text{ matrisinin iç matrisi kendisi ve } \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

dir.

Teorem 3.6.2: (Schur-Cohn Kriteri) (3.6.2) karakteristik polinomunun sahip olduğu bütün sıfırlarının birim çemberin iç bölgesinde kalması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki şartların sağlanmasıdır:

- (i) $p(1) > 0$
- (ii) $(-1)^k p(-1) > 0$
- (iii) $(k-1) \times (k-1)$ türündeki

$$A_{k-1}^{\pm} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ p_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ p_{k-3} & p_{k-4} & \cdots & 1 & 0 \\ p_{k-2} & p_{k-3} & \cdots & p_1 & 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & p_k \\ 0 & 0 & \cdots & p_k & p_{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & p_k & \cdots & p_4 & p_3 \\ p_k & p_{k-1} & \cdots & p_3 & p_2 \end{pmatrix}$$

matrisler pozitif iç matrislidir.

Schur-Cohn kriteri doğal olarak asimptotik kararlılık için bir kriter niteliğindedir.

Örnek 3.6.1:

$$x(n+2) + p_1x(n+1) + p_2x(n) = 0 \quad (3.6.3)$$

denklemini göz önüne alalım. Bunun karakteristik polinomu

$$p(\mu) = \mu^2 + p_1\mu + p_2$$

dir. Schur-Cohn kriterine göre (3.6.3) ün sıfır çözümünün asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter şartlar

$$0 < 1 + p_1 + p_2, \quad 0 < 1 - p_1 + p_2, \quad 0 < 1 + p_2 < 2$$

dir. Bu şartlar;

$$|p_1| < 1 + p_2 < 2 \quad (3.6.4)$$

biçiminde özetlenebilir.

Örnek 3.6.2: Üçüncü basamaktan homojen

$$x(n+3) + p_1x(n+2) + p_2x(n+1) + p_3x(n) = 0 \quad (3.6.5)$$

fark denklemini ele alalım. Bu denkleme ilişkin karakteristik polinomu

$$p(\mu) = \mu^3 + p_1\mu^2 + p_2\mu + p_3$$

dür. Teorem 3.6.2 den (3.6.5) denkleminin asimptotik kararlılığı için gerek ve yeter şartlar

$$p(1) = 1 + p_1 + p_2 + p_3 > 0$$

$$(-1)^3 p(-1) = -(-1 + p_1 - p_2 + p_3) = 1 - p_1 + p_2 - p_3 > 0$$

$$|A_2^+| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 & p_3 \\ p_1 + p_3 & 1 + p_2 \end{pmatrix} \right| > 0;$$

$$|A_2^-| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 & -p_3 \\ p_1 - p_3 & 1 - p_2 \end{pmatrix} \right| > 0$$

dır. Bu koşullar düzenlenirse;

$$|p_1 + p_3| < 1 + p_2 \text{ ve } |p_2 - p_3 p_1| < 1 - p_3^2$$

bulunur.

3.7. Birinci Basamaktan Lineer Olmayan Otonom Fark Denklemleri

Bu bölümde birinci basamaktan bir boyutlu otonom fark

$$x(n+1) = f(x(n)) \tag{3.7.1}$$

denkleminin sahip olduğu denge noktaları için kararlılık kriterlerinden söz edilecektir.

Teorem 3.7.1: x^* , (3.7.1) denkleminin sahip olduğu denge noktası olsun; burada f , x^* noktasını içeren bir açık aralıkta sürekli türevlenebilir bir fonksiyondur. O halde aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(i) $|f'(x^*)| < 1$ ise, x^* asimptotik kararlıdır;

(ii) $|f'(x^*)| > 1$ ise, x^* kararsızdır.

İspat: (i) $|f'(x^*)| < M < 1$ olsun. Bu durumda her $x \in J$ için $|f'(x)| \leq M < 1$ olacak şekilde x^* noktasını içeren bir $J = (x^* - \eta, x^* + \eta)$ aralığı vardır. $x(0) \in J$ için

$$|x(1) - x^*| = |f(x(0)) - f(x^*)|$$

dir. Ortalama değer teoreminden

$$|f(x(0)) - f(x^*)| = |f'(\xi)| |x(0) - x^*|$$

olacak biçimde $x(0)$ ile x^* arasında bir ξ sayısı vardır. Buradan

$$|f(x(0)) - x^*| \leq M |x(0) - x^*|$$

ve dolayısıyla

$$|x(1) - x^*| \leq M |x(0) - x^*| \quad (3.7.2)$$

dir. (3.7.2) eşitsizliğinden ve $M < 1$ eşitsizliğinden, $x(1)$ değerinin $x(0)$ değerine göre x^* denge noktasına daha yakın olduğu görülür. Sonuçta, $x(1) \in J$ dir. Aynı biçimde devam edilirse, tümevarım yöntemiyle

$$|x(n) - x^*| \leq M^n |x(0) - x^*|$$

bulunur. Bir $\varepsilon > 0$ için $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$ olmak üzere $|x(0) - x^*| < \delta$ iken her $n \geq n_0$ için

$|x(n) - x^*| < \varepsilon$ sağlanır. Bu da kararlılığı ifade eder. Ayrıca $\lim_{n \rightarrow \infty} |x(n) - x^*| = 0$ olduğundan

$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = x^*$ dir. O halde x^* asimptotik karardır.

(ii) $|f'(x^*)| > M > 1$ olsun. f' nin sürekliliğinden dolayı her $x \in J$ için

$|f'(x^*)| \geq M > 1$ olacak biçimde x^* noktasını kapsayan $J = (x^* - \alpha, x^* + \alpha)$ aralık vardır.
 $x(0) \in J$ için

$$|x(1) - x^*| = |f(x(0)) - f(x^*)|$$

olup benzer biçimde ortalama değer teoreminden

$$|f(x(0)) - x^*| \geq M |x(0) - x^*|$$

bulunur. Bundan sonra

$$|x(1) - x^*| \geq M |x(0) - x^*|$$

ve tümevarımdan

$$|x(n) - x^*| \geq M^n |x(0) - x^*|$$

hesaplanır. Böylece $|x(0) - x^*| < \delta$ iken $M > 1$ olduğunda $|x(n) - x^*| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı elde edilemez. Dolayısıyla x^* denge noktası kararsızdır.

Teorem 3.7.1 den $|f'(x^*)| = 1$ olması halinde x^* denge noktasının kararlılığı hakkında bir bilgi söylenemez. Bundan dolayı $|f'(x^*)| = 1$ ve $|f'(x^*)| = -1$ durumları için sırasıyla aşağıdaki teoremler göz önüne alınabilir.

Teorem 3.7.2: x^* , (3.7.1) denkleminin bir denge noktası olmak üzere $f'(x^*) = 1$ olsun. O halde, aşağıdakiler sağlanır:

$f''(x^*) \neq 0$ ise, x^* denge noktası kararsızdır;

$f''(x^*) = 0$ ve $f'''(x^*) > 0$ ise, x^* denge noktası kararsızdır;

$f''(x^*) = 0$ ve $f'''(x^*) < 0$ ise, x^* denge noktası asimptotik kararlıdır.

Teorem 3.7.3: (3.6.1) in x^* denge noktası için $f'(x^*) = -1$ olsun. Ayrıca f fonksiyonunun Schwarzian türevi

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left[\frac{f''(x)}{f'(x)} \right]^2$$

ile gösterilsin. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur:

$Sf(x^*) < 0$ ise, x^* asimptotik kararlıdır;

$Sf(x^*) > 0$ ise, x^* kararsızdır.

3.8. Lineerleştirme Yöntemi

Lineer olmayan bir fark denklem sistemi

$$x(n+1) = A(n)x(n) + f(n, x(n)) \quad (3.8.1)$$

olsun; burada $A(n)$, $k \times k$ tipinde her n için singüler olmayan bir matris ve $f : N \times G \rightarrow \mathbb{R}^k$, $G \subset \mathbb{R}^k$ sürekli bir fonksiyondur. (3.8.1) e ilişkin lineer sistem

$$y(n+1) = A(n)y(n) \quad (3.8.2)$$

dir. (3.8.1) sistemi,

$$x(n+1) = g(n, x(n)) \quad (3.8.3)$$

şeklinde lineer olmayan bir denklemin lineerleştirilmesi esnasında meydana çıkar; burada $g : N \times G \rightarrow \mathbb{R}^k$, $G \subset \mathbb{R}^k$, bir x^* denge noktasında türevlenebilen bir fonksiyondur. Kısaca $x^* = 0$ ve ayrıca her n doğal sayısı için $g(n, 0) = 0$ olsun. Lineerleştirme yöntemini

açıklamak için (3.8.3) sisteminin göz önüne alalım. $g = (g_1, g_2, \dots, g_k)^T$ nin Jakobiye matrisi

$$\frac{\partial g(n, x)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial g(n, 0)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(n, 0)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(n, 0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1(n, 0)}{\partial x_k} \\ \frac{\partial g_2(n, 0)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(n, 0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2(n, 0)}{\partial x_k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial g_k(n, 0)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_k(n, 0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_k(n, 0)}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

dir. Yine kısaca $\frac{\partial g(n, 0)}{\partial x} = g'(n, 0)$ olsun.

$$\frac{\partial g(n, 0)}{\partial x} = A(n) \text{ ve } f(n, x) = g(n, x) - A(n)x(n)$$

alınırsa, (3.8.3) sistemi (3.8.1) biçiminde yazılmış olur. (3.8.3) sisteminin önemli bir özel durumu

$$x(n+1) = g(x(n)) \quad (3.8.4)$$

otonom sistemidir. Bu otonom sistem,

$$x(n+1) = Ax(n) + f(x(n)) \quad (3.8.5)$$

biçiminde yazılabilir; burada $A = g'(0)$ Jakobiye matris ve $f(x) = g(x) - Ax$ dir. g , 0 noktasında türevlenebilir olduğundan, $\|x\| \rightarrow 0$ olması halinde $g(x) = o(x)$ (yani, her $\varepsilon > 0$ için $\|x\| < \delta$ olması durumunda $\|f(x)\| \leq \varepsilon \|x\|$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ vardır) veya eşdeğer olarak

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = 0 \text{ 'dır.}$$

4. MATERİYAL VE METOT

Bu bölümde kullanacağımız bilgiler [45] den yararlanılarak verilmiştir.

Tanım 4.1: Birinci mertebeden fark denklemi için,

$$x_{t+1} = f(x_t) \quad (4.1.1)$$

bir denge çözümü fark denkleminin x^* sabit çözümüdür, yani, tatmin edici bir çözüm

$$x^* = f(x^*) \quad (4.1.2)$$

eşitliğinden elde edilir. Biri $X_{t+1} = F(X_t)$ yinci dereceden sistem için, bir denge çözümü olan X^* fark sistemi için sabit bir çözümdür:

$$X^* = F(X^*). \quad (4.1.3)$$

(4.1.2) veya (4.1.3) denklemlerini sağlayan sabit çözümlere sabit noktalar da denir.

Aşağıdaki iki boyutlu sistemde

$$x_{t+1} = f(x_t, y_t)$$

$$y_{t+1} = g(x_t, y_t)$$

denge noktası (x^*, y^*) dır. $f(x_{t+k}, \dots, x_{t+1}, x_t) = 0$ formunda daha yüksek mertebeden bir fark denklemi için bir denge çözümü $f(x^*, \dots, x^*, x^*) = 0$ denklemini sağlayan X^* çözümüdür. Eğer x_0 başlangıç değeri verilmişse çözüm, başlangıç değeri olan x_0 cinsinden ifade edilebilir. Yani $x_1 = f(x_0)$ ve $x_2 = f(f(x_0)) = f^2(x_0)$ dan,

$$x_t = f(f(\dots f(x_0)\dots)) = f^t(x_0),$$

yazılır, burada üst simge t , x_0 başlangıç değerinden başlayan zaman adımlarının veya yinelemelerin sayısını temsil eder. (4.1.1) fark denkleminin çözümleri periyodik davranış sergileyebilir.

Tanım 4.2: (4.1.1) fark denkleminin $m > 1$ periyodunun bir periyodik çözümü

$$i = 1, 2, \dots, m-1 \text{ için } f^m(x_k^*) = x_k^* \text{ ve } f^i(x_k^*) \neq x_k^*$$

sağlayan gerçek değerli bir x_k^* çözümüdür.

Bir m -döngüsü $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*\}$ noktalarının bir kümesidir; burada her $k = 1, 2, \dots, m$ için x_k^* , m periyodunun periyodik bir çözümüdür. $\{x_1^*, f(x_1^*), \dots, f^{m-1}(x_1^*)\}$ kümesine x_1^* in periyodik yörüngesi denir.

Birinci mertebeden $X_{t+1} = F(X_t)$ sisteminde m periyodunun bir periyodik çözümü $i = 1, 2, \dots, m-1$ için $F^m(X_k^*) = X_k^*$ ve $F^i(X_k^*) \neq X_k^*$ sağlayan gerçek değerli bir X_k^* vektörüdür. Bir m -döngüsü $\{X_1^*, X_2^*, \dots, X_m^*\}$ bir dizi vektörler kümesidir; burada her X_k^* , m periyodunun bir periyodik çözümüdür. $\{X_1^*, f(X_1^*), \dots, f^{m-1}(X_1^*)\}$ cümlesi X_1^* in periyodik yörüngesi olarak adlandırılır.

Tanım 4.3: Herhangi $\varepsilon > 0$ için $\delta > 0$ kabul edelim. $|x_0 - x^*| < \delta$ olsun. (4.1.1) in bir denge çözümü eğer varsa, aşağıdaki durumlarda bu çözüm lokal olarak kararlıdır;

$$\forall t > 0 \text{ için } |x_t - x^*| = |f^t(x_0) - x^*| < \varepsilon.$$

Eğer x^* kararlı değilse kararsız olarak adlandırılır. Her $|x_0 - x^*| < \gamma$ için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x_0) = x^*$$

olacak şekilde $\gamma > 0$ varsa x^* denge çözümü lokal olarak çekicidir. x^* denge çözümü lokal kararlı ve lokal çekici ise lokal asimptotik karardır denir.

4.1. Birinci Dereceden Sistemlerde Kararlılık

Birinci mertebeden fark denklemleri sisteminin denge noktasının lokal asimptotik kararlılığını doğrulamak için basit bir kriter sağlarız. İki boyutlu birinci mertebeden fark sistemin (x^*, y^*) denge noktasının lokal olarak asimptotik kararlı olması için kriterler türetilmiştir.

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= f(x_t, y_t) \\ y_{t+1} &= g(x_t, y_t) \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

sisteminin kararlılık sonucunu belirtmeden önce sistem lineerleştirilebilir. (x^*, y^*) denge noktasını içeren açık bir kümede f ve g ' nin ikinci mertebeden sürekli kısmi türevleri olduğunu varsayıyoruz. Daha sonra $f(x^*, y^*)$ fonksiyonunu için Taylor seri açılımı uygulanırsa

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x^*, y^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y}(y - y^*) \\ &+ \frac{\partial^2 f(x^*, y^*)}{\partial x^2} \frac{(x - x^*)^2}{2!} + \frac{\partial^2 f(x^*, y^*)}{\partial x \partial y} \frac{(x - x^*)(y - y^*)}{2!} + \frac{\partial^2 f(x^*, y^*)}{\partial y^2} \frac{(y - y^*)^2}{2!} + \dots, \end{aligned}$$

yazılır. Burada notasyon

$$\frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(x, y) = (x^*, y^*)}$$

olarak kullanılmıştır. $u = x - x^*$ ve $v = y - y^*$ olmak üzere $f - x^*$ yaklaşık olarak lineerdir:

$$\begin{aligned}
f(x, y) &\approx f(x^*, y^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y}(y - y^*) \\
&= x^* + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x}u + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y}v
\end{aligned}$$

g fonksiyonu için benzer bir yaklaşım

$$g(x, y) \approx y^* + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x}u + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y}v$$

olarak yazılabilir. Sistem (4.1.4) ün $u_t = x_t - x^*$ ve $v_t = y_t - y^*$ ile (x^*, y^*) denge civarında lineerleştirilmesi

$$X_{t+1} = JX_t$$

tarafından verilir. Burada $X_t = (u_t, v_t)^T$ ve J , (x^*, y^*) noktasında değerlendirilen $(f, g)^T$ nin Jakobiyen matrisidir:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Şimdi sonuçlanır ki denge noktasının lokal asimptotik kararlılığını belirleme kriteri f ve g fonksiyonlarının x ve y de birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip olmasıdır. Jakobiyen matris J nin özdeğerleri, lineer olmayan sistemin lokal kararlılığını belirler. Özdeğerler $|\mu_i| < 1$ i sağlıyorsa (spektral yarıçap $\rho(J) < 1$) o zaman $\lim_{t \rightarrow \infty} J^t = 0$ dir. J Jakobiyen matrisi (a_{ij}) ile gösterilsin, burada a_{ij} elemanları denge noktasında değerlendirilen f veya g nin kısmi türevlerini temsil eder. Jakobiyen matrisinin $J = (a_{ij})$ özdeğerleri

$$\det(J - \mu I) = 0 \text{ ya da } \det = \begin{pmatrix} a_{11} - \mu & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \mu \end{pmatrix} = 0$$

dan elde edilir ki basitleştirilmiş bir biçimde karakteristik denklem;

$$\mu^2 - (a_{11} + a_{22})\mu + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$$

ya da

$$\mu^2 - iz(J)\mu + \det(J) = 0$$

olarak yazılır.

Teorem 4.1.1: $f(x, y)$ ve $g(x, y)$ fonksiyonlarının (x^*, y^*) noktasını içeren $\mathbb{R}^2$ bir açık aralıkta x ve y de sürekli birinci mertebeden kısmi türevlere sahip olduğunu varsayalım. O zaman doğrusal olmayan sistemin denge noktası (x^*, y^*) , (4.1.4) sisteminde değerlendirilen Jakobiyen matrisinin öz değerleri $|\mu_i| < 1$ eşitsizliğini sağlıyorsa, lokal asimptotik kararlıdır. Eşdeğer olarak,

$$iz(J) < 1 + \det(J) < 2 \quad (4.1.5)$$

olmalıdır. Bazı $|\mu_i| > 1$ ise denge noktası kararsızdır. Yani aşağıdaki üç eşitsizlikten biri sağlanmalıdır.

$$iz(J) > 1 + \det(J), \quad iz(J) < -1 - \det(J) \text{ ya da } \det(J) > 1. \quad (4.1.6)$$

Birinci mertebeden sistemler veya daha yüksek mertebeden fark denklemleri için lokal kararlılık kriterleri, lineerleştirilmiş sistemin davranışına bağlıdır. n denklemden oluşan birinci mertebeden bir sistem düşünelim: $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$,

$$X(t+1) = F(X(t)), \quad (4.1.7)$$

olmak üzere $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$, $f_i \equiv f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$. (4.1.7) sisteminin X^* civarında bir dengeye sahip olduğunu düşünelim. Eğer $U_t = X_t - X^*$ ise, (4.1.7) sisteminin X^* civarında lineerleştirilmiş sistemi,

$$U_{t+1} = JU_t$$

olarak yazılabilir. Burada J , X^* de değerlendirilen Jakobiyen matrisidir;

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(X^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(X^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(X^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(X^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(X^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(X^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(X^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(X^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(X^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

X^* in lokal asimptotik kararlılığı Jakobiyen matrisinin özdeğerlerine bağlıdır, bu da X^* i içeren bir bölgedeki kısmi türevlerin varlığına bağlıdır. Bu nedenle X^* in lokal asimptotik kararlılığı için X^* içeren açık bir kümede f_i in kısmi türevlerinin sürekliliğini gerektirir. Jakobiyen matrisinin özdeğerleri karakteristik denklemin çözümleridir:

$$\det(J - \mu I) = 0.$$

Özdeğerler aşağıdaki n ' ninci dereceden karakteristik polinomun sıfırlarıdır;

$$p(\mu) = \mu^n + a_1\mu^{n-1} + a_2\mu^{n-2} + \dots + a_n. \quad (4.1.8)$$

(4.1.8) deki katsayılar reeldir çünkü f_i fonksiyonları reel değerlidir. $n=2$ için $a_1 = -iz(J)$ ve $a_2 = \det(J)$ reeldir.

Lemma 4.1: [23,33] $F(\mu) = \mu^2 + B\mu + C$ reel katsayılarla sahip ikinci dereceden bir polinom ve μ_1 ve μ_2 bu polinomun kökleri olduğunu varsayalım. O zaman aşağıdakiler geçerlidir:

1. $|\mu_1| < 1$ ve $|\mu_2| < 1 \Leftrightarrow F(-1) > 0, F(1) > 0$ ve $C < 1$. (Bu durumda denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.)
2. $\mu_1 = -1$ ve $|\mu_2| \neq 1 \Leftrightarrow F(-1) = 0$, ve $B \neq 0, 2$. (Bu durumda flip çatallanma meydana gelebilir.)
3. $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$, $|\lambda_1| = 1$ ve $|\mu_2| = 1 \Leftrightarrow B^2 - 4C < 0$ ve $C = 1$. (Bu durumda Neimark-sacker çatallanması meydana gelebilir.

4.2. İleri Euler Yöntemi

Birinci mertebeden diferansiyel denklemi göz önüne alalım:

$$x'(t) = g(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \leq t \leq b. \quad (4.2.1)$$

$[t_0, b]$ aralığını N eşit alt aralığa bölelim. $h = (b - t_0) / N$ ifadesine her alt aralığın büyüklüğüne bu yöntemin *adım büyüklüğü* denir. Bu adım boyutu $t_0, t_1, t_2, \dots, t_N$ düğümlerini tanımlar, burada $t_0 = t + jh$. Euler in yöntemi kullanılırsa $x'(t)$ yaklaşık olarak $(x(t+h) - x(t)) / h$ olarak ifade edilir. Bu durumda (4.4) denklemi

$$x(t+h) = x(t) + hg(t, x(t)) \quad (4.2.2) \text{ ifade}$$

edilebilir.

5. BULGULAR VE TARTIŞMA

5.1. Doymuş Ve Kitle Eylemi İnsidans Oranlarına Bağlı Salgın Hastalık Modellerinin Tedavi İle Analizi

Salgın hastalıkların dinamiklerini incelemek uygulamalı matematik için önemli bir araştırma konusu olmakla beraber insan sağlığına etki eden salgınların önlenmesinde ve ölüm oranlarının azaltılmasında önemi büyüktür. Günlük hayatta karşılaştığımız bir problemi anlamak, açıklamak ve problemi çözmek için matematiksel modeli ayrıntılı bir şekilde analiz etmemiz gerekir. Doğru hesaplanan ve analiz edilen model bize salgının büyüklüğüne veya etkisine göre salgının seyri hakkında doğru tedavi yöntemlerine sahip olmamıza izin verir. Salgın hastalıkların modellenmesi değişimin sürekli ya da kesikli olmasına göre değişecektir. Değişimin sürekli olması durumunda diferansiyel denklem modelleri kullanmak daha uygundur. Sürekli zaman hastalık modellerinin analizi birçok araştırmacı tarafından yapılmıştır [17,18,23,30,42,44]. Öte yandan değişimin kesikli olması durumunda modelleme için fark denklemleri kullanmak daha uygun olacaktır [14,18,28,30,33-38,41,42,45].

Wang [42] aşağıdaki modelin analizini yaparak tedavi kapasitesinin büyüklüğüne göre çatalanmanın var olduğunu göstermiştir:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= A - dS - \lambda SI \\ \frac{dI}{dt} &= \lambda SI - (d + \gamma + \varepsilon)I - T(I). \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I + T(I) - dR\end{aligned}\tag{5.1}$$

(5.1) deki ilk iki denklem R değişkeninden bağımsız olduğundan

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= A - dS - \lambda SI \\ \frac{dI}{dt} &= \lambda SI - (d + \gamma + \varepsilon)I - T(I)\end{aligned}\tag{5.2}$$

indirgenmiş modeli ele almak yeterlidir. λSI kitle eylem insidans oranına bağlı olan bu modelde $\lambda SI / 1 + \alpha I$ doymuş insidans alınırse modifiye edilmiş modelimizi

$$\frac{dS}{dt} = A - dS - \frac{\lambda SI}{1 + \alpha I} \quad (5.3)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\lambda SI}{1 + \alpha I} - (d + \gamma + \varepsilon)I - T(I)$$

olarak yazabiliriz. Buradaki amacımız, $T(I) = kI$, $0 \leq I \leq I_0$ tedavi fonksiyonuna bağlı (5.2) ve (5.3) sürekli SIR salgın modellerini ileri Euler yöntemi ile fark zamanlı modellere dönüştürerek modellerin dinamiklerini incelemek ve bu dinamikleri karşılaştırmaktır.

$z = d + \gamma + \varepsilon$ alınarak $\frac{dS}{dt} \approx \frac{S_{t+1} - S_t}{\delta}$ ve $\frac{dI}{dt} \approx \frac{I_{t+1} - I_t}{\delta}$ ile ayrıklaştırılmış (5.2) ve (5.3) sistemi

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= S_t + \delta(A - dS_t - \lambda SI_t) \\ I_{t+1} &= I_t + \delta(\lambda S_t I_t - zI_t - kI_t) \end{aligned} \quad (5.4)$$

ve

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= S_t + \delta(A - dS_t - \frac{\lambda S_t I_t}{1 + \alpha I_t}) \\ I_{t+1} &= I_t + \delta(\frac{\lambda S_t I_t}{1 + \alpha I_t} - zI_t - kI_t) \end{aligned} \quad (5.5)$$

ile ifade edilir. S ; duyarlı (hassas); hastalığı kapmamış ancak hastalığı kapmaya elverişli bireyler, I ; bulaşmış (enfekte); hastalığı kapmış ve başkalarına da hastalığı bulaştıran bireyler ve R ; hastalığa sahip olup iyileşen bireylerdir. Sistemdeki parametre tanımları ise aşağıdaki tablo ile sunulur:

Tablo 5.1. Parametrelerin Epidemiyolojik Anlamları

Parametreler	Epidemiyolojik Anlam
A	Doğum yoluyla popülasyona eklenen bireyler
λ	Enfeksiyon katsayısı
d	Popülasyondaki doğal ölüm oranı
γ	Enfekte bireylerin doğal iyileşme oranı
ε	Hastalığa bağlı ölüm oranı
α	Enfekte olanların tedavisinde bir gecikme olmasının etkisinin boyutu

İlerleyen bölümlerde öncelikle (5.4) modeline doymuş insidans oranı eklenerek doymuş insidans oranına bağlı salgın hastalık modeli (5.5) elde edilecek sonra (5.4) modeline göç parametreleri eklenerek göç içeren salgın hastalık modeli (5.6) elde edilerek daha sonra (5.4), (5.5) ve (5.6) salgın hastalık modellerinin denge noktalarının varlığı araştırılarak pozitif denge noktası için kararlılık ve çatallanma analizleri yapılacaktır. Teorik sonuçlarımızı doğrulayan sayısal örnekler verilecektir. Sistemimize ait grafikler popülasyon davranışını tanımlamak için sunulur.

5.2. Tedavi İle Kitle-Eylem İnsidans Oranına Bağlı (5.4) SIR Salgın Modelinin Analizi

Bu bölüm (5.4) sisteminin denge noktalarının varlığı, pozitif denge noktasının kararlılığı ve çatallanma şartlarını verir. O halde (5.4) salgın modeli için aşağıdaki teoremlere sahip oluruz.

Teorem 5.2.1: (5.4) modeli $(S^*, 0) = (\frac{A}{d}, 0)$ ve $(S^*, I^*) = (\frac{k+z}{\lambda}, \frac{A\lambda - d(k+z)}{(k+z)\lambda})$ olacak

şekilde iki denge noktasına sahiptir.

İspat: Tanım 4.1 den açıktır.

Teorem 5.2.2: $\frac{A\lambda}{k+z} > d > 0$ sağlansın. $(S^*, I^*) = (\frac{k+z}{\lambda}, \frac{A\lambda - d(k+z)}{(k+z)\lambda})$ denge noktasının

dinamikliği ile ilgili aşağıdakiler doğrudur:

i.1. $\frac{A\lambda(4(k+z)^2 - A\lambda)}{4 + (k+z)^3} < d$ olmak üzere;

$$\delta < \frac{A\lambda}{(k+z)(A\lambda - d(k+z))} - \sqrt{\frac{4d(k+z)^3 + A\lambda(-4(k+z)^2 + A\lambda)}{(k+z)^2(d(k+z) - A\lambda)^2}}$$

sağlanırsa denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

i.2. $B = -2 + \frac{\delta\lambda A}{k+z} \neq 0, 2$ olmak üzere $\delta = \frac{2(k+z)}{A\lambda} \neq 0, 2$ durumunda flip çatallanma vardır.

i.3. $0 < A < \frac{4(k+z)^2}{\lambda}$ ve $\delta = \frac{A\lambda}{(k+z)(A\lambda - d(k+z))}$ ise Neimark-Sacker çatallanma vardır.

İspat: (5.4) sisteminden hareketle;

$$F = S + \delta(A - dS - \lambda SI)$$

$$G = I + \delta I(\lambda S - z - k)$$

alalım. F ve G fonksiyonları yardımıyla,

$$J(S, I) = \begin{pmatrix} 1 - \delta(\lambda I + d) & -\delta\lambda S \\ \delta\lambda I & 1 + \delta(\lambda S - z - k) \end{pmatrix}$$

elde ederiz. $(S^*, I^*) = (\frac{k+z}{\lambda}, \frac{A\lambda - d(k+z)}{(k+z)\lambda})$ pozitif denge noktasında değerlendirilen

Jakobiyen matrisi

$$J(S^*, I^*) = J\left(\frac{k+z}{\lambda}, \frac{A\lambda - d(k+z)}{(k+z)\lambda}\right) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\delta\lambda A}{k+z} & -\delta(k+z) \\ \delta\left(\frac{A\lambda - d(k+z)}{k+z}\right) & 1 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan;

$$F(\mu) = \mu^2 - \left(2 - \left(\frac{\delta\lambda A}{k+z}\right)\right)\mu + 1 - \left(\frac{\delta\lambda A}{k+z}\right) + \delta^2(A\lambda - d(k+z))$$

karakteristik polinomuna ulaşırız. Böylece $F(1)$, $F(-1)$ ve C için;

$$F(1) = -\delta^2(d(k+z) - A\lambda)$$

$$F(-1) = \frac{(k+z) - (4 - (d(k+z)))\delta^2 + A\delta(-2 + (k+z)\delta)\lambda}{k+z}$$

$$C = \frac{(k+z) - d(k+z)^2\delta^2 + A\delta(-1 + (k+z)\delta)\lambda}{k+z}$$

formlarına ulaşırız. Lemma 4.1 deki şartlar değerlendirilerek sonuçlara kolayca ulaşılır.

5.3. Tedavi İle Doymuş İnsidans Oranına Bağlı SIR Salgın Modelinin Analizi

Bu bölüm (5.5) sisteminin pozitif denge noktasının varlığı, kararlılığı ve çatallanma şartlarını verir. O halde (5.5) salgın modeli için aşağıdaki teoremlere sahip oluruz.

Teorem 5.3.1: (5.5) sistemi $(S^*, 0) = (\frac{A}{d}, 0)$ ve $(S^*, I^*) = (\frac{k+z+\alpha A}{d\alpha+\lambda}, \frac{-d(k+z)+A\lambda}{(k+z)(d\alpha+\lambda)})$

olacak şekilde iki denge noktasına sahiptir.

İspat: Denge noktamız (S^*, I^*) olsun. (5.5) sisteminde $S_{t+1} = S_t = S^*$ ve $I_{t+1} = I_t = I^*$ yazılırsa çözümler elde edilir. (Tanım 4.1 e bakınız)

Teorem 5.3.2:

$$\frac{-d(k+z)^2\alpha\delta(-2+d\delta)+(4+(k+z+\alpha A)-2(d+k+z)\alpha\delta A-d(k+z)(k+z-\alpha A)\delta^2)\lambda+A\delta(-2+(k+z)\delta)\lambda^2}{(k+z+\alpha A)\lambda} > 0$$

olmak üzere $0 < A < \frac{(k+z)^2}{\lambda}$ ve $\delta < \frac{1}{k+z} + \frac{\alpha}{d\alpha+\lambda} - \frac{d}{d(k+z)-A\lambda}$ sağlanırsa (5.5)

sisteminin denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

İspat: (5.5) sistemi gözönüne alarak;

$$f = S + \delta(A - dS - \frac{\lambda SI}{1+\alpha I})$$

$$g = I + \delta(\frac{\lambda SI}{1+\alpha I} - zI - kI)$$

alalım. Burada Jakobiyeen matrisi:

$$J(S, I) = \begin{pmatrix} 1 + \delta(-d - \frac{\lambda I}{1+\alpha I}) & \delta(\frac{\alpha \lambda SI}{(1+\alpha I)^2} - \frac{\lambda S}{1+\alpha I}) \\ \frac{\delta \lambda I}{1+\alpha I} & 1 + \delta(-k - z - \frac{\alpha \lambda SI}{(1+\alpha I)^2} + \frac{\lambda S}{1+\alpha I}) \end{pmatrix}$$

dir. $(S^*, I^*) = (\frac{k+z+\alpha A}{d\alpha+\lambda}, \frac{-d(k+z)+A\lambda}{(k+z)(d\alpha+\lambda)})$ denge noktasında değerlendirilen Jakobiyeen

matrisi

$$J(S^*, I^*) = \begin{pmatrix} \frac{k+z+A(\alpha-d\delta\alpha-\delta\lambda)}{k+z+\alpha A} & -\frac{(k+z)^2\delta(d\alpha+\lambda)}{(k+z+\alpha A)\lambda} \\ -\frac{\delta(d(k+z)-A\lambda)}{k+z+\alpha A} & \frac{d(k+z)^2\delta\alpha+(k+z+\alpha A-\delta\alpha A(k+z))\lambda}{(k+z+\alpha A)\lambda} \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Jakobiyen matrisinin karakteristik polinomu;

$$\begin{aligned} F(\mu) = \mu^2 + & \frac{-d(k+z)^2\delta\alpha+(-2(k+z+\alpha A)+(d+k+z)\alpha\delta A)\lambda+A\delta\lambda^2}{(k+z+\alpha A)\lambda}\mu \\ & + \frac{(k+z+\alpha A-(d+k+z)\alpha\delta A-d(k+z)(k+z-\alpha A)\delta^2)\lambda}{(k+z+\alpha A)\lambda} \\ & + \frac{-d(k+z)^2\delta\alpha(-1+d\delta)+A\delta(-1+(k+z)\delta)\lambda^2}{(k+z+\alpha A)\lambda} \end{aligned}$$

bulunmuş olur. Lemma 4.1 deki şartlardan hareketle lokal kararlılık şartlarına ulaşılır.

5.4. Tedavi İle Göç İçeren SIR Salgın Hastalık Modelinin Analizi

Burada (5.4) modeline göç parametreleri eklenecektir. pS ; duyarlı bireylere yapılan göç, qI ; enfekte bireylere yapılan göç olmak üzere hem duyarlı bireylere hem de hastalıklı bireylerin göç almasına dayanan bir SIR salgın modeli aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= S_t + \delta(A - dS_t - \lambda SI_t + pS_t) \\ I_{t+1} &= I_t + \delta(\lambda S_t I_t - zI_t - kI_t + qI_t). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Göç etkisinin sistemi nasıl etkilediğini görmek için öncelikle tedavi içeren göç almayan modelin (5.4) ün analizi ile göç alan model (5.6) nın dinamiklerini inceleyip, her iki model karşılaştırılacaktır. Bölüm boyunca yapılan analizlerde kullanılan temel kavramlar için gerekli olan bazı çalışmaları referans olarak verebiliriz [39,40,45].

5.4.1. Lokal kararlılık

Model (5.6) nin iki tane denge noktasına $(S^*, 0) = (\frac{A}{d-p}, 0)$ ve $(S^*, I^*) = (\frac{k+z-q}{\lambda}, \frac{A\lambda + (p-d)(k+z-q)}{(k+z-q)\lambda})$ sahip olduğunu görürüz. Şimdi pozitif denge noktası $(S^*, I^*) = (\frac{k+z-q}{\lambda}, \frac{A\lambda + (p-d)(k+z-q)}{(k+z-q)\lambda})$ nin lokal asimptotik kararlılık şartlarını inceleyelim.

$$f(S) = S + \delta(A - dS - \lambda SI + pS)$$

$$g(I) = I + \delta(\lambda SI - zI - kI + qI)$$

alalım. Böylece biz aşağıdaki Jakobiyen matrisini yazabiliriz:

$$J(S, I) = \begin{pmatrix} f_S(S, I) & f_I(S, I) \\ g_S(S, I) & g_I(S, I) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \delta(-d - \lambda I + p) & -\delta\lambda S \\ \delta\lambda I & 1 + \delta(\lambda S - z - k + q) \end{pmatrix}.$$

$(S^*, I^*) = (\frac{k+z-q}{\lambda}, \frac{A\lambda + (p-d)(k+z-q)}{(k+z-q)\lambda})$ pozitif denge noktası civarında değerlendirilen

Jakobiyen matrisini,

$$J(S^*, I^*) = J(\frac{k+z-q}{\lambda}, \frac{A\lambda + (p-d)(k+z-q)}{(k+z-q)\lambda}) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\delta\lambda A}{k+z-q} & -\delta(k+z-q) \\ \delta(\frac{A\lambda + (k+z-q)(p-d)}{k+z-q}) & 1 \end{pmatrix}$$

olarak elde ederiz. Burada

$$\det(J) = 1 - \frac{\delta\lambda A}{k+z-q} + \delta^2\lambda A + \delta^2(p-d)(k+z-q)$$

ve

$$\text{iz}(J) = 2 - \frac{\delta\lambda A}{k+z-q}$$

dir. O halde Jakobiyen matrise karşılık gelen karakteristik polinom aşağıdaki forma sahiptir:

$$F(\mu) = \mu^2 - \left(2 - \frac{\delta\lambda A}{k+z-q}\right)\mu + 1 - \frac{\delta\lambda A}{k+z-q} + \delta^2(A\lambda + (p-d)(k+z-q))$$

ve bu polinomun kökleri:

$$\mu_1 = 1 - \frac{\delta\lambda A}{2(k+z)} - \frac{\delta}{2} \sqrt{\left(\frac{\lambda A}{k+z}\right)^2 - 4\lambda A + 4d(k+z)}$$

$$\mu_2 = 1 - \frac{\delta\lambda A}{2(k+z)} + \frac{\delta}{2} \sqrt{\left(\frac{\lambda A}{k+z}\right)^2 - 4\lambda A + 4d(k+z)}$$

olarak bulunur. Denge noktasının kararlılığı için bu iki özdeğerin büyüklüklerinin 1'den küçük kalması gerekir. Model (5.6) nin kararlılığını analiz etmek amacıyla parametreler üzerindeki koşulları belirlemek için, ilk olarak aşağıdaki koşullardan yararlanacağız:

$$|\mu_1| < 1 \text{ ve } |\mu_2| < 1 \Leftrightarrow F(1) > 0, F(-1) > 0 \text{ ve } C < 1.$$

Koşul 1.

$$F(1) > 0 \Leftrightarrow F(1) = \delta^2(A\lambda + (p-d)(k+z-q)) > 0 \quad \text{ise} \quad \frac{A\lambda}{k+z-q} > d-p > 0 \quad \text{sağlanmak}$$

zorundadır.

Koşul 2.

$$F(-1) > 0 \Leftrightarrow F(-1) = \frac{4(k+z-q) - 2\delta\lambda A + \delta^2(\lambda A(k+z-q) + (k+z-q)^2(p-d))}{k+z-q} > 0$$

eşitsizliği çözülürse

$$\delta_1 < \frac{\lambda A}{\lambda A(k+z-q) + (k+z-q)^2(p-d)} - \frac{\sqrt{4\lambda^2 A^2 - 16\lambda A(k+z-q)^2 - 16(k+z-q)^3(p-d)}}{2(\lambda A + (k+z-q)(p-d))}$$

veya

$$\delta_2 > \frac{\lambda A}{\lambda A(k+z-q) + (k+z-q)^2(p-d)} + \frac{\sqrt{4\lambda^2 A^2 - 16\lambda A(k+z-q)^2 - 16(k+z-q)^3(p-d)}}{2(\lambda A + (k+z-q)(p-d))}$$

sağlanmalıdır.

Koşul 3.

$$C < 1 \Leftrightarrow C = \frac{(k+z-q) - \delta\lambda A + \delta^2(\lambda A(k+z-q) + (k+z-q)^2(p-d))}{k+z-q} < 1 \quad \text{eşitsizliği}$$

çözülürse

$$\delta < \frac{A\lambda}{(k+z-q)(A\lambda + (p-d)(k+z-q))}$$

şartını elde ederiz. Böylece denge noktasının lokal kararlılığı için aşağıdaki teoreme sahip oluruz.

Teorem 5.4.1: $\frac{A\lambda}{k+z-q} > d - p > 0$ sağlansın. $\frac{A\lambda(4(k+z-q)^2 - A\lambda)}{4 + (k+z-q)^3} < d$

ve

$$\delta < \frac{A\lambda}{(k+z-q)(A\lambda + (p-d)(k+z-q))} - \sqrt{\frac{4(d-p)(k+z-q)^3 + A\lambda(-4(k+z-q)^2 + A\lambda)}{(k+z-q)^2((p-d)(k+z-q) + A\lambda)^2}}$$

şartları sağlanırsa model (5.6) nin pozitif denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

5.4.2. Flip çatallanma analizi

$B \neq 0, 2$ ve $F(-1) = 0$ olduğunda flip çatallanmanın oluşabileceğini biliyoruz. Burada $B = -iz(J)$, $C = \det(J)$ olduğundan, çatallanmanın meydana gelebilmesi için gerekli şartları değerlendireceğiz.

Koşul 1. $F(-1)=0$ dan biz

$$\delta_1 = \frac{\lambda A}{\lambda A(k+z-q) + (k+z-q)^2(p-d)} - \frac{\sqrt{4\lambda^2 A^2 - 16\lambda A(k+z-q)^2 - 16(k+z-q)^3(p-d)}}{2(\lambda A + (k+z-q)(p-d))},$$

ve

$$\delta_2 = \frac{\lambda A}{\lambda A(k+z-q) + (k+z-q)^2(p-d)} + \frac{\sqrt{4\lambda^2 A^2 - 16\lambda A(k+z-q)^2 - 16(k+z-q)^3(p-d)}}{2(\lambda A + (k+z-q)(p-d))}.$$

köklerini elde ederiz.

Koşul 2. $B \neq 0$ şartından biz

$$B = -iz(J) = -(2 - \frac{\delta \lambda A}{k+z-q}) \text{ ve } -iz(J) \neq 0 \Leftrightarrow \delta \neq \frac{2(k+z-q)}{\lambda A}$$

ifadesine ulaşırız.

Koşul 3. Son olarak $B \neq 2$ şartını göz önüne alarak

$$B = -iz(J) = -(2 - \frac{\delta \lambda A}{k+z-q}) \text{ ve } -iz(J) \neq 2 \Leftrightarrow \delta \neq \frac{4(k+z-q)}{\lambda A}$$

koşulunu elde ederiz. Böylece denge noktasının flip çatallanması için aşağıdaki teoreme sahip oluruz.

Teorem 5.4.2:

$$\delta_1 = \frac{\lambda A}{\lambda A(k+z-q) + (k+z-q)^2(p-d)} - \frac{\sqrt{4\lambda^2 A^2 - 16\lambda A(k+z-q)^2 - 16(k+z-q)^3(p-d)}}{2(\lambda A + (k+z-q)(p-d))}$$

$$\delta_2 = \frac{\lambda A}{\lambda A(k+z-q) + (k+z-q)^2(p-d)} + \frac{\sqrt{4\lambda^2 A^2 - 16\lambda A(k+z-q)^2 - 16(k+z-q)^3(p-d)}}{2(\lambda A + (k+z-q)(p-d))}$$

$$\delta \neq \frac{2(k+z-q)}{\lambda A} \text{ ve } \delta \neq \frac{4(k+z-q)}{\lambda A} \text{ şartları sağlanırsa model (5.6) flip çatallanmaya}$$

sahiptir.

5.4.3. Neimark-Sacker çatallanmasının analizi

$B = -iz(J)$ ve $C = \det(J)$ olmak üzere çatallanma analizi $B^2 - 4C < 0$ ve $C = 1$ olduğunda Neimark-Sacker çatallanmanın oluşabileceğini biliyoruz. Şimdi bu şartları ele alalım:

Koşul 1. $B^2 - 4C < 0$ durumunu değerlendirelim.

$$B^2 - 4C = \frac{\delta^2 A^2 \lambda^2}{(k + z - q)^2} - 4\delta^2 (A\lambda + (p - d)(k + z - q)) < 0 \text{ eşitsizliği çözülürse}$$

$$0 < A < \frac{4(k + z - q)^2}{\lambda} \text{ ve } 0 < d < \frac{A\lambda(4(k + z - q)^2 - A\lambda)}{4(k + z - q)^3} \text{ şartları elde edilir.}$$

Koşul 2. $C=1$ den hareketle;

$$C = \det(J) = 1 - \frac{\delta\lambda A}{k + z - q} + \delta^2 (A\lambda + (p - d)(k + z - q)) = 1 \text{ durumu gözönüne alınırsa}$$

$$\delta = \frac{A\lambda}{(k + z - q)(A\lambda + (p - d)(k + z - q))} \text{ elde edilir.}$$

Sonuç olarak pozitif denge noktasında elde edilen δ değeri için Neimark-Sacker çatallanma olabileceği görülür. Bu şartlar aşağıdaki teoremle tek bir şekilde ifade edilebilir.

Teorem 5.4.3: $0 < A < \frac{4(k + z - q)^2}{\lambda}$ ve $0 < d < \frac{A\lambda(4(k + z - q)^2 - A\lambda)}{4(k + z - q)^3}$ olmak üzere

$\delta = \frac{A\lambda}{(k + z - q)(A\lambda + (p - d)(k + z - q))}$ ise model (5.6) Neimark-Sacker çatallanmaya sahiptir.

5.5. Kaos Kontrol

Bu bölümde (5.4) ve (5.6) sistemlerinde ortaya çıkan kaosu kontrol etmek için kaos kontrol yöntemini kullanacağız.

5.5.1. (5.4) Modeli için kaos kontrol analizi

(5.4) sistemin denetleyicisini aşağıdaki gibi tanımlarız:

$$S_{t+1} = S_t + \delta(A - dS_t - \lambda SI_t) + U_t$$

$$I_{t+1} = I_t + \delta(\lambda S_t I_t - zI_t - kI_t)$$

Burada $U_t = -p_1(S_t - S^*) - p_2(I_t - I^*)$ dır. Bu sistemin pozitif denge noktasındaki Jakobiyen matrisi

$$J(S^*, I^*) = J\left(\frac{k+z}{\lambda}, \frac{A\lambda - (k+z)d}{(k+z)\lambda}\right) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\delta A\lambda}{k+z} - p_1 & -\delta(k+z) - p_2 \\ \delta\left(\frac{A\lambda - (k+z)d}{k+z}\right) & 1 \end{pmatrix}$$

dir ve Jakobiyen matris aracılığı ile elde ettiğimiz karakteristik denklem;

$$F(\mu) = \mu^2 - \left(2 - \frac{\delta A\lambda}{k+z} - p_1\right)\mu + 1 - \frac{\delta A\lambda}{k+z} - p_1 + \delta^2(A\lambda - d(k+z)) + \delta p_2\left(\frac{A\lambda - d(k+z)}{k+z}\right)$$

olarak yazılabilir. λ_1 ve λ_2 bu karakteristik denklemin özdeğerleri ve o halde biz

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2 - \frac{\delta A\lambda}{k+z} - p_1 \text{ ve } \lambda_1 \lambda_2 = \delta^2(A\lambda - d(k+z)) + \delta p_2\left(\frac{A\lambda - d(k+z)}{k+z}\right)$$

eşitliklerine sahip oluruz. Burada $\lambda_1 \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_1 = -1$ denklemlerini çözmeliyiz.

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det(J) = 1 \Rightarrow I_1 = -\frac{\delta A\lambda}{k+z} - p_1 + \delta^2(A\lambda - d(k+z)) + \delta p_2\left(\frac{A\lambda - d(k+z)}{k+z}\right)$$

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow I_2 = \delta^2(A\lambda - d(k+z)) + \delta p_2\left(\frac{A\lambda - d(k+z)}{k+z}\right),$$

ve

$$\lambda_1 = -1 \Rightarrow I_3 = 4 - \frac{2\delta A\lambda}{k+z} - 2p_1 + \delta^2(A\lambda - d(k+z)) + \delta p_2\left(\frac{A\lambda - d(k+z)}{k+z}\right)$$

dır.

Böylece I_1, I_2 ve I_3 doğruları elde edilir. I_1, I_2 ve I_3 ile sınırlanan bölge, büyüklüğü 1' den küçük olan kararlı özdeğerleri verir.

5.5.2. (5.6) Modeli için kaos kontrol analizi

(5.6) sistemin denetleyicisini aşağıdaki gibi tanımlarız:

$$S_{t+1} = S_t + \delta(A - dS_t - \lambda SI_t + pS_t) + U_t$$

$$I_{t+1} = I_t + \delta(\lambda S_t I_t - zI_t - kI_t + qI_t)$$

Burada $U_t = -p_1(S_t - S^*) - p_2(I_t - I^*)$ olmak üzere bir kontrol kuvvetidir. Bu sistemin pozitif denge noktasındaki Jakobiye matrisi

$$J\left(\frac{k+z-q}{\lambda}, \frac{A\lambda + (p-d)(k+z-q)}{(k+z-q)\lambda}\right) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\delta A\lambda}{k+z-q} - p_1 & -\delta(k+z-q) - p_2 \\ \delta\left(\frac{A\lambda + (p-d)(k+z-q)}{k+z-q}\right) & 1 \end{pmatrix}$$

dir. Jakobiye matris aracılığı ile elde ettiğimiz karakteristik denklem

$$F(\mu) = \mu^2 - iz(J) + \det(J) \text{ olmak üzere;}$$

$$iz(J) = 2 - \frac{\delta A\lambda}{k+z-q} - p_1$$

$$\det(J) = 1 - \frac{\delta A\lambda}{k+z-q} - p_1 + \delta^2(A\lambda + (p-d)(k+z-q)) + \delta p_2\left(\frac{A\lambda + (p-d)(k+z-q)}{k+z-q}\right)$$

dir. λ_1 ve λ_2 bu karakteristik denklemin özdeğerleri ve $\lambda_1\lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_1 = -1$ şartlarının sağlanmasıyla

$$I_1 = -\frac{\delta A\lambda}{k+z-q} - p_1 + \delta^2(A\lambda + (p-d)(k+z-q)) + \delta p_2\left(\frac{A\lambda + (p-d)(k+z-q)}{k+z-q}\right)$$

$$I_2 = \delta^2(A\lambda + (p-d)(k+z-q)) + \delta p_2\left(\frac{A\lambda + (p-d)(k+z-q)}{k+z-q}\right)$$

$$I_3 = 4 - 2p_1 - \frac{2\delta A\lambda}{k+z-q} + \delta^2(A\lambda + (p-d)(k+z-q)) + \delta p_2\left(\frac{A\lambda + (p-d)(k+z-q)}{k+z-q}\right)$$

I_1, I_2 ve I_3 ile doğruları elde edilir. I_1, I_2 ve I_3 ile sınırlanan bölge, büyüklüğü 1' den küçük olan kararlı özdeğerleri verir.

6. NÜMERİK SİMÜLASYONLAR

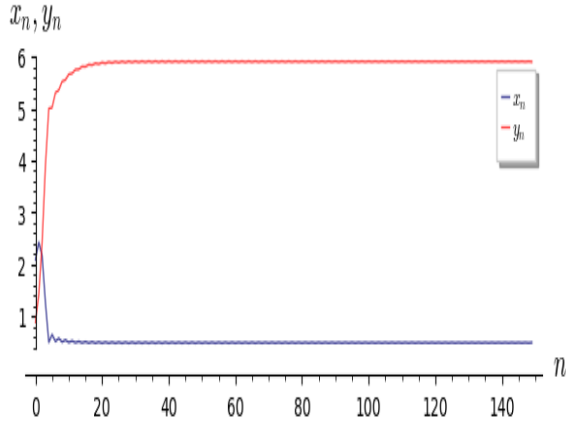
Sistemdeki parametre değerlerine bağlı olarak teorik sonuçlarımızı doğrulamak için bu bölümde nümerik örnekler vereceğiz. Matematiksel yazılım programı [33] kullanarak zaman serisi, faz ve çatallanma grafiklerini sunarız. (Tüm örnekler $S_t = x_n$ ve $I_t = y_n$ alınarak yazılmıştır.)

Şekil (6.1-(a)) grafiğinde uygun parametre değerleri ile sistem (5.4) ün lokal asimptotik kararlı ($\delta = 0.365$) olduğunu görürken şekil (6.1-(b)) grafiğinde δ değeri arttırıldığında sistemin kararsız ($\delta = 0.4 > 0.3665$) olduğunu görürüz. Aynı parametre değerleri ile şekil (6.2-(a)) ve şekil (6.2-(b)) de (5.4) sisteminin faz portreleridir. Şekil (6.3) te ise sistemin flip çatallanma grafiğini sunarız. $\delta = \frac{2(k+z)}{A\lambda} = \frac{1}{3} \neq 0,2$ olmak üzere $\delta = 0.3665$ değerinde flip çatallanma ortaya çıkmaktadır. Daha sonra şekil (6.4) sistemin denge noktasının Neimark-Sacker çatallanmasının varlığını gösterir. Şekil (6.5) ve şekil (6.6) de SIR salgın modellerimize aynı değerler vererek grafikleri incelediğimizde doymuş insidans eklediğimiz (5.5) modelinin daha çabuk kararlılığa ulaştığını söyleyebiliriz. Bu da doymuş insidansın kararlılığa etkisini gösterir. Şekil (6.7-(a)) grafiği sistem (6.5) in lokal asimptotik kararlı olduğunu gösterirken şekil (6.7-(b)) grafiği de sistemin kararsız davranışını ortaya koyar. Şekil (6.7-(a)) popülasyona eklenen göç sayısının doğal ölüm oranından küçük olması durumunda ($p < d$) elde ettiğimiz davranış iken şekil (6.7-(b)) ise popülasyona eklenen göç sayısının doğal ölüm oranından büyük olması durumunda ($p > d$) elde edilen davranış olur. Şekil (6.8-(a)) ve şekil (6.8-(b)) ise sırasıyla $p < d$ ve $p > d$ durumundaki faz portrelerini sunar. Şekil (6.11-(a)) ve şekil (6.11-(b)) bize sistem (5.6) ve (6.6) nın flip çatallanmaya sahip olduğunu gösterirken (6.12-(a)) ve (6.12-(b)) şekilleri de Neimark-sacker çatallanmaya sahip olduğunu gösterir.

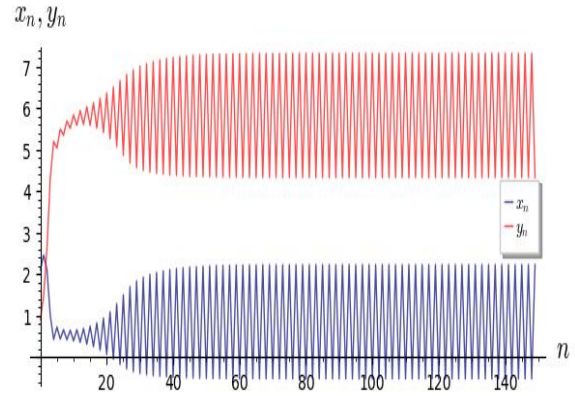
Örnek 6.1: $A = 3; \lambda = 1; k = 0.2; z = 0.3; d = 0.1$ parametre değerleri ile sistem (5.4) ü,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \delta(3 - 0.1x_n - 1x_n y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + \delta y_n(1x_n - 0.3 - 0.2) \end{aligned} \quad (6.1)$$

şeklinde yazabiliriz. Sunulan grafikler sistem (5.4) ün dinamik davranışını gösterir.



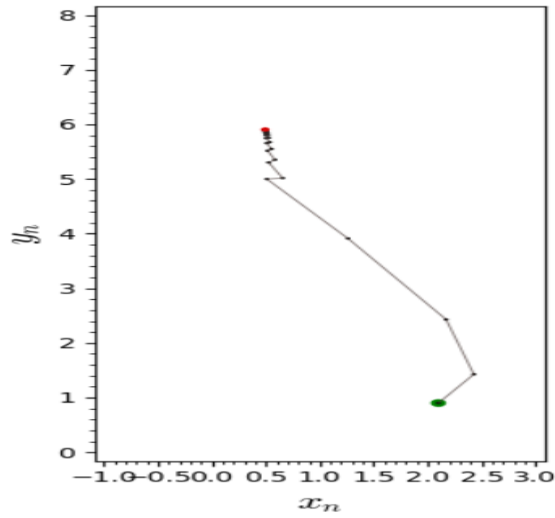
(a)



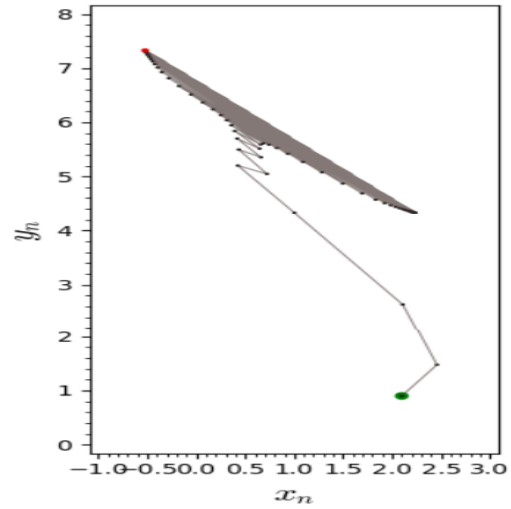
(b)

Şekil 6.1-(a). $A = 3; d = 0.1; k = 0.2; z = 0.3; \lambda = 1; \delta = 0.365$ ve $(x_0, y_0) = (2.1, 0.9)$ parametre değerleri ile (6.1) sisteminin zaman serisi grafiği

Şekil 6.1-(b). $A = 3; d = 0.1; k = 0.2; z = 0.3; \lambda = 1; \delta = 0.4$ ve $(x_0, y_0) = (2.1, 0.9)$ parametre değerleri ile (6.1) sistemin zaman serisi grafiği



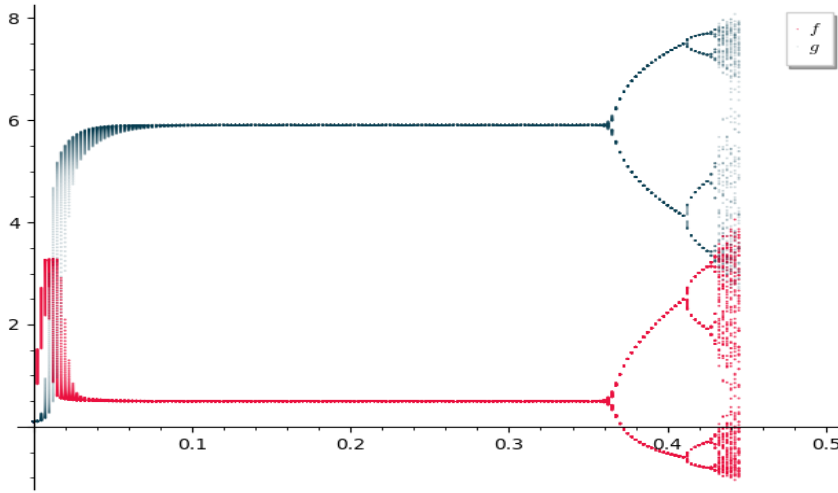
(a)



(b)

Şekil 6.2-(a). $A = 3; d = 0.1; k = 0.2; z = 0.3; \lambda = 1; \delta = 0.365$ ve $(x_0, y_0) = (2.1, 0.9)$ parametre değerleri ile (6.1) sisteminin faz grafiği

Şekil 6.2-(b). $A = 3; d = 0.1; k = 0.2; z = 0.3; \lambda = 1; \delta = 0.4$ ve $(x_0, y_0) = (2.1, 0.9)$ parametre değerleri ile (6.1) sisteminin faz grafiği

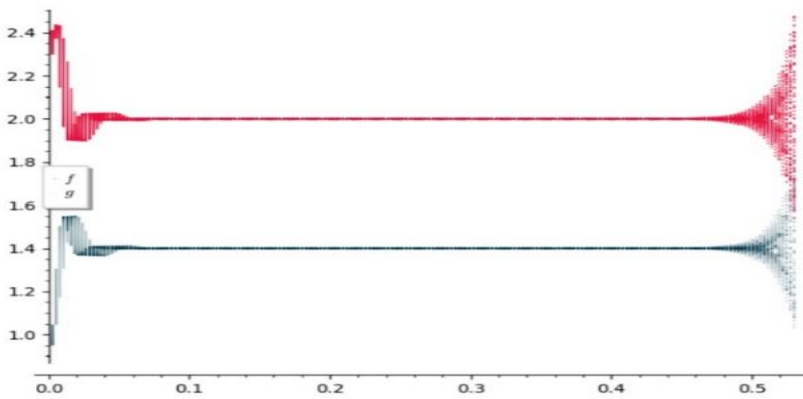


Şekil 6.3. $A = 3; d = 0.1; k = 0.2; z = 0.3; \lambda = 1; \delta = 0.3665$ ve $(x_0, y_0) = (0.1, 0.1)$ parametre değerleri ile (6.1) sisteminin flip çatallanma grafiği

Örnek 6.2: $A = 3; \lambda = 1; k = 1; z = 1; d = 0.1; 0 < \delta < 0.53$ parametre değerleri ile (5.4) sistemimiz

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \delta(3 - 0.1x_n - 1x_n y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + \delta y_n(1x_n - 1 - 1) \end{aligned} \quad (6.2)$$

olarak yazılabilir. Sistem (5.4) ün dinamik davranışı için aşağıdaki grafik elde edilir.



Şekil 6.4. $A = 3; d = 0.1; k = 1; z = 1; \lambda = 1; \delta = 0.535$ ve $(x_0, y_0) = (2.1, 0.9)$ parametre değerleri ile (6.2) sisteminin Neimark-Sacker çatallanma grafiği

Örnek 6.3: $A = \frac{1}{2}; \lambda = 1; k = 0.5; z = 0.5; d = 0.1; \delta = 1; \alpha = 0.1$ parametre değerleri ile (5.4)

ve (5.5) sistemimiz

$$x_{n+1} = x_n + 1 \left(\frac{1}{2} - 0.1x_n - 1x_n y_n \right) \quad (6.3)$$

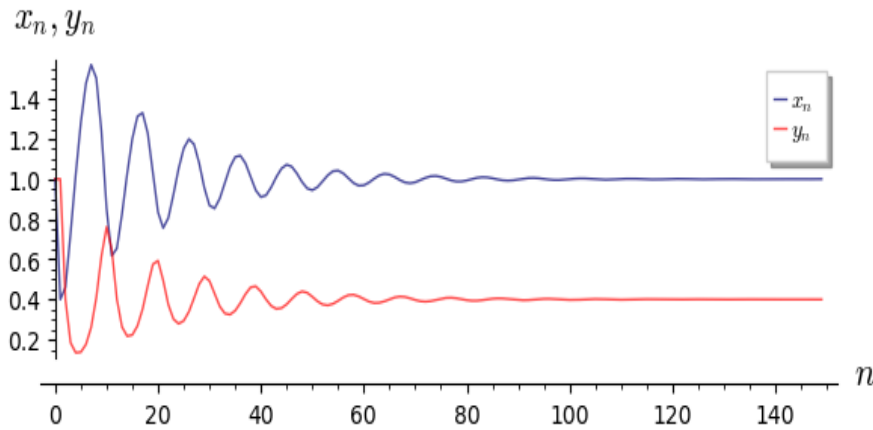
$$y_{n+1} = y_n + 1y_n(1x_n - 0.5 - 0.5)$$

ve

$$x_{n+1} = x_n + 1 \left(\frac{1}{2} - 0.1x_n - \frac{1x_n y_n}{1 + 0.1y_n} \right) \quad (6.4)$$

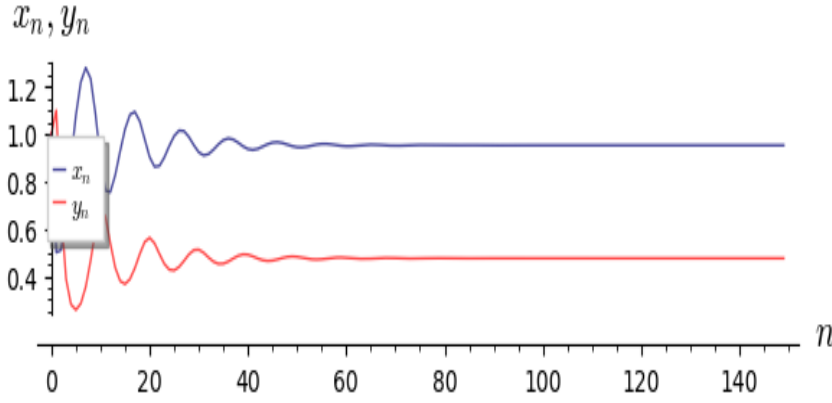
$$y_{n+1} = y_n + 1 \left(\frac{1x_n y_n}{1 + 0.1y_n} - 0.5y_n - 0.5y_n \right)$$

olarak yazılabilir. (5.4) ve (5.5) sistemlerinin dinamik davranışı için aşağıdaki grafikler elde edilir.



Şekil 6.5. $A = \frac{1}{2}; \lambda = 1; k = 0.5; z = 0.5; d = 0.1; \delta = 1$ parametre değerleri

ile $(x_0, y_0) = (1, 1)$ başlangıç değeri ile (6.3) sisteminin zaman serisi grafiği



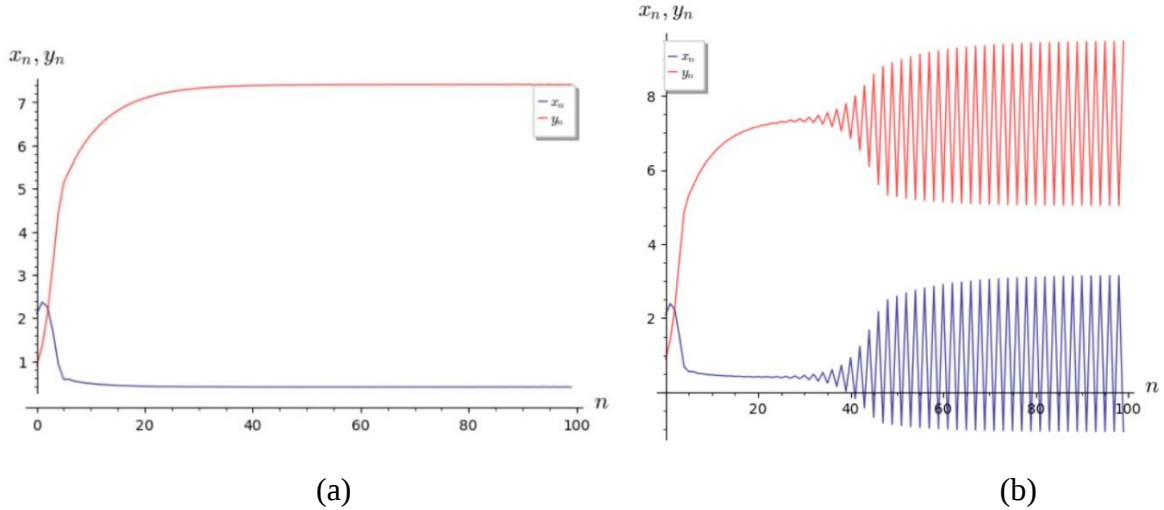
Şekil 6.6. $A = \frac{1}{2}; \lambda = 1; k = 0.5; z = 0.5; d = 0.1; \delta = 1; \alpha = 0.1$ parametre

değerleri ile $(x_0, y_0) = (1, 1)$ başlangıç değeri ile (6.4) sisteminin zaman serisi grafiği

Örnek 6.4: $A = 3; \lambda = 1; k = 0.2; z = 0.3; q = 0.1; d = 0.1; p = 0.01$ parametre değerleri ile sistem (5.6) yı

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \delta(3 - 0.1x_n - 1x_n y_n + 0.01x_n) \\ y_{n+1} &= y_n + \delta y_n(1x_n - 0.3 - 0.2 + 0.1) \end{aligned} \quad (6.5)$$

şeklinde yazabiliriz. Sistem (5.6) in dinamik davranışı için aşağıdaki grafikler elde edilir.

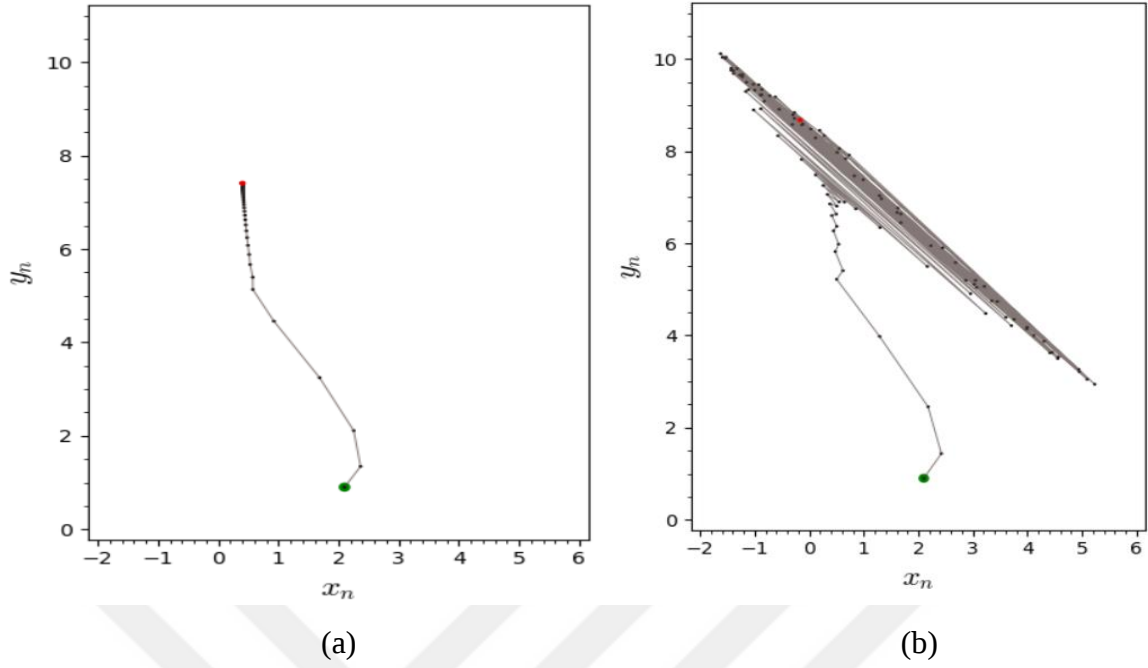


Şekil 6.7-(a). $A = 3; d = 0.1; k = 0.2; z = 0.3; \lambda = 1; p = 0.01; q = 0.1,$ $\delta = 0.289$ ve

$(x_0, y_0) = (2.1, 0.9)$ parametre değerleri ile (6.5) sisteminin zaman serisi grafiği

Şekil 6.7-(b). $A = 3; d = 0.1; k = 0.2; z = 0.3; \lambda = 1; p = 0.01; q = 0.1$ ve $\delta = 0.32$

$(x_0, y_0) = (2.1, 0.9)$ parametre değerleri ile (6.5) sisteminin zaman serisi grafiği



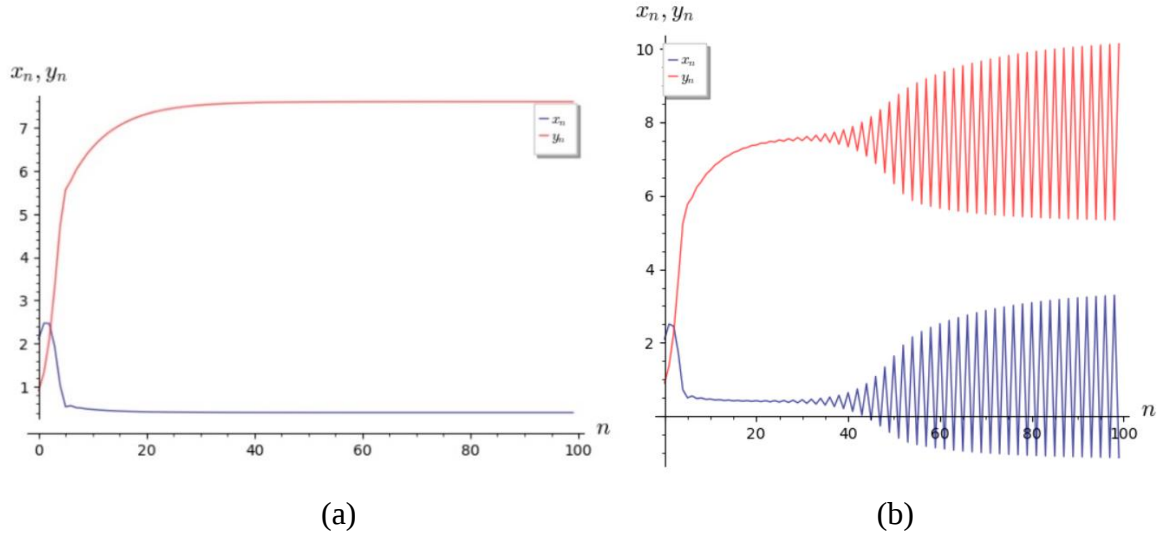
Şekil 6.8-(a). $A = 3; d = 0.1; k = 0.2; z = 0.3; \lambda = 1; p = 0.01; q = 0.1$ $\delta = 0.29$ $(x_0, y_0) = (2.1, 0.9)$ parametre değerleri ile (6.5) sisteminin faz grafiği

Şekil 6.8-(b). $A = 3; d = 0.1; k = 0.2; z = 0.3; \lambda = 1; p = 0.01; q = 0.1$ $\delta = 0.35$ $(x_0, y_0) = (2.1, 0.9)$ parametre değerleri ile (6.5) sisteminin faz grafiği

Örnek 6.5: $A = 3; \lambda = 1; k = 0.2; z = 0.3; q = 0.1; d = 0.1; p = 0.2$ parametre değerleri ile sistem (5.6) yı

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n + \delta(3 - 0.1x_n - 1x_n y_n + 0.2x_n) \\
 y_{n+1} &= y_n + \delta y_n(1x_n - 0.3 - 0.2 + 0.1)
 \end{aligned}
 \tag{6.6}$$

şeklinde yazabiliriz. Sistem (5.6) in dinamik davranışı için aşağıdaki grafikler elde edilir.

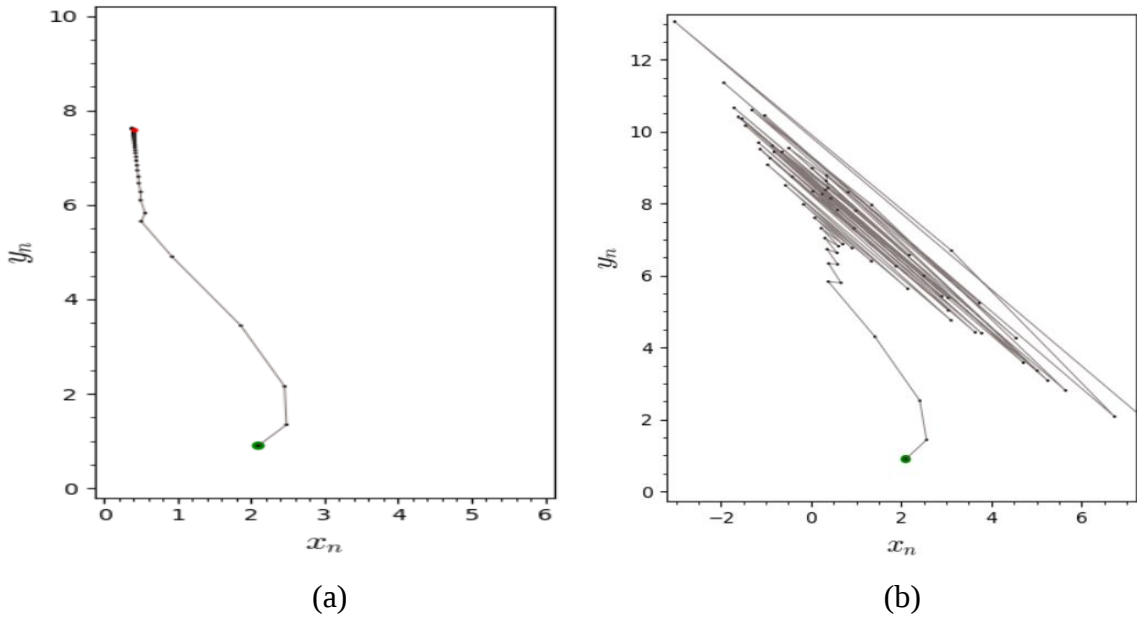


Şekil 6.9-(a). $A = 3; d = 0.1; k = 0.2; z = 0.3; \lambda = 1; p = 0.2; q = 0.1$ ve $\delta = 0.287$

$(x_0, y_0) = (2.1, 0.9)$ parametre değerleri ile (6.6) sisteminin zaman serisi grafiği

Şekil 6.9-(b). $A = 3; d = 0.1; k = 0.2; z = 0.3; \lambda = 1; p = 0.2; q = 0.1$ ve $\delta = 0.31$

$(x_0, y_0) = (2.1, 0.9)$ parametre değerleri ile (6.6) sisteminin zaman serisi grafiği

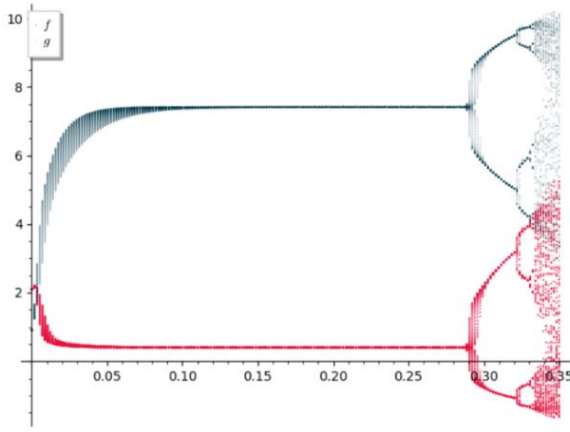


Şekil 6.10-(a). $A = 3; d = 0.1; k = 0.2; z = 0.3; \lambda = 1; p = 0.2; q = 0.1$, $\delta = 0.29$

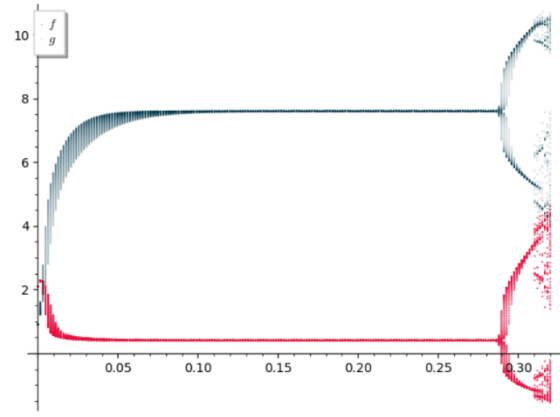
$(x_0, y_0) = (2.1, 0.9)$ parametre değerleri ile (6.6) sisteminin faz grafiği

Şekil 6.10-(b). $A = 3; d = 0.1; k = 0.2; z = 0.3; \lambda = 1; p = 0.2; q = 0.1$, $\delta = 0.35$

$(x_0, y_0) = (2.1, 0.9)$ parametre değerleri ile (6.6) sisteminin faz grafiği



(a)



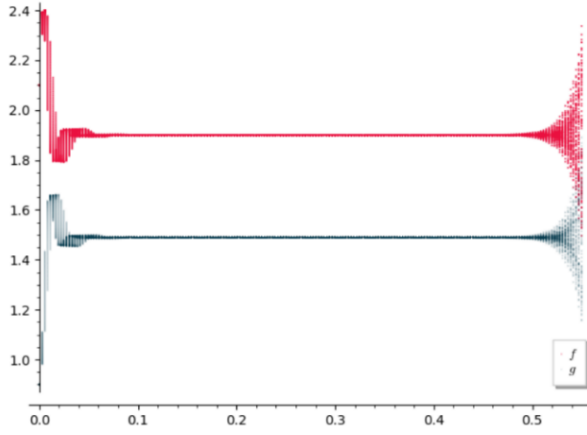
(b)

Şekil 6.11-(a) $A = 3; d = 0.1; k = 0.2; z = 0.3; \lambda = 1; p = 0.01; q = 0.1,$ $0 < \delta < 0.35$

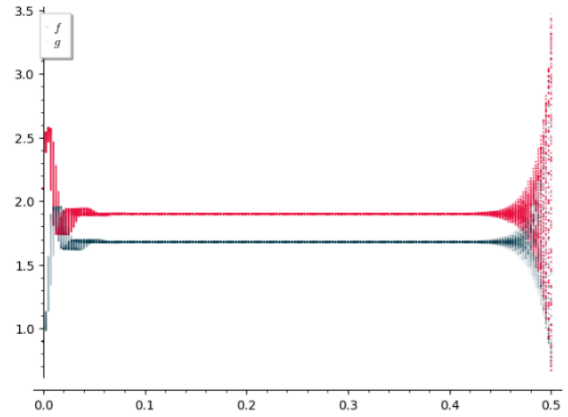
$(x_0, y_0) = (2.1, 0.9)$ parametre değerleri ile (6.5) sisteminin flip çatallanma grafiği

Şekil 6.11-(b). $A = 3; d = 0.1; k = 0.2; z = 0.3; \lambda = 1; p = 0.2; q = 0.1,$ $0 < \delta < 0.32$

$(x_0, y_0) = (2.1, 0.9)$ parametre değerleri ile (6.6) sisteminin flip çatallanma grafiği



(a)



(b)

Şekil 6.12-(a). $A = 3; d = 0.1; k = 1; z = 1; \lambda = 1; p = 0.01; q = 0.1$ $0 < \delta < 0.55$ $\delta = 0.5581$

$(x_0, y_0) = (2.1, 0.9)$ parametre değerleri (6.5) sisteminin Neimark-sacker çatallanma grafiği

Şekil 6.12-(b). $A = 3; d = 0.1; k = 1; z = 1; \lambda = 1; p = 0.2; q = 0.1$ $0 < \delta < 0.5$ $\delta = 0.4949$ ve

$(x_0, y_0) = (2.1, 0.9)$ parametre değerleri ile (6.6) sisteminin Neimark-sacker çatallanma grafiği

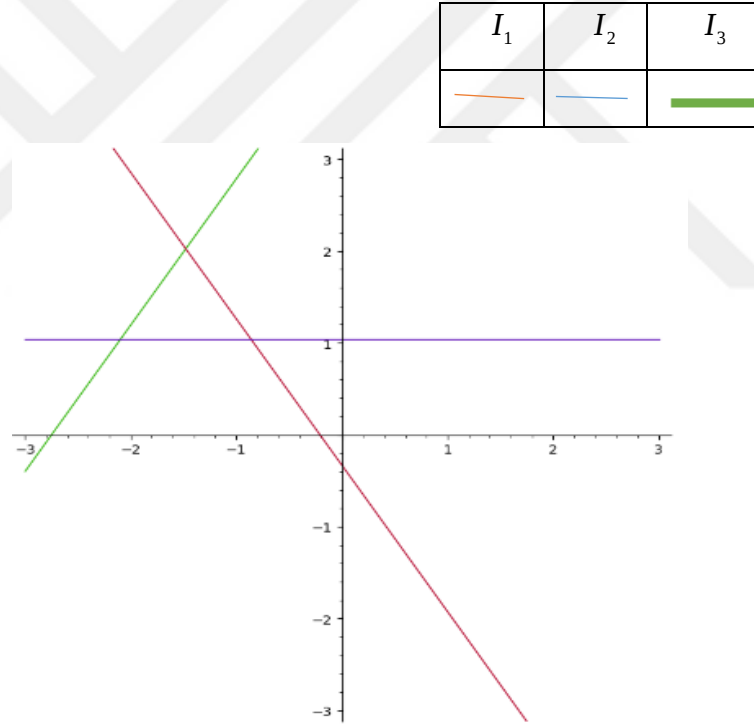
Örnek 6.6: $A = 3; \lambda = 1; k = 1; z = 1; d = 0.1; \delta = 0.52$ parametre değerleri ile (5.4) sisteminin kaos kontrol doğruları

$$I_1 = -1.58288 - p_1 - 0.728p_2$$

$$I_2 = 0.75712 - 0.728p_2$$

$$I_3 = 3.19172 - 2p_1 - 0.728p_2$$

olarak elde edilir. Şekil 6.13 elde edilen doğruların aynı düzlemdeki kesişim grafiklerini verir.



Şekil 6.13. $A = 3; d = 0.1; k = 1; z = 1; \lambda = 1; \delta = 0.52$ parametre değerleri ile (5.4) sisteminin kaos kontrol grafiği

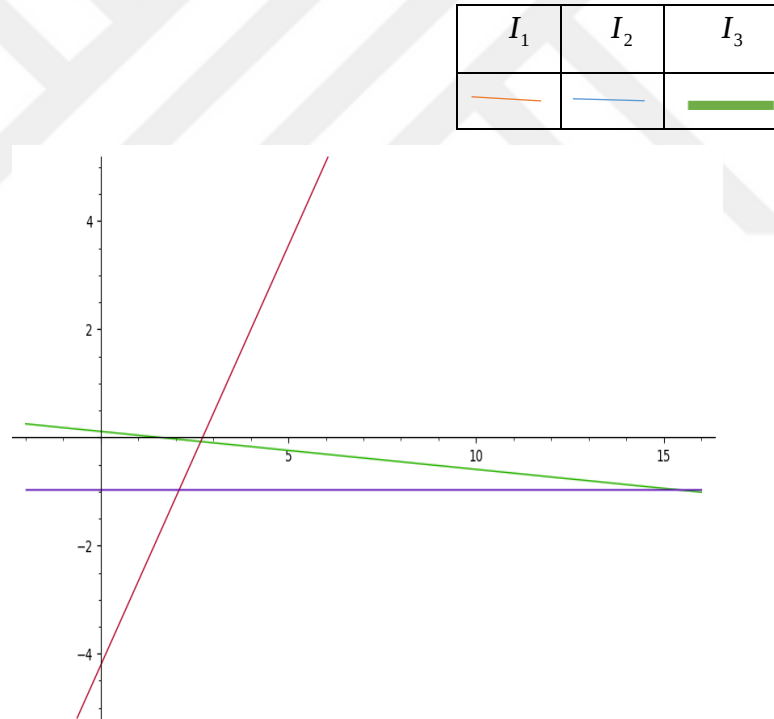
Örnek 6.7: $A = 3; d = 0.1; k = 1; z = 1; \lambda = 1; p = 0.01; q = 0.1$ parametre değerleri ve $\delta = 0.5$ alınırsa (5.6) sisteminin kaos kontrol doğruları

$$I_1 = -0.08222 - p_1 + 0.74245p_2$$

$$I_2 = 0.70725 + 0.74245p_2$$

$$I_3 = 3.12835 - 2p_1 + 0.74245p_2$$

olarak elde edilir. Şekil 6.14 elde edilen doğruların aynı düzlemdeki kesişim grafiklerini verir



Şekil 6.14. $A = 3; d = 0.1; k = 1; z = 1; \lambda = 1; p = 0.01; q = 0.1; \delta = 0.5$ parametre değerleri ile (5.6) sisteminin kaos kontrol grafiği

7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında öncelikle [35] de verilen (5.1) sürekli zaman modeline karşılık gelen fark zamanlı modelin dinamik davranışını inceliyoruz. Adım boyutunun (ayrıklaştırma parametresi) δ ile gösterilmek üzere fark denklem sistemi İleri Euler metodu uygulanarak elde edilmiştir. (5.1) sisteminin denge noktaları, denge noktalarının lokal kararlılığı, flip ve Neimark-Sacker çatallanmalarının varlığı analitik olarak verilmiştir. Benzer işlemler doymuş insidansa sahip (5.2) modeline de uygulanmıştır. Daha sonrasında (5.1) modeline göç etkisi eklenerek (5.3) modeli oluşturulur ve bu göç içeren (5.3) modelinin dinamikleri incelenir. Son olarak, elde edilen teorik sonuçları desteklemek için nümerik simülasyonlara yer verilir. Ayrık zamanlı sistemlerin analitik sonuçlarını destekleyen sayısal simülasyonlar verilerek zengin dinamik davranışlar sunulmuştur.

Şekil (6.7-(a)) ve şekil (6.7-(b)) incelendiğinde (5.1) sistemine farklı oranlarda göç parametresi eklenmesi sistemin kararlılığını azaltıcı yönde etkisinin olduğu açıktır. Dikkat edilirse sırasıyla göç almayan ve göç alan sistem için $\delta = 0.365$ ve $\delta = 0.289$ değerleri hesaplanan değerlerdir. Şekil (6.11-(a)) şekil (6.11-(b)) göz önüne alınırsa göç parametrelerinin sistemi daha hızlı flip çatallanmaya götürdüğünü görmekteyiz. Şekil (6.12-(a)) ve şekil (6.12-(b)) karşılaştırıldığında ise farklı göç etkisinin sistemin Neimark-Sacker çatallanmasını geciktirdiği sonucuna ulaşırız. Şekil (6.7-(a)) ve şekil (6.9-(a)) karşılaştırıldığında duyarlı bireylere eklenen göç etkisi sistemin kararlılığını azalttığını görmekteyiz. Sonuç olarak şekil (6.11-(a)) ve şekil (6.11-(b)) duyarlı bireylere eklenen göç sayısı arttıkça flip çatallanmanın gecikeceğini gösterirken şekil (6.12-(a)) ve şekil (6.12-(b)) ise Neimark-sacker çatallanmasının hızlanacağını gösterir.

Salgın hastalıkların analizini yapmak insan sağlığını tehdit eden faktörleri göz önüne almak demektir. İnsanı etkileyen tüm durumlar yaşadığımız sürece devam edecektir. Daha sonra yapılacak çalışmalar için analizi yapılan modellere aşılama parametresi eklenerek model analizi yapılabileceği gibi doymuş insidansa bir göç parametresi eklenerek de model analizi yapılabilir. Modellerin dinamikleri karşılaştırılabilir.

KAYNAKÇA

- [1] Gümüş, Ö. A., Selvam, A. G. M., & Vianny, D.A. (2019). “Bifurcation and stability analysis of a discrete time Sir epidemic model with vaccination”. *International Journal of Analysis and Applications*, 17 (5), 809-820.
- [2] Gümüş, Ö. A., & Acer, S. (2019). “Period-doubling bifurcation analysis and stability of epidemic model”. *Journal of Science and Arts*, Year 19, No. 4(49), pp.905-914.
- [3] Gümüş, Ö. A., Cui, Q., Selvam, A. G. M. & Vianny, D. A. (2022). “Global stability and bifurcation analysis of a discrete-time SIR epidemic model”. *Miskolc Mathematical Notes*, 23(1), 193-210.
- [4] Gümüş, Ö.A., Selvam, A.G.M. & Janagaraj, R. (2022). “Dynamics of the Mathematical Model Related to COVID-19 Pandemic with Treatment”. *Thai Journal of Mathematics*, 20(2), 957-970.
- [5] Gümüş, Ö. A., & Baran, H. (2021). “Dynamics of SIR Epidemic model with treatment function”. *Uluslararası Battalgazi Bilimsel Çalışmalar Kongresi*, 140-153, Tam metin.
- [6] Gümüş, Ö.A., & Feckan, M. (2021). “Stability, Neimark-Sacker bifurcation and chaos control for a prey-predator system with harvesting effect on predator”. *Miskolc Mathematical Notes*, vol. 22, no.2, 663-679.
- [7] Gümüş, Ö. A. (2020). “Neimark-Sacker bifurcation and stability of a prey-predator model”. *Miskolc Mathematical Notes*, vol.21 No. 2, 873-885.
- [8]] Din, Q., Gümüş Ö.A., & Khalil, H. (2017). “Neimark-sacker bifurcation and chaotic behaviour of a modified host.parasitoid model”. *Z. Naturforsch. A*, vol. 72, no. 1, 25.37.
- [9] Din, Q. (2018). “Stability, Bifurcation analysis and chaos control for a predator-prey system”. *Journal of Vibration and Control*, <https://doi.org/10.1177/1077546318790871>

- [10] Selvam, A. G.M., & Janagaraj, R. (2018). “Numerical Analysis of a Fractional Order Discrete Prey-Predator System with Functional Response”. *International Journal of Engineering & Technology*, 7, 681–684.
- [11] Selvam, A. G.M., Janagaraj, R., & Vignesh, D. (2018). “Allee effect and Holling type-II response in a discrete fractional order prey-predator model”. *IOP Conference Series: Journal of Physics*, 1139, 1–7.
- [12] Gümüş, Ö. A., Selvam, A.G.M., & Janagaraj, G. (2020). “Stability of Modified Host-Parasitoid Model with Allee Effect”. *Applications and Applied Mathematics, An International Journal*.
- [13] Gümüş, Ö. A., & Bilgi, B.S. (2019). “Dynamics of a Host-Parasitoid Model Related to Pennycuik Growth Form”. *Universal Journal of Mathematics and Applications*, 2 (4), 170-179.
- [14] Gümüş, Ö. A., Selvam, A.G.M., & Dhineshababu, R. (2021). “Bifurcation Analysis and Chaos Control of the Population Model with Harvest”. *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.*, 13 (1), 115-125, 10.22075/IJNAA.19675.2094.
- [15] Gümüş, Ö. A. (2014). “Global and local stability analysis in a nonlinear discrete-time population model”. *Adv. Differ. Equ* 2014, 299. <https://doi.org/10.1186/1687-1847-2014-299>.
- [16] Li, G., Wang, W., & Jin, Z. (2006). “Global stability of an SEIR epidemic model with constant immigration” . *Kaos, Solitons & Fraktallar* , 30 (4), 1012-1019.
- [17] Jian-quan, L., Juan, Z., & Zhi-en, M. (2004). “Global analysis of some epidemic models with general contact rate and constant immigration”. *Applied Mathematics and Mechanics*, 25(4), 396-404.

- [18] Khan, Z. A., Alaoui, A. L., Zeb, A., Tilioua, M., & Djilali, S. (2021). “Global dynamics of a SEI epidemic model with immigration and generalized nonlinear incidence functional”. *Results in Physics*, 27, 104477.
- [19] Enatsu, Y., Nakata, Y., & Muroya, Y. (2012). “Global stability for a discrete SIS epidemic model with immigration of infectives”. *Journal of Difference Equations and Applications*, 18(11), 1913-1924.
- [20] Zeb, A., Djilali, S., Saeed, T., Alhodaly, M.S., & Gul, N. (2022). “Global proprieties of an SIR epidemic model with nonlocal diffusion and immigration”. *Results in Physics*, 39, 105758.
- [21] Yıldız, Ş., Bilazeroğlu, Ş., & Merdan, H. (2023). “Stability and bifurcation analyses of a discrete Lotka–Volterra type predator–prey system with refuge effect”. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 422, 114910.
- [22] Karahisarlı, G., Merdan, H., & Tridane, A. (2020). “Stability and zero hopf bifurcation analysis of a tumour and T-helper cells interaction model in the case of HIV infection”. *Miskolc Mathematical Notes*, vol. 21, 911-937.
- [23] Ott, E., Grebogi, C., & Yorke, J.A. (1990). “Controlling chaos”. *Phys. Rev. Lett.* vol. 64, no.11, 1196-1199.
- [24] Li, J., Teng, Z., Wang, G., Zhang, L., & Hu, C. (2017). “Stability and bifurcation analysis of an SIR epidemic model with logistic growth and saturated treatment”. *Chaos, Solit. Fract.* vol. 99, 63–71.
- [25] Wang, J., Zhang, J., & Jin, Z. (2010). “Analysis of an SIR model with bilinear incidence rate”. *Nonlinear Anal, Real World Appl.* 11(4), 2390–2402.
- [26] Hethcote, H.W. (2000). “The mathematics of infectious diseases”. *SIAM Rev.* 42:599–653.

- [27] Wang, J., & Jiang, Q. (2014). “Analysis of an SIS epidemic model with treatment”. *Adv. Differ. Equ.* vol. 246.
- [28] Zhang, X., & Liu, X. (2008). “Backward bifurcation of an epidemic model with saturated treatment function”. *J Math Anal Appl.* ,vol. 348:433–43.
- [29] Zhou, T., Zhang, W., & Lu, Q. (2014). “Bifurcation analysis of an SIS epidemic model with saturated incidence rate and saturated treatment function”. *Appl Math Comput.*, vol. 226, 28,8–305.
- [30] Pérez, A.G., Avila-Vales, E., & Garcia-Almeida, G. E. (2019). “Bifurcation Analysis of an SIR Model with Logistic Growth, Nonlinear Incidence, and Saturated Treatment”. *Hindawi Complexity*, Article ID 9876013, pp. 21. <https://doi.org/10.1155/2019/9876013>.
- [31] Parsamanesh, M., Erfanian, M., & Mehrshad, S. (2020). “Stability and bifurcations in a discrete-time epidemic model with vaccination and vital Dynamics”. *BMC Bioinformatics*, 21:525,1-15.
- [32] Muroya, Y., Enatsu, Y., & Nakata, Y. (2011). “Monotone iterative techniques to SIRS epidemic model with nonlinear incidence rates and distributed delay”. *Nonlinear Anal RWA*, vol. 12:1897–910.
- [33] Kapçak, S. (2018). “Discrete dynamical systems with sage math”. *The Electronic Journal of Mathematics & Technology* vol. 12, no. 2, 292-3.08.
- [34] Capasso, V., & Serio, G. (1978). “A generalization of the Kermack–Mckendrick deterministic epidemic model”. *Math. Biosci.* 42. 43–61.
- [35] Gümüş, Ö. A., & Kılınç, N. (2022). “Analyses of the epidemic model depending on saturated and mass action incidence rates with treatment”. 7. Uluslararası Erciyes Bilimsel Araştırmalar Kongresi, Tam metin.

[36] Gümüş, Ö.A., Cui, Q., Selvam, G.M., & Vianny, A. (2022). “Global stability and bifurcation analysis of a discrete time SIR epidemic model”. *Miskolc. Math.*, 23 (1) , pp. 193-210.

[37] Diekmann, O., & J.A.P., Heesterbeek. (2000). “Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases: Model Building, Analysis and Interpretation”. *Wiley Series in Mathematical and Computational Biology*, John Wiley and Sons; Chichester.

[38] Gümüş, Ö.A., Selvam, A.G.M., & Vignesh, D. (2022). “The effect of allee factor on a nonlinear delayed population model with harvesting”. *Journal of Science and Arts*, 22(1), 159-176.

[39] Liu, X., & Xiao, D. (2007). “Complex dynamic behaviors of a discrete-time predator–prey system”. *Chaos, Solitons & Fractals*, 32(1), 80-94.

[40] Din, Q. (2013). “Dynamics of a discrete Lotka-Volterra model”. *Advances in Difference Equations*, 1-13.

[41] Wang, W., & Ruan, S. (2004). “Bifurcation in an epidemic model with constant removal rate of the infectives”. *J Math Anal Appl.*, vol. 291, 775–93.

[42] Wang, W. (2006). “Backward bifurcation of an epidemic model with treatment”. *Math Biosci.* vol. 201, 58–71.

[43] Zhou, l., & Fan M. (2012). “Dynamics of an SIR epidemic model with limited medical resources revisited”. *Nonlinear Anal RWA*, vol. 13, 312–24.

[44] Ufuktepe, U., & Kapçak, S. (2014). “Applications of discrete dynamical systems with mathematica”. *Kurenai*, 1909: 207-216.

[45] Allen, L.J.S. (2007). “An Introduction to Mathematical Biology”. *Pearson*; New Jersey.

- [46] Bereketoğlu, H. (2006). “Diferensiyel denklemler”. Ankara; Türkiye.
- [47] Brauer, F., & Castillo-Cavez, C. (2001). “Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology”. Springer-verlak, New York.
- [48] Anderson, R. M., & May, R. M. (1991). “Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control”. Oxford University Press, Oxford.
- [49] Kulenovic, M.R.S., & Merino, O. (2002). “Discrete dynamical systems and difference Equations with Mathematica”. A CRC Press Company.
- [50] Kuznetsov, Y. A. (1998). “Elements of applied bifurcation theory”. Springer-Verlag, New York, NY, USA, 2nd edition.
- [51] Martcheva, M. (2015). “An introduction to mathematical epidemiology”. Springer, New York.