

**T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TEK DEĞİŞKENLİ
DİSORIENTED DÜĞÜM POLİNOMLARI ÜZERİNE**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Rabia SARAÇOĞLU**

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı : TOPOLOJİ
Tez Danışmanı : Doç. Dr. Mahpeyker ÖZTÜRK
Ortak Tez Danışmanı : Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ

Eylül 2020

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEK DEĞİŞKENLİ
DİSORİENTED DÜĞÜM POLİNOMLARI ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Rabia SARAÇOĞLU

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Enstitü Bilim Dalı : TOPOLOJİ

Bu tez 01.09.2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr.
İsim SOYİSİM
Jüri Başkanı

Doç. Dr.
İsim SOYİSİM
Üye

Yrd. Doç. Dr.
İsim SOYİSİM
Üye

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Rabia SARAÇOĞLU

01.09.2020

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, her konuda bilgi ve desteğini almaktan çekinmediğim, araştırmanın planlanmasından yazılmasına kadar tüm aşamalarında yardımlarını esirgemeyen, teşvik eden, aynı titizlikte beni yönlendiren değerli danışman hocam Doç. Dr. Mahpeyker ÖZTÜRK'e ve ortak danışman hocam olan Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu çalışmanın maddi ve manevi açıdan desteklenmesine olanak sağlayan eşim Enes SARAÇOĞLU'na ve arkadaşım Hatice PARLATICI'ya teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	i
İÇİNDEKİLER	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	iv
ÖZET.....	v
SUMMARY	vi
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ	1
BÖLÜM 2.	
TEMEL KAVRAMLAR.....	6
2.1 Düğüm ve Halka	6
2.2. Bazı Düğüm İnvaryantlar	9
2.3. Bazı Polinom İnvaryantlar	11
BÖLÜM 3.	
DİSORİENTED HALKALARI.....	13
3.1. Disoriented Düğüm ve Halkaları Tanımlama	13
3.2. Halkalanma Sayısı.....	18
3.3. Burulma.....	23

BÖLÜM 4.

DİSORIENTED POLİNOM İNVARYANTLAR	27
--	----

4.1. Genişletilmiş Parantez Polinom Modeli	27
--	----

4.2. Tam Normalleştirilmiş Polinom.....	32
---	----

BÖLÜM 5.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER	37
----------------------------	----

KAYNAKÇA.....	38
---------------	----

ÖZGEÇMİŞ	42
----------------	----

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

S^3	: Üç boyutlu küre
S^1	: Birim çember
$lk(\alpha, \beta)$	: Halkalanma sayısı
$w(D)$	: Burulma
$cw(D)$	: Tam burulma
$\langle D S \rangle$	: Köşe ağırlıklarının normal çarpımı
$ S $	: S durumundaki çember sayısı Times nive roman 12 olmalı

ÖZET

Anahtar kelimeler: Disoriented Diyagramlar, Disoriented Kavşak, Halkalanma Sayısı, Tam Burulma, Parantez Polinomu, Jones Polinomu.

Bu tezde, yönlendirilmiş düğüm ve halka diyagramlarının bir genelleştirmesi olan disoriented düğüm teorisi üzerine çalışılmıştır. Disoriented düğüm, Altıntaş tarafından ortaya atılan yeni bir kavramdır. Bu tezde Altıntaş'ın çalışması [1] takip edilerek, disoriented düğüm, disoriented halka ve disoriented kavşak kavramları tanıtılarak aşağıdaki çalışmalar yapılmıştır.

1. Disoriented diyagramlar için invaryant ve klasik yönlendirilmiş düğümler için Reidemeister hareketlerin bir genişletmesi olan diyagramatik hareketler vermiştir. Bu hareketler bütün disoriented invaryantlarını ortaya çıkarmada temel yöntem olarak kullanılmaktadır. Herhangi bir kavramın bir disoriented düğüm ve halka invaryantı olduğunu ispatlamak için bu kavramın disoriented diyagramlar için genişletilmiş Reidemeister hareketleri altındaki davranışları incelenmiştir.
2. Disoriented halkalar için halkalanma sayısı tanımlanmış ve halkalanma sayısının disoriented halkanın bir invaryantı olduğunun ispatı verilmiştir. Klasik halkalanma sayısının bu yeni halkalanma sayısının bir özel durumu olduğu görülmüştür. Böylece disoriented düğüm ve halkalar için bir sayısal invaryant elde edilmiş ve bu sonuç doğrultusunda açıklayıcı örnekler ele alınmıştır.
3. Disoriented düğüm ve halkalar için bir sayısal değer olan tam burulma kavramı tanımlanmış ve tam burulmanın disoriented düğümler için regüler izotopinin bir invaryantı olduğu ispatlanmıştır. Tam burulma her ne kadar disoriented düğümün kuşatan izotopi invaryantı olmasa da bir düğümün bütün disoriented diyagramlarının tam burulma sayılarının eşit olduğu gösterilmiştir.
4. Disoriented düğüm ve halkalar için parantez polinomu, Jones Polinomu gibi tek değişkenli polinom invaryantları, yönlendirilmiş düğümler için kullanılan modellerle tanımlanmıştır. Disoriented düğümler için polinom invaryantı olan ve tam Jones polinomu adı verilen yeni bir polinom, tam burulma kavramı kullanılarak tanımlanmış ve bu yeni polinomun disoriented düğümlerin bir invaryantı olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca, bazı az kavşaklı düğümlerin polinomları hesaplanmıştır.

ON SINGLE VARIABLE DISORIENTED KNOT POLYNOMIALS

SUMMARY

Keywords: Disoriented Diagrams, Disoriented Crossing, Linking Number, Complete Writhe, Bracket Polynomial, Jones Polynomial.

In this thesis, it was studied on oriented knot theory. Directed knot is a new concept introduced by Altıntaş. In this thesis, pursuing the work of Altıntaş [1], by introducing the concepts of disoriented knot, disoriented link and disoriented crossing, the following studies are executed.

1. Reidemeister movements for classic oriented knots which are invariant for disoriented diagrams diagrammatic movements with an extension are given. These movements are used as the basic method to reveal all disoriented invariants. In order to prove that any concept is a disoriented knot and link invariance, the behaviors of this concept under extended Reidemeister movements for disoriented diagrams are examined.
2. Linking number is defined for disoriented links and it is proved that the number of linking is an invariant of the disoriented link. It has been observed that the number of classic linking is a special case of this new linking number. Thus, a numerical invariant is obtained for disoriented knots and links, and explanatory examples are discussed in line with this result.
3. The concept of complete writhe, a numerical value for disoriented knots and links, has been defined and proved to be an invariant of regular isotopy for disoriented knots and links. Although complete writhe is not the encompassing isotopy invariant of the disoriented knot, it is shown that the full torsion numbers of all disoriented diagrams of a knot are equal.
4. Univariate polynomial invariants such as the bracket polynomials, the Jones Polynomials for disoriented knots and links are defined by models used for oriented knots. A new polynomial called the full Jones polynomial, which is a polynomial invariant for disoriented knots, has been identified using the concept of complete writhe, and this new polynomial has been proven to be an invariance of disoriented knots. In addition, polynomials of some low crossing knots are calculated.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Bu çalışmada disoriented (yönünü şaşırmış) düğüm konusuna bir giriş yapıldı. Disoriented kavşak, disoriented düğüm ve halka kavramları tanıtıldı ve düğüm teorisindeki bazı temel kavram ve invaryantlar disoriented düğüm diyagramlarına nasıl genelleştirileceği üzerine çalışıldı.

Düğümle ilgili çalışmalar 19. yüzyılda başlamıştır. 1833 yılında Alman matematikçi C.F. Gauss ile başlayan düğüm teorisi ile ilgili çalışmalar gelişerek ve farklı bilim dallarıyla ilişkilendirilerek devam etmektedir. Düğüm teorisindeki çalışmaların çoğu, düğüm invaryantlarını (değişmezlik) bulma, bu invaryantlar ışığında düğüm ve halkanın sınıflandırma (tipini belirleme) problemi ile ilgilidir. Şimdiye kadar düğümle ilgili önemli diyagramatik, sayısal, grupsal ve polinom invaryantlar tanımlanmıştır. Düğüm ve halka için bağlantılı toplam, örgü temsili, Seifert yüzeyleri ve Reidemeister hareketleri gibi önemli diyagramatik çalışmalar yapıldı. Reidemeister hareketler düğüm ve halka invaryantlarının bulunmasında temel yöntem olarak kullanılmaktadır [2, 3]. Bir düğümün veya halkanın bileşen sayısı, kavşak noktalarının minimum sayısı, köprü sayısı, düğümlenme sayısı, halkalanma sayısı, renklenme sayısı gibi sayısal invaryantları; düğüm grubu, homotopi grubu, homoloji gurubu gibi grupsal invaryantları [4,5,6]; Alexander [7], Jones [8], Homfly [9], Kauffman [10-14] vb. polinom invaryantları vardır.

Düğüm grubunu hesaplamak için 1905 yılında W. Wirtinger ve 1914 yılında M. Dehn tarafından ortaya konulmuş iki yöntem vardır [15]. Bu yöntemler kullanılarak ciddi sınıflandırmalar yapılmıştır. Örneğin; tor düğümleri gruplarına göre tamamen sınıflandırılmıştır. 1928 yılında Alexander, düğüm diyagramının her bir kavşağı için bir denklem yazmış ve böylece bütün kavşaklar için elde edilen denklem sisteminin

katsayılar matrisinin determinantının bir Laurent polinomu olduğunu görmüştür [7]. Alexander polinomu birkaç istisna hariç düğüm tipini belirleyen önemli bir invarianttır. 1930 yılında F. Frankl ve L. Pontrjagin [16] tarafından ileri sürülen “Her düğüm bir yönlendirilebilir yüzeyin sınırındır.” iddiası 1934 yılında H. Seifert tarafından ispatlandıktan sonra Alexander polinomu ve bir düğümün işareti gibi invariantlar, Seifert matrislerinden türetilmiştir [3].

Bu doğrultuda devam eden düğümle ilgili araştırmalar, R.H. Fox’un çalışmaları ile ivme kazanmıştır [17-20]. 1963 yılında Fox’un R. H. Crowell ile birlikte yazdığı bir kitapta düğüm grubunun bağıntıları üzerinden “serbest türev” adı verilen yeni bir kavram geliştirilmiş ve bu kavramdan yararlanılarak Alexander polinomunun hesaplanması için yeni bir yöntem verilmiştir [21]. 1970 yılında J.H. Conway bir skein bağıntısını sağlayan yeni bir polinom tanımlamıştır [22]. Bu polinom, Alexander polinomunun başka bir versiyonudur ve literatürde Alexander-Conway polinomu olarak adlandırılır. 80’li yılların ortalarına kadar düğüm ile ilgili yeni polinom invariantlar bulunamamıştır. 1985 yılında V. F. R. Jones, von Neuman cebiri kullanarak Alexander polinomundan tamamen farklı olan yeni bir yönlendirilmiş düğüm polinomu keşfetmiştir [8]. Cebirsel yönden, Jones kendi polinomu ile statik mekaniğin Potth’s modeli arasında yakın bir ilişki olduğunu göstermiştir [23]. Jones’un bu buluşu sayesinde düğüm teorisindeki teorik çalışmalar değişik bilim dallarına uygulanmış ve bunların çözümü ile yan çalışma alanları oluşturulmuştur. Böylece düğüm teorisi; graf teorisi, istatistiksel mekanik, kuantum fiziği, kimya ve biyoloji gibi alanlarla ilişkilendirilmiştir. Kısa bir zaman dilimi içinde Jones polinomu değişik modellerle tanımlanmış ve Jones polinomundan genelleştirilen yeni polinom invariantlar (değişmez) bulunmuştur. Bunların en önemlisi 1987’de bulunan ve yönlendirilmiş düğüm diyagramlarının bir invariantı olan Homfly polinomudur [9]. Aynı yıllarda özellikle L. H. Kauffman tarafından yönlendirilmemiş düğüm diyagramları için polinom invariantlar tanımlanmıştır [10-14].

Günümüzde Alexander, Alexander-Conway, Jones ve Homfly ile adlandırılan yönlendirilmiş düğüm polinomları ve BLM/Ho polinomu [24,25], parantez polinomu,

normalize edilmiş parantez polinomu, Kauffman L-polinomu ve F-polinomu ile adlandırılan yönlendirilmemiş düğüm polinomları vardır. Ayrıca İ. Altıntaş tarafından, parantez polinomundan farklı, regüler izotopi invaryantı olan tek değişkenli bir G-polinomu ve G-polinomunun normalize edilmiş durumu olan bir N-polinomu tanımlanıp onların bazı özellikleri verilmiştir [26,27]. N-polinomu, Jones polinomunun bir yönlendirilmiş durum modelidir. HOMFLY polinomu; Alexander, Alexander-Conway ve Jones polinomlarının bir genellemesidir. Normalize edilmiş parantez polinomu, Jones polinomunu sağlar. L-polinomu, parantez polinomunun ve F-polinomu, Jones polinomu ile BLM/Ho polinomunun bir genellemesidir.

Günümüzde bir taraftan düğüm teorisinin diğer alanlara uygulamaları üzerine çok sayıda çalışmalar yapılmakta [28-38] v.d., diğer taraftan düğüm teorisini genellemeleri üzerine araştırmalar yapılmaktadır. Bu bağlamdaki en önemli çalışma Kauffman tarafından ortaya atılan ve geliştirilen virtual düğüm teorisi [39-42], çok sayıda araştırmacının ilgisini çekmiştir.

Düğüm teorisinin bir diğer genellemesi olan disoriented düğüm teorisi 2018 yılında Altıntaş [1] tarafından ortaya atıldı. Altıntaş, klasik düğüm teorisinde olmayan disoriented kavşak kavramını tanımladı ve bu kavram ekseninde düğüm teorisinin bazı temel kavramlarını yeniden tanımladı. Disoriented düğüm ve halka diyagramları, Jones [8] ve HOMFLY [9] gibi yönlendirilmiş düğüm ve halka polinomları, skein bağıntıları ile hesaplanırken ortaya çıkmaktadır. Bir yönlendirilmiş düğüm diyagramının kavşağı, Kauffman'ın parantez modelini [11-14] kullanarak ayırdığında oluşan iki diyagramdan biri disoriented diyagramdır. Klasik düğüm ve halka diyagramları sınıfı sadece yönlendirilmiş ve yönlendirilmemiş diyagramları içerdiğinden bu sınıfta disoriented diyagramlar yoktur. Bu çalışmada disoriented diyagramlar da düğüm sınıfına dâhil edilerek klasik düğüm sınıfı genişletilecektir. Bunun için disoriented diyagram ve disoriented kavşak kavramlarının tanımı verilerek disoriented düğüm ve halka kavramı tanıtılmaktadır. Böylece yönlendirilebilir düğüm ve halkalar için bilinen bazı temel kavramlar disorientation dikkate alınarak yeniden tanımlanmakta ve yönlendirilebilir diyagramlar için bilinen kavramlar disoriented

diyagramlar için tanımlanan kavramların özel halleri olduğu görülmektedir. Klasik düğüm ve halka teorisinde temel ölçü Reidemeister hareketleridir. Yani bir kavramın düğüm invaryantı olması için Reidemeister hareketleri altındaki davranışı incelenir. Eğer Reidemeister hareketleri sağlanırsa bu kavram düğümün bir invaryantı olur. Birçok klasik düğüm invaryantı disoriented düğüm ve halkalar için invaryant olmadığından, klasik Reidemeister hareketlerini disoriented diyagramlar için genelleştirilmesi gerekir. Disoriented Reidemeister hareketleri klasik düğüm teorisinde olmayan yeni hareketler içermektedir.

Bu tezde disoriented Reidemeister hareketleri, disoriented düğümün invaryantlarını belirlemede temel yöntem olarak kullanıldı. Ele alınan bütün kavramların disoriented Reidemeister hareketleri altındaki davranışları incelenerek disoriented düğümün invaryantı olup olmadığına karar verildi.

Burada disoriented halka diyagramları için halkalanma sayısı yeniden tanımlanmakta ve halkalanma sayısının halkanın bir invaryantı olduğu disoriented Reidemeister hareketleri altındaki davranışı incelenerek ispatlandı. Ayrıca disoriented halka diyagramları için regüler izotop invaryant olmayan klasik burulma yerine tam burulma adında yeni bir kavram tanıtıldı. Disoriented halka diyagramları için tam burulma vasıtasıyla elde edilen normalleştirilmiş parantez polinomu (Jones Polinomu) halkanın bir invaryantı olduğu ispatlanmaktadır.

Bu tez aşağıdaki şekilde organize edildi. 2. Bölümde diğer bölümlere ön bilgi olacak şekilde klasik düğüm teorisinin bazı temel tanımları ve teoremleri verilmektedir.

Üçüncü bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda disoriented düğüm ve halka diyagramları, disoriented kavşak ve disoriented düğüm ve halka tanımları verilmektedir. Bu bölümde ayrıca disoriented Reidemeister Hareketleri çizilmekte hakkında kısa açıklayıcı bilgi verilmektedir. İkinci ve üçüncü kısımlar bazı sayısal invaryantları içermektedir. İkinci kısımda disoriented halka diyagramları için halkalanma sayısı tanımlanmakta, halkalanma sayısının halkanın bir invaryantı olduğunu ispatlanmakta ve iki örnek verilmektedir. Üçüncü kısımda disoriented

düğüm ve halka diyagramları için tam burulma adında yeni bir kavram tanıtılmakta ve disoriented diyagramlar için tam burulmanın RII ve RIII disoriented Reidemeister hareketleri altındaki davranışları incelenmektedir. Bir düğümün bütün disoriented diyagramlarının tam burulma sayısının aynı olduğu ispatlanmaktadır.

Dördüncü bölüm, disoriented düğüm ve halka diyagramları için parantez polinomu [5-9] ve Jones Polinomu'nun bir kritiğini sunmaktadır. Parantez polinomu, bir düğümün (veya halkanın) disoriented diyagramları için genelleştirilmektedir. Böylece, doğal olarak normalleştirilmiş parantez polinomu da disoriented düğüm ve halka diyagramları için genelleştirmektedir. Normalleştirilmiş parantez polinomu (Jones Polinomu) yönlendirilmiş düğüm diyagramları için birinci Reidemeister hareketi altında invaryant olduğundan, disoriented diyagramlar için regüler izotop invaryantlarından daha kuvvetlidir. Ancak Jones Polinomu, disoriented diyagramlar üzerindeki her hareket altında invaryant değildir. Bu sebeple disoriented düğüm ve halka diyagramları için invaryant değildir. Bu bölümde tam burulmayı kullanarak disoriented düğüm ve halka diyagramları için Jones Polinomu'nu yeniden tanımlanmaktadır. Tam Jones Polinomu olarak adlandırılan bu polinom, disoriented diyagramlar üzerindeki tüm hareketler altında invaryanttır. Böylece o bir düğüm ve halka invaryantıdır. Üstelik bir düğümün her disoriented diyagramının tam Jones Polinomu düğümün orijinal Jones polinomuna eşittir. Bu bölümün son kısmı birkaç örnek içermektedir.

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak klasik düğüm teorisinin bazı temel kavramları verilmektedir. Bu kısımda yer verilen temel kavramlar ve düğüm teorisi ile ilgili diğer kavramlar için [43-46] kaynakları incelenebilir.

2.1 Düğüm ve Halka

Tanım 2.1.1. [43] X ve Y iki Hausdorff uzayı olsun. Eğer $f: X \rightarrow Y$ bir homeomorfizm ise $f: X \rightarrow Y$ dönüşümüne bir gömme denir.

Tanım 2.1.2. [10-13] $S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, x, y \in \mathbb{R}\}$ birim çemberinin $\mathbb{R}^3$ uzayına veya $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ uzayına gömülmesine bir düğüm denir. $n \in \mathbb{N}$ tane düğümün ayrık birleşimine halka denir.

Tanım 2.1.3. $p: S^3 \rightarrow S^3, p(x, y, z) = (x, y, 0)$ ile tanımlanan fonksiyona izdüşüm fonksiyonu denir.

Eğer K, S^3 içinde bir düğüm ise, K düğümünün p izdüşüm fonksiyonu altındaki resmi, $p(K)$, K nın xoy – düzlemindeki izdüşümüdür [44]. K poligonal bir düğüm ise yani K bir üçgenin görüntüsü ise, $p(K)$ düzlemsel bir poligonudur.

Tanım 2.1.4. [43, 44] K, S^3 uzayında bir düğüm ve p , yukarıda geçen izdüşüm fonksiyonu olsun. $a \in p(K)$ için $p^{-1}(a) \cap K$ n tane ($n > 1$) noktadan ibaret ise, a noktasına $p(K)$ nın bir n katlı noktası denir. Eğer $n = 2$ ise, a noktasına kavşak noktası (geçit noktası, çift katlı nokta) denir.

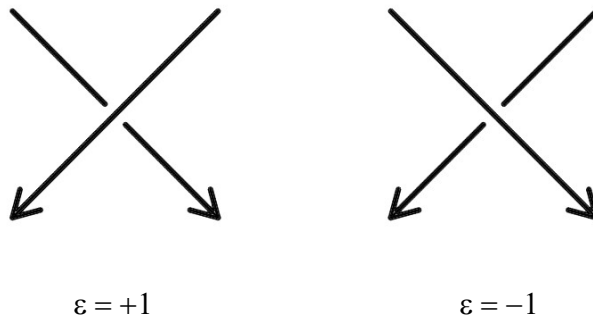
Bir geçit noktası, K düğümüne ait tam iki noktanın resmi olup, bu iki noktadan z koordinatı daha büyük olana üst geçit noktası ve diğerine alt geçit noktası denir.

Tanım 2.1.5. [43-44]. K bir düğüm ve p izdüşüm fonksiyonu olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa $p(K)$ değerine K düğümünün regüler izdüşümü denir. Eğer $p(K)$ izdüşümü regüler ise, K düğümüne uzayda regüler pozisyonadadır denir.

1. $p(K)$ nın katlı noktaları sadece sonlu sayıda geçit noktasıdır,
2. Hiçbir geçit noktası K düğümüne ait bir köşe noktasının p altında görüntüsü değildir.

Regüler pozisyonda bulunan bir K düğümü ile bir $\varepsilon > 0$ reel sayısı verilsin. K düğümünün her alt geçit noktasından uzaklığı ε dan küçük olan noktaların kümesi A ise, $p(K - A)$ kümesine K düğümünün normal diyagramı kısaca düğüm diyagramı denir [45,46]. Böylece K düğümünün normal diyagramı ayrıncı yay parçalarından (veya doğru parçalarından) oluşur.

Tanım 2.1.6. [43,44]. Eğer bir düğümün üzerine veya bir halkanın her bir birleşeninin üzerine bir ok konularak yön verilmiş ise düğüm yönlendirilmiş düğüm veya halkaya yönlendirilmiş halka denir. Yönlendirilmiş kavşakların işaretleri Şekil 2.1.'de gösterildiği gibi ± 1 ile belirtilir.



Şekil 2.1. Kavşak işaretleri

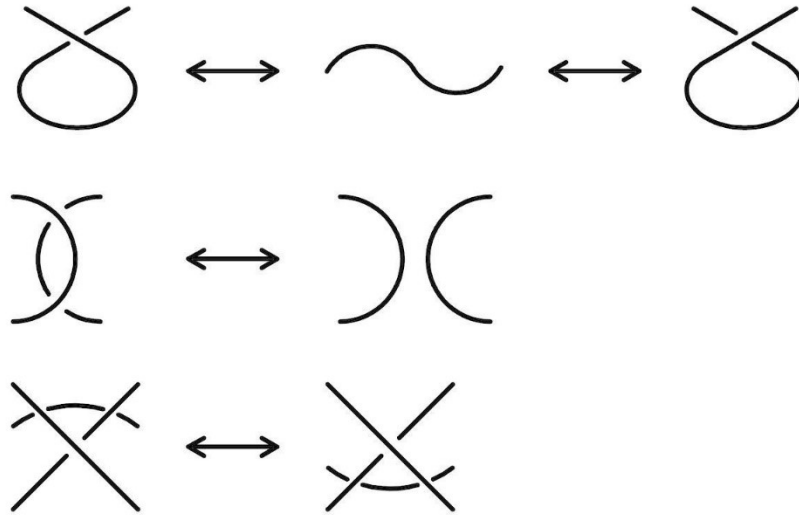
Tanım 2.1.7. [43]. Bir düğüm diyagramının kavşaklarını alt üst ederek veya işaretini değiştirerek elde edilen diyagrama düğümün ayna görüntüsü denir.

Tanım 2.1.8. [43] K ve L , S^3 uzayına yönlendirilmiş iki düğüm olsun. Eğer $h(K) = L$ olacak şekilde yönlendirilmeyi koruyan bir $h: S^3 \rightarrow S^3$ homeomorfizmi varsa K düğümü L düğümüne denktir denir.

İki düğümün denkliği tanımı; S^3 içindeki düğümler kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı verir. Bu bağıntı söz konusu kümeyi ayrık denklik sınıflarına ayırır. Her denklik sınıfına bir düğüm tipi denir. Denk iki düğüm, aynı düğüm tipindendir.

Yönlendirilmiş bir çember ile aynı tipte olan bir düğüme düğümlenmemiş (aşıkâr) düğüm denir. Halkalanmamış halkaya ise aşıkâr halka denir.

Düğümün denkliği Şekil 2.2.'de çizilen diyagram hareketlerinin (Reidemeister hareketleri) üç tipi ve onların tersleri ile üretilir [11,39].



Şekil 2.2. Reidemeister hareketleri

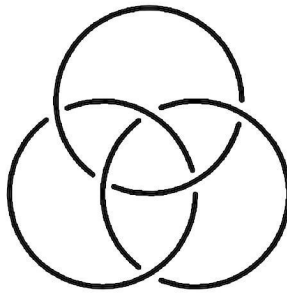
I. Tip hareket bir burulmuş eğri ekleyerek veya çıkararak, II. Tip hareket iki ardışık alttan veya üstten kavşağı ekleyerek veya çıkararak, III. Tip hareket üçgen hareketi olarak elde edilir.

Sonlu sayıda Reidemeister hareketin uygulanması ile diyagramları birbirine dönüşen düğümler denktir. II. ve III. Reidemeister hareketleri ile üretilen denklik bağıntısına regüler izotopi denir. Bütün Reidemeister hareketleri ile üretilen denklik bağıntısına da kuşatan izotopi denir.

2.2. Bazı Düğüm İnvaryantlar

Tanım 2.2.1. [44,46] Bir K düğümünün herhangi bir diyagramındaki kavşakların minimum sayısına düğümün kavşak sayısı denir ve $c(K)$ ile gösterilir. Kavşak sayısı düğümün bir invaryantıdır.

Tanım 2.2.2. [43-44] Bir halka diyagramının bir yayı üzerinde bir nokta seçildiğinde ve diyagram etrafında dolaşarak aynı noktaya dönüldüğünde geçit noktalarının kavşaklanması ile oluşan belirlenen her bir tam devire halkanın bir bileşeni denir. Bu tanıma göre tek bileşenli bir halkaya bir düğüm denir. Şekil 2.3.'te bir üç bileşenli bir halka çizilmiştir.



Şekil 2.3. Bileşen sayısı üç olan bir halka

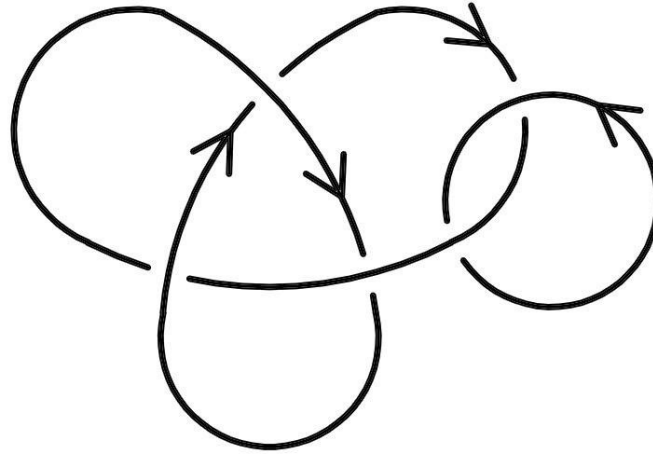
Tanım 2.2.3. [46] Bileşenleri α ve β olan bir halka verilsin. $\alpha \cap \beta$, bu iki bileşenin ortak kavşaklarının kümesi olmak üzere α ile β bileşenlerinin halkalanma sayısı

$$lk(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \varepsilon(p)$$

ile tanımlanır. Burada $\varepsilon(p)$, p ile gösterilen kavşağın işaretidir ve toplam bütün p kavşakları üzerinden alınmıştır.

Tanım 2.2.4. [46] Bir düğüm veya halkanın bütün kavşaklarının işaretlerinin toplamına burulma sayısı denir.

Örnek 2.2.5. Şekil 2.4.'de çizilen halkanın halkalanma sayısı 1 ve burulma sayısı 5'dir.



Şekil 2.4. İki bileşenli bir halka

2.3. Bazı Polinom İnvaryantlar

Tanım 2.3.1. [11,12] K bir halka diyagramı olsun. $[K] \in \mathbb{Z}[A, B, d]$, K halkasını temsil eden bir polinomu gösterebilir. Parantez polinomu adı verilen bu polinom aşağıdaki aksiyomları sağlar.

$$1. [K_+] = A[K_0] + B[K_\infty]$$

$$[K_-] = B[K_0] + A[K_\infty]$$

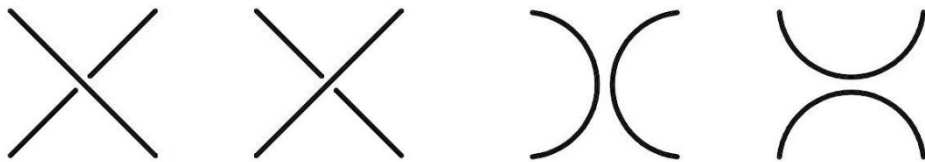
$$2. [O] = \delta, \quad [OK] = \delta[K]$$

Burada K_+ , K_- , K_0 , K_∞ , Şekil 2.5 de çizilen diyagramlar ve O , sıfır kavşaklı aşikâr düğümdür.

Parantez polinomu $B = A^{-1}$ ve $\delta = -A^2 - A^{-2}$ ile regüler izotopinin bir invaryantıdır. Bu durumda Bir düğümün D regüler diyagramı için parantez polinomu

$$\langle D \rangle = \sum_S \langle D|S \rangle \delta^{|S|-1}$$

toplamı olarak yazılabilir.



Şekil 2.5. Kavşaklar ve ayırmalar

Tanım 2.3.2. [11-12] $[K]$, K bir halka diyagramının regüler izotopinin invaryantı olan parantez polinomu ve $w(K)$, K halkasının burulma sayısı olsun. $f_K(A) = (-A^3)^{-w(K)} [K]$ polinomuna normalleştirilmiş parantez polinomu denir. Normalleştirilmiş polinom, halkanın bir kuşatan izotopi invaryantıdır.

Tanım 2.3.3. [3] K bir yönlendirilmiş halka diyagramı olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $\sqrt{t}$ değişkenli Laurent polinomuna Jones polinomu denir ve $V_K(t)$ ile gösterilir.

1. $t^{-1}V_{K_+}(t) + tV_{K_-}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{K_0}(t)$
2. $V_O(t) = 1$
3. $V_K(t)$, bir kuşatan izotopi invaryantıdır.

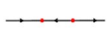
Teorem 2.3.4. [11,12] K bir halka diyagramı, $V_K(t)$ onun Jones polinomu ve $f_K(A)$ onun normalleştirilmiş parantez polinomu olsun. Bu durumda $f_K(t^{-1/4}) = V_K(t)$ olur.

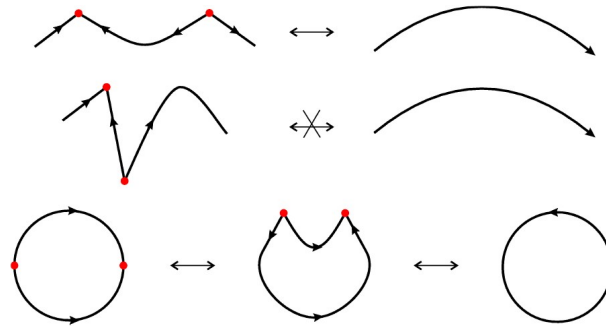
BÖLÜM 3. DİSORIENTED HALKALARI

Bir düğüm, bir çemberin üç boyutlu $\mathbb{R}^3$ (veya S^3) uzayına bir gömülmesidir. Yönlendirilmiş bir düğüm, bir düğüm diyagramının yön verilmiş halidir. Gömme ile ilgili gerçekleri göz önüne alarak, yönlendirilmiş bir düğümü üç boyutlu uzayda bir yönlendirilmiş çemberin bir gömülmesi olarak tanımlamak mümkündür. Bu bölümde benzer şekilde disoriented düğüm tanımı yapılmıştır.

3.1. Disoriented Düğüm ve Halkaları

Tanım 3.1.1. [1] Bir disoriented çember, üzerinde iki nokta seçilen ve bu iki nokta arasındaki her bir yaya bir yönlendirme verilen bir çemberdir. Yaylardan birinin yönlendirmesi, diğerinin yönlendirmesinin tersidir.

Birkaç basit disoriented diyagram, onların yer değiştirmeleri ve bir disoriented çember Şekil 3.1.'de çizilmiştir. Şekil 3.1.'deki temel indirgeme hareketi basit bir ilmek üzerindeki ardışık iki parçanın elenmesine karşılık gelir. Dikkat edilmelidir ki bir ilmek boyunca disoriented parçaların çarpımı bir yönlendirilebilir eğrinin varlığına imkân verir. Ancak ardışık zig-zag çarpımlarda buna izin verilmez. Zig-zaglar virtual düğüm ve halkalarda ortaya çıkmaktadır. Bu tezde klasik düğüm ve halka diyagramları üzerinde çalışıldığından zig-zag ile karşılaşılmaz. Bu yüzden disoriented düğüm veya halka diyagramını kolaylıkla çizebilmek için  diyagram yerine  diyagramı kullanılacaktır. Böylece disoriented bir eğri, yönlendirilmiş bir eğriyle değiştirilebilir. Disoriented yapılandırmalar, yer değiştirmeler ve disoriented ilişkiler hakkında detaylı bilgi için [8,9,14-16] kaynaklarına bakınız.



Şekil 3.1. Basit disoriented diyagramlar ve yer değiştirmeler

Tanım 3.1.2. [1] Bir disoriented düğüm, bir disoriented çemberin $\mathbb{R}^3$ (veya S^3) uzayına bir gömülmesidir. k -bileşenli bir disoriented halka k tane çemberin ayrık birleşimlerinin $\mathbb{R}^3$ uzayına bir gömülmesidir ki burada çemberlerin en az biri disorienteddir. $\mathbb{R}^3$ uzayında bir disoriented düğümden diğerinin elde edildiği bir deformasyon varsa bu disoriented düğümler denktir.

$\mathbb{R}^3$ uzayında bir K disoriented düğümün (veya halka) izdüşümü $\pi(K) \subset \mathbb{R}^2$ olur. Burada π, z eksenini boyunca xy -düzlemine izdüşümdür. $\pi(K)$ izdüşümünün herhangi bir noktasının ters görüntüsü K düğümünün bir veya iki noktadan ibaret ise bu izdüşüme, regüler izdüşüm denir.

K düğümünün regüler izdüşümü üzerinde ona karşılık gelen D disoriented diyagram tanımlanabilir. Bu diyagram, kavşaklarının üstgeçit ve altgeçit yaylarını belirlemek için kavşakların (Düğüm diyagramında ön görüntüsü iki noktadan ibarettir) küçük bir komşuluğunda iki geçidinden birini küçük parçasını ihmal ederek elde edilir.

Tanım 3.1.3. [1] Bir K disoriented düğümün bir kavşağının üstgeçit ve altgeçit yayları zıt yönlendirmelere sahip ise bu kavşağa disoriented kavşak denir. Başka bir deyişle, A_1 ve A_2 , gömülmesi K olan disoriented çemberin iki yayı olsun. Eğer K düğümünün bir kavşağın üstgeçit ve altgeçit yaylarından biri A_1 ve diğeri A_2 ise bu kavşağa disoriented kavşak denir. K disoriented düğümünün bir kavşağı disoriented değilse, o

kavşağa yönlendirilmiş kavşak denir. O halde bir yönlendirilmiş düğüm, sıfır disoriented kavşaklı bir disoriented düğümdür. Şekil 3.3.'de çizilmiştir.

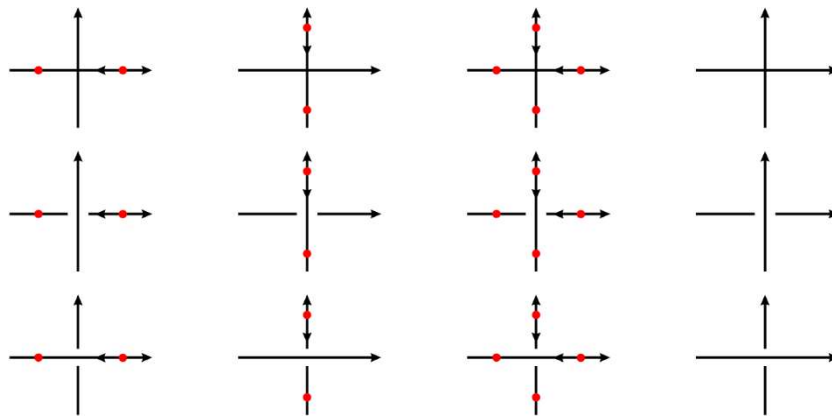
Tanım3.1.4. [1] L , K_1 ve K_2 gibi iki bileşenli bir halka olsun. K_1 ve K_2 bileşenlerini her ikisinden de bir disorientation seçilsin. Gömmesi K_1 olan disoriented çemberin iki yayını A_1^1 ve A_1^2 ile, Gömmesi K_2 olan disoriented çemberin iki yayı A_2^1 ve A_2^2 ile gösterilsin. L halkasının herhangi bir kavşağı için aşağıdakilerden biri sağlanıyorsa bu kavşağa disoriented kavşak denir.

1. Kavşağın altgeçit ve üstgeçit yaylarından biri A_1^1 ve diğeri A_2^1 veya A_2^2 ,
2. Kavşağın altgeçit ve üstgeçit yaylarından biri A_1^2 ve diğeri A_2^2 veya A_2^1 .

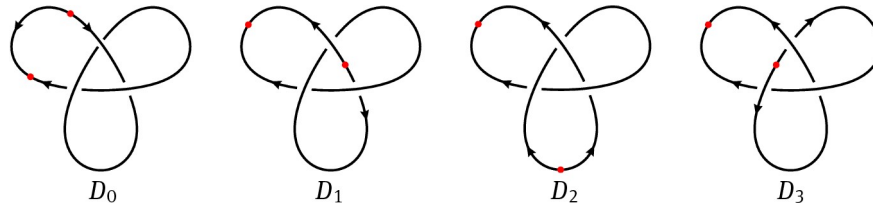
Diğer durumlarda kavşağa yönlendirilmiştir kavşak denir.

Uyarı 3.1.5. İki'den fazla bileşene sahip halkalar için disoriented kavşak benzer şekilde tanımlanmaktadır.

Bir yönlendirilmiş kavşağın üstgeçit ve altgeçidi, bir disoriented kavşağın üstgeçit ve altgeçidiyle aynı olmasına rağmen, işaretleri aynı değildir. Böylece disoriented kavşak yerine yönlendirilmiş kavşak alınamaz. Yönlendirilmiş ve disoriented kavşaklar Şekil 3.2.'de çizilmiştir.

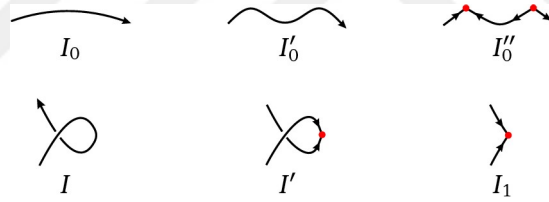


Şekil 3.2. Disoriented ve yönlendirilmiş kavşaklar

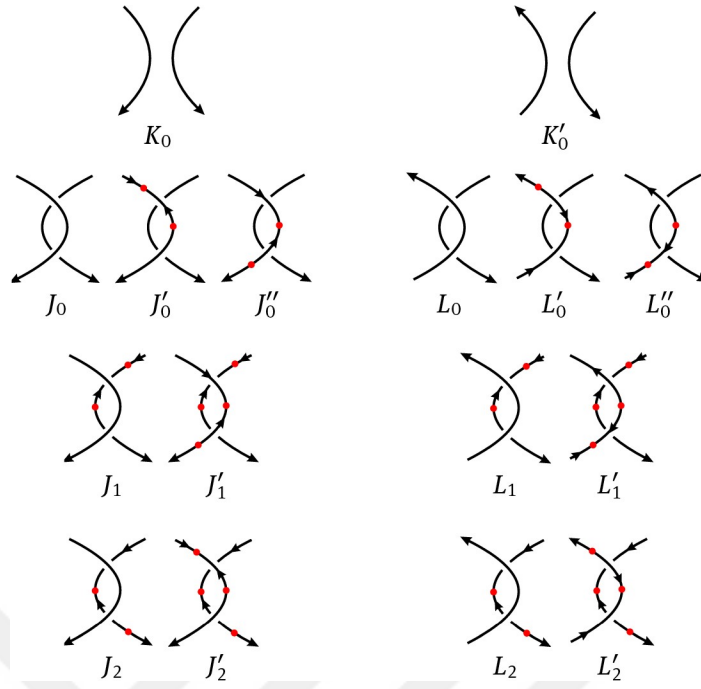


Şekil 3.3. Sağ el yonca yaprağının disoriented diyagramları

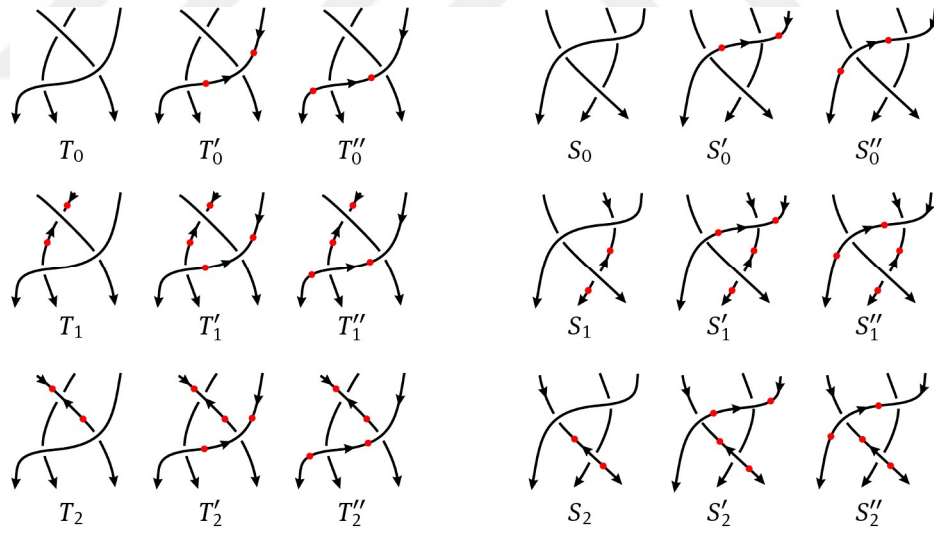
Disoriented diyagramlar üzerindeki Reidemeister Hareketleri, yönlendirilmiş düğüm ve halka diyagramlarının Reidemeister Hareketlerini geneller. Şekil 3.4., 3.5., 3.6.'da disoriented diyagramlar üzerindeki Reidemeister Hareketleri gösterilmiştir. Burada yönlendirilmiş diyagramların II. ve III. tip Reidemeister hareketleri disoriented diyagramlar için genişletilmiştir. Disoriented diyagramlar için tip I Reidemeister hareketine yeni bir disoriented burulma hareketi eklenmiştir. Bu hareketlerin ve bu hareketlerin terslerinin sonlu bir dizisi ile birbirine dönüştürülebilen disoriented düğüm ve halka diyagramları denk olarak adlandırılır [1].



Şekil 3.4. Disoriented diyagramlar için düzlemsel ve birinci Reidemeister hareketleri



Şekil 3.5. Disoriented diyagramlar için ikinci Reidemeister hareketleri



Şekil 3.6. Disoriented diyagramlar için üçüncü Reidemeister hareketleri

Şekil 3.4., 3.5 ve 3.6.'da çizilen Reidemesiter hareketlerinin denkliği aşağıdaki gibi listelenebilir.

Düzlemsel hareketler : $I'_0 \leftrightarrow I_0, I''_0 \leftrightarrow I_0$

RI hareketi : $I \leftrightarrow I_0$

RI' hareketi : $I' \leftrightarrow I_1$

RII hareketleri : $i \in \{0,1,2\}$ için $J_i \leftrightarrow K_0, J'_i \leftrightarrow K_0$

$L_i \leftrightarrow K'_0, L'_i \leftrightarrow K_0$

RIII hareketleri : $i \in \{0,1,2\}$ için $T_i \leftrightarrow S_i, T'_i \leftrightarrow S'_i, T''_i \leftrightarrow S''_i$

Uyarı 3. 1. 6. Şekil 4. 6.'da çizilen diyagramların yayların yönlendirilmesine ait farklı seçenekler olabilir.

Tanım 3.1.7. RII ve RIII hareketleri (ve düzlemsel hareketler) tarafından üretilen denklik bağıntısına regüler izotopi; RI, RII, RIII hareketleri tarafından üretilen denklik bağıntısına kuşatan izotopi; disoriented diyagramlar üzerindeki Şekil 3.4., 3.5. ve 3.6.'daki hareketler tarafından üretilen denklik bağıntısına tam kuşatan izotopi denir.

Yönlendirilmiş bir diyagramda disoriented kavşak bulunmadığından, tam kuşatan izotopi, yönlendirilmiş diyagramlarda kuşatan izotopiye denktir. Ancak disoriented düğüm ve halka diyagramlarında tam kuşatan izotopi, kuşatan izotopiden daha kuvvetlidir.

3.2. Halkalanma Sayısı

Bu kısımda, disoriented halkalar için halkalanma sayısı tanımlanmış ve disoriented halkanın halkalanma sayısının bir invaryant olduğu ispatlanmıştır.

Tanım 3.2.1. [1] L, K_1 ve K_2 gibi iki bileşenli bir disoriented halka olsun. L halkasının halkalanma sayısı,

$$lk(L) = \frac{1}{2} \left| \sum_{o \in K_1 \cap K_2} \varepsilon(o) - \sum_{d \in K_1 \cap K_2} \varepsilon(d) \right|$$

formülü ile tanımlanır. Burada $K_1 \sqcap K_2$, K_1 ile K_2 bileşenlerinin ortak kavşak kümesini gösterir. İlk toplam $K_1 \sqcap K_2$ nin yönlendirilmiş kavşakları üzerinden yapılırken, ikinci toplam $K_1 \sqcap K_2$ nin disoriented kavşakları üzerinden yapılır. $\varepsilon(o)$ ve $\varepsilon(d)$ sırasıyla $K_1 \sqcap K_2$ ye ait olan yönlendirilmiş ve disoriented kavşağın işaretini gösterir.

Aşağıdaki teorem, bir halkanın bütün disoriented diyagramlarının halkalanma sayısının eşit olduğunu verir.

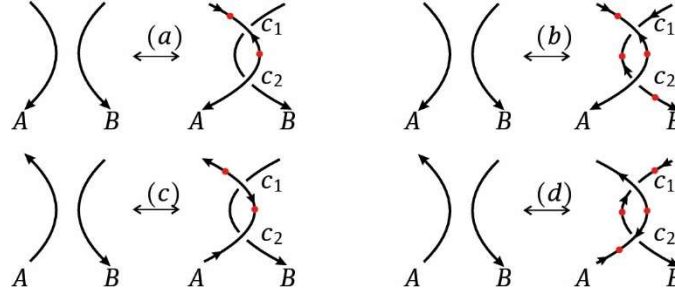
Teorem 3.2.2. $lk(L)$ halkalanma sayısı, L halkasının bir invariantıdır.

İspat. D , iki bileşenli L halkasının bir disoriented regüler diyagramı ve D' , L halkasının diğer bir regüler diyagramı olsun. Gerekirse D' , Şekil 3.4., 3.5. ve 3.6.'daki Reidemeister hareketleri ile D diyagramından elde edebilir. Bu nedenle teoremi ispatlamak için her bir Reidemeister hareketini D diyagramında gerçekleştirildikten sonra halkalanma sayısının değişmeden kaldığını göstermek yeterlidir.

RI hareketi: D diyagramının RI hareketini sağlayan kavşakları aynı bileşene aittir. Dolayısıyla RI hareketini uygulamak halkalanma sayısını etkilemez. Aynı şekilde RI' hareketi de halkalanma sayısının hesaplanmasını etkilemez.

RII Hareketi: RII hareketinin sadece Şekil 3.5.'teki J'_0 , J'_2 , L'_0 ve L'_1 durumlarının halkalanma sayısına yaptığı etkiyi inceleyelim. RII hareketinin kalan durumları benzer bir yolla incelenebilir. A ve B farklı bileşenlere aitse, D diyagramına uygulanan RII hareketlerinin halkalanma sayısı üzerinde etkisi vardır. Şekil 3.7. (a) ve (c) durumlarında c_1 kavşağı disoriented ve c_2 kavşağı yönlendirilmiştir. Ayrıca c_1 ve c_2 kavşakları aynı işarete sahiptir. Tanım 3.2.1. gereğince $\varepsilon(c_1) - \varepsilon(c_2) = 0$ elde edilir. (b) ve (d) durumlarında her iki kavşağın da disoriented olduğu açıktır. c_1 ve c_2

kavşakları ters işaretli olduklarından $\varepsilon(c_1) + \varepsilon(c_2) = 0$ olur. Böylece her durumda halkalanma sayısı ikinci Reidemeister hareketleri altında değişmez.



Şekil 3.7. Bazı ikinci Reidemeister hareketleri

RIII hareketi: Son olarak RIII hareketlerinin D üzerindeki etkisi göz önüne alınsın. Şekil 3.6.'daki RIII hareketlerinin sadece T_0 ve S_0 , T'_0 ve S'_0 , T''_1 ve S''_1 , T_2 ve S_2 halkalanma sayısına olan etkisini göz önüne alalım. Yani, sadece Şekil 3.8.'deki c_1 , c_2 , c_3 ve c'_1 , c'_2 , c'_3 durumlarını inceleyelim. T_i ve S_i durumlarının etkilerinin özdeş olması için, aşağıdaki denklemleri göz önünde bulundurmak gerekir.

Tüm kavşaklar yönlendirilmiş ya da disoriented ise,

$$\varepsilon(c_1) = \varepsilon(c'_1), \quad \varepsilon(c_2) = \varepsilon(c'_3), \quad \varepsilon(c_3) = \varepsilon(c'_2)$$

olur. c_2 ve c'_3 kavşaklarından biri yönlendirilmişken, diğeri disoriented ise veya c_3 ve c'_2 kavşaklarından biri yönlendirilmişken diğeri disoriented ise

$$\varepsilon(c_1) = \varepsilon(c'_1), \quad \varepsilon(c_2) = -\varepsilon(c'_3), \quad \varepsilon(c_3) = \varepsilon(c'_2)$$

veya

$$\varepsilon(c_1) = \varepsilon(c'_1), \quad \varepsilon(c_2) = \varepsilon(c'_3), \quad \varepsilon(c_3) = -\varepsilon(c'_2)$$

olur. c_2 ve c'_3 kavşaklarından biri yönlendirilmişken diğeri disoriented ise ve c_3 ve c'_2 kavşaklarından biri yönlendirilmişken diğeri disoriented ise

$$\varepsilon(c_1) = \varepsilon(c'_1), \quad \varepsilon(c_2) = -\varepsilon(c'_3), \quad \varepsilon(c_3) = -\varepsilon(c'_2)$$

Eğer A , B ve C , Şekil 8'deki tek durum için aynı bileşene aitse, halkalanma sayısı etkilenmez. A durumunun, B ve C durumlarından farklı bileşene ait olduğunu varsayalım. Bu durumda halkalanma sayısı üzerinde etkisi olan parçalar c_1 , c_2 ve c'_1 , c'_3 kavşaklarının işaretlerinin toplamıdır. (a) durumunda kavşaklar yönlendirilmiş olduğundan Tanım 3.2.1. gereğince,

$$\varepsilon(c_1) + \varepsilon(c_2) = \varepsilon(c'_1) + \varepsilon(c'_3)$$

elde edilir. (b) durumunda c'_3 kavşağı disoriented ve diğeri yönlendirilmiş olduğundan

$$\varepsilon(c_1) + \varepsilon(c_2) = \varepsilon(c'_1) - \varepsilon(c'_3)$$

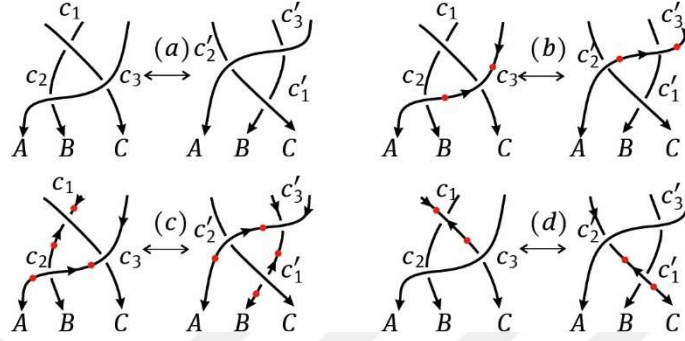
eşitliği mevcuttur. (c) durumunda c'_3 kavşağı yönlendirilmiş ve diğeri disoriented olduğundan

$$\varepsilon(c_1) + \varepsilon(c_2) = \varepsilon(c'_3) - \varepsilon(c'_1)$$

elde edilir. (d) durumunda c_1 ve c'_1 kavşakları disoriented ve diğeri yönlendirilmiş olduğundan

$$\varepsilon(c_2) - \varepsilon(c_1) = \varepsilon(c'_3) - \varepsilon(c'_1)$$

yazılır. Böylece, toplamların hiçbirisi halkalanma sayısında herhangi bir değişikliğe neden olmaz. Diğer durumlar (yani A , B ve C durumlarının ait olduğu bileşenler için çeşitli olasılıklar) benzer yolla düşünülebilir. RIII hareketinin kalan durumları benzer yolla incelenebilir. Böylece RIII hareketi uyguladığında halkalanma sayısı değişmez.



Şekil 3.8. Bazı disoriented üçüncü Reidemeister hareketleri

Uyarı 3.2.3. Şimdi L halkasının $K_1, K_2, \dots, K_n$ gibi n bileşeni olsun. $i < j$ şartını sağlayan K_i ve K_j bileşenleri için $1 \leq i, j \leq n$ olacak şekilde halkalanma sayısının genişletilmesi $lk(L) = lk(K_i, K_j)$ olarak tanımlanabilir. Bu yaklaşım $n(n-1)/2$ adet halkalanma sayısı verir. Bunların toplamı

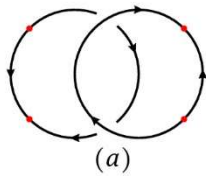
$$lk(L) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} lk(K_i, K_j)$$

K halkasının toplam halkalanma sayısı olarak adlandırılır. Toplam halkalanma sayısının K halkasının bir invaryantı olduğu yukarıdaki teoreme benzer şekilde ispatlanabilir.

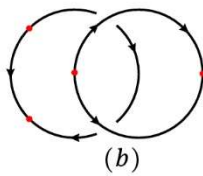
Uyarı 3.2.4. Disoriented halkalanma sayısı, disorientation seçimi ne olursa olsun her zaman yönlendirilmiş halkalanma sayısına eşittir. Gerçekten, yönlendirilmiş kavşağın işareti disoriented yapılarak değiştirilirse, halkalanma sayısını tanımlayan toplamda o işaret tekrar değişecektir.

Örnek 3.2.5. L , Şekil 3.9.'daki herhangi bir aşikâr (halkalanmamış) disoriented halka diyagramı olsun. (a) durumunda zıt işaretli iki yönlendirilmiş kavşak bulunur. Yani, $\varepsilon(o)=0$ olur. (b) ve (c) durumlarında aynı işaretli disoriented bir kavşak ve yönlendirilmiş bir kavşak vardır. Yani, $\varepsilon(o)-\varepsilon(d)=0$ olur. (d) durumunda zıt işaretli iki disoriented kavşak bulunur. Yani, $\varepsilon(d)=0$ olur. Böylece her durumda $lk(L)=0$ elde edilir.

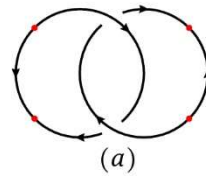
Örnek 3.2.6. L , Şekil 3.10.'daki iki halkanın herhangi bir diyagramı olsun. (a) durumunda aynı işarete sahip iki yönlendirilmiş kavşak bulunur. Yani, $\varepsilon(o)=2$ olur. (b) ve (c) durumlarında zıt işaretlere sahip yönlendirilmiş ve disoriented birer kavşak bulunur. Böylece $|\varepsilon(o)-\varepsilon(d)|=2$ olur. (d) durumunda negatif işarete sahip iki disoriented kavşak bulunur. Yani $\varepsilon(d)=-2$ ve $|\varepsilon(o)-\varepsilon(d)|=2$ olur. Sonuç olarak her durumda $lk(L)=1$ elde edilir.



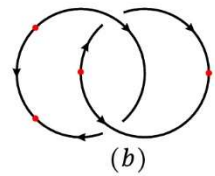
(a)



(b)

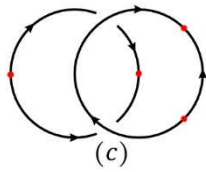


(c)

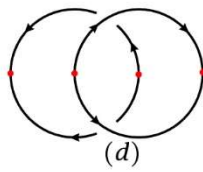


(d)

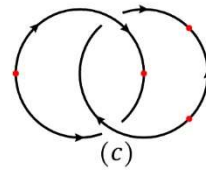
Şekil 3.9. Disoriented aşikâr halka diyagramları



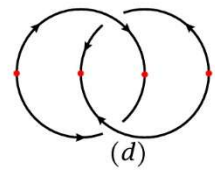
(a)



(b)



(c)



(d)

Şekil 3.10. İki bileşenli Disoriented halka diyagramları

3.3. Burulma

Bir düğümün (veya halkanın) bir D regüler diyagramının klasik burulması olan $w(D)$ D diyagramının tüm kavşaklarının işaretlerinin toplamıdır (Tanım 2.2.4.).

Burulmanın bu tanımı, bir düğümün D disoriented diyagramına uyarlanabilir. Klasik burulma, düğümün bir invaryantı değildir. Bununla beraber regüler izotop yönlendirilmiş düğüm diyagramları aynı burulmaya sahiptir [13]. Klasik burulmanın disoriented diyagramlar için RII ve RIII altında invaryant olmadığı kolayca anlaşılır. Şimdi halka veya düğümün disoriented diyagramı için tam burulma adı verilen yeni bir burulma tanımı verilmiş ve bir düğümün disoriented bütün diyagramlarının tam burulmalarının eşit olduğu ispatlanmıştır.

Tanım 3.3.1. [1] D , K düğümünün (veya halkasının) disoriented regüler diyagramı olsun. D diyagramının tam burulması $cw(D)$,

$$cw(D) = \sum_o \varepsilon(o) - \sum_d \varepsilon(d)$$

formülü ile tanımlanır. Burada ilk toplam D diyagramının yönlendirilmiş kavşakları üzerinden ve ikinci toplam onun disoriented kavşakları üzerinden yapılır. $\varepsilon(o)$ ve $\varepsilon(d)$ sırasıyla D diyagramının yönlendirilmiş ve disoriented kavşağının işaretini gösterir.

Teorem 3.3.2. D disoriented diyagramının $cw(D)$ tam burulması, bir regüler izotop invaryantıdır.

İspat. Teorem 3.2.2.'de sadece halkaya ait kavşaklar üzerinde çalışılmıştı. Teorem 3.2.'nin ispatı, D disoriented diyagramının bütün kavşaklarına uygulanırsa, RII ve RIII hareketlerinin halkalanma sayısı üzerindeki etkilerinin $cw(D)$ tam burulma üzerindeki etkileri ile aynı olduğunu görmek kolaydır.

D disoriented diyagramının $cw(D)$ tam burulması RI ve RI' hareketleri altında invaryant değildir. Yine de aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem 3.3.3. Aşıkâr olmayan düğümün (veya halkanın) bütün disoriented diyagramlarının tam burulmaları aynıdır.

İspat. K , n kavşaklı aşıkâr olmayan düğüm (veya halka) olsun. K düğümünün yönlendirilmiş bir diyagramını D_0 ile gösterelim. $cw(D_0) = k$, $k \in \mathbb{Z}$ olsun. k_1 , D_0 diyagramındaki pozitif işaretli kavşakların işaretlerinin toplamı ve k_2 , negatif işaretli kavşakların işaretlerinin toplamı olsun. Bu durumda

$$cw(D_0) = k = k_1 + k_2$$

elde edilir. D_1 , bir disoriented kavşağa sahip disoriented diyagram olsun. Disoriented kavşağın işareti negatifse tam burulma tanımından

$$cw(D_1) = (k_1 - 1) + k_2 + 1 = k$$

disoriented kavşağın işareti pozitifse

$$cw(D_1) = k_1 + (k_2 + 1) - 1 = k$$

Benzer olarak D_m , m disoriented kavşağa sahip disoriented diyagramı gösterebiliriz. Burada D_m diyagramının disoriented kavşaklarının işaretlerinin toplamı m için $m \leq k$. m pozitifse

$$cw(D_m) = k_1 + (k_2 + m) - m = k$$

ve m negatifse

$$cw(D_m) = (k_1 - m) + k_2 + m = k$$

olur. Böylece K düğümünün her disoriented diyagramı için $cw(D) = k$, $k \in \mathbb{Z}$ bulunur.

Uyarı 3.3.4. Teorem 3.3.3.'ün ispatından, herhangi bir disorientationun tam burulmasının yönlendirilmiş diyagramın klasik burulmaya eşit olduğu anlaşılır.

Aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi bir düğümün her disoriented diyagramı farklı burulmaya sahip olmasına rağmen tam burulmaları aynıdır.

Örnek 3.3.5. Şekil 3.3.'teki sağ el yonca yaprağı düğümünün disoriented diyagramlarının burulmaları $w(D_0) = 3$, $w(D_1) = 1$, $w(D_3) = -3$ olmasına rağmen tam burulmaları $cw(D_i) = 3$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ olur.

BÖLÜM 4. DISORIENTED POLİNOM İNVARYANTLAR

Bu bölümde, disoriented düğüm ve halkalar için parantez polinomunu ve normalleştirilmiş parantez polinomu verilmiştir. Parantez polinomunun disoriented düğümler için regüler izotop invaryant olduğu ancak normalleştirilmiş parantez polinomunun disoriented düğüm ve halkalar için invaryant olmadığı gösterilmiştir.

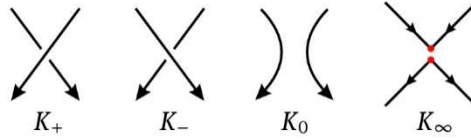
Normalleştirilmiş parantez polinomunun disoriented düğümün bir invaryantı olması için orijinal normalleştirilmiş parantez polinomu, RI' hareketi göz önüne alınarak, tam normalleştirilmiş parantez polinomu veya tam Jones polinomu adıyla yeniden tanımlanmaktadır. Tam normalleştirilmiş polinomu invaryantının inşası parantez polinomunun disoriented toplamı ile başlar. Bu demektir ki her bölgesel ayırma Şekil 3.11.'de gösterildiği gibi ya yönlendirilmiş ayırma ya da disoriented ayırmadır. Bu ayırmalar ile ilgili ayrıntılı bilgi [39]- [40] çalışmalarında mevcuttur.

4.1. Genişletilmiş Parantez Polinom Modeli

Parantez polinom modeli (Tanım 2.3.1.), yönlendirilmiş bir düğüm veya halka diyagramına genişletilerek.

$$\begin{aligned}\langle K_+ \rangle &= A \langle K_0 \rangle + A^{-1} \langle K_\infty \rangle \\ \langle K_- \rangle &= A^{-1} \langle K_0 \rangle + A \langle K_\infty \rangle \\ \delta &= -A^2 - A^{-2}, \quad \langle O \sqcup D \rangle = \delta \langle D \rangle\end{aligned}\tag{4.1}$$

şeklinde yazılabilir. Burada K_+ , K_- , K_0 ve K_∞ Şekil 4.1 de çizilen diyagramlardır. $\bigcirc$ düğümlenmemiş düğümün yönlendirilmiş diyagramını, D yönlendirilmiş düğüm veya halka diyagramını ve $\sqcup$ ayrık birleşimi gösterir.



Şekil 4.1. Kavşaklar ve ayırmalar

Bu model, disoriented düğüm ve halka diyagramında hem yönlendirilmiş hem de disoriented kavşaklar için de kullanılabilir. Disoriented düğüm ve halka diyagramları için (4.1.) modelinden elde edilen polinom, genişletilmiş parantez polinomu olarak adlandırılır.

Klasik parantez polinomunda olduğu gibi genişletilmiş parantez polinoma karşılık gelen disoriented durum, toplam modelinde

$$\langle D \rangle = \sum_S \langle D|S \rangle \delta^{|S|-1}$$

biçiminde yazılır [1]. Burada S , D disoriented diyagramının hem yönlendirilmiş hem de disoriented parantez durumları üzerinden ilerlemektedir. $\langle D|S \rangle$, köşe ağırlıklarının normal çarpımı ve $|S|$, S durumundaki çember sayısını gösterir.

Teorem 4.1.1. Genişletilmiş parantez polinomu, disoriented düğüm ve halka diyagramları için regüler izotopinin bir invaryantıdır.

İspat. Teoremi ispatlamak için (4.1.) modelinin, disoriented diyagramlar üzerinde RII ve RIII hareketleri altındaki davranışlarını incelemek gerekir. Burada (4.1.) modelinin Şekil 3.5.'de çizilen RII hareketlerinden J' ve J'_1 diyagramları ile Şekil 3.6.'da çizilen

RIII hareketlerinden T' ve T'_1 hareketleri altındaki davranışları incelenmiştir. Diğer hareketler altındaki davranışları da benzer şekilde yapılır. (4.1) modelini J' diyagramına uygulayalım. Şekil 4.2.'den

$$\langle J' \rangle = (A^2 + A^{-2} + \delta) \langle K_\infty \rangle + \langle K_0 \rangle = \langle K_0 \rangle$$

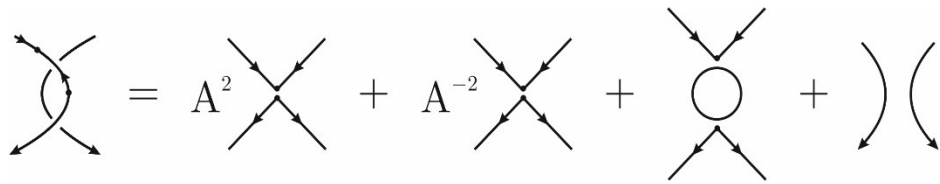
elde edilir. Benzer şekilde (4.1.) modeli J'_1 diyagramına uygulandığında Şekil 4.2.'den

$$\langle J'_1 \rangle = (A^2 + A^{-2} + \delta) \langle K''_0 \rangle + \langle K'_0 \rangle = \langle K'_0 \rangle$$

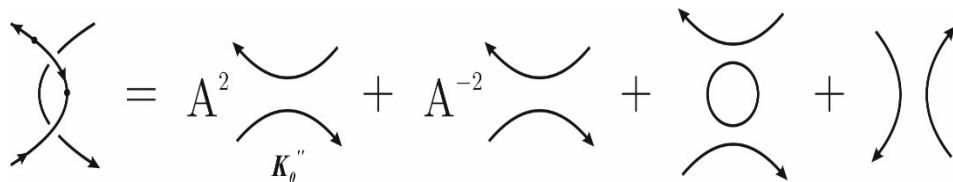
elde edilir Böylece (4.1) modeli disoriented düğüm ve halkalar için ikinci Reidemeister hareketleri altında invaryant kalır. RIII hareketlerinden T' ve T'_1 hareketleri altındaki invaryantlık Şekil 4.4 ve Şekil 4.5 ün analizinden çıkar. Gerçekten $\langle I_0 K_\infty \rangle = \langle K_\infty I_0 \rangle$ ve $\delta = -A^2 - A^{-2}$ alındığında Şekil 4.4. ve Şekil 4.5. den

$$\langle T' \rangle = A^3 \langle T_0 \rangle + 2A \langle I_0 K_\infty \rangle + A^{-1} \langle R \rangle + A^{-1} \langle S \rangle = \langle T'_1 \rangle$$

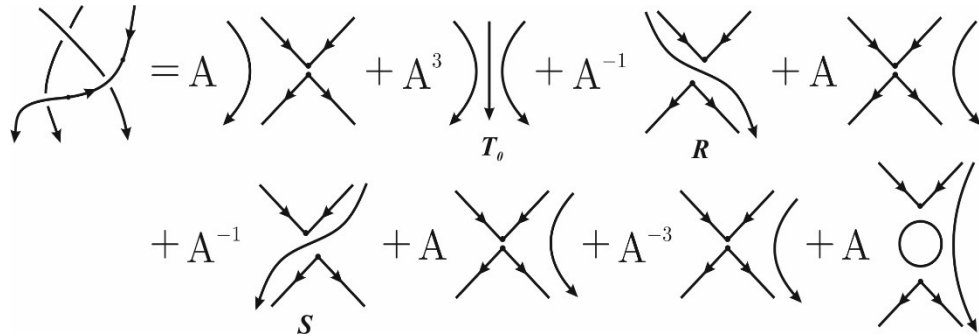
bulunur. Böylece genişletilmiş parantez polinomu disoriented düğüm ve halkalar için regüler izotopinin bir invaryantıdır.



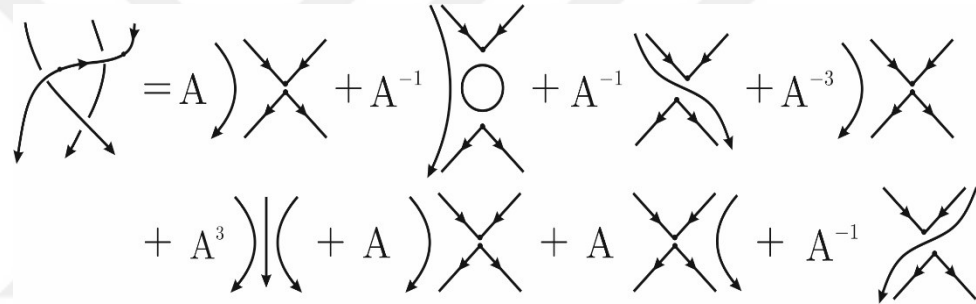
Şekil 4.2. Bir disoriented RII hareketinin parantez durum modeli



Şekil 4.3. Bir ters yönlü disoriented RII hareketinin parantez durum modeli



Şekil 4.4. Bir disoriented RIII hareketinin parantez durum modeli

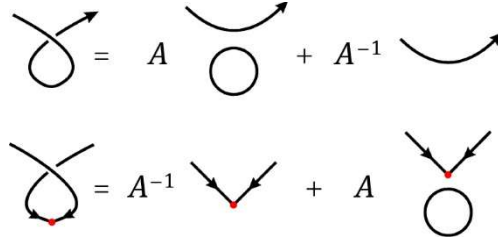


Şekil 4.5. Bir disoriented RIII hareketinin parantez durum modeli

Genişletilmiş parantez polinomu, disoriented düğüm ve halka diyagramları için RI ve RI' hareketinin bir invaryantı değildir. Bu hareketler altındaki davranışı aşağıdaki önermede incelenmektedir.

Önerme 4.1.2. I , I_0 , I' ve I_1 Şekil 3.4.'te verilen diyagramlar olmak üzere, $\langle I \rangle = (-A^3) \langle I_0 \rangle$ ve $\langle I' \rangle = (-A^3) \langle I_1 \rangle$ olur.

İspat. Şekil 4.6.'dan $\langle I \rangle = (A\delta + A^{-1}) \langle I_0 \rangle = (-A^3) \langle I_0 \rangle$ ve $\langle I' \rangle = (A^{-1} + A\delta) \langle I_1 \rangle = (-A^3) \langle I_1 \rangle$ olduğu kolayca görülür. Burada I ve I' ifadelerinin birbirleri ile zıt işaretli olduğuna dikkat edilmelidir.



Şekil 4.6. RI ve RI' hareketlerinin parantez durum modeli

Genişletilmiş parantez polinomu, RI' hareketi hariç bütün yönlendirilmiş ve disoriented hareketleri için klasik düğümlerde olduğu gibi normalleştirilebilir (Bakınız Tanım 2.3.2.). Tam tanımı aşağıdaki gibidir.

Tanım 4.1.3. D bir disoriented düğüm veya halka diyagramı ve $\langle D \rangle$, onun parantez polinomu olsun. Bu durumda diyagramın burulma sayısı ile normalleştirilen polinomu

$$f_D(A) = (-A^3)^{-w(K)} \langle D \rangle$$

ile tanımlanır.

Uyarı 4.1.4. $f_D(A)$ polinomun RI' hareketi altındaki davranışı hariç diğer hareketler altındaki davranışları yönlendirilmiş durumun aynısıdır. Bu, son kısımda verilen örneklerden de rahatlıkla görülebilir. Bundan dolayı yukarıdaki tanıma Kauffman [5-9] tarafından verilen normalleştirilmiş parantez polinomunun disoriented düğüm ve halka diyagramlarına bir genişletilmesi olarak bakılabilir. Böylece Teorem 2.3.4.'te olduğu gibi D disoriented düğüm ve halka diyagramları için genişletilmiş Jones polinomu $V_D(t)$,

$$V_D(t) = f_D(t^{-1/4})$$

eşitliği ile tanımlanır. Orijinal Jones polinomu, disoriented halkalar için invaryant değildir. Çünkü bu polinom RI' hareketi altında invaryant değildir. Bakınız Örnek 4.2.5.

4.2. Tam Normalleştirilmiş Polinom

Bu kısımda, disoriented düğüm ve halka diyagramları için normalleştirilmiş parantez polinomu tam burulma ile yeniden tanımlanmıştır. Buna tam normalleştirilmiş polinom adı verilmiş ve tam normalleştirilmiş polinomun disoriented düğüm ve halka diyagramlarının bütün hareketleri altında invaryant olduğu gösterilmiştir.

Tanım 4.2.1. [1] Bir K düğümünün veya halkanın bir D disoriented diyagramı için aşağıdaki formülle bir $T_K \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ polinomu tanımlayalım.

$$T_K(A) = (-A^3)^{-cw(D)} \langle D \rangle$$

Burada $cw(D)$, D disoriented diyagramının tam burulmasıdır. T_K polinomuna tam normalleştirilmiş polinom denir.

Teorem 4.2.2. Tam normalleştirilmiş polinom, disoriented düğüm ve halka diyagramları için bir tam kuşatan izotop invaryantıdır.

İspat. $cw(D)$ regüler izotopinin bir invaryantı olduğundan $(-A^3)^{-cw(D)}$ ve $\langle D \rangle$ regüler izotopinin invaryantıdır. Bu demektir ki T_K regüler izotopinin bir invaryantıdır. Böylece T_K polinomunun disoriented diyagramlardaki RI ve RI' hareketi altında invaryant olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için Şekil 3.4 de çizilen I , I' , I_0 ve I_1 diyagramlarını ele alalım. $cw(I) = \varepsilon(0) - \varepsilon(d) = 1 - 0 = 1$ ve $cw(I) = 0 - (-1) = 1$ olduğundan ve böylece $cw(I) = 1 + cw(I_0)$ ve $cw(I') = 1 + cw(I_1)$ olur. Buradan

$$T_I(A) = (-A^3)^{-tw(I)} \langle I \rangle = (-A^3)^{-(1+tw(I_0))} (-A^3) \langle I_0 \rangle = (-A^3)^{-tw(I_0)} \langle I_0 \rangle = T_{I_0}(A),$$

$$T_{I'}(A) = (-A^3)^{-tw(I')} \langle I' \rangle = (-A^3)^{-(1+tw(I_1))} (-A^3) \langle I_1 \rangle = (-A^3)^{-tw(I_1)} \langle I_1 \rangle = T_{I_1}(A).$$

olur ve ispat tamamlanır.

Aşağıdaki önermede, $\langle K \rangle$, f_K ve T_K polinomlarının ayna görüntüsü altındaki davranışı verilmektedir.

Önerme 4.2.3. K^* , bir K disoriented düğüm ve halkasının kavşaklarının geçitlerinin alt üst edilmesiyle elde edilen ayna görüntüsü olsun. Bu durumda $\langle K^* \rangle(A) = \langle K \rangle(A^{-1})$, $f_{K^*}(A) = f_K(A^{-1})$ ve $T_{K^*}(A) = T_K(A^{-1})$ olur.

İspat. İspat $\langle K \rangle$, f_K ve T_K polinomlarının tanımlarındaki bütün kavşaklarda A ile A^{-1} değişkenlerin yer değiştirmesinden çıkar.

Aşağıdaki teorem gösterir ki, T_K polinomu değişken değişimi ile orijinal Jones polinomudur. Bu polinomu disoriented düğüm ve halka diyagramları tam Jones polinomu olarak adlandıracağız ve $\mathcal{V}_K$ ile göstereceğiz.

Teorem 4.2.4. T_K tam normalleştirilmiş polinom, $\mathcal{V}_K$ tam Jones polinomunu sağlar.

Yani $T_K(t^{-1/4}) = \mathcal{V}_K(t)$ olur.

İspat. Genişletilmiş parantez polinomunun (4.1) modelinden aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz.

$$A\langle K_+ \rangle - A^{-1}\langle K_- \rangle = (A^2 - A^{-2})\langle K_0 \rangle \quad (4.2)$$

$$A^{-1}\langle K_+ \rangle - A\langle K_- \rangle = (A^{-2} - A^2)\langle K_\infty \rangle \quad (4.3)$$

$cw(K_0) = cw$ alınırsa, $cw(K_+) = cw + 1$, $cw(K_-) = cw - 1$ ve $cw(K_\infty) = -cw$ elde ederiz. Buradan $a = (-A^3)$ ile (4.2) eşitliğini

$$Aa^{-tw}\langle K_+ \rangle - A^{-1}a^{-tw}\langle K_- \rangle = (A^2 - A^{-2})a^{-tw}\langle K_0 \rangle$$

biçiminde yazılır. Böylece

$$Aaa^{-(tw+1)}\langle K_+ \rangle - A^{-1}aa^{-(tw-1)}\langle K_- \rangle = (A^2 - A^{-2})a^{-tw}\langle K_0 \rangle$$

$$-A^4T_{K_+} + A^{-4}T_{K_-} = (A^2 - A^{-2})T_{K_0}.$$

Eğer (4.3) eşitliğinden $\langle K_\infty \rangle = A\langle K_+ \rangle - A^2\langle K_0 \rangle$ (veya $\langle K_\infty \rangle = A^{-1}\langle K_- \rangle - A^{-2}\langle K_0 \rangle$) eşitliği kullanılırsa

$$A^3\langle K_+ \rangle - A\langle K_- \rangle = (A^4 - 1)\langle K_0 \rangle.$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$A^3a^{-tw}\langle K_+ \rangle - Aa^{-tw}\langle K_- \rangle = (A^4 - 1)a^{-tw}\langle K_0 \rangle$$

$$-A^6T_{K_+} + A^{-2}T_{K_-} = (A^4 - 1)T_{K_0}.$$

bulunur. Bu son eşitliğin her iki tarafı A^{-2} çarpılırsa

$$-A^4T_{K_+} + A^{-4}T_{K_-} = (A^2 - A^{-2})T_{K_0}.$$

elde edilir. Bu eşitlikte $A = t^{-1/4}$ alınırsa

$$t^{-1}T_{K_+} - tT_{K_-} = (t^{1/2} - t^{-1/2})T_{K_0}$$

bulunur.

Bu, Jones polinomunun birinci aksiyomunun sağlandığının ispatıdır. Diğer aksiyomlar (bkz. Tanım 2.3.3.) T_K polinomunun karşılık gelen aksiyomları ile aynıdır. Böylece teorem ispat tamamlanır.

Örnek 4.2.5. O_1 ve O_2 , Şekil 4.7.'de çizilen bir kavşaklı düğümlenmemiş düğümün sırasıyla yönlendirilmiş ve disoriented diyagramlarını gösterebilir. Bu durumda,

$$\langle O_1 \rangle = -A^3,$$

$$\langle O_2 \rangle = -A^{-3},$$

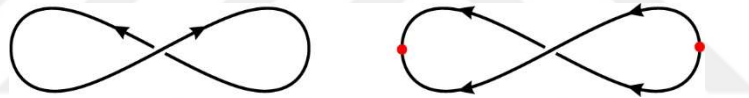
$$f_{O_1} = (-A^3)^{-\omega(O_1)} \langle O_1 \rangle = 1,$$

$$f_{O_2} = (-A^3)^{-\omega(O_2)} \langle O_1 \rangle = A^6,$$

$$T_{O_1} = (-A^3)^{-\tau(O_1)} \langle O_1 \rangle = 1,$$

$$T_{O_2} = (-A^3)^{-\tau(O_2)} \langle O_2 \rangle = 1$$

$A = t^{-1/4}$ ile $V_{O_1} = 1$ ve $V_{O_2} = t^{-3/2}$ olmasına rağmen $\mathcal{V}_{O_1}(t) = \mathcal{V}_{O_2}(t) = 1$ elde edilir.



Şekil 4.7. Bir kavşaklı yönlendirilmiş ve disoriented düğümlenmemiş düğüm diyagramı

Örnek 4.2.5. Şekil 3.3.'teki sağ el yonca yaprağının disoriented diyagramları için

$$\langle D_i \rangle = A^{-7} - A^{-3} - A^5, \quad i \in \{0, 1, 2, 3\},$$

$$f_{D_0} = (-A^3)^{-w(D_0)} \langle D_0 \rangle = A^{-4} + A^{-12} - A^{-16},$$

$$f_{D_1} = A^2 + A^6 - A^{10} = A^6 (A^{-4} + A^{-12} - A^{-16}),$$

$$f_{D_2} = A^8 + 1 - A^4 = A^{12} (A^{-4} + A^{-12} - A^{-16}),$$

$$f_{D_3} = A^{14} + A^6 - A^2 = A^{18} (A^{-4} + A^{-12} - A^{-16}).$$

$A = t^{-1/4}$ ile,

$$\begin{aligned}
V_{D_0} &= t + t^3 - t^4, \\
V_{D_1} &= t^{-1/2} + t^{3/2} - t^{5/2} = t^{-3/2} (t + t^3 - t^4), \\
V_{D_2} &= t^{-2} + 1 - t = t^{-3} (t + t^3 - t^4), \\
V_{D_3} &= t^{-7/2} + t^{-3/2} - t^{-1/2} = t^{9/2} (t + t^3 - t^4).
\end{aligned}$$

$$T_K = T_{D_i} = \left(-A^3\right)^{-cw(D_i)} \langle D_i \rangle = A^{-4} + A^{-12} - A^{-16} \text{ ve } \mathcal{V}_K = t + t^3 - t^4.$$

bulunur.



BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde, disoriented düğüm teorisine bir giriş yapılmış ve Reidemeister Hareketleri, halkalanma sayısı, burulma, parantez polinomu ve Jones Polinomunun disoriented düğüm ve halka diyagramlarına nasıl uyarlanacağı üzerinde durulmuştur. Çalışma disorientation kavramı üzerine dayandırılmıştır. Klasik düğüm teorisinde olmayan disoriented kavşak ve tam burulma gibi yeni kavramlar tanıtılmıştır. Disoriented düğüm ve halka diyagramları için Jones polinomu tanımlanmıştır.

Disoriented düğüm teorisinde iki değişkenli polinom invaryantları, disoriented diyagramlar için Gauss diyagramları ve Gauss kodları, sınırlı bir disoriented düğüm olan yüzeyler gibi çalışılabilecek birçok kavram mevcuttur.

Bu tezin bu fikirler üzerine gelecekte yapılacak çalışmalar için temel oluşturabileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Altıntaş İ., Introduction to Disoriented Knot Theory, Open Mathematics, 2018, 16, 346-357.
- [2] Frankl, F. and Pontrjagin, L., Ein Knotensatz mit Anwendung auf die Dimensionstheorie, Mathematische Annalen, 1930, 102 (1), 785-789.
- [3] Seifert, H., Über das Geschlecht von Knoten, Mathematische Annalen, 1935, 110 (1), 571-592.
- [4] Kawauchi, A., A Survey of Knot Theory, mBasel: Birkhuser. 1996,
- [5] Manturov, V. Knot Theory. London, United Kingdom: CRC Press. 2004.
- [6] Murasugi, K. Knot Theory and Its Applications. Basel: Birkhuser, 1996.
- [7] Alexander, J. W., Topological invariants of knots and links, Transactions of the American Mathematical Society, 1928, 30, 275-306.
- [8] Jones, V. F. R., A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras, Bulletin of the American Mathematical Society, 1985, 12, 103-111.
- [9] Freyd, P., Yetter, D., Hoste, J., Lickorish, W. B. R., Millett, K. and Ocneanu, A., A new polynomial invariant of knots and links, Bulletin of the American Mathematical Society, 1985, 12, 239-246.
- [10] Kauffman, L. H., On Knots (Annals of Mathematics Study, 115). New Jersey: Princeton University Press, 1987.
- [11] Kauffman, L. H., State models and the Jones polynomial, Topology, 1987, 26 (3), 395-407.
- [12] Kauffman, L. H., New invariants in the theory of knots, American Mathematical Monthly, 1988, 95 (3), 195-242.
- [13] Kauffman, L. H., An invariant of regular isotopy, Transactions of the American Mathematical Society, 1990, 318, 417-471.
- [14] Kauffman, L. H., Knots and Physics (Series on Knots and Everything, 1). River Edge, NJ: World Scientific Publishing Co. Inc, 1991.

- [15] Rolfsen, D., Knots and links (Mathematics Lecture Series, No. 7.), Berkeley, Calif.: Publish or Perish, Inc., 1976.
- [16] Frankl, F., Pontrjagin, L., Ein Knotensatz mit Anwendung auf die Dimensionstheorie, *Mathematische Annalen*, 1930, 102 (1), 785-789.
- [17] Fox, R. H., A quick trip through knot theory, *Topology of 3-manifolds and related topics* (Proc. The Univ. of Georgia Institute, 1961), 120-167, N.J.: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1962.
- [18] Fox, R. H., Some problems in knot theory, *Topology of 3-manifolds and related topics* (Proc. The Univ. of Georgia Institute, 1961), 168-176, N.J.: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1962.
- [19] Fox, R.H., Knots and periodic transformations, *Topology of 3-manifolds and related topics* (Proc. The Univ. of Georgia Institute, 1961), 177-182, N.J.: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1962.
- [20] Fox, R. H., Smythe, N., An ideal class invariant of knots, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1964, 15, 707-709.
- [21] Crowell, R. H., Fox, R. H., *Introduction to Knot Theory* (Graduate Texts in Mathematics, 57). New York: Springer-Verlag, 1977.
- [22] Conway, J. H., An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties, *Computational Problems in Abstract Algebra* (Proc. Conf., Oxford, 1967), 329-358, Oxford: Pergamon, 1970.
- [23] Jones, V. F. R., Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials, *Annals of Mathematics. Second Series*, 1987, 126 (2), 335-388.
- [24] Brandt, R. D., Lickorish, W. B. R., Millett, K. C, A polynomial invariant for unoriented knots and links, *Inventiones mathematicae*, 1986, 84 (3), 563-573.
- [25] Ho, C. F., A New Polynomial for Knots and Links-Preliminary Report, *Abstracts of Papers Presented to the American Mathematical Society*, 1985, 6, 300,
- [26] Altıntaş, İ., An oriented state model for the Jones polynomial and its applications alternating links, *Applied Mathematics and Computation*, 2007, 194 (1), 168-178.
- [27] Altıntaş, İ., Some properties of polynomials G and N and tables of knots and links, *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 2013,1 (2), 90-102.
- [28] Ashraf, R., Berceanu, B., Recurrence relation for HOMFLY polynomial and rational specializations, Preprint, arXiv:1003.1034, 2010.

- [29] Galakhov, D., Melnikov, D., Mironov, A., Morozov and A., Sleptsov, A., “Colored knot polynomials for arbitrary pretzel knots and links”, *Physics Letters B*, 2015, 743, 71-74.
- [30] Jin, X., Zhang, F., The Homfly and dichromatic polynomials, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2012, 140 (4), 1459-1472.
- [31] Koseleff, P.-V., Pecker, D., On Fibonacci knots, *Fibonacci Quarterly*, 2010, 48 (2), 137-143.
- [32] Koseleff, P.-V., Pecker, D., On Alexander–Conway polynomials of two-bridge links, *Journal of Symbolic Computation*, 2015, 68 (2), 215-229.
- [33] Stoimenow, A., Generating functions, Fibonacci numbers and rational knots, *Journal of Algebra*, 2007, 310 (2), 491-525,.
- [34] Stoimenow, A. “Hoste's conjecture and roots of link polynomials”, <http://stoimenov.net/stoimeno/homepage/>, 2013.
- [35] Taşköprü, K. and Altıntaş, İ., HOMFLY polynomials of torus links as generalized Fibonacci polynomials, *Electronic Journal of Combinatorics*, 2015, 22 (4), 4-18.
- [36] Turner, J. C., On a class of knots with Fibonacci invariant numbers, *Fibonacci Quarterly*, 1986, 24 (1), 61–66.
- [37] Reshetikhin, N., Turaev, V. G., Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups, *Inventiones Mathematicae*, 1991, 103 (3), 547-597.
- [38] Witten, E., Quantum field theory and the Jones polynomial, *Communications in Mathematical Physics*, 1989, 121 (3), 351-399.
- [39] Kaufmann L. H., Introduction to virtual knot theory, *J. Knot Theory Ramifications*, 2012, 21-37.
- [40] Kaufmann L. H., An extended bracket polynomial for virtual knots and links, *J. Knot Theory Ramifications*, 2009, 18, 1369-1422.
- [41] Dye H. A., Kauffman L. H., Virtual crossing number and the arrow polynomial, *J. Knot Theory Ramifications*, 2009, 18, 1335-1357.
- [42] Dye H. A., Kauffman L. H., Manturov V. O., On two categorifications of the arrow polynomial for virtual knots, In: *The mathematics of knots*, *Contrib. Math. Comput. Sci.*, 1, Springer, Heidelberg, 2011, 95-124.
- [43] Burde G., Zieschen H., Michael H., *Knots*, Walter de Gruyter 2014, Berlin.
- [44] Rolfsen D., *Knots and links*, AMS Chelsea Publishing, 2003.

- [45] Murasugi K. (Translated by Bohdan Kurpita), Knot theory and its applications, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser, Boston, Inc., 2008, Boston
- [46] Adams C. C., The knot book. An elementary introduction to the mathematical theory of knot, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [47] Clark D., Morrison S., Walker K., Fixing the functoriality of Khovanov homology, Geometry & Topology, 2009, 13, 1499-1582.



ÖZGEÇMİŞ

Rabia Saraçoğlu, ilköğretimini Erzincan, ortaöğretimini Giresun ve lisans eğitimini Sakarya'da tamamladı. 2011 yılında Atatürk Anadolu Lisesi'nden mezun oldu. 2012 yılında başladığı Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümü'nü 2017 yılında bitirdi. Aynı yıl Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümü'nde yüksek lisans eğitimine başladı.

Özel eğitim kurslarında stajyer öğretmen ve öğretmen olarak çalıştı. Aktif olarak Kocaeli'de Özel Doğru Cevap Eğitim Kursları'nda matematik öğretmeni olarak çalışmaktadır. Evli ve bir çocuk annesidir.