

TEK EKSENLİ FERROELEKTRİK KRİSTALDE SINIR TABAKASI
DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mat. Müh. Salim CEYHAN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 13 Haziran 1994

Tezin Savunulduğu Tarih : 30 Haziran 1994

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Erdoğan ŞUHUBİ

Diğer Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Hüsnü A. ERBAY

: Y. Doç. Dr. Gazanfer ÜNAL

HAZİRAN 1994

ÖNSÖZ

Günümüz teknolojisinde önemli kullanım imkanları bulunan ferroelektrik malzemeler konusunda yapılan bu çalışma tamamen teorik olarak yapılmıştır. Bu önemli konuda bana çalışma imkanı veren eşsiz bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım değerli tez Hocam Prof. Dr. Erdoğan ŞUHUBİ'ye teşekkür ederim.

Yardımlarından dolayı Doç. Dr. Fikret BALTA'ya, Mathematica kullanımındaki yardımlarından dolayı Yük. Mat. Müh. Serdar ÇAKMAK'a ve $\text{\TeX}$ yazım editöründe tezimin yazımındaki yardımlarından dolayı değerli arkadaşım Yük. Mat. Müh. Rahmiye ERGÜN'e teşekkür ederim.

Salim CEYHAN

Tarabyaüstü, Haziran 1994

İÇİNDEKİLER

ÖZET	IV
SUMMARY	V
BÖLÜM 1. GİRİŞ	
1.1 Elektrodinamiğin Tanımı	1
1.2 Dielektrik Malzeme	1
1.3 Polarizasyon	2
1.4 Ferroelektrik Malzemelere Bir Bakış	3
BÖLÜM 2. TEMEL DENKLEMLER	
2.1 Ferroelektrik Kristalin Alan Denklemlerinin, Sınır ve Sıçrama Koşullarının Yapısı	6
2.2 Elektrik Alanın Yokluğunda Weiss Bölgelerinin Yapısı	8
BÖLÜM 3. SINIR TABAKASINDAKİ ÇÖZÜM	
3.1 Ferroelektrik Kristalin Sınır Tabakasında $\mathcal{P}$ ve ϕ Alan Büyük- lüklerinin Yaklaşık Olarak Hesaplanması	10
3.2 Örnek Problem : Sınırı Dairesel Olan Ferroelektrik Kristalin İncelenmesi	36
SONUÇLAR VE ÖNERİLER	40
KAYNAKLAR	41
ÖZGEÇMİŞ	42

ÖZET

Dış elektrik alanının yokluğunda doymuş bir ferroelektrik rijid kristalde polarizasyon, $\mathbf{p}$ birim vektör alanı ve P_0 kristalin karakteristik bir sabiti olmak üzere $\mathcal{P}=P_0\mathbf{p}$ vektörel alanı ile ifade edilir. Gözlemler böyle bir durumdaki kristalde oluşan Weiss bölgelerinde polarizasyon vektörünün parça parça sabit kaldığını göstermektedir. Ferroelektrik kristallerde oluşan Weiss bölgeleri arasındaki bölge duvarlarının düzlemsel olduğu gösterilmiştir [3].

Kristalin sınır yüzeyi, yüzeye teğet olan polarizasyon vektörünü taşıyabilen düzlemsel yüzeylerin birleşiminden oluşmuyorsa Weiss bölgelerinin sınırına kadar genişleyemeyeceği açıktır. Bu yüzden kristalin keyfi bir şekli için polarizasyon vektörünün boyunun sabit olmasına karşın doğrultusunun sürekli olarak değişebildiğini kabul ettiğimiz, kristalin sınırına yakın ince bir tabaka olduğunu varsaydık. Bu tabaka içindeki polarizasyon vektörünün Weiss bölgelerindeki parça parça sabit duruma asimptotik olarak geçişini sağlayacak içteki sınır eğrisini veren ifadenin asimptotik açılımındaki sıfıncı dereceden terimi verecek olan lineer olmayan bir diferansiyel denklem elde ettik. Sonuçta örnek olarak sınırı dairesel olan bir kristali aldığımızda sınır tabakasında oluşacak durumu inceledik.

SUMMARY

THE SOLUTION OF BOUNDARY LAYER EQUATIONS IN THE UNIAXIAL CRYSTAL

1. Introduction

If a dielectric crystal can get a very high level of a polarization up to saturation point with the application of very low level of electric fields than it is named as ferroelectric material.

In a ferroelectric crystal, even in the absence of external fields, its state of electric polarization is described by a vectorial field $\mathcal{P} = P_0 \mathbf{p}$ where P_0 is a characteristic scalar of the crystal and $\mathbf{p}$ is a differentiable vector field of unit magnitude. The latter is piecewise constant in almost all the volume D of the crystal except in thin layers across which it varies from one constant direction to another. In general, the regions D_a , $a = 1, 2, \dots, m$ in which $\mathcal{P}$ is constant (Weiss domains) have at least one microscopic dimension (a few hundred microns) with other dimensions comparable to those of crystal whereas the transition layers (domain walls) have a thickness of a few microns. The theoretical justification of this complex distribution is found in the combined effects of three factors: the electric energy due to the anisotropy of the crystal, dipole-dipole exchange quantum forces and the form of the crystal. The presence of an external field can only modify the weight of the effects of these three factors on the distribution of the domains. From a classical viewpoint one takes the first two factors into account by associating to the crystal an energy $e(\mathbf{p}, \nabla \mathbf{p})$ per unit polarization and per unit volume in which the contribution due to the presence of $\nabla \mathbf{p}$ is significant only for very large of $\|\nabla \mathbf{p}\|$. Then the equilibrium equations become the extremals of a functional expressing the total energy of the crystal in the presence of external field. These equations are in general so complex that it is very difficult to deduce some general results from them and little information on the distributions of the domains or on the energy contained in a transition layer was obtained only by resorting to rather drastic approximations. Finally, when the forms of the domains are known their dimensions are determined by imposing that total energy be an absolute minimum.

In order to obtain a description sufficiently accurate but also to simplify the situation illustrated above, we suggest in the present work to substitute the domain walls by surfaces of discontinuity S_b , $b = 1, 2, \dots, q$ for $\mathbf{p}$ and to take into account the energy contained in a transition layer with a surface energy $e_\sigma(\mathbf{n}, \mathbf{p}^-, \mathbf{p}^+)$ depending a priori on the orientation of the normal $\mathbf{n}$ of S_b with respect to crystallographic axes and on the constant vectors $\mathbf{p}$ in two domains adjacent to the domain wall under consideration. However in

addition to this surface energy we still go on to consider an energy per unit polarization and per unit volume of the crystal depending on $\nabla \mathbf{p}$ besides $\mathbf{p}$.

In fact, expect for very particular forms of D associated with the symmetry class of the ferroelectric crystal, the satisfaction of the boundary conditions on ∂D may require the formation of small regions adherent to the external walls in the ferroelectric crystal where the polarization field is not uniform. The equilibrium configuration of a rigid ferroelectric crystal in the presence of an external field is then derived by imposing the requirement that the total energy becomes stationary with respect to variations of the polarization and electric fields as well as the surfaces S_b which engender the Weiss domains under the constraints that $\mathbf{p}$ is a unit vector and the volume of each domains remains constant.

Starting from equations so obtained we are able to prove that the domain walls in the interior of D are necessarily plane and the resultant electric field in each domain is uniform. Moreover, it is straightforward to see that if $\mathbf{p}$ verifies the equation $e_{,p}(\mathbf{p}) \equiv \mathcal{A}(\mathbf{p}) = \lambda \mathbf{p}$ (λ is real), that is to say, if $\mathbf{p}$ is, in a sense, an eigenvector of the operator $\mathcal{A}$ then electric and polarization fields have the same direction in each Weiss domain. Otherwise, if $\mathbf{p}$ is not such an eigenvector the two fields have different directions. If there is no external electric field $\mathbf{p}$ proves to be necessarily an eigenvector of the $\mathbf{p}$ -gradient of the polarization energy of anisotropy. These results are in perfect agreement with experiments since it is verified that the distribution of domains in absence of an external field is modified with the presence of the latter. The external field causes either to increase the volume of the domains in which the polarization vector is directed along the external field (weak fields) or to rotate the polarization in domains where it is not directed along the external field without increasing their volume (strong fields).

2. Basic Equations

For a ferroelectric crystal the total energy is given by the functional below [3].

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & \int_D P_0 e(\mathbf{p}, \nabla \mathbf{p}) dv + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{R^3} \phi_{,i} \phi_{,i} dv \\ & - P_0 \int_D \phi_{,i} p_i dv + \sum_{b=1}^q P_0 \int_{S_b} e_\sigma(\mathbf{n}, \mathbf{p}^-, \mathbf{p}^+) da \quad (1) \end{aligned}$$

It is assumed that the ferroelectric crystal has m Weiss domains D_a , $a = 1, 2, \dots, m$. The boundaries that separates these domains are S_b , $b = 1, 2, \dots, q$. The surface energy in a very small domain around a boundary separating two Weiss domains is $e_\sigma(\mathbf{n}, \mathbf{p}^-, \mathbf{p}^+)$ and it depends on the unit normal $\mathbf{n}$ of the S_b and the constant $\mathbf{p}$'s of both domains. Also, $e(\mathbf{p}, \nabla \mathbf{p})$ is the internal energy density of the crystal, ϕ is the electric potential, $\mathbf{n}$ is the unit normal of a boundary S_b or the outer normal of the boundary ∂D of D selected appropriately, $\mathbf{p}^-$ and $\mathbf{p}^+$ are the values of the polarization when passing from one side to the other around the Weiss boundaries and ϵ_0 is the dielectric constant of the vacuum.

This functional is investigated with a new variational principle by A.ROMANO and E.S.ŞUHUBİ [3] and the corresponding local field equations, boundary and jump conditions are obtained as,

$$\begin{aligned} e_{,p_i} - (e_{,p_i,j})_{,j} - \phi_{,i} + \lambda p_i &= 0, \\ \epsilon_0 \phi_{,ii} - P_0 p_{i,i} &= 0, \end{aligned} \quad \text{in } D_a \quad (2, a-b)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_0 [\phi_{,i}] n_i + P_0 p_i n_i &= 0, \\ e_{,p_i,j} n_j &= 0, \end{aligned} \quad \text{on } \partial D \quad (3, a-b)$$

$$[\epsilon_0 \phi_{,i} - P_0 p_i] \bar{n}_i = 0, \quad \text{on } S_b \quad (4)$$

where $\lambda(\mathbf{x})$ is a Lagrange multiplier.

Because the polarization field is a piecewise constant in the Weiss domains Eg.(2,a-b)-(4) simplify very much for these domains.

$$\begin{aligned} e_{,p_i} - \phi_{,i} + \lambda p_i &= 0, \\ \phi_{,ii} &= 0, \end{aligned} \quad \text{in } D_a \quad (5, a-b)$$

$$[\epsilon_0 \phi_{,i} - P_0 p_i] \bar{n}_i = 0, \quad \text{on } S_b \quad (6)$$

Also electric field in a Weiss domain can only be a constant field. For this reason it is shown that the boundaries separating Weiss domains can only be planes, [3].

3. The structure of the Weiss Domains in the Absence of Electric Field

In the absence of an external electric field and also if an electric field induced by the variation of the piecewise constant polarization field is not exist equations (2,a-b),(3,a-b) and (4) take the following simpler forms.

$$e_{,p_i} = -\lambda p_i, \quad \text{in } D_a \quad (7)$$

$$p_i n_i = 0 \quad \text{on } \partial D \quad (8)$$

$$[p_i] n_i = 0 \quad \text{on } S_b \quad (9)$$

If the boundary surface of the crystal is not made up the union of planar surfaces which can carry an admissible polarization vector it is obvious that internal Weiss domains cannot be extended up to the boundary. Therefore for an arbitrary shape of crystal we are compelled to consider a thin layer adjacent to the boundary of the crystal in which the polarization vector cannot be assumed anymore to be piecewise uniform. We expect that the solution for the polarization vector in this layer D_L approaches constant states which are prevalent in the interior parts of the crystal at places sufficiently far from

the boundary ∂D . However the polarization field must vary very rapidly from these constant states to a field which is tangent to the boundary. Hence in a very thin boundary layer adjacent to the boundary we have to assume that polarization gradients are very large but in the rest of D_L it approaches asymptotically to a piecewise constant state.

4. The Solutions in Boundary Layer

The ferroelectric crystal that we deal with is barium titanate (BaTiO_3) of which the one and only polarization axis is the easiest to find. The energy of the crystal in the first approximation is taken as follows

$$e = \frac{P_0}{2} \left[\alpha \text{tr}[\mathbf{P}\mathbf{P}^T] + \beta (|\mathbf{p}|^2 - (\mathbf{h} \cdot \mathbf{p})^2) \right] \quad (10)$$

We will study in $x - z$ plane ($p_y = 0$). The energy of the crystal is taken as follow :

$$e = \frac{P_0}{2} \{ \alpha ((p_{x,x})^2 + (p_{x,z})^2 + (p_{z,x})^2 + (p_{z,z})^2) + \beta p_x^2 \} \quad (11)$$

$$p_x^2 + p_z^2 = 1 \quad (12)$$

For this purpose many parametrizations are experimented. But even though considerable effort are spent, because of the scarseness of the number of the unknown field variables, unfortunately a suitable solution that satisfy all the boundary conditions could not be found. Then it is observed that the extra unknown, arised when an electric potential is considered inside this layer close to the boundary, overcome this difficulty. In this case the local field equation that we use in the thin layer are,

$$\begin{aligned} e_{,pi} - (e_{,pi,j})_{,j} - \phi_{,i} + \lambda p_i &= 0, \\ \epsilon_0 \phi_{,ii} - P_0 p_{i,i} &= 0, \end{aligned} \quad \text{in } D_L \quad (13, a - b)$$

And the boundary conditions become,

$$\begin{aligned} e_{,pi,j} n_j &= 0, \\ p_i n_i &= 0, \end{aligned} \quad \text{on } \partial D \quad (14, a - b)$$

In addition, on the boundary between this layer and the neighbouring Weiss domain, the jump condition,

$$\begin{aligned} \epsilon_0 [\phi_{,i}] n_i + P_0 p_i n_i &= 0, \\ e_{,pi,j} n_j &= 0, \end{aligned} \quad \text{on } \partial D \quad (15, a - b)$$

$$[\epsilon_0 \phi_{,i} - P_0 p_i] \bar{n}_i = 0, \quad \text{on } S_b \quad (16)$$

must also be satisfied. The following conditions must be valid everywhere

$$|\mathbf{p}| = 1, \quad [\phi] = 0.$$

Let us define a generalized curvilinear coordinate frame in the thin layer. Position of a point on the plane is defined in this coordinate frame as

$$\mathbf{r}(x^1, x^2) = \mathbf{r}_0(x^2) + x^1 \mathbf{n}(x^2). \quad (17)$$

The base vectors and the matrix from of the metric tensor are given as

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{n}(x^2) \quad (18)$$

$$\mathbf{g}_2 = \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right) \mathbf{t} \quad (19)$$

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^2 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

In this coordinate frame the equations (13,a-b) become for $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} & p^1_{,11} + \frac{1}{\left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^2} p^1_{,22} + \frac{2}{\rho \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)} p^2_{,2} - \frac{1}{\rho \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)} p^1_{,1} \\ & - \frac{x^1 \dot{\rho}}{\rho^2 \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^3} p^1_{,2} - \frac{1}{\rho^2 \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^2} p^1 - \frac{\dot{\rho} \left(1 - 2 \frac{x^1}{\rho}\right)}{\rho^2 \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^2} p^2 + \tau \phi_{,1} \\ & = \kappa(\mu + n_x^2) p^1 - \kappa \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right) n_z t_z p^2 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & p^2_{,11} + \frac{1}{\left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^2} p^2_{,22} + \frac{x^1 \dot{\rho}}{\rho^2 \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^3} p^2_{,2} - \frac{3}{\rho \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)} p^2_{,1} \\ & - \frac{2}{\rho \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^3} p^1_{,2} + \frac{\dot{\rho}}{\rho^2 \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^4} p^1 \\ & + \left\{ \frac{x^1 \ddot{\rho}}{\rho^2 \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^3} - \frac{x^1 \dot{\rho}^2 \left(2 - \frac{x^1}{\rho}\right)}{\rho^3 \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^4} \right\} p^2 + \frac{\tau}{\left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^2} \phi_{,2} \\ & = \kappa(\mu + t_x^2) p^2 - \frac{\kappa}{\left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)} n_z t_z p^1 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \phi_{,11} + \frac{1}{\left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^2} \phi_{,22} - \frac{1}{\rho \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)} \phi_{,1} - \frac{x^1 \dot{\rho}}{\rho^2 \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^3} \phi_{,2} \\ & - \frac{P_0}{\epsilon_0} \left(p^1_{,1} + p^2_{,2} - \frac{1}{\rho \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)} p^1 + \frac{x^1 \dot{\rho}}{\rho^2 \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)} p^2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

where the dimensionless quantities $\xi = x^1/h$ and $\eta = x^2/L$ are used. We also define a scale parameter that is assumed to be very small

$$\epsilon = h/L \ll 1.$$

Using this parameter and defining $p^1 = \epsilon P$, $p^2 = Q$ and $\phi = \epsilon^2 \Phi$, the following asymptotic expansions are considered,

$$\begin{aligned} P(\xi, \eta; \epsilon) &= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n P_n(\xi, \eta) \\ Q(\xi, \eta; \epsilon) &= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n Q_n(\xi, \eta) \\ \Phi(\xi, \eta; \epsilon) &= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \Phi_n(\xi, \eta). \end{aligned}$$

At the end, the zeroth order solutions of P , Q and Φ that satisfy the boundary and the jump conditions,

$$\begin{aligned} P_0(\eta) &= A(\eta) \\ Q_0 &= \mp 1 \\ \Phi_0(\xi, \eta) &= M A(\eta) \xi \end{aligned}$$

where $M = P_0 L / \epsilon_0$.

The curve $x^1 = d(x^2; \epsilon)$ that separates the boundary layer and a Weiss domain is found by considering conditions (16),

After the non-dimensionalizing are done, the equation of the inside boundary curve, that gives way to pass a Weiss domain in which $\mathbf{p} = \mp \mathbf{k}$ is a unit vector field is obtained by using an asymptotic expansion in the form $\delta(\eta, \epsilon) = \delta_0(\eta) + \epsilon \delta_1(\eta) + \dots$

$$\dot{\delta}_0 \left[1 \pm \frac{t_z}{\left(1 - \frac{\delta_0}{R}\right)} \right] = \pm n_z \quad (24)$$

is found, in the same manner, for the unit vector field $\mathbf{p} = \mp \mathbf{i}$

$$\dot{\delta}_0 \left[1 \pm \frac{t_x}{\left(1 - \frac{\delta_0}{R}\right)} \right] = \pm n_x \quad (25)$$

is found,

The solution of Φ_0 is found as a constant by using the continuity condition $[\phi] = 0$ on the separating boundary curve $x^1 = d(x^2; \epsilon)$,

$$\Phi_0 \Big|_{x^1=d(x^2; \epsilon)} = C$$

similar to the constant field inside.

$$\Phi_0(\xi, \eta) = MA(\eta)\delta(\eta) = C \Rightarrow A(\eta) = \frac{C}{M\delta(\eta)}$$

is found.

Then the solution of Φ_0

$$\Phi_0(\xi, \eta) = C \frac{\xi}{\delta(\eta)} \quad (26)$$

is found.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 ELEKTRODİNAMİĞİN TANIMI

Sürekli ortamların elektrodinamiği şekil değiştirebilir. cisimlerin elektromanyetik alanlarla etkileşimiyle ilişkili fiziksel bilimin bir branşıdır. Şekli değiştirilebilir cisimlerin kütle ve yükün sürekli dağılımına sahip bir sürekli ortam olacağı düşünülür. Elektromanyetik sürekli ortam teorisi şekil değiştirmelerle, hareketlerle, gerilmelerle ve dış yüklerin cisim üzerine uygulamalarının cisimde ortaya çıkardığı elektromanyetik alanların belirlenmesiyle ilgilenir. Dış yükler mekaniksel temelli (yani, kuvvetler, kuvvet çiftleri, cisim yüzeyi üzerinde meydana gelmiş zorlamalar, sıcaklık ve diğer değişimlerden meydana gelmiş başlangıç ve sınır koşulları) veya elektromanyetik temelli (yani elektrik, manyetik ve akım alanları) olabilir. Bu çalışma çerçevesinde yalnız rijid kristalleri ve zamana bağlı olmayan alanları gözönüne alacak, manyetik etkileri de tümüyle ihmal edeceğiz.

1.2 DİELEKTRİK MALZEME

İdeal bir dielektrik, serbest yüke sahip olmayan ($q_f = 0$) ve bu yüzden de tam olarak düzgün akım geçişini engelleyen elektromanyetik bir malzemedir. Bununla birlikte elektriksel olarak nötr olmalarına rağmen, bütün dielektrikler çekirdek ve elektron gibi yüklü parçacıklardan meydana gelen moleküllerden oluşur. Bu parçacıklar genellikle elektrik alanının varlığından etkilenirler. Elektrik iletmezler, fakat cisim içinde bulunan dipoller elektrik alan doğrultusunda yönelirler ve net bir dipol moment oluştururlar. Dielektrik malzemelere bu yüzden polarize edilebilen malzemeler de denir [1].

1.3 POLARİZASYON

Polarizasyon (kutuplanma), pozitif yüklerin negatif yüklere göre relatif yerdeğiştirmesidir. Maddenin belirli sabit bir hacminin değil, en küçük parçacığının özelliklerini gösterir. Bir dielektrik malzemenin en önemli mikroskopik parametresidir.

Bir dielektriğin polarizasyonunun fiziksel karşılığı maddenin çok fazla sayıdaki yüklü parçacıklarının uzaydaki ihmal edilebilecek kadar küçük yerdeğiştirmeleri olarak gösterilebilir.

Polarizasyon malzemenin dielektrik davranışı yüzünden üç ayrık sebepten meydana gelebilir. Birincisi, atom parçacığının elektronik yığını bir elektrik alana maruz kaldığında çekirdeğine nazaran kayabilir. Bu duruma sebep olan etkiye "elektronik polarizasyon" denir.

İkincisi, moleküler yapı zıt yüklü iyonların düzenlenmesinden kaynaklanabilir (Bu zıt yüklü iyonlar, elektrik alanın etkisi altında denge noktalarından kayabilen iyonlardır). Buna "iyonik polarizasyon" denir.

Son olarak, molekül elektrik alanının olmaması halinde bile rastgele olarak yönlendirilmiş sürekli elektrik dipol'e sahip olan atomların düzenlenmesinden meydana gelebilir. Bir elektrik alanının varlığı, net polarizasyona neden olan daimi moleküler dipollerin kısmi yönelimine sebep olur. Bu olaya "yönsel (döngüsel) polarizasyon" denir.

$\mathcal{P}_k^\alpha$: $k = e$ (elektron), $k = i$ (iyon) ve $k = o$ (yönelimli) bu üç polarizasyon kaynağından meydana gelen α molekülü içindeki birim hacim başına dipole momentisi olsun.

$$\mathcal{P}^\alpha = \mathcal{P}_e^\alpha + \mathcal{P}_i^\alpha + \mathcal{P}_o^\alpha \quad (1.1)$$

şeklinde cisim içinde oluşan toplam polarizasyon alanı ifade edilir.

Bu örneklerden anlaşılacağı gibi polarizasyonun oluş nedeni ne olursa olsun genelinde polarizasyon vektörü elektrik alanının bir fonksiyonudur, yani $\mathcal{P}=\mathcal{P}(\mathbf{E})$ yazılabilir. Genel olarak bu ilişki lineer olmayan bir ilişkidir.

Ancak elektrik alan şiddeti çok büyük değilse polarizasyon ile elektrik alanı arasındaki bağıntı lineer olarak alınabilir :

$$P_i = \alpha_{ij} E_j \text{ (veya izotrop halde } \mathcal{P} = \alpha \mathbf{E}). \quad (1.2)$$

Burada α_{ij} , ikinci mertebeden bir tansör olup dielektrik katsayı tansörü olarak bilinir. Malzeme izotrop ise, yani her doğrultudaki özelliği aynı ise, $\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}$ biçiminde yazılabilir ve α katsayısına dielektrik sabiti adı verilir.

Bu ilişkiyi dielektrik yerdeğiştirme vektörü tanımında yerine koyacak olursak

$$\mathbf{D} = \mathcal{P} + \epsilon_0 \mathbf{E} = (\alpha + \epsilon_0) \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \quad (1.3)$$

elde ederiz. Burada

ϵ_0 : Vakumun geçirgenliği

α : Ortamın dielektrik permitivitesi olarak tanımlanmıştır.

Buna göre elektrostatikte, dielektrik malzemenin iç noktalarında geçerli olan Maxwell denklemleri genel olarak

$$\mathbf{D} = \mathcal{P}(\mathbf{E}) + \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (1.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (1.5)$$

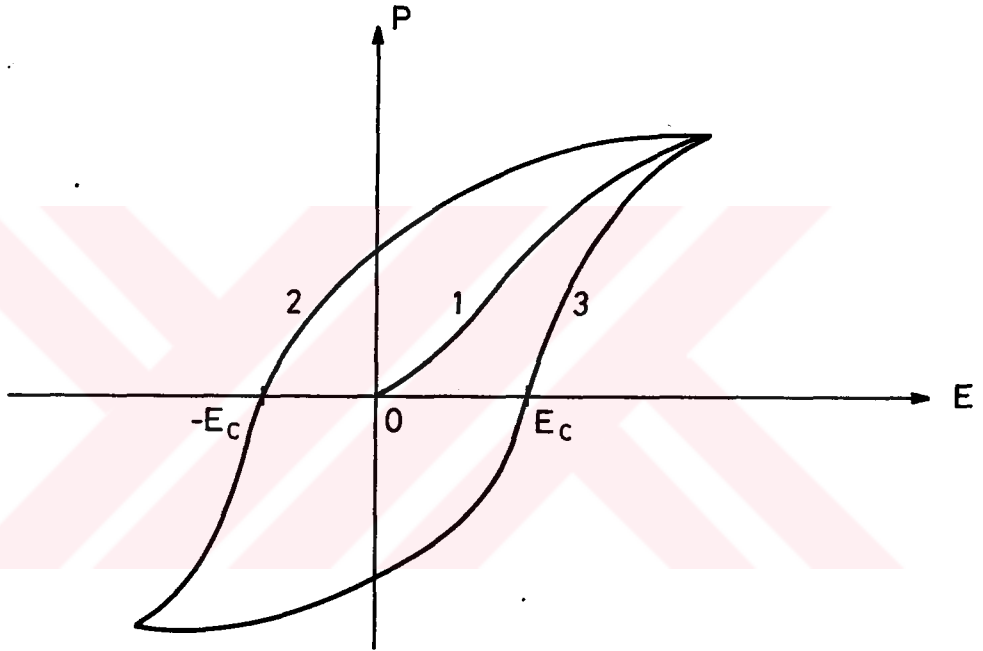
$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.6)$$

şeklinde ifade edilir.

1.4 FERROELEKTRİK MALZEMELERE KISA BİR BAKIŞ

Bir dielektrik kristalde birim hacim başına $\mathcal{P}$ polarizasyonu maddenin yapısına bağlı olarak dış elektrik alanının bir fonksiyonudur. Çok güçlü bir elektrik alan olduğunda, $\mathcal{P}$ sabit bir değere gider ve bu durumda dielektriğin doygunluğa çok yakın olduğunu söyleyebiliriz, çünkü hemen hemen bütün moleküler dipoller $\mathbf{E}$ tarafından yönlendirilmişlerdir. Özellikle de eğer dielektrik malzeme izotrop ise $\mathcal{P}$, $\mathbf{E}$ 'ye paraleldir.

Bir dielektrik kristalde eğer polarizasyonun çok yüksek değerleri (yani doygunluğa karşı gelen değerleri), çok düşük elektrik alanların uygulanmasıyla sağlanıyorsa (şek.1'de eğri 1), bu ferroelektrik kristal olarak isimlendirilir. Buna ek olarak, doygunluğa ulaşıldıktan sonra E 'yi azaltırsak, polarizasyon eğri 2 ile ilişkili olan değerleri alır ve zorlama alanı olarak adlandırılan bir $-E_c$ zıt alanını uyguladığımızda sıfıra azalır. E 'nin değerlerini tekrar arttırdığımızda, eğri 3 ile ilişkili değerleri buluruz. Bu 1,2,3 eğrilerinin kümesi bir histerezis eğrisini (loop) gösterir.



Şekil 1.1. Histerezis eğrisi

Ferroelektrik kristalin bu düzensiz davranışı polarizasyonun "domain" yapısında bulunmak zorundadır. Daha da kesin olarak, hatta dış elektrik alanların yokluğunda, bir ferroelektrik kristalde polarizasyon $\mathcal{P}=P_0\mathbf{p}$ vektörel alanı ile gösterilebilir. Burada P_0 kristalin karakteristik bir sabiti ve $\mathbf{p}$ birim vektör alanıdır. Doygun ve dış alan etkisinde olmayan bir ferroelektrik kristalde bu alan, bir sabit doğrultudan diğerine geçerken değiştiği ince tabakalarda hariç, kristalin hemen hemen tümünde parça parça sabittir. Genelde, içinde $\mathbf{p}$ 'nin sabit olduğu (Weiss bölgeleri) $D_a, a = 1, 2, \dots, m$ bölgeleri enaz bir mikroskopik boyuta (birkaç yüz mikron) sahiptir. Buna

ek olarak, iletim tabakalarının (domain duvarlarının) birkaç mikron kalınlığı vardır. Bu karışık dağılımın teorik geçerliliği üç unsurun birleşik etkisinden kaynaklanır : kristalin anizotropisinden meydana gelmiş elektrik enerjisi, dipol-dipol kuantum kuvvetleri takası ve kristalin formudur. Dış alanın varlığı "domain"lerin dağılımı üzerinde bu üç unsurun etkilerinin ağırlığını sadece düzenleyebilir [2].



BÖLÜM 2

TEMEL DENKLEMLER

2.1 FERROELEKTRİK KRİSTALİN ALAN DENKLEMLERİNİN, SINIR VE SIÇRAMA KOŞULLARININ YAPISI

R^3 'ün bir D açık bölgesini dolduran ve dış elektrik alanının etkisinde olmayan bir ferroelektrik kristal gözönüne alalım. Bu kristalde, elektrik polarizasyon durumunun $\mathcal{P}=P_0\mathbf{p}$ vektörel alanı ile tanımlandığını varsayıyoruz. Burada P_0 kristalin karakteristik bir sabiti olan doymunluk polarizasyonu ve $\mathbf{p}$ birim şiddetli, türetilabilir bir vektör alanıdır ($|\mathbf{p}| = 1$). $\mathcal{P}$ polarizasyon vektörü, sabit bir doğrultudan diğerine değiştiği ince tabakalarda (ki bundan kasıt Weiss bölgelerinin duvarlarını oluşturan ince tabakalardır) hariç kristalin D hacminin hemen hemen her yerinde parça parça sabit bir vektördür. Kısaca kristalin Weiss bölgeleri içinde $\mathcal{P}$ polarizasyon alanının parça parça sabit olduğunu söyleyebiliriz. Ferroelektrik kristaldeki toplam enerjiyi gösteren fonksiyonel aşağıdaki gibidir [3]:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & \int_D P_0 e(\mathbf{p}, \nabla \mathbf{p}) dv + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{R^3} \phi_{,i} \phi_{,i} dv \\ & - P_0 \int_D \phi_{,i} p_i dv + \sum_{b=1}^q P_0 \int_{S_b} e_\sigma(\mathbf{n}, \mathbf{p}^-, \mathbf{p}^+) da. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Ferroelektrik kristalde m tane Weiss bölgesinin var olduğunu kabul ediyor ve bunları D_a , $a = 1, 2, \dots, m$ ile gösteriyoruz. Bunların birbirleri arasındaki duvarlar bölge duvarları olup S_b , $b = 1, 2, \dots, q$ yüzeyleri ile gösterilmektedir. $e_\sigma(\mathbf{n}, \mathbf{p}^-, \mathbf{p}^+)$ bölge duvarına çok yakın olan iki bölgede kristalin kristalografik eksenlerine göre oluşan, S_b 'nin $\mathbf{n}$ normalinin yönelimine ve sabit $\mathbf{p}$ vektörlerine bağlı olan yüzey enerjisidir. $e = e(\mathbf{p}, \nabla \mathbf{p})$ kristalin serbest enerjisi, ϕ elektrik potansiyel, $\mathbf{n}$, uygun seçilmiş, S_b 'nin ya da D 'nin sınırı olan ∂D 'nin dış normali, $\mathbf{p}^+$ ve $\mathbf{p}^-$ değerleri $\mathbf{p}$ 'nin Weiss duvarlarının her iki yanında aldığı değerlerdir, ϵ_0 vakumun dielektrik sabitidir.

Bu fonksiyonele dayanan yeni bir varyasyonel prensiple A. ROMANO ve E.S. ŞUHUBİ [3] tarafından sistemin yerel alan denklemleri, sınır ve sıçrama koşulları aşağıdaki gibi bulunmuştur :

$$\begin{aligned} e_{,p_i} - (e_{,p_i,j})_{,j} - \phi_{,i} + \lambda p_i &= 0, & D_a \quad da & \quad (2.2, a-b) \\ \epsilon_0 \phi_{,ii} - P_0 p_{i,i} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_0 [\phi_{,i}] n_i + P_0 p_i n_i &= 0, & \partial D \quad de & \quad (2.3, a-b) \\ e_{,p_i,j} n_j &= 0, \end{aligned}$$

$$[\epsilon_0 \phi_{,i} - P_0 p_i] n_i = 0, \quad S_b \quad de \quad (2.4)$$

Burada $\lambda(\mathbf{x})$, $|\mathbf{p}(\mathbf{x})| = 1$ koşulundan kaynaklanan Lagrange çarpanıdır.

Weiss bölgelerinde polarizasyon alanının sabit olduğunu bildiğimize göre (2.2), (2.3) ve (2.4) denklemleri Weiss bölgeleri için büyük miktarda basitleşecektir. Ancak tezin konusu olan kristalin keyfi şekli için polarizasyon alanının parça parça sabit olduğu koşulunu tüm cisim için uygulamak biraz aşağıda kolaylıkla görebileceğimiz gibi imkansızdır. Bu durumda sınırdan içeride oluşmuş Weiss bölgelerine düzgün bir geçiş sağlamak için polarizasyon alanının üniform olmadığı, malzemenin sınırına yakın ince bölgelerinin gözükceği tahmin edilebilir. Bu bölgelerde alan denklemlerini bütün genellikleriyle uygulamak gerekecektir.

Öncelikle Weiss bölgelerinde alan denklemlerin yapısını kısaca özetleyelim [3]. Polarizasyon vektörü cisim içinde her yerde doyumluğa ulaşmış olduğundan boyu Weiss bölgeleri içinde sabittir. Bu ise polarizasyon gradyanının Weiss bölgelerinin bütün birleşimlerinde sıfır olduğu anlamına gelir. Bu durumda Weiss bölgelerindeki alan denklemlerimiz ve Weiss bölge duvarlarındaki sıçrama koşulları aşağıdaki gibi olur :

$$\begin{aligned} e_{,p_i} - \phi_{,i} + \lambda p_i &= 0, & D_a \quad da & \quad (2.5, a-b) \\ \phi_{,ii} &= 0, \end{aligned}$$

$$[\epsilon_0 \phi_{,i} - P_0 p_i] n_i = 0, \quad S_b \quad de \quad (2.6)$$

$\lambda(\mathbf{x})$ Lagrange çarpanı her bir bölge için genelde farklı bir fonksiyondur. (2.5,a) 'dan kolayca

$$\phi_{,i} = \lambda p_i + e_{,p_i} \quad (2.7)$$

yazabiliriz. $e_{,p_i}$, p ile belirlenen sabit bir vektördür. (2.7) 'nin diverjansını alır ve (2.5,b) 'yi kullanırsak,

$$\lambda_{,i} p_i = 0 \quad (2.8)$$

olduğunu hemen görürüz. Buradan Lagrange çarpanının her bir Weiss bölgesi içinde sadece sabit olabileceği kolayca görülür. (2.7) ifadesi integre edilirse herhangi bir Weiss bölgesindeki elektrik potansiyelini şöyle ifade ederiz :

$$\phi_a = \left[\lambda_a p_i^{(a)} + \frac{\partial e}{\partial p_i^{(a)}} \right] x_i + b_a . \quad a = 1, 2, \dots, m \quad (2.9)$$

Buradan da görüleceği gibi Weiss bölgesi içinde izin verilebilir elektrik alanı sadece sabit bir alan olabilir. Ancak bu alanın doğrultusu kristalin anizotropi sınıfına bağlı olan polarizasyon alanının yönünden farklıdır. İçeride oluşan sabit elektrik alan nedeniyle Weiss bölgelerinin duvarlarının sadece düzlemsel olabileceği gösterilmiştir [3]. Weiss bölgelerinin dağılımlarıyla ilgili problemin çözümü ise tek değildir. Bunu kristalin enerji fonksiyonelinin birçok minimuma izin vermesi gerçeğini hesaba katarak açıklarız. Gerçek çözüm ise (2.1) fonksiyonelinin mutlak minimum yapan uygun sabitlerin bir kümesiyle açıkça ilişkilidir.

2.2 ELEKTRİK ALANIN YOKLUĞUNDA WEISS BÖLGELERİNİN YAPISI

Dış elektrik alanın olmaması durumunda $\mathcal{P} = P_0 p$ polarizasyon alanı Weiss bölgelerinin her birinde sabit bir vektördür. Bu bize polarizasyon gradyanının bütün Weiss bölgelerinin birleşiminde sıfır olduğunu ifade eder. Ayrıca her bir Weiss bölgesinde bulunan sabit polarizasyon vektörlerinin dağılımı ile indüklenmiş olan elektrik alanın olmadığı bir durumda (2.2,a) denklemi aşağıdaki yapıya indirgenir [3] :

$$e_{,p_i} = -\lambda p_i , \quad D_a \quad da \quad (2.10)$$

Bu denklemin anlamını daha iyi kavrayabilmek amacıyla

$$e_{,p_i} = \mathcal{A}_{ij}(p) p_j \quad (2.11)$$

yazalım. Burada $\mathcal{A}$ genellikle lineer olmayan, matris değerli bir operatördür. Bu durumda (2.10) denklemi,

$$[\mathcal{A}_{ij}(\mathbf{p}) + \lambda \delta_{ij}] p_j = 0 \quad (2.12)$$

şeklinde ifade edilebilir. Genelde bu ifade tam olarak bir özdeğer problemi tanımlamaz. Sadece $\mathbf{e}$ enerjisinin, $\mathbf{p}$ 'nin kuadratik bir fonksiyonu olduğu bir kristal için alışılmış bir özdeğer problemidir diyebiliriz.

Bu denklem Weiss bölgelerinin her birinde polarizasyon vektörünün, $\mathcal{A}$ operatörünün sadece genelleştirilmiş özvektörü olabileceğini ve o bölgedeki Lagrange çarpanının zıt işaretli genelleştirilmiş bir özdeğere eşit olması gerektiğini söyler. Yani böyle bir durum ancak iç enerjisi böyle gerçel, genelleştirilmiş özdeğer ve özvektörlerin varlığına olanak veren ferroelektrik kristaller için söz konusu olabilir. Gerçekten genelde lineer olmayan yapısı nedeniyle (2.12) denkleminin ancak özel kristaller için genel çözümler verebileceği açıktır.

Weiss bölgelerini ayıran bölge duvarları üzerinde polarizasyon vektörleri, aşağıdaki sıçrama koşulunu sağlamalıdır :

$$[p_i]n_i = 0 \quad S_b \quad de$$

Bu denklem bize Weiss bölge duvarlarının yalnız regle yüzeyler olabileceğini söyler. Bölge duvarlarından geçen elektrik potansiyelin sürekliliğini kullanamayacağımızdan bölge duvarlarının yalnızca düzlemsel yüzeyler olabileceğini göstermek mümkün değildir. Ancak çok zayıf bir elektrik alan altında bile Weiss duvarlarının düzlemsel formlarını koruduklarına dikkat edersek bundan böyle duvarların elektrik alanın yokluğunda da düzlemsel kalacağını varsayabiliriz.

BÖLÜM 3

SINIR TABAKASINDAKİ ÇÖZÜM

3.1 FERROELEKTRİK KRİSTALIN SINIR TABAKASINDA $\mathcal{P}$ VE ϕ ALAN BÜYÜKLÜKLERİNİN YAKLAŞIK HESAPLANMASI

Problemimizde ilgilendiğimiz ferroelektrik kristal en kolay polarizasyon eksenini bulunan barium titanate (BaTiO_3) gibi tek eksenli bir kristaldir. Kristalin enerjisi ilk yaklaşımda aşağıdaki gibi yazılabilir [3]:

$$e = \frac{P_0}{2} \left[\alpha \text{tr}[\mathbf{P}\mathbf{P}^T] + \beta (|\mathbf{p}|^2 - (\mathbf{h} \cdot \mathbf{p})^2) \right] . \quad (3.1)$$

Burada $\mathbf{P} = \nabla \mathbf{p}$ olarak alınmıştır. $\mathbf{p}$ ve $\nabla \mathbf{p}$ cinsinden bu kuadratik ifade $\mathbf{h}$ enine izotropi eksenini etrafındaki koordinat dönüşümleri altında invariant kalır. $\mathbf{h}$ enine izotropi eksenini koordinat takımımızın z - eksenineyle çakıştırırsak bu durumda kristalin enerjisi şu yapıda olur :

$$e = \frac{P_0}{2} \left\{ \alpha [(\nabla p_x)^2 + (\nabla p_y)^2 + (\nabla p_z)^2] + \beta (p_x^2 + p_y^2) \right\} . \quad (3.2)$$

Düzlemsel bir problemi gözönüne alırsak ($p_y = 0$) (x, z) düzleminde kristalin enerjisi şu yapıda olur :

$$e = \frac{P_0}{2} \left\{ \alpha ((p_{x,x})^2 + (p_{x,z})^2 + (p_{z,x})^2 + (p_{z,z})^2) + \beta p_x^2 \right\} \quad (3.3)$$

$$p_x^2 + p_z^2 = 1 . \quad (3.4)$$

Ferroelektrik kristalde elektrik alanın olmadığı durumda (3.3) enerji ifadesini (2.2,a-b) denklemlerinde kullanarak elde ettiğimiz alan denklemlerimiz aşağıdaki yapıdadır :

$$\begin{aligned} \nabla^2 p_x &= \left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\lambda}{P_0 \alpha} \right) p_x \\ \nabla^2 p_z &= \frac{\lambda}{P_0 \alpha} p_z \end{aligned} \quad (3.5, a - b)$$

$$p_{x,x} + p_{z,z} = 0 . \quad (3.6)$$

(2.3,a) denkleminde kullanarak elde ettiğimiz sınır koşulları ise

$$\begin{aligned} p_{x,x}n_x + p_{x,z}n_z &= 0 \\ p_{z,x}n_x + p_{z,z}n_z &= 0 \\ p_xn_x + p_zn_z &= 0 \end{aligned} \quad (3.7, a - b - c)$$

şeklindedir.

Bir dikdörtgen kristal şek. 3.1 için bu alan denklemlerini ve sınır koşullarını kullanarak Weiss bölgelerinin yapısını incelersek [3]. Weiss bölgelerinde p 'nin gradyanının sıfır olduğunu da gözönünde bulundurarak

$$\begin{aligned} -P_0\beta p_x &= \lambda p_x \\ \lambda p_z &= 0 \end{aligned} \quad (3.8, a - b)$$

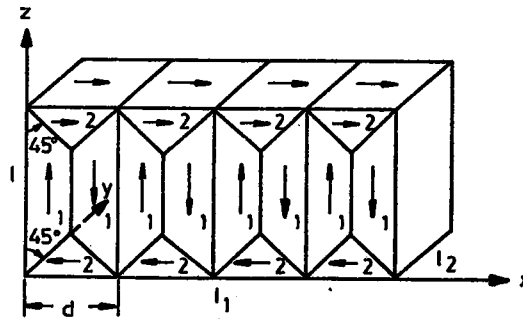
denklemleri elde edilir. Daha önceden de bahsettiğimiz gibi p 'ye göre kuadratik bir yapıya sahip olan enerji fonksiyonumuz için (3.8,a-b) denklemleri kristal için alışılmış bir özdeğer problemidir. Buradan kolayca

$$\lambda = 0, \quad p_z = \mp 1, \quad p_x = 0; \quad \lambda = -P_0\beta, \quad p_x = \mp 1, \quad p_z = 0 \quad (3.9)$$

şeklinde özdeğer ve özvektörler bulunur. (3.7,c) sınır koşulu kullanılırsa,

$$p_x = 0 \quad x = 0, l_1 \text{ üzerinde} \quad \text{ve} \quad p_z = 0 \quad z = 0, l \text{ üzerinde} \quad (3.10)$$

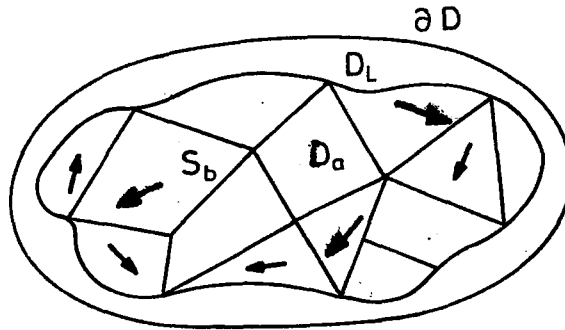
elde edilir. Hemen görüleceği gibi bu tip bir kristalde sınır tabakası oluşmaz ve Weiss bölgeleri şek.3.1'deki gibidir. Bu durumda (2.4) denkleminin bölge duvarları üzerinde sağlandığını kolayca gösterebiliriz.



Şekil 3.1. Tek eksenli bir kristalde Weiss bölgelerinin yapısı

Şek.3.1 de görülen d parametresi her bir Weiss bölgesi için tanımlı olan fakat kolayca belirlenemeyen bir parametredir. d parametresini (2.1) deki enerji fonksiyonunun minimumundan buluruz. Ama bu fonksiyonelin tek bir minimumu olmadığından Weiss bölgelerinin tek bir dizilişi yoktur.

Bir ferroelektrik kristal için sınır yüzeyi, izin verilebilen polarizasyon vektörünü taşıyabilen düzlemsel yüzeylerin birleşiminden oluşmuyorsa içindeki Weiss bölgelerinin sınıra kadar genişleyemeyeceği açıktır. Bu yüzden kristalin keyfi bir şekli için, bir ölçüde deneysel verilere dayanarak, kristalin sınırına yakın ince olduğunu varsaydığımız bir tabaka içinde polarizasyon vektörünün boyunun sabit olmasına karşın doğrultusunun sürekli değişebildiğini kabul etmemiz zorunlu olur. D_L ile göstereceğimiz bu tabakada polarizasyon vektörü için çözümün ∂D sınırından yeterince uzak yerlerde kristalin iç kısımlarında geçerli olan sabit durumlara yaklaşmasını bekleriz. D_L sınır tabakasında polarizasyon alanı bu sabit durumlarda sınıra teğet olan bir alana çok hızlı olarak değişmelidir. Bu yüzden ince sınır tabakasında polarizasyon gradyanının çok büyük olması beklenmelidir. Bu tabaka içindeki polarizasyon vektörü içte komşu olduğu Weiss bölgesindeki ya $x-$ ya da $z-$ eksenine paralel sabit bir polarizasyon vektörüne yaklaşıp. Yapacağımız bu çalışmanın amacı bu geçiş bölgesindeki durumu ilk ve mümkün en basit yaklaşıpta ele alarak böyle bir tabakanın varolabileceğini göstermektir.



Şekil 3.2. Sınırı eğrisel olan ferroelektrik kristal

İlk önce kristalin içinde her yerde elektrik alanın sıfır olduğu varsayacak ve sınır ve sıçrama koşullarını sağlatabilmek için gözönüne alacağımız ince

sınır tabakası içinde geçerli genel alan denklemlerini,

$$\begin{aligned} e_{,pi} - (e_{,pi,j})_{,j} + \lambda p_i &= 0, \\ p_{i,i} &= 0, \end{aligned} \quad D_L \text{ de} \quad (3.11, a - b)$$

şeklinde kabul edeceğiz.

İleride ayrıntılı olarak göreceğimiz gibi bu denklemleri uygun bir şekilde boyutsuzlaştırırsak, küçük bir ϵ parametresi içeren denklemleri elde ederiz. Bu denklemleri, yine ileride göreceğimiz sınıra teğet ve sınıra dik bir genelleştirilmiş koordinat takımında ifade edip bir pertürbasyon yöntemiyle yaklaşık olarak çözmeyi denedik. Yaklaşık sınır tabakası denklemlerini önce kristal sınırındaki

$$\begin{aligned} e_{,pi,j} n_j &= 0, \\ p_i n_i &= 0, \end{aligned} \quad \partial D \text{ de} \quad (3.12, a - b)$$

sınır koşullarını sağlatarak çözmeye çalıştık. Bu sınır koşullarını ve $|\mathbf{p}| = 1$ koşulunu sağlayan çözümü birçok değişik ölçekleme işlemleri yaparak ve sınır tabakası değişimi için oldukça karmaşık bir fonksiyonel kabul ederek aradık.

Sonuçta çok emek harcamamıza karşın bilinmeyen alan büyüklüklerinin sayısının yetersizliği nedeniyle bu sınır koşullarını sağlatabileceğimiz uygun çözümler bulunamayacağı gerçekleşti. Sınıra yakın bu ince tabakada bir elektrik potansiyelin olduğu gözönüne alındığında ortaya çıkan ek bilinmeyen bu sorunu ortadan kaldırabileceği gözlemlendi. Bu bizi önceden de düşündüğümüz fakat basitlik amacıyla denklemlerimize katmadan çözüm aramak istediğimiz bir potansiyel ifadesini hesaba katmamız gerektiği sonucuna götürdü. Dolayısıyla ikinci denememizde yalnız sınır tabakasına kapatılmış bir elektrik alanın, dolayısıyla elektrik potansiyelinin var olduğunu kabul ettik.

Bu durumda ince tabakada kullanacağımız yerel alan denklemlerimiz

$$\begin{aligned} e_{,pi} - (e_{,pi,j})_{,j} - \phi_{,i} + \lambda p_i &= 0, \\ \epsilon_0 \phi_{,ii} - P_0 p_{i,i} &= 0, \end{aligned} \quad D_L \text{ de} \quad (3.13, a - b)$$

olur. Sınırdaki sağlanması gereken koşullar ise

$$\begin{aligned} \epsilon_0 [\phi_{,i}] n_i + P_0 p_i n_i &= 0, \\ e_{,pi,j} n_j &= 0, \end{aligned} \quad \partial D \text{ de} \quad (3.14, a - b)$$

şeklindedir.

Ayrıca bu tabaka ile komşusu olan bir Weiss bölgesi arasındaki sınır üzerinde

$$[\epsilon_0 \phi_{,i} - P_0 p_i] \bar{n}_i = 0 \quad (3.15)$$

sıçrama koşulu gerçekleşmelidir. Burada $\bar{n}$ birim vektörü sınır tabakasının bir Weiss bölgesine komşu olan sınır eğrisinin normalidir. Her yerde sağlatmamız gereken

$$|p| = 1 \quad (3.16)$$

kısıtı ile bir ara yüzey üzerinde sağlanması gereken, elektrik potansiyelinin sürekliliğini ifade eden *

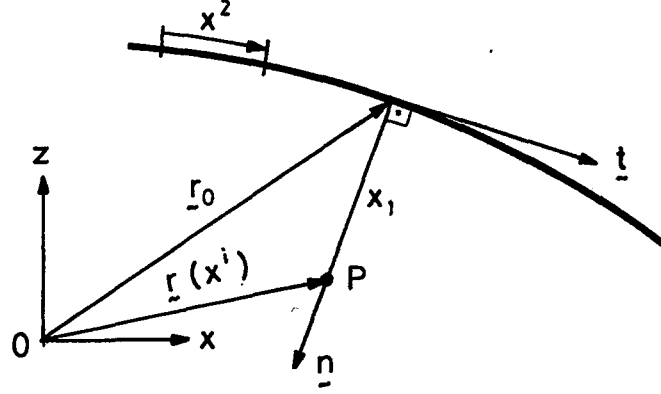
$$[\phi] = 0 \quad (3.17)$$

kısıtını da kullanmak zorundayız.

Sınır tabakası içinde alan denklemlerini inceleyebilmek için bu ince tabakadaki herhangi bir noktayı kristalin sınır eğrisinin yay uzunluğuna ve bu eğriye uzaklığına bağlı olarak ifade ederek bir eğrisel ortogonal koordinat takımı tanımladık. Sınır eğrisinin eğrilik yarıçapının yeter derecede büyük olduğunu kabul edersek ince tabaka içinde herhangi bir noktayı tanımlayan koordinatların yerel olarak tekliklerinin bozulmasını önlemiş oluruz. Bu koordinat takımı şek. 3.3 te gösterilmiştir. Burada x^1 , bir noktanın sınıra normal vektör doğrultusundaki, x^2 , ise aynı noktanın sınır üzerindeki sabit bir noktaya sınır boyunca uzaklığını, $t(x^2)$, sınır eğrisine teğet birim vektörü,

* Arayüzde bir çift tabaka yük dağılımı oluşumu öngörülebildiği takdirde bu kısıt gevşetilebilir.

$\mathbf{n}(x^2)$, sınır eğrisinin asal normal vektörünü, göstermektedir.



Şekil 3.3. Sınıra bağlı eğrisel koordinat takımı

Düzlemde çalışacağımızdan düzlemdeki bir P noktasının yerini şimdi aşağıdaki gibi ifade edebiliriz :

$$\mathbf{r}(x^1, x^2) = \mathbf{r}_0(x^2) + x^1 \mathbf{n}(x^2) . \quad (3.18)$$

Bu şekilde tanımlanmış olduğumuz genelleştirilmiş eğrisel koordinatların baz vektörleri bilindiği gibi [4]

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}$$

ifadesinden bulunur. Buna göre (3.18) 'den baz vektörleri olarak,

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1} = \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial x^1} + \frac{\partial (x^1 \mathbf{n})}{\partial x^1} = \mathbf{n}(x^2) \quad (3.19)$$

ve

$$\mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2} = \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial (x^1 \mathbf{n})}{\partial x^2} = \mathbf{t} + x^1 \frac{d\mathbf{n}}{dx^2}$$

elde edilir. Normalin yay uzunluğuna göre türevi [5]

$$\frac{d\mathbf{n}}{dx^2} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{t}$$

olduğuna göre sonuçta

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{n}, \quad \mathbf{g}_2 = \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right) \mathbf{t} \quad (3.20)$$

bulunur. Burada $\rho = \rho(x^2)$ sınır eğrisinin eğrilik yarıçapıdır.

$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$ metrik tansörümüzün ve tersinin matris şeklinde gösterilimi

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$[g^{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^2} \end{bmatrix}$$

olur. Buradan karşıt baz vektörleri de

$$\mathbf{g}^i = g^{ij} \mathbf{g}_j$$

veya

$$\mathbf{g}^1 = \mathbf{n}, \quad \mathbf{g}^2 = \frac{\mathbf{t}}{\left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)}$$

bulunur. (3.1) de gözüken büyüklükleri hesapladığımızda $\mathbf{P}$ büyüklüğü

$$\mathbf{P} = \nabla \otimes \mathbf{p} = p_{l;k} \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^l = P_{kl} \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^l,$$

$$P_{kl} = p_{l;k} = \frac{\partial p^l}{\partial x^k} + \left\{ \begin{matrix} l \\ km \end{matrix} \right\} p^m$$

olarak hesaplanan ikinci mertebeden bir tansördür. Buna göre,

$$\mathbf{P} \mathbf{P}^T = p_{k;m} p^k{}_{;n}$$

dir. Dolayısıyla

$$\text{tr} [\mathbf{P} \mathbf{P}^T]_m^m = g_{kn} p^n{}_{;m} g^{ml} p^k{}_{;l}$$

olur ve enerji yoğunluğu (3.1) bağıntısına göre

$$e = \frac{P_0}{2} [\alpha g_{kn} p^n{}_{;m} g^{ml} p^k{}_{;l} + \beta (p_k p^k - h_m p^m h_n p^n)] \quad (3.22)$$

olarak ifade edilir. Enerji fonksiyonu $\mathbf{p}$ ve $\nabla \mathbf{p}$ ye göre türetilirse sırasıyla

$$e_{,p^i} = \beta P_0 \{p_i - h_i h_m p^m\}$$

$$e_{,p^i}{}_{;j} = \alpha P_0 p_{i;j}^j$$

bulunur. Elektrik potansiyelinin gradyanı ise

$$\nabla\phi = \phi_{,i}g^i = \phi_{,i}g^{ij}g_j$$

şeklindedir. Bu türevler kontravaryant bileşenler cinsinden alan denklemlerimizde yerine konulduğunda

$$\beta P_0(p^i - h^i h_m p^m) - \alpha P_0 p^{ij}_{;j} - \phi_{,j}g^{ij} + \lambda p^i = 0 \quad (3.23)$$

veya

$$p^{ij}_{;j} + \tau \phi_{,j}g^{ij} = \kappa(1 + \mu)p^i - \kappa h^i h_m p^m$$

sonucuna varılır. Burada

$$\tau = \frac{1}{\alpha P_0}, \quad \kappa = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \mu(\mathbf{x}) = \frac{\lambda(\mathbf{x})}{\beta P_0} \quad (3.24)$$

büyükliklerini tanımladık. Bu denklemleri $i = 1, 2$ için açık olarak yazarsak sırasıyla

$$p^{11}_{;1} + p^{12}_{;2} + \tau \phi_{,1} = \kappa(1 + \mu)p^1 - \kappa h^1(h_1 p^1 + h_2 p^2) \quad (3.25)$$

$$p^{21}_{;1} + p^{22}_{;2} + \tau \phi_{,2}g^{22} = \kappa(1 + \mu)p^2 - \kappa h^2(h_1 p^1 + h_2 p^2) \quad (3.26)$$

elde edilir. (3.13, b) denkleminin ifadesi,

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \nabla \phi = g^j \cdot \frac{\partial}{\partial x^j}(\phi_{,i}g^i) = \phi_{,i}{}^{;i} = \left(\phi_{,ij} - \phi_{,k} \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} \right) g^{ij}$$

olduğundan

$$\phi_{,i}{}^{;i} - \frac{P_0}{\epsilon_0} p^{ii}_{;i} = 0 \quad (3.27)$$

şeklindedir. (3.14, a-b) sınır koşulları eğrisel koordinatlarda

$$\begin{aligned} p^{ij}_{;j} n_j &= 0 \\ \epsilon_0 [\phi_{,i}] n_i + P_0 p^i n_i &= 0, \end{aligned} \quad \partial D \text{ de} \quad (3.28, a - b)$$

şeklinde ifade edilir. (3.23) denkleminde gözüken Laplasyenin eğrisel koordinat takımımızdaki ifadesi

$$p^{m;l}_{;l} = p^{m;k;l} g^{kl} = g^{kl} \left((p^{m;k})_{,l} - p^{m;n} \left\{ \begin{matrix} n \\ kl \end{matrix} \right\} + p^{n;k} \left\{ \begin{matrix} m \\ nl \end{matrix} \right\} \right)$$

şeklindedir. $p^m{}_{;kl}$ üçüncü mertebe tansörünün açık ifadesi

$$p^m{}_{;kl} = p^m{}_{,kl} + \left\{ \begin{matrix} m \\ kn \end{matrix} \right\}_{,l} p^n + \left\{ \begin{matrix} m \\ kn \end{matrix} \right\} p^n{}_{,l} - \left\{ \begin{matrix} n \\ kl \end{matrix} \right\} p^m{}_{;n} + \left\{ \begin{matrix} m \\ nl \end{matrix} \right\} p^n{}_{;k} \quad (3.29)$$

olarak verilir.

Görüldüğü gibi ifadelerimizde açık olarak ikinci tür Christoffel sembolleri gözükmüyor. Bunları koordinat takımımıza göre aşağıdaki bağıntıdan hesaplayabiliriz [4] :

$$g^m \cdot g_{k,l} = \left\{ \begin{matrix} m \\ kl \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{mn} (g_{kn,l} + g_{ln,k} - g_{kl,n}) \quad (3.30)$$

Buna göre seçtiğimiz eğrisel koordinat takımımız için ikinci tür Christoffel sembolleri

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{11} (g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}) = \frac{1}{2} g_{11,1}$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{11} (g_{11,2} + g_{21,1} - g_{12,1}) = \frac{1}{2} g_{11,2}$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{11} (g_{21,2} + g_{21,2} - g_{22,1}) = \frac{1}{2} (2g_{21,2} - g_{22,1})$$

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{22} (g_{12,1} + g_{12,1} - g_{11,2}) = \frac{1}{2} g^{22} (2g_{12,1} - g_{11,2})$$

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{22} (g_{12,2} + g_{22,1} - g_{12,2}) = \frac{1}{2} g^{22} g_{22,1}$$

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{22} (g_{22,2} + g_{22,2} - g_{22,2}) = \frac{1}{2} g^{22} g_{22,2}$$

şeklinde bulunur. Burada gözüken metrik tansörlerin kısmi türevleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir :

$$g_{22,1} = \frac{\partial}{\partial x^1} \left[\left(1 - \frac{x^1}{\rho} \right)^2 \right] = -\frac{2}{\rho} \left(1 - \frac{x^1}{\rho} \right)$$

$$g_{22,2} = \frac{\partial}{\partial x^2} \left[\left(1 - \frac{x^1}{\rho} \right)^2 \right] = 2x^1 \frac{\dot{\rho}}{\rho^2} \left(1 - \frac{x^1}{\rho} \right)$$

Burada $\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dx^2}$ 'yi göstermektedir ve diğer türevler sıfırdır. Buna göre ikinci tür Christoffel sembollerinin sıfırdan farklı bileşenleri

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{\rho} \left(1 - \frac{x^1}{\rho} \right) \right] = \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{x^1}{\rho} \right) \\ \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 - \frac{x^1}{\rho} \right)^2} \left[-\frac{2}{\rho} \left(1 - \frac{x^1}{\rho} \right) \right] = -\frac{1}{\rho \left(1 - \frac{x^1}{\rho} \right)} \\ \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 - \frac{x^1}{\rho} \right)^2} \left[2x^1 \frac{\dot{\rho}}{\rho^2} \left(1 - \frac{x^1}{\rho} \right) \right] = \frac{x^1 \dot{\rho}}{\rho^2 \left(1 - \frac{x^1}{\rho} \right)}\end{aligned}$$

olarak bulunur. Daha sonra ikinci tür Christoffel sembollerinin türevleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir :

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\}_{,1} &= \frac{\partial}{\partial x^1} \left[\frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{x^1}{\rho} \right) \right] = -\frac{1}{\rho^2} \\ \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\}_{,2} &= \frac{\partial}{\partial x^2} \left[\frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{x^1}{\rho} \right) \right] = -\frac{\dot{\rho}}{\rho^2} \left(1 - 2\frac{x^1}{\rho} \right) \\ \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\}_{,1} &= \frac{\partial}{\partial x^1} \left[-\frac{1}{\rho \left(1 - \frac{x^1}{\rho} \right)} \right] = -\frac{1}{\rho^2 \left(1 - \frac{x^1}{\rho} \right)^2} \\ \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\}_{,2} &= \frac{\partial}{\partial x^2} \left[-\frac{1}{\rho \left(1 - \frac{x^1}{\rho} \right)} \right] = \frac{\dot{\rho}}{\rho^2 \left(1 - \frac{x^1}{\rho} \right)^2} \\ \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix} \right\}_{,1} &= \frac{\partial}{\partial x^1} \left[\frac{x^1 \dot{\rho}}{\rho^2 \left(1 - \frac{x^1}{\rho} \right)} \right] = \frac{\dot{\rho}}{\rho^2 \left(1 - \frac{x^1}{\rho} \right)^2} \\ \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix} \right\}_{,2} &= \frac{\partial}{\partial x^2} \left[\frac{x^1 \dot{\rho}}{\rho^2 \left(1 - \frac{x^1}{\rho} \right)} \right] = \frac{x^1 \ddot{\rho}}{\rho^2 \left(1 - \frac{x^1}{\rho} \right)} - \frac{x^1 \dot{\rho}^2 \left(2 - \frac{x^1}{\rho} \right)}{\rho^3 \left(1 - \frac{x^1}{\rho} \right)^2}.\end{aligned}$$

Burada üstteki noktalar x^2 değişkenine göre adi türevleri göstermektedir. Kovaryant türev ifadesinin

$$p_{;l}^k = p_{,l}^k + \left\{ \begin{matrix} k \\ lm \end{matrix} \right\} p^m \quad (3.31)$$

ile verildiğini biliyoruz.

Hesapladığımız bu büyüklükleri kullanarak $p^1;_1$ aşağıdaki gibi hesaplandı :

$$\begin{aligned} p^1;_{11} &= (p^1;_1)_{,1} - p^1;_1 \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \right\} - p^1;_2 \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \right\} + p^1;_1 \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \right\} + p^2;_1 \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 21 \end{matrix} \right\} \\ p^1;_{11} &= p^1;_{11} \\ p^1;_1^1 &= g^{11} p^1;_{11} = p^1;_{11} . \end{aligned} \quad (3.32)$$

$p^1;_2$ aşağıdaki gibidir :

$$\begin{aligned} p^1;_{22} &= (p^1;_2)_{,2} - p^1;_1 \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} - p^1;_2 \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix} \right\} + p^2;_2 \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} \\ &= p^1;_{22} + \frac{2}{\rho} \left(1 - \frac{x^1}{\rho} \right) p^2;_2 - \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{x^1}{\rho} \right) p^1;_1 \\ &\quad - \frac{x^1 \dot{\rho}}{\rho^2 \left(1 - \frac{x^1}{\rho} \right)} p^1;_2 - \frac{1}{\rho^2} p^1 - \frac{\dot{\rho}}{\rho^2} \left(1 - 2 \frac{x^1}{\rho} \right) p^2 \\ p^1;_2^2 &= g^{22} p^1;_{22} \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{x^1}{\rho} \right)^2} p^1;_{22} + \frac{2}{\rho \left(1 - \frac{x^1}{\rho} \right)} p^2;_2 - \frac{1}{\rho \left(1 - \frac{x^1}{\rho} \right)} p^1;_1 \\ &\quad - \frac{x^1 \dot{\rho}}{\rho^2 \left(1 - \frac{x^1}{\rho} \right)^3} p^1;_2 - \frac{1}{\rho^2 \left(1 - \frac{x^1}{\rho} \right)^2} p^1 - \frac{\dot{\rho} \left(1 - 2 \frac{x^1}{\rho} \right)}{\rho^2 \left(1 - \frac{x^1}{\rho} \right)^2} p^2 . \end{aligned} \quad (3.33)$$

$p^2;_1$ aşağıdaki gibidir :

$$\begin{aligned} p^2;_{11} &= (p^2;_1)_{,1} - p^2;_1 \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\} \\ &= p^2;_{11} - \frac{2}{\rho \left(1 - \frac{x^1}{\rho} \right)} p^2;_1 \\ p^2;_1^1 &= g^{11} p^2;_{11} = p^2;_{11} - \frac{2}{\rho \left(1 - \frac{x^1}{\rho} \right)} p^2;_1 . \end{aligned} \quad (3.34)$$

$p^2;_2$ aşağıdaki gibidir :

$$\begin{aligned}
 p^2;_{22} &= (p^2;_2)_{,2} - p^2;_{,1} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} - p^2;_2 \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix} \right\} \\
 &+ p^1;_2 \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} + p^2;_2 \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix} \right\} \\
 &= p^2;_{22} + \frac{x^1 \dot{\rho}}{\rho^2 \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)} p^2;_2 - \frac{2}{\rho \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)} p^1;_2 \\
 &- \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right) p^2;_{,1} + \frac{\dot{\rho}}{\rho^2 \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^2} p^1 \\
 &+ \left\{ \frac{x^1 \ddot{\rho}}{\rho^2 \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)} - \frac{x^1 \dot{\rho}^2 \left(2 - \frac{x^1}{\rho}\right)}{\rho^3 \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^2} \right\} p^2 \\
 p^2;_2 &= g^{22} p^2;_{22} \\
 &= \frac{1}{\left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^2} p^2;_{22} + \frac{x^1 \dot{\rho}}{\rho^2 \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^3} p^2;_2 - \frac{2}{\rho \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^3} p^1;_2 \\
 &- \frac{1}{\rho \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)} p^2;_{,1} + \frac{\dot{\rho}}{\rho^2 \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^4} p^1 \\
 &+ \left\{ \frac{x^1 \ddot{\rho}}{\rho^2 \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^3} - \frac{x^1 \dot{\rho}^2 \left(2 - \frac{x^1}{\rho}\right)}{\rho^3 \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^4} \right\} p^2 . \quad (3.35)
 \end{aligned}$$

(3.23) denkleminde gözüken $\mathbf{h}$ birim vektörü ile belirlenen enine izotropi eksenini z - eksenini seçildiğinden, tek eksenli ferroelektrik kristalimiz için $\mathbf{h} = \mathbf{k}$ olur. Buna göre (3.25) ve (3.26) da gözüken ifadeler aşağıdaki şekilde belirlenebilir :

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{p} = k_m p^m = p_z .$$

Burada

$$\mathbf{k} = k_m \mathbf{g}^m$$

yazabiliriz. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{g}_1 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = n_z \\
 k_2 &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{g}_2 = \mathbf{k} \cdot \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right) \mathbf{t} = \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right) t_z
 \end{aligned}$$

olarak kovaryant bileşenler bulunur. Hemen görüleceği gibi $n_z(x^2)$ ve $t_z(x^2)$ sınır eğrisinin asal birim normali ile birim teğet vektörünün z doğrultusundaki bileşenleridir. Bunları kullanarak kontravaryant bileşenler için

$$k^n = k_m g^{mn}$$

veya

$$k^1 = k_1 = n_z, \quad k^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)} t_z$$

ifadeleri bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} h^1 h_1 p^1 + h^1 h_2 p^2 &= k^1 k_1 p^1 + k^1 k_2 p^2 \\ &= n_z^2 p^1 + \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right) n_z t_z p^2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} h^2 h_1 p^1 + h^2 h_2 p^2 &= k^2 k_1 p^1 + k^2 k_2 p^2 \\ &= \frac{n_z t_z}{\left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)} p^1 + t_z^2 p^2 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Sınır eğrisi üzerinde

$$|\mathbf{n}| = 1 \quad \Rightarrow \quad n_x^2 + n_z^2 = 1$$

$$|\mathbf{t}| = 1 \quad \Rightarrow \quad t_x^2 + t_z^2 = 1$$

olduğunu da hatırla tutmalıyız.

Bütün bu ifadeleri (3.25) ve (3.26) yerel alan denklemlerine yerleştirip çıkan terimleri düzenlediğimizde

$i = 1$ için

$$\begin{aligned} & p^1_{,11} + \frac{1}{\left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^2} p^1_{,22} + \frac{2}{\rho \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)} p^2_{,2} - \frac{1}{\rho \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)} p^1_{,1} \\ & - \frac{x^1 \dot{\rho}}{\rho^2 \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^3} p^1_{,2} - \frac{1}{\rho^2 \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^2} p^1 - \frac{\dot{\rho} \left(1 - 2\frac{x^1}{\rho}\right)}{\rho^2 \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^2} p^2 + \tau \phi_{,1} \\ & = \kappa(\mu + n_x^2) p^1 - \kappa \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right) n_z t_z p^2. \end{aligned} \quad (3.36)$$

$i = 2$ için

$$\begin{aligned}
 & p^2_{,11} + \frac{1}{\left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^2} p^2_{,22} + \frac{x^1 \dot{\rho}}{\rho^2 \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^3} p^2_{,2} - \frac{3}{\rho \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)} p^2_{,1} \\
 & - \frac{2}{\rho \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^3} p^1_{,2} + \frac{\dot{\rho}}{\rho^2 \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^4} p^1 \\
 & + \left\{ \frac{x^1 \ddot{\rho}}{\rho^2 \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^3} - \frac{x^1 \dot{\rho}^2 \left(2 - \frac{x^1}{\rho}\right)}{\rho^3 \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^4} \right\} p^2 + \frac{\tau}{\left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^2} \phi_{,2} \\
 & = \kappa(\mu + t_x^2) p^2 - \frac{\kappa}{\left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)} n_z t_z p^1 . \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

denklemlerini buluruz. Benzer şekilde (3.27) denklemi de

$$\begin{aligned}
 & \phi_{,11} + \frac{1}{\left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^2} \phi_{,22} - \frac{1}{\rho \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)} \phi_{,1} - \frac{x^1 \dot{\rho}}{\rho^2 \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^3} \phi_{,2} \\
 & - \frac{P_0}{\epsilon_0} \left(p^1_{,1} + p^2_{,2} - \frac{1}{\rho \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)} p^1 + \frac{x^1 \dot{\rho}}{\rho^2 \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)} p^2 \right) = 0 . \quad (3.38)
 \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir. (3.28,a) denklemiyle verdiğimiz

$$p^i_{;j} n^j = 0, \quad \partial D \text{ üzerinde}$$

sınır koşulunda

$$n = g_1$$

yani ∂D üzerinde $n^1 = 1$, $n^2 = 0$ olduğunu gözönünde tutarsak

$$p^i_{;1} = 0$$

bulunur. Bu kovaryant türevleri $i = 1, 2$ için açıkça ifade edersek

$i = 1$ için

$$p^1_{;1} = p^1_{,1} = 0, \quad \partial D \text{ üzerinde} \quad (3.39)$$

$i = 2$ için

$$\begin{aligned} p_{,1}^2 &= p_{,1}^2 + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\} p^2 \\ &= p_{,1}^2 - \frac{1}{\rho \left(1 - \frac{x^1}{\rho} \right)} p^2 = 0, \quad \partial D \text{ üzerinde} \end{aligned} \quad (3.40)$$

eşitlikleri elde edilir. (3.28,b) denklemini ise şu hale gelir.

$$\epsilon_0[\phi_{,1}] + P_0 p^1 = 0, \quad \partial D \text{ de} \quad (3.41)$$

Sınır tabakası ile Weiss bölgesi arasındaki sınır üzerinde (3.15) sıçrama koşulu, Weiss bölgesinde polarizasyon vektörünün sadece $\mp P_0 \mathbf{i}$ ve $\mp P_0 \mathbf{k}$ ve potansiyelin $\phi = C$ gibi bir sabit olduğunu gözönünde tutarsak

$$\epsilon_0 \phi_{,i} \bar{n}^i - P_0 p_i \bar{n}^i \mp P_0 n_x = 0 \text{ veya } \epsilon_0 \phi_{,i} \bar{n}^i - P_0 p_i \bar{n}^i \mp P_0 n_z = 0 \quad (3.42)$$

şeklindedir.

$\mathbf{p}$ vektörünün boyu 1 olduğundan

$$|\mathbf{p}|^2 = g_{ij} p^i p^j = g_{11} (p^1)^2 + g_{22} (p^2)^2 = 1$$

yani

$$(p^1)^2 + \left(1 - \frac{x^1}{\rho} \right)^2 (p^2)^2 = 1 \quad (3.43)$$

bağıntısı sağlanmalıdır.

Böylece sınır tabakası içinde kullanacağımız alan denklemleri ile gerekli sınır ve sıçrama koşullarını ortaya çıkarmış olduk. Bu denklemleri $\xi = \frac{x^1}{h}$, $\eta = \frac{x^2}{L}$ dönüşümleriyle boyutsuzlaştıracğız. Burada

$$\epsilon = \frac{h}{L} \ll 1$$

ile çok küçük olduğunu varsaydığımız bir parametre tanımladık. L sınır eğrisine ilişkin bir karakteristik uzunluk, h ise sınır tabakasını karakterize eden henüz belirsiz bir uzunluktur.

$$R(\eta) = \frac{\rho(x^2)}{L} \sim 1$$

ile de sınır eğrisinin boyutsuz eğrilik yarıçapı tanımlanmaktadır. (3.36)
denklemini bu dönüşümler altında boyutsuzlaştırdığımızda

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 p^1}{\partial \xi^2} + \frac{1}{L^2 \left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)^2} \frac{\partial^2 p^1}{\partial \eta^2} + \frac{2}{L^2 R \left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)} \frac{\partial p^2}{\partial \eta} \\ & - \frac{1}{h L R \left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)} \frac{\partial p^1}{\partial \xi} - \frac{\xi h R'}{L^3 R^2 \left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)^3} \frac{\partial p^1}{\partial \eta} - \frac{1}{L^2 R^2 \left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)^2} p^1 \\ & - \frac{R' \left(1 - 2\epsilon \frac{\xi}{R}\right)}{L^2 R^2 \left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)^2} p^2 + \frac{\tau}{h} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \kappa(\mu + n_x^2) p^1 - \kappa \left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right) n_z t_z p^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Alan büyüklükleri arasında uygun bir kuplaj sağlayabilmek amacıyla $p^1 = \epsilon P$, $p^2 = Q$ yazalım. Bu durumda tabaka içinde ilk adımda

$$\begin{aligned} & \epsilon \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} + \frac{\epsilon^3}{\left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} + \frac{2\epsilon^2}{R \left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)} \frac{\partial Q}{\partial \eta} - \frac{\epsilon^2}{R \left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)} \frac{\partial P}{\partial \xi} \\ & - \frac{\epsilon^4 \xi R'}{R^2 \left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)^3} \frac{\partial P}{\partial \eta} - \frac{\epsilon^3}{R^2 \left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)^2} P - \frac{\epsilon^2 R' \left(1 - 2\epsilon \frac{\xi}{R}\right)}{R^2 \left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)^2} Q + \epsilon \tau L \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ & = \epsilon^3 \kappa L^2 (\mu + n_x^2) P - \epsilon^2 \kappa L^2 \left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right) n_z t_z Q \end{aligned}$$

denklemine varırız.

$$\frac{1}{\left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)} \sim 1 + \epsilon \frac{\xi}{R} + \dots$$

açılımı $\epsilon \frac{\xi}{R} < 1$ olduğundan yakınsaktır. Bu açılımı kullanarak aşağıdaki denklemi kolayca elde ederiz :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} + \epsilon^2 \left(1 + 2\epsilon \frac{\xi}{R} + \dots\right) \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} + 2\frac{\epsilon}{R} \left(1 + \epsilon \frac{\xi}{R} + \dots\right) \frac{\partial Q}{\partial \eta} \\ & - \frac{\epsilon}{R} \left(1 + \epsilon \frac{\xi}{R} + \dots\right) \frac{\partial P}{\partial \xi} - \frac{\epsilon^3 \xi R'}{R^2} \left(1 + 3\epsilon \frac{\xi}{R} + \dots\right) \frac{\partial P}{\partial \eta} \\ & - \frac{\epsilon^2}{R^2} \left(1 + 2\epsilon \frac{\xi}{R} + \dots\right) P - \frac{\epsilon R'}{R^2} \left(1 - 2\epsilon \frac{\xi}{R}\right) \left(1 + 2\epsilon \frac{\xi}{R} + \dots\right) Q \\ & + L \tau \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \epsilon^2 L^2 \kappa (\mu + n_x^2) P - \epsilon L^2 \kappa \left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right) n_z t_z Q \end{aligned} \quad (3.44)$$

Benzer şekilde (3.37) denklemini bu dönüşümler altında boyutsuzlaştırdığımızda

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 p^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{L^2 \left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)^2} \frac{\partial^2 p^2}{\partial \eta^2} + \frac{h\xi R'}{L^3 R^2 \left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)^3} \frac{\partial p^2}{\partial \eta} \\ & - \frac{2}{L^2 R \left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)^3} \frac{\partial p^1}{\partial \eta} - \frac{3}{hLR \left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)} \frac{\partial p^2}{\partial \xi} + \frac{R'}{L^2 R^2 \left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)^4} p^1 \\ & + \left\{ \frac{h\xi \frac{1}{L} R''}{L^2 R^2 \left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)^3} - \frac{h\xi R'^2 \left(2 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)}{R^3 L^3 \left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)^4} \right\} p^2 + \frac{\tau}{L \left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)^2} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \\ & = \kappa(\mu + t_x^2) p^2 - \frac{\kappa}{\left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)} n_z t_z p^1 \end{aligned}$$

elde edilir. $p^1 = \epsilon P$, $p^2 = Q$ tanımı ile bu denklem

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2} + \frac{\epsilon^2}{\left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2} + \frac{\epsilon^3 \xi R'}{R^2 \left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)^3} \frac{\partial Q}{\partial \eta} \\ & - \frac{2\epsilon^3}{R \left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)^3} \frac{\partial P}{\partial \eta} - \frac{3\epsilon}{R \left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)} \frac{\partial Q}{\partial \xi} + \frac{\epsilon^3 R'}{R^2 \left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)^4} P \\ & + \frac{\epsilon^3 \xi}{R^2 \left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)^3} \left\{ R'' - \frac{R'^2 \left(2 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)}{R \left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)} \right\} Q + \frac{\epsilon^2 L \tau}{\left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)^2} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \\ & = \epsilon^2 L^2 \kappa(\mu + t_x^2) Q - \frac{\epsilon^3 L^2 \kappa}{\left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)} n_z t_z P \end{aligned}$$

şekline indirgenir. Yine seri açılımları kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2} + \epsilon^2 \left(1 + 2\epsilon \frac{\xi}{R} + \dots\right) \frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2} + \frac{\epsilon^3 \xi R'}{R^2} \left(1 + 3\epsilon \frac{\xi}{R} + \dots\right) \frac{\partial Q}{\partial \eta} \\ & - \frac{2\epsilon^3}{R} \left(1 + 3\epsilon \frac{\xi}{R} + \dots\right) \frac{\partial P}{\partial \eta} - \frac{3\epsilon}{R} \left(1 + \epsilon \frac{\xi}{R} + \dots\right) \frac{\partial Q}{\partial \xi} \\ & + \frac{\epsilon^3 R'}{R^2} \left(1 + 4\epsilon \frac{\xi}{R} + \dots\right) P + \epsilon^2 L \tau \left(1 + 2\epsilon \frac{\xi}{R} + \dots\right) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \\ & + \frac{\epsilon^3 \xi}{R^2} \left(1 + 3\epsilon \frac{\xi}{R} + \dots\right) \left\{ R'' - \frac{R'^2}{R} \left(2 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right) \left(1 + \epsilon \frac{\xi}{R} + \dots\right) \right\} Q \\ & = \epsilon^2 L^2 \kappa(\mu + t_x^2) Q - \epsilon^3 L^2 \kappa \left(1 + \epsilon \frac{\xi}{R} + \dots\right) n_z t_z P \end{aligned} \quad (3.45)$$

sonucu bulunur. Böylece pertürbasyon parametresine bağlı (3.44) ve (3.45) kısmi türevli diferansiyel denklemleri elde edilmiş olur. Burada gözükten $R'(\eta)$ ve $R''(\eta)$ ifadeleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır :

$$R'(\eta) = \frac{1}{L} \frac{d\rho}{d\eta} = \frac{1}{L} \frac{d\rho}{dx^2} \frac{dx^2}{d\eta} = \dot{\rho}(x^2)$$

$$R''(\eta) = \frac{d}{d\eta}(\dot{\rho}) = \frac{d\dot{\rho}}{dx^2} \frac{dx^2}{d\eta} = \frac{1}{L} \ddot{\rho}(x^2) .$$

Öte yandan (3.38) denklemini boyutsuzlaştırdığımızda

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{L^2 \left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} - \frac{1}{hLR \left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \frac{h\xi R'}{L^3 R^2 \left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)^3} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \\ & - \frac{P_0}{\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{h} \frac{\partial p^1}{\partial \xi} + \frac{1}{L} \frac{\partial p^2}{\partial \eta} - \frac{1}{LR \left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)} p^1 + \frac{h\xi R'}{L^2 R^2 \left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R}\right)} p^2 \right\} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $p^1 = \epsilon P$, $p^2 = Q$ alırsak bu denklem

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \epsilon^2 \left(1 + 2\epsilon \frac{\xi}{R} + \dots\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} - \frac{\epsilon}{R} \left(1 + \epsilon \frac{\xi}{R} + \dots\right) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \\ & \frac{\epsilon^3 \xi R'}{R^2} \left(1 + 3\epsilon \frac{\xi}{R} + \dots\right) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - \frac{P_0}{\epsilon_0} \epsilon^2 L \left\{ \frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial Q}{\partial \eta} \right\} - \\ & \frac{P_0}{\epsilon_0} \frac{\epsilon^3 L}{R} \left(1 + \epsilon \frac{\xi}{R} + \dots\right) \left\{ P - \frac{\xi R'}{R} Q \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

şeklini alır. (3.39) ve (3.40) denkleminin boyutsuzlaştırılması ile

$$p^1_{;1} = p^1_{,1} = \frac{\epsilon}{h} \frac{\partial P}{\partial \xi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = 0, \quad \partial D \text{ de} \quad (3.47)$$

ve (3.40) denkleminin boyutsuzlaştırılması ile

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} - \frac{\epsilon}{R} \left(1 + \epsilon \frac{\xi}{R} + \dots\right) Q \Big|_{\xi=0} = 0, \quad \partial D \text{ de} \quad (3.48)$$

sınır koşulları elde edilir.

Şimdi (3.41) denklemini boyutsuzlaştıralım. ∂D 'nin dışında elektrik alanı sıfır, dolayısıyla potansiyel sabit olduğundan

$$\frac{1}{h} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \frac{P_0}{\epsilon_0} p^1 = 0, \quad \partial D \text{ de}$$

veya

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \frac{P_0 L \epsilon^2}{\epsilon_0} P = 0, \quad \partial D \text{ de}$$

yazılabilir. ϕ ile P arasında kuplaj sağlayabilmek için potansiyel fonksiyonun yapısını $\phi = \epsilon^2 \Phi$ şeklinde seçer ve M sabitini $M = \frac{P_0 L}{\epsilon_0}$ olarak tanımlarsak

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - MP = 0, \quad \partial D \text{ de}$$

veya

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = \left. MP \right|_{\xi=0}, \quad \partial D \text{ de} \quad (3.49)$$

elde edilir.

(3.43) denklemini boyutsuzlaştırdığında

$$\epsilon^2 P^2 + \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right)^2 Q^2 = 1$$

veya

$$Q^2 - 2\epsilon \frac{\xi}{R} Q^2 + \epsilon^2 \left(P^2 + \frac{\xi^2}{R^2} Q^2 \right) = 1 \quad (3.50)$$

elde edilir. Şimdi

$$P(\xi, \eta; \epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n P_n(\xi, \eta)$$

$$Q(\xi, \eta; \epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n Q_n(\xi, \eta)$$

$$\Phi(\xi, \eta; \epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \Phi_n(\xi, \eta)$$

asimptotik açılımlarını gözönüne alır ve ilk önce (3.50) denkleminde bu açılımları kullanırsak

$$\begin{aligned} & (Q_0 + \epsilon Q_1 + \dots)^2 - 2\epsilon \frac{\xi}{R} (Q_0 + \epsilon Q_1 + \dots)^2 + \\ & \epsilon^2 \left\{ (P_0 + \epsilon P_1 + \dots)^2 + \frac{\xi^2}{R^2} (Q_0 + \epsilon Q_1 + \dots)^2 \right\} = 1 \\ & Q_0^2 - 1 + \epsilon \left(2Q_0 Q_1 - 2\frac{\xi}{R} Q_0^2 \right) + \dots = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. ϵ cinsinden aynı dereceden terimlerin katsayılarını sıfırlarsak

$$\epsilon^0 : Q_0^2 = 1 \Rightarrow Q_0 = \mp 1 \quad (3.51)$$

$$\epsilon^1 : 2Q_0 Q_1 - 2\epsilon \frac{\xi}{R} Q_0^2 = 0 \Rightarrow Q_1 = \mp \frac{\xi}{R} \quad (3.52)$$

.....

sonucuna varılır.

(3.44) denkleminde ϵ cinsinden birinci dereceden terimlere kadar alınır ve

$$\mu(x^1, x^2; \epsilon) = \frac{1}{\epsilon^2} \mu_1 + \frac{1}{\epsilon} \mu_2 + \mu_3 + \dots$$

asimptotik açılımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} + \frac{\epsilon}{R} \left(2 \frac{\partial Q}{\partial \eta} - \frac{\partial P}{\partial \xi} - \frac{R'}{R} Q \right) + \dots = L^2 \kappa (\mu_1 + \epsilon \mu_2 \\ & + \epsilon^2 (\mu_3 + n_x^2) + \dots) P - \epsilon L^2 \kappa \left(1 - \epsilon \frac{\xi}{R} \right) n_z t_z Q \end{aligned} \quad (3.53)$$

elde edilir. Burada $\mu_i(x^1, x^2)$ fonksiyonları için $x^1 = 0$ civarında, yani sınır eğrisi civarında geçerli olan $\mu_i(x^1, x^2) = \mu_{i0}(\eta) + \epsilon \mu_{i1}(\eta) \xi + \dots$ Taylor açılımını (3.53) te kullanırsak

$$\begin{aligned} \mu_i(x^1, x^2; \epsilon) &= \frac{1}{\epsilon^2} \mu_{10}(\eta) + \frac{1}{\epsilon} (\mu_{20}(\eta) + \xi \mu_{11}(\eta)) + \mu_{30}(\eta) \\ &+ \xi \mu_{21}(\eta) + \xi^2 \mu_{12}(\eta) + \dots \end{aligned}$$

yazabiliriz. Bu ifadeleri kullanırsak

$$\epsilon^0 : \frac{\partial^2 P_0}{\partial \xi^2} = \omega^2 P_0 \quad (3.54)$$

elde edilir. Burada $\omega^2(\eta) = L^2 \kappa \mu_{10}$ olarak tanımlanmıştır. Yukarıdaki ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemin çözümü

$$P_0(\xi, \eta) = A(\eta) \cosh(\omega \xi) + B(\eta) \sinh(\omega \xi) \quad (3.55)$$

çözümü elde edilir. Bu durumda P_1 aşağıdaki denklemi sağlar.

$$\begin{aligned} \epsilon^1 : \quad & \frac{\partial^2 P_1}{\partial \xi^2} + \frac{1}{R} \left[2 \frac{\partial Q_0}{\partial \eta} - \frac{\partial P_0}{\partial \xi} - \frac{R'}{R} Q_0 \right] \\ & = L^2 \kappa (\mu_{10} P_1 + \mu_{11} P_0 \xi + \mu_{20} P_0 - n_z t_z Q_0) \end{aligned} \quad (3.56)$$

(3.45) denkleminde bu açılımlar yerleştirilirse

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2} - 3 \frac{\epsilon}{R} \frac{\partial Q}{\partial \xi} + \dots \\ & = L^2 \kappa (\mu_1 + \epsilon \mu_2 + \epsilon^2 (\mu_3 + t_x^2) + \dots) Q - \epsilon^3 L^2 \kappa \left(1 + \epsilon \frac{\xi}{R} + \dots \right) n_z t_z P \\ & = L^2 \kappa (\mu_{10} + \epsilon (\mu_{20} + \mu_{11} \xi) + \dots) Q - \epsilon^3 L^2 \kappa \left(1 + \epsilon \frac{\xi}{R} + \dots \right) n_z t_z P \end{aligned} \quad (3.57)$$

bulunur. ϵ^0 mertebesinde geçerli olan denklem

$$\epsilon^0 : \quad \frac{\partial^2 Q_0}{\partial \xi^2} = \omega^2 Q_0 \quad (3.58)$$

olur. İkinci mertebeden bu kısmi diferansiyel denklemin çözümü ise

$$Q_0(\xi, \eta) = C(\eta) \cosh(\omega \xi) + D(\eta) \sinh(\omega \xi) \quad (3.59)$$

çıkar. (3.51)'den $Q_0 = \mp 1$ olacağını bulmuştuk. Buna göre $\omega = 0$ ve $C(\eta) = \mp 1$ olmalıdır. Bu durumda $P_0(\xi, \eta)$ çözümü

$$P_0(\eta) = A(\eta) \quad (3.60)$$

şekline indirgenir. Q_1 ise

$$\epsilon^1 : \quad \frac{\partial^2 Q_1}{\partial \xi^2} - \frac{3}{R} \frac{\partial Q_0}{\partial \xi} = L^2 \kappa \mu_{10} Q_1 + L^2 \kappa \mu_{20} Q_0 + L^2 \kappa \mu_{11} Q_0 \xi \quad (3.61)$$

denklemini sağlar. (3.46) denkleminde asimptotik açılımlar ve $\phi = \epsilon^2 \Phi$ kullanılırsa

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} - M \left(\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial Q}{\partial \eta} \right) - \frac{\epsilon}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \dots = 0 \quad (3.62)$$

bulunur. ϵ^0 mertebesinde geçerli olan denklem

$$\epsilon^0 : \quad \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \xi^2} - M \left(\frac{\partial P_0}{\partial \xi} + \frac{\partial Q_0}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (3.63)$$

olur. $\frac{\partial P_0}{\partial \xi}$ ve $\frac{\partial Q_0}{\partial \eta}$ kısmi türevleri sıfır olduğundan basitçe

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \xi^2} = 0 \quad (3.64)$$

elde edilir. Bunun çözümü

$$\Phi_0(\xi, \eta) = E(\eta)\xi + F(\eta) \quad (3.65)$$

şeklindedir. Bu çözüm $[\phi] = 0$ süreklilik koşulunu $\xi = 0$ da sağlamalı yani

$$\phi^+ - \phi^- = 0 \Rightarrow \phi^+ = 0$$

ve

$$(\Phi_0^+ + \epsilon \Phi_1^+ + \dots) \Big|_{\xi=0} = 0$$

yani

$$\epsilon^0 : \quad \Phi_0^+ \Big|_{\xi=0} = 0 \Rightarrow F(\eta) = 0$$

olmalıdır. Ayrıca (3.49) kısıtını kullanırsak

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = M P_0|_{\xi=0}$$

$$E(\eta) = M A(\eta)$$

elde edilir. Sonuçta

$$\Phi_0(\xi, \eta) = M A(\eta) \xi \quad (3.66)$$

şeklinde bir çözüm elde edilir.

Böylece P , Q ve Φ 'nin sıfırıncı dereceden çözümlerini elde ettik. Kristalde aldığımız sınır tabakasında elde ettiğimiz polarizasyon alanı ve

potansiyelin iç kısımlarda geçerli olan sabit yapıya asimptotik olarak geçişini sağlayacak olan sınır tabakasının iç sınırını veren eğrinin $x^1 = d(x^2; \epsilon)$ şeklindeki denklemini bulmak için (3.15) kısıtının eğrisel koordinat takımındaki ifadesini kullanacağız :

$\mathbf{p} = \mp \mathbf{k}$ için

$$[\epsilon_0 \phi_{,j} g^{ij} - P_0 p^i] \bar{n}_i = 0$$

$$\epsilon_0 \nabla \phi \cdot \bar{\mathbf{n}} - P_0 \mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{n}} \mp P_0 \mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0$$

$$\epsilon_0 \phi_{,j} g^{ij} \bar{n}_i - P_0 p^i \bar{n}_i \mp P_0 \bar{n}_z = 0$$

$$\epsilon_0 \phi_{,1} g^{11} \bar{n}_1 + \epsilon_0 \phi_{,2} g^{22} \bar{n}_2 - P_0 (p^1 \bar{n}_1 + p^2 \bar{n}_2) \mp P_0 \bar{n}_z = 0$$

$$\phi_{,1} \bar{n}_1 + \frac{1}{\left(1 - \frac{d}{\rho}\right)^2} \phi_{,2} \bar{n}_2 - \frac{P_0}{\epsilon_0} (p^1 \bar{n}_1 + p^2 \bar{n}_2) \mp \frac{P_0}{\epsilon_0} \bar{n}_z = 0 \quad (3.67)$$

denklemini elde edilir.

Benzer şekilde $\mathbf{p} = \mp \mathbf{i}$ için

$$\epsilon_0 \nabla \phi \cdot \bar{\mathbf{n}} - P_0 \mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{n}} \mp P_0 \mathbf{i} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0$$

$$\epsilon_0 \phi_{,1} g^{11} \bar{n}_1 + \epsilon_0 \phi_{,2} g^{22} \bar{n}_2 - P_0 (p^1 \bar{n}_1 + p^2 \bar{n}_2) \mp P_0 \bar{n}_x = 0$$

$$\phi_{,1} \bar{n}_1 + \frac{1}{\left(1 - \frac{d}{\rho}\right)^2} \phi_{,2} \bar{n}_2 - \frac{P_0}{\epsilon_0} (p^1 \bar{n}_1 + p^2 \bar{n}_2) \mp \frac{P_0}{\epsilon_0} \bar{n}_x = 0 \quad (3.68)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemlerde gözüken sınır tabakasının bir Weiss bölgesine komşu sınırının birim normal vektörünü hesaplamalıyız. Bu sınır tabakası yüzeyinin denklemini

$$f(x^1, x^2; \epsilon) = x^1 - d(x^2; \epsilon) = 0$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Yüzeyin normali bilindiği gibi

$$\bar{\mathbf{n}} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

şeklinde ifade edilir. Dolayısıyla

$$\nabla f = \mathbf{g}^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \mathbf{g}^1 - d' \mathbf{g}^2 = \bar{n}_1 \mathbf{g}^1 + \bar{n}_2 \mathbf{g}^2$$

ve

$$|\nabla f|^2 = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} = g^{11} + g^{22} (d')^2 = 1 + \frac{(d')^2}{\left(1 - \frac{d}{\rho}\right)^2}$$

yazılabileceğinden bu ara yüzün normalini

$$\bar{\mathbf{n}} = \left(\mathbf{n} - \frac{d'}{\left(1 - \frac{d}{\rho}\right)} \mathbf{t} \right) \frac{1}{\left[1 + \frac{d'^2}{\left(1 - \frac{d}{\rho}\right)^2} \right]^{1/2}} \quad (3.69)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Normalin bileşenleri

$$\bar{n}_1 = \frac{1}{|\nabla f|}, \bar{n}_2 = -\frac{d'}{|\nabla f|}$$

olduğuna göre normalin x ve z doğrultusundaki bileşenleri

$$\bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{k} = \bar{n}_z = \left(n_z - \frac{d'}{\left(1 - \frac{d}{\rho}\right)} t_z \right) \frac{1}{|\nabla f|}$$

$$\bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{i} = \bar{n}_x = \left(n_x - \frac{d'}{\left(1 - \frac{d}{\rho}\right)} t_x \right) \frac{1}{|\nabla f|}$$

şeklindedir. Bunları (3.67) denkleminde kullanırsak

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\nabla f|} \phi_{,1} - \frac{d'}{|\nabla f| \left(1 - \frac{d}{\rho}\right)^2} \phi_{,2} - \frac{M}{|\nabla f| L} (p^1 - d' p^2) \\ & \mp \frac{M}{|\nabla f| L} \left(n_z - \frac{d'}{\left(1 - \frac{d}{\rho}\right)} t_z \right) = 0 \end{aligned}$$

$|\nabla f|$ ile sadeleştirdiğimizde

$$\phi_{,1} - \frac{d'}{\left(1 - \frac{d}{\rho}\right)^2} \phi_{,2} - \frac{M}{L} (p^1 - d' p^2) \mp \frac{M}{L} \left(n_z - \frac{d'}{\left(1 - \frac{d}{\rho}\right)} t_z \right) = 0$$

elde edilir. Sınır eğrisini aşağıdaki şekilde yazabiliriz :

$$d(x^2; \epsilon) = L\delta(\eta; \epsilon)$$

$$d'(x^2; \epsilon) = \dot{\delta}(\eta; \epsilon)$$

ve yukarıdaki denklemi boyutsuzlaştırırsak

$$\frac{\epsilon^2}{h} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \frac{\epsilon^2 \dot{\delta}}{L(1 - \frac{\delta}{R})^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - \frac{M}{L}(\epsilon P - \dot{\delta} Q) \mp \frac{M}{L} \left(n_z - \frac{\dot{\delta}}{(1 - \frac{\delta}{R})} t_z \right) = 0$$

$$\epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \frac{\epsilon^2 \dot{\delta}}{(1 - \frac{\delta}{R})^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - M(\epsilon P - \dot{\delta} Q) \mp M \left(n_z - \frac{\dot{\delta}}{(1 - \frac{\delta}{R})} t_z \right) = 0$$

elde edilir. Burada aynı mertebeden terimleri toparlarsak

$$M \left\{ \dot{\delta} Q \mp n_z \pm \frac{\dot{\delta}}{(1 - \frac{\delta}{R})} t_z \right\} + \epsilon \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - MP \right) + \dots = 0$$

$\delta(\eta; \epsilon) = \delta_0(\eta) + \epsilon \delta_1(\eta) + \dots$ şeklindeki asimptotik açılımını ve

$$\frac{1}{(1 - \frac{\delta}{R})} = \frac{1}{(1 - \frac{\delta_0}{R})} + \epsilon \frac{\delta_1/R}{(1 - \frac{\delta_0}{R})^2} + \dots$$

açılımını kullanırsak

$$\epsilon^0 : M \left\{ \dot{\delta}_0 Q_0 \mp n_z \pm \frac{\dot{\delta}_0}{(1 - \frac{\delta_0}{R})} t_z \right\} = 0$$

buradan

$$\dot{\delta}_0 \left[1 \pm \frac{t_z}{(1 - \frac{\delta_0}{R})} \right] = \pm n_z \quad (3.70)$$

lineer olmayan diferansiyel denklemi elde edilir. Aynı işlem (3.68) denklemi için yapılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\nabla f|} \phi_{,1} - \frac{d'}{|\nabla f| \left(1 - \frac{d}{\rho}\right)^2} \phi_{,2} - \frac{M}{|\nabla f| L} (p^1 - d' p^2) \\ & \mp \frac{M}{|\nabla f| L} \left(n_x - \frac{d'}{\left(1 - \frac{d}{\rho}\right)} t_x \right) = 0 \end{aligned}$$

$|\nabla f|$ ile sadeleştirdiğimizde

$$\phi_{,1} - \frac{d'}{\left(1 - \frac{d}{\rho}\right)^2} \phi_{,2} - \frac{M}{L} (p^1 - d' p^2) \mp \frac{M}{L} \left(n_x - \frac{d'}{\left(1 - \frac{d}{\rho}\right)} t_x \right) = 0$$

elde edilir ve boyutsuzlaştırma işlemi yapılırsa

$$\frac{\epsilon^2}{h} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \frac{\epsilon^2 \dot{\delta}}{L \left(1 - \frac{\delta}{R}\right)^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - \frac{M}{L} (\epsilon P - \dot{\delta} Q) \mp \frac{M}{L} \left(n_x - \frac{\dot{\delta}}{\left(1 - \frac{\delta}{R}\right)} t_x \right) = 0$$

$$\epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \frac{\epsilon^2 \dot{\delta}}{\left(1 - \frac{\delta}{R}\right)^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - M (\epsilon P - \dot{\delta} Q) \mp M \left(n_x - \frac{\dot{\delta}}{\left(1 - \frac{\delta}{R}\right)} t_x \right) = 0$$

elde edilir. Burada aynı mertebeden terimleri toparlarsak

$$M \left\{ \dot{\delta} Q \mp n_x \pm \frac{\dot{\delta}}{\left(1 - \frac{\delta}{R}\right)} t_x \right\} + \epsilon \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - MP \right) + \dots = 0$$

boyutsuz denklemi elde edilir.

Aynı işlemler (3.68) için yapılırsa

$$\epsilon^0 : M \left\{ \dot{\delta}_0 Q_0 \mp n_x \pm \frac{\dot{\delta}_0}{\left(1 - \frac{\delta_0}{R}\right)} t_x \right\} = 0$$

elde edilir. Buradan da

$$\dot{\delta}_0 \left[1 \pm \frac{t_x}{\left(1 - \frac{\delta_0}{R}\right)} \right] = \pm n_x \quad (3.71)$$

lineer olmayan diferansiyel denklemi elde edilir.

$x^1 = d(x^2; \epsilon)$ sınırı üzerindeki $[\phi] = 0$ süreklilik koşulunu kullanalım. Burada Weiss bölgeleri içinde potansiyelin her yerde C gibi bir sabit değere sahip olduğunu gözönünde bulundurarak.

$$[\phi] = 0 \Rightarrow \phi^+ - \phi^- = 0$$

veya

$$\epsilon^2 \Phi - C = 0$$

elde edilir. Burada $C = \epsilon \mathcal{C}$ şeklinde alınırsa

$$\Phi - \mathcal{C} = 0$$

elde edilir.

$$\Phi_0 + \epsilon \Phi_1 + \dots - \mathcal{C} = 0 \quad x^1 = d(x^2; \epsilon) \, de$$

burada sıfırıncı dereceden terim alınırsa

$$\Phi_0 = C \Big|_{x^1=d(x^2;\epsilon)}$$

elde edilir.

Potansiyelin bu sınır tabakasında içteki sabit duruma yaklaştığı gözlenir. (3.66) da bu kullanıldığında

$$MA(\eta)\delta(\eta) = C \Rightarrow A(\eta) = \frac{C}{M\delta(\eta)}$$

bulunur. Bu durumda Φ_0 çözümü

$$\Phi_0(\xi, \eta) = C \frac{\xi}{\delta(\eta)} \quad (3.72)$$

olarak bulunmuş olur.

3.2 ÖRNEK PROBLEM : Sınırı Dairesel Olan Ferroelektrik Kristalin İncelenmesi

$$x = a \cos \theta$$

$$z = a \sin \theta$$

dairenin parametrik denklemi ve $x^2 + z^2 = a^2$ dairenin analitik denklemi şeklindedir. Eğrisel koordinat takımımızda bir noktanın yer vektörünü

$$\mathbf{r}(x^1, x^2) = \mathbf{r}_0(x^2) + x^1 \mathbf{n}(x^2)$$

şeklinde ifade ederiz. Eğrinin yay uzunluğu,

$$ds^2 = dx^2 + dz^2 = \left[\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta} \right)^2 \right] d\theta^2$$

$$ds = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta} d\theta$$

$$\int_0^s ds = \int_0^\theta a d\theta$$

$$s = a\theta \Rightarrow \theta = \frac{s}{a} = \frac{x^2}{a}$$

şeklindedir. Baz vektörlerimiz,

$$\mathbf{g}_1 = \frac{d\mathbf{r}}{dx^1} = \mathbf{n}$$

ve

$$\mathbf{g}_2 = \frac{d\mathbf{r}}{dx^2} = \left(1 - \frac{x^1}{\rho}\right) \mathbf{t}$$

şeklindedir.

Dairenin eğriliği $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{a}$ dır. Yüzey denkleminizi,

$$f(x, z) = x^2 + z^2 - a^2 = 0$$

şeklinde ifade ederiz. Yüzeyin birim normal ve birim teğet vektörü aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{2x\mathbf{i} + 2z\mathbf{k}}{\sqrt{4x^2 + 4z^2}} = \frac{x}{a}\mathbf{i} + \frac{z}{a}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{n} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{k} = \cos \left(\frac{x^2}{a} \right) \mathbf{i} + \sin \left(\frac{x^2}{a} \right) \mathbf{k}$$

$$\mathbf{t} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{k} = -\sin \left(\frac{x^2}{a} \right) \mathbf{i} + \cos \left(\frac{x^2}{a} \right) \mathbf{k}$$

z - eksenini doğrultusundaki normal ve teğet bileşenler

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = n_z = \sin \left(\frac{x^2}{a} \right) = \sin \theta$$

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{k} = t_z = \cos \left(\frac{x^2}{a} \right) = \cos \theta$$

şeklindedir. Boyutsuzlaştırılmış eğrilik yarıçapı $R(\eta) = 1$ dir.

Daire için (3.70) diferansiyel denkleminin negatif işaretli olanının ifadesi aşağıdaki yapıdadır :

$$\dot{\delta}_0 \left[1 - \frac{\cos \theta}{(1 - \delta_0)} \right] = -\sin \theta \quad (3.73)$$

diferansiyel denklemi çeşitli değişken dönüşümleri yapılarak aşağıdaki gibi çözümlere :

$$\dot{\delta} \left(1 - \frac{\cos \theta}{1 - \delta} \right) = -\sin \theta \quad \delta = 1 - u(\theta) \quad \dot{\delta} = -\dot{u}$$

$$\dot{u} \left(1 - \frac{\cos \theta}{u} \right) = \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \dot{u} = \frac{u \sin \theta}{u - \cos \theta}$$

$$t = \cos \theta \quad \frac{du}{d\theta} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{d\theta} = -\sin \theta \frac{du}{dt}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{u}{u - t} = -\frac{1}{1 - \frac{t}{u}} \quad \frac{t}{u} \quad u' = \frac{1}{v} - \frac{t}{v^2} v'$$

$$\frac{1}{v} - \frac{t}{v^2} v' = -\frac{1}{1 - v} \quad \frac{1}{v} + \frac{1}{1 - v} = \frac{t}{v^2} v'$$

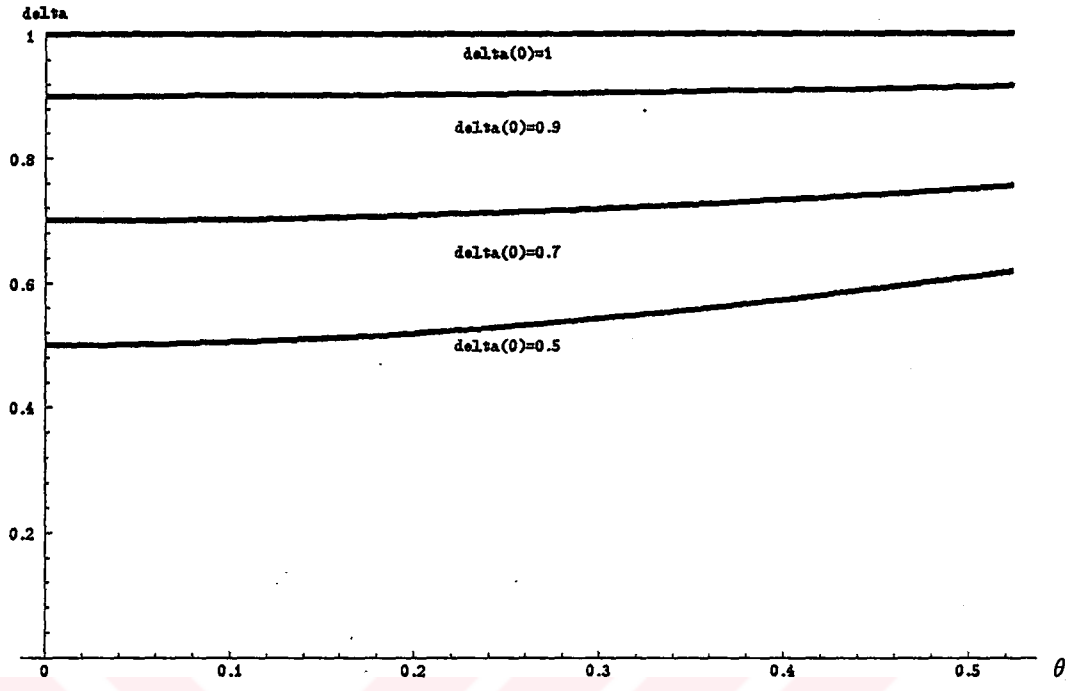
$$\frac{1}{v(1 - v)} = \frac{t}{v^2} v' \quad \frac{1 - v}{v} v' = \frac{1}{t} \quad \left(\frac{1}{v} - 1 \right) dv = \frac{dt}{t}$$

$$\log v - v = \log t - \log C_1 \quad \Rightarrow \quad v e^{-v} = \frac{t}{C_1}$$

$$\frac{t}{u} e^{-\frac{t}{u}} = \frac{t}{C_1} \quad u e^{\frac{t}{u}} = C_1$$

$$\Rightarrow (1 - \delta_0) e^{\frac{\cos \theta}{(1 - \delta_0)}} = C_1 \quad (3.74)$$

şeklinde lineer olmayan bir denklem elde edildi. Buradaki C_1 sabiti her bir Weiss bölgesinde farklı değerler alabilen bir integrasyon sabiti olup başlangıç noktasında sınır tabakasının kalınlığını gösterir. (3.73) diferansiyel denklemi $0 \leq \theta \leq \pi/6$ için $\delta_0(0) = 0.5$, $\delta_0(0) = 0.7$, $\delta_0(0) = 0.9$ ve $\delta_0(0) = 1$ başlangıç değerleri için çözülmüş ve grafik olarak şekil 3.4 te verilmiştir.



Şekil 3.4. İçteki sınır tabakasındaki değişim

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde kristalin keyfi bir şekli için, kristalin sınırına yakın ince bir tabaka olduğu varsayıldı. Problem düzlemsel halde x - z düzlemi içinde kalarak incelendi. Sınır tabakası içinde alan denklemlerini inceleyebilmek için sınır tabakasındaki herhangi bir noktayı kristalin sınır eğrisinin yay uzunluğuna bağlı olarak ifade ederek bir eğrisel koordinat takımı tanımladı. En genel alan denklemleri, sınır ve sıçrama koşulları bu koordinat takımına göre ifade edildi. İnce sınır tabakasını karakterize eden bir uzunluk olan h parametresinin sınır eğrisine ilişkin bir uzunluk olan L 'ye oranı olarak çok küçük olduğunu varsaydığımız bir ϵ parametresi tanımladı. Sınır tabakası denklemlerini boyutsuzlaştırarak ϵ pertürbasyon parametresine bağlı kısmi türevli diferansiyel denklemler elde edildi. Bu denklemler, sınır ve sıçrama koşullarını sağlayacak şekilde çözülerek içteki her bir Weiss bölgesi ile sınır tabakasını ayıran eğrinin denklemi lineer olmayan bir yapıda bulundu.

h ve kristalin bir karakteristik sabiti olan P_0 'ın bulunması için, içteki sınır tabakasını veren eğrinin denklemi, (2.1) enerji fonksiyoneline koyularak fonksiyoneli minimum yapan değerlerin bulunması gerekir. Bu fonksiyonelin minimumu birden fazla olabileceğinden h için tek bir değer bulunmayacaktır. Yani ferroelektrik kristalin bu minimum değerlere göre çeşitli yapılanmaları olacaktır.

Bu çalışmanın devamı olarak önerilebilecek bir konu bu sınır tabakasını üç boyutlu uzayda incelemek olacaktır. Bu durumda sınır tabakasındaki bir noktayı yüzeyin bir takım büyüklüklerine bağlı olarak ifade edip problemi çözmeye çalışabiliriz.

Kısmi türevli diferansiyel denklemlerimizde gözüken α ve β fiziksel büyüklükleri arasında bir mertebe bağıntısı araştırılıp varsa bir singüler pertürbasyon elde edilerek, daha iyi çözümlerin bulunacağı umulmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] ERİNGEN, A.C., MAUGIN, G.A., Electrodynamics of Continua I, Springer-Verlag, New York (1990).
- [2] ROMANO, A., Thermomechanics of Phase Transitions in Classical Field Theory, World Sci. Publ., Singapore (1993).
- [3] ROMANO, A., ŞUHUBİ, E.S., Structure of Weiss Domains in Ferroelectric Crystals, Int.J.Engng.Sci. 30, 1715-1729 (1992).
- [4] BORISENKO, A.I., TARAPOV, I.E., Vector and Tensor Analysis With Applications, Dover Publ., New York (1979).
- [5] ŞEMİN, F., Diferansiyel Geometri I Eğriler, İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstanbul (1983).

Salim CEYHAN, 1971 yılında Kocaeli'nin Gölcük ilçesinde doğdu. Lise öğrenimini Gölcük Barbaros Hayrettin Lisesinde yaptı. 1987 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Mühendisliği Bölümüne girdi. 1991 yılında mezun oldu. Aynı yıl İ.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü Mühendislik Bilimleri Anabilim Dalı Mekanik programında yüksek lisans öğrenime başladı. 1993 yılı Haziran ayında Fen Edebiyat Fakültesi Mühendislik Bilimleri Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak girdi.