



T.C.

TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**TEK MERTEBEDEN DAĞILIMLI SAPMA ARGÜMENTLİ NEUTRAL
DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN SALINIM SONUÇLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mine SARIGÜL

Danışman: Prof. Dr. Ercan TUNÇ

TOKAT- 2025

JÜRİ KABUL VE ONAY

Mine SARIGÜL tarafından hazırlanan “Tek Mertebeden Dağılımlı Sapma Argümentli Neutral Diferensiyel Denklemler İçin Salınım Sonuçları” adlı tez çalışmasının savunma sınavı **21.04.2025** tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen Jüri tarafından Oy Birliği ile Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**’nda **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmzası

Üye : Prof. Dr. Ercan TUNÇ
Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi
(Başkan, Danışman)

.....

Üye : Doç. Dr. Orhan ÖZDEMİR
Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi

.....

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Serpil ŞAHİN
Amasya Üniversitesi

.....

ONAY

...../...../.....

Doç. Dr. Ercan ÇAÇAN
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

ETİK SÖZLEŐME

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Ercan TUNÇ danışmanlığında hazırlamış olduğum “Tek Mertebeden Dağılımlı Sapma Argümentli Neutral Diferensiyel Denklemler İçin Salınım Sonuçları” adlı Yüksek Lisans tezinin bilimsel etik değerlere ve kurallara uygun, özgün bir çalışma olduğunu, aksinin tespit edilmesi halinde her türlü yasal yaptırımını kabul edeceğimi beyan ederim.

21/04/2025

Mine SARIGÜL

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TEK MERTEBEDEN DAĞILIMLI SAPMA ARGÜMENTLİ NEUTRAL DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN SALINIM SONUÇLARI

Mine SARIGÜL

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Ercan TUNÇ

Ocak 2025, 48 sayfa

Bu tez çalışmasında, dağılımlı sapma argümanlarına sahip tek mertebeli neutral diferensiyel denklem sınıfının tüm çözümlerinin salınımı için yeni yeter şartlar oluşturulmuştur. Sonuçların uygulanabilirliğini gösteren örnekler verilerek daha fazla araştırma için bazı önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Salınım, karşılaştırma, tek mertebe, neutral diferensiyel denklemler.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

OSCILLATION RESULTS FOR ODD-ORDER NEUTRAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DISTRIBUTED DEVIATING ARGUMENTS

Mine SARIGÜL

Tokat Gaziosmanpaşa University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor : Prof. Dr. Ercan TUNÇ
January, 2025, 48 pages

New sufficient conditions for the oscillation of all solutions to a class of odd-order differential equations with distributed deviating arguments are established. Several examples are also included to illustrate the results and some suggestions for further research are given.

Keywords: Oscillation, comparison, odd-order, neutral differential equations.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iv
SİMGE ve KISALTMALAR	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	4
2.1. Fonksiyonel Diferensiyel Denklemler	4
2.2. Tek Mertebeden Neutral Diferensiyel Denklemlerle İlgili Salınım Sonuçları	8
3. SALINIM TEOREMLERİ	17
3.1. Tek Mertebeden Dağılımlı Sapma Argümentli Neutral Diferensiyel Denklemler İçin Salınım Sonuçları	17
3.2. Ana Sonuçlar	21
3.3. Temel Sonuçlar	23
4. TARTIŞMA VE SONUÇ	35
4.1. Tartışma ve Sonuç	35
KAYNAKLAR	36
ÖZGEÇMİŞ	40

ÖNSÖZ

Çalışmamın hazırlanma süreci boyunca bilgi ve deneyimiyle bana ışık tutan, emeğini esirgemeyen, öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyduğum tez danışmanım, kıymetli hocam Prof. Dr. Ercan TUNÇ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tezimin her aşamasında değerli zamanını ayırarak bilgi birikimini benimle paylaşan, akademik yolda yürüme cesareti aşılayan, tüm aksiliklere rağmen pes etmeme izin vermeyen, eğitim serüvenim vesilesiyle tanışıp hayatıma iyi bir abi, kardeş ve arkadaş sıfatlarıyla değer katan sevgili hocam Doç. Dr. Orhan ÖZDEMİR'e gönülden teşekkür ederim.

Bu süreçte, zor zamanlarımda motivasyonumu yeniden kazanmamı sağlayan, kızımızın bize en ihtiyaç duyduğu dönemde bu sorumluluğu en iyi şekilde üstlenerek hayatımı kolaylaştırma konusunda olağanüstü bir çaba sergileyen hayat arkadaşım Abdullah SARIGÜL'e, çalışmam gereken zamanlarda anlayış gösterip, sabırla beni bekleyen, matematik dergilerini karıştırarak ve notlarımın üzerine resimler yaparak hayatıma neşe katan canım kızım Doğa'ma, beni her zaman koşulsuz destekleyen, okuma isteğimi ve çalışma disiplini kazanmamda büyük rol oynayan, üzerimdeki emeklerini asla ödeyemeyeceğim sevgili anne ve babama en derin teşekkürlerimi sunarım.

Mine SARIGÜL

Nisan 2025

SİMGE ve KISALTMALAR

Simgeler	Açıklamalar
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	Negatif olmayan tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
α	Alpha
β	Beta
γ	Gamma
δ	Delta
ϵ	Epsilon
η	Eta
θ	Theta
ϑ	Vartheta
κ	Kappa
λ	Lambda
π	Pi
ρ	Rho
σ	Sigma
τ	Tau
ϕ	Phi
φ	Varphi
ψ	Psi
Υ	Upsilon
μ	Mu

1. GİRİŞ

Doğa bilimlerinde karşılaşılan problemlere genellikle adi ya da kısmi diferensiyel denklemlerle matematiksel modeller atanır. Uygulamalı alanlarda bir sistemin matematiksel modelini oluştururken, sistemin gelecekteki davranışının yalnızca bağımsız değişkenin bir değerine bağlı olarak ve geçmişten bağımsız olduğu kabul edilir. Ancak daha derinlemesine bir inceleme yapıldığında, bu yaklaşımın yalnızca ilk bir tahmin olduğu ve daha gerçekçi bir modelin, sistemin geçmişine dair bir hafızayı (en azından bir kısmını) içermesi gerektiği anlaşılır. Hatta bazı sistemlerin geçmişle ilişkisiz olduğu varsayımı, modelin anlamını kaybettirir. Bu nedenle, sapma argümanlı diferensiyel denklemlerin teorik olarak incelenmesi kaçınılmaz bir durumdur. Diferensiyel denklemlerde sapma argümanlarının bu özellikleri uzun zamandır bilinse de, ilgili teorinin detaylı olarak geliştirilmesi son yıllarda gerçekleşmiştir. (Hale, 1977).

Zaman gecikmeli sistemler teorisi, son dönemlerde büyük bir ilgiyle incelenmektedir ve bilimsel alanlardaki uygulamaları göz önünde bulundurulduğunda, uygulamalı matematiğin önemli bir dalını oluşturur. Fonksiyonel diferensiyel denklemler (sapma argümentli diferensiyel denklemler) ile tanımlanan bu alan, bağımlı değişken ve türevlerinin bağımsız değişkenin farklı değerlerine bağlı olarak ortaya çıktığı problemlere odaklanır. Bu tür denklemlerin, XVIII. yüzyılın başlarından itibaren Johann Bernoulli ve Leonhard Euler gibi öncü matematikçiler tarafından incelendiği bilinmektedir.

Diferensiyel denklemlerde kalitatif teori, denklemin açık çözümlerini bulmadan çözümlerin özelliklerinin incelenmesini ifade eder. Bir adi diferensiyel denklemin analitik çözümlerini elde etmek genellikle mümkün değildir. Bunun yanı sıra, fonksiyonel diferensiyel denklemler, kısmi diferensiyel denklemler, fraksiyonel (kesirli mertebeden) diferensiyel denklemler ve integro-diferensiyel denklemler gibi denklemlerin çözümlerinin bulunması daha karmaşık sorunları gündeme getirmektedir. Bu nedenle, çözüm analitik olarak bulunamadığında, çözümlerin davranışları hakkında bilgi edinmek, uygulamalarda oldukça önemlidir. Salınım

teorisi de, denklemleri bu yöntemle inceleyerek, sonsuzun bir komşuluğunda çözümlerin davranışları hakkında bilgi sağlamak açısından bu alanda önemli bir yer tutar.

Salınım teorisinin ortaya çıkışı, Sturm'un diferensiyel denklemlerin çözümlerinin özelliklerini (örneğin sıfır noktalarının sayısı, sıfır noktaları arasındaki uzaklık, çözümün işaret değişiklikleri, çözümün sınırlılığı, sıfırların kümesinin üst sınırının olup olmaması vb.) çözümün kendisinden ziyade doğrudan denklemin kendisinden türetme fikriyle başlamıştır. Sturm, bu yaklaşımı ikinci mertebeden lineer denklemler üzerinde yaptığı çalışmasıyla geliştirmiştir. Bu fikir, günümüzde fonksiyonel, kısmi, kesirli mertebeden diferensiyel denklemler ve integro-diferensiyel denklemler gibi uygulamalı matematiğin neredeyse tüm alanlarında uygulanmakta olup, bu konular giderek artan bir ilgiyle araştırılmaktadır. (Hale, 1977).

Bu tez çalışmasında, benzer bir yaklaşımla tek mertebeden neutral

$$(x(t) + p(t)x(\tau(t)))^{(n)} + \int_a^b q(t, \mu)x^\beta(\phi(t, \mu))d\mu = 0, \quad (1.0.1)$$

fonksiyonel diferensiyel denklemi göz önüne alınacaktır.

Tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, çalışılan konuya dair genel bilgiler sunulmuştur. İkinci bölümde ise, öncelikle fonksiyonel diferensiyel denklemlerin tanımı ve sınıflandırması yapılmış ardından, tek mertebeden neutral diferensiyel denklemler için salınım sonuçları sunulmuştur. Son olarak, neutral denklemlerin salınımlılığıyla ilgili literatürde yer alan ve çalışmamıza yön veren önemli bazı sonuçlar özetlenmiştir.

Üçüncü bölüm, tez çalışmasının ana bulgularına odaklanmaktadır. İlk olarak, ele alınan problem tanıtılmış ve ilgili denklemlerde yer alan fonksiyonların hangi varsayımlar altında tanımlandığı açıklanmıştır. Ardından, sonuçların ispatında kullanılan bazı öncül lemmaların ispatları sunulmuştur. Son olarak, söz konusu neutral denklemin tüm çözümlerinin salınımlı olmasını sağlayan yeterli koşullar, ispatlarıyla birlikte verilmiştir. Elde edilen sonuçların uygulanabilirliği ve çok yönlülüğü, örneklerle desteklenerek açıklanmıştır.

Dördüncü (son) bölümde, üçüncü bölümde elde edilen sonuçlardan farklı olarak, neutral diferensiyel denklemler üzerine yapılabilecek yeni çalışmalar için birkaç örnek sunulmuş ve çözülmesi gereken açık problemler belirtilmiştir.



2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde, fonksiyonel diferensiyel denklemlerin genel teorisi hakkında tez boyunca kullanılacak genel bilgiler üzerinde durulacaktır. Fonksiyonel diferensiyel denklemlerin tanım ve sınıflandırması yapılarak tek mertebeden neutral diferensiyel denklemler için salınım sonuçları gösterilecektir. Ayrıca fonksiyonel diferensiyel denklemler üzerine literatürde mevcut olan sonuçlar özet olarak sunulacaktır.

2.1. Fonksiyonel Diferensiyel Denklemler

Eğer bir diferensiyel denklemde bağımlı değişken ve türevleri, bağımsız değişkenin (argüment) farklı değerlerine bağlı olarak ortaya çıkıyorsa bu tür denklemlere sapma argümentli diferensiyel denklemler (differential equations with deviating arguments) veya fonksiyonel diferensiyel denklemler (functional differential equations) denir (Zafer, 1992).

Sapma argümentli diferensiyel denklemler, birçok fiziksel, biyolojik ve mühendislik problemlerinde karşımıza çıkar. Örneğin, bir biyolojik popülasyon modelinde, popülasyonun büyüme hızının yalnızca anlık durumuna değil, geçmişteki büyüme hızlarına da bağlı olabileceği durumlar olabilir. Bu tür denklemlerle çalışmak, zamanla değişen süreçlerdeki gecikme, bellek etkisi veya tarihsel bağımlılıkları modellemek için oldukça kullanışlıdır (Kolmanovskii ve Myshkis, 1999).

Doğa bilimlerinde ortaya çıkan problemlere matematiksel model olarak bir adi ya da kısmi diferensiyel denklem karşılık gelir ve uygulamalarda ortaya çıkan bir çok sistemin matematik modeli oluşturulurken, sistemin gelecekteki davranışının geçmişten bağımsız olarak, bağımsız değişkenin tek bir değerine bağlı biçimde ortaya çıktığı varsayılır. Buna karşılık, daha rafine bir analiz yapılırsa, bu fikrin gerçek duruma sadece bir ilk yaklaşım olduğu ve bir sisteme karşılık gelecek modelin daha gerçekçi olması için, geçmiş hafızayı da (en azından belirli bir kısmını) içermesinin gerekli olduğu ortaya çıkar. Üstelik bazı problemlere karşılık gelen sistemlerin geçmişle bağının olmadığını düşünmek modeli anlamsız hale getirir. Bu yüzden de sapma argümentli diferensiyel denklemlerin teorik olarak incelenmesi kaçınılmazdır. Diferensiyel denklemlerde sapma argümentlerinin bu özellikleri uzun süredir biliniyor

olmasına rağmen, ilgili teoremin ayrıntılı olarak geliştirilmesi son yıllarda gerçekleşmiştir.

Bir fonksiyonel diferensiyel denklemde bağımlı değişkenin en yüksek mertebeden türevi, bağımsız değişkenin (argüment) sadece bir değerine bağlı ve en yüksek mertebeden türevde görülen bu argüment, denklemde görülen diğer tüm argümentlerden daha küçük değilse, bu denklemlere gecikmeli (delay, retarded) diferensiyel denklem denir (Zafer, 1992).

$$x''(t) + \frac{2t^3 - 4}{e^t + t}x'(t - 11) + \sin tx(t - e) = 0$$

ve

$$x'''(t) + 5x''(t - 4) + \sqrt{t^3}x(t - 3\pi) = e^{3t} \ln 2t$$

denklemleri $t > 0$ için birer gecikmeli diferensiyel denklemdir.

Gecikmeli diferensiyel denklemler, sistemin anlık durumunun yanı sıra geçmişteki durumlarına da dayanarak evrim gösterdiği durumları modellemek için kullanılır. Özellikle biyolojik, mühendislik ve fiziksel sistemlerde, bir değişkenin gelecekteki değeri, geçmişteki bazı değerlerden etkilenebilir. Bu tür denklemler, sistemin dinamiğini daha doğru bir şekilde temsil etmek için önemlidir. Örnek olarak, bir popülasyon dinamiği modelinde, bir türün üremesi sadece mevcut popülasyona değil, örneğin, beslenme durumuna veya çevresel faktörlere bağlı olarak, geçmişteki popülasyona da bağlı olabilir (El'sgol'ts ve Norkin, 1973; Hale, 1977; Kolmanovskii ve Myshkis, 1999).

Bir fonksiyonel diferensiyel denklemde bağımlı değişkenin en yüksek mertebeden türevi, bağımsız değişkenin (argüment) sadece bir değerine bağlı ve en yüksek mertebeden türevde görülen bu argüment, denklemde görülen diğer tüm argümentlerden daha büyük değilse, bu tür denklemlere ileri tipten (advanced) diferensiyel denklem denir (Zafer, 1992).

$$x'''(t) = x''(3t) + \frac{t}{2 + t^4}x\left(t + \frac{3}{91}\right) - \sin t$$

ve

$$x'''(t) = x' \left(t + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{e^t}{t^{1/5}} x(t + 5\pi) - t^4 - 3t + 11$$

denklemleri $t > 0$ için birer ileri tipten diferensiyel denklemdir.

Bu tür denklemler, geleneksel diferensiyel denklemlerden (örneğin, klasik diferensiyel denklemler) farklı olarak, çözüm süreçlerinde daha fazla "geçmişten geleceğe" bir modelleme yaparak, gelecekteki olası durumları tahmin etmeye yönelik güçlü bir araç sağlar.

Bir fonksiyonel diferensiyel denklemde bağımlı değişkenin en yüksek mertebeden türevi, bağımsız değişkenin (argüment) sadece bir değerine bağlı ise ve denklem, en yüksek mertebeden türevde görülen bu argümentten daha küçük ve daha büyük argümentler içeriyorsa, bu tip denklemlere karma tipten (mixed) diferensiyel denklem denir (Zafer, 1992).

$$x'''(t) = (\sin t)x(t/7) - 21x(t + 2\pi) + \sqrt{t}$$

ve

$$x^{(5)}(t) = (t + 3)x'(t - 12) + (\ln t)x'(t + 2\sqrt{3})$$

denklemleri $t > 0$ için birer karma diferensiyel denklemdir.

Karma (mixed) tip diferensiyel denklemler, geçmiş ve geleceğe dair verileri içeren denklemler olarak önemli bir yere sahiptir. Bu tür denklemler, fiziksel, biyolojik, ekonomik ve mühendisliksel sistemlerin karmaşık dinamiklerini modellemek için geniş bir uygulama yelpazesi sunar. Örneğin biyolojik modellerde, popülasyon büyüklüğü geçmiş (geçmişteki doğum ve ölüm oranları) ve gelecekteki (gelecekteki çevresel değişiklikler) verilerin birleştirilerek modelleme yapılabilir. Yine karma tip diferensiyel denklemler, ekonomik verilerin geçmiş ve gelecekteki etkileriyle sistemlerin nasıl evrileceğini modellemek için kullanılabilir. Örneğin, bir yatırım portföyünün performansı, geçmiş yatırım kararları ve gelecekteki ekonomik tahminler

üzerinden hesaplanabilir (Edelstein-Keshet, 2005; El'sgol'ts ve Norkin, 1973; Hale, 1977; Kolmanovskii ve Myshkis, 1999).

Bir fonksiyonel diferensiyel denklemde bağımlı değişkenin en yüksek mertebeden türevi, hem sapma argümentine bağlı hem de sapma argümentine bağlı olmadan ortaya çıkıyorsa, bu tür denklemlere nötral veya neutral diferensiyel denklem denir (Zafer, 1992).

$$x'''(t) + \frac{5}{t^3}x'''(t/2) = x(t - \pi) + \cosh t$$

ve

$$x''(t) + (t^3 + t)x''(t + 3\pi) + x(t - \pi^2) = 2t^3 - 5t - 1$$

denklemleri $t > 0$ için birer neutral diferensiyel denklemdir.

Neutral diferensiyel denklemler sistemlerin karmaşık davranışlarını modellemek için güçlü bir araçtır. Bu tür denklemler, bir sistemin geçmiş ve gelecekteki dinamiklerinin birbirini nasıl etkileyebileceğini araştırırken kullanılır. Özellikle, farklı zaman dilimlerinde etkileşimlerin olduğu, yani bir sistemin geçmiş ve gelecekteki durumu arasındaki etkileşimin önemli olduğu durumlar için uygundur. Dalga hareketlerinin, çevre koşullarının etkisiyle zaman içinde evrimini modellemek için nötral diferensiyel denklemler kullanılır. Örneğin, bir su dalgasının yayılması, hem geçmişteki dalga yüksekliği hem de gelecekteki çevresel faktörlerden etkilenebilir. Bir başka açıdan ekonomik sistemlerdeki karmaşık dinamikler, geçmiş piyasa verileri ve gelecekteki ekonomik tahminlerle modellenebilir. Özellikle finansal piyasalarda, yatırım kararları geçmiş verilere ve gelecekteki eğilimlere dayalı olarak alınır (El'sgol'ts ve Norkin, 1973; Hale, 1977; Kolmanovskii ve Myshkis, 1999).

2.2. Tek Mertebeden Neutral Diferensiyel Denklemlerle İlgili Salınım Sonuçları

Bu kısımda, tek mertebeden diferensiyel denklemler üzerine literatürde mevcut olan bazı önemli salınım sonuçları tanıtılacaktır. Genel olarak bir diferensiyel denklemin aşikar olmayan bir çözümünün sıfırlarının kümesi üstten sınırlı değilse, yani bu aşikar olmayan çözüm keyfi sayıda yeterince büyük sıfır yerlerine sahipse, bu çözüme salınımlı çözüm, aksi takdirde salınımsız çözüm adı verilir. Eğer bir diferensiyel denklemin bütün çözümleri salınım yapıyorsa bu denklemin kendisine salınımlı denklemdir (Agarwal ve ark., 2004).

Tang, Li, Agarwal ve Bohner, tek mertebeden ileri tipten

$$\left(r(t) \left(x^{(n-1)}(t) \right)^\alpha \right)' + q(t) x^\beta(\tau(t)) = 0 \quad (2.2.1)$$

diferensiyel denkleminin salınımlılığı ve asimptotik davranışı için,

(i) α ve β sayıları, iki pozitif tek tam sayının oranı ve $\beta \geq \alpha$;

(ii) $r : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, pozitif değerli sürekli türevlenebilir bir fonksiyon ve

$$\int_{t_0}^{\infty} r^{-1/\alpha}(s) ds < \infty, \quad r'(t) \geq 0;$$

(iii) $q, \tau : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar, $q(t) > 0$, $\tau(t) > t$ ve τ azalmayan bir fonksiyon;

şartları altında aşağıdaki salınım sonuçlarını elde etmiştir (Tang ve ark., 2012).

Teorem 2.2.1. $n \geq 3$ bir tek sayı olsun ve

$$\int_{t_0}^{\infty} \eta^{n-2} \left[\frac{1}{r(\eta)} \int_{\eta}^{\infty} q(s) ds \right]^{1/\alpha} d\eta = \infty \quad (2.2.2)$$

sağlansın. Ayrıca, $\lambda_0 \in (0, 1)$ sabiti için birinci mertebeden

$$y'(t) + q(t) \left(\frac{\lambda_0 \delta^{n-1}(t)}{(n-1)! r^{1/\alpha}(\delta(t))} \right)^\beta y^{\beta/\alpha}(\delta(t)) = 0$$

diferensiyel denklemi salınımlı olacak şekilde, $\delta(t) < t$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = \infty$ şartlarını sağlayan, azalmayan, sürekli bir $\delta : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu var olsun. Eğer,

$$\psi(t) := \int_t^\infty r^{-1/\alpha}(s)ds$$

olmak üzere, $\lambda_1 \in (0, 1)$ sabiti için, birinci mertebeden

$$z'(t) - q(t) \left(\frac{\lambda_1}{(n-2)!} \tau^{n-2}(t) \psi(\tau(t)) \right)^\beta z^{\beta/\alpha}(\tau(t)) = 0$$

diferensiyel denklemi salınımlı ise, bu takdirde (2.2.1) denkleminin her $x(t)$ çözümü ya salınımlıdır ya da $t \rightarrow \infty$ iken asimptotik olarak sifıra yakınsar (Tang ve ark., 2012).

Sonuç 2.2.2. $n \geq 3$ bir tek sayı ve $\alpha = \beta$ olsun. Ayrıca (2.2.2) sağlansın ve

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{\delta(t)}^t \frac{q(s) (\delta^{n-1}(s))^\alpha}{r(\delta(s))} ds > \frac{((n-1)!)^\alpha}{e}$$

olacak şekilde, $\delta(t) < t$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = \infty$ şartlarını sağlayan, azalmayan, sürekli bir $\delta : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu var olsun. Eğer,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_t^{\tau(t)} q(s) (\tau^{n-2}(s) \psi(\tau(s)))^\alpha ds > \frac{((n-2)!)^\alpha}{e}$$

sağlanıyorsa, bu takdirde (2.2.1) denkleminin her $x(t)$ çözümü ya salınımlıdır ya da $t \rightarrow \infty$ iken asimptotik olarak sifıra yakınsar (Tang ve ark., 2012).

Sonuç 2.2.3. $n \geq 3$ bir tek sayı ve $\alpha < \beta$ olsun. Ayrıca (2.2.2) sağlansın, $\delta(t) < t$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = \infty$ şartlarını sağlayan, azalmayan, sürekli türevlenebilir bir $\delta : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu var olsun. Dahası,

$$\varphi'(t) > 0 \text{ ve } \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \infty,$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi'(\delta(t)) \delta'(t)}{\varphi'(t)} < \frac{\alpha}{\beta}$$

ve

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{q(t) \left(\frac{\delta^{n-1}(t)}{r^{1/\alpha}(\delta(t))} \right)^\beta e^{-\varphi(t)}}{\varphi'(t)} > 0$$

olacak şekilde sürekli türevlenebilir bir $\varphi : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu var olsun. Eğer,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_t^{\tau(t)} q(s) \left(\tau^{n-2}(s) \psi(\tau(s)) \right)^\beta ds > \frac{((n-2)!)^\beta}{e}$$

ya da

$$\int_{t_0}^{\infty} q(s) \left(\tau^{n-2}(s) \psi(\tau(s)) \right)^\beta ds = \infty$$

sağlanıyorsa, bu takdirde (2.2.1) denkleminin her $x(t)$ çözümü ya salınımlıdır ya da $t \rightarrow \infty$ iken asimptotik olarak sıfıra yakınsar (Tang ve ark., 2012).

Örnek 2.2.4. $t \geq 1$ için, üçüncü mertebeden ileri tipten

$$\left(e^t x''(t) \right)' + 4e^{t-2} x(t+1) = 0 \quad (2.2.3)$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım. $\delta(t) = t - 1$ olsun. Sonuç 2.2.2'in bütün şartlarının sağlandığı kolaylıkla gösterilebilir. Bu yüzden de (2.2.3) denkleminin her çözümü ya salınımlıdır ya da $t \rightarrow \infty$ iken asimptotik olarak sıfıra yakınsar. Gerçekten de $x(t) = e^{-2t}$ fonksiyonu, (2.2.3) denkleminin böyle bir çözümüdür (Tang ve ark., 2012).

Şimdi, tek mertebeden neutral diferensiyel denklemler için verilen salınım teoremleri üzerinde duracağız. β pozitif tek tam sayıların bir oranı ve $n \geq 3$ bir tek doğal sayı olmak üzere, tek mertebeden

$$y^{(n)}(t) + q(t)x^\beta(\tau(t)) = 0, \quad t \geq t_0 > 0, \quad (2.2.4)$$

diferensiyel denklemini

$$y(t) = x(t) - p(t)x(\sigma(t))$$

neutral terimi ile birlikte göz önüne alan Grace ve Jadlovská, (2.2.4) denkleminin çözümlerinin kalitatif davranışlarını incelerken,

(ci) $p, q : [t_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ reel değerli sürekli fonksiyonlar ve $0 \leq p(t) < 1$;

(cii) $\sigma, \tau : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ile tanımlı sürekli türevlenebilir fonksiyonlar, $\sigma(t) < t$, $\tau(t) < t$, σ ve τ kesin artan fonksiyonlar ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = \infty;$$

(ciii) $h(t) := \sigma^{-1}(\tau(t)) \leq t$, $h'(t) \geq 0$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$

şartları altında aşağıdaki salınım kriterlerini elde etmiştir (Grace ve Jadlovská, 2018).

Teorem 2.2.5. $(ci) - (ciii)$ şartları sağlansın ve kabul edelim ki $\tau(t) \leq g(t) \leq t$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$ olacak şekilde sürekli türevlenebilir ve artmayan bir $g : [t_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonu var olsun. Eğer bazı $c_1, c_2 \in (0, 1)$ değerleri için, birinci mertebeden

$$X'(t) + \left(\frac{c_1}{(n-1)!} \tau^{n-1}(t) \right)^\beta q(t) X^\beta(\tau(t)) = 0, \quad (2.2.5)$$

$$Y'(t) + \left(\frac{(g(t) - \tau(t))^{n-1}}{(n-1)!} \right)^\beta q(t) Y^\beta(g(t)) = 0 \quad (2.2.6)$$

ve

$$Z'(t) + \left(\frac{c_2}{(n-2)!} h^{n-2}(t) \right)^\beta \left(\int_t^\infty \frac{q(s)}{p^\beta(h(s))} ds \right) Z^\beta(h(t)) = 0, \quad (2.2.7)$$

gecikmeli diferensiyel denklemleri salınımlı ise, (2.2.4) denkleminin bütün çözümleri de salınımlıdır (Grace ve Jadlovská, 2018).

Sonuç 2.2.6. $(ci) - (ciii)$ şartları sağlansın ve $\beta = 1$ olsun. Ayrıca $\tau(t) \leq g(t) \leq t$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$ olacak şekilde sürekli türevlenebilir ve artmayan bir $g : [t_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonu var olsun. Eğer,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{\tau(t)}^t \tau^{n-1}(s) q(s) ds > \frac{(n-1)!}{e}, \quad (2.2.8)$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{g(t)}^t (g(s) - \tau(s))^{n-1} q(s) ds > \frac{(n-1)!}{e} \quad (2.2.9)$$

ve

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{h(t)}^t h^{n-2}(s) \int_s^\infty \frac{q(u)}{p(h(u))} du ds > \frac{(n-2)!}{e} \quad (2.2.10)$$

sağlanıyorsa, (2.2.4) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır (Grace ve Jadlovská, 2018).

Sonuç 2.2.7. $(ci) - (ciii)$ şartları sağlansın ve $\beta \in (0, 1)$ olsun. Ayrıca $\tau(t) \leq g(t) \leq t$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$ olacak şekilde sürekli türevlenebilir ve artmayan bir $g : [t_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonu var olsun. Eğer,

$$\int_{t_0}^\infty \tau^{\beta(n-1)}(s) q(s) ds = \infty, \quad (2.2.11)$$

$$\int_{t_0}^\infty (g(s) - \tau(s))^{\beta(n-1)} q(s) ds = \infty \quad (2.2.12)$$

ve

$$\int_{t_0}^\infty h^{\beta(n-3)} \int_s^\infty \frac{q(u)}{p^\beta(h(u))} du ds = \infty \quad (2.2.13)$$

sağlanıyorsa, (2.2.4) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır (Grace ve Jadlovská, 2018).

Aşağıda, (2.2.4) denklemi için bir diğer salınım sonucu sunulmuştur.

Teorem 2.2.8. $(ci) - (ciii)$ şartları sağlansın ve $\beta \in (0, 1)$ olsun. Eğer,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left(\tau^{\beta(n-1)}(t) \int_t^\infty q(s) ds \right) > \begin{cases} (n-1)!, & \beta = 1 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}, \quad (2.2.14)$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{\tau(t)}^t (\tau(t) - \tau(s))^{\beta(n-1)} q(s) ds > \begin{cases} (n-1)!, & \beta = 1 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (2.2.15)$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{h(t)}^t q(s) \left(\frac{h^{n-2}(s)(h(t) - h(s))}{p(h(s))} \right)^\beta ds > \begin{cases} (n-2)!, & \beta = 1 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (2.2.16)$$

sağlanıyorsa, (2.2.4) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır (Grace ve Jadlovská, 2018).

Örnek 2.2.9. n bir tek doğal sayı, $p \in (0, 1)$ ve $\lambda/\sigma < 1$ olacak biçimde $\lambda, \sigma \in (0, 1)$ için, Euler tipi neutral gecikmeli

$$\left(x(t) - px(\sigma(t)) \right)^{(n)} + \frac{\alpha}{t^n} x(\lambda(t)) = 0, \quad t \geq 1 \quad (2.2.17)$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım. (ci) – (ciii) şartları sağlandığı kolaylıkla gösterilebilir. $g \in (\lambda, 1)$ ve $k \in (\lambda/\sigma, 1)$ için $g(t) \simeq gt$ ve $k(t) \simeq kt$ ile tanımlayalım. Bu takdirde, eğer

$$\lambda^{n-1} \alpha \ln \frac{1}{\lambda} > \frac{(n-1)!}{e},$$

$$(g - \lambda)^{n-1} \alpha \ln \frac{1}{g} > \frac{(n-1)!}{e}$$

ve

$$\frac{\alpha}{p} \left(\frac{\lambda}{\sigma} \right)^{n-2} \ln \frac{\sigma}{\lambda} > \frac{(n-1)(n-2)!}{e}$$

sağlanıyorsa, Sonuç 2.2.6'dan, (2.2.17) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır (Grace ve Jadlovská, 2018).

Diğer taraftan, A. Muhib, I. Dassios, D. Baleanu, S. S. Santra ve O. Moaaz, tek mertebeden neutral diferensiyel denklemlerin salınım ve asimptotik davranışını araştırırken, $n \geq 3$ olmak üzere, ileri tipten

$$\left(a(t) \left(\psi^{(n-1)}(t) \right)^\kappa \right)' + q(t) f(\psi(\phi(t))) = 0 \quad (2.2.18)$$

fonksiyonel diferensiyel denklemini ve $\vartheta(t) = \psi(t) + p(t)\psi(\tau(t))$ ile tanımlı olmak üzere, neutral tipten

$$\left(a(t) \left(\vartheta^{(n-1)}(t) \right)^\kappa \right)' + q(t) f(\psi(\phi(t))) = 0 \quad (2.2.19)$$

diferensiyel denklemini

(m1) κ tek tam sayıların bir oranı;

(m2) $q, p : [t_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ile tanımlı sürekli fonksiyonlar ve $0 \leq p(t) < 1$;

(m3) $a, \tau, \phi : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ile tanımlı sürekli türevlenebilir fonksiyonlar, $a(t) > 0$,
 $a'(t) > 0$, $\tau(t) \leq t \leq \phi(t)$ ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = \infty;$$

(m4) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ile tanımlı sürekli bir fonksiyon, k bir reel sabit olmak üzere
 $f(\psi) \geq k\psi^\kappa$ ve

$$t \rightarrow \infty \text{ iken } \pi(t) := \int_{t_0}^t \frac{1}{a^{1/\kappa}(s)} ds \rightarrow \infty$$

şartları altında incelemiş ve aşağıdaki sonuçları elde etmiştir (Muhib ve ark., 2021).
 Burada yazımda kolaylık olması açısından, $\{h_m(t)\}_{m=0}^\infty$ sürekli fonksiyonların bir dizisi olmak üzere

$$h_0(t) = k\Psi(t), \quad k \in (0, 1) \text{ bir sabit}$$

$$h_{m+1}(t) = h_0(t) + \frac{\kappa k}{(n-2)!} \int_t^\infty h_m^{(\kappa+1)/\kappa}(s) \frac{s^{n-2}}{a^{1/\kappa}(s)} ds, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\Psi(t) = \int_t^\infty q(s) \left(\frac{\phi(s)}{s} \right)^{\kappa\delta_0} (1 - p(\phi(s)))^\kappa ds$$

ve

$$\Theta(t) = \frac{k^{1/\kappa}}{a^{1/\kappa}(t)} \left(\int_t^\infty q(s) ds \right)^{1/\kappa}$$

notasyonları kullanılacaktır.

Teorem 2.2.10. Kabul edelim ki

$$\Upsilon(t) = \int_t^\infty q(s) \left(\frac{\phi(s)}{s} \right)^{\kappa\delta_0} ds$$

olmak üzere

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Upsilon(t)} \int_t^\infty \frac{s^{n-2} \Upsilon^{(\kappa+1)/\kappa}(s)}{a^{1/\kappa}(s)} ds > \frac{(n-2)!}{(\kappa+1)^{(\kappa+1)/\kappa}} \quad (2.2.20)$$

ve

$$\int_{t_0}^\infty s^{n-2} \frac{1}{a^{1/\kappa}(s)} \left(\int_s^\infty q(u) du \right)^{1/\kappa} ds = \infty \quad (2.2.21)$$

şartları sağlansın. Bu takdirde (2.2.18) denkleminin her salınımsız $\psi(t)$ çözümü için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$$

kalır (Muhib ve ark., 2021).

Teorem 2.2.11. Eğer

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Psi(t)} \int_t^\infty \frac{s^{n-2} \Psi^{(\kappa+1)/\kappa}(s)}{a^{1/\kappa}(s)} ds > \frac{(n-2)!}{(\kappa+1)^{(\kappa+1)/\kappa}} \quad (2.2.22)$$

ve

$$\int_{t_0}^\infty s^{n-2} \Theta(s) ds = \infty \quad (2.2.23)$$

kalıyorsa, bu takdirde (2.2.19) denkleminin her salınımsız $\psi(t)$ çözümü için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$$

kalır (Muhib ve ark., 2021).

Teorem 2.2.12. Kabul edelim ki $\psi(t)$ fonksiyonu (2.2.19) denkleminin salınımsız bir çözümü olsun ve (2.2.23) sağlansın. Eğer bazı $k \in (0, 1)$ değerleri için

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^\infty q(t) \left(\frac{\phi(t)}{t} \right)^{\kappa \delta_0} \left(1 - p(\phi(t)) \right)^\kappa \\ & \times \exp \left(\frac{k\kappa}{(n-2)!} \int_{t_0}^t h_m^{(1)/\kappa}(s) \frac{s^{n-2}}{a^{1/\kappa}(s)} ds \right) dt = \infty, \quad m = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

ise, bu takdirde

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$$

kalır (Muhib ve ark., 2021).

Teorem 2.2.13. Kabul edelim ki $\psi(t)$ fonksiyonu (2.2.19) denkleminin salınımsız bir çözümü olsun ve (2.2.23) sağlansın. Eğer bazı $k \in (0, 1)$ ve $h_m(t)$ değerleri için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} k \frac{t^{\kappa(n-1)}}{a(t)} h_m(t) > ((n-1)!)^{\kappa} \quad (2.2.25)$$

ise, bu takdirde

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$$

kalır (Muhib ve ark., 2021).

Örnek 2.2.14. Üçüncü mertebeden

$$(t(\psi''(t))^3)' + \frac{q_0}{t^6} \psi^3(2t) = 0 \quad (2.2.26)$$

ile verilen diferensiyel denklem, $q_0 > \frac{625}{256}$ için Teorem 2.2.10'in bütün şartlarını sağladığından, $q_0 > \frac{625}{256}$ için (2.2.26) denkleminin her salınımsız çözümü asimptotik olarak sifıra yakınsar (Muhib ve ark., 2021).

Örnek 2.2.15. p_0 ve q_0 reel sabitler, $q_0 > 0$, $\lambda \in (0, 1)$ ve $\varpi \geq 1$ olmak üzere

$$\left(t^{1/3} ((\psi(t) + p_0 \psi(\lambda t))'')^{1/3} \right)' + \frac{q_0}{t^{4/3}} \psi^{1/3}(\varpi t) = 0 \quad (2.2.27)$$

ile verilen üçüncü mertebeden neutral diferensiyel denklem, Teorem 2.2.11'in bütün şartlarını sağladığından, (2.2.27) denkleminin her salınımsız çözümü $t \rightarrow \infty$ iken asimptotik olarak sifıra yakınsar (Muhib ve ark., 2021).

3. SALINIM TEOREMLERİ

3.1. Tek Mertebeden Dağılımlı Sapma Argümentli Neutral Diferensiyel Denklemler İçin Salınım Sonuçları

Bu bölümde, $t \geq t_0 > 0$, $0 < a < b < \infty$, $n \geq 3$ bir tek doğal sayı, β pozitif tek tam sayıların bir oranı ve $0 < \beta \leq 1$ olmak üzere, tek mertebeden dağılımlı sapma argümentli neutral

$$(x(t) + p(t)x(\tau(t)))^{(n)} + \int_a^b q(t, \mu)x^\beta(\phi(t, \mu))d\mu = 0, \quad (3.1.1)$$

diferensiyel denklemi göz önüne alınacaktır. Bu bölüm boyunca, tekrar belirtmeye ihtiyaç duymaksızın

- (i) $p : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon, $p(t) \geq 1$ ve yeterince büyük t değerleri için $p(t) \neq 1$;
- (ii) $q : [t_0, \infty) \times [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ sürekli ve $[t_u, \infty) \times [a, b]$, $t_u \geq t_0$ formundaki herhangi bir aralık üzerinde $q(t, \mu)$ özdeş olarak sıfır olmayan bir fonksiyon;
- (iii) $\tau : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve kesin artan bir fonksiyon, $t \geq \tau(t)$ ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = \infty;$$

- (iv) $\phi : [t_0, \infty) \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve ikinci değişkenine göre artmayan bir fonksiyon ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, \mu) = \infty, \quad \mu \in [a, b].$$

şartlarının sağlandığı kabul edilecektir.

(3.1.1) neutral diferensiyel denkleminin bir çözümü ile, $t_x \in [t_0, +\infty)$ olmak üzere $[t_x, +\infty)$ üzerinde $x(t) + p(t)x(\tau(t)) \in C^n([t_x, \infty), \mathbb{R})$ özelliğine sahip ve (3.1.1) denklemini sağlayan sürekli bir $x : [t_x, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu anlaşılmalıdır. Ayrıca, (3.1.1) denkleminin göz önüne alınan her $x(t)$ çözümünün sağa doğru sürdürülebilir ve aşık olmaya bir çözüm olduğu, yani $x(t)$ çözümünün bütün $[t_x, \infty)$ aralığında

tanımlı ve

$$\sup\{|x(t)| : t \geq T\} > 0, \quad \text{her } T \geq t_x \text{ için}$$

olduğu kabul edilecektir.

(3.1.1) denkleminin bu şekildeki aşıkâr olmayan bir $x(t)$ çözümü, eğer $[t_x, \infty)$ aralığında keyfî sayıda yeterince büyük sıfırlara sahip ise, yani her bir $t_1 \in [t_x, \infty)$ için $x(t_2) = 0$ olacak şekilde bir $t_2 \geq t_1$ varsa bu çözüme salınımlı çözüm denir. Aksi taktirde salınımsız çözüm adını alır. Diğer bir deyişle $x(t)$ çözümü nihai olarak tek işaretli ise bu çözüme salınımsız çözüm denir. Eğer (3.1.1) denkleminin bütün çözümleri salınımlı ise denklemin kendisine salınımlıdır (salınımlı denklem) adı verilir.

Neutral diferensiyel denklemler, bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebeden türevinin, hem sapma argümentine bağlı olmadan hem de bir veya daha fazla gecikmeli ya da ileri tipten sapma argümentiyle denklemde yer aldığı diferensiyel denklemlerdir. Birçok bilimsel kaynağın (örn., (Györi ve Ladas, 1991) monografide belirtildiği gibi) ifade ettiği üzere, bu tür denklemler teorik önemlerinin yanı sıra doğa bilimleri ve teknoloji alanlarında birçok uygulama alanına sahiptir. Örneğin, kayıpsız iletim hatları içeren ağlarda (kayıpsız iletim hatlarının anahtar devreleri birbirine bağlamak için kullanıldığı yüksek hızlı bilgisayarlarda olduğu gibi), elastik bir çubuğa bağlı titreşen kütlelerin incelenmesinde ve bazı varyasyon problemlerinde Euler denklemi olarak ortaya çıkarlar. Neutral diferensiyel denklemlerin geniş uygulama alanlarını ayrıntılı olarak incelemek için Hale'in monografisine başvurulabilir (Hale, 1977).

İlgili literatür gözden geçirilirse, dağılımlı sapma argümanları içermeyen üçüncü veya daha yüksek tek mertebeden neutral diferensiyel denklemlerin farklı sınıfları için çözümlerin salınımlı davranışının birçok matematikçinin dikkatini çektiği ve birçok ilginç sonuç sunulduğu ortaya çıkmaktadır. Bu konu üzerine yapılan bazı tipik sonuçlar için (Baculiková ve Džurina, 2010, 2012; Chatzarakis ve ark., 2019a,b; Das, 1994; Džurina J., Grace S. R. ve Jadlovská I.; Z. Došlá ve Liška P., 2016; Grace ve ark., 2012; Grace ve ark., 2019; Graef ve ark., 2017; Grace ve Jadlovská, 2018;

Graef ve ark., 2002; Graef J. R., I. Jadlovská ve E. Tunç; Li T. ve Rogovchenko Yu. V., 2014; Li ve Thandapani, 2011; Mihalíková ve Kostiková, 2009; Saker ve Graef, 2012; Sun ve Hassan, 2015; Şahin, 2025; Thandapani ve ark., 2014; Tunç ve ark., 2021) çalışmaları ve bu çalışmalarda bulunan kitap ve makaleler okuyucuya kaynak olabilir.

Ancak, dağılımlı sapma argümanlarına sahip üçüncü veya daha yüksek tek mertebeden neutral diferensiyel denklemlerin farklı sınıflarına ait çözümlerin salınım davranışı üzerine nispeten daha az sayıda çalışma yapılmıştır, ve konu üzerindeki çalışmaların çoğu sınırlı neutral katsayılı denklemlere odaklanmıştır. Yani $-1 < p_0 \leq p(t) \leq 0$, $0 \leq p(t) \leq p_0 < 1$, ve/veya $0 \leq p(t) \leq p_0 < \infty$ durumları dikkate alınarak (bkz. (Candan, 2010; Grace ve ark., 2016; Hassan ve Grace, 2014; Qin ve ark., 2013; Tian ve ark., 2015; Zhang ve ark., 2012) makaleleri) salınım sonuçları elde edilmiştir. Neutral katsayı fonksiyonunun üstten sınırsız olduğu diferansiyel denklemler hakkında ise çok az çalışma yayınlanmıştır, bkz. üçüncü mertebeden diferansiyel denklemler için (Sun ve Zhao, 2019; Sun ve ark., 2022; Tunç, 2017).

Bildiğimiz kadarıyla, (3.1.1) tipindeki üstten sınırsız neutral katsayı fonksiyonları içeren tek mertebeden ($n > 3$) diferensiyel denklemler için, yani $t \rightarrow \infty$ iken $p(t) \rightarrow \infty$ durumu için hiçbir salınım sonucunun olmadığı görünmektedir. Literatürdeki bu boşluğun motivasyonu, tez çalışmamızın amacı (3.1.1) denkleminin salınım davranışının çalışmasını başlatmak ve yalnızca $t \rightarrow \infty$ iken $p(t) \rightarrow \infty$ durumuna değil, aynı zamanda $p(t)$ 'nin sınırlı bir fonksiyon olduğu durumda da uygulanabilecek yeni sonuçlar elde etmektir. Burada ele alınan denklem nispeten basit olduğundan, burada elde edilen sonuçları daha genel salınım sonuçları elde etmek için sınırsız neutral katsayılı daha genel diferensiyel denklemlere genişletmek mümkündür. Bu nedenle, mevcut çalışmanın sınırsız neutral katsayılı ve dağılımlı sapma argümanlarına sahip tek mertebeden diferensiyel denklemler için salınım teorisindeki boşluğu kısmen dolduracağı umulmaktadır.

Okuyucuya kolaylık olması açısından, τ^{-1} ifadesi τ 'nın ters fonksiyonunu göstermek üzere, $\kappa \in (0, 1)$ için

$$z(t) := x(t) + p(t)x(\tau(t)),$$

$$\phi_1(t) := \phi(t, b), \quad \phi_2(t) := \phi(t, a), \quad (\delta'(t))_+ := \max(0, \delta'(t)),$$

$$g(t) := \tau^{-1}(\phi_1(t)), \quad h(t) := \tau^{-1}(\phi_2(t)), \quad \xi(t) := \tau^{-1}(\eta(t)), \quad \eta \in C([t_0, \infty)),$$

$$p_1(t) := \frac{1}{p(\tau^{-1}(t))} \left[1 - \left(\frac{\tau^{-1}(\tau^{-1}(t))}{\tau^{-1}(t)} \right)^{(n-1)/\kappa} \frac{1}{p(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t)))} \right],$$

$$p_2(t) := \frac{1}{p(\tau^{-1}(t))} \left[1 - \frac{1}{p(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t)))} \right],$$

$$q_1(t) := \int_a^b q(t, \mu) p_1(\phi(t, \mu)) d\mu, \quad \text{ve} \quad q_2(t) := \int_a^b q(t, \mu) p_2(\phi(t, \mu)) d\mu$$

notasyonları kullanılacaktır.

Ana sonuçların ispatında kullanılacak olan

(v) öyle bir $t_\kappa \geq t_0$ noktası ve $\kappa \in (0, 1)$ sabiti vardır ki, her $t \geq t_\kappa$ için

$$\left(\frac{t}{\tau(t)} \right)^{(n-1)/\kappa} \frac{1}{p(t)} \leq 1 \tag{3.1.2}$$

sağlanır;

ek hipotezine ihtiyaç duyulmaktadır. Ayrıca (v) hipotezindeki (3.1.2) şartının $p_1(t)$ fonksiyonunun negatif olmamasını garanti ettiğine dikkat edilmelidir.

Tez çalışması boyunca, tüm fonksiyonel eşitsizliklerin yeterince büyük her t için geçerli olduğu kabul edilecektir. Ayrıca genellikle ödün vermeden, eğer $x(t)$ fonksiyonu (3.1.1) denkleminin bir çözümüyse, $-x(t)$ fonksiyonu da bir çözüm olduğundan, (3.1.1) denkleminin yalnızca pozitif çözümleriyle ilgilenilecektir.

3.2. Ana Sonuçlar

Ana sonuçlarımızın ispatında kullanılacak olan aşağıdaki yardımcı lemmalarla başlayalım.

Lemma 3.2.1. (Philos, 1984, Lemma 1) $f : [T, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonu n -inci mertebeden sürekli türevlenebilir bir fonksiyon ve $f^{(n)}(t)$ fonksiyonu da $[T, \infty)$ aralığında nonpozitif, ayrıca $T' \geq T$ için $[T', \infty)$ aralığında özdeş olarak sıfır olmayan bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $T^* \geq T'$ olacak şekilde öyle bir $[T^*, \infty)$ aralığı ve $n + \ell$ tek sayı olacak şekilde $[0, n - 1]$ aralığında öyle bir ℓ tam sayısı vardır ki, $t \in [T^*, \infty)$ için

$$\begin{aligned} j = \ell, \dots, n - 1 \text{ olduğunda } (-1)^{\ell+j} f^{(j)}(t) &> 0, \\ i = 1, \dots, \ell - 1 \text{ ve } \ell > 1 \text{ olduğunda } f^{(i)}(t) &> 0 \end{aligned}$$

kalır.

Lemma 3.2.2. (Philos, 1984, Lemma 2) Kabul edelim ki $f(t)$ fonksiyonu Lemma 3.2.1'de olduğu gibi tanımlansın ve $T^* \geq T' \geq t_0$ değerleri de Lemma 3.2.1'de $f(t)$ fonksiyonu için belirlenen değerler olsun. Eğer $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \neq 0$ ise, $0 < \lambda < 1$ olacak biçimdeki her λ sabiti için, öyle bir $T^{**} \geq T^*/\lambda$ vardır ki, her $t \geq T^{**}$ için

$$f(t) \geq \frac{\lambda}{(n-1)!} t^{n-1} f^{(n-1)}(t)$$

sağlanır.

Lemma 3.2.3. (Baculíková ve Dęurina, 2013, Lemma 1) Kabul edelim ki $f(t)$ fonksiyonu $T^* \geq T' \geq t_0$ için Lemma 3.2.1'de olduğu gibi tanımlansın ve $\ell \geq 1$ değeri de Lemma 3.2.1'de $f(t)$ fonksiyonu için belirlenen değer olsun. Bu durumda $T^{**} \geq T^*$ olacak şekilde öyle bir $[T^{**}, \infty)$ aralığı vardır ki, her $\kappa \in (0, 1)$ sabiti ve $t \geq T^{**}$ için

$$\frac{f(t)}{f'(t)} \geq \kappa \frac{t}{\ell} \tag{3.2.1}$$

kalır.

Lemma 3.2.4. Kabul edelim ki $x(t)$ fonksiyonu, her $t \geq t_1 \in [t_0, \infty)$ için (3.1.1) denkleminin nihai pozitif bir çözümü olsun. Bu taktirde her $t \geq t_2$ için

$$z(t) > 0, \quad z'(t) > 0, \quad z''(t) > 0, \quad z^{(n-1)}(t) > 0, \quad z^{(n)}(t) \leq 0, \quad (3.2.2)$$

ya da

$$(-1)^j z^{(j)}(t) > 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad \text{ve} \quad z^{(n)}(t) \leq 0 \quad (3.2.3)$$

olacak şekilde bir $t_2 \geq t_1$ vardır. Ayrıca eğer (3.2.2) sağlanırsa, her $\kappa \in (0, 1)$ sabiti için öyle bir $t_\kappa \geq t_2$ vardır ki

$$\left(\frac{z(t)}{t^{(n-1)/\kappa}} \right)' \leq 0, \quad t \geq t_\kappa \quad (3.2.4)$$

kalır.

İspat. Kabul edelim ki $x(t)$ fonksiyonu (3.1.1) denkleminin salınım yapmayan bir çözümü olsun. Genelliği bozmaksızın, her $t \geq t_1$ için $x(t) > 0$ ve $x(\tau(t)) > 0$ olacak şekilde bir $t_1 \in [t_0, \infty)$ ve $x(\phi(t, \mu)) > 0$ olacak şekilde bir $(t, \mu) \in [t_1, \infty) \times [a, b]$ vardır. Bu durumda $z(t) = x(t) + p(t)x(\tau(t)) > 0$ ve (3.1.1) denkleminde

$$z^{(n)}(t) = - \int_a^b q(t, \mu) x^\beta(\phi(t, \mu)) d\mu \leq 0$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Lemma 3.2.1'den, öyle bir $t_2 \geq t_1$ ve $\ell \in \{0, 2, 4, \dots, n-1\}$ çift tam sayısı vardır ki, her $t \geq t_2$ için

$$j = \ell, \dots, n-1, \quad \text{için} \quad (-1)^{\ell+j} z^{(j)}(t) > 0$$

$$\ell > 1 \quad \text{olduğunda} \quad i = 1, \dots, \ell-1 \quad \text{için} \quad z^{(i)}(t) > 0$$

kalır. Buradan, $\ell \geq 2$ için (3.2.2) ve $\ell \geq 0$ için (3.2.3) ifadeleri elde edilir.

Şimdi, kabul edelim ki her $t \geq t_2$ için (3.2.2) sağlansın. Bu durumda $(n-1) \geq \ell \geq 2$ olduğundan, (3.2.1) göz önüne alınırsa, öyle bir $t_\kappa \geq t_2$ vardır ki her $\kappa \in (0, 1)$ sabiti ve her $t \geq t_\kappa$ için

$$\frac{z(t)}{z'(t)} \geq \kappa \frac{t}{\ell} \geq \kappa \frac{t}{n-1},$$

ve buradan da

$$\left(\frac{z(t)}{t^{(n-1)/\kappa}} \right)' = \frac{\kappa t z'(t) - (n-1)z(t)}{\kappa t^{(n-1)/\kappa+1}} \leq 0 \quad \text{for } t \geq t_\kappa,$$

elde edilir. Yani (3.2.4) sağlanır ve ispat tamamlanır.

3.3. Temel Sonuçlar

Tez çalışmamızın bu bölümünde, (3.1.1) denkleminin bütün çözümlerinin salınımlı olmasını garanti eden bazı yeni teoremler verilecektir.

Teorem 3.3.1. (i)-(v) şartlarının sağlandığını ve her $t \geq t_0$ için $\phi_2(t) \leq \eta(t) \leq \tau(t)$ olacak şekilde sürekli bir $\eta : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun var olduğunu kabul edelim. Eğer,

$$y'(t) + \frac{\lambda_1^\beta}{((n-1)!)^\beta} q_1(t) g^{\beta(n-1)}(t) y^\beta(g(t)) = 0, \quad (3.3.1)$$

ve

$$w'(t) + \frac{1}{((n-1)!)^\beta} q_2(t) [\xi(t) - h(t)]^{\beta(n-1)} w^\beta(\xi(t)) = 0 \quad (3.3.2)$$

birinci mertebeden gecikmeli diferensiyel denklemleri salınımlı olacak şekilde bir $0 < \lambda_1 < 1$ sabiti varsa, bu takdirde (3.1.1) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır.

İspat. Aksine kabul edelim ki $x(t)$ fonksiyonu, (3.1.1) denkleminin salınım yapmayan bir çözümü olsun. Genelliği bozmaksızın, her $t \geq t_1$ için $x(t) > 0$, $x(\tau(t)) > 0$ ve $(t, \mu) \in [t_1, \infty) \times [a, b]$ için $x(\phi(t, \mu)) > 0$ olacak şekilde bir $t_1 \in [t_0, \infty)$ vardır. Bu durumda,

$$z(t) := x(t) + p(t)x(\tau(t))$$

fonksiyonu $t_2 \geq t_1$ olacak biçimdeki her $t \geq t_2$ için (3.2.2) ya da (3.2.3) durumlarından birini sağlar. $z(t)$ 'nin tanımından

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{p(\tau^{-1}(t))} [z(\tau^{-1}(t)) - x(\tau^{-1}(t))] \\ &\geq \frac{z(\tau^{-1}(t))}{p(\tau^{-1}(t))} - \frac{1}{p(\tau^{-1}(t))p(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t)))} z(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t))) \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

olduğu görülür. (iii) şartından, τ 'nın ters fonksiyonu olan τ^{-1} fonksiyonu da artandır, üstelik $t \leq \tau^{-1}(t)$ olduğu görülür. Buradan da,

$$\tau^{-1}(t) \leq \tau^{-1}(\tau^{-1}(t)) \quad (3.3.4)$$

eşitsizliğine varılır.

Önce (3.2.2) durumunu göz önüne alalım. Bu durumda, her $t \geq t_\kappa$ için (3.2.4) sağlanacak şekilde $t_\kappa \in [t_2, \infty)$ vardır. (3.2.4) ve (3.3.4) eşitsizliklerinden

$$z\left(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t))\right) \leq \frac{(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t)))^{(n-1)/\kappa} z(\tau^{-1}(t))}{(\tau^{-1}(t))^{(n-1)/\kappa}} \quad (3.3.5)$$

elde edilir. (3.3.5) ifadesi (3.3.3) içinde kullanılırsa, her $t \geq t_k$ için

$$x(t) \geq p_1(t)z(\tau^{-1}(t)) \quad (3.3.6)$$

elde edilir. $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, \mu) = \infty$ olduğundan, öyle bir $t_3 \geq t_\kappa$ seçilebilir ki her $t \geq t_3$ için $\phi(t, \mu) \geq t_\kappa$ kalır. Bu yüzden de (3.3.6) ifadesinden, her $t \geq t_3$ için

$$x(\phi(t, \mu)) \geq p_1(\phi(t, \mu))z(\tau^{-1}(\phi(t, \mu))),$$

ve dolayısıyla $t_4 \geq t_3$ olacak biçimdeki her $t \geq t_4$ için

$$x^\beta(\phi(t, \mu)) \geq p_1^\beta(\phi(t, \mu))z^\beta(\tau^{-1}(\phi(t, \mu))) \geq p_1(\phi(t, \mu))z^\beta(\tau^{-1}(\phi(t, \mu))) \quad (3.3.7)$$

elde edilir. (3.3.7) eşitsizliği (3.1.1) denklemi içinde kullanılırsa

$$z^{(n)}(t) + \int_a^b q(t, \mu)p_1(\phi(t, \mu))z^\beta(\tau^{-1}(\phi(t, \mu)))d\mu \leq 0 \quad (3.3.8)$$

diferensiyel eşitsizliği elde edilir. $\tau(t)$ ve $z(t)$ fonksiyonları artan ve $\phi(t, \mu)$ fonksiyonu da μ değişkenine göre artmayan olduğundan, (3.3.8) ifadesinden her $t \geq t_4$ için

$$z^{(n)}(t) + \left(\int_a^b q(t, \mu)p_1(\phi(t, \mu))d\mu \right) z^\beta(\tau^{-1}(\phi_1(t))) \leq 0,$$

ya da

$$z^{(n)}(t) + q_1(t)z^\beta(g(t)) \leq 0 \quad (3.3.9)$$

yazılabilir. $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) \neq 0$ olduğundan, Lemma 3.2.2 kullanılırsa, her $\lambda \in (0, 1)$ için, öyle bir $t_\lambda \geq t_4$ vardır ki

$$z(t) \geq \frac{\lambda}{(n-1)!} t^{n-1} z^{(n-1)}(t), \quad t \geq t_\lambda \text{ için} \quad (3.3.10)$$

kalır. $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$ olduğundan, her $t \geq t_5$ için $g(t) \geq t_\lambda$ olacak şekilde $t_5 \geq t_\lambda$ seçilebilir. Dolayısıyla, (3.3.10) eşitsizliğinden, her $t \geq t_5$ için

$$z(g(t)) \geq \frac{\lambda}{(n-1)!} g^{n-1}(t) z^{(n-1)}(g(t)) \quad (3.3.11)$$

yazılabilir. (3.3.11) eşitsizliği (3.3.9) içinde kullanılırsa, her $t \geq t_5$ için

$$z^{(n)}(t) + \left(\frac{\lambda}{(n-1)!} \right)^\beta q_1(t) g^{\beta(n-1)}(t) \left(z^{(n-1)}(g(t)) \right)^\beta \leq 0 \quad (3.3.12)$$

sonucuna varılır. (3.3.12) ifadesinde $y(t) = z^{(n-1)}(t)$ olarak tanımlanırsa, $y(t)$ fonksiyonunun her $\lambda \in (0, 1)$ için, birinci mertebeden

$$y'(t) + \frac{\lambda^\beta}{((n-1)!)^\beta} q_1(t) g^{\beta(n-1)}(t) y^\beta(g(t)) \leq 0 \quad (3.3.13)$$

gecikmeli diferensiyel eşitsizliğinin pozitif bir çözümü olduğu görülür. Bu yüzden de (Philos, 1981, Theorem 1) kullanılırsa, her $\lambda \in (0, 1)$ için (3.3.1) diferensiyel denklemi de pozitif bir çözüme sahip olur ki, bu da (3.3.1) denkleminin salınlı olması ile çelişir.

Şimdi (3.2.3) durumunu göz önüne alalım. Bu durumda, $z'(t) < 0$ olduğu kullanılırsa, (3.3.4) ifadesinden

$$z(\tau^{-1}(t)) \geq z(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t))) \quad (3.3.14)$$

olduğu görülür. (3.3.14) eşitsizliği (3.3.3) içinde kullanılırsa, her $t \geq t_2$ için

$$x(t) \geq p_2(t) z(\tau^{-1}(t)),$$

ve buradan da, $t_3 \geq t_2$ olacak biçimdeki her $t \geq t_3$ için

$$x^\beta(\phi(t, \mu)) \geq p_2^\beta(\phi(t, \mu))z^\beta(\tau^{-1}(\phi(t, \mu))) \geq p_2(\phi(t, \mu))z^\beta(\tau^{-1}(\phi(t, \mu))), \quad (3.3.15)$$

elde edilir. (3.3.15) ifadesi (3.1.1) denkleminde yerine yazılırsa, her $t \geq t_4$ için

$$z^{(n)}(t) + q_2(t)z^\beta(h(t)) \leq 0 \quad (3.3.16)$$

diferensiyel eşitsizliği sağlanır. $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ için $(-1)^j z^{(j)}(t) > 0$ ve $z^{(n)}(t) \leq 0$ olduğundan, $t_4 \leq u \leq v$ için

$$z(u) \geq \frac{(v-u)^{n-1}}{(n-1)!} z^{(n-1)}(v) \quad (3.3.17)$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. $\phi_2(t) \leq \eta(t)$ ve $\tau(t)$ artan olduğundan, $\tau^{-1}(\phi_2(t)) \leq \tau^{-1}(\eta(t))$, yani $h(t) \leq \xi(t)$ sonucuna varılır. (3.3.17) eşitsizliğinde $u = h(t)$ ve $v = \xi(t)$ dersek, her $t \geq t_4$ için

$$z(h(t)) \geq \frac{(\xi(t) - h(t))^{n-1}}{(n-1)!} z^{(n-1)}(\xi(t)) \quad (3.3.18)$$

elde edilir. (3.3.18) eşitsizliği (3.3.16) ifadesinde kullanılırsa, her $t \geq t_4$ için

$$z^{(n)}(t) + \frac{1}{((n-1)!)^\beta} q_2(t) [\xi(t) - h(t)]^{\beta(n-1)} (z^{(n-1)}(\xi(t)))^\beta \leq 0 \quad (3.3.19)$$

sonucuna varılır. (3.3.16) ifadesinde $w(t) = z^{(n-1)}(t)$ olarak tanımlanırsa, $w(t)$ fonksiyonunun, birinci mertebeden gecikmeli

$$w'(t) + \frac{1}{((n-1)!)^\beta} q_2(t) [\xi(t) - h(t)]^{\beta(n-1)} w^\beta(\xi(t)) \leq 0 \quad (3.3.20)$$

diferensiyel eşitsizliğinin pozitif bir çözümü olduğu görülür. İspatın geri kalan kısmı, (3.2.2) durumunun ispatına tamamen benzer olduğundan ayrıntılara yer verilmemiştir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Birinci mertebeden fonksiyonel diferensiyel denklemlerin salınımı için, iyi bilinmektedir ki, $\psi, \sigma \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$, $\psi(t) \geq 0$, $\sigma(t) < t$, ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = \infty$ olmak üzere, eğer

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{\sigma(t)}^t \psi(s) ds > \frac{1}{e}, \quad (3.3.21)$$

ise

$$x'(t) + \psi(t)x(\sigma(t)) = 0 \quad (3.3.22)$$

denklemini salınımlıdır (Koplatadze ve Chanturiya, 1982). Buna göre, Teorem 3.3.1 kullanılarak aşağıdaki salınım sonucu elde edilir.

Sonuç 3.3.2. (i)-(v) şartlarının sağlandığını, $\beta = 1$ olduğunu ve her $t \geq t_0$ için $\phi_2(t) \leq \eta(t) \leq \tau(t)$ olacak şekilde sürekli bir $\eta : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun var olduğunu kabul edelim. Eğer,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{g(t)}^t q_1(s) g^{n-1}(s) ds > \frac{(n-1)!}{e} \quad (3.3.23)$$

ve

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{\xi(t)}^t q_2(s) [\xi(s) - h(s)]^{n-1} ds > \frac{(n-1)!}{e} \quad (3.3.24)$$

ise, bu taktirde (3.1.1) denklemini salınımlıdır.

İspat. (3.3.23) ifadesinden,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \lambda_1 \int_{g(t)}^t q_1(s) g^{n-1}(s) ds > \frac{(n-1)!}{e}$$

olacak şekilde pozitif bir $\lambda_1 \in (0, 1)$ sabiti seçilebilir. Burada (3.3.21) and (3.3.22) göz önüne alınarak ve Teorem 3.3.1 kullanılarak, Sonuç 3.3.2'in hükümleri direkt olarak elde edilir.

Sonuç 3.3.3. (i)-(v) şartlarının sağlandığını, $\beta < 1$ olduğunu ve her $t \geq t_0$ için $\phi_2(t) \leq \eta(t) \leq \tau(t)$ olacak şekilde sürekli bir $\eta : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun var olduğunu kabul edelim. Eğer,

$$\int_{t_0}^{\infty} q_1(t) g^{\beta(n-1)}(t) dt = \infty \quad (3.3.25)$$

ve

$$\int_{t_0}^{\infty} q_2(t) [\xi(t) - h(t)]^{\beta(n-1)} dt = \infty, \quad (3.3.26)$$

ise, bu taktirde (3.1.1) denklemi salınımlıdır.

İspat. Aksine kabul edelim ki $x(t)$ fonksiyonu, (3.1.1) denkleminin salınım yapmayan bir çözümünü olsun. Genelliği bozmaksızın, her $t \geq t_1$ için $x(t) > 0$, $x(\tau(t)) > 0$ ve $(t, \mu) \in [t_1, \infty) \times [a, b]$ için $x(\phi(t, \mu)) > 0$ olacak şekilde bir $t_1 \in [t_0, \infty)$ vardır. Teorem 3.3.1'in ispatında izlenen yol aynen tekrar edilirse, her $t \geq t_5$ için (3.3.13) ve her $t \geq t_4$ için (3.3.20) ifadelerine ulaşılır. $g(t) < t$ ve $y(t)$ fonksiyonunun da pozitif ve azalan olduğu kullanılırsa, (3.3.13) eşitsizliğinin

$$y'(t) + \frac{\lambda^\beta}{((n-1)!)^\beta} q_1(t) g^{\beta(n-1)}(t) y^\beta(t) \leq 0$$

ya da

$$\frac{y'(t)}{y^\beta(t)} + \frac{\lambda^\beta}{((n-1)!)^\beta} q_1(t) g^{\beta(n-1)}(t) \leq 0 \quad (3.3.27)$$

formunu aldığı görülür. (3.3.27) ifadesi t_5 'ten t 'ye kadar integrallenirse

$$\int_{t_5}^t q_1(s) g^{\beta(n-1)}(s) ds \leq \left(\frac{(n-1)!}{\lambda} \right)^\beta \frac{y^{1-\beta}(t_5)}{1-\beta} < \infty \quad \text{as } t \rightarrow \infty,$$

elde edilir ki bu sonuç (3.3.25) ile çelişir. İspatın geriye kalan kısmı $\xi(t) < t$ olduğu (3.3.20) eşitsizliği kullanılarak kolaylıkla elde edilebilir. Ayrıntılara yer verilmemiştir.

Şimdi, $\phi(t, \mu)$ fonksiyonunun ilk değişkenine yani t 'ye göre azalmayan olduğu kabulü altında, aşağıdaki salınım sonucu verilecektir.

Teorem 3.3.4. Kabul edelim ki (i)-(v) şartları sağlansın, her $t \geq t_0$ için $\phi_2(t) \leq \tau(t)$ ve $\phi(t, \mu)$ fonksiyonu da ilk değişkenine göre azalmayan olsun. Ayrıca kabul edelim ki, her $k > 0$ için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left[\delta(s) q_1(s) \left(\frac{g(s)}{s} \right)^{\beta(n-1)/\kappa} - \frac{(n-2)! k^{1-\beta} ((\delta'(s))_+)^2}{4\lambda\beta s^{\beta(n-1)-1} \delta(s)} \right] ds = \infty, \quad (3.3.28)$$

kalacak şekilde pozitif bir $\delta \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu var olsun ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{h(t)}^t q_2(s) [h(t) - h(s)]^{\beta(n-1)} ds \begin{cases} > (n-1)!, & \text{if } \beta = 1, \\ = \infty, & \text{if } \beta < 1 \end{cases} \quad (3.3.29)$$

sağlansın. Bu taktirde (3.1.1) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır.

İspat. Aksine kabul edelim ki $x(t)$ fonksiyonu, (3.1.1) denkleminin salınım yapmayan bir çözümünü olsun. Genelliği bozmaksızın, her $t \geq t_1$ için $x(t) > 0$, $x(\tau(t)) > 0$ ve $(t, \mu) \in [t_1, \infty) \times [a, b]$ için $x(\phi(t, \mu)) > 0$ olacak şekilde bir $t_1 \in [t_0, \infty)$ vardır. Bu durumda, öyle bir $t_2 \geq t_1$ bulunabilir ki, her $t \geq t_2$ için z fonksiyonu (3.2.2) ya da (3.2.3) durumlarından birini sağlar.

Kabul edelim ki (3.2.2) sağlansın. Teorem 3.3.1'in ispatındaki yol izlenirse, her $t \geq t_4$ için tekrar (3.3.9) ifadesine ulaşılır. Burada, $t \geq t_4$ için

$$w(t) = \delta(t) \frac{z^{(n-1)}(t)}{z^\beta(t)} \quad (3.3.30)$$

ile tanımlı Riccati dönüşümünü tanımlayalım. (3.3.30) eşitliği diferensiyellenir ve (3.3.9) kullanılırsa,

$$w'(t) \leq \frac{(\delta'(t))_+}{\delta(t)} w(t) - \delta(t) q_1(t) \frac{z^\beta(g(t))}{z^\beta(t)} - \beta \delta(t) z^{\beta-1}(t) \frac{z'(t) z^{(n-1)}(t)}{z^{2\beta}(t)} \quad (3.3.31)$$

elde edilir. $\lim_{t \rightarrow \infty} z'(t) \neq 0$ olduğundan, Lemma 3.2.2'den dolayı, $0 < \lambda < 1$ olacak biçimdeki her λ değeri için öyle bir $t_\lambda \geq t_4$ vardır ki, her $t \geq t_\lambda$ için

$$z'(t) \geq \frac{\lambda}{(n-2)!} t^{n-2} z^{(n-1)}(t) \quad (3.3.32)$$

kalır. $z^{(n-1)}(t)$ 'nin $[t_2, \infty)$ üzerinde pozitif ve azalan olduğu kullanılarak, her $t \geq t_3$ için

$$z^{(n-1)}(t) \leq c \quad (3.3.33)$$

kalacak şekilde bir $c > 0$ sabiti ve $t_3 \geq t_2$ vardır. (3.3.33) ifadesi t_3 'den t 'ye kadar $n - 1$ defa ardışık olarak integrallenirse, $t \geq t_4 \in [t_3, \infty)$ ve $k > 0$ için

$$z(t) \leq kt^{n-1} \quad (3.3.34)$$

elde edilir. $z(t)/t^{(n-1)/\kappa}$ artmayan ((3.2.4)'e bkz.) ve $g(t) \leq t$ olduğundan,

$$\frac{z(g(t))}{z(t)} \geq \left(\frac{g(t)}{t} \right)^{(n-1)/\kappa} \quad (3.3.35)$$

elde edilir. (3.3.32), (3.3.34) ve (3.3.35) ifadeleri (3.3.31) içinde kullanılırsa, her $t \geq t_4$ için

$$w'(t) \leq \frac{(\delta'(t))_+}{\delta(t)} w(t) - \delta(t) q_1(t) \left(\frac{g(t)}{t} \right)^{\beta(n-1)/\kappa} - \frac{\lambda \beta t^{\beta(n-1)-1}}{(n-2)! k^{1-\beta} \delta(t)} w^2(t) \quad (3.3.36)$$

olduğu görülür. Bu son eşitsizlik, w 'ya göre kareye tamamlanır,

$$w'(t) \leq -\delta(t) q_1(t) \left(\frac{g(t)}{t} \right)^{\beta(n-1)/\kappa} + \frac{(n-2)! k^{1-\beta} ((\delta'(t))_+)^2}{4\lambda \beta t^{\beta(n-1)-1} \delta(t)} \quad (3.3.37)$$

bulunur. (3.3.37) eşitsizliği t_4 'ten t 'ye kadar integrallenirse

$$\int_{t_4}^t \left[\delta(s) q_1(s) \left(\frac{g(s)}{s} \right)^{\beta(n-1)/\kappa} - \frac{(n-2)! k^{1-\beta} ((\delta'(s))_+)^2}{4\lambda \beta s^{\beta(n-1)-1} \delta(s)} \right] ds \leq w(t_4),$$

sonucuna varılır ki bu da (3.3.28) ile çelişir.

Şimdi (3.2.3) durumunu göz önüne alalım. Teorem 3.3.1'in ispatında izlenen yol tekrar edilirse, her $t \geq t_4$ için tekrar (3.3.16) ve (3.3.17) ifadeleri elde edilir. (3.3.16) ifadesi $h(t)$ 'den t 'ye kadar integrallenirse,

$$z^{(n-1)}(h(t)) \geq \int_{h(t)}^t q_2(s) z^\beta(h(s)) ds \quad (3.3.38)$$

elde edilir. ϕ fonksiyonunun t değişkenine göre azalmayan olduğu kullanılarak, $t \geq s \geq t_4$ için, (3.3.17) ifadesinden

$$z(h(s)) \geq \frac{(h(t) - h(s))^{n-1}}{(n-1)!} z^{(n-1)}(h(t))$$

olduğu görülür. Bu son eşitsizlik (3.3.38) içinde kullanılırsa,

$$\left[z^{(n-1)}(h(t)) \right]^{1-\beta} \geq \frac{1}{((n-1)!)^\beta} \int_{h(t)}^t q_2(s) [h(t) - h(s)]^{\beta(n-1)} ds$$

bulunur. $t \rightarrow \infty$ iken bu son eşitsizliğin her iki tarafının lim sup'u alınırsa, (3.3.29) ile çelişki elde edilir. Bu çelişki ispatı tamamlar.

Teorem 3.3.5. Kabul edelim ki (i)-(v) şartları sağlansın, her $t \geq t_0$ için $\phi_2(t) \leq \tau(t)$ ve $\phi(t, \mu)$ fonksiyonu da ilk değişkenine yani t 'ye göre azalmayan olsun. Ayrıca kabul edelim ki, her $k > 0$ için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left[\delta(s) q_1(s) \left(\frac{g(s)}{s} \right)^{\beta(n-1)/\kappa} - \frac{(n-1)! (\delta'(t))_+}{\lambda k^{\beta-1} s^{\beta(n-1)}} \right] ds = \infty \quad (3.3.39)$$

ve (3.3.29) sağlanacak şekilde pozitif bir $\delta \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu var olsun. Bu takdirde (3.1.1) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır.

İspat. Aksine kabul edelim ki $x(t)$ fonksiyonu, (3.1.1) denkleminin salınım yapmayan bir çözümü olsun. Genelliği bozmaksızın, her $t \geq t_1$ için $x(t) > 0$, $x(\tau(t)) > 0$ ve $(t, \mu) \in [t_1, \infty) \times [a, b]$ için $x(\phi(t, \mu)) > 0$ olacak şekilde bir $t_1 \in [t_0, \infty)$ vardır. Bu durumda, öyle bir $t_2 \geq t_1$ bulunabilir ki, her $t \geq t_2$ için z fonksiyonu (3.2.2) ya da (3.2.3) durumlarından birini sağlar. Eğer (3.2.3) sağlanırsa, Teorem 3.3.1'in ispatında olduğu gibi, (3.3.29) ile çelişki elde edilir.

Kabul edelim ki (3.2.2) sağlansın. Bu takdirde, her $t \geq t_4$ için (3.3.31), (3.3.34) ve (3.3.35) ifadeleri tekrar geçerlidir. (3.3.34) ve (3.3.35) ifadeleri (3.3.31) içinde kullanılır ve (3.3.10) dikkate alınarak, her $t \geq t_4$ için

$$w'(t) \leq \frac{(n-1)! (\delta'(t))_+}{\lambda k^{\beta-1} t^{\beta(n-1)}} - \delta(t) q_1(t) \left(\frac{g(t)}{t} \right)^{\beta(n-1)/\kappa} \quad (3.3.40)$$

olduğu görülür. (3.3.40) eşitsizliği t_4 'den t 'ye kadar integre edilirse,

$$\int_{t_4}^t \left[\delta(s) q_1(s) \left(\frac{g(s)}{s} \right)^{\beta(n-1)/\kappa} - \frac{(n-1)! (\delta'(t))_+}{\lambda k^{\beta-1} s^{\beta(n-1)}} \right] ds \leq w(t_4)$$

bulunur ki, bu sonuç (3.3.39) ile çelişir ve ispat tamamlanır.

Uyarı 3.3.6. Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar (iv) şartı ile tanımlanan ϕ fonksiyonunun ikinci değişkenine yani μ 'ye göre azalmayan olması durumunda da geçerlidir. Bu durumda,

$$\phi_1(t) := \phi(t, b) \quad \text{yerine} \quad \bar{\phi}_1(t) := \phi(t, a)$$

ve

$$\phi_2(t) := \phi(t, a) \quad \text{yerine} \quad \bar{\phi}_2(t) := \phi(t, b)$$

olarak tanımlanmalıdır.

Tez çalışması elde edilen sonuçların uygulanabilirliğini ve önemini gösteren aşağıdaki örnekler ve uyarılar ile tamamlanacaktır. İlk örnekte p fonksiyonu sabit seçilerek sınırlı neutral terim içeren bir fonksiyonel diferensiyel denklem göz önüne alınmış, ikinci örnek ise $t \rightarrow \infty$ iken $p(t) \rightarrow \infty$ olacak şekilde neutral katsayı fonksiyonunun üstten sınırsız olduğu bir denklem için verilmiştir.

Örnek 3.3.7. $t \geq 6$ için, tek mertebeden

$$\left[x(t) + 2^{2n} x \left(\frac{t}{2} \right) \right]^{(n)} + \int_1^2 \frac{q_0 \mu}{t^n} x \left(\frac{t}{6} + \frac{1}{\mu} \right) d\mu = 0 \quad (3.3.41)$$

neutral denklemi verilsin. Bu denklemde $p(t) = 2^{2n}$, $q(t, \mu) = q_0 \mu / t^n$, $\beta = 1$, $\tau(t) = t/2$, ve $\phi(t, \mu) = t/6 + 1/\mu$ olduğu görülmektedir. Bu durumda (i) – (iv) şartlarının sağlandığı ve

$$\tau^{-1}(t) = 2t, \quad \tau^{-1}(\tau^{-1}(t)) = 4t, \quad g(t) = (t+3)/3,$$

$$h(t) = (t+6)/3, \quad \eta(t) = (t+4)/4 \quad \text{ve} \quad \xi(t) = (t+4)/2$$

olacağı kolaylıkla görülebilir. $\kappa = 1/2$ seçilirse

$$\left(\frac{t}{\tau(t)}\right)^{(n-1)/\kappa} \frac{1}{p(t)} = \frac{1}{4}$$

elde edilir, yani (v) şartı da sağlanır.

$$p_1(t) = \frac{3}{2^{2n+2}}, \quad p_2(t) = \frac{2^{2n} - 1}{2^{4n}}, \quad q_1(t) = \frac{9q_0}{2^{2n+3}t^n}, \quad \text{ve } q_2(t) = \frac{3q_0(2^{2n} - 1)}{2^{4n+1}t^n},$$

olduğundan, Sonuç 3.3.2'den dolayı,

$$q_0 > \max \left\{ \frac{2^{2n+3}3^{n-3}(n-1)!}{e \ln 3}, \frac{2^{5n}3^{n-2}(n-1)!}{(2^{2n} - 1)e \ln 2} \right\} = \frac{2^{5n}3^{n-2}(n-1)!}{(2^{2n} - 1)e \ln 2}$$

olması durumunda (3.3.41) denklemi salınımlı olur.

Örnek 3.3.8. $t \geq 12$ olmak üzere,

$$\left[x(t) + tx \left(\frac{t}{2} \right) \right]''' + \int_1^2 \frac{q_0 \mu}{t^{3/5}} x^{3/5} \left(\frac{t}{4} + \frac{1}{\mu} \right) d\mu = 0 \quad (3.3.42)$$

denklemini inceleyelim. Bu denklemde $p(t) = t$, $\tau(t) = t/2$, $a = 1$, $b = 2$, $q(t, \mu) = q_0 \mu / t^{3/5}$, $\phi(t, \mu) = t/4 + 1/\mu$ ve $\beta = 3/5$ olduğu görülmektedir. $(i) - (iv)$ şartlarının sağlandığı ve

$$\phi_1(t) = (t+2)/4, \quad \phi_2(t) = (t+4)/4, \quad \tau^{-1}(t) = 2t, \quad \tau^{-1}(\tau^{-1}(t)) = 4t,$$

$$g(t) = (t+2)/2, \quad h(t) = (t+4)/2, \quad \eta(t) = (t+3)/3, \quad \xi(t) = (2t+6)/3$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. $\kappa = 2/3$ alınırsa,

$$\left(\frac{t}{\tau(t)}\right)^{2/\kappa} \frac{1}{p(t)} = \frac{8}{t} \leq \frac{2}{3}$$

olduğu görülür, yani (v) şartı da sağlanır. Ayrıca

$$p_1(t) \geq \frac{5}{12t}, \quad p_2(t) \geq \frac{47}{96t}, \quad q_1(t) \geq \frac{5q_0 \ln 7/4}{3t^{8/5}}, \quad \text{ve } q_2(t) \geq \frac{47q_0 \ln 7/4}{24t^{8/5}}$$

bulunur. $\delta(t) = t$ seçilerek (3.3.28) şartının sağlandığı ve ayrıca direkt bir hesaplama ile (3.3.29) şartının da sağlandığı görülebilir. Bu yüzden de Teorem 3.3.4'den dolayı, (3.3.42) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır.

Not 3.3.9. Bu bölümde sunulan sonuçlar "Differential Equations & Applications" dergisinde "Oscillation criteria for odd-order neutral differential equations with distributed deviating arguments" başlığıyla bilimsel araştırma makalesi olarak yayımlanmıştır (Tunç ve Sarıgül, 2023).



4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu bölümde, tez çalışmasında elde edilen ana sonuçlara ek olarak, elde edilebilecek yeni sonuçlar ve bazı açık problemler notlar halinde verilecektir.

4.1. Tartışma ve Sonuç

Uyarı 4.1.1. Bu tez çalışmasında sunulan salınım sonuçları, $n \geq 3$ bir tek doğal sayı, $r \in C([t_0, \infty), (0, \infty))$, γ pozitif tek tam sayıların bir oranı, ve diğer fonksiyonlar bu çalışmada tanımlandığı gibi olmak üzere

$$\int_{t_0}^{\infty} r^{-1/\gamma}(t)dt = \infty$$

ya da

$$\int_{t_0}^{\infty} r^{-1/\gamma}(t)dt < \infty,$$

şartları altında, tek mertebeden

$$\left(r(t) \left(z^{(n-1)}(t)\right)^\gamma\right)' + \int_a^b q(t, \mu) x^\beta(\phi(t, \mu)) d\mu = 0,$$

neutral diferensiyel denklemine genişletilebilir.

Uyarı 4.1.2. (3.1.1) denkleminin salınım davranışını, yeterince büyük t değerleri için $p(t) \leq -1$ ve $p(t) \not\equiv -1$ şartları altında incelemek oldukça ilginç bir araştırma konusu olabilir. Bir diğer araştırma problemi de $\kappa = 1$ için Lemma 3.2.4'ün uygun bir varyantı elde edilerek, (3.1.1) denkleminin katsayı fonksiyonlarının uygun şartları altında, elde edilen kriterleri daha da iyileştirecek ve basitleştirecek yeni salınım sonuçları elde etmektir. Buna benzer bir problem $n = 3$ için (Graef ve ark., 2021b) tarafından incelenmiş, ve (Jadlovská ve ark., 2021) tarafından aynı yöntem genelleştirilmiştir.

KAYNAKLAR

- Agarwal, R.P., Grace, S. R. ve O'Regan, D., 2001. Oscillation criteria for certain n th order differential equations with deviating arguments. *J. Math. Anal. Appl.*, **37**, 601-622.
- Agarwal, R.P., Grace, S. R. ve O'Regan, D., 2002. *Oscillation Theory for Second Order Linear, Half-Linear, Superlinear and Sublinear Dynamic Equations*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Agarwal, R.P., Grace, S.R. ve O'Regan, D., 2003. The oscillation of certain higher-order functional differential equations. *Math. Comput. Modelling*, **37**, 705–728.
- Agarwal, R.P., Bohner, M. ve Li, W.-T., 2004. *Nonoscillation and Oscillation Theory for Functional Differential Equations*. Marcel Dekker Inc., New York.
- Baculiková, B. ve Džurina, J., 2010. Oscillation of third-order neutral differential equations. *Math. Comput. Model.*, **52**, 215–226.
- Baculiková, B. ve Džurina, J., 2012. Oscillation theorems for higher order neutral differential equations. *Appl. Math. Comput.*, **219**, 3769–3778.
- Baculiková, B. ve Džurina, J., 2013. On certain inequalities and their applications in the oscillation theory. *Adv. Differ. Equ.*, **213**, Article ID 165, 1–8.
- Bolat, Y. ve Akın, O., 2004. Oscillatory behaviour of higher order neutral type nonlinear forced differential equation with oscillating coefficients. *J. Math. Anal. Appl.*, **290**(1), 302–309.
- Candan, T., 2010. Oscillation of solutions for odd-order neutral functional differential equations. *Electron. J. Differ. Equ.*, **2010**(23), 1–10.
- Chatzarakis, G. E., Džurina, J., ve Jadlovská, I., 2019a. Oscillatory properties of third-order neutral delay differential equations with noncanonical operators. *Mathematics*, **7**(12), 1–12.
- Chatzarakis, G. E., Grace, S. R., Jadlovská, I., Li, T. ve Tunç, E., 2019b. Oscillation criteria for third-order Emden–Fowler differential equations with unbounded neutral coefficients. *Complexity*, **2019**, Article ID 5691758, 1–7.
- Das, P., 1994. Oscillation criteria for odd order neutral equations. *J. Math. Anal. Appl.*, **188**, 245–257.
- Džurina J., Grace S. R. ve Jadlovská I., 2019. On nonexistence of Kneser solutions of third-order neutral delay differential equations. *Appl. Math. Lett.*, **88**(2019), 193–200.
- Došlá, Z. ve Liška, P., 2016. Comparison theorems for third-order neutral differential equations. *Electron. J. Differ. Equ.*, **2016**, No. 38, 1–13.
- Edelstein-Keshet, L., 2005. *Mathematical Models in Biology*. Classics in Applied Mathematics Series. SIAM.
- El'sgol'ts, L. E. ve Norkin, S. B., 1973. *Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments*. Mathematics in Science and Engineering, New York.

- Grace, S. R., Graef, J. R. ve El-Beltagy, M. A., 2012. On the oscillation of third order neutral delay dynamic equations on time scales. *Comput. Math. Appl.*, **63**, 775–782.
- Grace, S. R., Graef, J. R. ve Tunç, E., 2019. Oscillatory behaviour of third order nonlinear differential equations with a nonlinear nonpositive neutral term. *J. Taibah Univ. Sci.*, **13**, 704–710.
- Grace, S. R., Graef, J. R. ve Tunç, E., 2016. Oscillatory behavior of a third order neutral dynamic equation with distributed delays. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, **2016**, No 14, 1–14.
- Graef, J. R., Tunç, E. ve Grace, S. R., 2017. Oscillatory and asymptotic behavior of a third-order nonlinear neutral differential equation. *Opuscula Math.*, **37**(6), 839–852.
- Grace S. R. ve Jadlovská, I., 2018. Oscillatory behavior of odd-order nonlinear differential equations with a nonpositive neutral term. *Dynam. Syst. Appl.*, **27** (2018), 125–136.
- Graef, J. R., Grace, S. R. ve Tunç, E., 2019. Oscillatory behavior of even order nonlinear differential equations with a sublinear neutral term. *Opuscula Math.*, **39**(1), 39–47.
- Graef, J. R., Savithri R. ve Thandapani, E., 2012. Oscillatory properties of third order neutral delay differential equations, *Proceedings of the Fourth International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations*. May 24–27, 2002, Wilmington, NC, USA, 342–350.
- Graef, J. R., Özdemir, O., Kaymaz, A. ve Tunç, E., 2021a. Oscillation of damped second-order linear mixed neutral differential equations. *Monatsh. Math.*, **194**, 85–104.
- Graef, J. R., Jadlovská, I. ve Tunç, E., 2021b. Sharp asymptotic results for third-order linear delay differential equations. *J. Appl. Anal. Comput.*, **11**, 2459–2472.
- Graef, J. R., Jadlovská, I. ve E. Tunç, 2022. New oscillation criteria for odd-order neutral differential equations. *Nonlinear Stud.*, **29** (2022), 347–357.
- Györi, I. ve Ladas, G., 1991. *Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications*. Clarendon Press, Oxford.
- Hale, J. K., 1971. *Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York.
- Hale, J. K., 1977. *Theory of Functional Differential Equations*. Springer-Verlag, New York.
- Hardy, G. H., Littlewood, J. E. ve Polya, G., 1988. *Inequalities*. Reprint of the 1952 edition, Cambridge University Press, Cambridge.
- Hassan, T. S. ve Grace, S. R., 2014. Oscillation criteria for third order neutral nonlinear dynamic equations with distributed deviating arguments on time scales. *Tatra Mt. Math. Publ.*, **61**, 141–161.
- Jadlovská, I., Chatzarakis, G. E., Džurina, J. ve Grace, S. R., 2021. On sharp oscillation criteria for general third-order delay differential equations. *Mathematics*, **9**, No. 14, 1–18.
- Kolmanovskii, V. ve Myshkis, A., 1999. *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

- Koplatadze, R. G. ve Chanturiya, T. A., 1982. Oscillating and monotone solutions of first-order differential equations with deviating argument. *Differ. Uravn.*, **18** (1982), 1463–1465 (in Russian).
- Ladde, G.S., Lakshmikantham, V. ve Zhang, B.G., 1987. *Oscillation Theory of Differential Equations with Deviating Arguments*. Marcel Dekker Inc., New York.
- Li, T. ve Rogovchenko, Yu. V., 2014. Asymptotic behavior of higher-order quasilinear neutral differential equations. *Abstr. Appl. Anal.*, **2014** (2014), Article ID 395368, 1–11.
- Li, T. ve Thandapani, E., 2011. Oscillation of solutions to odd-order nonlinear neutral functional differential equations. *Electron. J. Differ. Equ.*, **2011**(2011), No. 23, 1–12.
- Mihalíková, B. ve Kostiková, E., 2009. Boundedness and oscillation of third order neutral differential equations. *Tatra Mt. Math. Publ.*, **43**, 137–144.
- Muhib, A., Dassios, I., Baleanu, D., Santra, S. S. ve Moaaz, O., 2021. Odd-order differential equations with deviating arguments: asymptomatic behavior and oscillation. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **19**(2), 1411–1425.
- Philos Ch. G., 1981. On the existence of nonoscillatory solutions tending to zero at ∞ for differential equations with positive delays. *Arch.Math.(Basel)*, **36** 168–178.
- Philos, Ch. G., 1984. Some comparison criteria in oscillation theory. *J. Austral. Math. Soc. (Series A)*, **36**, 176–186.
- Philos, Ch. G., 1989. Oscillation theorems for linear differential equations of second order. *Arch. Math.*, **53**, 482–492.
- Qin, G., Huang, C., Xie, Y. ve Wen, F., 2013. Asymptotic behavior for third-order quasi-linear differential equations. *Adv. Differ. Equ.*, **2013** (2013), Article ID 305, 1–8.
- Saker, S. H. ve Graef, J. R., 2012. Oscillation of third-order nonlinear neutral functional dynamic equations on time scales. *Dynam. Syst. Appl.*, **21** (2012), 583–606.
- Sun, Y. ve Hassan, T. S., 2015. Comparison criteria for odd order forced nonlinear functional neutral dynamic equations. *Appl. Math. Comput.* **251** (2015), 387–395.
- Sun, Y. ve Zhao, Y., 2019. Oscillatory behavior of third-order neutral delay differential equations with distributed deviating arguments. *J. Inequal. Appl.*, **2019**, Article ID 207, 1–16.
- Sun, Y., Zhao, Y. ve Xie, Q., 2022. Oscillation criteria for third-order neutral differential equations with unbounded neutral coefficients and distributed deviating arguments. *Turk. J. Math.*, **46**, 1099–1112.
- Şahin, S., 2025. Novel oscillation conditions for second-order damped differential equations with bounded and unbounded neutral terms. *Journal of Mathematics*, **2025**, Article ID 450408, 8 pp.
- Tang, S., Li, T., Agarwal, R. P. ve Bohner, M., 2012. Oscillation of odd-order half-linear advanced differential equations. *Communications in Applied Analysis*, **16**(3), 349–358.

- Thandapani, E., Padmavathy, S. ve Pinelas, S., 2014. Oscillation criteria for odd order nonlinear differential equations with advanced and delayed arguments. *Electron. J. Differ. Equ.*, **2014**, No. 174, 1–13.
- Tian, Y., Cai, Y., Fu, Y. ve Li, T., 2015. Oscillation and asymptotic behavior of third order neutral differential equations with distributed deviating arguments. *Adv. Differ. Equ.*, **2015**, Article ID 267, 1–14.
- Tunç, E., 2017. Oscillatory and asymptotic behavior of third-order neutral differential equations with distributed deviating arguments. *Electron. J. Differ. Equ.*, **2017**, No. 16, 1–12.
- Tunç, E., Şahin, S., Graef, J. R. ve Pinelas, S., 2021. New oscillation criteria for third-order differential equations with bounded and unbounded neutral coefficients. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, **2021**, No.46, 1–13.
- Tunç, E. ve Sarıgül, M., 2023. Oscillation criteria for odd–order neutral differential equations with distributed deviating arguments. *Differ., Equ. Appl.*, **15(2)**, 147–160.
- Zafer, A., 1992. Oscillatory and nonoscillatory properties of solutions of functional differential equations and difference equations. Ph.D. Thesis, Iowa State University, Ames, Iowa.
- Zhang, Q., Gao, L. ve Yu, Y., 2012. Oscillation criteria for third-order neutral differential equations with continuously distributed delay. *Appl. Math. Lett.*, **25**, 1514–1519.