

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEK YÖNLÜ LİFLİ ELASTİK VE VİSKOELASTİK
KOMPOZİTLERİN İÇ STABİLİTESİ VE GERİLME
DURUMUNA AİT BAZI PROBLEMLER

728806

Mat. Yük. Müh. Reşat KÖŞKER

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

F.B.E Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında
Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi : 17 Ekim 2002
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Surkay D. AKBAROV (Y.T.Ü.)
Jüri Üyeleri : Prof. Tahir T. ŞİŞMAN (Y.T.Ü.)
: Prof. Dr. Turgut KOCATÜRK (Y.T.Ü.)
Prof. Dr. Mevlüt TEYMUR (İ.T.Ü.)
Prof. Dr. Musa İLYASOV (İ.Ü.)

[Handwritten signatures of the jury members]

İSTANBUL, 2002

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
ÇİZELGE LİSTESİ.....	vii
ÖNSÖZ.....	ix
ÖZET.....	x
ABSTRACT.....	xi
1. GİRİŞ	1
1.1 Tek Yönlü Lifli Kompozitlerin Basınç Altında Kırılmasının İncelenmesine Ait Çalışmaların Kısa Özeti.....	1
1.2 Üç Boyutlu Lineerize Edilmiş Stabilité Teorisi (ÜBLEST) Çerçevesinde Mekanik Özellikleri Zamana Bağlı Kompozit Malzemelerin İncelenmesine Ait Çalışmaların Kısa Özeti.....	4
1.3 Konunun Gerekliiliği ve Güncelliği.....	5
1.4 Yapılan Araştırmaların Amaçları.....	6
2. PERİYODİK EĞRİLİKLİ TEK LİF İÇEREN SONSUZ ELASTİK VE VİSKOELASTİK MATRİSTE GERİLME DAĞILIMI VE İÇ STABİLİTE KAYBI	7
2.1 Problemin Formülasyonu	7
2.2 Çözüm Yönteminin Geliştirilmesi ve Stabilité Kaybı Kriterinin Seçimi.....	10
2.3 Araştırma Yönteminin Gerektirdiği Sınır Değer Problemlerinin Çözümü	15
2.4 Stabilité Kaybı Öncesi Gerilme Yayılımına Ait Bazı Sonuçlar	24
2.5 Laplace Dönüşümü ve Schapery Yöntemi Uygulanarak Kritik Zaman Değerlerinin Elde Edilmesi ve Yorumlanması	28
2.5.1 Matris Viskoelastik Malzeme Olduğu Durumda Uygun Sınır Değer Problemlerinin Çözümü:	28
2.5.2 Kritik Zaman Değerlerine Ait Sayısal Sonuçlar Ve Yorumları.....	32
3. BİRBİRİNE YAKIN PERİYODİK EĞRİLİKLİ İKİ LİF İÇEREN SONSUZ ELASTİK VE VİSKOELASTİK MATRİSTE GERİLME DAĞILIMI VE İÇ STABİLİTE KAYBI.....	43
3.1 Problemin Formülasyonu	43
3.2 Çözüm Yönteminin Geliştirilmesi	46
3.3 Uygun Sınır-Değer Problemlerinin Çözümlerinin Elde Edilmesi	51
3.4 Stabilité Kaybı Öncesi Gerilme Yayılımına Ait Sayısal Sonuçlar ve Yorumları..	62
3.5 Liflerin Stabilité Kaybı Durumlarındaki Karşılıklı Etkilerinin Kritik Zaman Değerlerine Etkisini Gösteren Sayısal Sonuçlar ve Yorumları	75
4. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRİLMESİ.....	90

KAYNAKLAR	92
EKLER	97
Ek 1 Geometrik Non-linear Denge Denklemlerinin ve Gerilme-Şekil Değişirme İlişkilerinin Silindirik Koordinat Takımındaki Fiziksel Bileşenleri Cinsinden İfadeleri.....	98
Ek 2 Alan Denklemlerinin Sıfırncı, Birinci ve İkinci Yaklaşımlarının Silindirik Koordinat Takımındaki Fiziksel Bileşenleri Cinsinden İfadeleri.....	101
Ek 3 Bölüm 2’de Yer Alan Denklemlerdeki Fonksiyonların Açık İfadeleri.....	109
Ek 4 Schapery Yöntemi.....	125
Ek 5 Bölüm 3’de Yer Alan Denklemlerdeki Fonksiyonların Açık İfadeleri.....	127
ÖZGEÇMİŞ	138



ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1	Tek lif içeren sonsuz viskoelastik matrisin geometrisi ve seçilen koordinat takımları.....	7
Şekil 2.2	$E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.3$ durumunda $u_r^{(2)}/\ell$ ile ϵ arasındaki bağımlılık.....	35
Şekil 2.3	$E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$ durumunda $u_r^{(2)}/\ell$ ile ϵ arasındaki bağımlılık.....	35
Şekil 2.4	$E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.5$ durumunda $u_r^{(2)}/\ell$ ile ϵ arasındaki bağımlılık.....	36
Şekil 2.5	$E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.5$, $\alpha' = -0.5$, $\omega = 0.5$ durumunda $u_r^{(2)}/\ell$ ile ϵ arasındaki bağımlılık.....	36
Şekil 2.6	$E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.5$, $\alpha' = -0.5$, $\omega = 1.0$ durumunda $u_r^{(2)}/\ell$ ile ϵ arasındaki bağımlılık.....	37
Şekil 2.7	$E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.5$, $\alpha' = -0.5$, $\omega = 2.0$ durumunda $u_r^{(2)}/\ell$ ile ϵ arasındaki bağımlılık.....	37
Şekil 2.8	$E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.5$, $\alpha' = -0.5$, $\omega = 3.0$ durumunda $u_r^{(2)}/\ell$ ile ϵ arasındaki bağımlılık.....	38
Şekil 2.9	$E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$, $\alpha' = -0.3$, $\omega = 0.5$, $\epsilon = -0.110$ durumunda $u_r^{(2)}/\ell$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	38
Şekil 2.10	$E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$, $\alpha' = -0.3$, $\omega = 1.0$, $\epsilon = -0.110$ durumunda $u_r^{(2)}/\ell$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	39
Şekil 2.11	$E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$, $\alpha' = -0.5$, $\omega = 0.5$, $\epsilon = -0.110$ durumunda $u_r^{(2)}/\ell$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	39
Şekil 2.12	$E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$, $\alpha' = -0.5$, $\omega = 1.0$, $\epsilon = -0.110$ durumunda $u_r^{(2)}/\ell$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	40
Şekil 3.1	Liflerin sonsuz ortamda birbirlerine göre konumları.....	43
Şekil 3.2	Formülasyonu yapılan problemin geometrisi ve seçilen koordinat takımları.....	44
Şekil 3.3	Liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve aynı-fazlı yerleşimlerine karşı gelen durumda $\theta = 0$, $\alpha t_3 = \pi/2$ ve çeşitli ρ 'lar için σ_{nn}/p ile κ arasındaki bağımlılık.....	65
Şekil 3.4	Liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve aynı-fazlı yerleşimlerine karşı gelen durumda $\theta = 0$, $\alpha t_3 = 0$ ve çeşitli ρ 'lar için $\sigma_{\pi\pi}/p$ ile κ arasındaki bağımlılık.....	65
Şekil 3.5	Liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve aynı-fazlı yerleşimlerine karşı gelen durumda $\theta = -\pi/2$, $\alpha t_3 = \pi/2$ ve çeşitli ρ 'lar için σ_{ne}/p ile κ arasındaki bağımlılık.....	66
Şekil 3.6	Liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve aynı-fazlı yerleşimlerine	

	karşı gelen durumda $\kappa = 0.4$, $\alpha t_3 = \pi/2$ ve çeşitli ρ 'lar için σ_{nn}/p ile θ arasındaki bağımlılık.....	66
Şekil 3.7	Liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve aynı-fazlı yerleşimlerine karşı gelen durumda $\kappa = 0.4$, $\alpha t_3 = 0$ ve çeşitli ρ 'lar için σ_{nn}/p ile θ arasındaki bağımlılık.....	67
Şekil 3.8	Liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve aynı-fazlı yerleşimlerine karşı gelen durumda $\kappa = 0.4$, $\alpha t_3 = \pi/2$ ve çeşitli ρ 'lar için σ_{ne}/p ile θ arasındaki bağımlılık.....	67
Şekil 3.9	Liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve zıt-fazlı yerleşimlerine karşı gelen durumda $\theta = 0$, $\alpha t_3 = \pi/2$ ve çeşitli ρ 'lar için σ_{nn}/p ile κ arasındaki bağımlılık.....	68
Şekil 3.10	Liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve zıt-fazlı yerleşimlerine karşı gelen durumda $\theta = 0$, $\alpha t_3 = 0$ ve çeşitli ρ 'lar için σ_{nn}/p ile κ arasındaki bağımlılık	68
Şekil 3.11	Liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve zıt-fazlı yerleşimlerine karşı gelen durumda $\theta = -\pi/2$, $\alpha t_3 = \pi/2$ ve çeşitli ρ 'lar için σ_{ne}/p ile κ arasındaki bağımlılık	69
Şekil 3.12	Liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve zıt-fazlı yerleşimlerine karşı gelen durumda $\kappa = 0.4$, $\alpha t_3 = \pi/2$ ve çeşitli ρ 'lar için σ_{nn}/p ile θ arasındaki bağımlılık.....	69
Şekil 3.13	Liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve zıt-fazlı yerleşimlerine karşı gelen durumda $\kappa = 0.4$, $\alpha t_3 = 0$ ve çeşitli ρ 'lar için σ_{nn}/p ile θ arasındaki bağımlılık	70
Şekil 3.14	Liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve zıt-fazlı yerleşimlerine karşı gelen durumda $\kappa = 0.4$, $\alpha t_3 = \pi/2$ ve çeşitli ρ 'lar için σ_{ne}/p ile θ arasındaki bağımlılık.....	70
Şekil 3.15	Liflerin aynı düzlemde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $R_{12}/R = 3.0$, $\kappa = 0.5$ için $u_r^{(2)}/\ell$ ile ϵ arasındaki bağımlılık.....	76
Şekil 3.16	Liflerin aynı düzlemde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $R_{12}/R = 3.0$, $\kappa = 0.4$ için $u_r^{(2)}/\ell$ ile ϵ arasındaki bağımlılık.....	77
Şekil 3.17	Liflerin aynı düzlemde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $R_{12}/R = 3.0$, $\kappa = 0.4$, $\omega = 0.5$ için $u_r^{(2)}/\ell$ ile ϵ arasındaki bağımlılık	77
Şekil 3.18	Liflerin aynı düzlemde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $R_{12}/R = 3.0$, $\kappa = 0.4$, $\omega = 1$ için $u_r^{(2)}/\ell$ ile ϵ arasındaki bağımlılık.....	78
Şekil 3.19	Liflerin aynı düzlemde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $R_{12}/R = 3.0$, $\kappa = 0.4$, $\omega = 2$ için $u_r^{(2)}/\ell$ ile ϵ arasındaki bağımlılık.....	78
Şekil 3.20	Liflerin aynı düzlemde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $R_{12}/R = 3.0$, $\kappa = 0.4$, $\omega = 3$ için $u_r^{(2)}/\ell$ ile ϵ arasındaki bağımlılık	79
Şekil 3.21	Liflerin aynı düzlemde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$,	

	$R_{12}/R = 3.0$, $\kappa = 0.4$, $\epsilon = -0.106$, $\alpha' = -0.5$, $\omega = 0.5$ için $u_r^{(2)}/\ell$ ile t' arasındaki bağımlılık	80
Şekil 3.22	Liflerin aynı düzlemde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $R_{12}/R = 3.0$, $\kappa = 0.4$, $\epsilon = -0.106$, $\alpha' = -0.5$, $\omega = 1$ değerlerinde $u_r^{(2)}/\ell$ ile t' arasındaki bağımlılık	81
Şekil 3.23	Liflerin aynı düzlemde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $R_{12}/R = 3.0$, $\kappa = 0.4$, $\epsilon = -0.106$, $\alpha' = -0.3$, $\omega = 0.5$ değerlerinde $u_r^{(2)}/\ell$ ile t' arasındaki bağımlılık	81
Şekil 3.24	Liflerin aynı düzlemde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $R_{12}/R = 3.0$, $\kappa = 0.4$, $\epsilon = -0.106$, $\alpha' = -0.3$, $\omega = 1$ değerlerinde $u_r^{(2)}/\ell$ ile t' arasındaki bağımlılık	82
Şekil 3.25	Liflerin aynı düzlemde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$, $\alpha' = -0.5$, $\omega = 0.5$ ve çeşitli ϵ 'lar için t'_{cr} ile $\rho = R_{12}/R$ arasındaki bağımlılık.....	83
Şekil 3.26	Liflerin aynı düzlemde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$, $\alpha' = -0.5$, $\omega = 1$ ve çeşitli ϵ değerleri için t'_{cr} ile $\rho = R_{12}/R$ arasındaki bağımlılık.....	83
Şekil 3.27	Liflerin aynı düzlemde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$, $\alpha' = -0.5$, $\omega = 2$ ve çeşitli ϵ değerleri için t'_{cr} ile $\rho = R_{12}/R$ arasındaki bağımlılık.....	84
Şekil 3.28	Liflerin paralel düzlemlerde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$, $\alpha' = -0.5$, $\omega = 0.5$ ve çeşitli ϵ 'lar için t'_{cr} ile $\rho = R_{12}/R$ arasındaki bağımlılık.....	88
Şekil 3.29	Liflerin paralel düzlemlerde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$, $\alpha' = -0.5$, $\omega = 1$ ve çeşitli ϵ değerleri için t'_{cr} ile $\rho = R_{12}/R$ arasındaki bağımlılık.....	88
Şekil 3.30	Liflerin paralel düzlemlerde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$, $\alpha' = -0.5$, $\omega = 2$ ve çeşitli ϵ değerleri için t'_{cr} ile $\rho = R_{12}/R$ arasındaki bağımlılık.....	89

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 2.1	Çeşitli $E^{(2)}/E^{(1)}$ ve $p/E^{(1)}$ 'ler için $\sigma_{nn}/ p $ değerleri ($\kappa = 0.5, \varepsilon = 0.015$).....	26
Çizelge 2.2	Çeşitli $E^{(2)}/E^{(1)}$ ve $p/E^{(1)}$ 'ler için $\sigma_{n\tau}/ p $ değerleri ($\kappa = 0.5, \varepsilon = 0.015$).....	26
Çizelge 2.3	Çeşitli $E^{(2)}/E^{(1)}$ ve $p/E^{(1)}$ 'ler için $\sigma_{ne}/ p $ değerleri ($\kappa = 0.5, \varepsilon = 0.015$).....	27
Çizelge 2.4	Çeşitli $E^{(2)}/E_0^{(1)}$, ω 'lar için $\varepsilon_{cr,0} = p_{cr,0}/E_0^{(1)}$ ve $\varepsilon_{cr,\infty} = p_{cr,\infty}/E_0^{(1)}$ değerleri.....	41
Çizelge 2.5	$E^{(2)}/E_0^{(1)} = 20$, $\kappa = 0.6$ durumunda çeşitli ω ve α' 'larda t'_{cr} değerleri.....	41
Çizelge 2.6	$E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$ durumunda çeşitli ω ve α' 'larda t'_{cr} değerleri.....	42
Çizelge 2.7	$E^{(2)}/E_0^{(1)} = 100$, $\kappa = 0.4$ durumunda çeşitli ω ve α' 'larda t'_{cr} değerleri.....	42
Çizelge 3.1	Liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve aynı-fazlı yerleşimlerine karşı gelen durumda $\rho = R_{12}/R = 2.5$ ve çeşitli κ , $\varepsilon = p/E^{(1)}$ 'lar için elde edilen $\sigma_{n\tau}/ p $ değerleri.....	72
Çizelge 3.2	Liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve aynı-fazlı yerleşimlerine karşı gelen durumda $\kappa = 2\pi R/\ell = 0.4$ ve çeşitli $\varepsilon = p/E^{(1)}$, $\rho = R_{12}/R$ 'lar için $\sigma_{n\tau}/ p $ değerleri.....	73
Çizelge 3.3	Liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve zıt-fazlı yerleşimleri durumunda $\rho = R_{12}/R = 2.5$ ve çeşitli κ , $\varepsilon = p/E^{(1)}$ 'ler için $\sigma_{nn}/ p $ değerleri.....	73
Çizelge 3.4	Liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve zıt-fazlı yerleşimlerine karşı gelen durumda $\kappa = 2\pi R/\ell = 0.4$ ve çeşitli $\varepsilon = p/E^{(1)}$ ve $\rho = R_{12}/R$ 'lar için $\sigma_{nn}/ p $ değerleri.....	74
Çizelge 3.5	Liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve zıt-fazlı yerleşimlerine karşı gelen durumda $\kappa = 0.3$, $\rho = 2.5$ için birinci yaklaşımda elde edilmiş σ_{nn}/p değerlerinin lineer denklem sayısı ile yakınsaması.....	74
Çizelge 3.6	Liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve zıt-fazlı yerleşimlerine karşı gelen durumda $\kappa = 0.3$, $\rho = 2.5$ için ikinci yaklaşımda elde edilmiş σ_{nn}/p değerlerinin lineer denklem sayısı ile yakınsaması.....	75
Çizelge 3.7	Liflerin aynı düzlemde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $2\pi R/\ell = 0.4$ ve çeşitli $\rho = R_{12}/R$ 'lar için $\varepsilon_{cr,0}$ ($t' = 0$ için) ve $\varepsilon_{cr,\infty}$ ($t' = \infty$ için) değerleri.....	80

Çizelge 3.8	Liflerin aynı düzlemde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$, $\omega = 2$, çeşitli ϵ , $\rho = R_{12}/R$ ve α' 'ler için t'_{cr} değerleri	85
Çizelge 3.9	Liflerin aynı düzlemde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$, $\alpha = -0.5$, $\rho = 2.1$, $\omega = 3.0$, t'_{cr} değerlerinin denklem sayısı ile yakınsaması	85
Çizelge 3.10	Liflerin paralel düzlemlerde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$ ve çeşitli $\rho = R_{12}/R$ 'lar için $\epsilon_{cr,0}$ ($t'=0$ için) ve $\epsilon_{cr,\infty}$ ($t'=\infty$ için) değerleri.....	86
Çizelge 3.11	Liflerin paralel düzlemlerde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$, $\omega = 2$, çeşitli ϵ , $\rho = R_{12}/R$ ve α' 'ler için t'_{cr} değerleri	87
Çizelge 3.12	Liflerin paralel düzlemlerde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$, $\alpha = -0.5$, $\rho = 2.1$, $\omega = 3.0$ için t'_{cr} değerlerinin denklem sayısı ile yakınsaması	89
Çizelge 3.13	Liflerin paralel düzlemlerde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$, $\alpha = -0.5$, $\rho = 2.1$, $\omega = 3.0$ için t'_{cr} değerlerinin denklem sayısı ile yakınsaması	89

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde elastisite ve viskoelastisitenin üç boyutlu geometrik nonlinear kesin denklemleri kullanılarak periyodik tek lif ve iki lif içeren tek yönlü kompozit malzemedeki stabilite kaybı öncesi gerilme analizi ve iç stabilite kaybı araştırmaları için bir yaklaşım geliştirilmiştir.

Bu çalışmayı yöneten ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Surkay D. AKBAROV'a çok teşekkür ederim.

Ayrıca benden hiçbir zaman maddi ve manevi desteklerini eksik etmeyen aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Reşat KÖŞKER

Haziran, 2002



ÖZET

Tek yönlü lifli kompozit malzemelerdeki eğilmenin, teknolojik işlemler sırasında çeşitli faktörlerden olabileceği gibi tasarımından da kaynaklanabileceği bilinir. Bu nedenle, kompozitlerin yapısındaki liflerin eğriliği, bu malzemelerin yapısal hasarı olarak alınabileceği gibi yapısal bir özellik olarak da ele alınabilir. Üstelik, liflerin eğriliği, basınç altındaki stabilite kaybı problemleri ve çeşitli kırılma araştırmaları için bir model olarak da seçilebilir. Bu çalışmada, parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde elastisite ve viskoelastisite teorisinin üç boyutlu geometrik nonlinear denklemleri kullanılarak stabilite kaybı öncesi gerilme analizi ve stabilite kaybı araştırmaları için bir yaklaşım geliştirilmiştir. Tez kapsamında ele alınan bütün araştırmalar periyodik eğrilikli bir veya iki lif içeren sonsuz elastik ve viskoelastik cisim için yapılmıştır. Sonsuz elastik ve viskoelastik cismin iki lif içermesi durumunda, bu liflerin iki paralel doğru boyunca yerleştiği kabul edilmiştir. Gerilme dağılımı ve stabilite kaybı problemleri cisme lifler boyunca sonsuzda düzgün dağılmış normal kuvvetler etkidiğinde incelenmiştir.

Ele alınan stabilite problemleri için, önce kompozitin doldurucusunun hacim oranının küçük ve lifler arasındaki etkileşimin ihmal edildiği düşünülmüştür. Sonuçta, malzeme tek lif içeren sonsuz viskoelastik malzeme olarak modellenmiştir. Sonra, sonsuz cismin tek lif içermesi durumu için önerilen araştırma, lifler arasındaki etkileşimin dikkate alınması durumuna genişletilmiş ve ilgili analizler iki komşu lif içeren sonsuz viskoelastik cisim için yapılmıştır. Bu liflerin aynı düzlemde ve farklı düzlemlerde birbirine paralel iki doğru boyunca yerleştiği, herbirinin küçük başlangıç eğilmesine sahip olduğu kabul edilmiştir. Bu eğrilikler periyodik ve aynı-fazlıdır. Başlangıç eğilmesinin büyümeye başlaması ve nihayet sonsuz olması durumu stabilite kaybı kriteri olarak seçilmiştir. Viskoelastik malzemenin tanımı için Rabotnov operatörü kullanılmış ve lifler arasındaki etkileşimin ve reolojik parametrelerin kritik zaman değerlerine etkileri araştırılmıştır.

Stabilite kaybı öncesi gerilme-şekil değiştirme problemleri için önce, eğrilikli lif içeren tek yönlü kompozitlerdeki geometrik nonlinearitenin gerilme dağılımına etkisi araştırmaları, lifin küçük hacim oranlı doldurucu olması durumu için uygulanmış ve bu durumda kompozit malzeme periyodik eğrilikli tek lif içeren sonsuz elastik cisim olarak modellenmiştir. Sonra, bu metod iki paralel doğru boyunca yerleşmiş periyodik eğrilikli iki komşu lif içeren sonsuz elastik cisim için geliştirilmiştir. Liflerin eğriliklerinin birbirleri ile ilgisi dikkate alınarak aynı-faz ve zıt-faz eğrilik durumu olarak adlandırılan iki yerleşim formu ele alınmıştır. Bu durumda liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde olduğu kabul edilmiştir. Liflerin eğriliklerinden kaynaklanan aralarındaki etkileşimin gerilme dağılımına etkisi araştırılmış ve ara yüzey üzerindeki normal ve kayma gerilmeleri ile ilgili sayısal sonuçlar verilmiştir. Ele alınan gerilme dağılımına geometrik nonlinearitenin etkisi de araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Lifli kompozit, gerilme dağılımı, geometrik nonlinearite, iç stabilite kaybı, kritik zaman

ABSTRACT

It is well known that the curving of the fibers in the structure of the unidirectional fibrous composite materials may be the result of specific structural characteristics of composite materials caused by design factors as well as a consequence of technological processes under the action of various factors. Therefore, the curving of fibers in the structure of composites can be taken as structural features as well as damage of the structure of these materials. Moreover, the curving of the fibers is taken as a model for the investigations of various failure and stability loss problems of composites in compression. In this study, within the framework of the piece-wise homogeneous body model with the use of the three-dimensional geometrically non linear exact equations of the theory of elasticity, the method for the determination of the stress-strain state before stability loss and stability loss in the undirected fibrous composites with periodically curved fibers is developed. All concrete investigations are made for the infinite elastic and viscoelastic body containing one and two periodically curved fibers. For the infinite elastic and viscoelastic body containing two periodically curved fibers case, it is assumed that these fibers are located along two parallel lines. The stress distribution and stability loss problems are studied when the body is loaded at infinity by uniformly distributed normal forces, which act in the direction along which lie the fibers.

For the considered stability loss problems, at the first it is assumed that the filler concentration in the composite is very small and interacting between the fibers is ignored. Consequently, the material is modelled as an infinite viscoelastic body containing a single fiber. Then, this approach is developed for the case where the interactions between the fibers are taken into account, and the corresponding analysis are made on the infinite viscoelastic media containing two neighbouring fibers. It is assumed that these fibers are located along two parallel lines which are on the same and on the different parallel planes and each of them has the same initial insignificant small curving. These curvings are periodic and sin-phase. The case where the imperfection starts to increase and becomes indefinitely is taken as a stability loss criterion. In this way, using the mentioned modelling it is estimated the influence of the interaction between the fibers to the corresponding values of the critical time. It is used Rabotnov operator to determine viscoelastic material and investigate the influence of reological parameters and interaction between the fibers to the critical time. The numerous numerical results related to this influence are given.

For the considered stress-strain state before stability loss problems, at the first the investigations of the influence of the geometrical non linearity to the stress distribution in the unidirectional fibrous composites with curved fibers are carried out for small concentration of fibers and in this case composite material is modelled as an infinite elastic body containing a single periodical curved fiber. Then, the method is developed for the stress analyses in the infinite elastic body containing two neighbouring periodically curved fibers, which are located along two parallel lines. Two location cases are considered, namely, the co-phase and anti-phase curving cases of the fibers with respect to each other. In this case, it is assumed that the middle lines of the fibers are in the same plane. The influence of the interaction between the fibers on the stress distribution caused by the curving of the fibers is studied and the numerical results, related to the self-balanced normal and shear stresses, which act on the interface, are given. The influence of the geometrical non linearity to the considered stress distribution, is also investigated.

Keywords: Fibrous composite, stress distribution, geometrical non linearity, internal stability loss, critical time

1. GİRİŞ

1.1 Tek Yönlü Lifli Kompozitlerin Basınç Altında Kırılmasının İncelenmesine Ait Çalışmaların Kısa Özeti

Kompozit malzemelerin üretiminin artması ve çağdaş tekniğin birçok alanlarında kullanılması bu malzemelerin farklı dış etkiler altındaki mekanik davranışlarının ve en önemlisi ise kırılmalarının incelenmesini gerektirmektedir. Tez kapsamında yapılan araştırmalar kompozit malzemelerin kırılmasına ait olduğundan iddialarımızı bu konu üzerinde yoğunlaştırdım.

Kırılma, bir malzemenin mekaniksel, fiziksel veya herhangi başka bir dış etkiden dolayı ortaya çıkan direncinin kaybolması şeklinde tanımlanır ve bu alandaki incelemeler hem teorik ve hem de deneysel açılardan yapılabilir. Belirtmek gerekir ki, sürekli ortamlar mekaniği çerçevesinde kırılma olayları makroskopik açıdan, yani atom ve molekül boyutlarından çok büyük boyutları içeren kavram ve büyüklükler çerçevesinde incelenir.

Günümüzde, malzemelerin kırılması, çatlak tipli hasarların mekaniksel ve fiziksel dış etkiler altında sürekli ortamlar mekaniği denklemleri çerçevesinde modellenmesi ile incelenmektedir. Bu tür incelemeler şimdiye kadar hem geleneksel ve hem de kompozit malzemeler için çok büyük boyutlarda yapılmış ve yapılmaktadır. Söylenenleri Cherepanov (1983), Ekobori (1978), Knot (1979), Parton (1992), Chamis (1974) vs. kaynakları ve ele alınan konuyla ilgili olan bilimsel dergilerdeki yayınlanan araştırmalar kanıtlamaktadır. Adı geçen bu araştırmaların büyük çoğunluğunda malzemenin yapısında çatlağın var olduğu kabul edilir ve stabilite kaybına neden olabilecek basınç kuvvetinin değeri, kırılma basınç kuvvetinin değeri olarak ele alınır. Şimdiye kadar bu konuda çok sayıda bilimsel teorik araştırmalar yapılmış ve bu araştırmaların özetleri Babich vd. (1982), Babich ve Guz (1992), Babich vd. (2001), Chung ve Weitsman (1994), Budianski ve Fleck (1993, 1994) makalelerinde verilmiştir. Bu makalelerden görüldüğü gibi, ele alınan alandaki teorik araştırmaları iki gruba ayırabiliriz: Birinci grup araştırmalara yaklaşık teoriler çerçevesinde yapılanları, örneğin Rosen (1965), Dow ve Grunfest (1960), Schuerch (1966), Chung ve Weitsman (1994), Kyrialides vd. (1994), Budianski ve Fleck (1993, 1994), Hermann vd. (1967), Karpenko vd. (1972), Mileiko ve Khvostunkov (1971), Rosen ve Dow (1976), Sadovsky vd. (1967), Bolotin ve Novichkov (1980) ve daha bir çok başka araştırmaları dahil edersek, ikinci gruba sürekli ortamlar mekaniğinin lineerize edilmiş kesin denklemleri çerçevesinde yapılan araştırmaları dahil edebiliriz. İkinci gruba dahil olan araştırmalar Guz (1969a, 1969b)'un çalışmaları ile başlamış ve Guz ve onun öğrencileri tarafından devam ettirilmiştir. Bu araştırmaların geniş

özetleri Guz ve öğrencilerinin yukarıda adı geçen makalelerinde ve bu araştırmaların geniş yorum ve uygulamaları ise Guz (1990)'un kitabında verilmiştir. Guz ve öğrencileri tarafından yapılan bu araştırmalar parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde sürekli, anizotrop cisim modeli açısından yapılmıştır. Tez kapsamında yapılan araştırmalar da parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde yapıldığından yukarıda adı geçen ikinci gruba dahil olan araştırmaların bir kısmı üzerinde daha etraflı duralım.

Parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde yapılan araştırmalarda kompozit malzemelerin her bir bileşeni için gerekli denklemler ve ifadeler yazılır ve bu bileşenlerin ortak sınırlarında temas koşulları verilerek incelemeler yapılır. Parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde tek yönlü lifli kompozitler için yapılan araştırmaların özetlerini veren Guz ve öğrencilerinin makalelerinden görüldüğü gibi bu alanda yapılan araştırmaların büyük çoğunluğu ancak elastik şekil değiştirme durumuna, çok az bir kısmı ise (örneğin Cherevko (1985, 1986), Guz ve Cherevko (1985)) elastik-plastik şekil değiştirme durumuna aittirler. Bu araştırmaların malzeme yapısındaki liflerin yerleşim yapısı açısından sınıflandırmasını yaparsak aşağıdakileri söyleyebiliriz.

Babich (1973), Babich ve Guz (1973) makalelerinde tek bir lif içeren sonsuz elastik ortamda sırası ile stabilite kaybı öncesi sonlu ve küçük şekil değiştirme durumları halinde stabilite kaybı incelenmiştir. İki lif içeren sonsuz ortamda stabilite kaybının incelenmesi Akbarov (1981a, 1981b, 1985) makalelerinde yapılmıştır. Daha sonraları Babaev vd. (1985), Cherevko (1985, 1986) vb. makalelerinde tek yönde periyodik dizilmiş ve iki yönde periyodik dizilmiş liflerin stabilite kaybı incelemesi ele alınmıştır. Kompozit malzemeyi sınırlayan yüzeyler civarındaki liflerin stabilite kaybı incelemelerine ise Guz ve Lapusta (1986)'da yer verilmiştir.

Yukarıda adı geçen araştırmaların hepsinde sayısal sonuçlar sadece lif ve matris malzemeleri homojen izotrop oldukları durumda elde edilmiştir. Akbarov ve Novruzov (1987), Akbarov ve Kocatürk (1997) makalelerinde anizotrop lif içeren anizotrop matriste uygun sayısal sonuçlar elde edilmiştir.

Yukarıda özetlenen tüm araştırmalarda stabilite kaybı öncesi gerilme durumunun homojen olduğu varsayılmaktadır. Şimdiye kadar bazı araştırmalarda stabilite kaybı öncesi gerilme durumunun homojen olmadığı durumlar da ele alınmış ve bu nonhomojenliğin kritik parametrelerin değerlerine etkisinin önemsiz olduğu gösterilmiştir. Bu çalışmalara örnek olarak Garaszczuk (1983) ve diğerlerini göstermek mümkündür. Belirtelim ki, ele alınan konudaki araştırmaların daha detaylı özetleri yukarıda adı geçen özetleme (review)

makalelerinden elde edilebilir. Bu araştırmalarda liflerin stabilite kaybı formunun periyodik bir form olduğu varsayılır ve bu periyodun uzunluğu ℓ ’den ve lif yarıçapı R ’den (liflerin en kesitlerinin dairesel olduğu da kabul edilir) oluşan $\kappa = 2\pi R/\ell$ parametresi ele alınır. κ parametresine ve diğer problem parametrelerine değerler verilerek dış basınç kuvveti p yoğunluğunun değerı uygun özdeğer probleminin çözümlü sonucunda elde edilir. Daha sonra p ve κ parametreleri arasındaki bağımlılığın monoton olmayan bir bağımlılık olduğu durumlar (*bu durumlara iç stabilite kaybı denir*) ele alınarak gösterilir ki κ ’nın öyle bir $\kappa \neq 0$ değerı var ki bu değerde p minimum olur. p ’nin bu minimum değerı basınç için kırılma değerı gibi kabul edilir. Kırılma basınç kuvvetleri için elde edilen bu sonuçlar doğal olarak malzemeyi belirten diğer parametrelere de bağlı olur.

Böylece, tek yönlü lifli kompozitlerin iç stabilite kaybının parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde Üç Boyutlu Lineerize Edilmiş Elastik Stabilite Teorisi (ÜBLEST) çerçevesinde yapılan esas araştırmaların özetini bitirmiş oluyoruz. Bu araştırmaların hepsi aynı bir varsayım çerçevesinde, yani kompoziti oluşturan bileşenlerin malzemelerinin mekanik özelliklerinin zamana bağlı olmaması varsayımı çerçevesinde yapılmıştır. Şimdiye kadar ÜBLEST çerçevesinde geliştirilmiş yaklaşımlar Euler dallanma (bifurcation) teorisi üzerine dayalı olduğundan, başka bir deyimle uygun özdeğer problemlerinin incelenmesine dayalı olduklarından, bu yaklaşımlar mekanik özellikleri zamana bağlı malzemelerin ve bu malzemelerden hazırlanmış yapı elemanlarının stabilite kaybının incelenmesi için yetersiz olmuştur. Bununla birlikte belirtelim ki, ÜBLEST çerçevesinde özellikleri zamana bağlı malzemelerin stabilite kaybına ait çok az sayıda da olsa bazı sonuçlar Gerard ve Gilbert (1958)’in kritik deformasyon yöntemini uygulayarak elde edilmiştir. Bu yöntemle göre, ilk önce ÜBLEST uygulanarak uygun elastik malzemenin stabilite kaybına ait kritik deformasyon elde edilmiş ve bu kritik değerın ele alınan elastik malzemeye karşılık gelen viskoelastik malzeme için de aynı olduğu varsayılarak ve malzemenin bünye denklemlerinden yararlanılarak kritik zaman değerleri elde edilmiştir. Bu tür uygulamalara örnek olarak Tkachenko ve Chekhov (2000a, b) vb. makaleleri göstermek mümkündür.

Açıktır ki, bu yaklaşımlar mekanik özellikleri zamana bağlı malzemelerin stabilite kaybının incelenmesi için çok yetersizdir ve elde edilen sayısal sonuçlar pek güvenli değildir. Tüm bu nedenlerden dolayı, uzun seneler böyle bir yaklaşımın geliştirilmesi ve uygulanmasına önemli bir biçimde gereksinim duyulmuş ve böyle bir yaklaşım Akbarov (1998) ve Akbarov’un diğer yayınlarında geliştirilmiştir. Bu araştırmaların açıklanması ve özetlenmesine bir sonraki alt bölümde bakacağız.

1.2 Üç Boyutlu Lineerize Edilmiş Stabilité Teorisi (ÜBLEST) Çerçevesinde Mekanik Özellikleri Zamana Bağlı Kompozit Malzemelerin İncelenmesine Ait Çalışmaların Kısa Özeti

Başlıkla ilgili araştırmaların özetine geçmeden önce ÜBLEST'in tarihsel açıdan oluşum ve gelişimini ele alalım. Belirtelim ki, ÜBLEST denklemleri ilk kez Southwell (1913) tarafından stabilite kaybı öncesi gerilmelerin homojen olduğu halde, fiziksel yorumlama yardımı ile elde edilmiştir. Daha sonraları Biezeno ve Hencky (1930) aynı fiziksel yaklaşımı uygulayarak bu denklemleri stabilite öncesi gerilmelerin homojen olmadığı durumlar için de geliştirmişlerdir. ÜBLEST denklemlerinin nonlinear elastisite denklemlerinin lineerize edilmesi yolu ile belirlenmesi Biot (1965) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada stabilite kaybı öncesi şekil değiştirmelerin küçük olması hali ele alınmış ve şekil değiştirmeden önce kartezyen koordinatlarla çakışan Lagrange koordinatları kullanılmıştır. Bundan başka Guz (1971a, 1999) ve diğerlerinin araştırmalarında ÜBLEST'in geliştirilmesine çok önemli katkılar yapılmış ve bu teori çerçevesinde çok sayıda somut problemler incelenmiştir. Bu incelemelerin özeti bir önceki alt bölümde adları sıralanan özetleme makalelerinde verilmektedir.

Bir daha belirtelim ki, şimdiye kadar ÜBLEST teorisi sadece mekanik özellikleri zamandan bağımsız olan malzemeler ve bu malzemelerden yapılmış yapı elemanları için uygulanabilmiştir. Bu uygulamalar ve araştırmalar yukarıda söylendiği gibi, Euler-dallanma yaklaşımı çerçevesinde olmuştur. Bilindiği üzere Euler yaklaşımının mekanik özellikleri zamana bağlı malzemedan yapılmış yapı elemanlarının stabilite kaybı incelemesine uygulanması mümkün olmamaktadır. Bu nedenle Guz (1970, 1999) tarafından bu tür problemlerin incelenmesi için dinamik araştırma yöntemi teklif edilmiştir. Bu yöntemin uygulanması, aranan büyüklüklerin $\exp(i\Omega t)$ çarpanı yardımı ile gösterilmesini ve kritik parametrelerin $\text{Im } \Omega = 0$ denkleminde elde edilmesini gerektirmektedir. Ancak bu yöntemin ÜBLEST denklemleri çerçevesinde uygulanmasında başka engeller ortaya çıkmaktadır. Örneğin, bu durumda ÜBLEST denklemlerindeki katsayıların zamana bağlı olması nedeni ile söylenen işlemlerin yapılmasının imkansız olduğu ortaya çıkmaktadır. Birçok literatür araştırmasından görüldüğü gibi, bu tür engellerin aradan kaldırılabilmesi için stabilite kaybı öncesine ait büyüklüklerde zamanın sabitlenmesi (dondurulması) teklif edilse de, ÜBLEST çerçevesinde bu yönde hiçbir somut araştırma yapılmamıştır. Bundan başka ÜBLEST çerçevesinde elde edilen sonuçlardan yararlanılarak kritik deformasyon yönteminin uygulanması da Guz (1999)'da teklif edilmiş olsa da bu yaklaşımın yetersizliği hakkında

yukarıdaki kısımda açıklama verilmiştir.

Bilindiği üzere, zamana bağlı malzemeden yapılmış yapı elemanlarının stabilite kaybı incelemesinde en sık kullanılan yaklaşım Hoff (1954) yaklaşımıdır. Bu yaklaşıma göre ele alınan yapı elemanlarında ideal durumdan başlangıç sapmalarının olduğu (geometrik anlamda) varsayılmaktadır ve stabilite kaybı kriteri olarak bu sapmaların basınç yükleri altında zamana bağlı olarak büyüyerek sonsuza gitmesi hali kabul edilmektedir. Önemle belirtmek gerekir ki, şimdiye kadar bu yaklaşım sadece yaklaşık stabilite teorileri çerçevesinde uygulanmış ve ÜBLEST için geliştirilememiştir. Bu geliştirme, ilk kez Akbarov (1998) makalesinde viskoelastik kompozit malzemelerden hazırlanmış yapı elemanlarının stabilite kaybının ÜBLEST çerçevesinde yapılabilmesi için, Akbarov vd. (1997) makalesinde levhali viskoelastik kompozit malzemelerin iç stabilite kaybının ÜBLEST çerçevesinde incelenebilmesi için yöntem teklif edilmesi ile yapılmıştır. Belirtelim ki, bu yaklaşımlar sınır formu pertürbasyon yöntemi ve viskoelastik teorisinin kesin geometrik non-lineer üç boyutlu denklemlerinin birlikte uygulanması sonucunda elde edilebilmiştir. Akbarov vd. (2001), Yahnioglu ve Akbarov (2002), Akbarov vd. (1999) makalelerinde viskoelastik kompozit malzemelerden hazırlanmış stabilite kaybı problemleri yukarıda adı geçen yaklaşımla (Akbarov, 1998) incelenmiştir. Viskoelastik levhali kompozit malzemelerin iç stabilite kaybına gelince ise, bu yönde yapılan araştırmaların çok az sayıda olduğunu söyleyebiliriz. Bu araştırmalar esasen Akbarov vd. (1997, 1999) makalelerinde yapılmıştır.

Yukarıda söylenenlerle ÜBLEST çerçevesinde mekanik özellikleri zamana bağlı kompozit malzemelerin iç stabilite kaybının incelenmesine ve bu malzemelerden yapılmış yapı elemanlarının stabilite kaybı incelemelerine ait çalışmaların özeti verilmiş olmaktadır. Yukarıdan görüldüğü gibi, şimdiye kadar ÜBLEST çerçevesinde tek yönlü lifli viskoelastik kompozitler için hiçbir araştırma yapılmamıştır. Tez kapsamında yapılan araştırmalar, bu yönde olan ilk teşebbüs ve çabaları oluşturmaktadır.

1.3 Konunun Gerekliliği ve Güncelliği

Bu çalışmanın konusu, tek yönlü lifli viskoelastik kompozit malzemelerin, lifler yönündeki basınç altında iç stabilite kaybının incelenmesi için gereken yöntemin geliştirilmesi ve bazı test problemlere uygulanması olup hem teorik ve hem de uygulama açısından ilginçtir. Konu, tek yönlü lifli viskoelastik kompozit malzemelerin uzun süreli basınç dayanımlarının bulunabilmesi için gereken bir yöntemin önerilmesi ve bu yöntem kullanılarak sayısal sonuçların elde edilmesi açısından önemlidir. Tez çerçevesinde geliştirilen yöntem Akbarov

vd. (1997) yönteminin tek yönlü lifli viskoelastik kompozitlere genelleştirilmesi anlamında da öneme sahiptir. Bundan başka, tez çerçevesinde geliştirilen yöntemin uygulaması, periyodik eğriliğe sahip lifler içeren kompozitlerde stabilite kaybı öncesi gerilme durumlarının belirlenmesini gerektirdiğinden, tez konusu eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeler mekaniği (Akbarov ve Guz, 2000) açısından da ilginç ve gereklidir. Tez kapsamında yapılan somut araştırmalarda liflerin stabilite kaybı durumunda ve böylece de stabilite kaybı öncesi gerilme yayılımı durumunun belirlenmesinde de karşılıklı etkileri gözönüne alınmaktadır. Bu anlamda da tezde yapılan çalışmaların teorik ve pratik açıdan önemi vardır. Tez çalışmasını gerekli kılan başka bir neden ise burada yapılan araştırmaların bu yönde çok önemli bir geliştirme oluşturması ve elde edilen sonuçların ilk kez tarafımızdan bulunmasıdır.

Günümüzde tek yönlü lifli viskoelastik kompozit malzemelerin yaygın bir şekilde kullanılması ve tez konusunun yukarıda söylenen gerekliliği tez konusunun güncelliğini ortaya koymaktadır.

1.4 Yapılan Araştırmaların Amaçları

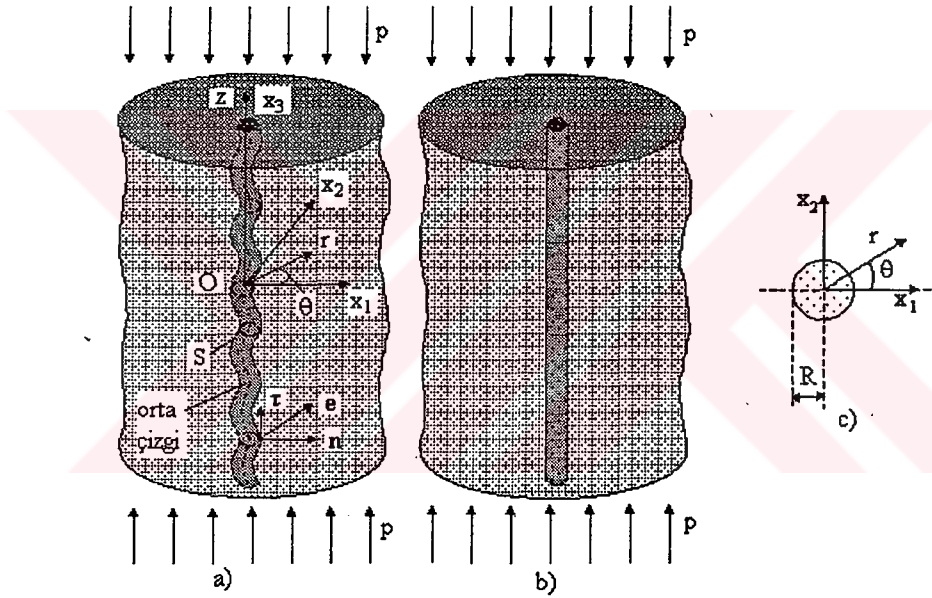
Bu çalışmada yapılan araştırmaların amaçları aşağıda özetlenmiştir;

1. Akbarov ve Guz (2000), Akbarov vd. (1997) yöntemi ve yaklaşımının elastik ve viskoelastik tek yönlü lifli kompozitlerin iç stabilite kaybının ve stabilite kaybı öncesi gerilme durumunun incelenmesine uygun olarak geliştirilmesi;
2. İncelenmesi gereken problemlerin matematiksel formülasyonu;
3. Formülasyonu yapılmış sınır-değer problemlerinin incelenmesi için gerekli metodların geliştirilmesi;
4. Ele alınan sınır-değer problemlerinin incelenmesinde uygulanan yöntemlerin esaslandırılması ve sayısal sonuçların elde edilmesi için gereken algoritmaların kurulup programların yapılması;
5. Somut problemler olarak tek lif ve birbirine yakın yerleşmiş iki lif içeren sonsuz elastik ve viskoelastik ortamda iç stabilite kaybına ve stabilite kaybı öncesi gerilme durumuna ait sayısal sonuçların elde edilmesi ve yorumlanması;
6. Kompozit malzemelerin bileşenlerinin reolojik ve elastik özelliklerinin ve böylece de liflerin karşılıklı etkisinin kritik zaman değerlerine ve stabilite kaybı öncesi gerilme yayılımına katkısının incelenmesi ve yorumlanması.

2. PERİYODİK EĞRİLİKLİ TEK LİF İÇEREN SONSUZ ELASTİK VE VİSKOELASTİK MATRİSTE GERİLME DAĞILIMI VE İÇ STABİLİTE KAYBI

2.1 Problemin Formülasyonu

Sonsuz uzunlukta tek bir lif içeren sonsuz viskoelastik bir ortam ele alalım. Farzedelim ki, lif uzunluğu boyunca çok küçük genlikli periyodik eğilmeye sahiptir (Şekil 2.1a). Lifin orta çizgisine dik olan kesitlerin daire olduğunu ve bu dairenin yarıçapı R 'nin (Şekil 2.1c) lif boyunca değişmediğini varsayalım (Lif boyunca, sözü edilen kesit dairelerin merkezinden geçen eğriyi çalışma boyunca lifin orta çizgisi olarak anacağız). Adı geçen küçük eğilmelerin olmadığı durumda lifin matris içerisindeki (sonsuz ortam içerisindeki) konumu, Şekil 2.1b'de gösterilen doğrusal bir silindir biçiminde olur.



Şekil 2.1 Tek lif içeren sonsuz viskoelastik matrisin geometrisi ve seçilen koordinat takımları

Başlangıcı lifin orta çizgisi üzerinde olan $Ox_1x_2x_3$ kartezyen $Or\theta z$ silindirik koordinat takımlarını seçelim ve bu koordinatların Lagrange koordinatları olduğunu varsayalım. Yukarıda tanımlanan sonsuz ortam Ox_3 (Oz) eksenine yönünde yoğunluğu p olan normal yayılı kuvvet etkisinde basınca maruz kaldığında lifin başlangıçtan olan sapmalarının büyümesini inceleyelim. Bu incelemeleri matris ve lifin farklı lineer viskoelastik malzemelerden oluştuğunu varsayıp, sürekli ortamlar mekaniğinin kesin üç boyutlu geometrik nonlineer denklemlerini uygulayarak yapalım. Bu denklemleri yazmadan önce, ileride sık kullanacağımız bazı yardımcı ifadeleri ele alalım. İlk önce lifin orta çizgisinin denklemini

$$x_1 = \varepsilon \delta(x_3), \quad x_2 = 0 \quad (2.1)$$

biçiminde ele alalım. Burada ε ($0 < \varepsilon \ll 1$) lifin eğilme genliğini belirten küçük bir parametre, $\delta(x_3)$ fonksiyonu ise lifin yüklemmeden önceki (şekil değiştirmeden önceki, başlangıçtaki) eğilmesinin formunu göstermektedir. (2.1) denkleminde görüldüğü gibi lifin orta çizgisi başlangıçta $x_2 = 0$ düzlemi üzerindedir. Yüklemmeden sonra da lifin orta çizgisinin bu düzlem üzerinde kaldığını varsayacağız. Şimdi (2.1) denkleminde ve lif-en kesitinin sağladığı koşuldan yararlanarak Akbarov ve Guz (2000) kaynağında olduğu gibi lif ve matris arayüzeyi olan S 'nin denklemini aşağıdaki biçimde elde ediyoruz:

$$r = (1 + \varepsilon^2 (\delta'(t_3))^2 \sin^2 \theta)^{-1} \left\{ \varepsilon \delta(t_3) + \varepsilon^3 \delta(t_3) (\delta'(t_3))^2 \sin \theta + \left[R^2 - \varepsilon^2 (\delta(t_3))^2 - \varepsilon^4 (\delta'(t_3))^2 (\delta(t_3))^2 (1 + \varepsilon^2 (\delta'(t_3))^2 \sin^2 \theta) \right]^{1/2} \right\}$$

$$z = t_3 - \varepsilon \delta'(t_3) r(t_3) \sin \theta + \varepsilon^2 \delta(t_3) \delta'(t_3), \quad \delta'(t_3) = \frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \quad (2.2)$$

Burada t_3 bir parametredir ve $t_3 \in (-\infty, +\infty)$ 'dir. (2.2) denklemlerinden yararlanarak ve bazı bilinen işlemleri yaparak S yüzeyinin birim dış normalinin bileşenleri için aşağıdaki ifadeleri elde ediyoruz:

$$n_r = r(\theta, t_3) \frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial t_3} [A(\theta, t_3)]^{-1}$$

$$n_\theta = \left[\frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial \theta} \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial t_3} - \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial \theta} \frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial t_3} \right] [A(\theta, t_3)]^{-1}$$

$$n_z = -r(\theta, t_3) \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial t_3} [A(\theta, t_3)]^{-1} \quad (2.3)$$

Burada,

$$A(\theta, t_3) = \left[\left(r(\theta, t_3) \frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial t_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial \theta} \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial t_3} - \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial \theta} \frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial t_3} \right)^2 + \left(r(\theta, t_3) \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial t_3} \right)^2 \right]$$

$$\left(r(\theta, t_3) \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial t_3} \right)^2 \Big]^{1/2}. \quad (2.4)$$

İleride matris malzemesine ait olan büyüklükleri üst (1), lif ait büyüklükleri ise üst (2) indisleri ile ayırt edeceğiz. Bundan başka, aynı anda gerilme-şekil değiştirme tansörlerinin ve yer değiştirme vektörünün kovaryant ve kontravaryant bileşenleri ile birlikte bu tansörler ve vektörün fiziksel bileşenlerinden de faydalanacağız. Böyle bir yazılım üslubunun seçimi ifade ve denklemlerin yazılımını kısaltmak için yapılacaktır. Bundan başka, tansör notasyonu kullanılacak, tekrarlanan indislere göre Einstein toplam uylasımlı sağlanacaktır. Altı çizili tekrarlanan indisler için ise bu uylasımlı sağlanmayacaktır.

Şimdi, lif ve matris malzemelerinin herbirinde sağlanmak koşulu çerçevesinde (yani parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde) aşağıdaki denklemlerin sağlandığını varsayım.

Denge denklemleri

$$\nabla_i \left[\sigma^{(k)in} \left(g_n^j + \nabla_n u^{(k)j} \right) \right] = 0, \quad k = 1, 2 \quad (2.5)$$

şekil değiştirme ve yerdeğıştirme ilişkileri

$$2\varepsilon_{jm}^{(k)} = \nabla_j u_m^{(k)} + \nabla_m u_j^{(k)} + \nabla_j u^{(k)n} \nabla_m u_n^{(k)}, \quad (2.6)$$

bünye denklemleri

$$\sigma_{(in)}^{(k)} = \left(\lambda^{(k)*} e^{(k)} \right) \delta_i^n + 2 \left(\mu^{(k)*} \varepsilon_{(in)}^{(k)} \right), \quad e^{(k)} = \varepsilon_{rr}^{(k)} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(k)} + \varepsilon_{zz}^{(k)}. \quad (2.7)$$

(2.5) ve (2.6)'da tansör notasyonları kullanılmıştır. (2.7)'de ise $\sigma_{(in)}^{(k)}$ 'lar ve $\varepsilon_{(in)}^{(k)}$ 'lar, sırasıyla gerilme ve şekil değıştirme tansörlerinin fiziksel bileşenlerini göstermektedir. Bundan başka $\lambda^{(k)*}$ ve $\mu^{(k)*}$ aşağıdaki biçimde belirlenmiş operatörlerdir.

$$\begin{aligned} \lambda^{(k)*}(\cdot) &= \lambda_0^{(k)}(\cdot) + \int_0^t \lambda^{(k)}(t-\tau)(\cdot) d\tau \\ \mu^{(k)*}(\cdot) &= \mu_0^{(k)}(\cdot) + \int_0^t \mu^{(k)}(t-\tau)(\cdot) d\tau \end{aligned} \quad (2.8)$$

Burada t zamanı, $\lambda_0^{(k)}$, $\mu_0^{(k)}$ ise $t = 0$ anında matris ($k=1$ 'de) ve lif ($k=2$ 'de) malzemelerinin gevşeme fonksiyonlarının başlangıç değeri ile belirtilen sabitleri göstermektedir. Lif ve

matris arayüzeyi üzerinde (S yüzeyinde) ideal temas koşullarının sağlandığını varsayalım. Bu koşullar aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$\sigma^{(2)\text{in}} \left(g_n^j + \nabla_n u^{(2)j} \right) \Big|_S n_j = \sigma^{(1)\text{in}} \left(g_n^j + \nabla_n u^{(1)j} \right) \Big|_S n_j, \quad u_j^{(2)} \Big|_S = u_j^{(1)} \Big|_S \quad (2.9)$$

(2.9)'da n_j 'ler arayüzeyin birim normal vektörü ($\mathbf{n}$)'nin kovaryant bileşenleridir. Bundan başka, aşağıdaki sınır koşullarının sağlandığını da varsayacağız.

$$\sigma_{zz}^{(1)} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} p, \quad \sigma_{(ij)}^{(1)} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \quad (ij) \neq zz \quad (2.10)$$

İlerideki somut araştırmalar, gerilme ve şekil değiştirme tansörlerinin fiziksel bileşenleri ele alınarak yapılacaktır. Bu durumlarda

$$\sigma_{(ij)} = \sigma^{ij} H_i H_j = \sigma_{ij} \frac{1}{H_i H_j}, \quad \varepsilon_{(ij)} = \varepsilon_{ij} \frac{1}{H_i H_j} = \varepsilon^{ij} H_i H_j, \quad u_{(i)} = u^i H_i = u_i \frac{1}{H_i}, \quad (2.11)$$

formüllerinden yararlanılacaktır. Burada $(ij) = rr, \theta\theta, zz, r\theta, rz, z\theta$, $(i) = r, \theta, z$ 'dir. σ^{ij} , ε^{ij} ve σ_{ij} , ε_{ij} gerilme (σ) ve şekil değiştirme (ε) tansörlerinin ele alınan silindirik koordinat takımındaki kovaryant ve kontravaryant bileşenlerini, u^i , u_i 'ler ise yerdeğiştirme ($\mathbf{u}$) vektörünün bu koordinat takımındaki kovaryant ve kontravaryant bileşenlerini göstermektedir. (2.5), (2.6) denklemlerinin, ele alınan silindirik koordinat takımındaki fiziksel bileşenleri Ek 1'de verilmektedir. (2.11) formülleri tansör ve vektörlerin fiziksel bileşenleri ile tansörel bileşenleri arasındaki ilişkileri göstermektedir. Bu formüllerdeki H_i 'ler ise bilinen Lamé sabitleridir.

Böylece, sonsuz viskoelastik bir ortamdaki sonsuz uzun tek lifin başlangıç küçük eğilmelerinin lif yönünde etki gösteren dış basınç kuvveti altında büyümesinin araştırılması (2.5)-(2.7) denklemler takımının (2.9) temas koşulları çerçevesinde incelenmesine getirilmektedir. Bununla da, bu bölümde ele alacağımız problemin matematiksel formülasyonu, genel bir biçimde yapılmış olmaktadır.

2.2 Çözüm Yönteminin Geliştirilmesi ve Stabilité Kaybı Kriterinin Seçimi

Formülasyonu yukarıda yapılan problem, nonlinear kısmi türevli integro-diferansiyel denklemler takımı için verilmiş bir sınır-değer problemidir. Problemdeki temas koşullarının sağlandığı yüzeylerin ideal dairesel silindirik yüzeylerden çok küçük farklılıkları olduğunu

gözönüne alarak bu problemin incelenmesi için Akbarov ve Guz (1985c, 2000)'da verilmiş sınır-formu pertürbasyon yöntemi uygulayalım. Bu yöntemle göre aranan büyüklükler lifin orta çizgisinin denklemine dahil olan ve onun eğilme derecesini gösteren küçük ε parametresinin serisi halinde ele alınır.

$$\left\{ \sigma_{(ij)}^{(m)}; \varepsilon_{(ij)}^{(m)}; u_{(i)}^{(m)} \right\} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \left\{ \sigma_{(ij)}^{(m),q}; \varepsilon_{(ij)}^{(m),q}; u_{(i)}^{(m),q} \right\} \quad (2.12)$$

Bundan başka, S ara yüzeyinin denklemlerini oluşturan (2.2) ve bu yüzeyin birim normalinin bileşenlerini gösteren (2.3) ifadeleri de ε parametresinin serisi halinde aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$r = R + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k a_k(\theta, t_3), \quad z = t_3 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k b_k(\theta, t_3),$$

$$n_r = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k c_k(\theta, t_3), \quad n_\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k d_k(\theta, t_3), \quad n_z = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k g_k(\theta, t_3) \quad (2.13)$$

(2.13)'deki serilerde ε^k 'ların katsayıları (2.2) ve (2.3)'den kolayca elde edilebildiğinden kısalık için burada verilmemektedir. (2.12) ifadeleri (2.5) denklemlerinde veya Ek 1'de verilen (E1.1)-(E1.3) denklemlerinde yerine yazılarak (2.12)'deki herbir yaklaşım için bilinen işlemler sonucunda uygun denklemler takımı elde edilir. (2.7) bünye denklemleri lineer olduğundan (2.12)'deki herbir yaklaşım için ayrı ayrı sağlanan bünye denklemleri elde edilir. (2.5) ve (2.6)'dan birinci ve daha sonraki yaklaşımlar için elde edilen denklemler ise önceki yaklaşımların büyüklüklerini de içerirler.

Şimdi (2.9) temas koşullarında (2.12) ifadelerini yerine yazarsak (2.13)'den yararlanarak (2.12)'de ε^q 'nın katsayılarını (R, θ, t_3) civarında seriye açar ve daha sonra ε 'nın aynı derecelerine göre gruplaştırma yaparsak, herbir yaklaşım için $r = R$ 'de sağlanan uygun temas koşulları elde ederiz. Bu işlemler çok ayrıntılı bir biçimde Akbarov ve Guz (2000) kaynağında verilmektedir. Şimdi sıfıncı, birinci ve ikinci yaklaşımlar için elde edilen uygun denklem takımlarının ve temas koşullarının ifadelerini ele alalım.

Sıfıncı Yaklaşım:

Açıktır ki, bu yaklaşım için (2.5)-(2.7) denklemleri aynen sağlanacaktır. (2.9) temas koşulları ise $n_r = 1$, $n_\theta = 0$, $n_z = 0$ oldukları gözönüne alınarak $r = R$ 'de yine aynen yazılacaktır.

Bundan başka, (2.10)'dan sıfıncı yaklaşım için

$$\sigma_{zz}^{(1),0} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} p, \quad \sigma_{(ij)}^{(1),0} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \quad (ij) \neq zz \quad (2.14)$$

sınır koşulları elde edeceğiz. Böylece sıfıncı yaklaşım için elde edilen denklem ve temas koşulları nonlinear olacaklardır. Belirtelim ki, sıfıncı yaklaşım Şekil 2.1b'de gösterilen durumda ortaya çıkan gerilme ve şekil değiştirmelerin belirlenmesi için incelenmesi gereken sınır değer problemidir. Uygun mekaniksel görüşler, bu durumda sıfıncı yaklaşım için elde edilen denklemlerdeki nonlinear terimlerin çok önemsiz etkiler verebileceğini ifade etmektedirler. Bu tür varsayımın oluşabilmesi için $\nabla_n u^{(k)j,0} \ll 1$ koşulunun sağlandığını kabul edeceğiz ve bu denklemlerdeki $g_n^j + \nabla_n u^{(k)j,0}$ terimlerini δ_n^j 'lerle yer değiştireceğiz. Burada δ_n^j Kronecker sebolleleridir. Böylece sıfıncı yaklaşımın belirlenmesi için

$$\begin{aligned} \nabla_i \sigma^{(k)ij,0} &= 0, \quad 2\varepsilon_{ij}^{(k),0} = \nabla_j u_i^{(k),0} + \nabla_i u_j^{(k),0}, \\ \sigma_{(in)}^{(k),0} &= \left(\lambda^{(k)*} e^{(k),0} \right) \delta_i^n + 2 \left(\mu^{(k)*} \varepsilon_{(in)}^{(k),0} \right), \quad e^{(k),0} = \varepsilon_{rr}^{(k),0} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(k),0} + \varepsilon_{zz}^{(k),0}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

denklemler takımını ve

$$\sigma_{(ij)}^{(2),0} \Big|_{r_q=R} = \sigma_{(ij)}^{(1),0} \Big|_{r_q=R}, \quad u_{(i)}^{(2),0} \Big|_{r_q=R} = u_{(i)}^{(1),0} \Big|_{r_q=R}; \quad (ij) = rr, r\theta, rz, \quad (i) = r, \theta, z \quad (2.16)$$

temas koşullarını elde ederiz. (2.15)-(2.16) problemlerinin çözümünde (2.14) sınır koşulları da gözönüne alınmak zorundadır. Böylece sıfıncı yaklaşımın belirlenmesi için çözülmesi gereken problemin matematiksel formülasyonu oluşturulmuş olmaktadır.

Birinci yaklaşım:

Önce (2.12)'yi (2.5) ve (2.6)'da yerine yazıp ε^q 'nin eşit kuvvetlerinin katsayılarını eşitlesek q. yaklaşım için aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$$\nabla_i \left[\sigma^{(k)in,q} \left(g_n^j + \nabla_n u^{(k)j,0} \right) \right] + \nabla_i \left(\sigma^{(k)in,0} \nabla_n u^{(k)j,q} \right) = - \sum_{m=1}^{q-1} \nabla_i \left(\sigma^{(k)in,q-m} \nabla_n u^{(k)j,m} \right) \quad (2.17)$$

$$2\varepsilon_{jm}^{(k),q} = \nabla_j u_m^{(k),q} + \nabla_m u_j^{(k),q} + \nabla_j u^{(k)n,0} \nabla_m u_n^{(k),q}$$

$$+ \nabla_j u^{(k)n,q} \nabla_m u_n^{(k),0} + \sum_{s=1}^{q-1} \nabla_j u^{(k)n,q-s} \nabla_m u_n^{(k),s} \quad (2.18)$$

(2.17) ve (2.18)'de, sıfıncı yaklaşımda olduğu gibi, $\nabla_n u^{(k),j,0} \ll 1$ olduğunu varsayar ve $g_n^j + \nabla_n u^{(k),j,0}$ 'ları δ_n^j 'lerle yer değiştirirsek bu denklemleri sırasıyla aşağıdaki gibi ele alırız.

$$\nabla_i \left[\sigma^{(k)ij,q} + \sigma^{(k)in,0} \nabla_n u^{(k),j,q} \right] = - \sum_{m=1}^{q-1} \nabla_i \left(\sigma^{(k)in,q-m} \nabla_n u^{(k),j,m} \right) \quad (2.19)$$

$$2\varepsilon_{ij}^{(k),q} = \nabla_j u_i^{(k),q} + \nabla_i u_j^{(k),q} + \sum_{s=1}^{q-1} \nabla_j u^{(k)n,q-s} \nabla_i u_n^{(k),s} \quad (2.20)$$

İleride biz, sadece (2.19), (2.20) denklemlerinden faydalanacağız ve bu durumda birinci yaklaşım büyüklükleri için

$$\nabla_i \left[\sigma^{(k)ij,1} + \sigma^{(k)in,0} \nabla_n u^{(k),j,1} \right] = 0 \quad (2.21)$$

$$2\varepsilon_{ij}^{(k),1} = \nabla_j u_i^{(k),1} + \nabla_i u_j^{(k),1} \quad (2.22)$$

$$\sigma_{(in)}^{(k),1} = \left(\lambda^{(k)*} e^{(k),1} \right) \delta_i^n + 2 \left(\mu^{(k)*} \varepsilon_{(in)}^{(k),1} \right), \quad e^{(k),1} = \varepsilon_{rr}^{(k),1} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(k),1} + \varepsilon_{zz}^{(k),1}. \quad (2.23)$$

denklemlerini elde ediyoruz. (2.21) ve (2.22) denklemlerinin fiziksel bileşenlerindeki ifadeleri Ek 2'de verilmektedir. Yukarıda söylenen işlemleri (2.9) denklemleri için de sırası ile yapar ve $\nabla_n u^{(k),j,0} \ll 1$ olduğunu da dikkate alırsak bu denklemlerden birinci yaklaşım için aşağıdaki temas koşullarını elde ederiz.

$$\begin{aligned} & \left[\sigma_{(i)r} \right]_{1,1}^{2,1} + f_1 \left[\frac{\partial \sigma_{(i)r}}{\partial r} \right]_{1,0}^{2,0} + \varphi_1 \left[\frac{\partial \sigma_{(i)r}}{\partial z} \right]_{1,0}^{2,0} + \gamma_r \left[\sigma_{(i)r} \right]_{1,0}^{2,0} + \gamma_\theta \left[\sigma_{(i)\theta} \right]_{1,0}^{2,0} + \gamma_z \left[\sigma_{(i)z} \right]_{1,0}^{2,0} = 0 \\ & \left[u_{(i)} \right]_{1,1}^{2,1} + f_1 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial r} \right]_{1,0}^{2,0} + \varphi_1 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial z} \right]_{1,0}^{2,0} = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Böylece birinci yaklaşımın elde edilmesinin gerektirdiği denklemler takımı ve temas koşulları verilmiş olmaktadır. (2.24) temas koşullarında kullanılan işaretlemelerin açıklaması ileride verilmektedir.

İkinci Yaklaşım:

(2.19) ve (2.20)'den bu yaklaşım için sırasıyla aşağıdaki denklemler elde edilecektir.

$$\nabla_i \left[\sigma^{(k)ij,2} + \sigma^{(k)in,0} \nabla_n u^{(k)j,2} \right] = -\nabla_i \left(\sigma^{(k)in,1} \nabla_n u^{(k)j,1} \right) \quad (2.25)$$

$$2\varepsilon_{jm}^{(k),2} = \nabla_j u_m^{(k),2} + \nabla_m u_j^{(k),2} + \nabla_j u^{(k)n,1} \nabla_m u_n^{(k),1} \quad (2.26)$$

$$\sigma_{(in)}^{(k),2} = \left(\lambda^{(k)*} e^{(k),2} \right) \delta_i^n + 2 \left(\mu^{(k)*} \varepsilon_{(in)}^{(k),2} \right), \quad e^{(k),2} = \varepsilon_{rr}^{(k),2} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(k),2} + \varepsilon_{zz}^{(k),2}. \quad (2.27)$$

Bu yaklaşım için de (2.25), (2.26)'nın açık ifadeleri fiziksel bileşenleri ile Ek 2'de verilmiştir. Bir önceki yaklaşımda olduğu gibi (2.9)'dan, gerekli işlemleri yaptıktan sonra aşağıdaki temas koşullarını elde ediyoruz.

$$\begin{aligned} & \left[\sigma_{(i)r} \right]_{1,1}^{2,2} + f_1 \left[\frac{\partial \sigma_{(i)r}}{\partial r} \right]_{1,1}^{2,1} + \varphi_1 \left[\frac{\partial \sigma_{(i)r}}{\partial z} \right]_{1,1}^{2,1} + f_2 \left[\frac{\partial \sigma_{(i)r}}{\partial r} \right]_{1,0}^{2,0} + \varphi_2 \left[\frac{\partial \sigma_{(i)r}}{\partial z} \right]_{1,0}^{2,0} + \\ & (f_1)^2 \left[\frac{\partial^2 \sigma_{(i)r}}{\partial r^2} \right]_{1,0}^{2,0} + f_1 \varphi_1 \left[\frac{\partial^2 \sigma_{(i)r}}{\partial r \partial z} \right]_{1,0}^{2,0} + \frac{1}{2} (\varphi_1)^2 \left[\frac{\partial^2 \sigma_{(i)r}}{\partial z^2} \right]_{1,0}^{2,0} + \\ & \gamma_r \left[\sigma_{(i)r} \right]_{1,1}^{2,1} + f_1 \gamma_r \left[\frac{\partial \sigma_{(i)r}}{\partial r} \right]_{1,0}^{2,0} + \varphi_1 \gamma_r \left[\frac{\partial \sigma_{(i)r}}{\partial z} \right]_{1,0}^{2,0} + \gamma_\theta \left[\sigma_{(i)\theta} \right]_{1,1}^{2,1} + \\ & f_1 \gamma_\theta \left[\frac{\partial \sigma_{(i)\theta}}{\partial r} \right]_{1,0}^{2,0} + \varphi_1 \gamma_\theta \left[\frac{\partial \sigma_{(i)\theta}}{\partial z} \right]_{1,0}^{2,0} + \gamma_z \left[\sigma_{(i)z} \right]_{1,0}^{2,0} + f_1 \gamma_z \left[\frac{\partial \sigma_{(i)z}}{\partial r} \right]_{1,0}^{2,0} + \\ & \beta_r \left[\sigma_{(i)r} \right]_{1,0}^{2,0} + \beta_\theta \left[\sigma_{(i)\theta} \right]_{1,0}^{2,0} + \beta_z \left[\sigma_{(i)z} \right]_{1,0}^{2,0} = 0 \\ & \left[u_{(i)} \right]_{1,1}^{2,2} + f_1 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial r} \right]_{1,1}^{2,1} + \varphi_1 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial z} \right]_{1,1}^{2,1} + f_2 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial r} \right]_{1,0}^{2,0} + \varphi_2 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial z} \right]_{1,0}^{2,0} + \\ & (f_1)^2 \left[\frac{\partial^2 u_{(i)}}{\partial r^2} \right]_{1,0}^{2,0} + f_1 \varphi_1 \left[\frac{\partial^2 u_{(i)}}{\partial r \partial z} \right]_{1,0}^{2,0} + \frac{1}{2} (\varphi_1)^2 \left[\frac{\partial^2 u_{(i)}}{\partial z^2} \right]_{1,0}^{2,0} = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

(2.24) ve (2.28)'de (i) = r, θ, z yer değiştirmelerini yaparsak temas koşullarının, fiziksel

bileşenlerdeki açık ifadelerini elde ederiz. (2.24) ve (2.28)'de aşağıdaki işaretlemlerden yararlanılmıştır.

$$\begin{aligned}
 [\varphi]_{1,s}^{2,s} &= \varphi^{(2),s} - \varphi^{(1),s}; \quad f_1 = \delta(t_3) \cos \theta; \quad \varphi_1 = -R\delta'(t_3) \cos \theta \\
 f_2 &= \frac{R}{2} \left[\frac{(\delta(t_3))^2}{R^2} \sin^2 \theta + (\delta'(t_3) \cos \theta)^2 \right], \quad \varphi_2 = -\delta'(t_3) \delta(t_3) \cos^2 \theta, \\
 \beta_r &= - \left[2\delta(t_3) \delta''(t_3) + (\delta'(t_3))^2 \right] \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \left[\frac{(\delta(t_3))^2}{R^2} \sin^2 \theta + (\delta'(t_3) \cos \theta)^2 \right] \\
 \beta_\theta &= -\frac{1}{2} \sin 2\theta \left[\delta(t_3) \delta''(t_3) - \frac{(\delta(t_3))^2}{R^2} \right], \quad \beta_z = -\frac{1}{R} \delta(t_3) \delta'(t_3) \sin^2 \theta \\
 \gamma_r &= \left(\frac{\delta(t_3)}{R} - \delta''(t_3) R \right) \cos \theta; \quad \gamma_\theta = \frac{\delta(t_3)}{R} \sin \theta; \quad \gamma_z = -\delta'(t_3) \cos \theta; \\
 \delta'(t_3) &= \frac{d\delta(t_3)}{dt_3}, \quad \delta''(t_3) = \frac{d^2\delta(t_3)}{dt_3^2}
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

İleride, yapacağımız araştırmalar sıfırncı, birinci ve ikinci yaklaşımlar çerçevesinde olduğundan daha sonraki yaklaşımlar için oluşan temas koşullarını ve alan denklemlerini burada vermiyoruz.

Sıfırncı, birinci ve ikinci yaklaşımlar için formülasyonu yapılmış problemlerin çözümü sonucunda lifteki başlangıç eğilme genliklerinin verilen dış basınç etkisi altında zamanla büyümesini, ileride ele alacağız. Bu durumda stabilite kaybı kriteri olarak viskoelastik malzemeden yapılmış kiriş, plak ve kabuklar için uygulanan *Hoff (1954) kriterinin benzeri olan kriteri, yani başlangıç eğilme genliklerinin büyüyerek sonsuza gitmesine karşı gelen zaman süresini, kritik zaman* olarak kabul edeceğiz.

2.3 Araştırma Yönteminin Gerektirdiği Sınır Değer Problemlerinin Çözümü

Bu kısımda, yukarıda formülasyonu verilen sıfırncı, birinci ve ikinci yaklaşımlara ait sınır-değer problemlerinin çözümü ile ilgileneceğiz. Önce, bu yaklaşımlara ait problemlerin çözümünü uygun saf elastik durumlarda ele alalım ve (2.15), (2.23), (2.27)'deki $\lambda^{(k)*}$, $\mu^{(k)*}$

operatörlerini sırası ile $\lambda^{(k)}$, $\mu^{(k)}$ sabitleri ile yerdeğistireceğiz. Ayrıca sadelik için, ileride, $\nu^{(1)} = \nu^{(2)}$ ($\nu^{(1)}$ matris malzemesinin, $\nu^{(2)}$ lif malzemesinin Poisson oranları olmak üzere) olduğunu varsayacağız.

Bu durumda sıfırıncı yaklaşım için, bazı basit işlemler sonucunda (2.15)-(2.16) probleminin çözümünü aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz}^{(1),0} = \varepsilon_{zz}^{(2),0} &= \frac{p}{E^{(1)}}, \quad \sigma_{zz}^{(1),0} = p, \quad u_z^{(1),0} = u_z^{(2),0} = \frac{p}{E^{(1)}} z, \quad u_r^{(1),0} = -\nu^{(1)} \varepsilon_{zz}^{(1),0} r \\ u_r^{(2),0} &= -\nu^{(2)} \varepsilon_{zz}^{(2),0} r, \quad u_\theta^{(1),0} = u_\theta^{(2),0} = 0, \quad \sigma_{rr}^{(1),0} = \sigma_{rr}^{(2),0} = \sigma_{\theta\theta}^{(1),0} = \sigma_{\theta\theta}^{(2),0} = 0, \\ \sigma_{zz}^{(2),0} &= p \frac{E^{(2)}}{E^{(1)}} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Akbarov ve Guz (2000)'a göre Poisson oranlarının eşit alınması nümerik sonuçlara önemli bir etkide bulunmamaktadır. Dolayısıyla, $\nu^{(1)} = \nu^{(2)}$ koşulu sadece çözüm işlemlerini basitleştirmek için varsayılmıştır.

Birinci yaklaşımla ilgili olan (2.21)-(2.24) probleminin çözümünü elde edelim. Yukarıda ele alınan kabüller çerçevesinde ve (2.30) denklemlerinin dikkate alınması ile, Ek 2'de silindirik koordinatlardaki fiziksel bileşenleri cinsinden açık olarak verilen (2.21) denklemleri

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \left(\sigma_{rr}^{(k),1} - \sigma_{\theta\theta}^{(k),1} \right) + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(k),1} + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_\theta^{(k),1}}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k),1} + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

haline gelir. Direk sağlamayla, bu denklemlerin (Guz, 1999) üç boyutlu lineerize edilmiş elastisite denklemleri ile çakıştığı görülür. (2.22) denklemleri ise

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^{(k),1} &= \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r}, \quad \varepsilon_{r\theta}^{(k),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial r} - \frac{u_\theta^{(k),1}}{r} \right), \quad \varepsilon_{rz}^{(k),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} \right) \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(k),1} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{u_r^{(k),1}}{r}, \quad \varepsilon_{\theta z}^{(k),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial \theta} \right), \quad \varepsilon_{zz}^{(k),1} = \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z},\end{aligned}\quad (2.32)$$

olur. (2.23) denklemleri ise $\lambda^{(k)*}$, $\mu^{(k)*}$ operatörlerinin sırası ile $\lambda^{(k)}$, $\mu^{(k)}$ sabitleri ile yerdeğiştirmesi ile aynen kalırlar.

(2.1) deklemini ile verdiğimiz lifin orta çizgisinin denklemini

$$x_1 = L \sin \frac{2\pi}{\ell} x_3 = \varepsilon \ell \sin \alpha x_3, \quad x_2 = 0, \quad \delta(x_3) = \ell \sin \alpha x_3 \quad (2.33)$$

olarak seçelim. Buradaki L lif eğilme genliği, ℓ ise eğilmenin periyodudur ve eğilme genliğinin periyoda göre çok küçük olduğunu kabul ederek ($L \ll \ell$), $\varepsilon = L/\ell$ ($0 < \varepsilon \ll 1$) şeklinde küçük bir parametre tanımlıyoruz. (2.24), (2.29) ve (2.23) denklemlerinden, birinci yaklaşım için temas koşullarını

$$\begin{aligned}[\sigma_{rr}]_{1,1}^{2,1} &= 0, \quad [\sigma_{r\theta}]_{1,1}^{2,1} = 0, \quad [\sigma_{rz}]_{1,1}^{2,1} = 2\pi \cos \alpha z (\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0}) \cos \theta, \\ [u_r]_{1,1}^{2,1} &= 0, \quad [u_\theta]_{1,1}^{2,1} = 0, \quad [u_z]_{1,1}^{2,1} = 0.\end{aligned}\quad (2.34)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu denklemlerin çözümü için (2.31) denklemleri de dikkate alınarak aşağıdaki gösterilimi (Guz, 1999) kullanalım.

$$\begin{aligned}u_r^{(k),1} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \psi^{(k)} - \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \chi^{(k)}, \quad u_\theta^{(k),1} = -\frac{\partial}{\partial r} \psi^{(k)} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z} \chi^{(k)}, \\ u_z^{(k),1} &= (\lambda^{(k)} + \mu^{(k)})^{-1} \left((\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}) \Delta_1 + (\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi^{(k)},\end{aligned}$$

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (2.35)$$

(2.35) denklemlerindeki $\psi^{(k)}, \chi^{(k)}$ fonksiyonları aşağıdaki eşitlikleri sağlarlar.

$$\left(\Delta_1^{(k)} + \left(\xi_1^{(k)} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi^{(k)} = 0, \left(\Delta_1^{(k)} + \left(\xi_2^{(k)} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\Delta_1^{(k)} + \left(\xi_3^{(k)} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi^{(k)} = 0 \quad (2.36)$$

(2.36) denklemleri, (2.35) gösterilimleri dikkate alındığında (2.31) ifadelerinden kolayca gösterilebilir. $\xi_i^{(k)}$ ($k=1,2; i=1,2,3$) aşağıdaki şekilde tanımlanırlar:

$$\xi_1^{(k)} = \sqrt{\frac{\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}}{\mu^{(k)}}}, \xi_2^{(k)} = \sqrt{\frac{\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}}{\mu^{(k)}}}, \xi_3^{(k)} = \sqrt{\frac{\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}}{\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}}}. \quad (2.37)$$

(2.36) denklemlerinin çözümü (2.34) koşullarının sağ taraflarının ifadeleri gözönüne alınarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$\Psi^{(1)} = \alpha A_1^{(1)} K_1 \left(\xi_1^{(1)} \alpha r \right) \sin \alpha z \sin \theta,$$

$$\chi^{(1)} = \left[A_2^{(1)} K_1 \left(\xi_2^{(1)} \alpha r \right) + A_3^{(1)} K_1 \left(\xi_3^{(1)} \alpha r \right) \right] \cos \alpha z \cos \theta, \quad (2.38)$$

$$\psi^{(2)} = \alpha A_1^{(2)} I_1 \left(\xi_1^{(2)} \alpha r \right) \sin \alpha z \sin \theta,$$

$$\chi^{(2)} = \left[A_2^{(2)} I_1 \left(\xi_2^{(2)} \alpha r \right) + A_3^{(2)} I_1 \left(\xi_3^{(2)} \alpha r \right) \right] \cos \alpha z \cos \theta. \quad (2.39)$$

Burada $\alpha = 2\pi/\ell$, $I_1(x)$ sanal argumanlı Bessel fonksiyonu ve $K_1(x)$ Macdonald fonksiyonudur. Bu fonksiyonların türevleri

$$I'_n = \frac{1}{2}(I_{n-1} + I_{n+1}), I'_0 = I_1, K'_n = -\frac{1}{2}(K_{n-1} + K_{n+1}), K'_0 = -K_1 \quad (2.40)$$

olarak bilinir. (2.38) fonksiyonlarını (2.23), (2.32), (2.35) denklemlerinde kullanır (2.40)

ilişkilerini dikkate alırsak (2.34) sınır koşullarından aşağıdaki denklemler yazılır.

$$\bar{A}_i^{(1)} U_{ji}^{(1)} + \bar{A}_i^{(2)} U_{ji}^{(2)} = 2\pi \left(\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right) \delta_3^j, \quad i=1,2,3; j=1,2,3,4,5,6$$

$$\bar{A}_i^{(1)} = A_i^{(1)} \alpha^3, \quad \bar{A}_i^{(2)} = A_i^{(2)} \alpha^3 \quad (2.41)$$

Burada δ_3^j Kronecker sembolüdür, denklemlerdeki diğer sembollerin açık ifadeleri ise Ek 3'de (E3.1) ile verilmiştir. (2.41) denklemleri 6×6 'lık bir sistemdir. Bu sistem çözülerek bilinmeyenler belirlenir.

Şimdi ikinci yaklaşımla ilgili bir önceki bölümde formülasyonu verilen sınır-değer problemini inceleyelim. Yukarıda yapılan kabülleri ve sıfıncı yaklaşım için elde edilen sonuçları dikkate alırsak (2.25) denklemini Ek 2'den de yararlanarak aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),2}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),2}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),2}}{\partial z} + \frac{1}{r} \left(\sigma_{rr}^{(k),2} - \sigma_{\theta\theta}^{(k),2} \right) + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),2}}{\partial z^2} = \\ & F_1 \left(\sigma_{rr}^{(k),1}, \sigma_{r\theta}^{(k),1}, \dots, u_r^{(k),1}, u_{\theta}^{(k),1}, \dots, \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial r}, \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial \theta}, \dots, \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r}, \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta}, \dots, \right. \\ & \left. \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial z \partial \theta}, \dots \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),2}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),2}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),2}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(k),2} + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_{\theta}^{(k),2}}{\partial z^2} = \\ & F_2 \left(\sigma_{rr}^{(k),1}, \sigma_{r\theta}^{(k),1}, \dots, u_r^{(k),1}, u_{\theta}^{(k),1}, \dots, \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial r}, \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial \theta}, \dots, \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r}, \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta}, \dots, \right. \\ & \left. \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial z \partial \theta}, \dots \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),2}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),2}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),2}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k),2} + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),2}}{\partial z^2} =$$

$$F_3 \left(\sigma_{rr}^{(k),1}, \sigma_{r\theta}^{(k),1}, \dots, u_r^{(k),1}, u_\theta^{(k),1}, \dots, \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial r}, \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial \theta}, \dots, \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r}, \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial \theta}, \dots, \right. \\ \left. \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial z \partial \theta}, \dots \right) \quad (2.42)$$

(2.42) denklemlerindeki sağ taraftaki fonksiyonların açık ifadeleri Ek 2'den görülebilir. İleride de değineceğimiz gibi, doğrudan sağlama yolu ile (2.42) denklemlerinin sağ taraflarının çok küçük değerler oldukları görüleceğinden bunları ihmal edeceğiz. Dolayısıyla bu denklemler

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),2}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),2}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),2}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr}^{(k),2} - \sigma_{\theta\theta}^{(k),2}) + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),2}}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),2}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),2}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),2}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(k),2} + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_\theta^{(k),2}}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),2}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),2}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),2}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k),2} + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),2}}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

haline gelir ki, bunların birinci yaklaşımdaki denklemlerle çakıştığı görülür. (2.30) dikkate alınır ve yerdeğistirmelerin çok küçük olduğu hesaba katılırsa Ek 2'deki ifadelerinden faydalanılarak (2.26) ilişkileri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^{(k),2} = \frac{\partial u_r^{(k),2}}{\partial r}, \quad \varepsilon_{r\theta}^{(k),2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k),2}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^{(k),2}}{\partial r} - \frac{u_\theta^{(k),2}}{r} \right), \quad \varepsilon_{rz}^{(k),2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z^{(k),2}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(k),2}}{\partial z} \right) \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(k),2} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(k),2}}{\partial \theta} + \frac{u_r^{(k),2}}{r}, \quad \varepsilon_{\theta z}^{(k),2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta^{(k),2}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(k),2}}{\partial \theta} \right), \quad \varepsilon_{zz}^{(k),2} = \frac{\partial u_z^{(k),2}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

(2.27) ilişkileri ise $\lambda^{(k)*}$, $\mu^{(k)*}$ operatörlerinin sırası ile $\lambda^{(k)}$, $\mu^{(k)}$ sabitleri ile yerdeğistirmesi ile aynen kalırlar. İkinci yaklaşımın temas koşulları (2.28) denklemleri, sıfıncı yaklaşımın çözümü (2.30), birinci yaklaşım temas koşulları (2.34) ve bunların

çözümleri dikkate alınırsa aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned}
[\sigma_{rr}]_{1,2}^{2,2} &= (1 + \cos 2\theta) \left\{ -\frac{\pi}{2} \left[\bar{A}_i^{(1)} U_{rr(i)}^{(1)} - \bar{A}_i^{(2)} U_{rr(i)}^{(2)} \right] + \pi^2 (\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0}) \right\} \\
&\quad + \cos 2\alpha z (1 + \cos 2\theta) \left\{ \frac{\pi}{2} \left[\bar{A}_i^{(1)} U_{rr(i)}^{(1)} - \bar{A}_i^{(2)} U_{rr(i)}^{(2)} \right] + \pi^2 (\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0}) \right\} \\
[\sigma_{r\theta}]_{1,2}^{2,2} &= \sin 2\theta \left\{ -\frac{\pi}{2} \left[\bar{A}_i^{(1)} U_{r\theta(i)}^{(1)} - \bar{A}_i^{(2)} U_{r\theta(i)}^{(2)} \right] - \frac{\pi}{2\kappa} \left[\bar{A}_i^{(1)} U_{\theta\theta(i)}^{(1)} - \bar{A}_i^{(2)} U_{\theta\theta(i)}^{(2)} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\pi}{2} \left[\bar{A}_i^{(1)} U_{t3(i)}^{(1)} - \bar{A}_i^{(2)} U_{t3(i)}^{(2)} \right] \right\} + \cos 2\alpha z \sin 2\theta \left\{ \frac{\pi}{2} \left[\bar{A}_i^{(1)} U_{r\theta(i)}^{(1)} - \bar{A}_i^{(2)} U_{r\theta(i)}^{(2)} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\pi}{2\kappa} \left[\bar{A}_i^{(1)} U_{\theta\theta(i)}^{(1)} - \bar{A}_i^{(2)} U_{\theta\theta(i)}^{(2)} \right] + \frac{\pi}{2} \left[\bar{A}_i^{(1)} U_{t3(i)}^{(1)} - \bar{A}_i^{(2)} U_{t3(i)}^{(2)} \right] \right\} \\
[\sigma_{r3}]_{1,2}^{2,2} &= \sin 2\alpha z \left[(1 + \cos 2\theta) \frac{\pi}{2} \left\{ -\left[\bar{A}_i^{(1)} U_{r33(i)}^{(1)} - \bar{A}_i^{(2)} U_{r33(i)}^{(2)} \right] + \left[\bar{A}_i^{(1)} U_{33(i)}^{(1)} - \bar{A}_i^{(2)} U_{33(i)}^{(2)} \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2\pi\kappa (\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0}) \right\} + (1 - \cos 2\theta) \frac{\pi}{2\kappa} \left\{ -\left[\bar{A}_i^{(1)} U_{t3(i)}^{(1)} - \bar{A}_i^{(2)} U_{t3(i)}^{(2)} \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2\pi (\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0}) \right\} \right] \\
[u_r]_{1,2}^{2,2} &= (1 + \cos 2\theta) \frac{\pi}{2\alpha} \left[\bar{A}_i^{(1)} U_{rr(i)}^{(1)} - \bar{A}_i^{(2)} U_{rr(i)}^{(2)} \right] \\
&\quad - \cos 2\alpha z (1 + \cos 2\theta) \frac{\pi}{2\alpha} \left[\bar{A}_i^{(1)} U_{rr(i)}^{(1)} - \bar{A}_i^{(2)} U_{rr(i)}^{(2)} \right] \\
[u_\theta]_{1,2}^{2,2} &= -\sin 2\theta \frac{\pi}{2\alpha} \left[\bar{A}_i^{(1)} U_{r\theta(i)}^{(1)} - \bar{A}_i^{(2)} U_{r\theta(i)}^{(2)} \right] \\
&\quad + \cos 2\alpha z \sin 2\theta \frac{\pi}{2\alpha} \left[\bar{A}_i^{(1)} U_{r\theta(i)}^{(1)} - \bar{A}_i^{(2)} U_{r\theta(i)}^{(2)} \right] \\
[u_z]_{1,2}^{2,2} &= -\sin 2\alpha z (1 + \cos 2\theta) \frac{\pi}{2\alpha} \left[\bar{A}_i^{(1)} U_{3r(i)}^{(1)} - \bar{A}_i^{(2)} U_{3r(i)}^{(2)} \right], \quad \kappa = \alpha R
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Bu denklemlerin sağ tarafındaki $\bar{A}_i^{(k)}$ ($k = 1, 2; i = \overline{1, 6}$)'lar birinci yaklaşımdan elde edilmiş

olan katsayılarıdır. U fonksiyonları ise birinci yaklaşımla ilgili büyüklükler olup açık ifadeleri Ek 3'de (E3.2) ile verilmiştir. (2.45) temas koşullarını çözebilmek için, sağ tarafındaki ifadelere göre αz içermeyen temas koşulları ve αz içeren temas koşulları şeklinde iki gruba ayırabiliriz.

αz içermeyen temas koşullarının çözümü için aşağıda verilen Papkovitch-Neuber gösterilimi kullanılacaktır.

$$u_r^{(k)} = 4(1-\nu^{(k)})B_r^{(k)} - \frac{\partial(rB_r^{(k)})}{\partial r} - \frac{\partial B_0^{(k)}}{\partial r}, \quad u_\theta^{(k)} = 4(1-\nu^{(k)})B_\theta^{(k)} - \frac{\partial B_r^{(k)}}{\partial \theta} - \frac{\partial B_0^{(k)}}{r\partial \theta}$$

$$u_z^{(k)} = -\frac{\partial(rB_r^{(k)})}{\partial z} - \frac{\partial B_0^{(k)}}{\partial z}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\Delta B_0^{(k)} = 0, \quad \Delta B_r^{(k)} - \frac{B_r^{(k)}}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_\theta^{(k)}}{\partial \theta} = 0, \quad \Delta B_\theta^{(k)} - \frac{B_\theta^{(k)}}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r^{(k)}}{\partial \theta} = 0 \quad (2.46)$$

Buna göre $B_0^{(k)}, B_r^{(k)}, B_\theta^{(k)}$ fonksiyonlarını aşağıdaki gibi belirleriz:

$$B_0^{(1)} = 0, \quad B_r^{(1),2} = C_1^{(1)} \frac{1}{r} + \left[C_2^{(1)} \frac{1}{r} + C_3^{(1)} \frac{1}{r^3} \right] \cos 2\theta, \quad B_\theta^{(1),2} = \left[-C_2^{(1)} \frac{1}{r} + C_3^{(1)} \frac{1}{r^3} \right] \sin 2\theta$$

$$B_0^{(2)} = 0, \quad B_r^{(2),2} = C_1^{(2)} r + \left[C_2^{(2)} r + C_3^{(2)} r^3 \right] \cos 2\theta, \quad B_\theta^{(2),2} = \left[-C_2^{(2)} r + C_3^{(2)} r^3 \right] \sin 2\theta \quad (2.47)$$

(2.47)'yi ele alıp (2.27), (2.44) ve (2.46) ilişkilerini de dikkate alırsak αz içermeyen temas koşullarından oluşan sistemi aşağıdaki gibi yazarız:

$$\bar{C}_j^{(1)} T_{kj}^{(1)} - \bar{C}_j^{(2)} T_{kj}^{(2)} = -\frac{\pi}{2} \left[\bar{A}_i^{(1)} U_{rr(i)}^{(1)} - \bar{A}_i^{(2)} U_{rr(i)}^{(2)} \right] + \pi^2 (\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0}), \quad k = 1, 2; \quad i, j = \overline{1, 6}$$

$$\bar{C}_j^{(1)} T_{3(j)}^{(1)} - \bar{C}_j^{(2)} T_{3(j)}^{(2)} = \sin 2\theta \left\{ -\frac{\pi}{2} \left[\bar{A}_i^{(1)} U_{rr(i)}^{(1)} - \bar{A}_i^{(2)} U_{rr(i)}^{(2)} \right] - \frac{\pi}{2\kappa} \left[\bar{A}_i^{(1)} U_{tt(i)}^{(1)} - \bar{A}_i^{(2)} U_{tt(i)}^{(2)} \right] \right. \\ \left. + \frac{\pi}{2} \left[\bar{A}_i^{(1)} U_{t3(i)}^{(1)} - \bar{A}_i^{(2)} U_{t3(i)}^{(2)} \right] \right\}$$

$$\bar{C}_j^{(1)} T_{kj}^{(1)} - \bar{C}_j^{(2)} T_{kj}^{(2)} = \frac{\pi}{2} \left[\bar{A}_i^{(1)} U_{rr(i)}^{(1)} - \bar{A}_i^{(2)} U_{rr(i)}^{(2)} \right], \quad k = 4, 5; \quad i, j = \overline{1, 6}$$

$$\bar{C}_j^{(1)} T_{6(j)}^{(1)} - \bar{C}_j^{(2)} T_{6(j)}^{(2)} = -\frac{\pi}{2} \left[\bar{A}_i^{(1)} U_{\text{tr}(i)}^{(1)} - \bar{A}_i^{(2)} U_{\text{tr}(i)}^{(2)} \right] \quad (2.48)$$

$$\bar{C}_1^{(1)} = C_1^{(1)} \alpha^2, \bar{C}_2^{(1)} = C_2^{(1)} \alpha^2, \bar{C}_3^{(1)} = C_3^{(1)} \alpha^4, \bar{C}_1^{(2)} = C_1^{(2)}, \bar{C}_2^{(2)} = C_2^{(2)}, \bar{C}_3^{(2)} = C_3^{(2)} \alpha^{-2}$$

Buradaki katsayılar ve denklemlerin sol tarafındaki T fonksiyonlarının açık şekli Ek 3’de (E3.3) ile verilmiştir. Böylece (2.48) sistemi çözülerek $\bar{C}_j^{(k)}$ katsayıları belirlenir.

Şimdi ikinci yaklaşımda αz içeren temas koşullarının çözümü için yine (2.35) gösterilimini kullanarak ve (2.36) denklemlerini çözerek aşağıdaki fonksiyonları yazalım:

$$\begin{aligned} \psi^{(1),2} &= \alpha D_{12}^{(1)} K_2(2\xi_1^{(1)} \alpha r) \sin 2\theta \cos 2\alpha z, \\ \chi^{(1),2} &= D_{20}^{(1)} K_0(2\xi_2^{(1)} \alpha r) + D_{30}^{(1)} K_0(2\xi_3^{(1)} \alpha r) + \left[D_{22}^{(1)} K_2(2\xi_2^{(1)} \alpha r) + D_{32}^{(1)} K_2(2\xi_3^{(1)} \alpha r) \right] \cos 2\theta \sin 2\alpha z, \\ \psi^{(2),2} &= \alpha D_{12}^{(2)} I_2(2\xi_1^{(1)} \alpha r) \sin 2\theta \cos 2\alpha z, \\ \chi^{(2),2} &= D_{20}^{(2)} I_0(2\xi_2^{(2)} \alpha r) + D_{30}^{(2)} I_0(2\xi_3^{(2)} \alpha r) + \left[D_{22}^{(2)} I_2(2\xi_2^{(2)} \alpha r) + D_{32}^{(2)} I_2(2\xi_3^{(2)} \alpha r) \right] \cos 2\theta \sin 2\alpha z, \end{aligned} \quad (2.49)$$

Bu durumda (2.40), (2.27) ve (2.44) ilişkilerinden faydalanırsak, (2.45)’den αz içeren temas koşullarından oluşan denklem sistemini aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$\begin{aligned} \bar{D}_{12}^{(k)} M_{n12}^{(k)} + \bar{D}_{2(j)}^{(k)} M_{n2(j)}^{(k)} + \bar{D}_{3(j)}^{(k)} M_{n3(j)}^{(k)} &= \frac{\pi}{2} \left[\bar{A}_i^{(1)} U_{\text{tr}(i)}^{(1)} - \bar{A}_i^{(2)} U_{\text{tr}(i)}^{(2)} \right] \\ &+ \pi^2 (\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0}), \quad n = 1, 2 \\ \bar{D}_{12}^{(k)} M_{312}^{(k)} + \bar{D}_{2(j)}^{(k)} M_{32(j)}^{(k)} + \bar{D}_{3(j)}^{(k)} M_{33(j)}^{(k)} &= \left\{ \frac{\pi}{2} \left[\bar{A}_i^{(1)} U_{\text{tr}(i)}^{(1)} - \bar{A}_i^{(2)} U_{\text{tr}(i)}^{(2)} \right] \right. \\ &+ \frac{\pi}{2\kappa} \left[\bar{A}_i^{(1)} U_{\text{tt}(i)}^{(1)} - \bar{A}_i^{(2)} U_{\text{tt}(i)}^{(2)} \right] + \frac{\pi}{2} \left[\bar{A}_i^{(1)} U_{\text{t3}(i)}^{(1)} - \bar{A}_i^{(2)} U_{\text{t3}(i)}^{(2)} \right] \left. \right\} \\ \bar{D}_{12}^{(k)} M_{n12}^{(k)} + \bar{D}_{2(j)}^{(k)} M_{n2(j)}^{(k)} + \bar{D}_{3(j)}^{(k)} M_{n3(j)}^{(k)} &= \frac{\pi}{2} \left\{ - \left[\bar{A}_i^{(1)} U_{\text{r33}(i)}^{(1)} - \bar{A}_i^{(2)} U_{\text{r33}(i)}^{(2)} \right] \right. \\ &+ \left. \left[\bar{A}_i^{(1)} U_{\text{33}(i)}^{(1)} - \bar{A}_i^{(2)} U_{\text{33}(i)}^{(2)} \right] - 2\pi\kappa (\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0}) \right\} \end{aligned}$$

$$+ (-1)^n \frac{\pi}{2\kappa} \left\{ - \left[\bar{A}_i^{(1)} U_{t3(i)}^{(1)} - \bar{A}_i^{(2)} U_{t3(i)}^{(2)} \right] + 2\pi \left(\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right) \right\} \Bigg] , n = 4,5$$

$$\bar{D}_{12}^{(k)} M_{n12}^{(k)} + \bar{D}_{2(j)}^{(k)} M_{n2(j)}^{(k)} + \bar{D}_{3(j)}^{(k)} M_{n3(j)}^{(k)} = -\frac{\pi}{2\alpha} \left[\bar{A}_i^{(1)} U_{rt(i)}^{(1)} - \bar{A}_i^{(2)} U_{rt(i)}^{(2)} \right] , n = 6,7$$

$$\bar{D}_{12}^{(k)} M_{812}^{(k)} + \bar{D}_{2(j)}^{(k)} M_{82(j)}^{(k)} + \bar{D}_{3(j)}^{(k)} M_{83(j)}^{(k)} = \frac{\pi}{2\alpha} \left[\bar{A}_i^{(1)} U_{rt(i)}^{(1)} - \bar{A}_i^{(2)} U_{rt(i)}^{(2)} \right]$$

$$\bar{D}_{12}^{(k)} M_{n12}^{(k)} + \bar{D}_{2(j)}^{(k)} M_{n2(j)}^{(k)} + \bar{D}_{3(j)}^{(k)} M_{n3(j)}^{(k)} = -\frac{\pi}{2\alpha} \left[\bar{A}_i^{(1)} U_{3rt(i)}^{(1)} - \bar{A}_i^{(2)} U_{3rt(i)}^{(2)} \right] , n = 9,10 \quad (2.50)$$

$$\bar{D}_{12}^{(k)} = D_{12}^{(k)} \alpha^3 , \bar{D}_{2(j)}^{(k)} = D_{2(j)}^{(k)} \alpha^3 , \bar{D}_{3(j)}^{(k)} = D_{3(j)}^{(k)} \alpha^3$$

Yukarıda $k = 1,2$, $j = 0,2$, $i = \overline{1,6}$ dir. Bu denklemlerin sağ tarafındaki büyüklükler birinci yaklaşımdan belli olan büyüklüklerdir, sol taraftaki M fonksiyonlarının açık şekli ise Ek 3’de (E3.4) ile verilmiştir. Böylece ikinci yaklaşımla ilgili sınır-değer problemi de çözülmüş olmaktadır.

2.4 Stabilité Kaybı Öncesi Gerilme Yayılımına Ait Bazı Sonuçlar

Gerilme yayılımına ait incelemeler σ_{nt} , σ_{ne} kayma gerilmeleri ve σ_{nn} normal gerilmesine ait sayısal sonuçlar elde etme ve bunları yorumlama çerçevesinde yapılmıştır. Sözü edilen gerilmeler matris ve lif arakesit yüzeyi olan S yüzeyi üzerinde ele alınmıştır. σ_{nt} ve σ_{ne} kayma gerilmeleri sırasıyla S yüzeyine teğet τ ve e vektörleri doğrultusundaki, σ_{nn} normal gerilmesi ise n normal vektörü doğrultusundaki gerilmelerdir (Şekil 2.1a). Eğilmenin ihmal edilmesi durumuna karşı gelen $\varepsilon = 0$ halinde (Şekil 2.1b) σ_{nn} , σ_{nt} , σ_{ne} gerilmeleri sırasıyla σ_{rr} , σ_{rz} , $\sigma_{r\theta}$ ile çakışır. $v^{(1)} = v^{(2)}$ durumunda $\varepsilon = 0$ koşulu altında $\sigma_{nn} \equiv \sigma_{rr} \equiv \sigma_{nt} \equiv \sigma_{rz} \equiv \sigma_{ne} \equiv \sigma_{r\theta} \equiv 0$ elde edilir ki, bu ise aşağıda verilecek gerilmelerin lifin eğilmesinden kaynaklandığını göstermektedir. Kompozitin yapışma (adhesion) mukavemeti direkt olarak bu gerilmelere bağlıdır. Dolayısıyla bu anlamda da gerilme araştırmaları ayrı bir öneme sahiptir.

Sayısal sonuçlara geçmeden önce sözü edilen gerilme ifadelerinin elde edilmesi konusundan kısaca söz edelim. (2.2) ifadelerini seriye açar ve bunları (2.3) ilişkilerinde kullanırsak S yüzeyinin normal vektörünün bileşenlerini aşağıdaki gibi buluruz.

$$n_r = 1 - \varepsilon^2 \frac{(R^2 (\delta'(t_3))^2 + (\delta(t_3))^2) \sin^2 \theta + R^2 (\delta'(t_3))^2 \cos 2\theta}{2R^2}$$

$$n_\theta = \varepsilon \frac{\delta(t_3) \sin \theta}{R}, \quad n_z = -\varepsilon \delta'(t_3) \cos \theta - \varepsilon^2 \frac{\delta(t_3) \delta'(t_3) \sin^2 \theta}{R} \quad (2.51)$$

Gerilme vektörünün bileşenlerini p_r , p_θ , p_z ile gösterirsek aşağıdaki ilişkileri yazarız:

$$p_{(i)} = \sigma_{(i)r} n_r + \sigma_{(i)\theta} n_\theta + \sigma_{(i)z} n_z, \quad i = r, \theta, z \quad (2.52)$$

Buradan normal gerilmenin

$$\sigma_{nn} = p_r n_r + p_\theta n_\theta + p_z n_z \quad (2.53)$$

şeklinde olan ifadesiyle (2.12) ilişkilerini de dikkate alırsak bu gerilmenin açık ifadesini

$$\sigma_{nn} = \varepsilon \sigma_{rr}^{(k),1} + \varepsilon^2 \left\{ \sigma_{rr}^{(k),2} + \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial r} \delta(t_3) \cos \theta - \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial z} R \delta'(t_3) \cos \theta + 2 \sigma_{r\theta}^{(k),1} \frac{\delta(t_3) \sin \theta}{R} \right. \\ \left. - 2 \sigma_{rz}^{(k),1} \delta'(t_3) \cos \theta + \sigma_{zz}^{(k),0} (\delta'(t_3))^2 \cos^2 \theta \right\} \quad (2.54)$$

olarak elde ederiz. Yüzey denkleminin t_3 'e göre türevini alır bu ifadeyi birimleştirir ve p vektörü ile skaler çarparsak, τ doğrultusundaki kayma gerilmesinin açık ifadesini

$$\sigma_{n\tau} = \varepsilon \left(\sigma_{rz}^{(k),1} - \sigma_{zz}^{(k),0} \delta'(t_3) \cos \theta \right) + \varepsilon^2 \left\{ \sigma_{rz}^{(k),2} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial r} \delta(t_3) \cos \theta - \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial z} R \delta'(t_3) \cos \theta \right. \\ \left. + \sigma_{rr}^{(k),1} \delta'(t_3) \cos \theta + \sigma_{z\theta}^{(k),1} \frac{\delta(t_3) \sin \theta}{R} - \sigma_{zz}^{(k),1} \delta'(t_3) \cos \theta - \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\delta(t_3) \delta'(t_3) \sin^2 \theta}{R} \right\} \quad (2.55)$$

olarak buluruz. Yüzey denkleminin θ 'ya göre türevini alır bu ifadeyi birimleştirir ve p vektörü ile skaler çarparsak e doğrultusundaki kayma gerilmesinin açık ifadesini

$$\sigma_{ne} = \varepsilon \sigma_{r\theta}^{(k),1} + \varepsilon^2 \left\{ \sigma_{r\theta}^{(k),2} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial r} \delta(t_3) \cos \theta - \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial z} R \delta'(t_3) \cos \theta + \sigma_{\theta\theta}^{(k),1} \frac{\delta(t_3) \sin \theta}{R} \right. \\ \left. - \sigma_{\theta z}^{(k),1} \delta'(t_3) \cos \theta - \sigma_{rr}^{(k),1} \frac{\delta(t_3) \sin \theta}{R} + \sigma_{rz}^{(k),1} \delta'(t_3) \sin \theta - \sigma_{zz}^{(k),0} (\delta'(t_3))^2 \cos \theta \sin \theta \right\} \quad (2.56)$$

olarak elde ederiz. (2.54), (2.55) ve (2.56) ifadelerinde (2.30) ilişkileri dikkate alınmış, dolayısıyla sıfırcı yaklaşımı sıfır olan gerilmeler alınmamıştır.

Bir önceki kısımda elde edilen sistemler FORTRAN programlama dili ile kodlanarak çözülmüş ve çok sayıda sayısal sonuçlar elde edilmiştir. Stabilité kaybı öncesi gerilme yayılımına ait elde edilen sonuçlar özel durumlarda, yani geometrik nonlineeritenin etkisinin çok az olduğu durumlarda Akbarov ve Guz (1985a)'unkilerle örtüşmektedir.

Çizelge 2.1 Çeşitli $E^{(2)}/E^{(1)}$ ve $p/E^{(1)}$ 'ler için $\sigma_{nn}/|p|$ değerleri ($\kappa = 0.5, \varepsilon = 0.015$)

$\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}$	Yak. No.	$\epsilon = p/E^{(1)}$							
		Çekme				Basınç			
		$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$-5 \cdot 10^{-5}$	$-5 \cdot 10^{-4}$	$-5 \cdot 10^{-3}$	$-5 \cdot 10^{-2}$
10	1	0.1378	0.1376	0.1363	0.1248	-0.1378	-0.1379	-0.1393	-0.1549
	2	0.1372	0.1371	0.1358	0.1240	-0.1373	-0.1374	-0.1388	-0.1548
20	1	0.2684	0.2679	0.2635	0.2269	-0.2685	-0.2689	-0.2736	-0.3337
	2	0.2687	0.2682	0.2637	0.2267	-0.2688	-0.2693	-0.2740	-0.3349
50	1	0.5409	0.5392	0.5224	0.4011	-0.5413	-0.5431	-0.5615	-0.8653
	2	0.5435	0.5417	0.5247	0.4022	-0.5439	-0.5456	-0.5642	-0.8711
100	1	0.7949	0.7912	0.7560	0.5288	-0.7957	-0.7995	-0.8392	-1.7362
	2	0.7996	0.7958	0.7604	0.5310	-0.8004	-0.8042	-0.8443	-1.7497

Çizelge 2.2 Çeşitli $E^{(2)}/E^{(1)}$ ve $p/E^{(1)}$ 'ler için $\sigma_{nt}/|p|$ değerleri ($\kappa = 0.5, \varepsilon = 0.015$)

$\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}$	Yak. No.	$\epsilon = p/E^{(1)}$							
		Çekme				Basınç			
		$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$-5 \cdot 10^{-5}$	$-5 \cdot 10^{-4}$	$-5 \cdot 10^{-3}$	$-5 \cdot 10^{-2}$
10	1	-0.2604	-0.2603	-0.2594	-0.2515	0.2604	0.2605	0.2615	0.2727
	2	-0.2604	-0.2603	-0.2594	-0.2515	0.2604	0.2605	0.2615	0.2727
20	1	-0.3520	-0.3517	-0.3486	-0.3237	0.3521	0.3524	0.3557	0.3980
	2	-0.3520	-0.3517	-0.3486	-0.3237	0.3521	0.3524	0.3557	0.3980
50	1	-0.5314	-0.5302	-0.5189	-0.4379	0.5317	0.5329	0.5453	0.7519
	2	-0.5314	-0.5302	-0.5189	-0.4379	0.5317	0.5329	0.5453	0.7519
100	1	-0.6955	-0.6930	-0.6696	-0.5195	0.6960	0.6985	0.7249	1.3252
	2	-0.6955	-0.6930	-0.6696	-0.5195	0.6960	0.6985	0.7249	1.3252

Çizelge 2.3 Çeşitli $E^{(2)}/E^{(1)}$ ve $p/E^{(1)}$ 'ler için $\sigma_{ne}/|p|$ değerleri ($\kappa = 0.5, \varepsilon = 0.015$)

$\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}$	Yak No	$\varepsilon = p/E^{(1)}$							
		Çekme				Basınç			
		5.10^{-5}	5.10^{-4}	5.10^{-3}	5.10^{-2}	-5.10^{-5}	-5.10^{-4}	-5.10^{-3}	-5.10^{-2}
10	1	-0.1207	-0.1206	-0.1194	-0.1095	0.1207	0.1208	0.1220	0.1355
	2	-0.1207	-0.1206	-0.1194	-0.1095	0.1207	0.1208	0.1220	0.1355
20	1	-0.2487	-0.2483	-0.2442	-0.2105	0.2488	0.2493	0.2536	0.3090
	2	-0.2487	-0.2483	-0.2442	-0.2105	0.2488	0.2492	0.2536	0.3090
50	1	-0.5211	-0.5194	-0.5032	-0.3867	0.5215	0.5232	0.5409	0.8333
	2	-0.5211	-0.5194	-0.5032	-0.3866	0.5215	0.5232	0.5409	0.8333
100	1	-0.7764	-0.7728	-0.7385	-0.5167	0.7772	0.7809	0.8197	1.6954
	2	-0.7764	-0.7728	-0.7385	-0.5167	0.7772	0.7809	0.8196	1.6953

Sayısal sonuçların incelenmesine geçmeden önce belirtelim ki, ele alacağımız gerilmelerin lif ve matris arayüzeyindeki yayılımı nitelik bakımından Akbarov ve Guz (1985a) yayınında olduğu gibidir. Yani bu yüzeyin ($\theta = 0, \alpha_3 = \pi/2$), ($\theta = 0, \alpha_3 = 0$), ($\theta = \pi/2, \alpha_3 = \pi/2$) koordinatlarına karşı gelen noktalarında sırası ile σ_{nn} , σ_{nt} ve σ_{ne} gerilmeleri mutlak maksimal değerlerini almaktadırlar. Bu gerilmelerin arayüzey üzerinde yayılımı hakkında bir sonraki bölümde daha detaylı bilgi verilecektir. Burada ise yukarıda söylenenleri gözönüne alarak σ_{nn} , σ_{nt} σ_{ne} gerilmelerinin belirtilen noktalardaki değerlerine basınç ve çekme durumlarında geometrik nonlinearite etkisini problem parametrelerinin bazı değerlerinde inceleyelim. Geometrik nonlinearite etkisini $\varepsilon = p/E^{(1)}$ değerleri aracılığı ile ele alacağız. Bilindiği üzere geometrik lineer durumda sözkonusu gerilmeler için elde edilen sonuçlar çekme ($\varepsilon > 0$) ve basınç ($\varepsilon < 0$) durumlarında ancak işaret farkı göstermektedir. İncelenen durumda ise çekme ve basınç, sadece işaret farkı değil değerce de belirgin etki yapmaktadır. Söylenenleri Çizelge 2.1-2.3'de sırası ile $\sigma_{nn}/|p|$, $\sigma_{nt}/|p|$ ve $\sigma_{ne}/|p|$ 'ler için verilen değerler kanıtlamaktadır. Bu çizelgelerdeki değerler $\kappa = 2\pi R/\ell = 0.5$, $\varepsilon = 0.015$, $v^{(1)} = v^{(2)} = 0.3$ durumunda $E^{(2)}/E^{(1)}$ ve ε 'nin farklı değerlerinde elde edilmiştir ve bu değerler birinci ve ikinci yaklaşımlar çerçevesinde verilmektedir. Bir daha belirtelim ki, problem incelemesinde kabul edilen koşullar çerçevesinde (yani $v^{(1)} = v^{(2)}$ olmasından dolayı) sıfıncı yaklaşımda bu gerilmeler özdeşlikle sıfıra eşittir. Dolayısı ile bu gerilmelerin tablolarındaki değerleri lifin başlangıç eğilmesinden kaynaklanmaktadır.

Çizelgelerden görüldüğü gibi, $|\epsilon|$ değerleri küçüldükçe ele alınan gerilmelerin değerleri geometrik lineer durumundaki (Akbarov ve Guz, 1985a, 2000) değerlere yaklaşmakta ve $|\epsilon| = 5.10^{-5}$ durumunda ise çakışmaktadır. Yine tablolardan, $|\epsilon| = 5.10^{-5}$ durumunda gerilmelerin çekme ve basınçtaki mutlak değerleri hemen hemen aynı olduğu izlenebilmektedir. Bundan başka Çizelge 2.1-2.3'de verilen sonuçların karşılaştırılması gösterir ki, çekme durumlarında $|\epsilon|$ değerlerinin artması ile gerilmelerin mutlak değeri küçülmekte, basınç durumunda ise büyümektedir. Söz konusu olan büyüme ve küçülmeler $E^{(2)}/E^{(1)} \geq 50$ durumlarında çok önemli boyutlardadır. Dolayısı ile ele alınan gerilmelerin hesaplanmasında geometrik nonlinearitenin gözönüne alınmasının önemi görülmektedir. Çizelgelerde, birinci ve ikinci yaklaşımlarda elde edilen sonuçların karşılaştırılmasında, uygulanan çözüm yönteminin sonuçların yakınsaklığı açısından çok etkili bir yöntem olduğunu göstermektedir. Belirtelim ki, Çizelge 2.1-2.3'de verilen sayısal sonuçların elde edilmesinde kullanılan ϵ değerleri tek lifin sonsuz matristeki iç stabilite kaybına uygun gelen ϵ_{cr} değerlerinden (Babich, 1973; Guz, 1990) çok küçük yani $|\epsilon| \ll |\epsilon_{cr}|$ olarak alınmıştır.

Böylece, tek lif durumunda stabilite kaybı öncesi gerilme yayılımı hakkındaki incelemeleri bitirmiş bulunuyoruz.

2.5 Laplace Dönüşümü ve Schapery Yöntemi Uygulanarak Kritik Zaman Değerlerinin Elde Edilmesi ve Yorumlanması

2.5.1 Matris Viskoelastik Malzeme Olduğu Durumda Uygun Sınır Değer Problemlerinin Çözümü:

(2.3) kısmında matris ve lif malzemeleri saf elastik oldukları durumda (2.12) yaklaşımlarının belirlenmesinin gerektirdiği sınır-değer problemlerinin çözümü verilmektedir. Şimdi aynı problemlerin lif malzemesi elastik, matris malzemesi ise viskoelastik olduğu durumu ele alalım. Yani

$$\lambda^{(2)*} = \lambda^{(2)}, \mu^{(2)*} = \mu^{(2)}$$

$$\lambda^{(1)*}(\cdot) = \lambda_0^{(1)}(\cdot) + \int_0^t \lambda^{(1)}(t-\tau)(\cdot) d\tau, \quad \mu^{(1)*}(\cdot) = \mu_0^{(1)}(\cdot) + \int_0^t \mu^{(1)}(t-\tau)(\cdot) d\tau \quad (2.57)$$

dir. İlk önce sıfırıncı yaklaşımın belirlenmesini gözönüne alalım. Bu yaklaşım için (2.15) denklemleri ve (2.16) temas koşulları sağlanmaktadır. Alan denklemleri ve temas koşullarının

lineer olması ve (2.57) operatörlerinin yapısı, problemin çözümünde karşılık prensibinin (principle of correspondence) uygulanmasına olanak sağlamaktadır. Bu prensibe göre tüm alan denklemleri

$$\bar{\varphi}(s) = \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-st} dt \quad (2.58)$$

Laplace dönüşümü uygulanıp uygun elastik çözümünden yararlanarak, yani elastik çözümdeki terimleri onların Laplace dönüşümleriyle yer değiştirilerek viskoelastik problemin Laplace dönüşümlerindeki çözümünü elde etmiş oluyoruz. İleride, bu çözümlerin orjinallerini elde etmek için Schapery yöntemi uygulanacağından (2.58) dönüşümündeki s parametresinin $s > 0$ koşulunu sağladığını varsayacağız. Belirtelim ki, Schapery yöntemi hakkındaki gerekli bilgiler Ek 4'de verilmektedir. Ancak, sıfıncı yaklaşımda uygun elastik problem için (2.30) analitik çözümündeki elastik sabitleri uygun operatörlerle yer değiştirirsek bu yaklaşıma ait viskoelastik problemin analitik sonuçlarını (2.58) dönüşümünü uygulamadan da elde etmiş oluruz. (2.30) çözümünden görüldüğü gibi p dış kuvvetleri zamandan bağımsız olduğunda $\sigma_{zz}^{(1),0}$ değerleri zamandan bağımsız olur. Bu durumda (2.31), (2.32), (2.23) denklemlerine $k=1$ durumunda, yani matrise ait alan denklemlerine karşılık prensibi uygulanabilmektedir. Dolayısıyla matrise ait denklemlere (2.58)'deki Laplace dönüşümü yapılarak ve bünye denklemlerinin dönüşümünde konvolusyon teoremi gözönüne alınarak bu denklemler aşağıdaki şekle sokulmaktadır.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\sigma}_{rr}^{(1),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\sigma}_{r\theta}^{(1),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{rz}^{(1),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \left(\bar{\sigma}_{rr}^{(1),1} - \bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(1),1} \right) + \sigma_{zz}^{(1),0} \frac{\partial^2 \bar{u}_r^{(1),1}}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_{r\theta}^{(1),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(1),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta z}^{(1),1}}{\partial z} + \frac{2}{r} \bar{\sigma}_{r\theta}^{(1),1} + \sigma_{zz}^{(1),0} \frac{\partial^2 \bar{u}_\theta^{(1),1}}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_{rz}^{(1),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta z}^{(1),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{zz}^{(1),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \bar{\sigma}_{rz}^{(1),1} + \sigma_{zz}^{(1),0} \frac{\partial^2 \bar{u}_z^{(1),1}}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\bar{\epsilon}_{rr}^{(1),1} = \frac{\partial \bar{u}_r^{(1),1}}{\partial r}, \quad \bar{\epsilon}_{r\theta}^{(1),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_r^{(1),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{u}_\theta^{(1),1}}{\partial r} - \frac{\bar{u}_\theta^{(1),1}}{r} \right), \quad \bar{\epsilon}_{rz}^{(1),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_z^{(1),1}}{\partial r} + \frac{\partial \bar{u}_r^{(1),1}}{\partial z} \right)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{-(1),1} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}^{-(1),1}}{\partial \theta} + \frac{u_r^{-(1),1}}{r}, \quad \varepsilon_{\theta z}^{-(1),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\theta}^{-(1),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{-(1),1}}{\partial \theta} \right), \quad \varepsilon_{zz}^{-(1),1} = \frac{\partial u_z^{-(1),1}}{\partial z}, \quad (2.60)$$

$$\sigma_{(in)}^{-(1),1} = \left(\bar{\lambda}^{(1)*} \bar{e}^{-(1),1} \right) \delta_i^n + 2 \left(\bar{\mu}^{(1)*} \bar{\varepsilon}_{(in)}^{-(1),1} \right), \quad \bar{e}^{-(1),1} = \bar{\varepsilon}_{rr}^{-(1),1} + \bar{\varepsilon}_{\theta\theta}^{-(1),1} + \bar{\varepsilon}_{zz}^{-(1),1}. \quad (2.61)$$

Bu denklemlerdeki büyüklükler s Laplace dönüşüm parametresine bağlıdır. Yani burada aranan büyüklüklere s parametre biçiminde dahil olmaktadır.

(2.30)'dan görüldüğü gibi $\sigma_{zz}^{(2),0}$ zamanın fonksiyonu olmak zorunda ve (2.31), (2.32), (2.23) denklemleri lif için yazıldığında (yani $k=2$ durumu için yazıldığında) zaman t , bu denklemlere bir parametre gibi dahil olacaktır. Belirtmek gerekir ki, bir çok kaynaklarda (örneğin Guz,1999) viskoelastik problemlerin üç boyutlu lineerize edilmiş denklemler çerçevesinde incelenmesi halinde buradaki sıfırcı yaklaşıma ait büyüklüklerdeki zamanı (buradaki sıfırcı yaklaşım diye adlandırdığımız durum bu kaynaklarda öngerilme olarak anılmaktadır) “yavaşlamış zaman” veya “dondurulmuş zaman” olarak adlandırarak (2.31) denklemlerinde $\sigma_{zz}^{(2),0}$ ’ın $t = 0$ veya $t = \infty$ ’daki değerleri gözönüne alınmaktadır. Ele aldığımız durumda $\sigma_{zz}^{(1),0}$ sabit olduğundan böyle bir varsayıma gerek duyulmamaktadır. Bundan başka life ait denklemlerde t değişken olmadığından bu denklemlere Laplace dönüşümü uygulanmasına gereksinim yoktur. Açıktır ki, birinci yaklaşım için (2.34) temas koşulları da ele aldığımız durumda aynen korunmaktadır ve bu koşullara da Laplace dönüşümü uygulamıyoruz.

Yukarıdakilerden görüldüğü gibi matrise ait büyüklüklerin Laplace dönüşümlerinin sağladığı (2.59), (2.60), (2.61) denklemlerinin çözümü için (2.35)-(2.37) gösterilimleri, $\lambda^{(1)}$, $\mu^{(1)}$ ’ler sırası ile $\bar{\lambda}^{(1)}$, $\bar{\mu}^{(1)}$ ile yer değiştirilerek uygulanabilir ve bu durumda $\psi^{(1)}$, $\chi^{(1)}$ ’ler aşağıdaki biçimde belirlenir.

$$\Psi^{(1)} = \alpha \bar{A}_1^{(1)}(s) K_1 \left(\xi_1^{(1)}(s) \alpha r \right) \sin \alpha z \sin \theta$$

$$\chi^{(1)} = \left[\bar{A}_2^{(1)}(s) K_1 \left(\xi_2^{(1)}(s) \alpha r \right) + \bar{A}_3^{(1)} K_1 \left(\xi_3^{(1)}(s) \alpha r \right) \right] \cos \alpha z \cos \theta \quad (2.62)$$

Life ait $\psi^{(2)}$, $\chi^{(2)}$ fonksiyonlarını ise

$$\psi^{(2)} = \alpha A_1^{(2)} I_1 \left(\xi_1^{(2)} \alpha r \right) \sin \alpha z \sin \theta,$$

$$\chi^{(2)} = \left[A_2^{(2)} I_1 \left(\xi_2^{(2)} \alpha r \right) + A_3^{(2)} I_1 \left(\xi_3^{(2)} \alpha r \right) \right] \cos \alpha z \cos \theta \quad (2.63)$$

biçiminde elde ediyoruz. Matrise ait büyüklüklerin Laplace dönüşümlerinin elde edilmesinde (2.62), (2.35), (2.61) formülleri kullanılır. Bu ifadeler saf elastik problemde elde edilen uygun ifadelerde $A_1^{(1)}$, $A_2^{(1)}$, $A_3^{(1)}$, $\xi_i^{(1)}$ sabitlerini $\bar{A}_1^{(1)}(s)$, $\bar{A}_2^{(1)}(s)$, $\bar{A}_3^{(1)}(s)$, $\bar{\xi}_i^{(1)}(s)$ 'lerle sırası ile yer değiştirerek aynen tekrarlanır. Life ait büyüklüklerde ise $A_i^{(2)}$, $\xi_i^{(2)}$ sabitleri $A_i^{(2)}(t)$, $\xi_i^{(2)}(t)$ 'lerle yer değiştirerek bir önceki kısımda olanları aynen tekrarlar. Böylece matrise ait olan büyüklüklerin Laplace dönüşümlerini $\bar{A}_i^{(1)}(s)$, $\bar{\xi}_i^{(1)}(s)$ ($i=1,2,3$) içeren ifadelerle, life ait büyüklükleri ise $A_i^{(2)}(t)$, $\xi_i^{(2)}(t)$ 'ler içeren bilinmeyenlerle ifade etmiş oluyoruz.

Şimdi, matrise ait büyüklüklerin ters Laplace dönüşümlerinin bulunmasını ele alalım. Bu amaçla Ek 4'de verilen Schapery yönteminden yararlanacağız. Bu işlemleri $u_r^{(1),1}$ 'in belirlenmesi örneğinde açıklayalım. Schapery yöntemi gereğince

$$u_r^{(1),1}(t) = \left. \bar{s} \bar{u}_r^{(1),1}(s) \right|_{s \approx 1/(2t)} \quad (2.64)$$

dir. Buradan ve p dış kuvvetinin sabit olması varsayımından $\sigma_{rr}^{(1),1}$, $\sigma_{r\theta}^{(1),1}$, $\sigma_{rz}^{(1),1}$, $u_r^{(1),1}$, $u_\theta^{(1),1}$ ve $u_z^{(1),1}$ 'leri $\bar{s} \bar{\sigma}_{rr}^{(1),1}$, $\bar{s} \bar{\sigma}_{r\theta}^{(1),1}$, $\bar{s} \bar{\sigma}_{rz}^{(1),1}$, $\bar{s} \bar{u}_r^{(1),1}$, $\bar{s} \bar{u}_\theta^{(1),1}$ ve $\bar{s} \bar{u}_z^{(1),1}$ 'lerin $s = 1/(2t)$ 'deki değeri gibi ele alabiliriz. Böylece temas koşullarında $A_i^{(2)}(t)$ 'lerin ve $\bar{A}_i^{(1)}(s)$ 'lerin $s = 1/(2t)$ 'deki değerlerini seçilen her bir t değeri için belirleriz. Elde edilen sonuçlardan yararlanarak ele alınmış p ve diğer problem parametreleri değerlerinde

$$\max_{z \in [0, \ell]; \theta \in [0, \pi/2]} u_r^{(2),1} \Big|_{r=0} \rightarrow \infty \quad (2.65)$$

kriterinden (Hoff, 1954) kritik zaman değerlerini elde etmiş oluruz. Belirtelim ki, yukarıdaki işlemlerde zamanı (t 'yi) sabitlersek (örneğin $t = 0$ veya $t = \infty$ durumlarında) (2.65) kriterinden yararlanarak p_{cr} değerlerini elde edebiliriz.

Benzer şekilde, yukarıdaki işlemleri ikinci yaklaşım denklemleri ve ifadelerine uygularsak t_{cr} ve p_{cr} değerlerini birinci ve ikinci yaklaşım çerçevesinde elde etmiş oluruz. İleride göreceğimiz gibi, p_{cr} (veya t_{cr}) değerlerine ikinci yaklaşım hiçbir katkı göstermemektedir. Dolayısıyla, p_{cr} (veya t_{cr}) değerleri sadece sıfıncı ve birinci yaklaşım çerçevesinde belirlenebilmektedir.

2.5.2 Kritik Zaman Değerlerine Ait Sayısal Sonuçlar Ve Yorumları

Sayısal sonuçların elde edilmesi matris malzemesinin bünye denklemlerine dahil olan viskoelastisite operatörlerinin açık ifadelerinin verilmesini gerektirir. Bu amaçla Rabotnov operatörlerinden yararlanıyoruz ve farzediyoruz ki matris malzemesinin bünye denklemlerine dahil olan operatörler aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$$\begin{aligned} E^{(1)*} &= E_0^{(1)} \left[1 - \omega_0 R_{\alpha'}^* (-\omega_0 - \omega_\infty) \right], \quad v^{(1)*} = v_0^{(1)} \left[1 + \frac{1 - 2v_0^{(1)}}{2v_0^{(1)}} \omega_0 R_{\alpha'}^* (-\omega_0 - \omega_\infty) \right], \\ \lambda^{(1)*} &= \lambda_0^{(1)} \left[1 + \frac{1 - 2v_0^{(1)}}{2v_0^{(1)}(1 + v_0^{(1)})} \omega_0 R_{\alpha'}^* \left(-\frac{3}{2(1 + v_0^{(1)})} \omega_0 - \omega_\infty \right) \right], \\ \mu^{(1)*} &= \mu_0^{(1)} \left[1 - \frac{3\omega_0}{2v_0^{(1)}(1 + v_0^{(1)})} R_{\alpha'}^* \left(-\frac{3}{2(1 + v_0^{(1)})} \omega_0 - \omega_\infty \right) \right] \end{aligned} \quad (2.66)$$

Burada $E_0^{(1)}$, $v_0^{(1)}$ matris malzemesinin sırasıyla Young modülü ve Poisson oranının başlangıç ($t = 0$ anındaki) değerleridir. $\lambda_0^{(1)}$, $\mu_0^{(1)}$ Lamé sabitlerinin $t = 0$ 'daki değerleridir

ve α' , ω_0 , ω_∞ matris malzemesinin reolojik parametreleridir (α' operatörün çekirdeğinin teklik mertebesi; ω_0 , ω_∞ 'lar ise belli bir malzemenin belirlenmesinde kullanılan parametrelerdir). $R_{\alpha'}^*$ Rabotnov (1977) operatörüdür ve aşağıdaki gibi belirlenir.

$$R_{\alpha'}^*(.) = \int_0^t R_{\alpha'}(\beta, t - \tau)(.)d\tau, \quad (2.67)$$

Burada

$$R_{\alpha'} = t^{\alpha'} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n t^{n(1+\alpha')}}{\Gamma((1+n)(1+\alpha'))}, \quad -1 < \alpha' < 0 \quad (2.68)$$

biçimindedir. (2.68)'deki $\Gamma(x)$ Gamma fonksiyonudur. Belirtelim ki, burada ve ilerideki bütün sayısal araştırmalarımızda seçilen viskoelastik malzemelerin bünye denklemleri (2.67) Rabotnov operatörü yardımı ile verilecektir. Araştırmalarımızda bu operatörün seçilme nedenleri şunlardır:

1. (2.67) operatörü malzemenin deneysel olarak elde edilmiş sünme (creep) ve gevşeme (relaxation) grafiklerinin başlangıç kısımlarının yüksek hassasiyetle gözönüne alınmasına olanak sağlamaktadır.
2. Bu operatör, madde 1'de adı geçen, grafiklerin zaman sonsuza yaklaştığındaki asimtotik değerlerini de yüksek hassasiyetle gözönüne alabilmektedir.
3. Matematiksel dönüşümlerde, örneğin Laplace dönüşümünün uygulanmasında, bu operatör zor olmayan işlemleri gerektirmektedir.

Yukarıda sıralanan nedenlerden dolayı bu operatör epoksi bazlı tek yönlü sürekli liflerle güçlendirilmiş birçok viskoelastik polimer kompozitlerin mekaniksel davranışlarını başarılı bir biçimde yansıtmaktadır. Bu malzemeler için (2.67) operatörüne dahil olan reolojik parametreler deneysel olarak belirlenir ve bunlara örnek Rabotnov (1977) vs. kaynaklarında verilmektedir. Bunların dışında belirtelim ki, tezde geliştirilmiş yöntem başka türlü seçilmiş operatörlere de aynı işlemlerle uygulanabilmektedir.

Şimdi $p_{cr.}$ ve $t_{cr.}$ 'lere ait bulunan sayısal sonuçların incelenmesini ele alalım. Belirtelim ki, $t_{cr.}$ değerlerinin belirlenmesinde seçilecek olan p dış kuvvet değerleri

$$p_{cr.\infty} \leq p \leq p_{cr.0} \quad (2.69)$$

koşulunu sağlamak zorundadır. Burada $p_{cr,\infty}$, $t = \infty$ durumunda yani (2.66) operatörleri

$$E_{\infty}^{(1)} = E_0^{(1)} \left(1 - \frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega_{\infty}} \right), \quad v_{\infty}^{(1)} = v_0^{(1)} \left(1 + \frac{1 - 2v_0^{(1)}}{2v_0^{(1)}} \frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega_{\infty}} \right)$$

$$\lambda_{\infty}^{(1)} = \frac{E_{\infty}^{(1)} v_{\infty}^{(1)}}{(1 + v_{\infty}^{(1)})(1 - 2v_{\infty}^{(1)})}, \quad \mu_{\infty}^{(1)} = \frac{E_{\infty}^{(1)}}{2(1 + v_{\infty}^{(1)})} \quad (2.70)$$

sabitleri ile yer değiştirerek uygun elastik dayanıklılık kaybı probleminden elde edilen kritik basınç kuvvetinin değerlerini, $p_{cr,0}$ ise (2.66) operatörlerini $E_0^{(1)}$, $v_0^{(1)}$, $\lambda_0^{(1)}$, $\mu_0^{(1)}$ sabitleri ile yer değiştirerek elde edilen kritik basınç değerlerini göstermektedir. Bilindiği üzere, eğer p değerleri $p < p_{cr,\infty}$ olursa bu durumda uygun viskoelastik problemin stabilite kaybı olmaz, $p > p_{cr,0}$ olduğu durumda ise stabilite kaybı için gereken zaman sıfırdır diye kabul edilir.

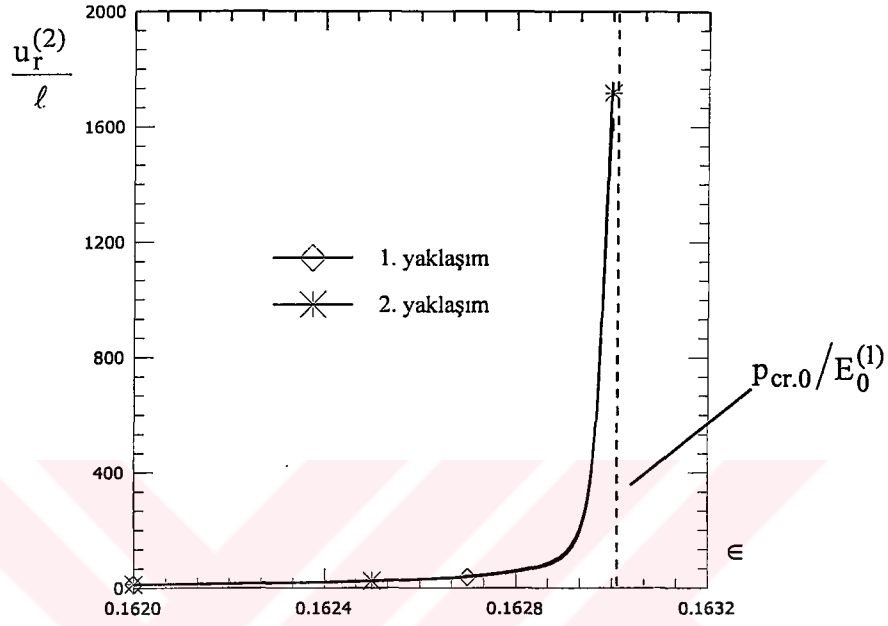
Yukarıda söylenenlerden dolayı t_{cr} değerlerini belirlemeden önce p basınç değerlerinin (2.69) koşullarını sağlayan değerlerini seçebilmemiz için önce $p_{cr,\infty}$ ve $p_{cr,0}$ değerlerini belirleme zorunluluğu vardır. Elde edilen sayısal sonuçları incelemeye geçmeden önce boyutsuz $t' (= \omega_0^{1/(1+\alpha)} t)$, $\omega (= \omega_{\infty}/\omega_0)$ parametrelerini seçelim ve ilerideki yorumları bu parametrelerle yapalım. Yukarıda verilen kriter çerçevesinde $p_{cr,0}/E_0^{(1)}$ ve $p_{cr,\infty}/E_0^{(1)}$ değerlerinin belirlenmesini gösteren grafikler Şekil 2.2-2.8'de verilmektedir. Bu grafikler

$$E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50, \quad v^{(2)} = v_0^{(1)} = 0.3 \quad \text{durumunda} \quad \max_{z \in [0, \ell]; \theta \in [0, \pi/2]} u_r^{(2)} \Big|_{r=0} / \ell \quad \text{ile} \quad p/E_0^{(1)} \text{ 'ler}$$

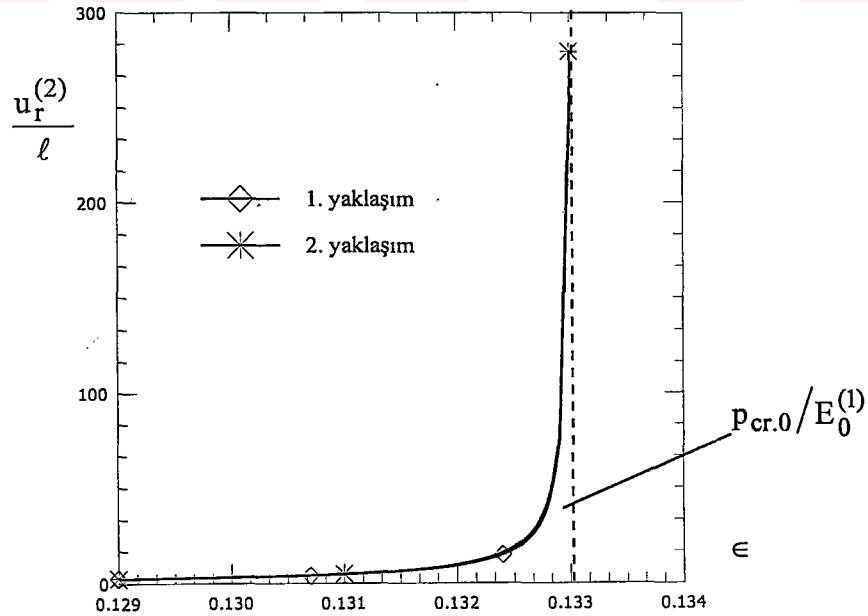
arasındaki ilişkiyi göstermektedir. Şekil 2.2-2.4'de bu ilişkiler $p_{cr,0}/E_0^{(1)}$ değerlerini sırası ile $\kappa = 0.3, 0.4, 0.5$ durumlarında, Şekil 2.5-2.8'deki grafikler ise $p_{cr,\infty}/E_0^{(1)}$ değerlerini $\kappa = 0.5$ durumunda sırası ile $\omega = 0.5, 1.0, 2.0, 3.0$ için belirlemektedir. Bu şekillerde, adı geçen ilişkilerin grafikleri sıfırcı ve birinci yaklaşımlar ve aynı zamanda sıfırcı, birinci, ikinci yaklaşımlar gözönüne alınarak verilmektedir. Grafiklerden görüldüğü gibi, ikinci yaklaşımın gözönüne alınması $p_{cr,\infty}$ ve $p_{cr,0}$ değerlerini değiştirmemektedir.

$\epsilon_{cr,0} = p_{cr,0}/E_0^{(1)}$, $\epsilon_{cr,\infty} = p_{cr,\infty}/E_0^{(1)}$ 'lerin değerleri bazı durumlarda Çizelge 2.4'de de verilmektedir. İleride, t_{cr} değerlerinin elde edilmesinde bu çizelgede ve Şekil 2.2-2.8'deki

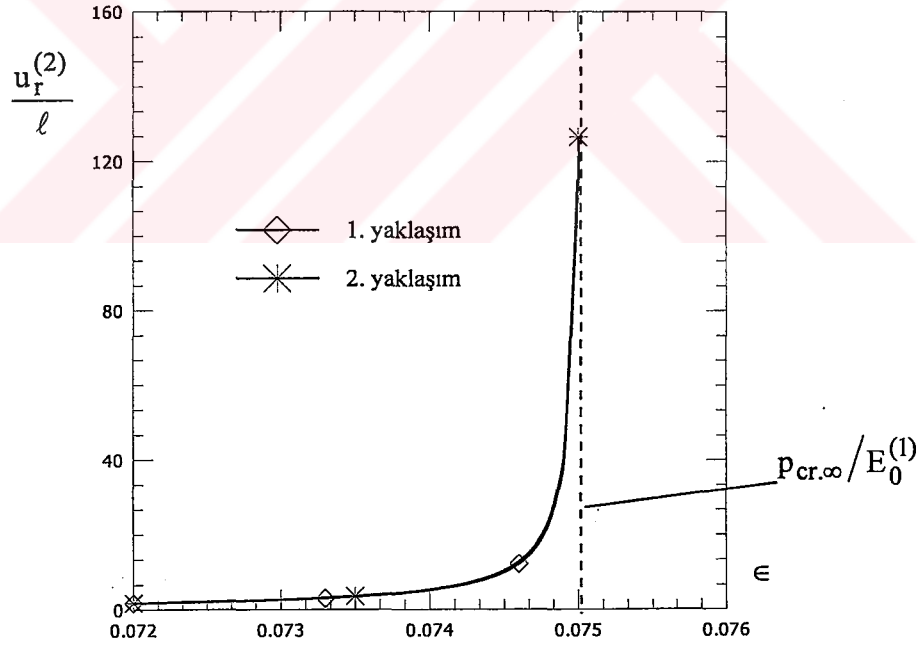
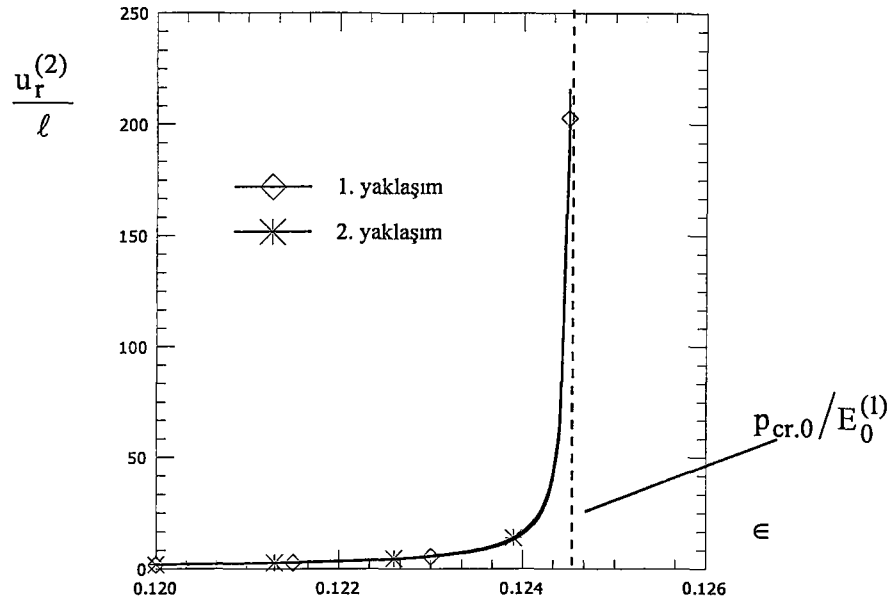
sonuçlardan yararlanacağız. Bundan başka belirtelim ki, başlangıç eğintisinin derecesini gösteren ε parametresinin $p_{cr.\infty}$, $p_{cr.0}$ ve sonuçta ileride değineceğimiz $t'_{cr.}$ değerlerine hiçbir etkisi olmamaktadır. Bunun nedeni geliştirilmiş yöntemin ve uygulanan stabilite kaybı kriterinin yapısından açıkça görülmektedir.

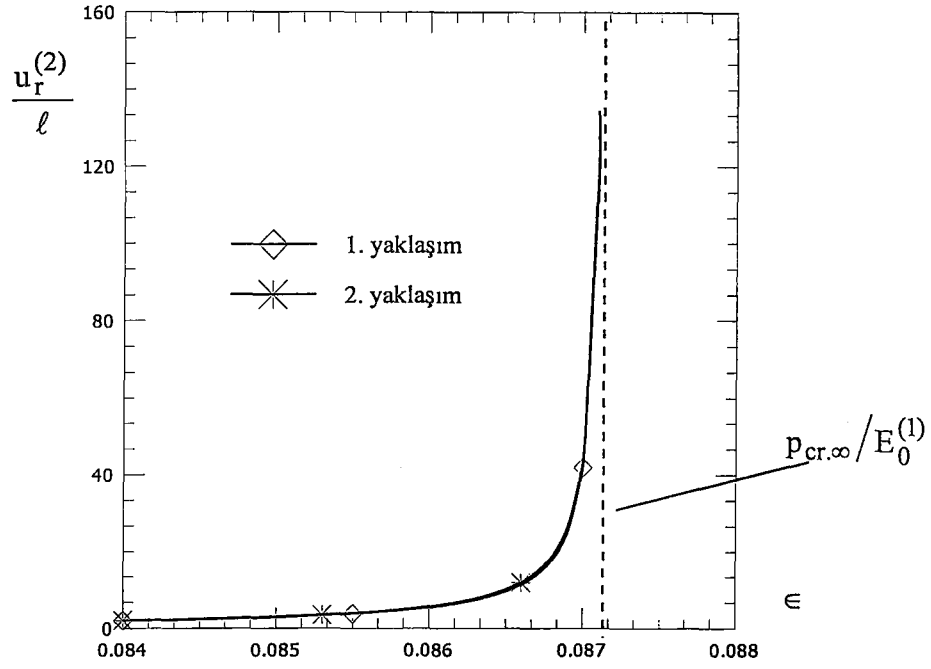


Şekil 2.2 $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.3$ durumunda $u_r^{(2)}/l$ ile ε arasındaki bağımlılık

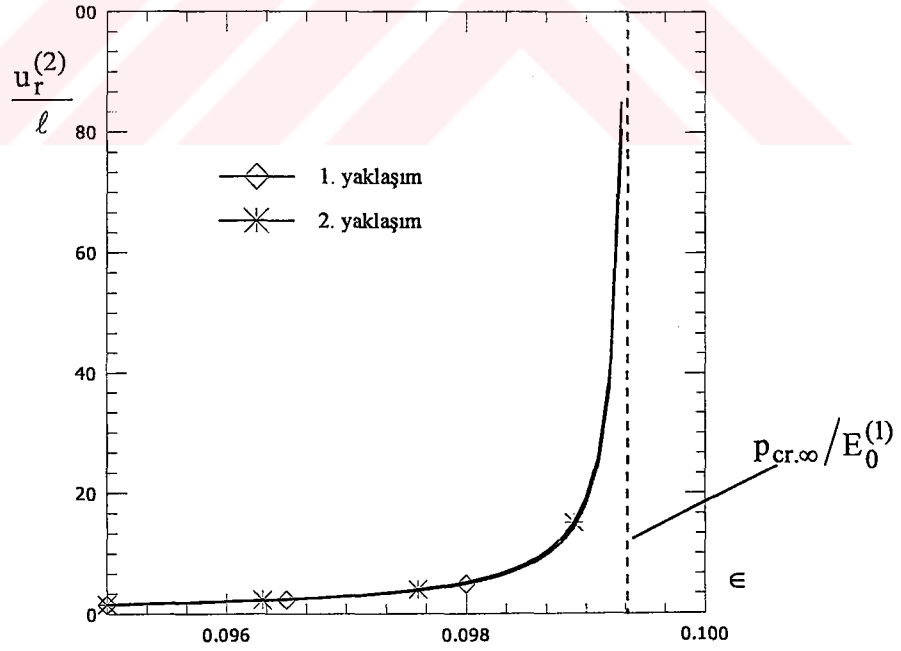


Şekil 2.3 $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$ durumunda $u_r^{(2)}/l$ ile ε arasındaki bağımlılık

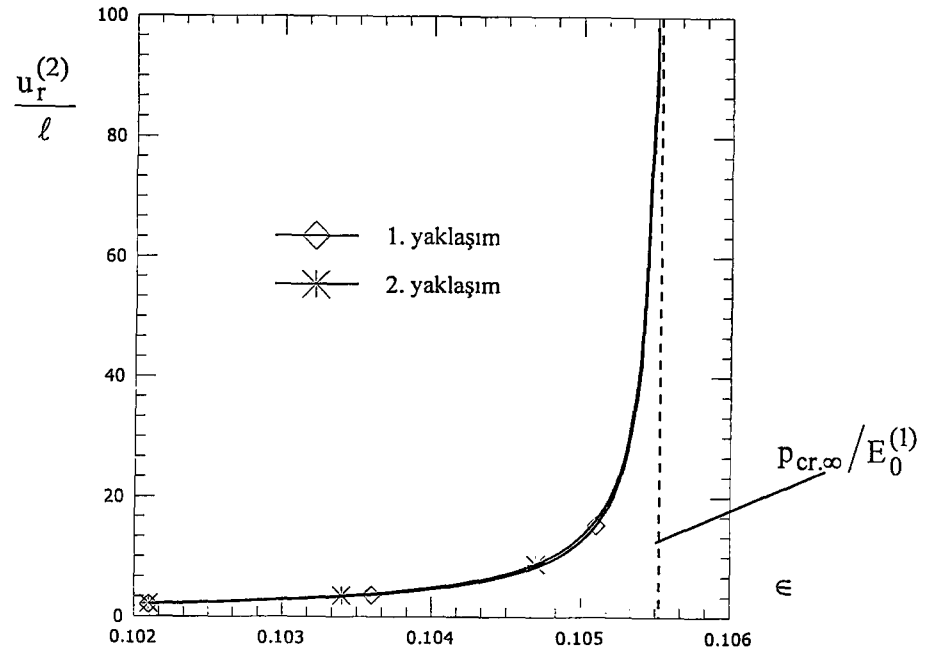




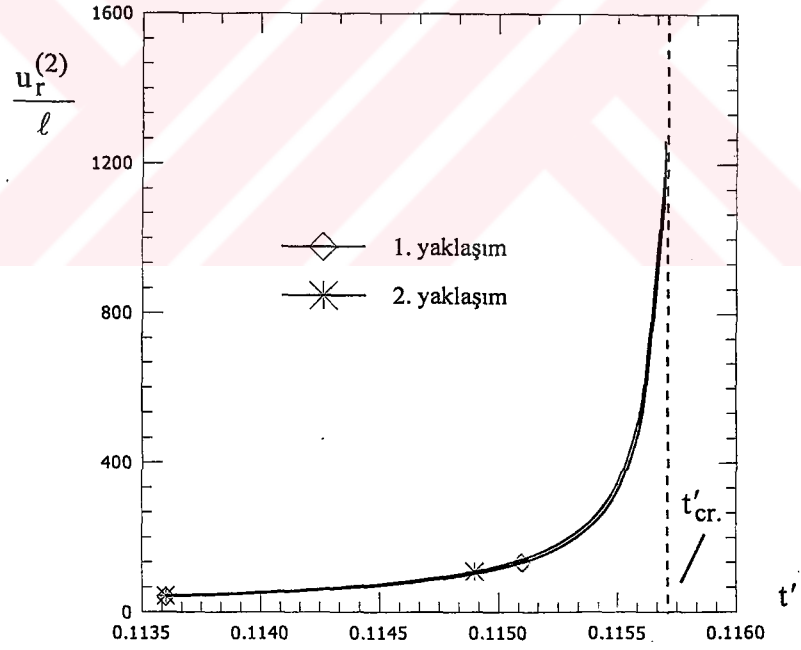
Şekil 2.6 $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.5$, $\alpha' = -0.5$, $\omega = 1.0$ durumunda $u_r^{(2)}/\ell$ ile ϵ arasındaki bağımlılık



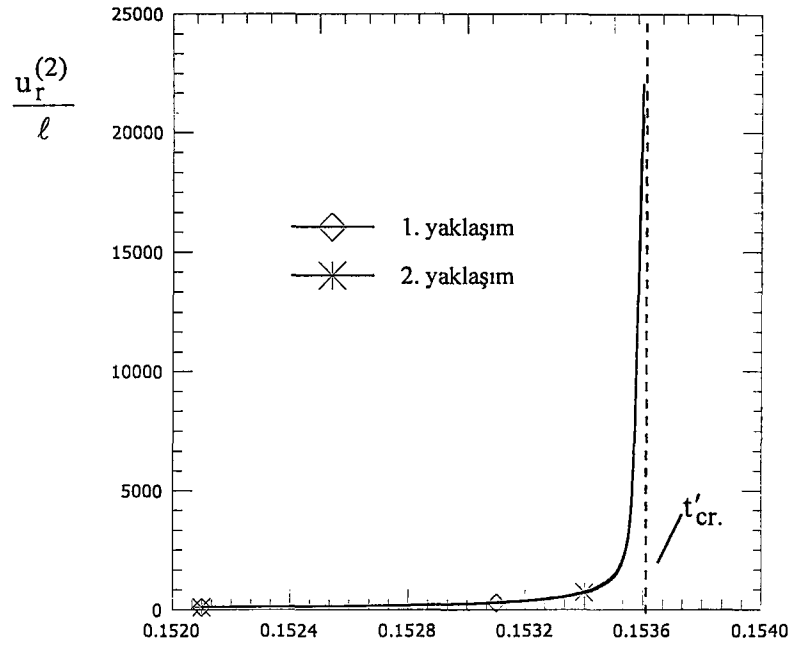
Şekil 2.7 $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.5$, $\alpha' = -0.5$, $\omega = 2.0$ durumunda $u_r^{(2)}/\ell$ ile ϵ arasındaki bağımlılık



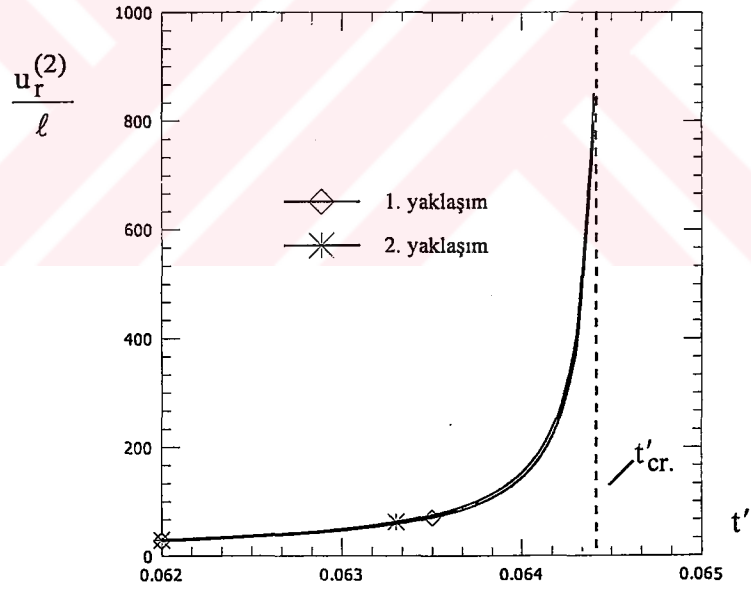
Şekil 2.8 $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.5$, $\alpha' = -0.5$, $\omega = 3.0$ durumunda $u_r^{(2)}/\ell$ ile ϵ arasındaki bağımlılık



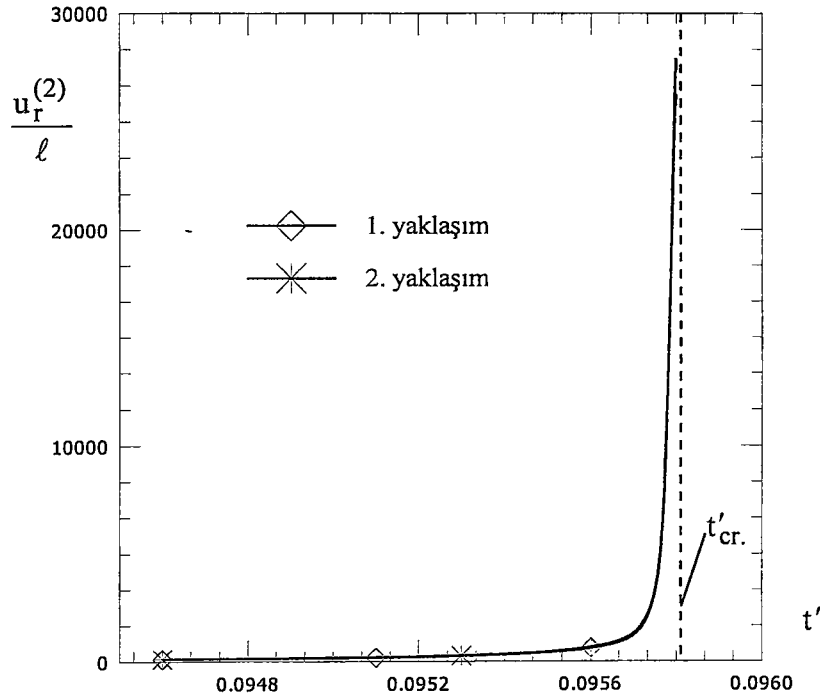
Şekil 2.9 $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$, $\alpha' = -0.3$, $\omega = 0.5$, $\epsilon = -0.110$ durumunda $u_r^{(2)}/\ell$ ile t' arasındaki bağımlılık



Şekil 2.10 $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$, $\alpha' = -0.3$, $\omega = 1.0$, $\epsilon = -0.110$ durumunda $u_r^{(2)}/\ell$ ile t' arasındaki bağımlılık



Şekil 2.11 $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$, $\alpha' = -0.5$, $\omega = 0.5$, $\epsilon = -0.110$ durumunda $u_r^{(2)}/\ell$ ile t' arasındaki bağımlılık



Şekil 2.12 $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$, $\alpha' = -0.5$, $\omega = 1.0$, $\epsilon = -0.110$ durumunda $u_r^{(2)}/\ell$ ile t' arasındaki bağımlılık

Şimdi yukarıda söylenenleri gözönüne alarak $t'_{cr.}$ değerlerinin elde edilmesine ait

$\max_{z \in [0, \ell], \theta \in [0, \pi/2]} u_r^{(2)} \Big|_{r=0} / \ell$ ile t' arasındaki bağıntıları gösteren ve Şekil 2.9-2.12'de verilen

grafikleri ele alalım. Bu grafikler $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $v^{(2)} = v_0^{(1)} = 0.3$, $\epsilon = -0.110$ durumunda $\kappa = 0.4$, $\alpha' = -0.3$ sırası ile $\omega = 0.5$ ve $\omega = 1.0$ durumlarında Şekil 2.9, Şekil 2.10'da; $\alpha' = -0.5$, $\omega = 0.5$ ve $\omega = 1.0$ durumlarında ise sırası ile Şekil 2.11 ve Şekil 2.12'de verilmektedir. Bu grafiklerden birinci ve ikinci yaklaşım çerçevesinde elde edilen $t'_{cr.}$ değerlerinin çakıştığı da görülmektedir. Bundan başka bu grafikler, stabilite kaybı kriterinin uygulanması ve $p_{cr.}$, $t_{cr.}$ değerlerinin bulunması yöntemini de göstermektedir.

Şimdi matris malzemesinin reolojik parametrelerinin $t'_{cr.}$ değerlerine olan etkisini gösteren ve Çizelge 2.5-Çizelge 2.7'de verilen sırası ile $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 20$ ($\kappa = 0.6$), $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$ ($\kappa = 0.4$), $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 100$ ($\kappa = 0.4$) durumlarındaki sonuçları ele alalım. Bu çizelgelerden görüldüğü gibi ϵ değerleri $\epsilon_{cr,0}$ 'a yaklaştığında $t'_{cr.}$ 'ler monoton olarak azalmakta, ϵ değerleri $\epsilon_{cr,\infty}$ 'a yaklaştığında ise $t'_{cr.}$ değerleri monoton olarak artmaktadır.

Çizelge 2.4 Çeşitli $E^{(2)}/E_0^{(1)}$, ω 'lar için $\epsilon_{cr.0} = p_{cr.0}/E_0^{(1)}$ ve $\epsilon_{cr.\infty} = p_{cr.\infty}/E_0^{(1)}$ değerleri

$\frac{E^{(2)}}{E_0^{(1)}}$	$\epsilon_{cr.0}$	$\epsilon_{cr.\infty}$			
		$\omega = 0.5$	$\omega = 1$	$\omega = 2$	$\omega = 3$
$20 (\kappa = 0.6)$	-0.2002	-0.1133	-0.1353	-0.1570	-0.1679
$50 (\kappa = 0.4)$	-0.1330	-0.0678	-0.0840	-0.1002	-0.1083
$100 (\kappa = 0.4)$	-0.0863	-0.0516	-0.0600	-0.0686	-0.0729

Bunun nedeni açıktır ve uygun mekaniksel görüşlerle örtüşmektedir. Bundan başka, bu çizelgelerden ω değerlerinin artması ile $t'_{cr.}$ değerlerinin monoton olarak arttığı da görülmektedir. Hatırlatalım ki, ω parametresi matris malzemesinin elastisite sabitinin $t' = \infty$ 'daki değerinin $t' = 0$ 'daki değerinden farklılığını göstermektedir, yani ω büyüdükçe bu değerler yakınlaşmakta, ω küçüldükçe ise bu değerler daha çok ayrıklaşmaktadır. Bu ise ω değerlerinin artması ile $t'_{cr.}$ değerlerinin artmasını açıklamaktadır.

Çizelge 2.5 $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 20$, $\kappa = 0.6$ durumunda çeşitli ω ve α' 'larda $t'_{cr.}$ değerleri

ϵ	$\alpha' = -0.5$				$\omega = 2$		
	$\omega = 0.5$	$\omega = 1$	$\omega = 2$	$\omega = 3$	$\alpha' = -0.3$	$\alpha' = -0.5$	$\alpha' = -0.7$
-0.1700	0.0649	0.0966	0.3076	6.6184	0.3534	0.3076	0.2225
-0.1750	0.0381	0.0513	0.1113	0.3992	0.1710	0.1113	0.0409
-0.1800	0.0209	0.0260	0.0437	0.0882	0.0877	0.0437	0.0086
-0.1850	0.0103	0.0119	0.0167	0.0250	0.0441	0.0167	0.0017
-0.1900	0.0040	0.0044	0.0054	0.0067	0.0198	0.0054	0.0002
-0.1950	0.0009	0.0009	0.0010	0.0011	0.0062	0.0010	0.0000

Nihayet, bu çizelgelerde verilen değerlerden α' reolojik parametresinin değişimlerinin de $t'_{cr.}$ değerlerine etkisi görülmektedir. Belirtelim ki, α' parametresi matris malzemesinin bünye denklemlerine dahil olan operatörlerin tekillik mertebesini göstermektedir. Şimdiye kadar viskoelastik malzemelerden yapılmış yapı elemanlarına ait stabilite kaybı incelemelerinde (Akbarov ve Kosker, 2001; Akbarov ve Yahnioğlu, 2001; Akbarov vd.,

1999; Akbarov vd, 2001; Yahnioglu ve Akbarov, 2002) elde edilen sonuçlara göre, $|\alpha'|$ 'nin büyümesi $t'_{cr.} > 0.5$ durumlarında $t'_{cr.}$ değerlerinin büyümesine, $t'_{cr.} < 0.5$ durumlarında ise $t'_{cr.}$ değerlerinin küçülmesine neden olmaktadır. α' parametresinin söylenen yapıda olan etkisi, Çizelge 2.5-2.7'den görüldüğü gibi, tez kapsamında yapılan araştırmalarda da tespit edilmiştir.

Çizelge 2.6 $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$ durumunda çeşitli ω ve α' 'larda $t'_{cr.}$ değerleri

ϵ	$\alpha' = -0.5$				$\omega = 2$		
	$\omega = 0.5$	$\omega = 1$	$\omega = 2$	$\omega = 3$	$\alpha' = -0.3$	$\alpha' = -0.5$	$\alpha' = -0.7$
-0.1040	0.1397	0.2581	3.2578	∞	1.9070	3.2578	11.3649
-0.1080	0.0840	0.1329	0.5667	∞	0.5468	0.5667	0.6161
-0.1120	0.0489	0.0688	0.1739	1.0337	0.2351	0.1739	0.0860
-0.1160	0.0269	0.0344	0.0634	0.1530	0.1144	0.0634	0.0160
-0.1200	0.0134	0.0159	0.0236	0.0385	0.0564	0.0236	0.0030
-0.1240	0.0055	0.0061	0.0078	0.0102	0.0256	0.0078	0.0004

Çizelge 2.7 $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 100$, $\kappa = 0.4$ durumunda çeşitli ω ve α' 'larda $t'_{cr.}$ değerleri

ϵ	$\alpha = -0.5$				$\omega = 2$		
	$\omega = 0.5$	$\omega = 1$	$\omega = 2$	$\omega = 3$	$\alpha = -0.3$	$\alpha = -0.5$	$\alpha = -0.7$
-0.0725	0.0897	0.1445	0.6761	∞	0.6202	0.6761	0.8267
-0.0740	0.0620	0.0913	0.2788	4.3489	0.3294	0.2788	0.1889
-0.0755	0.0419	0.0574	0.1313	0.5527	0.1924	0.1313	0.0538
-0.0770	0.0275	0.0353	0.0656	0.1613	0.1172	0.0656	0.0169
-0.0785	0.0172	0.0210	0.0332	0.0603	0.0720	0.0332	0.0054
-0.0800	0.0101	0.0117	0.0163	0.0243	0.0434	0.0163	0.0016

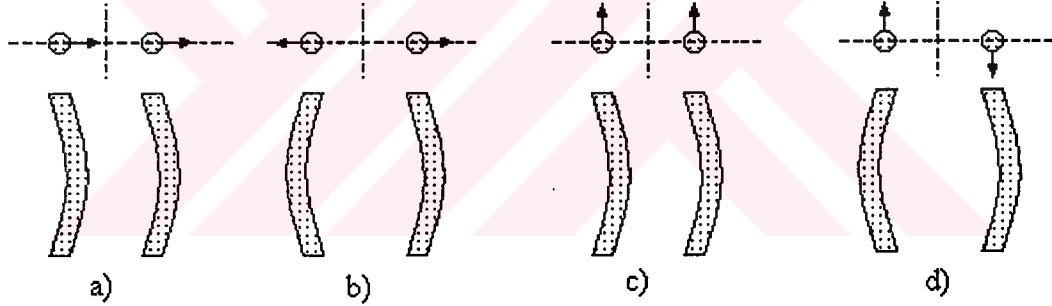
Böylece, tek lif için elde edilen sayısal sonuçları ve yorumlamalarını vermiş bulunuyoruz. Belirtelim ki, yukarıda geliştirilen yöntem problem parametrelerinin burada ele alınmayan değerleri için de uygulanabilir ve aynı derecede başarılı sonuçlar alınabilir.

3. BİRBİRİNE YAKIN PERİYODİK EĞRİLİKLİ İKİ LİF İÇEREN SONSUZ ELASTİK VE VİSKOELASTİK MATRİSTE GERİLME DAĞILIMI VE İÇ STABİLİTE KAYBI

Bu bölümde, birbirine yakın periyodik eğilmiş iki lif içeren sonsuz elastik ortamda stabilite kaybı öncesi gerilme analizi ve aynı özellikteki lifleri içeren sonsuz viskoelastik ortamdaki stabilite kaybı incelemeleri yapılacaktır. Bu incelemeler, ortama lifler yönünde sonsuzda p yoğunluklu homojen yayılmış normal kuvvetler etki gösterdiğinde yapılacaktır. Bu amaçla önce problemin formülasyonunu yapalım.

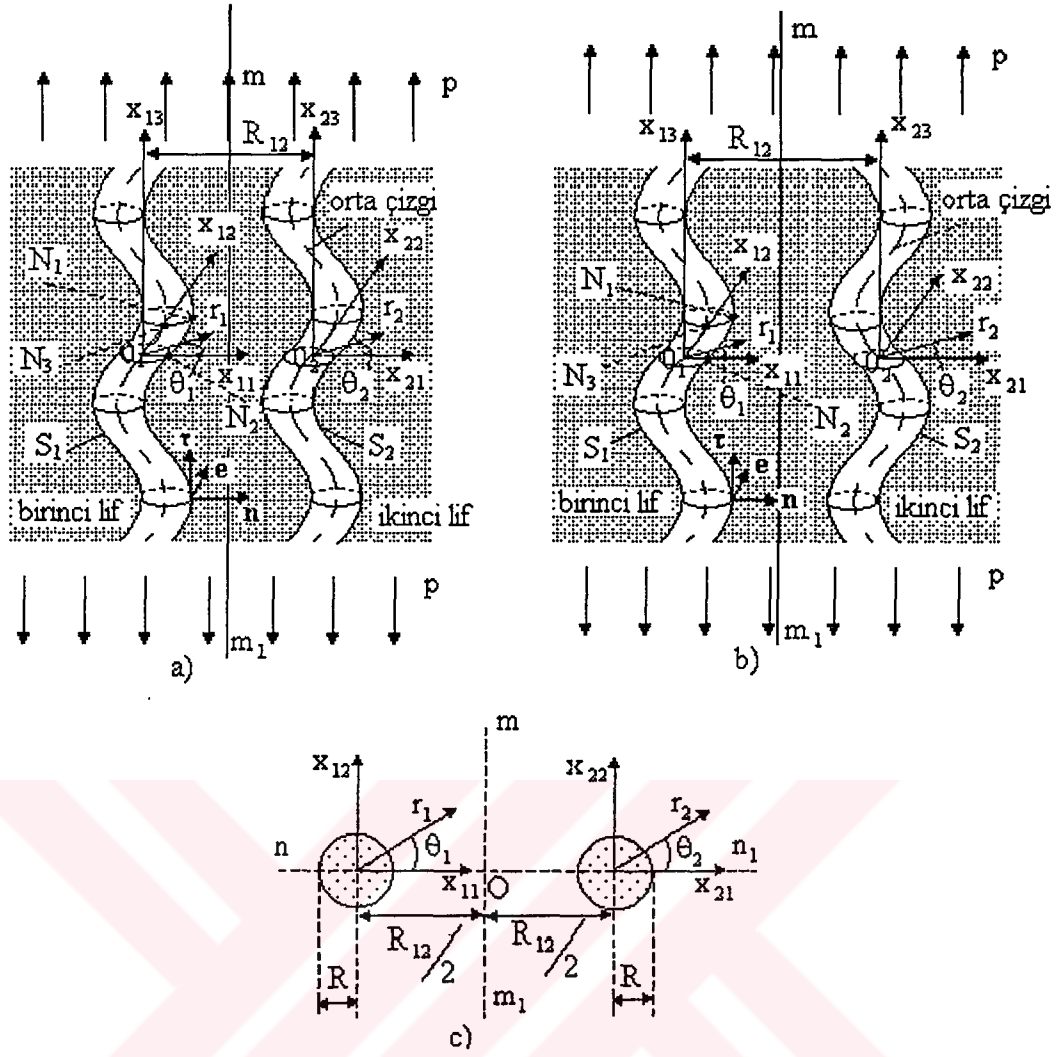
3.1 Problemin Formülasyonu

Liflerin söz konusu ortamlar içinde birbirlerine göre dört farklı yerleşim formunu ele alalım. Bu konumların ilk ikisi orta çizgileri aynı düzlemde olması durumuna karşı gelen aynı-fazlı (Şekil 3.1a) ve zıt-fazlı (Şekil 3.1b); diğer ikisi ise orta çizgilerinin farklı ve paralel düzlemlerde olması durumuna karşı gelen aynı-fazlı (Şekil 3.1c) ve zıt-fazlı (Şekil 3.1d) yerleşim şekilleridir.



Şekil 3.1 Liflerin sonsuz ortamda birbirlerine göre konumları

Sadelik için, burada problemin formülasyonunu verirken orta çizgileri aynı düzlemde olan liflerin aynı-fazlı ve zıt-fazlı yerleşimlerini ele alacağız. Diğer iki duruma ait problem formülasyonu da bazı açık değişikliklerle verilenlerden elde edilmektedir. Liflerin herbirinin orta çizgisine dik olan kesitlerin R yarıçaplı daire olduğunu ve bu değer lif boyunca değişmediğini kabul edeceğiz (Şekil 3.2c). Bu lifleri içine alan ortamın iç yapısının geometrisi Şekil 3.2'de verilmiştir. Herbir lifin orta çizgisi ile ilgili $O_k x_{k1} x_{k2} x_{k3}$ kartezyen ve $O_k r_k \theta_k z_k$ silindirik koordinat takımlarını seçelim (Şekil 3.2). Burada $k = 1, 2$ olup sırası ile



Şekil 3.2 Formülasyonu yapılan problemin geometrisi ve seçilen koordinat takımları

birinci ve ikinci lifleri göstermektedir. Şekil 3.2c'den de görülebileceği gibi, bu koordinatlar arasında

$$x_{12} = x_{22}, x_{13} = x_{23}, r_1 e^{i\theta_1} = R_{12} + r_2 e^{i\theta_2}, z_1 = z_2 = z \quad (3.1)$$

bağıntıları sağlanmaktadır. Lifin orta çizgilerinin $x_{12} = x_{22} = 0$ düzleminde olduğunu varsayarsak bu çizgilerin denklemlerini aynı-fazlı durum için (Şekil3.2a)

$$x_{11} = L \sin\left(\frac{2\pi}{\ell} x_{13}\right), x_{21} = L \sin\left(\frac{2\pi}{\ell} x_{23}\right) \quad (3.2)$$

ve zıt-fazlı durum için (Şekil3.2b)

$$x_{11} = L \sin\left(\frac{2\pi}{\ell} x_{13}\right), \quad x_{21} = -L \sin\left(\frac{2\pi}{\ell} x_{23}\right) \quad (3.3)$$

şeklinde yazabiliriz. Buradaki L 'nin (lif eğilme genliğinin) ℓ 'den (eğilmenin periyodundan) çok küçük olduğunu kabul ederek $\varepsilon = L/\ell$, ($0 < \varepsilon \ll 1$) parametresini tanımlayalım.

Liflerin, onları içeren viskoelastik ortamla temas yüzeylerini sırası ile S_1 ve S_2 diye gösterirsek, bu yüzeylerin denklemlerini yukarıda söylenen lif-kesit formu koşulundan yararlanarak

$$r_k = (1 + \varepsilon^2 (\delta'_k(t_3))^2 \sin^2 \theta_k)^{-1} \left\{ \varepsilon \delta_k(t_3) + \varepsilon^3 \delta_k(t_3) (\delta'_k(t_3))^2 \sin \theta_k + \left[R^2 - \varepsilon^2 (\delta_k(t_3))^2 - \varepsilon^4 (\delta'_k(t_3))^2 (\delta_k(t_3))^2 (1 + \varepsilon^2 (\delta'_k(t_3))^2 \sin^2 \theta_k) \right]^{1/2} \right\}$$

$$z_k = t_3 - \varepsilon \delta'_k(t_3) r_k(t_3) \sin \theta_k + \varepsilon^2 \delta_k(t_3) \delta'_k(t_3), \quad \delta'_k(t_3) = \frac{d\delta_k(t_3)}{dt_3} \quad (3.4)$$

şeklinde elde ederiz. Burada $t_3 \in (-\infty, +\infty)$ bir parametredir. (3.4) denkleminde yararlanarak ve bazı bilinen işlemler yaparak S_k yüzeylerinin birim dış normallerinin bileşenleri için aşağıdaki ifadeleri elde ediyoruz.

$$n_{kr} = r_k(\theta_k, t_3) \frac{\partial z_k(\theta_k, t_3)}{\partial t_3} [A_k(\theta_k, t_3)]^{-1}$$

$$n_{k\theta} = \left[\frac{\partial z_k(\theta_k, t_3)}{\partial \theta_k} \frac{\partial r_k(\theta_k, t_3)}{\partial t_3} - \frac{\partial r_k(\theta_k, t_3)}{\partial \theta_k} \frac{\partial z_k(\theta_k, t_3)}{\partial t_3} \right] [A_k(\theta_k, t_3)]^{-1}$$

$$n_{kz} = -r_k(\theta_k, t_3) \frac{\partial r_k(\theta_k, t_3)}{\partial t_3} [A_k(\theta_k, t_3)]^{-1} \quad (3.5)$$

Burada

$$A_k(\theta_k, t_3) = \left[\left(r_k(\theta_k, t_3) \frac{\partial z_k(\theta_k, t_3)}{\partial t_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_k(\theta_k, t_3)}{\partial \theta_k} \frac{\partial r_k(\theta_k, t_3)}{\partial t_3} - \frac{\partial z_k(\theta_k, t_3)}{\partial t_3} \frac{\partial r_k(\theta_k, t_3)}{\partial \theta_k} \right)^2 + \left(r_k(\theta_k, t_3) \frac{\partial r_k(\theta_k, t_3)}{\partial t_3} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.6)$$

şeklindedir. İleride sırası ile birinci ve ikinci life ait olan büyüklükleri (21), (22) üst indisleri ve matrisine (sonsuz viskoelastik ortama) ait olan büyüklükleri ise (1) üst indisi ile göstereceğiz. Herbir lifde ve sonsuz viskoelastik ortamda sağlanmak üzere aşağıdaki alan denklemlerini yazalım:

$$\begin{aligned} \nabla_i \left[\sigma^{(k)in} \left(g_n^j + \nabla_n u^{(k)j} \right) \right] &= 0, \quad 2\varepsilon_{jm}^{(k)} = \nabla_j u_m^{(k)} + \nabla_m u_j^{(k)} + \nabla_j u^{(k)n} \nabla_m u_n^{(k)}, \\ \sigma_{(in)}^{(k)} &= \left(\lambda^{(k)*} e^{(k)} \right) \delta_i^n + 2 \left(\mu^{(k)*} \varepsilon_{(in)}^{(k)} \right), \quad e^{(k)} = \varepsilon_{rr}^{(k)} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(k)} + \varepsilon_{zz}^{(k)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Burada kullanılan $\lambda^{(k)*}$ ve $\mu^{(k)*}$ 'lar (2.8) ile verilen operatörlerdir. S_k yüzeyleri üzerinde ideal temas koşullarının var olduğunu kabul ederek, bu koşulları

$$\sigma^{(2q)in} \left(g_n^j + \nabla_n u^{(2q)j} \right) \Big|_{S_q} n_{qj} = \sigma^{(1)in} \left(g_n^j + \nabla_n u^{(1)j} \right) \Big|_{S_q} n_{qj}, \quad u_j^{(2q)} \Big|_{S_q} = u_j^{(1)} \Big|_{S_q} \quad (3.8)$$

biçiminde yazarız. Ele alınan durumda

$$\sigma_{zz}^{(1)} \xrightarrow{r_q \rightarrow \infty} p, \quad \sigma_{(ij)}^{(1)} \xrightarrow{r_q \rightarrow \infty} 0 \quad (ij) \neq (zz) \text{ için} \quad (3.9)$$

koşulunun sağlandığını da gözönüne alalım. İleride yapılacak araştırmalarda gerilme ve şekil değiştirme tansörlerinin fiziksel bileşenleri kullanılacaktır. Bu durumda (2.11) formüllerinden yararlanılacaktır. Yukarıda verilen formüllerde tansör notasyonu kullanılmıştır. Bu notasyon ileride de kullanılacaktır. Bunun yanında altı çizili indislere göre toplam yapılmayacağını belirtmeliyiz.

Böylece ele alınan problemin formülasyonu tamamlanmış olmaktadır. Problem, (3.7) denklemlerinin (3.8) temas ve (3.9) sınır koşulları çerçevesinde çözümüne getirilmiştir.

3.2 Çözüm Yönteminin Geliştirilmesi

Sonsuz viskoelastik matrisin tek lif içermesi durumunda olduğu gibi, bu problemin incelenmesi için de Akbarov ve Guz (1985a, 2000)'de verilmiş olan sınır-formu pertürbasyon yöntemi kullanılacaktır. Bu yöntemle göre aranan büyüklükler, yukarıda tanımlanan ε parametresine göre seri halde aranır.

$$\left\{ \sigma_{(ij)}^{(m)}; \varepsilon_{(ij)}^{(m)}; u_{(i)}^{(m)} \right\} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \left\{ \sigma_{(ij)}^{(m),q}; \varepsilon_{(ij)}^{(m),q}; u_{(i)}^{(m),q} \right\} \quad (3.10)$$

Ayrıca S_k arayüzeylerinin denklemlerini oluşturan (3.4) ve bu yüzeylerin birim normallerinin bileşenlerini gösteren (3.5) ifadeleri de ε 'nun serisi halinde aşağıdaki şekilde yazılır:

$$r_q = R + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k a_{qk}(\theta_q, t_3), \quad z_q = t_3 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k b_{qk}(\theta_q, t_3),$$

$$n_{qr} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k c_{qk}(\theta_q, t_3), \quad n_{q\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k d_{qk}(\theta_q, t_3), \quad n_{qz} = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k g_{qk}(\theta_q, t_3). \quad (3.11)$$

Bu ifadelerde yer alan ve ε^k 'ların katsayıları olan $a_{qk}(\theta_q, t_3), \dots, g_{qk}(\theta_q, t_3)$ 'ler (3.4)'den kolaylıkla elde edilebilirler. (3.7)'den (3.10)'daki her bir yaklaşım için ayrı ayrı sağlanan alan denklemleri elde edilir. (3.11)'i kullanırsak (3.10)'daki herbir yaklaşımı ($r_q = R, \theta_k, t_3$) civarında seriye açarız. Bu son ifadeleri (3.8)'de yerine koyar ve $n_{qr}, n_{q\theta}, n_{qz}$ 'lerin (3.11)'deki ifadeleri kullanılırsa, bazı uzun ama bilinen işlemler sonucunda, (3.10)'daki herbir yaklaşım için $r_k = R$ 'de sağlanan temas koşulları elde edilir. Bu durumda, k. temas koşuluna önceki k-1. yaklaşımların tümüne ait büyüklükler dahil olmaktadır. Şimdi sıfıncı, birinci ve ikinci yaklaşımlar için elde edilen uygun denklem takımlarının ve temas koşullarının ifadelerini ele alalım.

Sıfıncı yaklaşım:

Açıktır ki, sıfıncı yaklaşım için (3.7) denklemleri sağlanır ve (3.8) koşulları $r_k = R$ 'de sağlanan aynıları ile yer değiştirirler. Tek lif durumunda olduğu gibi, $\nabla_n u^{(k),j,0} \ll 1$ olduğunu varsayacağız. Böylece $g_n^j + \nabla_n u^{(k),j,0}$ terimleri δ_n^j ile yer değiştirirler. Burada δ_n^j Kronecker sembolleridir. Bu varsayıma göre sıfıncı yaklaşıma ait denklemler takımını

$$\nabla_i \sigma^{(k),ij,0} = 0, \quad 2\varepsilon_{ij}^{(k),0} = \nabla_j u_i^{(k),0} + \nabla_i u_j^{(k),0},$$

$$\sigma_{(in)}^{(k),0} = \left(\lambda^{(k)*} e^{(k),0} \right) \delta_i^n + 2 \left(\mu^{(k)*} \varepsilon_{(in)}^{(k),0} \right), \quad e^{(k),0} = \varepsilon_{rr}^{(k),0} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(k),0} + \varepsilon_{zz}^{(k),0} \quad (3.12)$$

ve temas koşullarını

$$\sigma_{(ij)}^{(2q),0} \Big|_{r_q=R} = \sigma_{(ij)}^{(1),0} \Big|_{r_q=R}, \quad u_{(i)}^{(2q),0} \Big|_{r_q=R} = u_{(i)}^{(1),0} \Big|_{r_q=R}; \quad (ij) = rr, r\theta, rz, \quad (i) = r, \theta, z \quad q=1,2 \quad (3.13)$$

olarak elde ederiz. Böylece sıfırcı yaklaşım, (3.12) deklemlerinin (3.13) temas koşulları çerçevesinde çözümlenmesine indirgenmiş olur.

Birinci yaklaşım:

Yukarıdaki kabülleri dikkate alırsak diğer yaklaşımlar için aşağıdaki denklemler sistemini elde ederiz.

$$\nabla_i \left[\sigma^{(k)ij,q} + \sigma^{(k)in,0} \nabla_n u^{(k)j,q} \right] = - \sum_{m=1}^{q-1} \nabla_i \left(\sigma^{(k)in,q-m} \nabla_n u^{(k)j,m} \right), \quad (3.14)$$

$$2\varepsilon_{ij}^{(k),q} = \nabla_j u_i^{(k),q} + \nabla_i u_j^{(k),q} + \sum_{s=1}^{q-1} \nabla_j u^{(k)n,q-s} \nabla_i u_n^{(k),s}. \quad (3.15)$$

Birinci yaklaşım için (3.14), (3.15)'deki altı çizili terimler sıfır olacağından, sözkonusu yaklaşım için alan denklemlerini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\nabla_i \left[\sigma^{(k)ij,1} + \sigma^{(k)in,0} \nabla_n u^{(k)j,1} \right] = 0 \quad (3.16)$$

$$2\varepsilon_{ij}^{(k),1} = \nabla_j u_i^{(k),1} + \nabla_i u_j^{(k),1} \quad (3.17)$$

$$\sigma_{(in)}^{(k),1} = \left(\lambda^{(k)*} e^{(k),1} \right) \delta_i^n + 2 \left(\mu^{(k)*} \varepsilon_{(in)}^{(k),1} \right), \quad e^{(k),1} = \varepsilon_{rr}^{(k),1} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(k),1} + \varepsilon_{zz}^{(k),1}. \quad (3.18)$$

(3.16)-(3.18) denklemlerindeki büyüklüklerin hepsi, ilgili fiziksel bileşenleri ile verilmektedir. Yukarıdaki işlemleri (3.8) için de tekrarlar ve yaptığımız kabülleri dikkate alırsak birinci yaklaşım için aşağıdaki temas koşullarını elde ederiz.

$$\left[\sigma_{(i)r} \right]_{1,1}^{2q,1} + f_{1q} \left[\frac{\partial \sigma_{(i)r}}{\partial r} \right]_{1,0}^{2q,0} + \varphi_{1q} \left[\frac{\partial \sigma_{(i)r}}{\partial z} \right]_{1,0}^{2q,0} + \gamma_{rq} \left[\sigma_{(i)r} \right]_{1,0}^{2q,0} + \gamma_{\theta q} \left[\sigma_{(i)\theta} \right]_{1,0}^{2q,0} + \gamma_{zq} \left[\sigma_{(i)z} \right]_{1,0}^{2q,0} = 0$$

$$\left[u_{(i)} \right]_{1,1}^{2q,1} + f_{1q} \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial r} \right]_{1,0}^{2q,0} + \varphi_{1q} \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial z} \right]_{1,0}^{2q,0} = 0 \quad (3.19)$$

Böylece birinci yaklaşıma ait denklemler ve temas koşulları çıkarılmış olmaktadır. (3.19)'daki f_{1q} , φ_{1q} , γ_{rq} , $\gamma_{\theta q}$, γ_{zq} fonksiyonlarının açık ifadeleri ileride verilecektir.

İkinci yaklaşım:

(3.14), (3.15)'den ikinci yaklaşım için aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$$\nabla_i \left[\sigma^{(k)ij,2} + \sigma^{(k)in,0} \nabla_n u^{(k)j,2} \right] = -\nabla_i \left(\sigma^{(k)in,1} \nabla_n u^{(k)j,1} \right), \quad (3.20)$$

$$2\varepsilon_{jm}^{(k),2} = \nabla_j u_m^{(k),2} + \nabla_m u_j^{(k),2} + \nabla_j u^{(k)n,1} \nabla_m u_n^{(k),1}, \quad (3.21)$$

$$\sigma_{(in)}^{(k),2} = \left(\lambda^{(k)*} e^{(k),2} \right) \delta_i^n + 2 \left(\mu^{(k)*} \varepsilon_{(in)}^{(k),2} \right), \quad e^{(k),2} = \varepsilon_{rr}^{(k),2} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(k),2} + \varepsilon_{zz}^{(k),2}. \quad (3.22)$$

Bir önceki yaklaşımda olduğu gibi (3.8)'den yararlanarak ikinci yaklaşıma ait temas koşullarını aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$\begin{aligned} & \left[\sigma_{(i)r} \right]_{1,1}^{2k,2} + f_{1k} \left[\frac{\partial \sigma_{(i)r}}{\partial r} \right]_{1,1}^{2k,1} + \varphi_{1k} \left[\frac{\partial \sigma_{(i)r}}{\partial z} \right]_{1,1}^{2k,1} + f_{2k} \left[\frac{\partial \sigma_{(i)r}}{\partial r} \right]_{1,0}^{2k,0} + \varphi_{2k} \left[\frac{\partial \sigma_{(i)r}}{\partial z} \right]_{1,0}^{2k,0} + \\ & (f_{1k})^2 \left[\frac{\partial^2 \sigma_{(i)r}}{\partial r^2} \right]_{1,0}^{2k,0} + f_{1k} \varphi_{1k} \left[\frac{\partial^2 \sigma_{(i)r}}{\partial r \partial z} \right]_{1,0}^{2k,0} + \frac{1}{2} (\varphi_{1k})^2 \left[\frac{\partial^2 \sigma_{(i)r}}{\partial z^2} \right]_{1,0}^{2k,0} + \\ & \gamma_{rk} \left[\sigma_{(i)r} \right]_{1,1}^{2k,1} + f_{1k} \gamma_{rk} \left[\frac{\partial \sigma_{(i)r}}{\partial r} \right]_{1,0}^{2k,0} + \varphi_{1k} \gamma_{rk} \left[\frac{\partial \sigma_{(i)r}}{\partial z} \right]_{1,0}^{2k,0} + \gamma_{\theta k} \left[\sigma_{(i)\theta} \right]_{1,1}^{2k,1} + \\ & f_{1k} \gamma_{\theta k} \left[\frac{\partial \sigma_{(i)\theta}}{\partial r} \right]_{1,0}^{2k,0} + \varphi_{1k} \gamma_{\theta k} \left[\frac{\partial \sigma_{(i)\theta}}{\partial z} \right]_{1,0}^{2k,0} + \gamma_{zk} \left[\sigma_{(i)z} \right]_{1,0}^{2k,0} + f_{1k} \gamma_{zk} \left[\frac{\partial \sigma_{(i)z}}{\partial r} \right]_{1,0}^{2k,0} + \\ & \beta_{rk} \left[\sigma_{(i)r} \right]_{1,0}^{2k,0} + \beta_{\theta k} \left[\sigma_{(i)\theta} \right]_{1,0}^{2k,0} + \beta_{zk} \left[\sigma_{(i)z} \right]_{1,0}^{2k,0} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[u_{(i)} \right]_{1,1}^{2k,2} + f_{1k} \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial r} \right]_{1,1}^{2k,1} + \varphi_{1k} \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial z} \right]_{1,1}^{2k,1} + f_{2k} \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial r} \right]_{1,0}^{2k,0} + \varphi_{2k} \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial z} \right]_{1,0}^{2k,0} + \\ & (f_{1k})^2 \left[\frac{\partial^2 u_{(i)}}{\partial r^2} \right]_{1,0}^{2k,0} + f_{1k} \varphi_{1k} \left[\frac{\partial^2 u_{(i)}}{\partial r \partial z} \right]_{1,0}^{2k,0} + \frac{1}{2} (\varphi_{1k})^2 \left[\frac{\partial^2 u_{(i)}}{\partial z^2} \right]_{1,0}^{2k,0} = 0, \end{aligned} \quad (3.23)$$

(3.19) ve (3.23)'de sırası ile $(i) = r, \theta, z$ yerdeğiştirmeleri yapılırsa ilgili yaklaşıma ait temas koşullarının fiziksel bileşenlerdeki açık ifadeleri elde edilir. Sözkonusu denklemlerde kullanılan fonksiyonların açık ifadeleri aşağıda verilmiştir.

$$[\varphi]_{l,s}^{2k,s} = \varphi^{(2k),s} - \varphi^{(1),s}; f_{lk} = \delta_{\underline{k}}(t_3) \cos \theta_{\underline{k}}; \varphi_{lk} = -R\delta'_{\underline{k}}(t_3) \cos \theta_{\underline{k}},$$

$$f_{2k} = \frac{R}{2} \left[\frac{(\delta_{\underline{k}}(t_3))^2}{R^2} \sin^2 \theta_{\underline{k}} + (\delta'_{\underline{k}}(t_3) \cos \theta_{\underline{k}})^2 \right], \quad \varphi_{2k} = -\delta'_{\underline{k}}(t_3) \delta_{\underline{k}}(t_3) \cos^2 \theta_{\underline{k}},$$

$$\beta_{rk} = - \left[2\delta_{\underline{k}}(t_3) \delta''_{\underline{k}}(t_3) + (\delta'_{\underline{k}}(t_3))^2 \right] \cos^2 \theta_{\underline{k}} - \frac{1}{2} \left[\frac{(\delta_{\underline{k}}(t_3))^2}{R^2} \sin^2 \theta_{\underline{k}} + (\delta'_{\underline{k}}(t_3) \cos \theta_{\underline{k}})^2 \right]$$

$$\beta_{\theta k} = -\frac{1}{2} \sin 2\theta_{\underline{k}} \left[\delta_{\underline{k}}(t_3) \delta''_{\underline{k}}(t_3) - \frac{(\delta_{\underline{k}}(t_3))^2}{R^2} \right], \quad \beta_{zk} = -\frac{1}{R} \delta_{\underline{k}}(t_3) \delta'_{\underline{k}}(t_3) \sin^2 \theta_{\underline{k}}$$

$$\gamma_{rk} = \left(\frac{\delta_{\underline{k}}(t_3)}{R} - \delta''_{\underline{k}}(t_3) R \right) \cos \theta_{\underline{k}}; \quad \gamma_{\theta k} = -\frac{\delta_{\underline{k}}(t_3)}{R} \sin \theta_{\underline{k}}; \quad \gamma_{zk} = -\delta'_{\underline{k}}(t_3) \cos \theta_{\underline{k}};$$

$$\delta'_{\underline{k}}(t_3) = \frac{d\delta_{\underline{k}}(t_3)}{dt_3}, \quad \delta''_{\underline{k}}(t_3) = \frac{d^2\delta_{\underline{k}}(t_3)}{dt_3^2}, \quad k=1,2 \quad (3.24)$$

Bundan başka, aynı-fazlı eğilme durumu (şekil 3.2a) için

$$\delta_1(t_3) = \delta_2(t_3) = \ell \sin(2\pi t_3/\ell), \quad (3.25)$$

zıt-fazlı eğilme durumu (şekil 3.2b) için ise

$$\delta_1(t_3) = -\delta_2(t_3) = \ell \sin(2\pi t_3/\ell) \quad (3.26)$$

olduğunu kabul edeceğiz.

Yapacağımız araştırmalar sıfırncı, birinci ve ikinci yaklaşımlar çerçevesinde olacağından alan denklemleri ve temas koşullarının ifadelerini sözünü ettiğimiz yaklaşımlar çerçevesinde yazmış olmakla yetineceğiz. Benzer işlemlerle diğer yaklaşımlar da elde edilebilir.

Bir önceki bölümde de olduğu gibi, stabilite kaybı kriteri olarak liflerdeki başlangıç eğilme genliklerinin büyüyerek sonsuza gitmesine karşı gelen zaman süresini kritik zaman olarak kabul etmek suretiyle Hoff (1954) kriterine benzer bir kriter uygulayacağız.

3.3 Uygun Sınır-Değer Problemlerinin Çözümlerinin Elde Edilmesi

Bu kısımda, yukarıda formülasyonu verilen sıfıncı, birinci ve ikinci yaklaşımlara ait sınır-değer problemlerinin çözümlerini elde edeceğiz. Önce, bu yaklaşımlara ait olan problemlerin çözümünü matrisin ve liflerin saf elastik olması durumlarında elde edeceğimizden (3.12), (3.18), (3.22) denklemlerindeki $\lambda^{(k)*}$, $\mu^{(*)}$ operatörlerini sırası ile $\lambda^{(k)}$, $\mu^{(k)}$ sabitleri ile yer değiştireceğiz ve stabilite kaybı incelemelerine kadar sabit olduklarını kabul edeceğiz. Ayrıca, sadelik için her iki lif malzemesinin aynı olduğunu ve bu malzemelerin $v^{(21)} = v^{(22)} = v^{(2)}$ ($v^{(2q)}$ q. lifin Poisson oranı) şeklindeki Poisson oranının, $v^{(1)}$ şeklinde göstereceğimiz matris malzemesinin Poisson oranına eşit olduğunu varsayacağız.

Bu durumda sıfıncı yaklaşım için aşağıdaki çözümü elde ederiz.

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{(1),0} &= p; \sigma_{zz}^{(21),0} = \sigma_{zz}^{(22),0} = \frac{E^{(2)}}{E^{(1)}} p; \epsilon_{zz}^{(21),0} = \epsilon_{zz}^{(22),0} = \epsilon_{zz}^{(1),0} = \frac{p}{E^{(1)}}; z = z_1 = z_2 \\ u_z^{(21),0} &= u_z^{(22),0} = u_z^{(1),0} = \epsilon_{zz}^{(1),0} z; \sigma_{(ij)}^{(2q),0} = \sigma_{(ij)}^{(1),0} = 0; (ij) = rr, \theta\theta, r\theta, \theta z, rz \end{aligned} \quad (3.27)$$

(3.27)'deki $E^{(1)}$, $E^{(2)}$ sırası ile matris ve lif malzemelerinin elastisite modülleridirler.

Belirtelim ki, (3.27) çözümü liflerin hem aynı-fazlı ve hem de zıt-fazlı yerleşim durumları için de geçerlidir.

Şimdi birinci yaklaşıma ait olan (3.16)-(3.19) probleminin çözümünü ele alalım. Yukarıda yapılan kabüller ve sıfıncı yaklaşımın (3.27) çözümünün dikkate alınması ile (3.16) denklemleri

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial r_k} + \frac{1}{r_k} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial \theta_k} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial z_k} + \frac{1}{r_k} \left(\sigma_{rr}^{(k),1} - \sigma_{\theta\theta}^{(k),1} \right) + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial z_k^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial r_k} + \frac{1}{r_k} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),1}}{\partial \theta_k} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),1}}{\partial z_k} + \frac{2}{r_k} \sigma_{r\theta}^{(k),1} + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_\theta^{(k),1}}{\partial z_k^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial r_k} + \frac{1}{r_k} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),1}}{\partial \theta_k} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),1}}{\partial z_k} + \frac{1}{r_k} \sigma_{rz}^{(k),1} + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial z_k^2} = 0 \quad (3.28)$$

haline gelir. Bu denklemler üç boyutlu lineerize edilmiş elastisite denklemleri ile çakışmaktadır. Benzer şekilde (3.17) denklemleri

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^{(k),1} &= \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r_k}, \quad \varepsilon_{r\theta}^{(k),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_k} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta_k} + \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial r_k} - \frac{u_\theta^{(k),1}}{r_k} \right), \quad \varepsilon_{rz}^{(k),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r_k} + \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z_k} \right) \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(k),1} &= \frac{1}{r_k} \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial \theta_k} + \frac{u_r^{(k),1}}{r_k}, \quad \varepsilon_{\theta z}^{(k),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial z_k} + \frac{1}{r_k} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial \theta_k} \right), \quad \varepsilon_{zz}^{(k),1} = \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z_k}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

olur. (3.18) denklemleri ise viskoelastisite operatörlerinin ilgili saf elastik sabitleri ile yer değiştirmesi koşulu ile aynen kalırlar. Sıfırıncı yaklaşımda elde edilen çözüm dikkate alınırsa birinci yaklaşıma ait (3.19) temas koşulları aşağıdaki şekilde elde edilirler.

$$\begin{aligned} [\sigma_{rr}]_{1,1}^{2k,1} &= 0, \quad [\sigma_{r\theta}]_{1,1}^{2k,1} = 0, \quad [\sigma_{rz}]_{1,1}^{2k,1} = \delta'_k(t_3) (\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0}) \cos \theta_k, \\ [u_r]_{1,1}^{2k,1} &= 0, \quad [u_\theta]_{1,1}^{2k,1} = 0, \quad [u_z]_{1,1}^{2k,1} = 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Buradaki $\delta'_k(t_3)$, liflerin aynı-fazlı eğilmesi durumunda $\delta'_1(t_3) = \delta'_2(t_3) = 2\pi \cos(2\pi t_3/\ell)$, zıt-fazlı eğilmesi durumunda ise $\delta'_1(t_3) = -\delta'_2(t_3) = 2\pi \cos(2\pi t_3/\ell)$ şeklindedir. (3.30) denklemlerinin çözümü için (3.28)'i de dikkate alarak aşağıdaki gösterilimi (Guz, 1999) kullanalım.

$$\begin{aligned} u_r^{(k),1} &= \frac{1}{r_k} \frac{\partial}{\partial \theta_k} \psi^{(k)} - \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial z} \chi^{(k)}; \quad u_\theta^{(k),1} = -\frac{\partial}{\partial r_k} \psi^{(k)} - \frac{1}{r_k} \frac{\partial^2}{\partial \theta_k \partial z} \chi^{(k)}; \\ u_z^{(k),1} &= (\lambda^{(k)} + \mu^{(k)})^{-1} \left((\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}) \Delta_1^{(k)} + (\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi^{(k)}; \end{aligned}$$

$$\Delta_1^{(k)} = \frac{\partial^2}{\partial r_k^2} + \frac{1}{r_k} \frac{\partial}{\partial r_k} + \frac{1}{r_k^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta_k^2}. \quad (3.31)$$

Buradaki $\psi^{(k)}, \chi^{(k)}$ fonksiyonları aşağıdaki denklemleri sağlarlar.

$$\left(\Delta_1^{(k)} + \left(\xi_1^{(k)} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi^{(k)} = 0; \quad \left(\Delta_1^{(k)} + \left(\xi_2^{(k)} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\Delta_1^{(k)} + \left(\xi_3^{(k)} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi^{(k)} = 0 \quad (3.32)$$

(3.32)'deki $\xi_i^{(k)}$ ($k=1,2,3; i=1,2,3$)'ler sabittirler ve aşağıdaki şekilde belirlenirler.

$$\xi_1^{(k)} = \sqrt{\frac{\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}}{\mu^{(k)}}}, \quad \xi_2^{(k)} = \sqrt{\frac{\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}}{\mu^{(k)}}}, \quad \xi_3^{(k)} = \sqrt{\frac{\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}}{\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}}}. \quad (3.33)$$

Bu durumda (3.30) denklemlerinin çözümü, bu denklemlerin sağ tarafındaki ifadeler de dikkate alınarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \psi^{(2k),1} &= \alpha \sin \alpha z \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{(2k)} I_n(\xi_1^{(2k)} \alpha r_k) \exp(in\theta_k), \\ \chi^{(2k),1} &= \cos \alpha z \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[A_n^{(2k)} I_n(\xi_2^{(2k)} \alpha r_k) + B_n^{(2k)} I_n(\xi_3^{(2k)} \alpha r_k) \right] \exp(in\theta_k), \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \psi^{(1),1} &= \alpha \sin \alpha z \sum_{k=1}^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{(1)k} K_n(\xi_1^{(1)} \alpha r_k) \exp(in\theta_k), \\ \chi^{(1),1} &= \cos \alpha z \sum_{k=1}^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[A_n^{(1)k} K_n(\xi_2^{(1)} \alpha r_k) + B_n^{(1)k} K_n(\xi_3^{(1)} \alpha r_k) \right] \exp(in\theta_k) \end{aligned} \quad (3.35)$$

(3.34), (3.35)'de $\alpha = 2\pi/\ell$ ve $I_n(x)$, $K_n(x)$ sırası ile sanal argümanlı Bessel fonksiyonu ve Macdonald fonksiyonlarıdır. $A_n^{(2k)}, \dots, C_n^{(2k)}$, $A_n^{(1)k}, \dots, C_n^{(1)k}$ bilinmeyenleri kompleks sabitlerdir ve aşağıdaki ilişkileri sağlarlar:

$$A_n^{(2k)} = \overline{A_{-n}^{(2k)}}, \quad B_n^{(2k)} = \overline{B_{-n}^{(2k)}}, \quad C_n^{(2k)} = \overline{C_{-n}^{(2k)}}, \quad \text{Im } A_0^{(2k)} = \text{Im } B_0^{(2k)} = \text{Im } C_0^{(2k)} = 0$$

$$A_n^{(1)k} = \overline{A_{-n}^{(1)k}}, \quad B_n^{(1)k} = \overline{B_{-n}^{(1)k}}, \quad C_n^{(1)k} = \overline{C_{-n}^{(1)k}}, \quad \text{Im } A_0^{(1)k} = \text{Im } B_0^{(1)k} = \text{Im } C_0^{(1)k} = 0 \quad (3.36)$$

(3.31), (3.34), (3.35)'den yararlanarak (3.30)'a dahil olan bilinmeyen sabitler için yani $A_n^{(2k)}, \dots, C_n^{(2k)}, A_n^{(1)k}, \dots, C_n^{(1)k}$ 'ler için sonsuz cebirsel homojen olmayan lineer denklemler takımı elde ediyoruz. Bu durumda (r_2, θ_2) koordinatlarında verilen büyüklükleri (r_1, θ_1) koordinatlarında yazabilmemiz için veya aksine (r_1, θ_1) 'dekileri (r_2, θ_2) koordinatlarında yazabilmemiz amacı ile $K_n(x)$ için verilen toplama teoreminden (summation theorem) (Watson, 1944) ve silindirik koordinat takımları arasındaki bağıntılardan yararlanacağız.

$$r_m \exp i\theta_m = R_{mn} \exp i\varphi_{mn} + r_n \exp i\theta_n,$$

$$K_v(cr_n) \exp i v \theta_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^v I_k(cr_m) K_{v-k}(cR_{mn}) \exp[i(v-k)\varphi_{mn}] \exp i k \theta_m,$$

$$mn = 12; 21; \quad m, n = 1, 2; \quad r_m < R_{mn}; \quad R_{12} = R_{21}; \quad \varphi_{12} = 0; \quad \varphi_{21} = \pi. \quad (3.37)$$

(3.34)-(3.37) ilişkilerini kullanarak (3.30), (3.17) ve (3.18)'den birinci yaklaşımdaki bilinmeyenler için $O_1 r_1 \theta_1 z_1$ koordinat sisteminde yazılmış aşağıdaki sonsuz boyutlu denklem sistemi elde edilir.

$$\sum_{t=0}^{\infty} f_t \left\{ b_{\bar{u}}^{(1),1} F_{\bar{t}j}^{(1),1} - b_{\bar{u}}^{(2),1} F_{\bar{t}j}^{(2),1} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \left[b_{ni}^{(1),1} F_{nij}^{(1),1} \right] \right\} g_j(t, \theta) = \delta_3^j 2\pi \cos \alpha z \left(\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right) \cos \theta$$

$$f_t = \begin{cases} 1/2 & t = 0 \text{ ise} \\ 1 & t \neq 0 \text{ ise} \end{cases}, \quad g_j(t, \theta) = \begin{cases} \cos t\theta & j = 1, 3, 4, 6 \text{ ise} \\ \sin t\theta & j = 2, 5 \text{ ise} \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3; \quad j = \overline{1, 6}, \quad b_{01}^{(k),1} = 0$$

$$\alpha^3 C_t^{(k)} = b_{t1}^{k1} + i b_{t1}^{(k),1}, \quad \alpha^3 A_t^{(k)} = b_{t2}^{(k),1} + i b_{t2}^{k1}, \quad \alpha^3 B_t^{(k)} = b_{t3}^{(k),1} + i b_{t3}^{k1} \quad (3.38)$$

(3.38)'deki $F_{\bar{t}j}^{(k),1}$, $F_{nij}^{(k),1}$ fonksiyonlarının açık şekli Ek 5'de (E5.1) ile verilmektedir.

Belirtelim ki, (3.38) denklem sistemi, sonsuz ortamdaki birbirine yakın periyodik eğilmiş iki lifin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve aynı-fazlı yerleşmiş olmaları durumuna (Şekil 1a)

karşı gelmektedir. Liflerin diğer yerleşim şekilleri için de benzer denklemler, terimlerdeki işaret farkları ile oluşmaktadır. Ayrıca Şekil 3.2c'den de görülebilen, mm_1 eksenine göre simetri özellikleri de kullanılmıştır. Açıkta ki, liflerin yerleşimine göre bu simetrisinin özelliği de değişecektir. Bu denklem sistemlerinin ifadeleri çok uzun olduğundan, burada örnek olarak sadece bir duruma karşı gelen denklemler verilmektedir.

Daha önce de ifade ettiğimiz gibi, (3.38) bilinmeyen sabitler içeren sonsuz boyutlu cebirsel denklemler takımıdır. Sayısal sonuç elde etmek için bu sistemi uygun sonlu denklemler sistemi ile yerdeştirmeliyiz. Bu değişimin mümkün olduğunu gösterelim. Bu amaçla aşağıdaki notasyonu tanımlayalım:

$$C_{\underline{n}}^{(1)k} K_{\underline{n}}(\xi_1^{(1)} \kappa) = y_{n1}^{(1)k} + iz_{n1}^{(1)k}, \quad A_{\underline{n}}^{(1)k} K_{\underline{n}}(\xi_2^{(1)} \kappa) = z_{n2}^{(1)k} + iy_{n2}^{(1)k}$$

$$B_{\underline{n}}^{(1)k} K_{\underline{n}}(\xi_3^{(1)} \kappa) = z_{n3}^{(1)k} + iy_{n3}^{(1)k}, \quad C_{\underline{n}}^{(2)k} I_{\underline{n}}(\xi_1^{(2)} \kappa) = y_{n1}^{(2)k} + iz_{n1}^{(2)k}$$

$$A_{\underline{n}}^{(2)k} I_{\underline{n}}(\xi_2^{(2)} \kappa) = z_{n2}^{(2)k} + iy_{n2}^{(2)k}, \quad B_{\underline{n}}^{(2)k} I_{\underline{n}}(\xi_3^{(2)} \kappa) = z_{n3}^{(2)k} + iy_{n3}^{(2)k}$$

$$Z_{\underline{n}}^{(k)q} = \begin{Bmatrix} z_{n1}^{(k)q} \\ z_{n2}^{(k)q} \\ z_{n3}^{(k)q} \end{Bmatrix}, \quad Y_{\underline{n}}^{(k)q} = \begin{Bmatrix} y_{n1}^{(k)q} \\ y_{n2}^{(k)q} \\ y_{n3}^{(k)q} \end{Bmatrix}; \quad D_{nv}^{(1)q} = \|d_{rs}^{(1)q}(n, v)\|, \quad D_{\underline{n}}^{(2)q} = \|d_{rs}^{(2)q}(n)\|,$$

$$F_{nv}^{(1)q} = \|f_{rs}^{(1)q}(n, v)\|, \quad F_{\underline{n}}^{(2)q} = \|f_{rs}^{(2)q}(n)\|, \quad q = 1, 2; \quad k = 1, 2; \quad r, s = 1, 2, 3, \quad \kappa = 2\pi R/\ell \quad (3.39)$$

(3.39) notasyonu kullanılarak sonsuz boyutlu denklemler sistemini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$Z_{\underline{n}}^{(1)1} + \sum_{v=0}^{\infty} D_{nv}^{(1)2} Z_v^{(1)2} + D_{\underline{n}}^{(2)1} Z_{\underline{n}}^{(2)1} = 0, \quad Z_{\underline{n}}^{(1)2} + \sum_{v=0}^{\infty} D_{nv}^{(1)1} Z_v^{(1)1} + D_{\underline{n}}^{(2)2} Z_{\underline{n}}^{(2)2} = 0 \quad (3.40)$$

$$Y_{\underline{n}}^{(1)1} + \sum_{v=0}^{\infty} F_{nv}^{(1)2} Y_v^{(1)2} + F_{\underline{n}}^{(2)1} Y_{\underline{n}}^{(2)1} = 2\pi\delta_n^3 (\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(21),0}),$$

$$Y_{\underline{n}}^{(1)2} + \sum_{v=0}^{\infty} F_{nv}^{(1)1} Y_v^{(1)1} + F_{\underline{n}}^{(2)2} Y_{\underline{n}}^{(2)2} = 2\pi\delta_n^3 (\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(22),0}) (-1)^k \quad (3.41)$$

Burada $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$, $\delta_3^3 = 1$, $\delta_n^3 = 0$ ($n \neq 3$ ise)'dir. Ayrıca liflerin eğilmesi aynı-fazlı ise $k = 1$, zıt-fazlı ise $k = 2$ 'dir. $D_{nv}^{(k)q}$, $F_{nv}^{(k)q}$, $D_n^{(2)q}$, $F_n^{(2)q}$ matrislerinin bileşenleri (3.18), (3.31), (3.24), (3.25), (3.37)'den bulunabilir. Burada ayrıntılar atlanacaktır.

(3.40)'dan $Z_n^{(k)q} = 0$, $k = 1, 2$; $q = 1, 2$ olduğu görülür. Bundan başka uygun simetri koşullarından liflerin aynı-fazlı eğilme durumları için $Y_n^{(k)1} = Y_n^{(k)2}$, zıt-fazlı eğilme durumları için $Y_n^{(k)1} = -Y_n^{(k)2}$ olduğu açıktır. Bu sonuçları dikkate alırsak (3.41)'den aynı-fazlı eğilme durumu için

$$Y_n^{(1)1} + \sum_{v=0}^{\infty} F_{nv}^{(1)2} Y_v^{(1)1} + F_n^{(2)1} Y_n^{(2)1} = 2\pi\delta_n^3 (\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0}) \quad (3.42)$$

zıt-fazlı eğilme durumu için

$$Y_n^{(1)1} - \sum_{v=0}^{\infty} F_{nv}^{(1)2} Y_v^{(1)1} + F_n^{(2)1} Y_n^{(2)1} = 2\pi\delta_n^3 (\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0}) \quad (3.43)$$

olur. Yukarıda da işaret ettiğimiz gibi, sayısal araştırmalar için (3.42) sonsuz cebirsel denklemler sistemine sonlu denklemler takımı ile yaklaşılmalıdır. Böyle bir yerdeğiştirmenin geçerli olabilmesi için sonsuz denklemler sisteminin determinantının normal tipte olması zorunluluğu vardır (Kantarovich ve Krilov, 1962).

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} |F_{nv}^{(1)2}| \quad (3.44)$$

serisinin yakınsak olduğunu gösterebilirsek sonsuz boyutlu denklemler sisteminin determinantının normal tipte olduğunu söyleyebiliriz. (3.44) serisinin karakterini belirlemek için (E5.1) ile verilen birinci yaklaşım ifadelerini ve $I_n(x)$, $K_n(x)$ fonksiyonlarının

$$I_n(x) < c_1 \frac{1}{n!} \left(\frac{|x|}{2} \right)^n, \quad c_1 = \text{const.}, \quad K_n(x) \approx c_2 (n-1)! \left(\frac{2}{|x|} \right)^n, \quad c_2 = \text{const.} \quad (3.45)$$

ile verilen asimtotik karakterini gözönüne alalım. (3.45) sabit x ve n 'nin büyük değerleri için sağlanır. Aynı zamanda liflerin birbirlerine dokunmayacağını kabul edip bunu sağlayan

$$R/(R_{12} - 2L) > R/R_{12}, \quad R_{12}R^{-1} > 2 \quad (3.46)$$

eşitsizliğini de kullanacağız. Böylece (3.45) ve (3.46) ifadelerini dikkate alır ve $F_{nv}^{(1)2}$ 'yi analiz edersek (3.44) serisinin karakterini aşağıdaki gibi belirleriz.

$$M < c_3 \sum_{n=0}^{\infty} n^{c_4} (\rho - 1)^{-n}, \quad c_3; c_4 = \text{const.}, \quad \rho = R_{12}/R > 2 \quad (3.47)$$

Sağ taraftaki seri yakınsak olduğundan (3.44) serisi de yakınsaktır.

Buradan (3.42), (3.43) sonsuz denklemler sisteminin katsayılar determinantının tipi normaldir ve sonsuz boyutlu sistem sonlu sistemle yerdeğiştirilebilir sonucunu elde etmiş oluruz. Sonlu sistem için gerekli denklem sayısı ise sayısal sonuçların yakınsaklığı ile tespit edilir. Böylece (3.38)'deki bilinmeyenler belirlenmiş olur.

Şimdi ikinci yaklaşıma ait (3.20)-(3.23) sınır-değer probleminin çözümünü ele alalım. Yapılan kabülleri, sıfırıncı yaklaşım için elde edilen (3.27) çözümlerini ve birinci yaklaşıma ait yer değiştirmelerin çok küçük olduğunu dikkate alırsak, (3.20) aşağıdaki hale gelir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),2}}{\partial r_k} + \frac{1}{r_k} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),2}}{\partial \theta_k} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),2}}{\partial z_k} + \frac{1}{r_k} \left(\sigma_{rr}^{(k),2} - \sigma_{\theta\theta}^{(k),2} \right) + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),2}}{\partial z_k^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),2}}{\partial r_k} + \frac{1}{r_k} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),2}}{\partial \theta_k} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),2}}{\partial z_k} + \frac{2}{r_k} \sigma_{r\theta}^{(k),2} + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_{\theta}^{(k),2}}{\partial z_k^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),2}}{\partial r_k} + \frac{1}{r_k} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),2}}{\partial \theta_k} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),2}}{\partial z_k} + \frac{1}{r_k} \sigma_{rz}^{(k),2} + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),2}}{\partial z_k^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

Bu denklemlerin birinci yaklaşımdakilerle çakıştığı görülmektedir. Aynı şekilde (3.21) şekil değiştirme-yerdeğiştirme ilişkileri bu yaklaşım için

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^{(k),2} &= \frac{\partial u_r^{(k),2}}{\partial r_k}, \quad \varepsilon_{r\theta}^{(k),2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_k} \frac{\partial u_r^{(k),2}}{\partial \theta_k} + \frac{\partial u_{\theta}^{(k),2}}{\partial r_k} - \frac{u_{\theta}^{(k),2}}{r_k} \right), \quad \varepsilon_{rz}^{(k),2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z^{(k),2}}{\partial r_k} + \frac{\partial u_r^{(k),2}}{\partial z_k} \right) \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(k),2} &= \frac{1}{r_k} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),2}}{\partial \theta_k} + \frac{u_r^{(k),2}}{r_k}, \quad \varepsilon_{\theta z}^{(k),2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\theta}^{(k),2}}{\partial z_k} + \frac{1}{r_k} \frac{\partial u_z^{(k),2}}{\partial \theta_k} \right), \quad \varepsilon_{zz}^{(k),2} = \frac{\partial u_z^{(k),2}}{\partial z_k}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

olarak elde edilir. (3.22) denklemleri ise viskoelastisite operatörlerinin ilgili saf elastik

sabitleri ile yer değiştirmesi koşulu ile aynen kalırlar. Sıfırncı ve birinci yaklaşımda elde edilen büyüklükler hesaba katılırsa ikinci yaklaşım için (3.23) temas koşulları aşağıdaki hale gelirler.

$$\begin{aligned}
 [\sigma_{rr}]_{1,2}^{2k,2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_{11n} \cos n\theta_k + \cos(2\alpha t_3) \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_{12n} \cos n\theta_k, \\
 [\sigma_{r\theta}]_{1,2}^{2k,2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \Pi_{21n} \sin n\theta_k + \cos(2\alpha t_3) \sum_{n=1}^{\infty} \Pi_{22n} \sin n\theta_k, \\
 [\sigma_{rz}]_{1,2}^{2k,2} &= \sin(2\alpha t_3) \sum_{n=1}^{\infty} \Pi_{32n} \cos n\theta_k, \\
 [u_r]_{1,2}^{2k,2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_{41n} \cos n\theta_k + \cos(2\alpha t_3) \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_{42n} \cos n\theta_k, \\
 [u_\theta]_{1,2}^{2k,2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \Pi_{51n} \sin n\theta_k + \cos(2\alpha t_3) \sum_{n=1}^{\infty} \Pi_{52n} \sin n\theta_k, \\
 [u_z]_{1,2}^{2k,2} &= \sin(2\alpha t_3) \sum_{n=1}^{\infty} \Pi_{62n} \cos n\theta_k. \tag{3.50}
 \end{aligned}$$

(3.23), (3.24)'den (3.50)'nin sağ tarafındaki $\Pi_{11n}, \dots, \Pi_{61n}$ sabitler sıfırncı ve birinci yaklaşımlardan belirlenir. Bu sabitler sözkonusu yaklaşımlara lineer bağlıdırlar. (3.50) denklemleri αt_3 içeren ve içermeyen denklemler olarak iki gruba ayrılabilirler. Bu denklem gruplarının çözümlerini ayrı ayrı ele alacağız.

Önce αt_3 içermeyen denklemler takımını çözelim. Bu amaçla aşağıda verilen Papkovich-Neuber gösterilimi kullanılacaktır.

$$\begin{aligned}
 u_r^{(k)} &= 4(1 - \nu^{(k)})B_r^{(k)} - \frac{\partial(r_k B_r^{(k)})}{\partial r_k} - \frac{\partial B_0^{(k)}}{\partial r_k}, \quad u_\theta^{(k)} = 4(1 - \nu^{(k)})B_\theta^{(k)} - \frac{\partial B_r^{(k)}}{\partial \theta_k} - \frac{\partial B_0^{(k)}}{r_k \partial \theta_k} \\
 u_z^{(k)} &= -\frac{\partial(r_k B_r^{(k)})}{\partial z_k} - \frac{\partial B_0^{(k)}}{\partial z_k} \tag{3.51}
 \end{aligned}$$

(3.51)'deki $B_0^{(k)}, B_r^{(k)}, B_\theta^{(k)}$ 'ler aşağıdaki denklemleri sağlarlar.

$$\Delta B_0^{(k)} = 0, \quad \Delta B_r^{(k)} - \frac{B_r^{(k)}}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_\theta^{(k)}}{\partial \theta} = 0, \quad \Delta B_\theta^{(k)} - \frac{B_\theta^{(k)}}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r^{(k)}}{\partial \theta} = 0$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r_k^2} + \frac{1}{r_k} \frac{\partial}{\partial r_k} + \frac{1}{r_k^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta_k^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_k^2} \quad (3.52)$$

Buna göre $B_0^{(k)}, B_r^{(k)}, B_\theta^{(k)}$ fonksiyonlarını aşağıdaki gibi belirleriz:

$$B_0^{(m)} = 0, \quad m = 21, 22, 1$$

$$B_r^{(1),2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^2 a_{1n}^{(1)k} r_k^{-(n+1)} \cos n\theta_k + \sum_{k=1}^2 b_{11}^{(1)k} \ln r_k \cos \theta_k + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^2 b_{1n}^{(1)k} r_k^{-(n-1)} \cos n\theta_k,$$

$$B_\theta^{(1),2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^2 a_{1n}^{(1)k} r_k^{-(n+1)} \sin n\theta_k - \sum_{k=1}^2 b_{11}^{(1)k} \ln r_k \sin \theta_k - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^2 b_{1n}^{(1)k} r_k^{-(n-1)} \sin n\theta_k,$$

$$B_r^{(2k),2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}^{(2k)} r_k^{n+1} \cos n\theta_k + \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}^{(2k)} r_k^{n-1} \cos n\theta_k,$$

$$B_\theta^{(2k),2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}^{(2k)} r_k^{n+1} \sin n\theta_k - \sum_{n=2}^{\infty} b_{2n}^{(2k)} r_k^{n-1} \sin n\theta_k. \quad (3.53)$$

(3.53) ifadelerini (3.51), (3.49), (3.22)'de kullanırsak (3.50) denklemlerinden αt_3 içermeyen denklemler grubu için aşağıdaki denklem sistemini elde ederiz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_{1n}^{(1)1} \Phi_{11n}^{(1)} + \bar{b}_{11}^{(1)1} \Phi_{121}^{(1)} + \sum_{n=2}^{\infty} \bar{b}_{1n}^{(1)1} \Phi_{12n}^{(1)} - \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_{2n}^{(21)} \Phi_{11n}^{(2)} - \sum_{n=2}^{\infty} \bar{b}_{2n}^{(21)} \Phi_{12n}^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_{11n} \cos n\theta,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_{1n}^{(1)1} \Phi_{21n}^{(1)} + \bar{b}_{11}^{(1)1} \Phi_{221}^{(1)} + \sum_{n=2}^{\infty} \bar{b}_{1n}^{(1)1} \Phi_{22n}^{(1)} - \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_{2n}^{(21)} \Phi_{21n}^{(2)} - \sum_{n=2}^{\infty} \bar{b}_{2n}^{(21)} \Phi_{22n}^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Pi_{21n} \sin n\theta,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_{1n}^{(1)1} \Phi_{31n}^{(1)} + \bar{b}_{11}^{(1)1} \Phi_{321}^{(1)} + \sum_{n=2}^{\infty} \bar{b}_{1n}^{(1)1} \Phi_{32n}^{(1)} - \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_{2n}^{(21)} \Phi_{31n}^{(2)} - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}_{2n}^{(21)} \Phi_{32n}^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_{41n} \cos n\theta,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_{1n}^{(1)1} \Phi_{41n}^{(1)} + \bar{b}_{11}^{(1)1} \Phi_{421}^{(1)} + \sum_{n=2}^{\infty} \bar{b}_{1n}^{(1)1} \Phi_{42n}^{(1)} - \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_{2n}^{(21)} \Phi_{41n}^{(2)} - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}_{2n}^{(21)} \Phi_{42n}^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Pi_{51n} \sin n\theta,$$

$$\bar{a}_{1n}^{(1)1} = \alpha^{(n+1)} a_{1n}^{(1)1}, \bar{b}_{1n}^{(1)1} = \alpha^n b_{1n}^{(1)1}, \bar{a}_{2n}^{(2)1} = \alpha^{-n} a_{2n}^{(2)1}, \bar{b}_{2n}^{(2)1} = \alpha^{-(n-2)} b_{1n}^{(2)1} \quad (3.54)$$

(3.54)'deki $\Phi_{1n}^{(1)}$, $\Phi_{i2n}^{(1)}$, $\Phi_{1n}^{(2)}$, $\Phi_{i2n}^{(2)}$ fonksiyonlarının açık şekli Ek 5'de (E5.2) ile verilmektedir. Notasyondan da anlaşılacağı gibi, (3.54) ve dolayısıyla (E5.2)'deki ifadeler $0_1 r_1 \theta_1 z_1$ koordinat takımında yazılmışlardır. Bunun için önce, (3.37) ilişkileri kullanılarak (r_2, θ_2) 'ye bağlı ifadeler (r_1, θ_1) 'e dönüştürülmüştür. Bundan başka sözkonusu denklemlerde 1 indisi kullanılmamıştır.

Şimdi αt_3 içeren denklemler takımını ele alalım. Bunun için (3.31) gösterilimini kullanalım. Buradaki fonksiyonlar, sağlaması gereken (3.32) denklemlerinden ve (3.50) temas koşullarının sağ tarafındaki αt_3 içeren terimlerin yapısından aşağıdaki gibi elde edilirler.

$$\psi^{(2k),2} = \alpha \cos 2\alpha z \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n^{(2k)} I_n(2\xi_1^{(2k)} \alpha r_k) \exp(in\theta_k),$$

$$\chi^{(2k),2} = \sin 2\alpha z \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[E_n^{(2k)} I_n(2\xi_2^{(2k)} \alpha r_k) + F_n^{(2k)} I_n(2\xi_3^{(2k)} \alpha r_k) \right] \exp(in\theta_k), \quad (3.55)$$

$$\psi^{(1),2} = \alpha \cos 2\alpha z \sum_{k=1}^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n^{(1)k} K_n(2\xi_1^{(1)} \alpha r_k) \exp(in\theta_k),$$

$$\chi^{(1),2} = \sin 2\alpha z \sum_{k=1}^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[E_n^{(1)k} K_n(2\xi_2^{(1)} \alpha r_k) + F_n^{(1)k} K_n(2\xi_3^{(1)} \alpha r_k) \right] \exp(in\theta_k). \quad (3.56)$$

(3.55), (3.56)'da $\alpha = 2\pi/\ell$ ve $I_n(x)$, $K_n(x)$ sırası ile sanal argümanlı Bessel fonksiyonu ve Macdonald fonksiyonlarıdır. $D_n^{(2k)}, \dots, F_n^{(2k)}$, $D_n^{(1)k}, \dots, F_n^{(1)k}$ bilinmeyenleri kompleks sabitlerdir ve aşağıdaki ilişkileri sağlarlar:

$$D_n^{(2k)} = \overline{D_{-n}^{(2k)}}, E_n^{(2k)} = \overline{E_{-n}^{(2k)}}, F_n^{(2k)} = \overline{F_{-n}^{(2k)}}, \text{Im } D_0^{(2k)} = \text{Im } E_0^{(2k)} = \text{Im } F_0^{(2k)} = 0$$

$$D_n^{(1)k} = \overline{D_{-n}^{(1)k}}, E_n^{(1)k} = \overline{E_{-n}^{(1)k}}, F_n^{(1)k} = \overline{F_{-n}^{(1)k}}, \text{Im } D_0^{(1)k} = \text{Im } E_0^{(1)k} = \text{Im } F_0^{(1)k} = 0 \quad (3.57)$$

(3.55), (3.56) fonksiyonlarını (3.31), (3.49), (3.22)'de kullanırsak (3.50) denklemlerinden αt_3

içeren denklemler grubundan $D_n^{(2k)}, \dots, F_n^{(2k)}$, $D_n^{(1)k}, \dots, F_n^{(1)k}$ bilinmeyenleri için aşağıdaki sonsuz cebirsel homojen olmayan lineer denklemler takımını elde ediyoruz..

$$\sum_{t=0}^{\infty} f_t \left\{ b_{ti}^{(1),2} F_{ti1}^{(1),2} - b_{ti}^{(2),2} F_{ti1}^{(2),2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \left[b_{ni}^{(1),2} F_{ni1}^{(1),2} \right] \right\} \cos t\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_{12n} \cos n\theta,$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} f_t \left\{ b_{ti}^{(1),2} F_{ti2}^{(1),2} - b_{ti}^{(2),2} F_{ti2}^{(2),2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \left[b_{ni}^{(1),2} F_{ni2}^{(1),2} \right] \right\} \sin t\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \Pi_{22n} \sin n\theta_k,$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} f_t \left\{ b_{ti}^{(1),2} F_{ti3}^{(1),2} - b_{ti}^{(2),2} F_{ti3}^{(2),2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \left[b_{ni}^{(1),2} F_{ni3}^{(1),2} \right] \right\} \cos t\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \Pi_{22n} \cos n\theta,$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} f_t \left\{ b_{ti}^{(1),2} F_{ti4}^{(1),2} - b_{ti}^{(2),2} F_{ti4}^{(2),2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \left[b_{ni}^{(1),2} F_{ni4}^{(1),2} \right] \right\} \cos t\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_{42n} \cos n\theta,$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} f_t \left\{ b_{ti}^{(1),2} F_{ti5}^{(1),2} - b_{ti}^{(2),2} F_{ti5}^{(2),2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \left[b_{ni}^{(1),2} F_{ni5}^{(1),2} \right] \right\} \sin t\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_{52n} \sin n\theta,$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} f_t \left\{ b_{ti}^{(1),2} F_{ti6}^{(1),2} - b_{ti}^{(2),2} F_{ti6}^{(2),2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \left[b_{ni}^{(1),2} F_{ni6}^{(1),2} \right] \right\} \cos t\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \Pi_{62n} \cos n\theta_k.$$

$$f_t = \begin{cases} 1/2 & t = 0 \text{ ise} \\ 1 & t \neq 0 \text{ ise} \end{cases},$$

$$\alpha^3 D_t^{(k)} = b_{t1}^{k2} + i b_{t1}^{(k),2}, \alpha^3 E_t^{(k)} = b_{t2}^{(k),2} + i b_{t2}^{k2}, \alpha^3 F_t^{(k)} = b_{t3}^{(k),2} + i b_{t3}^{k2} \quad (3.58)$$

(3.58)'deki $F_{tij}^{(1),2}, F_{tij}^{(2),2}$ fonksiyonlarının açık ifadeleri Ek 5'de (E5.3) ile verilmektedir.

Denklemler elde edilirken (3.27) ilişkileri ve simetri özellikleri kullanılmıştır. Bu katsayılar da, birbirine yakın liflerin aynı düzlemde ve aynı-fazlı olmasına karşı gelmektedir. Diğer durumlar için de terimlerin işaret farkı ile benzer ifadeler oluşmaktadır.

(3.58) ve (3.54) sistemleri sonsuz boyutlu lineer denklem takımlarıdır. Birinci yaklaşımda olduğu gibi bu denklemlerdeki katsayılar matrisinin, (3.27) ilişkileri ve (3.46) koşulu dikkate alınırsa normal tipte olduklarını söyleyebiliriz. Dolayısıyla sonsuz boyutlu denklem takımları, ilgili sonlu boyutlu takımlarla yer değiştirirler. Sayısal sonuçların yakınsaklığına bakılarak

alınması gereken denklem sayısı tespit edilir. Böylece ikinci yaklaşımla ilgili denklemler de çözülmüş olur.

3.4 Stabilité Kaybı Öncesi Gerilme Yayılımına Ait Sayısal Sonuçlar ve Yorumları

Gerilme yayılımına ait sayısal sonuçlar, tek lif durumunda olduğu gibi, σ_{nn} , σ_{nr} ve σ_{ne} gerilme değerleri ile verilecektir. Bu yüzden öncelikle bu gerilmelerin açık ifadelerini, ayrıntıya girmeden ve sıfıncı yaklaşım sonuçlarını dikkate alarak yazacağız.

$$\sigma_{nn} = \varepsilon \sigma_{rr}^{(k),1} + \varepsilon^2 \left\{ \sigma_{rr}^{(k),2} + \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial r_k} \delta_k(t_3) \cos \theta_k - \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial z_k} R \delta'_k(t_3) \cos \theta_k + \right. \\ \left. 2 \sigma_{r\theta}^{(k),1} \frac{\delta_k(t_3) \sin \theta_k}{R} - 2 \sigma_{rz}^{(k),1} \delta'_k(t_3) \cos \theta_k + \sigma_{zz}^{(k),0} (\delta'_k(t_3))^2 \cos^2 \theta_k \right\} \quad (3.59)$$

$$\sigma_{nr} = \varepsilon \left(\sigma_{rz}^{(k),1} - \sigma_{zz}^{(k),0} \delta'_k(t_3) \cos \theta_k \right) + \varepsilon^2 \left\{ \sigma_{rz}^{(k),2} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial r_k} \delta_k(t_3) \cos \theta_k - \right. \\ \left. \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial z_k} R \delta'_k(t_3) \cos \theta_k + \sigma_{rr}^{(k),1} \delta'_k(t_3) \cos \theta_k + \sigma_{z\theta}^{(k),1} \frac{\delta_k(t_3) \sin \theta_k}{R} - \right. \\ \left. \sigma_{zz}^{(k),1} \delta'_k(t_3) \cos \theta_k - \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\delta_k(t_3) \delta'_k(t_3) \sin^2 \theta_k}{R} \right\} \quad (3.60)$$

$$\sigma_{ne} = \varepsilon \sigma_{r\theta}^{(k),1} + \varepsilon^2 \left\{ \sigma_{r\theta}^{(k),2} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial r_k} \delta_k(t_3) \cos \theta_k - \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial z_k} R \delta'_k(t_3) \cos \theta_k + \right. \\ \left. \sigma_{\theta\theta}^{(k),1} \frac{\delta_k(t_3) \sin \theta_k}{R} - \sigma_{\theta z}^{(k),1} \delta'_k(t_3) \cos \theta_k - \sigma_{rr}^{(k),1} \frac{\delta_k(t_3) \sin \theta_k}{R} + \right. \\ \left. \sigma_{rz}^{(k),1} \delta'_k(t_3) \sin \theta_k - \sigma_{zz}^{(k),0} (\delta'_k(t_3))^2 \cos \theta_k \sin \theta_k \right\} \quad (3.61)$$

$v^{(1)}$ ve $v^{(2k)}$ ($k=1,2$) sırası ile matris ve liflerin Poisson oranları olmak üzere

$v^{(1)} = v^{(21)} = v^{(22)} = 0.3$ olduğunu kabul edelim. σ_{nn} normal gerilmesi ve σ_{nr} , σ_{ne} kayma gerilmelerini araştıralım. İlgili simetri özelliklerinden ve periyodiklikten yola çıkarak

bu gerilmelerin sadece S_1 yüzeyi üzerindeki dağılımlarını ele alacağız. Belirtelim ki, σ_{nr} , σ_{ne} kayma gerilmeleri sırası ile S_1 yüzeyinin τ ve e teğet vektörleri doğrultusunda, σ_{nn} normal gerilmesi ise n normal vektörü doğrultusundadır (Şekil 3.2). $\varepsilon = 0$ durumunda (eğriliğin ihmal edilmesi durumu) σ_{nn} , σ_{nr} ve σ_{ne} gerilmeleri sırası ile σ_{rr} , σ_{rz} ve $\sigma_{r\theta}$ ile çakışır. $v^{(1)} = v^{(2k)}$ ($k=1,2$) koşulunu ve ele aldığımız yükleme durumunu dikkate alırsak $\varepsilon = 0$ için $\sigma_{nn} \equiv \sigma_{rr} \equiv \sigma_{nr} \equiv \sigma_{rz} \equiv \sigma_{ne} \equiv \sigma_{r\theta} \equiv 0$ elde ederiz. Buradan, aşağıda ele alınacak olan gerilmelerin liflerin eğriliğinden ileri geldiği ortaya çıkmaktadır. Kompozitlerin yapışma (adhesion) mukavemeti doğrudan bu gerilmelere bağlıdır. Dolayısı ile bu araştırmalar pratik olarak da öneme sahiptir.

Sırası ile liflerin birbirlerine karşılıklı etkisini ve geometrik nonlinearitenin etkisini karakterize eden $\rho = R_{12}/R$ ve $\varepsilon = p/E^{(1)}$ parametrelerini tanımlayalım. Ayrıca $\kappa = 2\pi R/\ell$ parametresini tanımlayarak $\varepsilon = 0.015$, $E^{(2)}/E^{(1)} = 50$ olduğunu kabul edelim.

Buradaki araştırmalar ve bunlarla ilgili Akbarov ve Guz (1985c)'da yapılanlar, S_1 yüzeyi üzerindeki σ_{nn} gerilmesinin, maksimum değerini koordinatları $\theta = 0$, $\alpha_3 = \pi/2$ ile belirlenen noktada aldığını göstermektedir. σ_{nr} ve σ_{ne} gerilmeleri ise S_1 yüzeyi üzerinde sırası ile $\theta = 0$, $\alpha_3 = 0$ ve $\theta = -\pi/2$, $\alpha_3 = \pi/2$ koordinatlarında maksimum değerler alırlar. Bu noktalar Şekil 3.2a ve Şekil 3.2b'de N_1 (σ_{nn} için), N_2 (σ_{nr} için) ve N_3 (σ_{ne} için) noktaları ile gösterilmişlerdir. Eğer aksine birşey söylenmez ise aşağıda bu gerilmelerin sözü edilen noktalardaki değerleri dikkate alınacaktır.

Ayrıca, elde edilen sayısal sonuçlar geometrik nonlinearitenin sözü edilen gerilme değerlerini sadece nicelik olarak değiştirdiğini göstermiştir. Dolayısı ile gerilme dağılımlarının κ parametresi ve θ koordinatı ile ilgili analizlerinde geometrik lineer durumla ilgili olan $\varepsilon = 10^{-5}$ değerini ele alacağız. Sonra ε parametresinin mutlak değerce büyümesinin seçilen noktalarda sözü edilen gerilme değerlerine etkisini düşüneceğiz.

Şimdi, liflerin aynı fazlı eğrilikli (Şekil 3.2a) olması durumunda çeşitli $\rho = R_{12}/R$ değerleri için σ_{nn}/p (Şekil 3.3), σ_{nr}/p (Şekil 3.4), σ_{ne}/p (Şekil 3.5) ve κ arasındaki bağımlılığı gösteren Şekil 3.3, Şekil 3.4 ve Şekil 3.5 grafiklerini ele alalım. Şekil 3.3 lifler birbirine yaklaşırken σ_{nn}/p değerlerinin monoton olarak azaldığını göstermektedir. Fakat Şekil 3.4 ve Şekil 3.5'den σ_{nr}/p ve σ_{ne}/p değerlerinin ρ ile monoton olarak arttığını görebiliriz. Bu

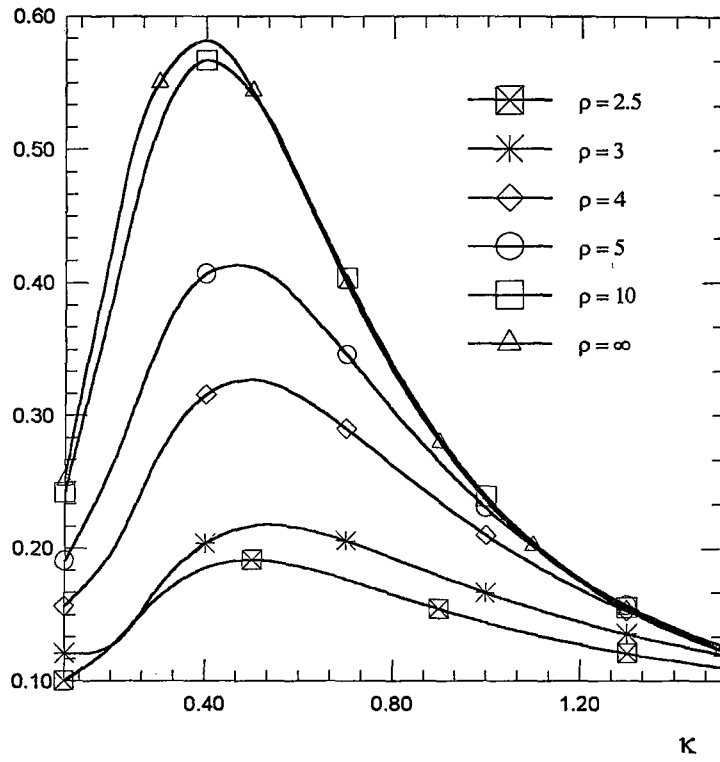
durumda, önemli derecede dikkate değer artma $\sigma_{\pi\tau}$ kayma gerilmesinde gözlenmektedir. Ayrıca, elde edilen sayısal sonuçlardan ρ değerinin artması ile ele alınan gerilme değerleri Akbarov ve Guz (1985a, 2000) kaynağında verilen periyodik eğrilikli tek lif içeren sonsuz elastik ortamdaki ilgili sonuçlara yaklaştığı görülmektedir.

Şekil 3.6, Şekil 3.7 ve Şekil 3.8’de verilen grafikler çeşitli ρ değerlerinde $\kappa = 0.4$ için σ_{nn}/p (Şekil 3.6), $\sigma_{\pi\tau}/p$ (Şekil 3.7), σ_{ne}/p (Şekil 3.8) ve θ arasındaki bağımlılıklar verilmektedir. Bu grafikler aynı zamanda liflerin aynı fazlı eğrilikli olması durumuna aittirler ve liflerin karşılıklı etkisinin S_1 arayüzeyi üzerindeki ele alınan gerilme değerlerine etkisini göstermektedirler.

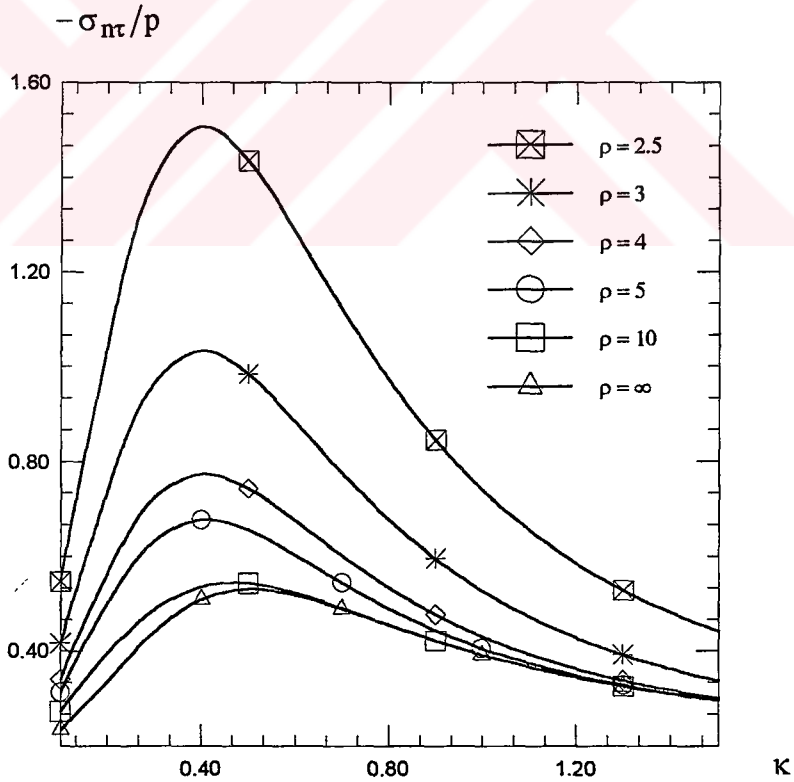
Şimdi, liflerin zıt-fazlı eğrilikli olması (Şekil 3.2b) durumundaki gerilme yayılımını ele alalım. Şekil 3.9, Şekil 3.10 ve Şekil 3.11 çeşitli ρ değerlerinde σ_{nn}/p (Şekil 3.9), $\sigma_{\pi\tau}/p$ (Şekil 3.10), σ_{ne}/p (Şekil 3.11) ve κ arasındaki bağımlılıkları göstermektedirler. Bu sonuçlar liflerin aynı-fazlı eğrilikli olması durumu ile karşılaştırılırsa, zıt-fazlı eğilme durumunda liflerin birbirlerine yaklaşması ile σ_{nn}/p değerleri büyümekte iken $\sigma_{\pi\tau}/p$ ve σ_{ne}/p değerleri azaldığını göstermektedirler. Üstelik, elde edilen sonuçlardan ρ değerinin büyümesi ile liflerin aynı-fazlı eğrilikli olmaları durumunda elde edilen uygun gerilme değerlerine yaklaşıldığı gözlenmektedir.

Şekil 3.12, Şekil 3.13 ve Şekil 3.14 grafikleri $\kappa = 0.4$ durumunda ve çeşitli ρ değerlerinde σ_{nn}/p (Şekil 3.12), $\sigma_{\pi\tau}/p$ (Şekil 3.13), σ_{ne}/p (Şekil 3.14) ve θ arasındaki bağımlılıkları göstermektedirler. Aynı-fazlı eğilme durumunda olduğu gibi, bu grafiklerden de lifler arasındaki etkileşimin artması ile S_1 arayüzeyi üzerindeki gerilme değerlerinin durumu izlenebilmektedir.

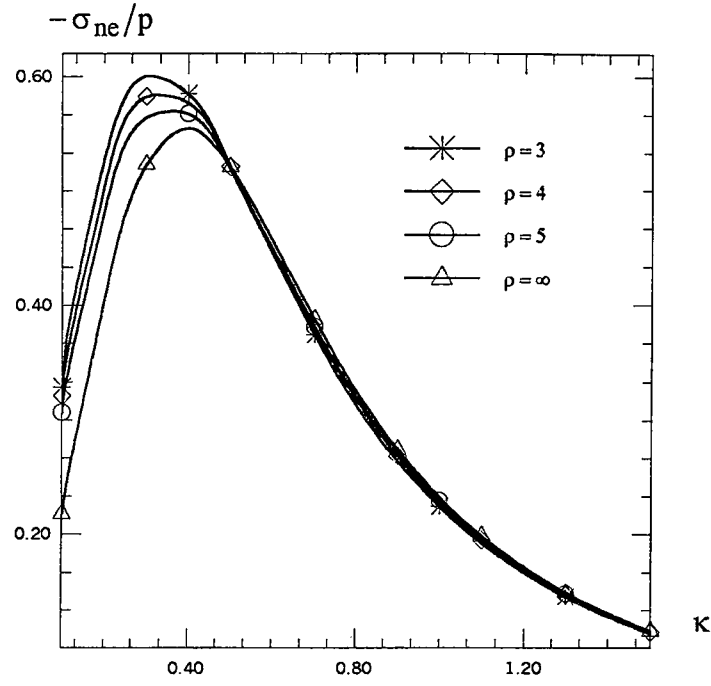
Şimdi geometrik nonlineeritenin gerilme değerlerine etkisini düşüneceğiz. Bu amaçla liflerin aynı-fazlı eğrilikli olması (Şekil 3.2a) durumunda $\sigma_{\pi\tau}$ kayma gerilmesini, zıt-fazlı eğrilikli olması (Şekil 3.2b) durumunda ise normal gerilmeyi ele alacağız. Geometrik nonlineeritenin etkisini düşünürken sonsuzda, ele alınan cisim üzerindeki, çekme ve basınç kuvvetlerinin etkisini ayırmamız gerektiğini belirtelim.



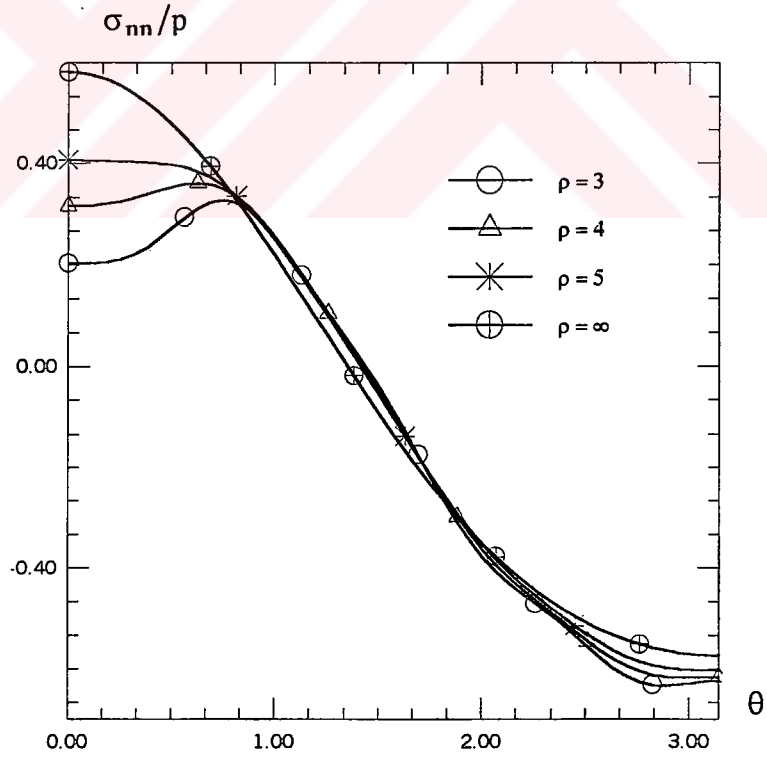
Şekil 3.3 Liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve aynı-fazlı yerleşimlerine karşı gelen durumda $\theta = 0$, $\alpha t_3 = \pi/2$ ve çeşitli ρ 'lar için σ_{nn}/p ile κ arasındaki bağımlılık



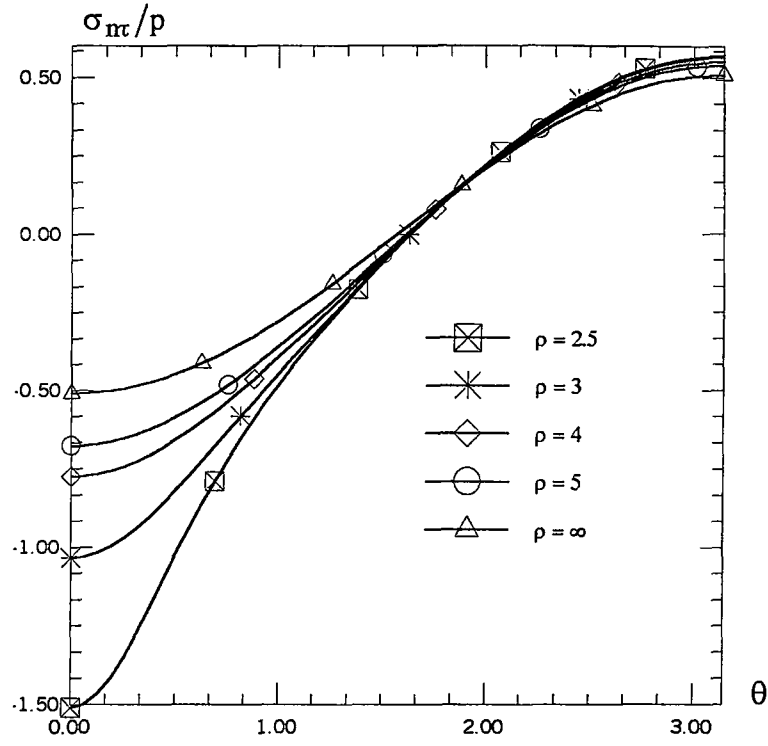
Şekil 3.4 Liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve aynı-fazlı yerleşimlerine karşı gelen durumda $\theta = 0$, $\alpha t_3 = 0$ ve çeşitli ρ 'lar için σ_{nn}/p ile κ arasındaki bağımlılık



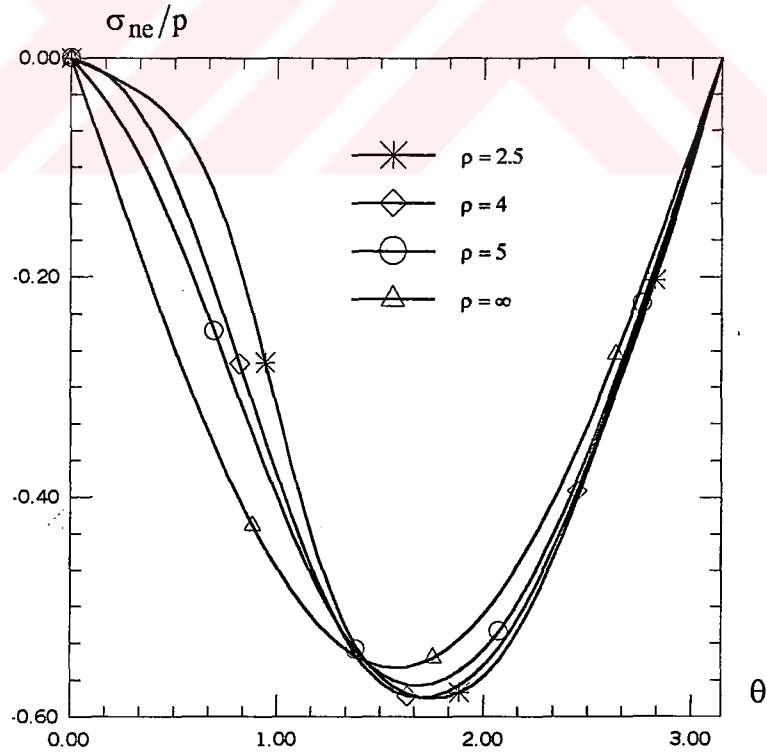
Şekil 3.5 Liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve aynı-fazlı yerleşimlerine karşı gelen durumda $\theta = -\pi/2$, $\alpha t_3 = \pi/2$ ve çeşitli ρ 'lar için σ_{ne}/p ile κ arasındaki bağımlılık



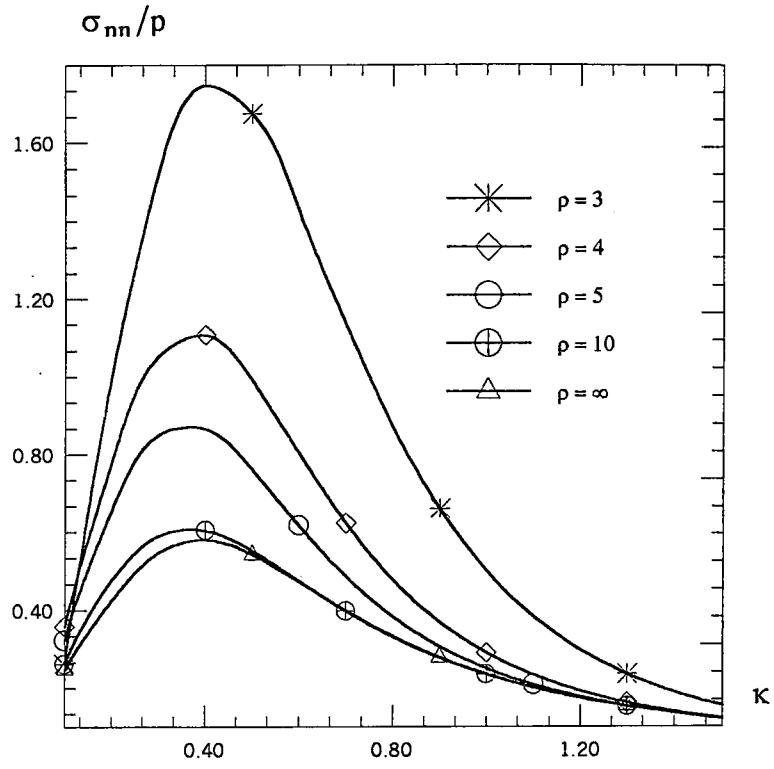
Şekil 3.6 Liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve aynı-fazlı yerleşimlerine karşı gelen durumda $\kappa = 0.4$, $\alpha t_3 = \pi/2$ ve çeşitli ρ 'lar için σ_{nn}/p ile θ arasındaki bağımlılık



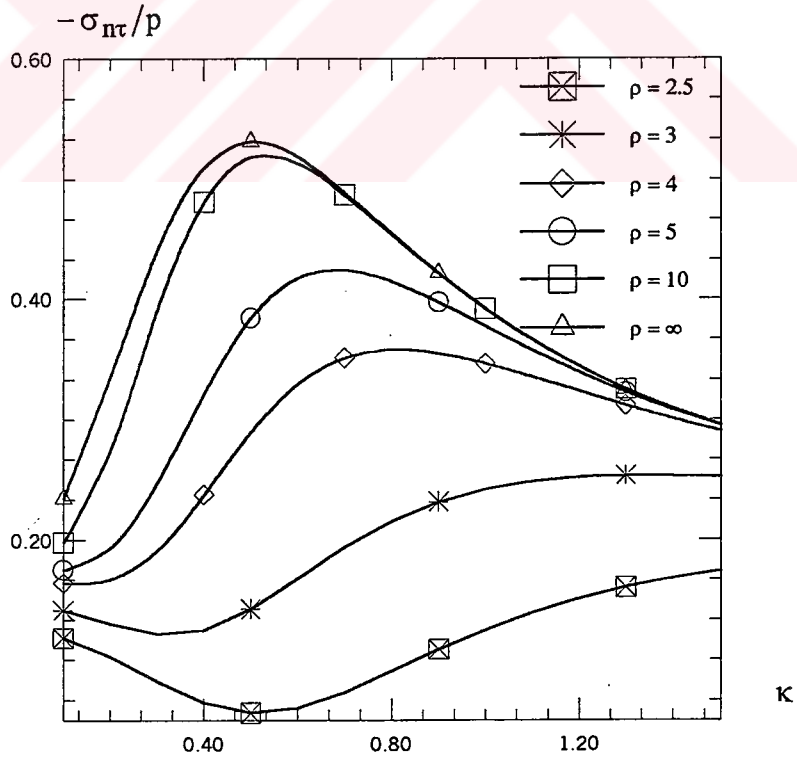
Şekil 3.7 Liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve aynı-fazlı yerleşimlerine karşı gelen durumda $\kappa = 0.4$, $\alpha t_3 = 0$ ve çeşitli ρ 'lar için σ_{π}/p ile θ arasındaki bağımlılık



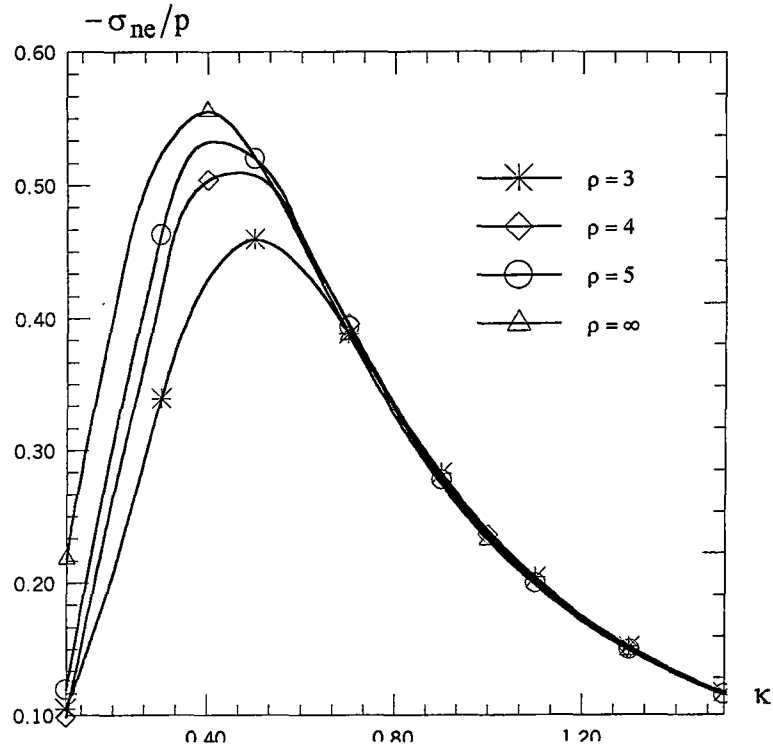
Şekil 3.8 Liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve aynı-fazlı yerleşimlerine karşı gelen durumda $\kappa = 0.4$, $\alpha t_3 = \pi/2$ ve çeşitli ρ 'lar için σ_{ne}/p ile θ arasındaki bağımlılık



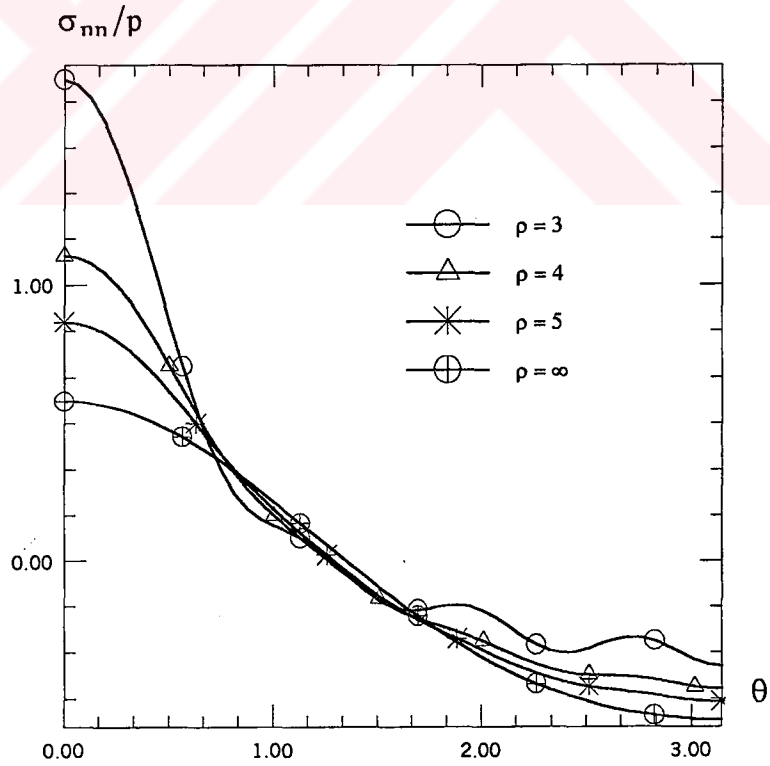
Şekil 3.9 Liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve zıt-fazlı yerleşimlerine karşı gelen durumda $\theta = 0$, $\alpha t_3 = \pi/2$ ve çeşitli ρ 'lar için σ_{nn}/p ile κ arasındaki bağımlılık



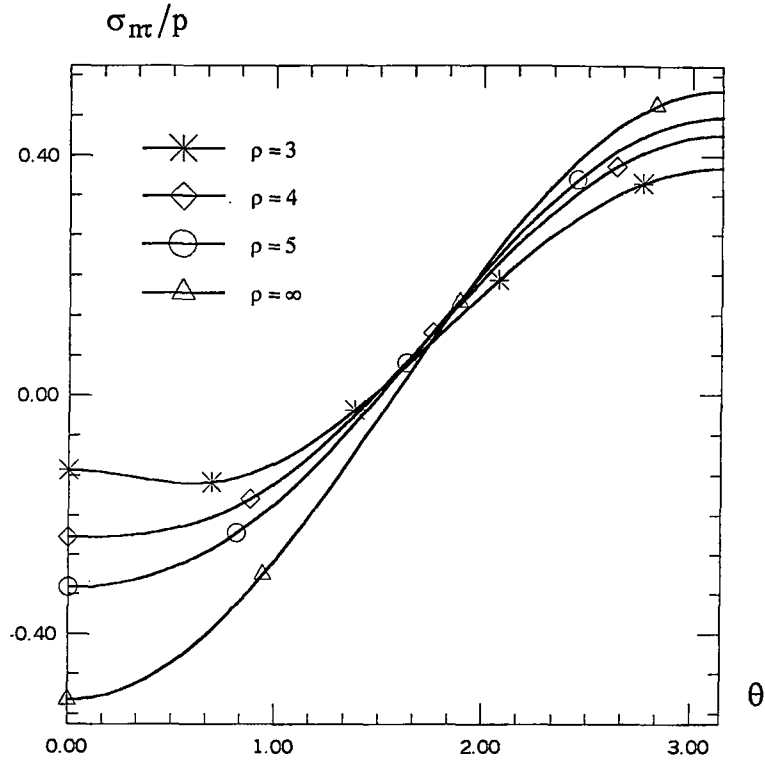
Şekil 3.10 Liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve zıt-fazlı yerleşimlerine karşı gelen durumda $\theta = 0$, $\alpha t_3 = 0$ ve çeşitli ρ 'lar için σ_{nn}/p ile κ arasındaki bağımlılık



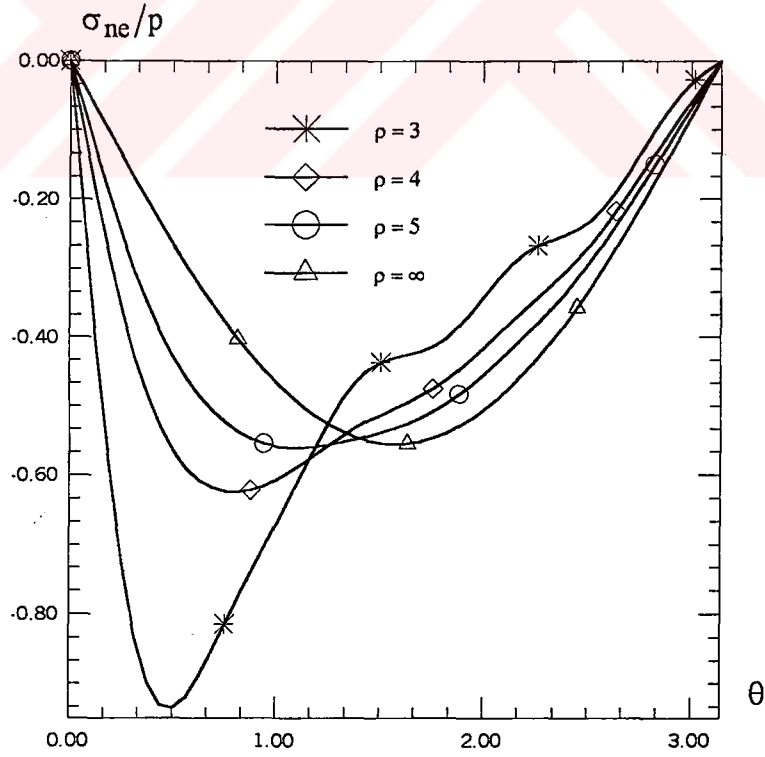
Şekil 3.11 Liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve zıt-fazlı yerleşimlerine karşı gelen durumda $\theta = -\pi/2$, $\alpha t_3 = \pi/2$ ve çeşitli ρ 'lar için σ_{ne}/p ile κ arasındaki bağımlılık



Şekil 3.12 Liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve zıt-fazlı yerleşimlerine karşı gelen durumda $\kappa = 0.4$, $\alpha t_3 = \pi/2$ ve çeşitli ρ 'lar için σ_{nn}/p ile θ arasındaki bağımlılık



Şekil 3.13 Liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve zıt-fazlı yerleşimlerine karşı gelen durumda $\kappa = 0.4$, $\alpha t_3 = 0$ ve çeşitli ρ 'lar için σ_{π}/p ile θ arasındaki bağımlılık



Şekil 3.14 Liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve zıt-fazlı yerleşimlerine karşı gelen durumda $\kappa = 0.4$, $\alpha t_3 = \pi/2$ ve çeşitli ρ 'lar için σ_{ne}/p ile θ arasındaki bağımlılık

Buradan, Çizelge 3.1'de verilen ve liflerin aynı-fazlı eğrilikli olması durumunda geometrik nonlinearitenin $\rho = 2.5$ durumunda ve çeşitli κ 'larda $\sigma_{nt}/|p|$ değerlerine etkisini gösteren sayısal sonuçları ele alalım. Bu etki, aynı zamanda, $\kappa = 0.4$ için farklı ρ 'lar için $\sigma_{nt}/|p|$ değerlerini gösteren Çizelge 3.2'de de verilmiştir. Liflerin zıt-fazlı yerleşim durumlarına karşı gelen $\sigma_{nn}/|p|$ değerleri için benzer sonuçlar Çizelge 3.3 ve Çizelge 3.4'de verilmiştir. Çizelge 3.3'de $\rho = 2.5$ durumunda çeşitli κ 'lar için $\sigma_{nn}/|p|$ değerleri, Çizelge 3.4'de ise $\kappa = 0.4$ durumunda çeşitli ρ 'lar için $\sigma_{nn}/|p|$ değerleri görülmektedir.

Yukarıda sözü edilen çizelgeler $|\epsilon| = 5 \times 10^{-5}$ durumunda elde edilen ilgili sonuçların geometrik lineer durumunda elde edilenlerle hemen hemen aynı olduğunu göstermektedir. Yine çizelgelerdeki sayısal sonuçlardan, ele alınan malzemedeki lifler boyunca çekme kuvveti etkisi olması durumunda ($\epsilon > 0$ durumunda) geometrik nonlinearitenin etkisinin, liflerin aynı-fazlı yerleşimlerine karşı gelen durumda $\sigma_{nt}/|p|$ 'nin mutlak değerlerinde, zıt-fazlı yerleşimlerine karşı gelen durumda ise $\sigma_{nn}/|p|$ 'nin mutlak değerlerinde ϵ ile monoton olarak azalmaya sebep olduğu sonucu elde edilmektedir. Bundan başka, bu malzemenin sözü edilen doğrultuda basınç kuvveti etkisi altında olması durumunda ise ($\epsilon < 0$ durumunda) $\sigma_{nt}/|p|$ ve $\sigma_{nn}/|p|$ 'lerin mutlak değerleri $|\epsilon|$ ile monoton olarak artmaktadırlar. Belirtmek gerekir ki, ele alınan durumlarda

$$|\epsilon| = |p|/E^{(1)} \ll |\epsilon_{cr}| = |p_{cr}|/E^{(1)} \quad (3.62)$$

koşulu dikkate alınmıştır. (3.62)'de p_{cr} , sonsuz matraste iki lif bulunması durumunun stabilite kaybı probleminde elde edilen p basınç kuvvetinin kritik değeridir. Bu stabilite kaybı problemi araştırmaları ve $|p_{cr}|/E^{(1)}$ değerleri Akbarov ve Guz (1985b) kaynağında verilmiş, bu çalışmada da aynı sonuçlar elde edilmiştir.

Çizelgelerde verilen sayısal sonuçların analizinden $\rho \rightarrow \infty$ ve $|\epsilon| = 5 \times 10^{-5}$ durumunda $\sigma_{nt}/|p|$ ve $\sigma_{nn}/|p|$ değerlerinin, lineer elastisite teorisi kullanılarak geometrik lineer durumda tek lif için Akbarov ve Guz (1985a; 2000) kaynağında verilen ilgili sonuçlarla çakıştığı görülmektedir.

Yukarıda tartışılan bütün sayısal sonuçlar (3.10) gösteriliminin sıfıncı, birinci ve ikinci

yaklaşımı çerçevesinde elde edilmişlerdir. Sıfıncı yaklaşımda, verilen gerilmelerin değerleri sıfır olmaktadır. Sözü geçen çizelgeler, ele alınan gerilmelerin birinci ve ikinci yaklaşımda aldıkları değerleri de göstermektedirler. Çizelge 3.5 ve Çizelge 3.6, liflerin zıt-fazlı yerleşimleri durumuna karşı gelen sayısal sonuçların sırası ile birinci ve ikinci yaklaşımlarda seçilen denklem sayıları ile yakınsamasını göstermektedirler. Çizelge 3.5 ve Çizelge 3.6'da verilen sayısal sonuçlar çeşitli ϵ 'lar için $\kappa = 0.3$, $\rho = 2.5$ değerlerinde elde edilmişlerdir. Bu çizelgeler kullanılan çözüm yönteminin yakınsaklığının çok iyi olduğunu göstermektedir.

Çizelge 3.1 Liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve aynı-fazlı yerleşimlerine karşı gelen durumda $\rho = R_{12}/R = 2.5$ ve çeşitli κ , $\epsilon = p/E^{(1)}$ 'lar için elde edilen $\sigma_{nt}/|p|$ değerleri

κ	Yak No.	$\epsilon = p/E^{(1)}$							
		çekme				basınç			
		5.10^{-5}	5.10^{-4}	5.10^{-3}	5.10^{-2}	-5.10^{-5}	-5.10^{-4}	-5.10^{-3}	-5.10^{-2}
0.3	1	-1.4017	-1.3983	-1.3659	-1.1318	1.4024	1.4058	1.4411	2.0152
	2	-1.4017	-1.3983	-1.3659	-1.1318	1.4024	1.4058	1.4411	2.0152
0.4	1	-1.5075	-1.5032	-1.4622	-1.1757	1.5085	1.5128	1.5579	2.3568
	2	-1.5075	-1.5032	-1.4622	-1.1757	1.5085	1.5128	1.5579	2.3568
0.5	1	-1.4348	-1.4307	-1.3914	-1.1168	1.4357	1.4399	1.4831	2.2522
	2	-1.4348	-1.4307	-1.3914	-1.1168	1.4357	1.4399	1.4831	2.2522
0.6	1	-1.2847	-1.2812	-1.2484	-1.0151	1.2854	1.2889	1.3249	1.9400
	2	-1.2847	-1.2812	-1.2484	-1.0151	1.2854	1.2889	1.3249	1.9400
0.7	1	-1.1211	-1.1184	-1.0925	-0.9048	1.1217	1.1244	1.1525	1.6091
	2	-1.1211	-1.1184	-1.0925	-0.9048	1.1217	1.1244	1.1525	1.6091
0.8	1	-0.9719	-0.9698	-0.9499	-0.8017	0.9723	0.9744	0.9960	1.3289
	2	-0.9719	-0.9698	-0.9499	-0.8017	0.9723	0.9744	0.9960	1.3289
0.9	1	-0.8451	-0.8435	-0.8281	-0.7114	0.8455	0.8471	0.8636	1.1081
	2	-0.8451	-0.8435	-0.8281	-0.7114	0.8455	0.8471	0.8636	1.1081
1.0	1	-0.7405	-0.7393	-0.7273	-0.6347	0.7408	0.7420	0.7548	0.9376
	2	-0.7405	-0.7393	-0.7273	-0.6347	0.7408	0.7420	0.7548	0.9376

Çizelge 3.2. Liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve aynı-fazlı yerleşimlerine karşı gelen durumda $\kappa = 2\pi R/\ell = 0.4$ ve çeşitli $\epsilon = p/E^{(1)}$, $\rho = R_{12}/R$ 'lar için $\sigma_{nr}/|p|$ değerleri

ϵ	Yak No.	ρ					
		∞	10	5	4	3	2.5
$5 \cdot 10^{-5}$	1	-0.5097	-0.5366	-0.6775	-0.7738	-1.0328	-1.5075
	2	-0.5097	-0.5366	-0.6775	-0.7738	-1.0328	-1.5075
$5 \cdot 10^{-4}$	1	-0.5087	-0.5355	-0.6757	-0.7717	-1.0299	-1.5032
	2	-0.5087	-0.5355	-0.6757	-0.7717	-1.0299	-1.5032
$5 \cdot 10^{-3}$	1	-0.4987	-0.5242	-0.6589	-0.7515	-1.0018	-1.4622
	2	-0.4987	-0.5242	-0.6589	-0.7515	-1.0018	-1.4622
$5 \cdot 10^{-2}$	1	-0.4262	-0.4428	-0.5394	-0.6093	-0.8053	-1.1757
	2	-0.4262	-0.4428	-0.5394	-0.6093	-0.8053	-1.1757
$-5 \cdot 10^{-2}$	1	0.6952	0.7496	1.0119	1.1833	1.6150	2.3568
	2	0.6952	0.7496	1.0119	1.1833	1.6150	2.3568
$-5 \cdot 10^{-3}$	1	0.5218	0.5503	0.6981	0.7986	1.0674	1.5579
	2	0.5218	0.5503	0.6981	0.7986	1.0674	-1.5579
$-5 \cdot 10^{-4}$	1	0.5110	0.5381	0.6796	0.7764	1.0364	1.5128
	2	0.5110	0.5381	0.6796	0.7764	1.0364	1.5128
$-5 \cdot 10^{-5}$	1	0.5100	0.5369	0.6779	0.7743	1.0335	1.5085
	2	0.5100	0.5369	0.6779	0.7743	1.0335	1.5085

Çizelge 3.3. Liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve zıt-fazlı yerleşimleri durumunda $\rho = R_{12}/R = 2.5$ ve çeşitli κ , $\epsilon = p/E^{(1)}$ 'ler için $\sigma_{nm}/|p|$ değerleri

κ	Yak. No.	$p/E^{(1)}$							
		çekme				basıncı			
		$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$-5 \cdot 10^{-5}$	$-5 \cdot 10^{-4}$	$-5 \cdot 10^{-3}$	$-5 \cdot 10^{-2}$
0.3	1	2.1135	2.1117	2.0934	1.9259	-2.1140	-2.1158	-2.1345	-2.3404
	2	1.8259	1.8252	1.8179	1.7352	-1.8260	-1.8267	-1.8336	-1.8745
0.4	1	2.4453	2.4418	2.4071	2.1063	-2.4461	-2.4496	-2.4854	-2.9074
	2	2.5200	2.5169	2.4862	2.2090	-2.5207	-2.5238	-2.5552	-2.8982
0.5	1	2.4791	2.4742	2.4261	2.0275	-2.4802	-2.4851	-2.5355	-3.1707
	2	2.7209	2.7157	2.6651	2.2411	-2.7220	-2.7272	-2.7800	-3.4334
0.6	1	2.2656	2.2602	2.2072	1.7823	-2.2668	-2.2723	-2.3283	-3.0743
	2	2.5434	2.5374	2.4787	2.0069	-2.5447	-2.5508	-2.6127	-3.4315
0.7	1	1.9218	1.9167	1.8670	1.4761	-1.9229	-1.9281	-1.9809	-2.7064
	2	2.1718	2.1661	2.1103	1.6705	-2.1731	-2.1788	-2.2381	-3.0503
0.8	1	1.5555	1.5512	1.5091	1.1804	-1.5565	-1.5608	-1.6056	-2.2278
	2	1.7575	1.7526	1.7052	1.3346	-1.7585	-1.7634	-1.8138	-2.5136
0.9	1	1.2277	1.2242	1.1906	0.9274	-1.2284	-1.2319	-1.2677	-1.7641
	2	1.3823	1.3784	1.3406	1.0446	-1.3832	-1.3871	-1.4273	-1.9848
1.0	1	0.9588	0.9561	0.9299	0.7238	-0.9594	-0.9621	-0.9899	-1.3725
	2	1.0741	1.0711	1.0418	0.8109	-1.0748	-1.0778	-1.1090	-1.5370

Çizelge 3.4. Liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve zıt-fazlı yerleşimlerine karşı gelen durumda $\kappa = 2\pi R/\ell = 0.4$ ve çeşitli $\epsilon = p/E^{(1)}$ ve $\rho = R_{12}/R$ 'ler için $\sigma_{nn}/|p|$ değerleri

ϵ	Yak No.	ρ					
		∞	10	5	4	3	2.5
$5 \cdot 10^{-5}$	1	0.5774	0.6069	0.8585	1.0784	1.6388	2.4453
	2	0.5799	0.6031	0.8650	1.1069	1.7474	2.5200
$5 \cdot 10^{-4}$	1	0.5757	0.6050	0.8561	1.0757	1.6356	2.4418
	2	0.5781	0.6012	0.8626	1.1041	1.7440	2.5169
$5 \cdot 10^{-3}$	1	0.5590	0.5874	0.8330	1.0493	1.6042	2.4071
	2	0.5613	0.5836	0.8392	1.0770	1.7115	2.4862
$5 \cdot 10^{-2}$	1	0.4363	0.4570	0.6560	0.8421	1.3444	2.1063
	2	0.4375	0.4534	0.6598	0.8635	1.4395	2.2090
$-5 \cdot 10^{-2}$	1	-0.8856	-0.9288	-1.2452	-1.4955	-2.0911	-2.9074
	2	-0.8907	-0.9242	-1.2554	-1.5329	-2.2057	-2.8982
$-5 \cdot 10^{-3}$	1	-0.5977	-0.6283	-0.8862	-1.1097	-1.6756	-2.4854
	2	-0.6003	-0.6244	-0.8931	-1.1390	-1.7854	-2.5552
$-5 \cdot 10^{-4}$	1	-0.5796	-0.6091	-0.8614	-1.0817	-1.6427	-2.4496
	2	-0.5820	-0.6053	-0.8680	-1.1103	-1.7514	-2.5238
$-5 \cdot 10^{-5}$	1	-0.5778	-0.6073	-0.8590	-1.0790	-1.6395	-2.4461
	2	-0.5803	-0.6035	-0.8656	-1.1075	-1.7481	-2.5207

Çizelge 3.5. Liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve zıt-fazlı yerleşimlerine karşı gelen durumda $\kappa = 0.3$, $\rho = 2.5$ için birinci yaklaşımda elde edilmiş σ_{nn}/p değerlerinin lineer denklem sayısı ile yakınsaması

$p/E^{(1)}$	Denklem sayısı						
	16	22	28	34	40	46	52
$5 \cdot 10^{-5}$	1.4391	1.7569	1.9337	2.0276	2.0761	2.1009	2.1135
$5 \cdot 10^{-4}$	1.4378	1.7554	1.9320	2.0258	2.0743	2.0991	2.1117
$5 \cdot 10^{-3}$	1.4246	1.7400	1.9153	2.0082	2.0563	2.0809	2.0934
$5 \cdot 10^{-2}$	1.3045	1.5992	1.7617	1.8476	1.8918	1.9144	1.9259
$-5 \cdot 10^{-5}$	-1.4394	-1.7573	-1.9341	-2.0280	-2.0765	-2.1013	-2.1140
$-5 \cdot 10^{-4}$	-1.4407	-1.7588	-1.9358	-2.0297	-2.0783	-2.1032	-2.1158
$-5 \cdot 10^{-3}$	-1.4542	-1.7746	-1.9529	-2.0477	-2.0967	-2.1217	-2.1345
$-5 \cdot 10^{-2}$	-1.6040	-1.9482	-2.1418	-2.2452	-2.2989	-2.3264	-2.3404

Çizelge 3.6 Liflerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve zıt-fazlı yerleşimlerine karşı gelen durumda $\kappa = 0.3$, $\rho = 2.5$ için ikinci yaklaşımda elde edilmiş σ_{nn}/p değerlerinin lineer denklem sayısı ile yakınsaması

$p/E^{(1)}$	Denklem sayısı				
	16	22	28	34	40
5.10^{-5}	2.4966	2.2977	2.1199	2.0238	1.9166
5.10^{-4}	2.4949	2.2963	2.1189	2.0229	1.9158
5.10^{-3}	2.4776	2.2830	2.1082	2.0135	1.9077
5.10^{-2}	2.3108	2.1480	1.9955	1.9119	1.8165
-5.10^{-5}	-2.4970	-2.2979	-2.1202	-2.0240	-1.9168
-5.10^{-4}	-2.4987	-2.2993	-2.1317	-2.0249	-1.9176
-5.10^{-3}	-2.5161	-2.3125	-2.1317	-2.0340	-1.9255
-5.10^{-2}	-2.6886	-2.4315	-2.2158	-2.1009	-1.9779

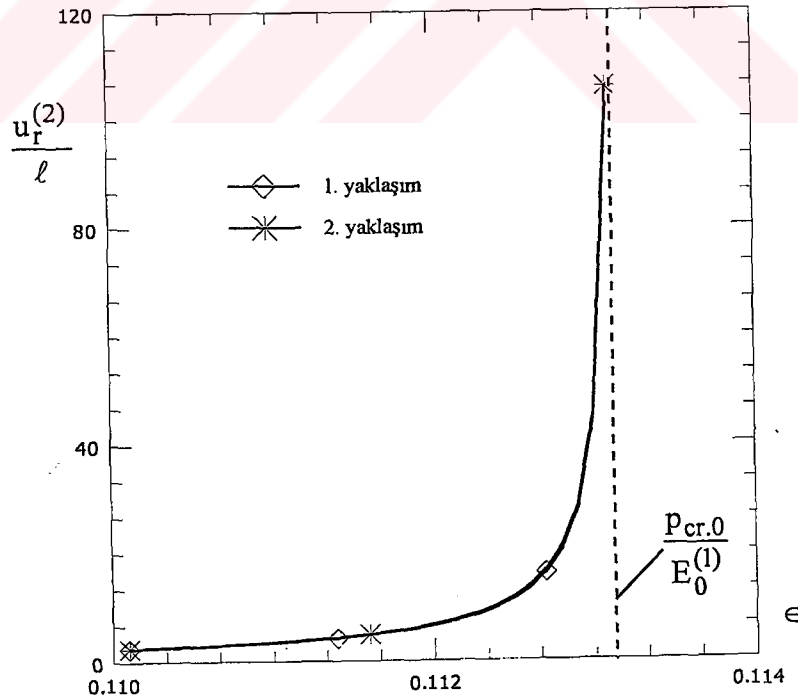
3.5 Liflerin Stabilité Kaybı Durumlarındaki Karşılıklı Etkilerinin Kritik Zaman Değerlerine Etkisini Gösteren Sayısal Sonuçlar ve Yorumları

Farzedelim ki, ele alınan matris malzemesi önceki bölümün son kısmında verilen Rabotnov operatörü (2.67) ile tanımlanmış bir viskoelastik malzemedir. Liflerin malzemesi aynı olup saf elastiktir. Önceki kısımlarda kullanılan işaretlemelerin ve kabüllerin geçerli olduğunu varsayarak ikinci bölümün son kısmında verilen stabilite kaybı kriteri, Laplace dönüşümünün uygulanması ve kritik zaman değerlerinin belirlenmesi işlemlerini, belli değişiklikler gözönüne alarak, bir önceki kısımda ele alınan probleme uygularsak viskoelastik matriste birbirine yakın yerleşmiş periyodik eğrilikli iki komşu lifin iç stabilite kaybına ait kritik zaman değerlerini elde etmiş oluyoruz. Öncelikle belirtelim ki, Euler yaklaşımı uygulanarak bir düzlem üzerinde olan iki paralel lifin saf elastik durumdaki stabilite kaybı problemleri Akbarov (1981a,b), Akbarov ve Guz (1985b) makalelerinde araştırılmıştır. Bu makalelerden elde edilen sonuçlara göre Şekil 3.1a ve Şekil 3.1c'deki formlara karşı gelen iç stabilite kaybı problemlerinde ϵ_{cr} değerleri tek lif için elde edilen ve Babich (1973), Babich ve Guz (1973) makalelerinde verilen ϵ_{cr} değerlerinden küçük olmaktadır. Şekil 3.1b ve Şekil 3.1d'de verilen formlara karşı gelen stabilite kaybında elde edilen ϵ_{cr} değerleri ise tek bir lif için elde edilen ϵ_{cr} değerlerinden büyük olmaktadır. Ayrıca Şekil 3.1a ve Şekil 3.1c'deki formlara karşı gelen stabilite kaybı durumunda liflerin birbirine yaklaşması ile ϵ_{cr} değerleri küçülmemekte, Şekil 3.1b ve Şekil 3.1d'deki formlara karşı gelen stabilite kaybı durumunda ise liflerin birbirine yaklaşması ile ϵ_{cr} değerleri büyümektedir.

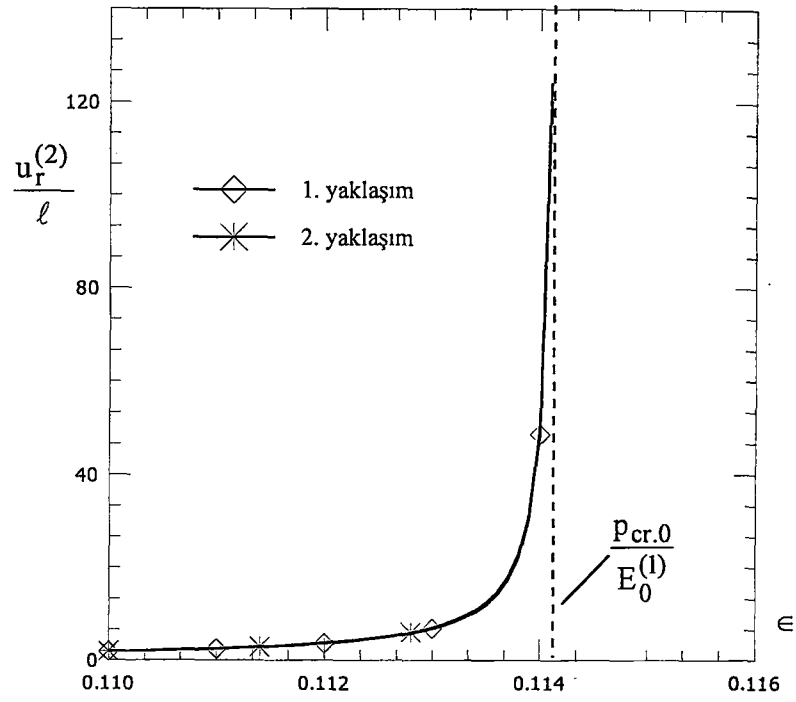
Yukarıda söylenenleri gözönüne alarak liflerin viskoelastik matristeki stabilite kaybı

incelemelerini Şekil 3.1a ve Şekil 3.1c'deki formlarda, başlangıç eğintileri olan durumlar için ele alacağız. Bir önceki bölümün son kısmında da belirtildiği gibi, vikoelastik ortamların stabilite kaybı incelenirken (2.69) eşitsizliği sağlanmak zorundadır. Bu durumun sağlanması için ilk önce, tezde geliştirilmiş yöntem çerçevesinde, $\epsilon_{cr.0}$ ve $\epsilon_{cr.\infty}$ değerleri elde edilmiştir.

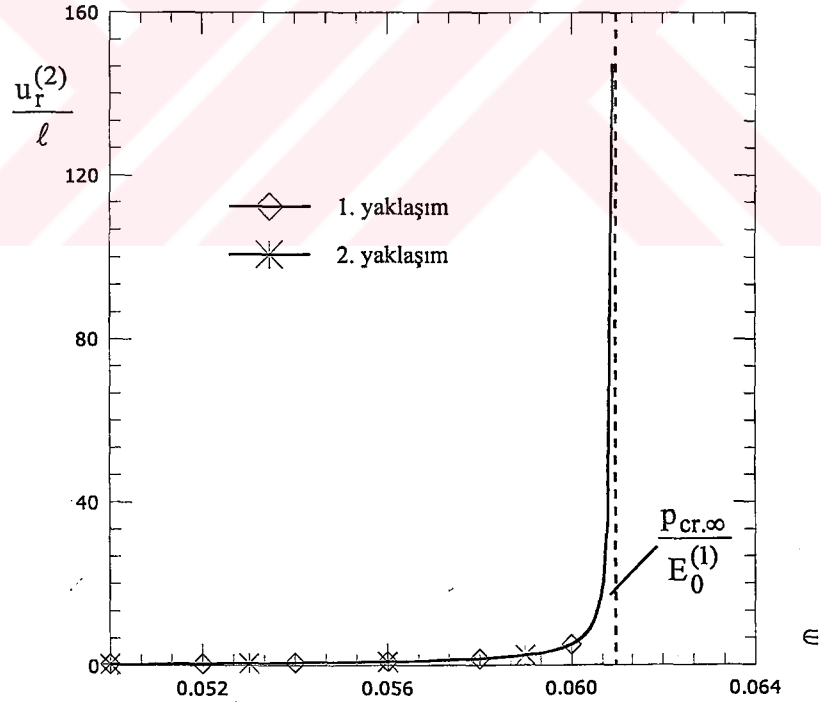
Örnek olarak, Şekil 3.15 ve Şekil 3.16'da $\epsilon_{cr.0} = p_{cr.0}/E_0^{(1)}$ değerlerinin belirlenmesini gösteren grafikler verilmiştir. Bu garfikler birinci ve ikinci yaklaşım çerçevesinde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $R_{12}/R = 3.0$, $\kappa = 0.5$ (Şekil 3.15) ve $\kappa = 0.4$ (Şekil 3.16) için elde edilmiştir. Bu grafiklerden de görüldüğü gibi $\epsilon_{cr.0}$ değerlerinin belirlenmesi için birinci yaklaşım yeterli olmaktadır. Bundan başka, bir önceki bölümün son kısmında olduğu gibi, ϵ parametresi bu sonuçlara hiçbir etki göstermemektedir. Burada geliştirilmiş yöntem çerçevesinde elde edilen $\epsilon_{cr.0}$ değerleri Akbarov (1981a), Akbarov ve Guz (1985b) makalelerinde Euler yöntemi çerçevesinde elde edilen sonuçlarla tam olarak çakışmaktadır. Şekil 3.17-Şekil 3.20'de $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $R_{12}/R = 3.0$, $\kappa = 0.4$ sırası ile $\omega = 0.5, 1.0, 2.0, 3.0$ durumları için $\epsilon_{cr.\infty} = p_{cr.\infty}/E_0^{(1)}$ değerlerinin belirlenmesine ait grafikler verilmiştir. Bu garfikler $\epsilon_{cr.0}$ 'ın belirlenmesinde verilen grafiklerin özelliklerini aynen tekrarlamaktadırlar.



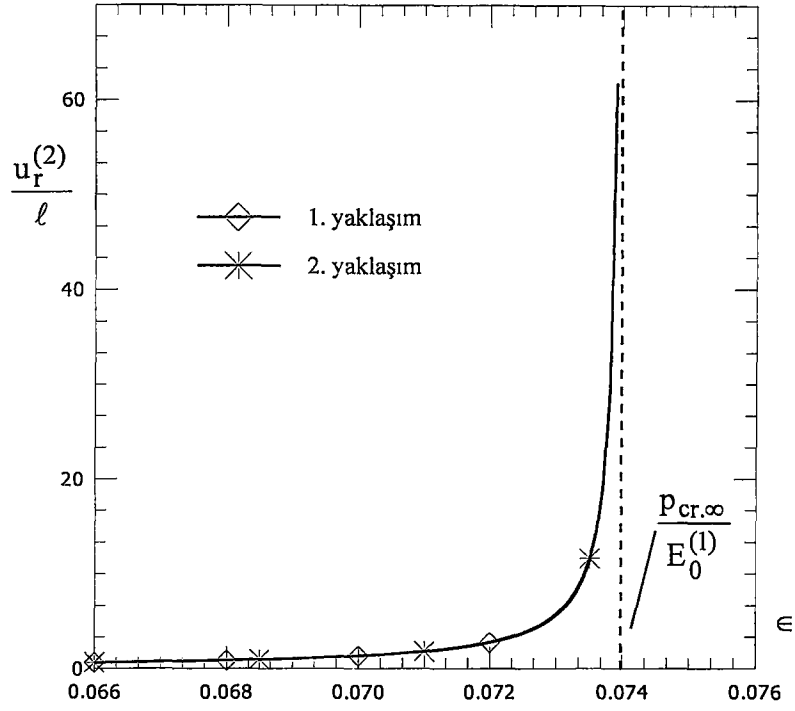
Şekil 3.15 Liflerin aynı düzlemde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $R_{12}/R = 3.0$, $\kappa = 0.5$ için $u_r^{(2)}/l$ ile ϵ arasındaki bağımlılık



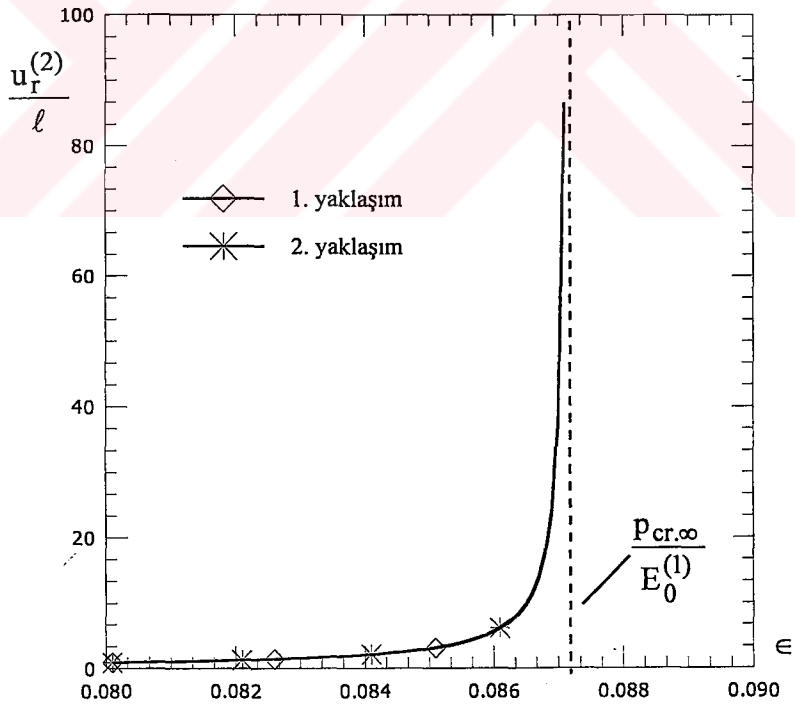
Şekil 3.16 Liflerin aynı düzlemde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $R_{12}/R = 3.0$, $\kappa = 0.4$ için $u_r^{(2)}/\ell$ ile ϵ arasındaki bağımlılık



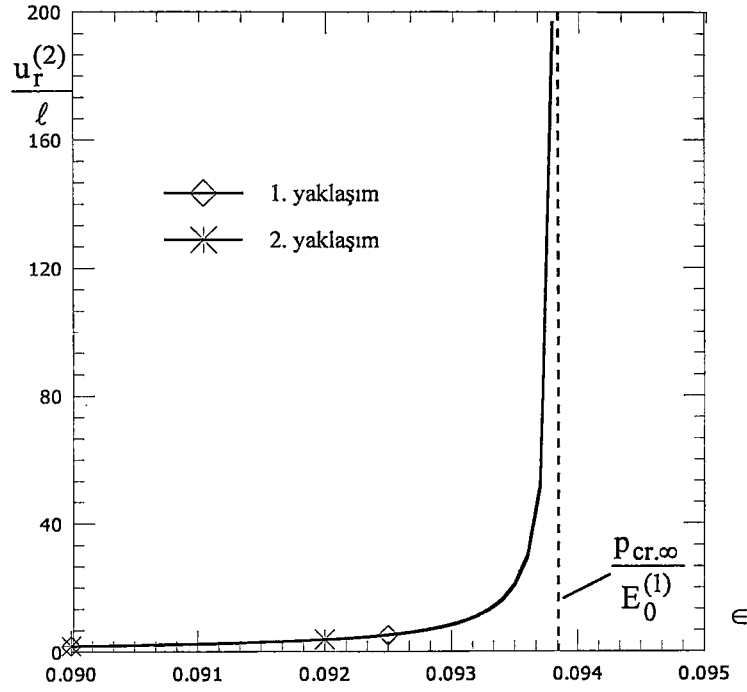
Şekil 3.17 Liflerin aynı düzlemde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $R_{12}/R = 3.0$, $\kappa = 0.4$, $\omega = 0.5$ için $u_r^{(2)}/\ell$ ile ϵ arasındaki bağımlılık



Şekil 3.18 Liflerin aynı düzlemde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $R_{12}/R = 3.0$, $\kappa = 0.4$, $\omega = 1$ için $u_r^{(2)}/\ell$ ile ϵ arasındaki bağımlılık



Şekil 3.19 Liflerin aynı düzlemde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $R_{12}/R = 3.0$, $\kappa = 0.4$, $\omega = 2$ için $u_r^{(2)}/\ell$ ile ϵ arasındaki bağımlılık

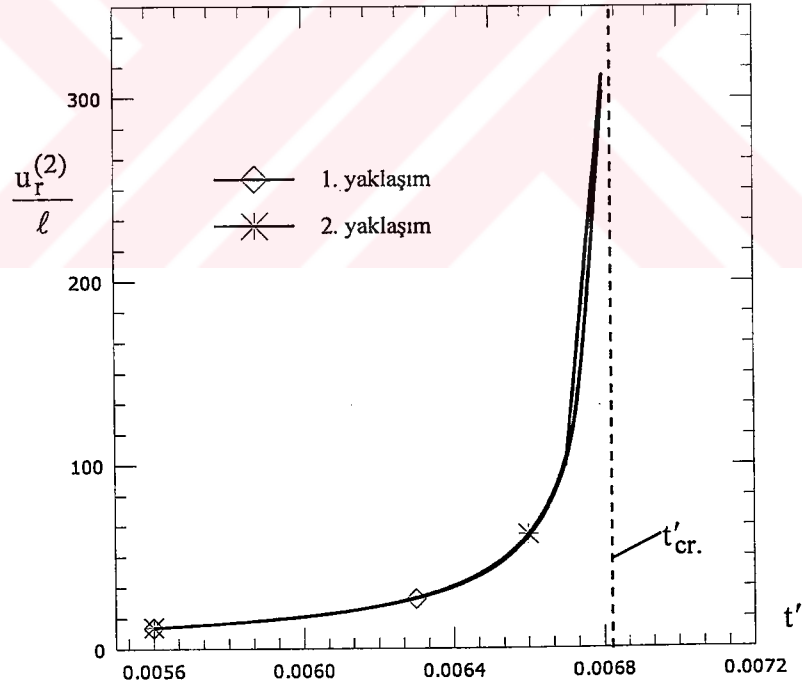


Şekil 3.20 Liflerin aynı düzlemde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $R_{12}/R = 3.0$, $\kappa = 0.4$, $\omega = 3$ için $u_r^{(2)}/\ell$ ile ϵ arasındaki bağımlılık

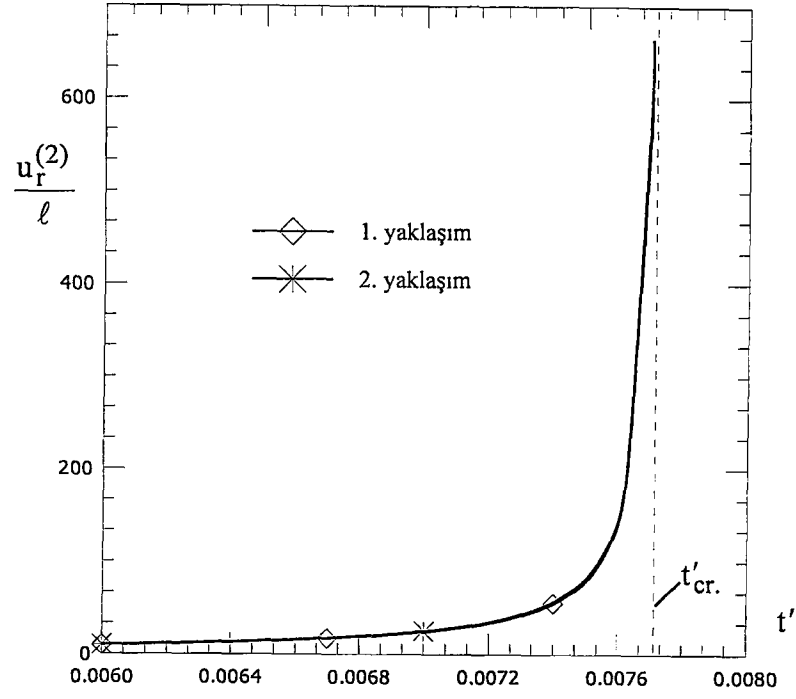
Şekil 3.1a'daki forma karşı gelen stabilite kaybını düzlem üzerinde aynı-fazlı stabilite kaybı, Şekil 3.1c'deki forma karşı gelen stabilite kaybını paralel düzlemlerdeki aynı-fazlı stabilite kaybı diye adlandıralım ve kolaylık için ileride bu kavramları kullanalım. Böylece yukarıdaki yöntemle elde edilen $\epsilon_{cr.0}$ ve $\epsilon_{cr.\infty}$ değerlerini gözönüne alarak düzlem üzerinde aynı-fazlı stabilite kaybı problemine ait $t'_{cr.}$ değerlerine problem parametrelerinin etkisini inceleyelim. Bu durum için $\epsilon_{cr.0}$ ve $\epsilon_{cr.\infty}$ değerleri Çizelge 3.7'de verilmektedir. $t'_{cr.}$ değerlerinin belirlenmesi için önceki bölümün son kısmında gösterilen işlemler yapılır, (2.69) eşitsizliğini sağlayan ϵ değerleri sabitlenir ve $u_r^{(2),1}|_{r=0} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$ kriteri kullanılırsa, Şekil 3.21-Şekil 3.24'de $\epsilon = -0.106$, $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$ durumunda sırası ile $\alpha' = -0.5$, $\omega = 0.5$ (Şekil 3.21), $\alpha' = -0.5$, $\omega = 1.0$ (Şekil 3.22), $\alpha' = -0.3$, $\omega = 0.5$ (Şekil 3.23), $\alpha' = -0.3$, $\omega = 1.0$ (Şekil 3.24) ile verilen örneklerin benzeri sonuçlar elde edilmektedir. Elde edilen bu sonuçların bir kısmı ise $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$, $\omega = 2.0$ durumunda $\rho = R_{12}/R$, α' ve ϵ 'nin birkaç değerinde elde edilen sonuçlar olarak Çizelge 3.8'de verilmektedir.

Çizelge 3.7 Liflerin aynı düzlemde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)}=50$, $2\pi R/\ell=0.4$ ve çeşitli $\rho = R_{12}/R$ 'lar için $\epsilon_{cr,0}$ ($t'=0$ için) ve $\epsilon_{cr,\infty}$ ($t'=\infty$ için) değerleri

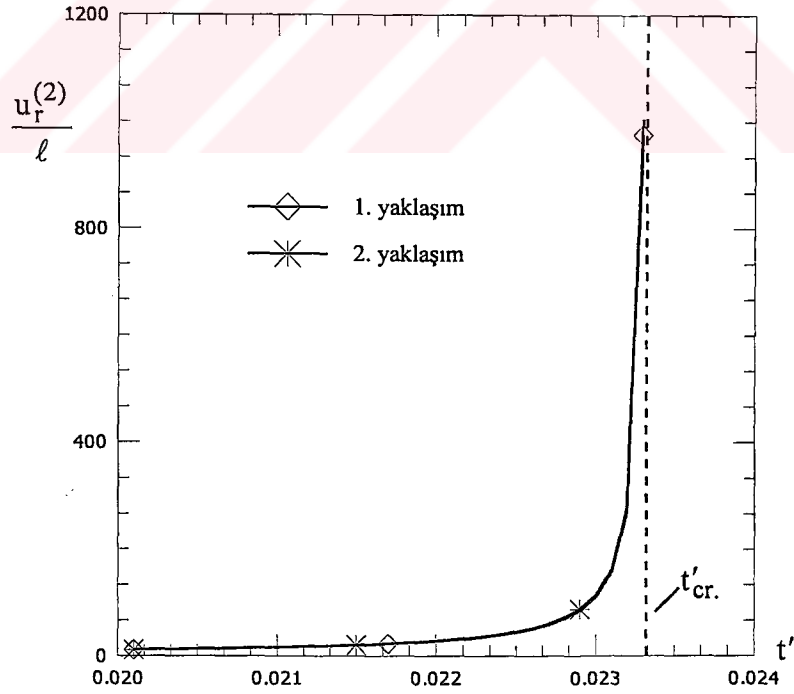
ρ	$\epsilon_{cr,0}$	$\epsilon_{cr,\infty}$			
		$\omega = 0.5$	$\omega = 1.0$	$\omega = 2.0$	$\omega = 3.0$
2.1	-0.1221	-0.0647	-0.0792	-0.0936	-0.1007
2.5	-0.1141	-0.0609	-0.0740	-0.0872	-0.0938
3.0	-0.1141	-0.0609	-0.0739	-0.0871	-0.0938
5.0	-0.1206	-0.0632	-0.0774	-0.0916	-0.0988
6.0	-0.1235	-0.0643	-0.0789	-0.0936	-0.1010
7.0	-0.1258	-0.0652	-0.0802	-0.0952	-0.1028
9.0	-0.1290	-0.0664	-0.0819	-0.0975	-0.1053
10.0	-0.1301	-0.0668	-0.0825	-0.0982	-0.1061
20.0	-0.1329	-0.0678	-0.0840	-0.1001	-0.1082
∞	-0.1330	-0.0678	-0.0840	-0.1002	-0.1083



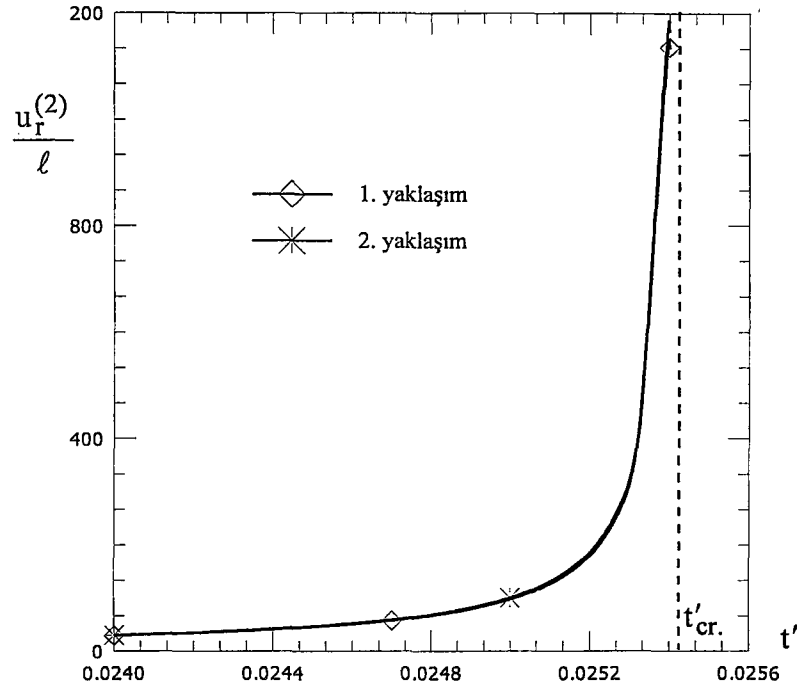
Şekil 3.21 Liflerin aynı düzlemde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)}=50$, $R_{12}/R=3.0$, $\kappa=0.4$, $\epsilon=-0.106$, $\alpha'=-0.5$, $\omega=0.5$ için $u_r^{(2)}/\ell$ ile t' arasındaki bağımlılık



Şekil 3.22 Liflerin aynı düzlemde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $R_{12}/R = 3.0$, $\kappa = 0.4$, $\epsilon = -0.106$, $\alpha' = -0.5$, $\omega = 1$ değerlerinde $u_r^{(2)}/\ell$ ile t' arasındaki bağımlılık

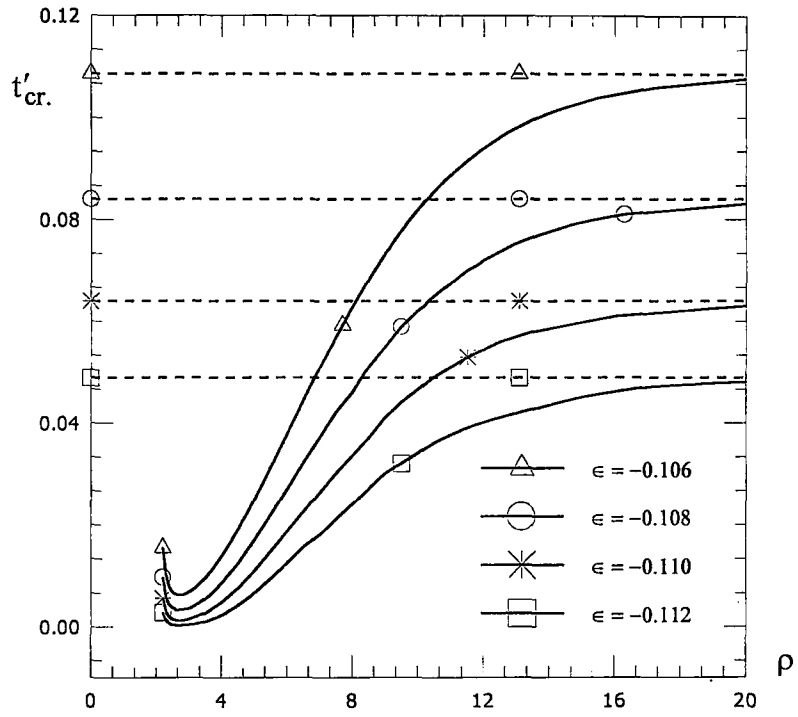


Şekil 3.23 Liflerin aynı düzlemde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $R_{12}/R = 3.0$, $\kappa = 0.4$, $\epsilon = -0.106$, $\alpha' = -0.3$, $\omega = 0.5$ değerlerinde $u_r^{(2)}/\ell$ ile t' arasındaki bağımlılık

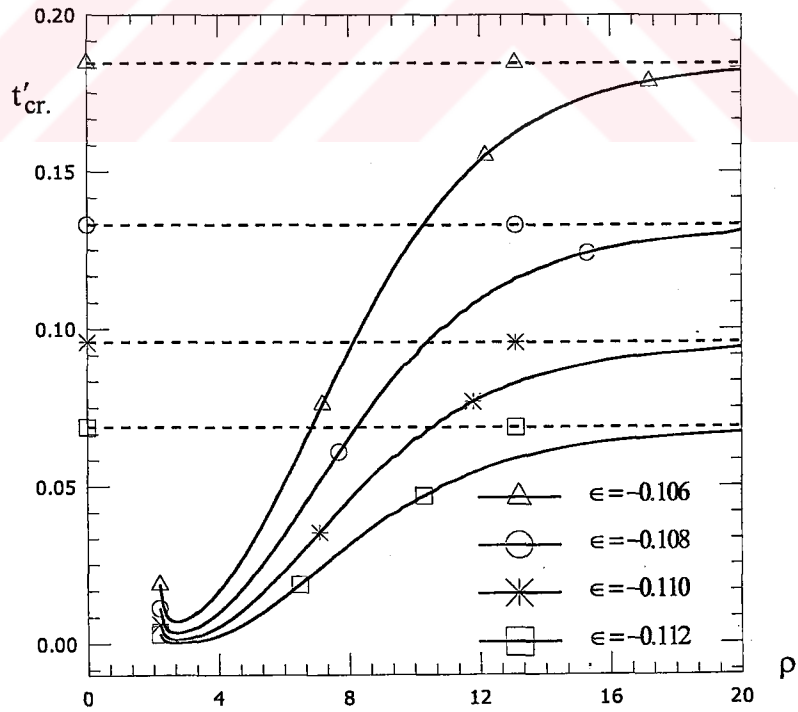


Şekil 3.24 Liflerin aynı düzlemde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $R_{12}/R = 3.0$, $\kappa = 0.4$, $\epsilon = -0.106$, $\alpha' = -0.3$, $\omega = 1$ değerlerinde $u_r^{(2)}/l$ ile t' arasındaki bağımlılık

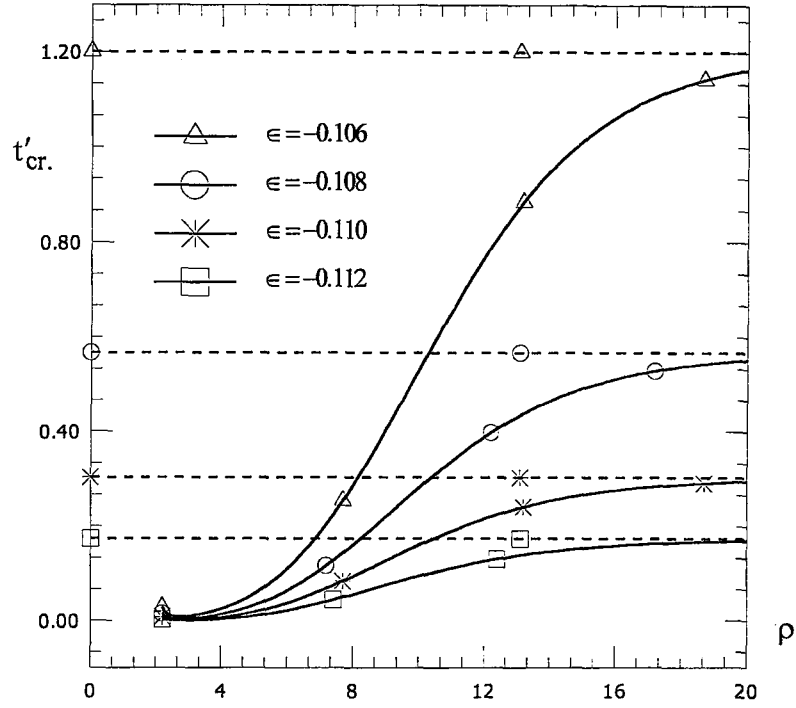
Şekil 3.25-Şekil 3.27'de ise $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$, $\alpha' = -0.5$ durumunda sırası ile $\omega = 0.5, 1.0, 2.0$ değerlerinde $t'_{cr.}$ ile $\rho = R_{12}/R$ arasındaki bağımlılığın farklı ϵ değerleri için grafikleri verilmektedir. Çizelge 3.8 ve Şekil 3.25-Şekil 3.27'de verilen sonuçlardan görüldüğü gibi matris malzemesinin reolojik parametrelerinin (α' ve ω 'nın) $t'_{cr.}$ değerlerine olan etkisi, nitelik bakımından, tek lif durumunda bir önceki bölümün son kısmında açıklanan etkilerin aynısıdır. Burada ise, elde edilen sonuçlardan lifler arasındaki uzaklığın yani ρ 'nun $t'_{cr.}$ değerlerine olan etkisini gösteren sonuçlar daha fazla önem taşımaktadır. Sözü edilen sonuçlardan görüldüğü gibi, ele alınan stabilite kaybı formunda $t'_{cr.}$ ile ρ arasında olan bağımlılık non-monotonik karakter taşımaktadır. Yani ρ 'nun küçülmesi ile (liflerin birbirine yaklaşması ile) ρ 'nun belirli bir değerine kadar $t'_{cr.}$ değerleri küçülmekte daha sonra ise büyümektedirler. Bu büyüme lifler birbirine çok yaklaştığında yani ρ 'nun çok küçük değişim alanında görülmektedir. Saf elastik stabilite probleminde ρ parametresinin $\epsilon_{cr.0}$ değerlerine olan etkisinin de non-monotonik olduğu Akbarov ve Guz (1985b) makalesinde verilmiştir.



Şekil 3.25 Liflerin aynı düzlemde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$, $\alpha' = -0.5$, $\omega = 0.5$ ve çeşitli ϵ 'lar için t'_{cr} ile $\rho = R_{12}/R$ arasındaki bağımlılık



Şekil 3.26 Liflerin aynı düzlemde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$, $\alpha' = -0.5$, $\omega = 1$ ve çeşitli ϵ değerleri için t'_{cr} ile $\rho = R_{12}/R$ arasındaki bağımlılık



Şekil 3.27 Liflerin aynı düzlemde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$, $\alpha' = -0.5$, $\omega = 2$ ve çeşitli ϵ değerleri için t'_{cr} ile $\rho = R_{12}/R$ arasındaki bağımlılık

Bu grafiklerden elde edilen en önemli sonuç, ρ parametresi değişiminin t'_{cr} değerlerine olan etkisinin çok büyük boyutlarda olduğudur. Çizelge 3.7'de görüldüğü gibi saf elastik stabilite problemlerinde ρ (değişimin) küçülmesinin $\epsilon_{cr,0}$ ya da $\epsilon_{cr,\infty}$ değerlerine etkisi çok da önemli boyutlarda değildir. Bu yüzden viskoelastik problem için elde edilen t'_{cr} değerlerine liflerin karşılıklı etkisinin gözönüne alınması daha çok önem taşımaktadır. Çizelge 3.9'da $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$, $\alpha' = -0.5$, $\rho = 2.1$, $\omega = 3.0$ durumunda birinci yaklaşım çerçevesinde elde edilen t'_{cr} değerlerinin kullanılan denklem sayısına bağlı olarak yakınsaması farklı ϵ değerleri için verilmektedir. Bu çizelgeden görüldüğü gibi uygulanan araştırma yönteminden elde edilen sayısal sonuçların kullanılan denklem sayısına bağlı olarak yakınsaması yüksek derecede yeterlidir. Ayrıca, ρ 'nun büyük değerlerindeki yakınsamaların Çizelge 3.9'dakinden daha hızlı olduğunun gözlemlendiğini vurgulamak gerekir. Başka bir deyişle, yakınsama için burada verilen çizelge, ρ 'nun aldığı değere göre en çok denklem gerektiren duruma aittir.

Çizelge 3.8 Liflerin aynı düzlemde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$, $\omega = 2$, çeşitli ϵ , $\rho = R_{12}/R$ ve α' 'ler için t'_{cr} değerleri

ϵ	ρ	α'		
		-0.3	-0.5	-0.7
-0.1060	2.1	0.1557	0.0976	0.0328
	2.5	0.0305	0.0099	0.0007
	3.0	0.0307	0.0100	0.0007
	5.0	0.1050	0.0562	0.0131
	10.0	0.5218	0.5307	0.5523
	20.0	0.9142	1.1638	2.0441
	∞	0.9350	1.2010	2.1541
-0.1080	2.1	0.1040	0.0555	0.0128
	2.5	0.0176	0.0046	0.0002
	3.0	0.0178	0.0046	0.0002
	5.0	0.0706	0.0323	0.0052
	10.0	0.3316	0.2814	0.1918
	20.0	0.5367	0.5521	0.5898
	∞	0.5468	0.5667	0.6161
-0.1100	2.1	0.0695	0.0315	0.0050
	2.5	0.0087	0.0017	0.0000
	3.0	0.0089	0.0017	0.0000
	5.0	0.0468	0.0181	0.0019
	10.0	0.2216	0.1600	0.0749
	20.0	0.3438	0.2960	0.2087
	∞	0.3496	0.3030	0.2170
-0.1120	2.1	0.0456	0.0175	0.0018
	2.5	0.0029	0.0003	0.0000
	3.0	0.0031	0.0004	0.0000
	5.0	0.0300	0.0097	0.0007
	10.0	0.1523	0.0947	0.0312
	20.0	0.2315	0.1701	0.0829
	∞	0.2351	0.1739	0.0860

Çizelge 3.9 Liflerin aynı düzlemde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$, $\alpha = -0.5$, $\rho = 2.1$, $\omega = 3.0$, t'_{cr} değerlerinin denklem sayısı ile yakınsaması

ϵ	Denklem sayısı						
	40	46	52	58	64	70	76
-0.1060	0.2927	0.3035	0.3089	0.3115	0.3127	0.3134	0.3137
-0.1080	0.1179	0.1215	0.1233	0.1242	0.1246	0.1248	0.1249
-0.1010	0.0534	0.0549	0.0556	0.0560	0.0562	0.0562	0.0563
-0.1120	0.0251	0.0259	0.0262	0.0264	0.0264	0.0265	0.0265

Şimdi liflerin paralel düzlemler üzerinde olması durumunda stabilite kaybına ait olan sayısal sonuçların incelenmesini ele alalım. Bu duruma ait $\epsilon_{cr,0}$ ve $\epsilon_{cr,\infty}$ değerleri $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$ farklı ρ 'lar için Çizelge 3.10'da verilmektedir. Burada verilen $\epsilon_{cr,0}$ değerleri Akbarov ve Guz (1985b) makalesindeki uygun sonuçlarla çakışmaktadır.

Çizelge 3.10 Liflerin paralel düzlemlerde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$ ve çeşitli $\rho = R_{12}/R$ 'lar için $\epsilon_{cr,0}$ ($t' = 0$ için) ve $\epsilon_{cr,\infty}$ ($t' = \infty$ için) değerleri

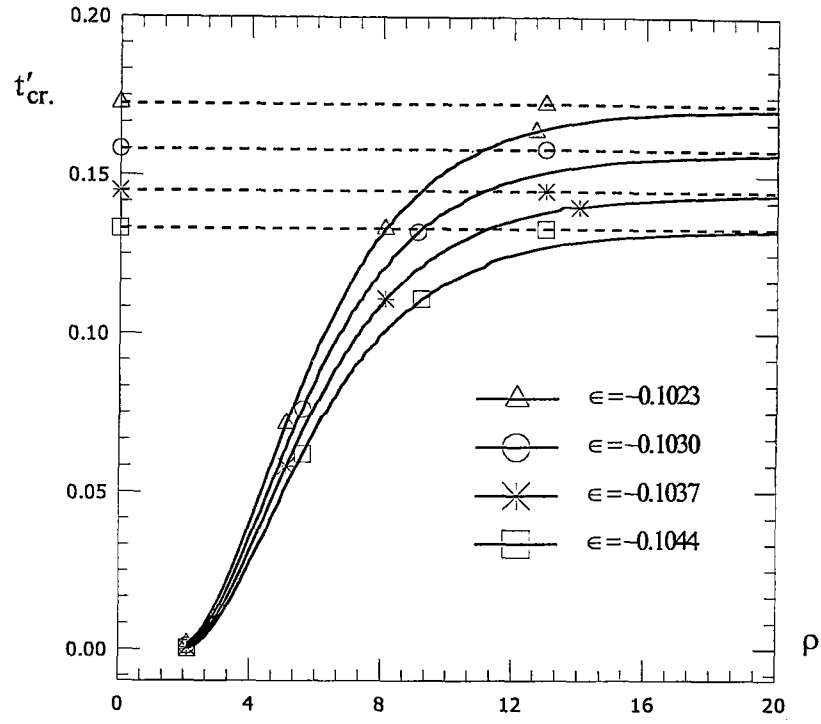
ρ	$\epsilon_{cr,0}$	$\epsilon_{cr,\infty}$			
		$\omega = 0.5$	$\omega = 1.0$	$\omega = 2.0$	$\omega = 3.0$
2.1	-0.1061	-0.0586	-0.0703	-0.0821	-0.0880
2.5	-0.1094	-0.0598	-0.0720	-0.0843	-0.0905
3.0	-0.1131	-0.0611	-0.0740	-0.0869	-0.0934
5.0	-0.1233	-0.0648	-0.0794	-0.0939	-0.1012
6.0	-0.1263	-0.0658	-0.0809	-0.0959	-0.1035
7.0	-0.1283	-0.0665	-0.0819	-0.0973	-0.1050
9.0	-0.1307	-0.0672	-0.0830	-0.0988	-0.1067
10.0	-0.1314	-0.0674	-0.0833	-0.0993	-0.1072
20.0	-0.1329	-0.0678	-0.0840	-0.1002	-0.1083
∞	-0.1330	-0.0678	-0.0840	-0.1002	-0.1083

Çizelge 3.11'de farklı ϵ değerleri için $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$, $\omega = 2$ durumunda ρ ve α' reolojik parametrelerinin t'_{cr} değerlerine etkisi verilmektedir. ω reolojik parametresinin t'_{cr} değerlerine etkisi ise grafikler halinde Şekil 3.28-Şekil 3.30'da farklı ϵ değerlerinde sırası ile $\omega = 0.5$, 1.0, 2.0 durumlarında gösterilmektedir. Bu grafikler $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$, ve $\alpha' = -0.5$ durumunda t'_{cr} ve ρ arasındaki bağımlılığı ifade etmektedirler. Elde edilen sayısal sonuçlardan görüldüğü gibi reolojik parametrelerin yani α' ve ω 'nın t'_{cr} değerlerine etkisi nitelik bakımından daha önce incelenen durumlardaki gibidir. t'_{cr} ve ρ arasındaki bağımlılık ise monotoniktir, yani liflerin düzlem üzerinde stabilite kaybı durumundan farklıdır. Ele aldığımız durumda yani liflerin paralel düzlemler üzerinde (Bu düzlemler Ox_1 eksenine dik olarak paraleldirler.) stabilite kaybında ρ değeri azaldıkça yani lifler birbirine yaklaştıkça t'_{cr} değerleri monoton olarak hızlı bir biçimde küçülmektedirler. ρ değeri sonsuza yaklaştığında ise t'_{cr} değerleri bir önceki bölümde tek lif için elde edilen t'_{cr} değerlerine yaklaşmaktadırlar. Bu ise elde edilen sayısal sonuçların tutarlılığını ve doğruluğunu gösteren

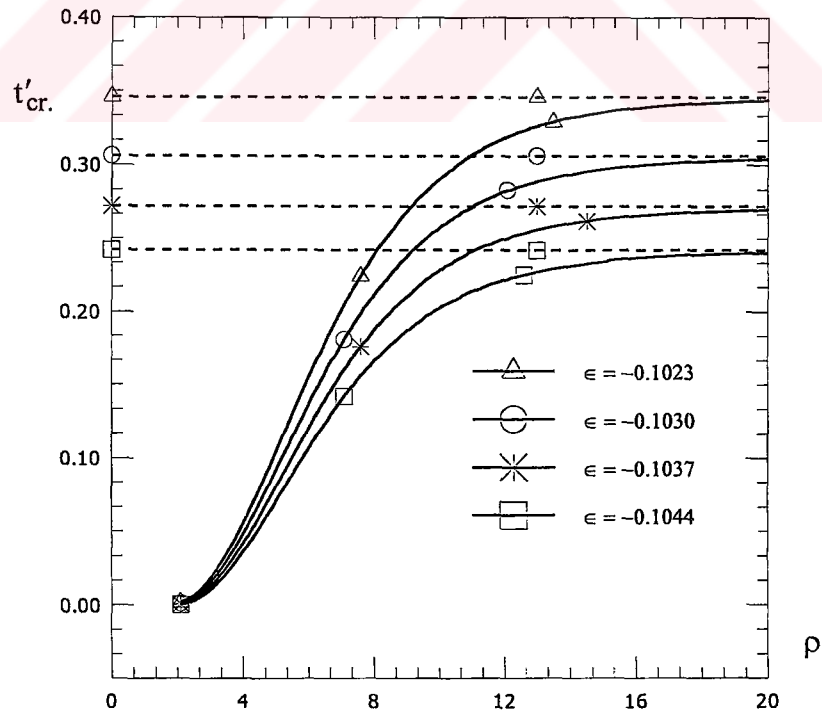
başka bir kanıttır. Çizelge 3.12 ve Çizelge 3.13'de $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$, $\alpha' = -0.5$, $\omega = 3.0$ durumunda sırası ile $\rho = 2.1, 3.0$ değerleri için birinci yaklaşım çerçevesinde kullanılan denklemlerin farklı sayılarında t'_{cr} değerleri için elde edilen sonuçlar verilmektedir. Bu sonuçlardan uygulanan çözüm yönteminin pratik açıdan yüksek derecede etkili ve yeterli olduğu tekrar kanıtlanmış olmaktadır.

Çizelge 3.11 Liflerin paralel düzlemlerde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$, $\omega = 2$, çeşitli ϵ , $\rho = R_{12}/R$ ve α' 'ler için t'_{cr} değerleri

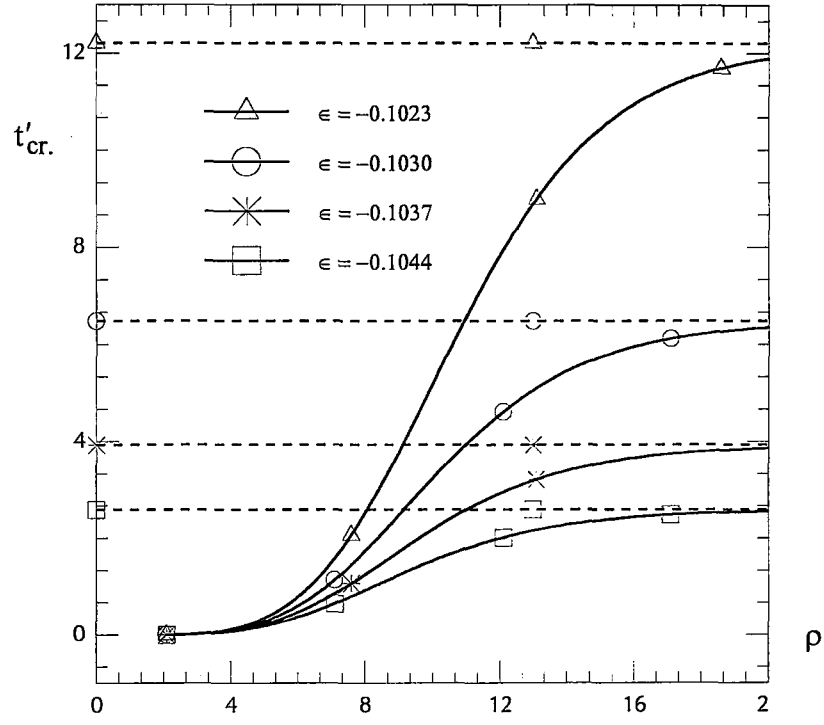
ϵ	R_{12}/R	α		
		-0.3	-0.5	-0.7
-0.1023	2.1	0.0095	0.0019	0.0000
	2.5	0.0270	0.0084	0.0005
	3.0	0.0624	0.0271	0.0038
	5.0	0.3883	0.3509	0.2771
	10.0	2.6512	5.1670	24.5142
	20.0	4.8106	11.8987	98.4435
	∞	4.9016	12.2149	102.8422
-0.1030	2.1	0.0068	0.0012	0.0000
	2.5	0.0220	0.0063	0.0003
	3.0	0.0532	0.0217	0.0026
	5.0	0.3296	0.2790	0.1891
	10.0	1.8966	3.2329	11.2204
	20.0	3.0725	6.3518	34.5824
	∞	3.1175	6.4826	35.7774
-0.1037	2.1	0.0045	0.0006	0.0000
	2.5	0.0177	0.0046	0.0002
	3.0	0.0452	0.0173	0.0018
	5.0	0.2817	0.2239	0.1311
	10.0	1.4283	2.1735	5.7896
	20.0	2.1539	3.8630	15.0977
	∞	2.1801	3.9290	15.5299
-0.1044	2.1	0.0027	0.0003	0.0000
	2.5	0.0139	0.0033	0.0001
	3.0	0.0382	0.0136	0.0012
	5.0	0.2421	0.1812	0.0921
	10.0	1.1148	1.5364	3.2476
	20.0	1.6007	2.5494	7.5528
	∞	1.6175	2.5871	7.7398



Şekil 3.28 Liflerin paralel düzlemlerde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$, $\alpha' = -0.5$, $\omega = 0.5$ ve çeşitli ϵ 'lar için $t'_{cr.}$ ile $\rho = R_{12}/R$ arasındaki bağımlılık



Şekil 3.29 Liflerin paralel düzlemlerde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$, $\alpha' = -0.5$, $\omega = 1$ ve çeşitli ϵ değerleri için $t'_{cr.}$ ile $\rho = R_{12}/R$ arasındaki bağımlılık



Şekil 3.30 Liflerin paralel düzlemlerde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$, $\alpha' = -0.5$, $\omega = 2$ ve çeşitli ϵ değerleri için t'_{cr} ile $\rho = R_{12}/R$ arasındaki bağımlılık

Çizelge 3.12 Liflerin paralel düzlemlerde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$, $\alpha = -0.5$, $\rho = 2.1$, $\omega = 3.0$ için t'_{cr} değerlerinin denklem sayısı ile yakınsaması

ϵ	Denklem sayısı				
	18	30	42	54	66
-0.1023	0.0005	0.0017	0.0020	0.0021	0.0022
-0.1030	0.0002	0.0010	0.0012	0.0013	0.0013
-0.1037	0.0000	0.0005	0.0006	0.0007	0.0007
-0.1044	0.0000	0.0002	0.0003	0.0003	0.0003

Çizelge 3.13 Liflerin paralel düzlemlerde aynı-fazlı yerleşiminde $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.4$, $\alpha = -0.5$, $\rho = 2.1$, $\omega = 3.0$ için t'_{cr} değerlerinin denklem sayısı ile yakınsaması

ϵ	Denklem sayısı				
	18	30	42	54	66
-0.1023	0.0394	0.0457	0.0461	0.0461	0.0461
-0.1030	0.0296	0.0343	0.0346	0.0347	0.0347
-0.1037	0.0222	0.0258	0.0261	0.0261	0.0261
-0.1044	0.0166	0.0194	0.0196	0.0196	0.0196

4. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRİLMESİ

Tezde yapılan araştırmalardan elde edilen sonuçları aşağıdaki gibi özetleyebiliriz:

1. Akbarov ve Guz (2000), Akbarov vd. (1997) yöntemi ve yaklaşımı elastik ve viskoelastik tek yönlü lifli kompozitlerin iç stabilite kaybının ve stabilite kaybı öncesi gerilme durumunun incelenmesine uygun olarak geliştirilmiştir.
2. İncelemeler, başlangıçta genlikleri periyodlarından çok çok küçük periyodik eğilmeleri olan tek ve birbirine yakın yerleşmiş aynı ve farklı düzlemlerde, aynı ve zıt fazlarda eğintileri olan iki lif durumları için ayrı ayrı yapılmıştır.
3. Uygun problemlerin matematiksel formülasyonu, parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde elastisite ve viskoelastisite teorilerinin kesin geometrik nonlinear denklemlerinden yararlanılarak yapılmıştır.
4. Önce, tek lif ve iki lif durumu için saf elastik problemler ele alınmış ve aranan büyüklükler Akbarov ve Guz (2000), Akbarov vd. (1997) kaynaklarında olduğu gibi liflerin eğrisellik derecesini gösteren küçük parametreye göre seri formunda ifade edilmiştir. Bu serideki terimler sıfıncı, birinci ve ikinci yaklaşımlar çerçevesinde her yaklaşıma ait uygun sınır-değer problemleri çözülerek belirlenmiştir. İç stabilite kaybı kriteri olarak adı geçen başlangıç eğintilerin genliğinin büyüyerek sonsuza gitmesi hali kabul edilmiş ve bu kriterden yararlanılarak saf elastik problemler için p_{cr} değerleri, viskoelastik problemler için t_{cr} değerleri elde edilmiştir. Uygun viskoelastik problemlerin incelenmesinde Laplace dönüşümü uygulanmıştır. Ters Laplace dönüşümleri ise Schapery yöntemi yardımı ile elde edilmiştir.
5. Geliştirilmiş çözüm yönteminden yararlanılarak stabilite kaybı öncesinde liflerin eğilmesinden dolayı ortaya çıkan (saf elastik durumda) gerilme durumu ve bu gerilme durumuna liflerin karşılıklı etkisi incelenmiştir. Bu incelemeler geometrik nonlinearite faktörü de gözönüne alınarak yapılmıştır.
6. Ele alınan herbir durum için liflerin eğilmesinden dolayı ortaya çıkan ve lif-matris arayüzeyinde etki gösteren normal ve kayma gerilmeleri için çok sayıda sayısal sonuçlar elde edilmiş ve bu sonuçların yorumları yapılmıştır. Bu gerilmelere geometrik nonlinearitenin ve iki lif örneğinde aralarındaki uzaklığın etkisine ait sayısal sonuçlar bulunmuştur. Bu sonuçlardan yararlanılarak aşağıdakiler söylenebilir:

- Lifler yönünde basınç durumunda geometrik nonlinearite etkisinden dolayı

yukarıda adı geçen gerilmeler değerce büyümekte çekme durumunda ise küçülmektedir.

- Lifler birbirine yaklaştığında onların aynı-fazlı eğilme durumunda kayma gerilmeler değerce büyümekte normal gerilme ise küçülmektedir. Liflerin zıt-fazlı eğilme durumunda ise tam aksine normal gerilme büyümekte kayma gerilmeleri ise küçülmektedir.

7. Matris malzemesi viskoelastik, lif malzemeleri ise saf elastik olduğu durumlarda iç stabilite kaybına ait t_{cr} değerleri, lifler aynı düzlemde aynı-fazlı ve paralel düzlemlerde aynı-fazlı başlangıç eğintileri olduğu durumlarda elde edilmiştir. t_{cr} değerlerine matris malzemesinin reolojik parametrelerinin ve lifler arasındaki uzaklığın etkisi incelenmiştir.

8. Bu incelemelerden lifler arasındaki uzaklığın değişiminin t_{cr} değerlerine etkisinin daha büyük boyutlarda olduğu elde edilmiştir.

Tezde bulunan sonuçların değerlendirilmesinden aşağıdakileri söyleyebiliriz.

I. İlk kez, periyodik başlangıç eğintileri olan ve birbirine yakın iki lif içeren sonsuz elastik ve viskoelastik ortamda iç stabilite kaybına ve gerilme yayılımına ait problemlerin incelenmesi için parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde viskoelastisite teorisinin kesin geometrik nonlinear denklemleri kullanılarak bir yöntem geliştirilmiştir.

II. Yukarıdaki yöntem geliştirilerek ortam lifler yönünde çekme ve basınca tabi tutulduğunda liflerin eğintisinden dolayı ortaya çıkan gerilme yayılımına lifler arasındaki uzaklığın etkisini gösteren sayısal sonuçlar elde edilmiştir.

III. Matris malzemesi Rabotnov operatörleri ile verilen bir viskoelastik malzeme olduğu durumda ortamdaki iç stabilite kaybı p_{cr} değerlerinin bulunması ve bu değerlere lifler arasındaki uzaklığın, matris malzemesinin reolojik parametrelerinin vs. etkisi öğrenilmiştir.

IV. İlk kez gösterilmiştir ki, viskoelastik ortamlardaki iç stabilite kaybında liflerin karşılıklı etkisinin gözönüne alınmasının kritik parametrelere etkisi, uygun saf elastik iç stabilite kaybı problemlerindeki karşılıklı etkilerden daha büyük boyutlarda olmaktadır. Bu ise tezde elde edilen sonuçların önem ve değerinin yüksek olduğunu açık bir biçimde göstermektedir.

KAYNAKLAR

- Akbarov, S.D. (1981a), "Stability of Two Fibers in a Matrix for Small Deformations", Soviet Appl. Mech., 17(6), 129-131.
- Akbarov, S.D. (1981b), "Loss of Stability in Two Fibers in an Elastic Matrix with Large Elastic Strains", Soviet Appl. Mech. 11(7), 626-630.
- Akbarov, S.D. (1998), "On the Three-Dimensional Stability Loss Problems of Elements of Structures of Viscoelastic Composite Materials", Mechanics of Composite Materials, 34, 537-544.
- Akbarov, S.D. ve Guz, A.N. (1985a), "Stress State of a Fiber Composite with Curved Structures with a Low Fiber Concentration", Soviet Appl. Mech., 21(6), 560-565.
- Akbarov, S.D. ve Guz, A.N. (1985b), "Stability of Two Fibers in an Elastic Matrix with Small Strains", Soviet Appl. Mech., 21(1), 1-7.
- Akbarov, S.D. ve Guz, A.N. (1985c), "Method of Solving Problems in the Mechanics of Fiber Composites with Curved Structures", Soviet Appl. Mech., 20(9), 777-790.
- Akbarov, S.D. ve Guz, A.N. (2000), Mechanics of Curved Composites, Kluwer Academic Publishers, 464pp.
- Akbarov, A.D. ve Novruzov, Dzh.M. (1987), "On the Stability of an Anisotropic Fiber in the Elastic Isotropic Matrix", Izv Akad Nauk Azerb SSR, Ser PhyTech Math Sci 2, 6-72 (Rusça).
- Akbarov, S.D. ve Kocaturk, T. (1997), "Fibre Stability in Anisotropic Matrix at Small Strains", Mechanics of Composite Materials, 33(5), 603-661
- Akbarov, S.D. ve Kosker, R. (2001), "Fiber Buckling in a Viscoelastic Matrix", Mechanics of Composite Materials, Vol 37, No:4, 299-306.
- Akbarov, S.D. ve Kosker, R. (2002), "On a Stress Analysis in the Infinite Elastic Body with Two Neighbouring Curved Fibers", Composites Part B: Engineering, (basım için kabul edildi).
- Akbarov, S.D. ve Yahnioglu N., (2001), "A Method of Investigation of the General Theory of Stability Problems On Structural Elements Fabricated From The Viscoelastic Materials", Composites: Part B, 32, 475-482
- Akbarov, S.D., Cilli, A. ve Guz, A.N. (1999), "The Theoretical Strength Limit in Compression of Viscoelastic Layered Composite Materials", Composites Part B: Engineering, 30, 465-472
- Akbarov, S.D., Guz, A.N. ve Cherevko, M.A. (1982), "Stability of Two Fibers in the Elastic Matrix at Finite Precritical Deformations", Mech. Compos. Mater. 2, 42-51.
- Akbarov, S.D., Sisman, T. ve Yahnioglu, N. (1997), "On the Fracture of the Unidirectional Composites in Compression", Int. J. Engng. Sci, 35(12/13), 1115-1136
- Akbarov, S.D., Yahnioglu, N. ve Kutug, Z. (2001), "On the Three-Dimensional Stability Loss Problem of the Viscoelastic Composite Plate", Int. J. Engr. Science, 39, 1443-1457.
- Babaev, M.S., Guz, A.N. ve Cherevko, M.A. (1985), "Stability of the Row of Fibers in the Elastic Matrix at Small Precritical Deformations", Soviet Appl. Mech., 21(5), 27-34.

- Babich, I.Yu. (1973), "Stability of Fiber in a Matrix with Small Strains", *Soviet Appl. Mech.*, 9(4), 29-35 .
- Babich, I.Yu. ve Guz, A.N. (1973), "A Three-Dimensional Problem in the Stability of a Fiber in a Matrix at Highly Elastic Deformations", *Izv Akad Nauk SSSR, Mekh Tverdogo Tela* 3, 44-48 (Rusça).
- Babich, I.Yu. ve Guz, A.N. (1992), "Stability of Fibrous Composites", *Appl. Mech. Rev.*, 45(2), 60-80.
- Babich, I.Yu., Guz, A.N. ve Chekhov, V.N. (2001), "The Three-Dimensional Theory of Stability of Fibrous and Laminated Materials", *Int. Appl. Mech.*, 37(9), 1103-1141
- Babich, I.Yu, Guz, A.N. ve Shul'ga, N.A. (1982), "Study of the Dynamics and Stability of Composite Materials in a Three-Dimensional Formulation", *Soviet Appl. Mech.*, 18(1), 3-27 .
- Babich, I.Yu., Garashchuk, I.N. ve Guz, A.N. (1983), "Stability of a Fiber in an Elastic Matrix with a Inhomogeneous Precritical State", *Soviet Appl. Mech.*, 19(11), 21-27.
- Biezeno, C.B. ve Hencky, H. (1930), "On the General Theory of Elastic Stability", *K Akad Wet Amsterdam Proc.* 32, 444-56
- Biot, M.A. (1965), *Mechanics of Incremental Deformations*, Wiley, New york, 504 pp.
- Bolotin, V.V. ve Novichkov, Yu.N. (1980), *Mechanics of Multilayer Structures*, Mashinostroenie, Moscow, 376 pp. (Rusça).
- Budianski, B. ve Fleck, N.A. (1993), "Compressive Failure of Fibre Composites", *J. Mech. Phys. Solids*, 41, 183-21
- Budianski, B. ve Fleck, N.A. (1994), "Compressive Kinking of Fiber Composites: A Topical Review", *Appl. Mech. Rev.*, part 2, 47 (6), 246-270
- Chamis, C.C. (1974), "Micromechanical Theories of Strength", *Composite Materials*, New York and London, Vol 5 Fracture and Fatigue, 106-165
- Cherepanov, G.P. (1983), *Fracture Mechanics of Composite Materials*, Moscow, Nauka 289.
- Cherevko, M.A. (1985), "Stability of the Row of Circular Fibers in the Elastic-Plastic Matrix", *Soviet Appl. Mech.*, 21(12), 35-40.
- Cherevko, M.A. (1986), "Stability of Doubly-Periodic System of Sircular Fibers in the Elastic-Plastic Matrix", *Soviet Appl. Mech.*, 22(4), 19-26.
- Christensen, R.M. (1979), *Mechanics of Composite Materials*, Willey, New York.
- Chung, I. ve Weitsman, Y.J. (1994), "Model for Micro-Buckling/Micro-Kinking Compressive Response of Fiber-Reinforced Composites", *Applied Mechanics Review* part 2, 47(6), S256-S261
- Dow, N.F. ve Grunfest, I.J. (1960), "Determination of Most Needed Potentially Possible Improvements in Materials for Ballistic and Space Vehicles", *General Electric Co. Space Sci Lab.*, TISR 60 SD 389
- Evans, A. G. ve Adler, W. F. (1978), "Kinking as a Mode of Structural Degradation in Carbon Fiber Composites", *Acta. Metallurgica*, 26, 725-738
- Ekobori, T. (1978), "Physical foundation of strength and fracture of materials", K.: Nauk

Dumka, 32p (Rusça)

Fleck, N.A., Deng L. ve Budiansky B. (1995), "Prediction of King width in Compressed Fiber Composites", *Journal of Applied Mechanics*, 62, 329-337

Garaszczuk, I.N. (1983), "On the Stability of the Fiber in the Matrix at Inhomogeneous Precritical Deformations", *Dokl Akad Nauk Ukr SSR, Ser A Phys Math Tech Sci* 8, 24-27 (Rusça).

Gerard, F. ve Gilbert, A.A. (1958), "A Critical Strain Approach to Creep Buckling of Plates And Shells", *J. Aeroanaut Sci*, 25(7), 429-38

Green, A.E., Rivlin, R.S. ve Shield, R.T. (1952), "General Theory of Small Elastic Deformations Superposed on Finite Elastic Deformations", *Proc Roy Ser A*, 21(1104), 128-54

Greszczuk, I.B. (1975), "Fracture of Composite Reinforced by Circular Fibers From Loss of Stability Of Fibers", *J. AIAA*, 13(10), 67-75.

Greszczuk, L.B. (1983), "On Types of Fracture of Unidirectional Composites in Compression", *Strength and Fracture of Composite Materials*, Zinatne, Riga, 304-312 (Rusça).

Griffith, A.A. (1920), "The Phenomenon of Rupture and Flow in Solids", *Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. A* 211, N 2-P, 163-198

Guz, A.N. (1969a), "Determination of the Theoretical Compressive Strength of Reinforced Materials", *Dokl Akad Nauk Ukr SSR, Ser A Phys-Math Tech Sci* 3, 236-238 (Rusça)

Guz, A.N. (1969b), "Construction of a Theory of Stability of Unidirectional Fiber Composites", *Soviet Appl. Mech.*, 5(2), 62-70.

Guz, A.N. (1970), "On the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformation for Materials with Rheological Properties", *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Mekhanika Tverdog, Tela* (6), 104-107 (Rusça)

Guz, A.N. (1971a), *Stability of Three-Dimensional Bodies*, Naukova Dumka, Kiev, 276 pp (Rusça).

Guz, A.N. (1971b), "Construction of a Theory of Strength of Unidirectional Reinforced Materials Under Compression", *Problemi Prochnosti* 3, 37-40 (Rusça).

Guz, A.N. (1973), *Stability of Elastic Bodies with Finite Strains*, Naukova Dumka, Kiev, 272 pp. (Rusça).

Guz, A.N. (1990), *Mechanics of Fracture of Composite Materials in Compression*, Naukova Dumka, Kiev, 630 pp. (Rusça).

Guz, A.N. (1999), *Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies*, Berlin:Springer-Verlag, 556pp.

Guz, A.N. ve Cherevko, M.A. (1985), "Fracture Mechanics of Unidirectional Fibrous Composites with Metal Matrix Under Compression", *Thor. Appl. Fracture Mech.*, 3(2), 151-155

Guz, A.N. ve Lapusta, Yu.N. (1986), "Stability of the Fiber Near the Free Surface", *Soviet Appl. Mech.*, 22(8), 21-29.

- Hermann, L.R., Mason, W.E. ve Chan, S.T.K. (1967), "Response of Reinforcing Wires to Compressive States of Stress", J. Composite materials, 212-226
- Hoff, N.J. (1954), "Buckling and Stability", J. Roy. Aeron. Soc. 58,1.
- Irwin, G.R. (1957), "Analysis of Stresses and Strains Near and a Crack Traversing a Plate", J. Appl. Mech. 24(3), 361-364.
- Irwin, G.R. (1958), "Fracture", Handbuch der Physik, 6, 551-590.
- Jelf, P.M. ve Fleck, N.A. (1992), "Compression Failure Mechanisms in Unidirectional Composites", Journal of Composite Materials, 26(18), 2706-2726
- Kantarovich, L.V. ve Krilov, V.I., (1962). Approximate Methods in Advanced Calculus. Moscow: Fizmatgiz, (Rusça).
- Karpenko, L.I., Terletskii, V.A. ve Lyashenko, B.A. (1972), "A Mechanism of the Failure of Oriented Plastic", Problemi Prochnosti I, 50-55 (Rusça).
- Knott, I.F. (1979), Fundamentals of Fracture Mechanics, London, Butterworths, 320p.
- Kosker, R. (2001), "Long-Time Fracture of Uni-Directed Viscoelastic Fibrous Composites in Compression", Proceedings of 5th International Fracture Conference, 6-8 September, Elazig-Turkey, 69-77
- Kyriakides, S., Perry, E.J. ve Liechti, K.M. (1994), "Instability and Failure of Fiber Composites in Compression", Applied Mechanics Review part 2, 47(6), S262-S268
- Lapusta, Yu.N. (1990a), "The Stability of Row of Fibers Near the Free Plane Border of the Binder in Axial Compression", Mech. Compos. Mat. 4, 739-742.
- Mileiko, S.T. ve Khvostunkov, A.A. (1971), "Compression Curve for a Fibrous Composite", J. Prikl Mekh Tekh Fiz 4, 155-160 (Rusça).
- Parton, V.Z. (1992), Fracture Mechanics, From Theory to Practise, Gordon and Breach Science Publisher.
- Rabotnov, Yu.N. (1977), Elements of Hereditary Mechanics of Solid Bodies, Nauka, Moscow.
- Rosen, B.W. (1965), Fiber composite materials, Amer. Soc. For. Metals, Metals Park, Ohio, p:37
- Rosen, B.W. (1967), "Mechanics of Strengthening of Composites, in Fibrous Composite Materials", Mir, Moscow, 54-96 (Rusça).
- Rosen, B.W. ve Dow, N.F. (1976), "Mechanics of Fracture of Fibrous Composites", Fracture, vol 7, part 1. The Fracture of Non-Metals and of Composite Materials, Mir, Moscow, 300-366 (Rusça).
- Sadovsky, M.A., Pu, S.L. ve Hussain, M.A. (1967), "Buckling of Microfibers", Trans ASME, Ser E 34(4), 295-302
- Schapery, R.A. (1966), "Approximate Methods of Transform Inversion for Viscoelastic Stress Analyses", Proc. US Nat. Cong. Appl. ASME 4, 1075-1085
- Schuerch, H. (1966), "Prediction of Compressive Strength in Uniaxial Boron Fibermetal Matrix Composite Materials", J. AIAA 4(1), 102-106.

Southwell, R.V. (1913), "On the General Theory of Elastic Stability", Philos Trans Soc London Ser A, 213, 187-244

Tarnopol'skii, Yu.M. ve Roze, A.V. (1969), Design Characteristics of Components Made of Reinforced Plastics, Zinatne, Riga, 275 pp. (Rusça).

Tkachenko, E.A. ve Chekhov, V.N. (2000a), "The Stability of Tribotechnical Laminated Polymeric Coatings", Int. Appl. Mech., 36(9), 1198-1204.

Tkachenko, E.A. ve Chekhov, V.N. (2000b), "The Stability of Laminated Elastomer Coatings Under Surface Loading", Int. Appl. Mech., 36(10), 1355-1362.

Watson, G.N., 1944. A Treatise on the Theory of Bessel functions, Cambridge University Press, England 753pp.

Yahnioglu, N. ve Akbarov, S.D. (2002), "Stability Loss Analyses of the Elastic and Viscoelastic Composite Rotating Thick Circular Plate in the Framework of the Three-Dimensional Linearized Theory of Stability", Inter. J. Mechanical Sciences, 44(6), 1225-1244



EKLER

- Ek 1 Geometrik Non-lineer Denge Denklemlerinin ve Gerilme-Şekil Değişirme İlişkilerinin Silindirik Koordinat Takımındaki Fiziksel Bileşenleri Cinsinden İfadeleri ve kullanımları
- Ek 2 Alan Denklemlerinin Sıfıncı, Birinci ve İkinci Yaklaşımlarının Silindirik Koordinat Takımındaki Fiziksel Bileşenleri Cinsinden İfadeleri
- Ek 3 Bölüm 2’de Yer Alan Denklemlerdeki Fonksiyonların Açık İfadeleri
- Ek 4 Schapery Yöntemi
- Ek 5 Bölüm 3’de Yer Alan Denklemlerdeki Fonksiyonların Açık İfadeleri



Ek 1 Geometrik Non-lineer Denge Denklemlerinin ve Gerilme-Şekil Değişirme İlişkilerinin Silindirik Koordinat Takımındaki Fiziksel Bileşenleri Cinsinden İfadeleri

(1.5) ile verilen denge denklemlerinin silindirik koordinat takımındaki ifadeleri:

$$\begin{aligned}
 & \sigma_{rr}^{(k)} \left(\frac{\partial^2 u_r^{(k)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \sigma_{r\theta}^{(k)} \left(2 \frac{\partial^2 u_r^{(k)}}{\partial r \partial \theta} - 2 \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial r} - u_r^{(k)} - \frac{1}{r} u_\theta^{(k)} \right) \\
 & + \sigma_{rz}^{(k)} \left(2 \frac{\partial^2 u_r^{(k)}}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \sigma_{\theta\theta}^{(k)} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r^{(k)}}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_r^{(k)} - 1 \right) \\
 & + \frac{2}{r} \sigma_{\theta z}^{(k)} \left(\frac{\partial^2 u_r^{(k)}}{\partial \theta \partial z} - \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial z} \right) + \sigma_{zz}^{(k)} \frac{\partial^2 u_r^{(k)}}{\partial z^2} + \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} \left(\frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k)}}{\partial z} \right) \\
 & + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k)}}{\partial z} \right) + \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z} \left(\frac{\partial \sigma_{rz}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k)}}{\partial z} \right) \\
 & - \frac{1}{r} u_\theta^{(k)} \left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k)}}{\partial z} \right) + \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k)}}{\partial z} = 0 \quad (E1.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{r} \sigma_{rr}^{(k)} \left(\frac{\partial^2 u_\theta^{(k)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial r} \right) + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(k)} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta^{(k)}}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k)} \left(2 \frac{\partial^2 u_\theta^{(k)}}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial z} \right) \\
 & + \frac{1}{r^3} \sigma_{\theta\theta}^{(k)} \left(\frac{\partial^2 u_\theta^{(k)}}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial \theta} - u_\theta^{(k)} \right) + \frac{2}{r^2} \sigma_{\theta z}^{(k)} \left(\frac{\partial^2 u_\theta^{(k)}}{\partial \theta \partial z} + \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \sigma_{zz}^{(k)} \frac{\partial^2 u_\theta^{(k)}}{\partial z^2} \\
 & + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial r} - u_\theta^{(k)} \right) \left(\frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k)}}{\partial z} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k)}}{\partial z} \right) \\
 & + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial z} \left(\frac{\partial \sigma_{rz}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k)}}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{r} u_r^{(k)} \right) \left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k)}}{\partial z} \right) \\
 & + \frac{1}{r^2} u_\theta^{(k)} \left(\frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k)}}{\partial z} \right) = 0 \quad (E1.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sigma_{rr}^{(k)} \left(\frac{\partial^2 u_z^{(k)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} \right) + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(k)} \frac{\partial^2 u_z^{(k)}}{\partial r \partial \theta} + \sigma_{rz}^{(k)} \left(2 \frac{\partial^2 u_z^{(k)}}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z} \right) + \frac{1}{r^2} \sigma_{\theta\theta}^{(k)} \frac{\partial^2 u_z^{(k)}}{\partial \theta^2} \\
& + \frac{2}{r} \sigma_{\theta z}^{(k)} \frac{\partial^2 u_z^{(k)}}{\partial \theta \partial z} + \sigma_{zz}^{(k)} \frac{\partial^2 u_z^{(k)}}{\partial z^2} + \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} \left(\frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k)}}{\partial z} \right) \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k)}}{\partial z} \right) + \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z} \left(\frac{\partial \sigma_{rz}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k)}}{\partial z} \right) \\
& + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k)}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k)} = 0
\end{aligned} \tag{E1.3}$$

(1.6) ile verilen şekil değıştirme ve yerdeğıştirme ilişkilerinin silindirik koordinat takımındaki ifadeleri:

$$2\varepsilon_{rr}^{(k)} = 2 \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} + \left(\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} \right)^2 \tag{E1.4}$$

$$\begin{aligned}
2\varepsilon_{r\theta}^{(k)} &= \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_\theta^{(k)} + \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} \left(\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial \theta} - u_\theta^{(k)} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial r} \left(\frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial \theta} + u_r^{(k)} \right) \\
&+ \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial \theta}
\end{aligned} \tag{E1.5}$$

$$2\varepsilon_{rz}^{(k)} = \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial r} \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z} \tag{E1.6}$$

$$2\varepsilon_{\theta\theta}^{(k)} = \frac{2}{r} \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} u_r^{(k)} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial \theta} - u_\theta^{(k)} \right]^2 + \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial \theta} - u_r^{(k)} \right]^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial \theta} \right)^2 \tag{E1.7}$$

$$\begin{aligned}
2\varepsilon_{\theta z}^{(k)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z} \left[\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial \theta} - u_\theta^{(k)} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial z} \left[\frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial \theta} - u_r^{(k)} \right] \\
&+ \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial \theta} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z}
\end{aligned} \tag{E1.8}$$

$$2\varepsilon_{zz}^{(k)} = 2\frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z} + \left(\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z}\right)^2 \quad (\text{E1.9})$$

Ek 2 Alan Denklemlerinin Sıfıncı, Birinci ve İkinci Yaklaşımlarının Silindirik Koordinat Takımındaki Fiziksel Bileşenleri Cinsinden İfadeleri

Sıfıncı yaklaşım için:

Bu yaklaşım için denge denklemleri ve gerilme-şekil değiştirme ilişkilerinin silindirik koordinatlardaki fiziksel bileşenleri cinsinden ifadeleri, Ek 1’de verilen genel denklemlerle aynı olduğundan buraya tekrar yazılmayacaklardır.

Birinci yaklaşım için:

Denge denklemleri,

$$\begin{aligned}
 & \sigma_{rr}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \sigma_{r\theta}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial \theta \partial r} + 2 \sigma_{zr}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r^2} \sigma_{\theta\theta}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \sigma_{z\theta}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial z \partial \theta} \\
 & + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial z^2} + \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),0}}{\partial r} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}^{(k),0}}{\partial \theta} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zr}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r} \\
 & - \frac{1}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),0}}{\partial r} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),0}}{\partial \theta} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} \\
 & + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),0}}{\partial r} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),0}}{\partial \theta} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rr}^{(k),0} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r} \\
 & + \frac{1}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k),0} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} + \frac{2}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),0} u_{\theta}^{(k),1} - \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial r} \\
 & - \frac{2}{r^2} \sigma_{\theta\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \sigma_{z\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zr}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr}^{(k),1} - \sigma_{\theta\theta}^{(k),1}) \\
 & + \frac{1}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),0} u_{\theta}^{(k),1} - \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),0}}{\partial r} u_{\theta}^{(k),1} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),0}}{\partial \theta} u_{\theta}^{(k),1} \\
 & - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),0}}{\partial \theta} u_{\theta}^{(k),1} - \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(k),0}}{\partial z} u_{\theta}^{(k),1} - \frac{3}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),0} u_{\theta}^{(k),1} \\
 & + \frac{1}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),0} u_r^{(k),1} - \frac{1}{r^2} \sigma_{\theta\theta}^{(k),0} u_r^{(k),1} - \frac{1}{r^2} \sigma_{\theta r}^{(k),0} u_{\theta}^{(k),1} = 0
 \end{aligned} \tag{E2.1}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{r^3} \sigma_{rr}^{(k),0} u_{\theta}^{(k),1} - \frac{2}{r^2} \sigma_{rr}^{(k),0} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rr}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_{\theta}^{(k),1}}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2} \sigma_{\theta r}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_{\theta}^{(k),1}}{\partial \theta \partial r} - \frac{2}{r^3} \sigma_{\theta r}^{(k),0} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} \\
& + \frac{2}{r} \sigma_{zr}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_{\theta}^{(k),1}}{\partial z \partial r} - \frac{2}{r^2} \sigma_{zr}^{(k),0} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial z} - \frac{1}{r^3} \sigma_{\theta \theta}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_{\theta}^{(k),1}}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \sigma_{z\theta}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_{\theta}^{(k),1}}{\partial z \partial \theta} \\
& + \frac{1}{r} \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_{\theta}^{(k),1}}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),0}}{\partial r} u_{\theta}^{(k),1} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta r}^{(k),0}}{\partial \theta} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial r} \\
& - \frac{1}{r^2} \sigma_{zr}^{(k),0} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{zr}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial r} - \frac{1}{r^3} \sigma_{r\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),0}}{\partial r} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} \\
& + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \sigma_{\theta \theta}^{(k),0}}{\partial \theta} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),0}}{\partial r} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),0}}{\partial \theta} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial z} \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{3}{r^2} \sigma_{rr}^{(k),0} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial r} - \frac{3}{r^3} \sigma_{rr}^{(k),0} u_{\theta}^{(k),1} + \frac{3}{r^3} \sigma_{\theta r}^{(k),0} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} \\
& + \frac{3}{r^2} \sigma_{rz}^{(k),0} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{2}{r^2} \sigma_{\theta r}^{(k),0} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r} + \frac{2}{r^3} \sigma_{\theta \theta}^{(k),0} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \sigma_{z\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),1} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta \theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(k),1}}{\partial z} - \frac{1}{r^3} \sigma_{r\theta}^{(k),0} u_r^{(k),1} \\
& + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),0}}{\partial r} u_r^{(k),1} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \sigma_{\theta \theta}^{(k),0}}{\partial \theta} u_r^{(k),1} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(k),0}}{\partial z} u_r^{(k),1} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial r} u_{\theta}^{(k),0} \\
& + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),0}}{\partial r} u_{\theta}^{(k),1} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \sigma_{\theta r}^{(k),0}}{\partial \theta} u_{\theta}^{(k),1} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),0}}{\partial z} u_{\theta}^{(k),1} + \frac{3}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),1} - \frac{1}{r^3} \sigma_{\theta \theta}^{(k),0} u_{\theta}^{(k),1} \\
& + \frac{1}{r^3} \sigma_{r\theta}^{(k),0} u_r^{(k),1} + \frac{1}{r^3} \sigma_{rr}^{(k),0} u_{\theta}^{(k),1} = 0
\end{aligned} \tag{E2.2}$$

$$\begin{aligned}
& \sigma_{rr}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \sigma_{\theta r}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial \theta \partial r} + 2 \sigma_{zr}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r^2} \sigma_{\theta \theta}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2r} \sigma_{z\theta}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial z \partial \theta} \\
& + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \sigma_{\theta z}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial \theta \partial z} + \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),0}}{\partial r} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}^{(k),0}}{\partial \theta} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial \sigma_{zr}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),0}}{\partial r} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),0}}{\partial \theta} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial \theta} \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),0}}{\partial r} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),0}}{\partial \theta} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z} \\
& + \frac{1}{r} \sigma_{rr}^{(k),0} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k),0} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),1}}{\partial \theta} \\
& + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k),1} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),1}}{\partial z} = 0
\end{aligned} \tag{E2.3}$$

Şekil değiştirme-yer değiştirme ilişkileri:

$$\varepsilon_{rr}^{(k),1} = \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r} \tag{E2.4}$$

$$2\varepsilon_{r\theta}^{(k),1} = \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_\theta^{(k),1} \tag{E2.5}$$

$$2\varepsilon_{rz}^{(k),1} = \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} \tag{E2.6}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{(k),1} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r^{(k),1} \tag{E2.7}$$

$$2\varepsilon_{\theta z}^{(k),1} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial z} \tag{E2.8}$$

$$\varepsilon_{zz}^{(k),1} = \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z} \tag{E2.9}$$

İkinci yaklaşım için:

Denge denklemleri,

$$\sigma_{rr}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),2}}{\partial r^2} + \sigma_{rr}^{(k),1} \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),2}}{\partial \theta \partial r} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(k),1} \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial \theta \partial r} + 2\sigma_{zr}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),2}}{\partial z \partial r}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\sigma_{zr}^{(k),1} \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r^2} \sigma_{\theta\theta}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),2}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \sigma_{\theta\theta}^{(k),1} \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \sigma_{z\theta}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),2}}{\partial z \partial \theta} \\
& + \frac{2}{r} \sigma_{z\theta}^{(k),1} \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial z \partial \theta} + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),2}}{\partial z^2} + \sigma_{zz}^{(k),1} \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial z^2} + \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),0}}{\partial r} \frac{\partial u_r^{(k),2}}{\partial r} \\
& + \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial r} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}^{(k),0}}{\partial \theta} \frac{\partial u_r^{(k),2}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}^{(k),1}}{\partial \theta} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zr}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_r^{(k),2}}{\partial r} \\
& + \frac{\partial \sigma_{zr}^{(k),1}}{\partial z} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_r^{(k),2}}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),1} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),0}}{\partial r} \frac{\partial u_r^{(k),2}}{\partial \theta} \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial r} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),0}}{\partial \theta} \frac{\partial u_r^{(k),2}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_r^{(k),2}}{\partial \theta} \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(k),1}}{\partial z} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),0}}{\partial r} \frac{\partial u_r^{(k),2}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial r} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),0}}{\partial \theta} \frac{\partial u_r^{(k),2}}{\partial z} \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),1}}{\partial \theta} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_r^{(k),2}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),1}}{\partial z} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rr}^{(k),0} \frac{\partial u_r^{(k),2}}{\partial r} \\
& + \frac{1}{r} \sigma_{rr}^{(k),1} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_r^{(k),2}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),1} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k),0} \frac{\partial u_r^{(k),2}}{\partial z} \\
& + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k),1} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} + \frac{2}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),1} u_{\theta}^{(k),1} + \frac{2}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),0} u_{\theta}^{(k),2} - \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(k),1} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial r} - \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),2}}{\partial r} \\
& - \frac{2}{r^2} \sigma_{\theta\theta}^{(k),1} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \sigma_{\theta\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),2}}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \sigma_{z\theta}^{(k),1} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial z} - \frac{2}{r} \sigma_{z\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),2}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),2}}{\partial r} \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}^{(k),2}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zr}^{(k),2}}{\partial z} + \frac{1}{r} \left(\sigma_{rr}^{(k),2} - \sigma_{\theta\theta}^{(k),2} + \frac{1}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),1} u_{\theta}^{(k),1} + \frac{1}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),0} u_{\theta}^{(k),2} \right. \\
& \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial r} u_{\theta}^{(k),1} - \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),0}}{\partial r} u_{\theta}^{(k),2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} u_{\theta}^{(k),1} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),0}}{\partial \theta} u_{\theta}^{(k),2} \right. \\
& \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(k),1}}{\partial z} u_{\theta}^{(k),1} - \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(k),0}}{\partial z} u_{\theta}^{(k),2} - \frac{3}{r^2} \left(\sigma_{r\theta}^{(k),1} u_{\theta}^{(k),1} + \sigma_{r\theta}^{(k),0} u_{\theta}^{(k),2} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\sigma_{r\theta}^{(k),1} u_r^{(k),1} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sigma_{r\theta}^{(k),0} u_r^{(k),2} \Big) - \frac{1}{r^2} \left(\sigma_{\theta\theta}^{(k),1} u_r^{(k),1} + \sigma_{\theta\theta}^{(k),0} u_r^{(k),2} \right. \\
& \left. - \frac{1}{r^2} \left(\sigma_{\theta r}^{(k),1} u_\theta^{(k),1} + \sigma_{\theta r}^{(k),0} u_\theta^{(k),2} \right) \right) = 0
\end{aligned} \tag{E2.10}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{r^3} \sigma_{rr}^{(k),0} u_\theta^{(k),2} + \frac{2}{r^3} \sigma_{rr}^{(k),1} u_\theta^{(k),1} - \frac{2}{r^2} \sigma_{rr}^{(k),0} \frac{\partial u_\theta^{(k),2}}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \sigma_{rr}^{(k),1} \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rr}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_\theta^{(k),2}}{\partial r^2} \\
& + \frac{1}{r} \sigma_{rr}^{(k),1} \frac{\partial^2 u_\theta^{(k),1}}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2} \sigma_{\theta r}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_\theta^{(k),2}}{\partial \theta \partial r} + \frac{2}{r^2} \sigma_{\theta r}^{(k),1} \frac{\partial^2 u_\theta^{(k),1}}{\partial \theta \partial r} - \frac{2}{r^3} \sigma_{\theta r}^{(k),0} \frac{\partial u_\theta^{(k),2}}{\partial \theta} \\
& - \frac{2}{r^3} \sigma_{\theta r}^{(k),1} \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \sigma_{zr}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_\theta^{(k),2}}{\partial z \partial r} + \frac{2}{r} \sigma_{zr}^{(k),1} \frac{\partial^2 u_\theta^{(k),1}}{\partial z \partial r} - \frac{2}{r^2} \sigma_{zr}^{(k),0} \frac{\partial u_\theta^{(k),2}}{\partial z} \\
& - \frac{2}{r^2} \sigma_{zr}^{(k),1} \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r^3} \sigma_{\theta\theta}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_\theta^{(k),2}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^3} \sigma_{\theta\theta}^{(k),1} \frac{\partial^2 u_\theta^{(k),1}}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \sigma_{z\theta}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_\theta^{(k),2}}{\partial z \partial \theta} \\
& + \frac{2}{r^2} \sigma_{z\theta}^{(k),1} \frac{\partial^2 u_\theta^{(k),1}}{\partial z \partial \theta} + \frac{1}{r} \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_\theta^{(k),2}}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \sigma_{zz}^{(k),1} \frac{\partial^2 u_\theta^{(k),1}}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),0}}{\partial r} u_\theta^{(k),2} \\
& - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial r} u_\theta^{(k),1} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),0}}{\partial r} \frac{\partial u_\theta^{(k),2}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial r} \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial r} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial \sigma_{\theta r}^{(k),0}}{\partial \theta} u_\theta^{(k),2} \\
& - \frac{1}{r^3} \frac{\partial \sigma_{\theta r}^{(k),1}}{\partial \theta} u_\theta^{(k),1} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta r}^{(k),0}}{\partial \theta} \frac{\partial u_\theta^{(k),2}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta r}^{(k),1}}{\partial \theta} \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{zr}^{(k),0}}{\partial z} u_\theta^{(k),2} \\
& - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{zr}^{(k),1}}{\partial z} u_\theta^{(k),1} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{zr}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_\theta^{(k),2}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{zr}^{(k),1}}{\partial z} \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial r} - \frac{1}{r^3} \sigma_{r\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_\theta^{(k),2}}{\partial \theta} \\
& - \frac{1}{r^3} \sigma_{r\theta}^{(k),1} \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),0}}{\partial r} \frac{\partial u_\theta^{(k),2}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial r} \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),0}}{\partial \theta} \frac{\partial u_\theta^{(k),2}}{\partial \theta} \\
& + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_\theta^{(k),2}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(k),1}}{\partial z} \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_\theta^{(k),2}}{\partial \theta} \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),0}}{\partial r} \frac{\partial u_\theta^{(k),2}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial r} \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),0}}{\partial \theta} \frac{\partial u_\theta^{(k),2}}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),1}}{\partial \theta} \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),2}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),1}}{\partial z} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{3}{r^2} \sigma_{rr}^{(k),1} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{3}{r^2} \sigma_{rr}^{(k),0} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),2}}{\partial r} \\
& - \frac{3}{r^3} \sigma_{rr}^{(k),1} u_{\theta}^{(k),1} - \frac{3}{r^3} \sigma_{rr}^{(k),0} u_{\theta}^{(k),2} + \frac{3}{r^3} \sigma_{\theta r}^{(k),1} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{3}{r^3} \sigma_{\theta r}^{(k),0} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),2}}{\partial \theta} \\
& + \frac{3}{r^2} \sigma_{rz}^{(k),1} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{3}{r^2} \sigma_{rz}^{(k),0} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),2}}{\partial z} + \frac{2}{r^2} \sigma_{\theta r}^{(k),1} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \sigma_{\theta r}^{(k),0} \frac{\partial u_r^{(k),2}}{\partial r} \\
& + \frac{2}{r^3} \sigma_{\theta \theta}^{(k),1} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{2}{r^3} \sigma_{\theta \theta}^{(k),0} \frac{\partial u_r^{(k),2}}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \sigma_{z\theta}^{(k),1} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} + \frac{2}{r^2} \sigma_{z\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_r^{(k),2}}{\partial z} \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),2}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),2}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(k),2}}{\partial z} - \frac{1}{r^3} \sigma_{r\theta}^{(k),0} u_r^{(k),2} - \frac{1}{r^3} \sigma_{r\theta}^{(k),1} u_r^{(k),1} \\
& + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),0}}{\partial r} u_r^{(k),2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial r} u_r^{(k),1} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),0}}{\partial \theta} u_r^{(k),2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} u_r^{(k),1} \\
& + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(k),0}}{\partial z} u_r^{(k),2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(k),1}}{\partial z} u_r^{(k),1} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial r} u_{\theta}^{(k),1} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),0}}{\partial r} u_{\theta}^{(k),2} \\
& + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \sigma_{\theta r}^{(k),1}}{\partial \theta} u_{\theta}^{(k),1} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \sigma_{\theta r}^{(k),0}}{\partial \theta} u_{\theta}^{(k),2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial z} u_{\theta}^{(k),1} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),0}}{\partial z} u_{\theta}^{(k),2} \\
& + \frac{3}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),2} - \frac{1}{r^3} \sigma_{\theta\theta}^{(k),1} u_{\theta}^{(k),1} - \frac{1}{r^3} \sigma_{\theta\theta}^{(k),0} u_{\theta}^{(k),2} + \frac{1}{r^3} \sigma_{r\theta}^{(k),1} u_r^{(k),1} + \frac{1}{r^3} \sigma_{r\theta}^{(k),0} u_r^{(k),2} \\
& + \frac{1}{r^3} \sigma_{rr}^{(k),1} u_{\theta}^{(k),1} + \frac{1}{r^3} \sigma_{rr}^{(k),0} u_{\theta}^{(k),2} = 0 \tag{E2.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sigma_{rr}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),2}}{\partial r^2} + \sigma_{rr}^{(k),1} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \sigma_{\theta r}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),2}}{\partial \theta \partial r} + \frac{2}{r} \sigma_{\theta r}^{(k),1} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial \theta \partial r} + 2 \sigma_{zr}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),2}}{\partial z \partial r} \\
& + 2 \sigma_{zr}^{(k),1} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r^2} \sigma_{\theta\theta}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),2}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \sigma_{\theta\theta}^{(k),1} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2r} \sigma_{z\theta}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),2}}{\partial z \partial \theta} \\
& + \frac{1}{2r} \sigma_{z\theta}^{(k),1} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial z \partial \theta} + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),2}}{\partial z^2} + \sigma_{zz}^{(k),1} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \sigma_{\theta z}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),2}}{\partial \theta \partial z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{r} \sigma_{\theta z}^{(k),1} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial \theta \partial z} + \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),0}}{\partial r} \frac{\partial u_z^{(k),2}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial r} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}^{(k),0}}{\partial \theta} \frac{\partial u_z^{(k),2}}{\partial r} \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}^{(k),1}}{\partial \theta} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zr}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_z^{(k),2}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zr}^{(k),1}}{\partial z} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),0}}{\partial r} \frac{\partial u_z^{(k),2}}{\partial \theta} \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial r} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_z^{(k),2}}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),1} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),0}}{\partial \theta} \frac{\partial u_z^{(k),2}}{\partial \theta} \\
& + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_z^{(k),2}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(k),1}}{\partial z} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),0}}{\partial r} \frac{\partial u_z^{(k),2}}{\partial z} \\
& + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial r} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),0}}{\partial \theta} \frac{\partial u_z^{(k),2}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),1}}{\partial \theta} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_z^{(k),2}}{\partial z} \\
& + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),1}}{\partial z} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rr}^{(k),0} \frac{\partial u_z^{(k),2}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rr}^{(k),1} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \sigma_{\theta r}^{(k),0} \frac{\partial u_z^{(k),2}}{\partial \theta} \\
& + \frac{1}{r^2} \sigma_{\theta r}^{(k),1} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k),0} \frac{\partial u_z^{(k),2}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k),1} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),2}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),2}}{\partial \theta} \\
& + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),2}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k),2} = 0
\end{aligned} \tag{E2.12}$$

Şekil değiştirme-yer değiştirme ilişkileri:

$$\varepsilon_{rr}^{(k),2} = \frac{\partial u_r^{(k),2}}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r} \right)^2 \tag{E2.13}$$

$$\begin{aligned}
2\varepsilon_{r\theta}^{(k),2} &= \frac{\partial u_\theta^{(k),2}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k),2}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_\theta^{(k),2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r} u_\theta^{(k),1} \\
&+ \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial r} \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial r} u_r^{(k),1} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial \theta}
\end{aligned} \tag{E2.14}$$

$$2\varepsilon_{rz}^{(k),2} = \frac{\partial u_z^{(k),2}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(k),2}}{\partial z} + \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} + \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial r} \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z} \tag{E2.15}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\theta\theta}^{(k),2} = & \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),2}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r^{(k),2} + \frac{1}{2r^2} \left(\frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2r^2} (u_{\theta}^{(k),1})^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} u_{\theta}^{(k),1} \\
& + \frac{1}{2r^2} \left(\frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{(u_r^{(k),1})^2}{2r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} u_r^{(k),1} + \frac{1}{2r^2} \left(\frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial \theta} \right)^2
\end{aligned} \tag{E2.16}$$

$$\begin{aligned}
2\varepsilon_{\theta z}^{(k),2} = & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(k),2}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta}^{(k),2}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} u_{\theta}^{(k),1} \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial z} u_r^{(k),1} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial \theta} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z}
\end{aligned} \tag{E2.17}$$

$$2\varepsilon_{zz}^{(k),2} = 2 \frac{\partial u_z^{(k),2}}{\partial z} + \left(\frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z} \right)^2 \tag{E2.18}$$

Ek 3 Bölüm 2’de Yer Alan Denklemlerdeki Fonksiyonların Açık İfadeleri

(2.41) denklemlerindeki fonksiyonların açık ifadeleri:

$$U_{11}^{(1)} = -\frac{2\mu^{(1)}}{\kappa^2} K_1(\xi_1^{(1)} \kappa) - \frac{\mu^{(1)} \xi_1^{(1)}}{\kappa} \left(K_0(\xi_1^{(1)} \kappa) + K_2(\xi_1^{(1)} \kappa) \right)$$

$$U_{12}^{(1)} = -\frac{\lambda^{(1)}}{\kappa^2} K_1(\xi_2^{(1)} \kappa) - \frac{\lambda^{(1)} \xi_2^{(1)}}{2\kappa} \left(K_0(\xi_2^{(1)} \kappa) + K_2(\xi_2^{(1)} \kappa) \right) + \frac{(\xi_2^{(1)})^2 (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})}{4} \times$$

$$\left(3K_1(\xi_2^{(1)} \kappa) + K_3(\xi_2^{(1)} \kappa) \right) - \lambda^{(1)} \frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_2^{(1)})^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_1(\xi_2^{(1)} \kappa)$$

$$U_{13}^{(1)} = -\frac{\lambda^{(1)}}{\kappa^2} K_1(\xi_3^{(1)} \kappa) - \frac{\lambda^{(1)} \xi_3^{(1)}}{2\kappa} \left(K_0(\xi_3^{(1)} \kappa) + K_2(\xi_3^{(1)} \kappa) \right) + \frac{(\xi_3^{(1)})^2 (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})}{4} \times$$

$$\left(3K_1(\xi_3^{(1)} \kappa) + K_3(\xi_3^{(1)} \kappa) \right) - \lambda^{(1)} \frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_3^{(1)})^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_1(\xi_3^{(1)} \kappa)$$

$$U_{11}^{(2)} = -\frac{2\mu^{(2)}}{\kappa^2} I_1(\xi_1^{(2)} \kappa) + \frac{\mu^{(2)} \xi_1^{(2)}}{\kappa} \left(I_0(\xi_1^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_1^{(2)} \kappa) \right)$$

$$U_{12}^{(2)} = \frac{\lambda^{(2)}}{\kappa^2} I_1(\xi_2^{(2)} \kappa) - \frac{\lambda^{(2)} \xi_2^{(2)}}{2\kappa} \left(I_0(\xi_2^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_2^{(2)} \kappa) \right) - \frac{(\xi_2^{(2)})^2 (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})}{4} \times$$

$$\left(3I_1(\xi_2^{(2)} \kappa) + I_3(\xi_2^{(2)} \kappa) \right) + \lambda^{(2)} \frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_2^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_1(\xi_2^{(2)} \kappa)$$

$$U_{13}^{(2)} = \frac{\lambda^{(2)}}{\kappa^2} I_1(\xi_3^{(2)} \kappa) - \frac{\lambda^{(2)} \xi_3^{(2)}}{2\kappa} \left(I_0(\xi_3^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_3^{(2)} \kappa) \right) - \frac{(\xi_3^{(2)})^2 (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})}{4}$$

$$\times \left(3I_1(\xi_3^{(2)} \kappa) + I_3(\xi_3^{(2)} \kappa) \right) + \lambda^{(2)} \frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_3^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_1(\xi_3^{(2)} \kappa)$$

$$U_{21}^{(1)} = \mu^{(1)} \left[-\frac{1}{\kappa^2} K_1(\xi_1^{(1)} \kappa) - \frac{\xi_1^{(1)}}{2\kappa} (K_0(\xi_1^{(1)} \kappa) + K_2(\xi_1^{(1)} \kappa)) - \frac{(\xi_1^{(1)})^2}{4} (3K_1(\xi_1^{(1)} \kappa) + K_3(\xi_1^{(1)} \kappa)) \right]$$

$$U_{22}^{(1)} = \mu^{(1)} \left[\frac{2}{\kappa^2} K_1(\xi_2^{(1)} \kappa) + \frac{\xi_2^{(1)}}{2} (K_0(\xi_2^{(1)} \kappa) + K_2(\xi_2^{(1)} \kappa)) \right]$$

$$U_{23}^{(1)} = \mu^{(1)} \left[\frac{2}{\kappa^2} K_1(\xi_3^{(1)} \kappa) + \frac{\xi_3^{(1)}}{2} (K_0(\xi_3^{(1)} \kappa) + K_2(\xi_3^{(1)} \kappa)) \right]$$

$$U_{21}^{(2)} = -\mu^{(2)} \left[\frac{\xi_1^{(2)}}{2\kappa} (I_0(\xi_1^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_1^{(2)} \kappa)) - \frac{1}{\kappa^2} I_1(\xi_1^{(2)} \kappa) - \frac{(\xi_1^{(2)})^2}{4} (3I_1(\xi_1^{(2)} \kappa) + I_3(\xi_1^{(2)} \kappa)) \right]$$

$$U_{22}^{(2)} = -\mu^{(2)} \left[\frac{2}{\kappa^2} I_1(\xi_2^{(2)} \kappa) - \frac{\xi_2^{(2)}}{2} (I_0(\xi_2^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_2^{(2)} \kappa)) \right]$$

$$U_{23}^{(2)} = -\mu^{(2)} \left[\frac{2}{\kappa^2} I_1(\xi_3^{(2)} \kappa) - \frac{\xi_3^{(2)}}{2} (I_0(\xi_3^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_3^{(2)} \kappa)) \right]$$

$$U_{31}^{(1)} = \frac{\mu^{(1)}}{\kappa} K_1(\xi_1^{(1)} \kappa)$$

$$U_{32}^{(1)} = -\mu^{(1)} \frac{\xi_2^{(1)} \left[\lambda^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} + (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_2^{(1)})^2 \right]}{2(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})} (K_0(\xi_2^{(1)} \kappa) + K_2(\xi_2^{(1)} \kappa))$$

$$U_{33}^{(1)} = -\mu^{(1)} \frac{\xi_3^{(1)} \left[\lambda^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} + (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_3^{(1)})^2 \right]}{2(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})} (K_0(\xi_3^{(1)} \kappa) + K_2(\xi_3^{(1)} \kappa))$$

$$U_{31}^{(2)} = -\frac{\mu^{(2)}}{\kappa} I_1(\xi_1^{(2)} \kappa)$$

$$U_{32}^{(2)} = -\mu^{(2)} \frac{\xi_2^{(2)} \left[\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_2^{(2)})^2 \right]}{2(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})} (I_0(\xi_2^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_2^{(2)} \kappa))$$

$$U_{33}^{(2)} = -\mu^{(2)} \frac{\xi_3^{(2)} \left[\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_3^{(2)})^2 \right]}{2(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})} \left(I_0(\xi_3^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_3^{(2)} \kappa) \right)$$

$$U_{41}^{(1)} = \frac{1}{\kappa} K_1(\xi_1^{(1)} \kappa),$$

$$U_{42}^{(1)} = -\frac{\xi_2^{(1)}}{2} \left(K_0(\xi_2^{(1)} \kappa) + K_2(\xi_2^{(1)} \kappa) \right),$$

$$U_{43}^{(1)} = -\frac{\xi_3^{(1)}}{2} \left(K_0(\xi_3^{(1)} \kappa) + K_2(\xi_3^{(1)} \kappa) \right),$$

$$U_{41}^{(2)} = -\frac{1}{\kappa} I_1(\xi_1^{(2)} \kappa)$$

$$U_{42}^{(2)} = -\frac{\xi_2^{(2)}}{2} \left(I_0(\xi_2^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_2^{(2)} \kappa) \right),$$

$$U_{43}^{(2)} = -\frac{\xi_3^{(2)}}{2} \left(I_0(\xi_3^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_3^{(2)} \kappa) \right)$$

$$U_{51}^{(1)} = \frac{\xi_1^{(1)}}{2} \left(K_0(\xi_1^{(1)} \kappa) + K_2(\xi_1^{(1)} \kappa) \right),$$

$$U_{52}^{(1)} = -\frac{1}{\kappa} K_1(\xi_2^{(1)} \kappa)$$

$$U_{53}^{(1)} = -\frac{1}{\kappa} K_1(\xi_3^{(1)} \kappa),$$

$$U_{51}^{(2)} = \frac{\xi_1^{(2)}}{2} \left(I_0(\xi_1^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_1^{(2)} \kappa) \right)$$

$$U_{52}^{(2)} = \frac{1}{\kappa} I_1(\xi_2^{(2)} \kappa),$$

$$U_{53}^{(2)} = \frac{1}{\kappa} I_1(\xi_3^{(2)} \kappa)$$

$$U_{61}^{(1)} = 0,$$

$$\begin{aligned}
U_{62}^{(1)} &= \frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \left(\xi_2^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_1 \left(\xi_2^{(1)} \kappa \right) \\
U_{63}^{(1)} &= \frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \left(\xi_3^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_1 \left(\xi_3^{(1)} \kappa \right), \\
U_{61}^{(2)} &= 0 \\
U_{62}^{(2)} &= - \frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \left(\xi_2^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_1 \left(\xi_2^{(2)} \kappa \right), \\
U_{63}^{(2)} &= - \frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_1 \left(\xi_3^{(2)} \kappa \right) \tag{E3.1}
\end{aligned}$$

(E3.1) ifadelerinde $\kappa = \alpha R = 2\pi R/\ell$ 'dir.

(2.46) temas koşullarında sağ tarafın fonksiyonlarının açık ifadeleri:

$$\begin{aligned}
U_{\pi 1}^{(1)} &= \frac{\mu^{(1)}}{\kappa} \left\{ \frac{4}{\kappa^2} K_1(\xi_1^{(1)} \kappa) + \frac{2\xi_1^{(1)}}{\kappa} \left(K_0(\xi_1^{(1)} \kappa) + K_2(\xi_1^{(1)} \kappa) \right) + \frac{\left(\xi_1^{(1)} \right)^2}{2} \left(3K_1(\xi_1^{(1)} \kappa) + K_3(\xi_1^{(1)} \kappa) \right) \right\} \\
U_{\pi 2}^{(1)} &= \frac{\lambda^{(1)} \xi_2^{(1)}}{\kappa^2} \left(K_0(\xi_2^{(1)} \kappa) + K_2(\xi_2^{(1)} \kappa) \right) + \frac{\lambda^{(1)} \left(\xi_2^{(1)} \right)^2}{4\kappa} \left(3K_1(\xi_2^{(1)} \kappa) + K_3(\xi_2^{(1)} \kappa) \right) \\
&\quad - \frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \left(\xi_2^{(1)} \right)^3}{8} \left(3K_0(\xi_2^{(1)} \kappa) + 4K_2(\xi_2^{(1)} \kappa) + K_4(\xi_2^{(1)} \kappa) \right) + \frac{2\lambda^{(1)}}{\kappa^3} K_1(\xi_2^{(1)} \kappa) \\
&\quad + \frac{\lambda^{(1)} \xi_2^{(1)} \left[(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \left(\xi_2^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} \right]}{2(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})} \left(K_0(\xi_2^{(1)} \kappa) + K_2(\xi_2^{(1)} \kappa) \right) \\
U_{\pi 3}^{(1)} &= \frac{\lambda^{(1)} \xi_3^{(1)}}{\kappa^2} \left(K_0(\xi_3^{(1)} \kappa) + K_2(\xi_3^{(1)} \kappa) \right) + \frac{\lambda^{(1)} \left(\xi_3^{(1)} \right)^2}{4\kappa} \left(3K_1(\xi_3^{(1)} \kappa) + K_3(\xi_3^{(1)} \kappa) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_3^{(1)})^3}{8} (3K_0(\xi_3^{(1)} \kappa) + 4K_2(\xi_3^{(1)} \kappa) + K_4(\xi_3^{(1)} \kappa)) + \frac{2\lambda^{(1)}}{\kappa^3} K_1(\xi_3^{(1)} \kappa) \\
& + \frac{\lambda^{(1)} \xi_3^{(1)} \left[(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_3^{(1)})^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} \right]}{2(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})} (K_0(\xi_3^{(1)} \kappa) + K_2(\xi_3^{(1)} \kappa)) \\
U_{\text{rr1}}^{(2)} = & \frac{\mu^{(2)}}{\kappa} \left\{ \frac{4}{\kappa^2} I_1(\xi_1^{(2)} \kappa) - \frac{2\xi_1^{(2)}}{\kappa} (I_0(\xi_1^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_1^{(2)} \kappa)) + \frac{(\xi_1^{(2)})^2}{2} (3I_1(\xi_1^{(2)} \kappa) + I_3(\xi_1^{(2)} \kappa)) \right\} \\
U_{\text{rr2}}^{(2)} = & - \frac{\lambda^{(2)} \xi_2^{(2)}}{\kappa^2} (I_0(\xi_2^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_2^{(2)} \kappa)) + \frac{\lambda^{(2)} (\xi_2^{(2)})^2}{4\kappa} (3I_1(\xi_2^{(2)} \kappa) + I_3(\xi_2^{(2)} \kappa)) \\
& + \frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_2^{(2)})^3}{8} (3I_0(\xi_2^{(2)} \kappa) + 4I_2(\xi_2^{(2)} \kappa) + I_4(\xi_2^{(2)} \kappa)) + \frac{2\lambda^{(2)}}{\kappa^3} I_1(\xi_2^{(2)} \kappa) \\
& - \frac{\lambda^{(2)} \xi_2^{(2)} \left[(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_2^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right]}{2(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})} (I_0(\xi_2^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_2^{(2)} \kappa)) \\
U_{\text{rr3}}^{(2)} = & - \frac{\lambda^{(2)} \xi_3^{(2)}}{\kappa^2} (I_0(\xi_3^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_3^{(2)} \kappa)) + \frac{\lambda^{(2)} (\xi_3^{(2)})^2}{4\kappa} (3I_1(\xi_3^{(2)} \kappa) + I_3(\xi_3^{(2)} \kappa)) \\
& + \frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_3^{(2)})^3}{8} (3I_0(\xi_3^{(2)} \kappa) + 4I_2(\xi_3^{(2)} \kappa) + I_4(\xi_3^{(2)} \kappa)) + \frac{2\lambda^{(2)}}{\kappa^3} I_1(\xi_3^{(2)} \kappa) \\
& - \frac{\lambda^{(2)} \xi_3^{(2)} \left[(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_3^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right]}{2(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})} (I_0(\xi_3^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_3^{(2)} \kappa)) \\
U_{\text{rr1}}^{(1)} = & \mu^{(1)} \left\{ \frac{2}{\kappa^3} K_1(\xi_1^{(1)} \kappa) + \frac{\xi_1^{(1)}}{\kappa^2} (K_0(\xi_1^{(1)} \kappa) + K_2(\xi_1^{(1)} \kappa)) + \frac{(\xi_1^{(1)})^2}{4\kappa} (3K_1(\xi_1^{(1)} \kappa) + K_3(\xi_1^{(1)} \kappa)) \right. \\
& \left. + \frac{(\xi_1^{(1)})^3}{8} (3K_0(\xi_1^{(1)} \kappa) + 4K_2(\xi_1^{(1)} \kappa) + K_4(\xi_1^{(1)} \kappa)) \right\}
\end{aligned}$$

$$U_{\text{rtr}2}^{(1)} = -\frac{\mu^{(1)}}{\kappa} \left\{ \frac{4}{\kappa^2} K_1(\xi_2^{(1)} \kappa) + \frac{2\xi_2^{(1)}}{\kappa} (K_0(\xi_2^{(1)} \kappa) + K_2(\xi_2^{(1)} \kappa)) + \frac{(\xi_2^{(1)})^2}{2} (3K_1(\xi_2^{(1)} \kappa) + K_3(\xi_2^{(1)} \kappa)) \right\}$$

$$U_{\text{rtr}3}^{(1)} = -\frac{\mu^{(1)}}{\kappa} \left\{ \frac{4}{\kappa^2} K_1(\xi_3^{(1)} \kappa) + \frac{2\xi_3^{(1)}}{\kappa} (K_0(\xi_3^{(1)} \kappa) + K_2(\xi_3^{(1)} \kappa)) + \frac{(\xi_3^{(1)})^2}{2} (3K_1(\xi_3^{(1)} \kappa) + K_3(\xi_3^{(1)} \kappa)) \right\}$$

$$U_{\text{rtr}1}^{(2)} = \mu^{(2)} \left\{ \frac{2}{\kappa^3} I_1(\xi_1^{(2)} \kappa) - \frac{\xi_1^{(2)}}{\kappa^2} (I_0(\xi_1^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_1^{(2)} \kappa)) + \frac{(\xi_1^{(2)})^2}{4\kappa} (3I_1(\xi_1^{(2)} \kappa) + I_3(\xi_1^{(2)} \kappa)) - \frac{(\xi_1^{(2)})^3}{8} (3I_0(\xi_1^{(2)} \kappa) + 4I_2(\xi_1^{(2)} \kappa) + I_4(\xi_1^{(2)} \kappa)) \right\}$$

$$U_{\text{rtr}2}^{(2)} = -\frac{\mu^{(2)}}{\kappa} \left\{ \frac{4}{\kappa^2} I_1(\xi_2^{(2)} \kappa) - \frac{2\xi_2^{(2)}}{\kappa} (I_0(\xi_2^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_2^{(2)} \kappa)) + \frac{(\xi_2^{(2)})^2}{2} (3I_1(\xi_2^{(2)} \kappa) + I_3(\xi_2^{(2)} \kappa)) \right\}$$

$$U_{\text{rtr}3}^{(2)} = -\frac{\mu^{(2)}}{\kappa} \left\{ \frac{4}{\kappa^2} I_1(\xi_3^{(2)} \kappa) - \frac{2\xi_3^{(2)}}{\kappa} (I_0(\xi_3^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_3^{(2)} \kappa)) + \frac{(\xi_3^{(2)})^2}{2} (3I_1(\xi_3^{(2)} \kappa) + I_3(\xi_3^{(2)} \kappa)) \right\}$$

$$U_{\text{tt}1}^{(1)} = \frac{\mu^{(1)}}{\kappa} \left\{ \frac{2}{\kappa} K_1(\xi_1^{(1)} \kappa) + \xi_1^{(1)} (K_0(\xi_1^{(1)} \kappa) + K_2(\xi_1^{(1)} \kappa)) \right\}$$

$$U_{\text{tt}2}^{(1)} = -\frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \xi_2^{(1)}}{2\kappa} (K_0(\xi_2^{(1)} \kappa) + K_2(\xi_2^{(1)} \kappa)) + \frac{\lambda^{(1)} (\xi_2^{(1)})^2}{4} (3K_1(\xi_2^{(1)} \kappa) + K_3(\xi_2^{(1)} \kappa))$$

$$-\frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})}{\kappa^2} K_1(\xi_2^{(1)} \kappa) - \frac{\lambda^{(1)} \left[(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_2^{(1)})^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} \right]}{(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})} K_1(\xi_2^{(1)} \kappa)$$

$$U_{\text{tt}3}^{(1)} = -\frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \xi_3^{(1)}}{2\kappa} (K_0(\xi_3^{(1)} \kappa) + K_2(\xi_3^{(1)} \kappa)) + \frac{\lambda^{(1)} (\xi_3^{(1)})^2}{4} (3K_1(\xi_3^{(1)} \kappa) + K_3(\xi_3^{(1)} \kappa))$$

$$-\frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})}{\kappa^2} K_1(\xi_3^{(1)} \kappa) - \frac{\lambda^{(1)} \left[(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_3^{(1)})^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} \right]}{(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})} K_1(\xi_3^{(1)} \kappa)$$

$$U_{tt1}^{(2)} = \frac{\mu^{(2)}}{\kappa} \left\{ \frac{2}{\kappa} I_1(\xi_1^{(2)} \kappa) - \xi_1^{(2)} \left(I_0(\xi_1^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_1^{(2)} \kappa) \right) \right\}$$

$$U_{tt2}^{(2)} = \frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \xi_2^{(2)}}{2\kappa} \left(I_0(\xi_2^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_2^{(2)} \kappa) \right) + \frac{\lambda^{(2)} (\xi_2^{(2)})^2}{4} \left(3I_1(\xi_2^{(2)} \kappa) + I_3(\xi_2^{(2)} \kappa) \right) \\ - \frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})}{\kappa^2} I_1(\xi_2^{(2)} \kappa) - \frac{\lambda^{(2)} \left[(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_2^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right]}{(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})} I_1(\xi_2^{(2)} \kappa)$$

$$U_{tt3}^{(2)} = \frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \xi_3^{(2)}}{2\kappa} \left(I_0(\xi_3^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_3^{(2)} \kappa) \right) + \frac{\lambda^{(2)} (\xi_3^{(2)})^2}{4} \left(3I_1(\xi_3^{(2)} \kappa) + I_3(\xi_3^{(2)} \kappa) \right) \\ - \frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})}{\kappa^2} I_1(\xi_3^{(2)} \kappa) - \frac{\lambda^{(2)} \left[(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_3^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right]}{(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})} I_1(\xi_3^{(2)} \kappa)$$

$$U_{t31}^{(1)} = \mu^{(1)} \frac{\xi_1^{(1)}}{2} \left(K_0(\xi_1^{(1)} \kappa) + K_2(\xi_1^{(1)} \kappa) \right)$$

$$U_{t32}^{(1)} = -\mu^{(1)} \frac{\lambda^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} + (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_2^{(1)})^2}{\kappa (\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})} K_1(\xi_2^{(1)} \kappa)$$

$$U_{t33}^{(1)} = -\mu^{(1)} \frac{\lambda^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} + (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_3^{(1)})^2}{\kappa (\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})} K_1(\xi_3^{(1)} \kappa)$$

$$U_{t31}^{(2)} = -\mu^{(2)} \frac{\xi_1^{(2)}}{2} \left(I_0(\xi_1^{(1)} \kappa) + I_2(\xi_1^{(1)} \kappa) \right)$$

$$U_{t32}^{(2)} = -\mu^{(2)} \frac{\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_2^{(2)})^2}{\kappa (\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})} I_1(\xi_2^{(2)} \kappa)$$

$$U_{t33}^{(2)} = -\mu^{(2)} \frac{\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_3^{(2)})^2}{\kappa (\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})} I_1(\xi_3^{(2)} \kappa)$$

$$U_{r331}^{(1)} = -\frac{\mu^{(1)}}{\kappa} \left\{ \frac{1}{\kappa} K_1(\xi_1^{(1)} \kappa) + \frac{\xi_1^{(1)}}{2} (K_0(\xi_1^{(1)} \kappa) + K_2(\xi_1^{(1)} \kappa)) \right\}$$

$$U_{r332}^{(1)} = \mu^{(1)} \frac{\left(\xi_2^{(1)} \right)^2 \left[\lambda^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} + \left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_2^{(1)} \right)^2 \right]}{4 \left(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)} \right)} \left(3K_1(\xi_2^{(1)} \kappa) + K_3(\xi_2^{(1)} \kappa) \right)$$

$$U_{r333}^{(1)} = \mu^{(1)} \frac{\left(\xi_3^{(1)} \right)^2 \left[\lambda^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} + \left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_3^{(1)} \right)^2 \right]}{4 \left(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)} \right)} \left(3K_1(\xi_3^{(1)} \kappa) + K_3(\xi_3^{(1)} \kappa) \right)$$

$$U_{r331}^{(2)} = -\frac{\mu^{(2)}}{\kappa} \left\{ \frac{1}{\kappa} I_1(\xi_1^{(2)} \kappa) - \frac{\xi_1^{(2)}}{2} (I_0(\xi_1^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_1^{(2)} \kappa)) \right\}$$

$$U_{r332}^{(2)} = \mu^{(2)} \frac{\left(\xi_2^{(2)} \right)^2 \left[\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} + \left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_2^{(2)} \right)^2 \right]}{4 \left(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)} \right)} \left(3I_1(\xi_2^{(2)} \kappa) + I_3(\xi_2^{(2)} \kappa) \right)$$

$$U_{r333}^{(2)} = \mu^{(2)} \frac{\left(\xi_3^{(2)} \right)^2 \left[\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} + \left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 \right]}{4 \left(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)} \right)} \left(3I_1(\xi_3^{(2)} \kappa) + I_3(\xi_3^{(2)} \kappa) \right)$$

$$U_{331}^{(1)} = 0, \quad U_{331}^{(2)} = 0$$

$$U_{332}^{(1)} = -\frac{\lambda^{(1)} \xi_2^{(1)}}{2\kappa} (K_0(\xi_2^{(1)} \kappa) + K_2(\xi_2^{(1)} \kappa)) + \frac{\lambda^{(1)} \left(\xi_2^{(1)} \right)^2}{4} (3K_1(\xi_2^{(1)} \kappa) + K_3(\xi_2^{(1)} \kappa))$$

$$- \frac{\lambda^{(1)}}{\kappa^2} K_1(\xi_2^{(1)} \kappa) - \frac{\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left[\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_2^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} \right]}{\left(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)} \right)} K_1(\xi_2^{(1)} \kappa)$$

$$U_{333}^{(1)} = -\frac{\lambda^{(1)} \xi_3^{(1)}}{2\kappa} (K_0(\xi_3^{(1)} \kappa) + K_2(\xi_3^{(1)} \kappa)) + \frac{\lambda^{(1)} \left(\xi_3^{(1)} \right)^2}{4} (3K_1(\xi_3^{(1)} \kappa) + K_3(\xi_3^{(1)} \kappa))$$

$$- \frac{\lambda^{(1)}}{\kappa^2} K_1(\xi_3^{(1)} \kappa) - \frac{\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left[\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_3^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} \right]}{\left(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)} \right)} K_1(\xi_3^{(1)} \kappa)$$

$$U_{\text{nt}1}^{(1)} = -\frac{1}{\kappa} \left\{ \frac{1}{\kappa} K_1(\xi_1^{(1)} \kappa) + \frac{\xi_1^{(1)}}{2} \left(K_0(\xi_1^{(1)} \kappa) + K_2(\xi_1^{(1)} \kappa) \right) \right\}$$

$$U_{\text{nt}2}^{(1)} = \frac{(\xi_2^{(1)})^2}{4} \left(3K_1(\xi_2^{(1)} \kappa) + K_3(\xi_2^{(1)} \kappa) \right)$$

$$U_{\text{nt}3}^{(1)} = \frac{(\xi_3^{(1)})^2}{4} \left(3K_1(\xi_3^{(1)} \kappa) + K_3(\xi_3^{(1)} \kappa) \right)$$

$$U_{\text{nt}1}^{(2)} = -\frac{1}{\kappa} \left\{ \frac{1}{\kappa} I_1(\xi_1^{(2)} \kappa) - \frac{\xi_1^{(2)}}{2} \left(I_0(\xi_1^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_1^{(2)} \kappa) \right) \right\}$$

$$U_{\text{nt}2}^{(2)} = \frac{(\xi_2^{(2)})^2}{4} \left(3I_1(\xi_2^{(2)} \kappa) + I_3(\xi_2^{(2)} \kappa) \right)$$

$$U_{\text{nt}3}^{(2)} = \frac{(\xi_3^{(2)})^2}{4} \left(3I_1(\xi_3^{(2)} \kappa) + I_3(\xi_3^{(2)} \kappa) \right)$$

$$U_{\text{tt}1}^{(1)} = -\frac{(\xi_1^{(1)})^2}{4} \left(3K_1(\xi_1^{(1)} \kappa) + K_3(\xi_1^{(1)} \kappa) \right)$$

$$U_{\text{tt}2}^{(1)} = \frac{1}{\kappa} \left\{ \frac{1}{\kappa} K_1(\xi_2^{(1)} \kappa) + \frac{\xi_2^{(1)}}{2} \left(K_0(\xi_2^{(1)} \kappa) + K_2(\xi_2^{(1)} \kappa) \right) \right\}$$

$$U_{\text{tt}3}^{(1)} = \frac{1}{\kappa} \left\{ \frac{1}{\kappa} K_1(\xi_3^{(1)} \kappa) + \frac{\xi_3^{(1)}}{2} \left(K_0(\xi_3^{(1)} \kappa) + K_2(\xi_3^{(1)} \kappa) \right) \right\}$$

$$U_{\text{tt}1}^{(2)} = -\frac{(\xi_1^{(2)})^2}{4} \left(3I_1(\xi_1^{(2)} \kappa) + I_3(\xi_1^{(2)} \kappa) \right)$$

$$U_{\text{tt}2}^{(2)} = \frac{1}{\kappa} \left\{ \frac{1}{\kappa} I_1(\xi_2^{(2)} \kappa) - \frac{\xi_2^{(2)}}{2} \left(I_0(\xi_2^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_2^{(2)} \kappa) \right) \right\}$$

$$U_{\text{tt}3}^{(2)} = \frac{1}{\kappa} \left\{ \frac{1}{\kappa} I_1(\xi_3^{(2)} \kappa) - \frac{\xi_3^{(2)}}{2} \left(I_0(\xi_3^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_3^{(2)} \kappa) \right) \right\}$$

$$U_{3r1}^{(1)} = 0, \quad U_{3r1}^{(2)} = 0$$

$$U_{3r2}^{(1)} = -\frac{\xi_2^{(1)} \left[\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_2^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} \right]}{2 \left(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)} \right)} \left(K_0 \left(\xi_2^{(1)} \kappa \right) + K_1 \left(\xi_2^{(1)} \kappa \right) \right)$$

$$U_{3r2}^{(1)} = -\frac{\xi_3^{(1)} \left[\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_3^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} \right]}{2 \left(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)} \right)} \left(K_0 \left(\xi_3^{(1)} \kappa \right) + K_1 \left(\xi_3^{(1)} \kappa \right) \right)$$

$$U_{3r2}^{(2)} = -\frac{\xi_2^{(2)} \left[\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_2^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right]}{2 \left(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)} \right)} \left(K_0 \left(\xi_2^{(2)} \kappa \right) + K_1 \left(\xi_2^{(2)} \kappa \right) \right)$$

$$U_{3r3}^{(2)} = -\frac{\xi_3^{(2)} \left[\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right]}{2 \left(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)} \right)} \left(K_0 \left(\xi_3^{(2)} \kappa \right) + K_1 \left(\xi_3^{(2)} \kappa \right) \right) \quad (E3.2)$$

(2.50) ifadelerindeki fonksiyonların açık şeki:

$$T_{11}^{(1)} = \frac{8\mu^{(1)}}{\kappa^2} \left(v^{(1)} - 1 \right), \quad T_{12}^{(1)} = 0, \quad T_{13}^{(1)} = 0,$$

$$T_{11}^{(2)} = 4 \left(1 - 2v^{(1)} \right) \left(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)} \right), \quad T_{12}^{(2)} = 0, \quad T_{13}^{(2)} = 0$$

$$T_{21}^{(1)} = 0, \quad T_{22}^{(1)} = \frac{4}{\kappa^2} \left(2v^{(1)} \left(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)} \right) - \left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \right), \quad T_{23}^{(1)} = \frac{12\mu^{(1)}}{\kappa^4} \left(2v^{(1)} - 3 \right)$$

$$T_{21}^{(2)} = 0, \quad T_{22}^{(2)} = 2\mu^{(2)} \left(2 - 4v^{(2)} \right), \quad T_{23}^{(2)} = 12\kappa^2 \left(\lambda^{(2)} - 2v^{(2)} \left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \right)$$

$$T_{31}^{(1)} = 0, \quad T_{32}^{(1)} = -\mu^{(1)} \frac{4}{\kappa^2}, \quad T_{33}^{(1)} = \mu^{(1)} \frac{12}{\kappa^4} \left(12v^{(1)} - 3 \right)$$

$$T_{31}^{(2)} = 0, \quad T_{32}^{(2)} = \mu^{(2)} 4 \left(2v^{(2)} - 1 \right), \quad T_{33}^{(2)} = \mu^{(2)} 12\kappa^2$$

$$T_{41}^{(1)} = \frac{4}{\kappa} \left(1 - v^{(1)} \right), \quad T_{42}^{(1)} = 0, \quad T_{43}^{(1)} = 0$$

$$T_{41}^{(2)} = 2\kappa \left(1 - 2v^{(2)} \right), \quad T_{42}^{(2)} = 0, \quad T_{43}^{(2)} = 0$$

$$T_{51}^{(1)} = 0, \quad T_{52}^{(1)} = \frac{4}{\kappa} (1 - v^{(1)}), \quad T_{53}^{(1)} = \frac{2}{\kappa^3} (3 - 2v^{(1)})$$

$$T_{51}^{(2)} = 0, \quad T_{52}^{(2)} = 2\kappa (1 - 2v^{(2)}), \quad T_{53}^{(2)} = -4v^{(2)} \kappa^3$$

$$T_{61}^{(1)} = 0, \quad T_{62}^{(1)} = \frac{2}{\kappa} (2v^{(1)} - 1), \quad T_{63}^{(1)} = \frac{2}{\kappa^3} (3 - 2v^{(1)})$$

$$T_{62}^{(1)} = 0, \quad T_{62}^{(2)} = 2\kappa (2v^{(2)} - 1), \quad T_{63}^{(2)} = 2\kappa^3 (3 - 2v^{(2)}) \quad (E3.3)$$

(2.53) denklemlerindeki fonksiyonların açık şekli:

$$M_{112}^{(1)} = 0, \quad M_{122}^{(1)} = 0, \quad M_{132}^{(1)} = 0$$

$$M_{120}^{(1)} = \frac{4\xi_2^{(1)}\lambda^{(1)}}{\kappa} K_1(2\xi_2^{(1)}\kappa) - 4(\xi_2^{(1)})^2 (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \left(K_0(2\xi_2^{(1)}\kappa) + K_2(2\xi_2^{(1)}\kappa) \right) \\ + 8\lambda^{(1)} \frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_2^{(1)})^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_0(2\xi_2^{(1)}\kappa)$$

$$M_{130}^{(1)} = \frac{4\xi_3^{(1)}\lambda^{(1)}}{\kappa} K_1(2\xi_3^{(1)}\kappa) - 4(\xi_3^{(1)})^2 (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \left(K_0(2\xi_3^{(1)}\kappa) + K_2(2\xi_3^{(1)}\kappa) \right) \\ + 8\lambda^{(1)} \frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_3^{(1)})^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_0(2\xi_3^{(1)}\kappa)$$

$$M_{112}^{(2)} = 0, \quad M_{122}^{(2)} = 0, \quad M_{132}^{(2)} = 0$$

$$M_{120}^{(2)} = \frac{4\xi_2^{(2)}\lambda^{(2)}}{\kappa} I_1(2\xi_2^{(2)}\kappa) + 4(\xi_2^{(2)})^2 (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \left(I_0(2\xi_2^{(2)}\kappa) + I_2(2\xi_2^{(2)}\kappa) \right) \\ - 8\lambda^{(2)} \frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_2^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_0(2\xi_2^{(2)}\kappa)$$

$$M_{130}^{(2)} = \frac{4\xi_3^{(2)}\lambda^{(2)}}{\kappa} I_1(2\xi_3^{(2)}\kappa) + 4(\xi_3^{(2)})^2 (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \left(I_0(2\xi_3^{(2)}\kappa) + I_2(2\xi_3^{(2)}\kappa) \right)$$

$$-8\lambda^{(2)} \frac{\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}\right) \left(\xi_3^{(2)}\right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_0 \left(2\xi_3^{(2)} \kappa\right)$$

$$M_{212}^{(1)} = -\frac{4\mu^{(1)}}{\kappa^2} K_2 \left(2\xi_1^{(1)} \kappa\right) - \frac{4\mu^{(1)} \xi_1^{(1)}}{\kappa} \left(K_1 \left(2\xi_1^{(1)} \kappa\right) + K_3 \left(2\xi_1^{(1)} \kappa\right)\right)$$

$$M_{222}^{(1)} = \frac{2\xi_2^{(1)} \lambda^{(1)}}{\kappa} \left(K_1 \left(2\xi_2^{(1)} \kappa\right) + K_3 \left(2\xi_2^{(1)} \kappa\right)\right) - 2\left(\xi_2^{(1)}\right)^3 \left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}\right) \left(K_0 \left(2\xi_2^{(1)} \kappa\right) + 2K_2 \left(2\xi_2^{(1)} \kappa\right) + K_4 \left(2\xi_2^{(1)} \kappa\right)\right) + \frac{8\lambda^{(1)}}{\kappa^2} K_2 \left(2\xi_2^{(1)} \kappa\right) + 8\lambda^{(1)} \frac{\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}\right) \left(\xi_2^{(1)}\right)^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_2 \left(2\xi_2^{(1)} \kappa\right)$$

$$M_{232}^{(1)} = \frac{2\xi_3^{(1)} \lambda^{(1)}}{\kappa} \left(K_1 \left(2\xi_3^{(1)} \kappa\right) + K_3 \left(2\xi_3^{(1)} \kappa\right)\right) - 2\left(\xi_3^{(1)}\right)^3 \left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}\right) \left(K_0 \left(2\xi_3^{(1)} \kappa\right) + 2K_2 \left(2\xi_3^{(1)} \kappa\right) + K_4 \left(2\xi_3^{(1)} \kappa\right)\right) + \frac{8\lambda^{(1)}}{\kappa^2} K_2 \left(2\xi_3^{(1)} \kappa\right) + 8\lambda^{(1)} \frac{\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}\right) \left(\xi_3^{(1)}\right)^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_2 \left(2\xi_3^{(1)} \kappa\right)$$

$$M_{220}^{(1)} = 0, \quad M_{230}^{(1)} = 0$$

$$M_{212}^{(2)} = \frac{4\mu^{(2)}}{\kappa^2} I_2 \left(2\xi_1^{(2)} \kappa\right) - \frac{4\mu^{(2)} \xi_1^{(2)}}{\kappa} \left(I_1 \left(2\xi_1^{(2)} \kappa\right) + I_3 \left(2\xi_1^{(2)} \kappa\right)\right)$$

$$M_{222}^{(2)} = \frac{2\xi_2^{(2)} \lambda^{(2)}}{\kappa} \left(I_1 \left(2\xi_2^{(2)} \kappa\right) + I_3 \left(2\xi_2^{(2)} \kappa\right)\right) + 2\left(\xi_2^{(2)}\right)^3 \left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}\right) \left(I_0 \left(2\xi_2^{(2)} \kappa\right) + 2I_2 \left(2\xi_2^{(2)} \kappa\right) + I_4 \left(2\xi_2^{(2)} \kappa\right)\right) - \frac{8\lambda^{(2)}}{\kappa^2} I_2 \left(2\xi_2^{(2)} \kappa\right) - 8\lambda^{(2)} \frac{\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}\right) \left(\xi_2^{(2)}\right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_2 \left(2\xi_2^{(2)} \kappa\right)$$

$$M_{232}^{(2)} = \frac{2\xi_3^{(2)} \lambda^{(2)}}{\kappa} \left(I_1 \left(2\xi_3^{(2)} \kappa\right) + I_3 \left(2\xi_3^{(2)} \kappa\right)\right) + 2\left(\xi_3^{(2)}\right)^3 \left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}\right) \left(I_0 \left(2\xi_3^{(2)} \kappa\right) + 2I_2 \left(2\xi_3^{(2)} \kappa\right) + I_4 \left(2\xi_3^{(2)} \kappa\right)\right) - \frac{8\lambda^{(2)}}{\kappa^2} I_2 \left(2\xi_3^{(2)} \kappa\right) - 8\lambda^{(2)} \frac{\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}\right) \left(\xi_3^{(2)}\right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_2 \left(2\xi_3^{(2)} \kappa\right)$$

$$M_{220}^{(2)} = 0, \quad M_{230}^{(2)} = 0$$

$$M_{312}^{(1)} = -\mu^{(1)} \left[\frac{4}{\kappa^2} K_2 \left(2\xi_1^{(1)} \kappa \right) - \frac{\xi_1^{(1)}}{\kappa} \left(K_1 \left(2\xi_1^{(1)} \kappa \right) + K_3 \left(2\xi_1^{(1)} \kappa \right) \right), \right. \\ \left. + \left(\xi_1^{(1)} \right)^2 \left(K_0 \left(2\xi_1^{(1)} \kappa \right) + 2K_2 \left(2\xi_1^{(1)} \kappa \right) + K_4 \left(2\xi_1^{(1)} \kappa \right) \right) \right]$$

$$M_{322}^{(1)} = -\mu^{(1)} \left[\frac{8\xi_2^{(1)}}{\kappa} \left(K_1 \left(2\xi_2^{(1)} \kappa \right) + K_3 \left(2\xi_2^{(1)} \kappa \right) \right) + \frac{8}{\kappa^2} K_2 \left(2\xi_2^{(1)} \kappa \right) \right]$$

$$M_{323}^{(1)} = -\mu^{(1)} \left[\frac{8\xi_3^{(1)}}{\kappa} \left(K_1 \left(2\xi_3^{(1)} \kappa \right) + K_3 \left(2\xi_3^{(1)} \kappa \right) \right) + \frac{8}{\kappa^2} K_3 \left(2\xi_2^{(1)} \kappa \right) \right]$$

$$M_{320}^{(1)} = 0, \quad M_{330}^{(1)} = 0$$

$$M_{312}^{(2)} = -\mu^{(2)} \left[\frac{4}{\kappa^2} I_2 \left(2\xi_1^{(2)} \kappa \right) + \frac{\xi_1^{(2)}}{\kappa} \left(I_1 \left(2\xi_1^{(2)} \kappa \right) + I_3 \left(2\xi_1^{(2)} \kappa \right) \right), \right. \\ \left. - \left(\xi_1^{(2)} \right)^2 \left(I_0 \left(2\xi_1^{(2)} \kappa \right) + 2I_2 \left(2\xi_1^{(2)} \kappa \right) + I_4 \left(2\xi_1^{(2)} \kappa \right) \right) \right]$$

$$M_{322}^{(2)} = -\mu^{(2)} \left[\frac{8\xi_2^{(2)}}{\kappa} \left(I_1 \left(2\xi_2^{(2)} \kappa \right) + I_3 \left(2\xi_2^{(2)} \kappa \right) \right) - \frac{8}{\kappa^2} I_2 \left(2\xi_2^{(2)} \kappa \right) \right]$$

$$M_{332}^{(2)} = -\mu^{(2)} \left[\frac{8\xi_3^{(2)}}{\kappa} \left(I_1 \left(2\xi_3^{(2)} \kappa \right) + I_3 \left(2\xi_3^{(2)} \kappa \right) \right) - \frac{8}{\kappa^2} I_2 \left(2\xi_3^{(2)} \kappa \right) \right]$$

$$M_{320}^{(2)} = 0, \quad M_{330}^{(2)} = 0$$

$$M_{412}^{(1)} = 0, \quad M_{422}^{(1)} = 0, \quad M_{432}^{(1)} = 0$$

$$M_{420}^{(1)} = -8\mu^{(1)} \xi_2^{(1)} \frac{\lambda^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} + \left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_2^{(1)} \right)^2}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_1 \left(2\xi_2^{(1)} \kappa \right)$$

$$M_{430}^{(1)} = -8\mu^{(1)}\xi_3^{(1)} \frac{\lambda^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} + (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})\left(\xi_3^{(1)}\right)^2}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_1\left(2\xi_3^{(1)}\kappa\right)$$

$$M_{412}^{(2)} = 0, \quad M_{422}^{(2)} = 0, \quad M_{432}^{(2)} = 0$$

$$M_{420}^{(2)} = -8\mu^{(2)}\xi_2^{(2)} \frac{\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})\left(\xi_2^{(2)}\right)^2}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_1\left(2\xi_2^{(2)}\kappa\right)$$

$$M_{430}^{(2)} = -8\mu^{(2)}\xi_3^{(2)} \frac{\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})\left(\xi_3^{(2)}\right)^2}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_1\left(2\xi_3^{(2)}\kappa\right)$$

$$M_{512}^{(1)} = -\frac{4\mu^{(1)}}{\kappa} K_2\left(2\xi_1^{(1)}\kappa\right)$$

$$M_{522}^{(1)} = -4\mu^{(1)}\xi_2^{(1)} \frac{\lambda^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} + (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})\left(\xi_2^{(1)}\right)^2}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} \left(K_1\left(2\xi_2^{(1)}\kappa\right) + K_3\left(2\xi_2^{(1)}\kappa\right)\right)$$

$$M_{532}^{(1)} = -4\mu^{(1)}\xi_3^{(1)} \frac{\lambda^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} + (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})\left(\xi_3^{(1)}\right)^2}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} \left(K_1\left(2\xi_3^{(1)}\kappa\right) + K_3\left(2\xi_3^{(1)}\kappa\right)\right)$$

$$M_{520}^{(1)} = 0, \quad M_{530}^{(1)} = 0,$$

$$M_{512}^{(2)} = \frac{4\mu^{(2)}}{\kappa} I_2\left(2\xi_1^{(2)}\kappa\right)$$

$$M_{522}^{(2)} = -4\mu^{(2)}\xi_2^{(2)} \frac{\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})\left(\xi_2^{(2)}\right)^2}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} \left(I_1\left(2\xi_2^{(2)}\kappa\right) + I_3\left(2\xi_2^{(2)}\kappa\right)\right)$$

$$M_{532}^{(2)} = -4\mu^{(2)}\xi_3^{(2)} \frac{\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})\left(\xi_3^{(2)}\right)^2}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} \left(I_1\left(2\xi_3^{(2)}\kappa\right) + I_3\left(2\xi_3^{(2)}\kappa\right)\right)$$

$$M_{520}^{(2)} = 0, \quad M_{530}^{(2)} = 0$$

$$M_{612}^{(1)} = 0, \quad M_{622}^{(1)} = 0, \quad M_{632}^{(1)} = 0, \quad M_{620}^{(1)} = 4\xi_2^{(1)}K_1\left(2\xi_2^{(1)}\kappa\right), \quad M_{630}^{(1)} = 4\xi_3^{(1)}K_1\left(2\xi_3^{(1)}\kappa\right)$$

$$M_{612}^{(2)} = 0, M_{622}^{(2)} = 0, M_{632}^{(2)} = 0, M_{620}^{(2)} = 4\xi_2^{(2)} I_1(2\xi_2^{(2)} \kappa), M_{630}^{(2)} = 4\xi_3^{(2)} I_1(2\xi_3^{(2)} \kappa)$$

$$M_{712}^{(1)} = \frac{2}{\kappa} K_2(2\xi_1^{(1)} \kappa), M_{722}^{(1)} = 2\xi_2^{(1)} \left(K_1(2\xi_2^{(1)} \kappa) + K_3(2\xi_2^{(1)} \kappa) \right)$$

$$M_{732}^{(1)} = 2\xi_3^{(1)} \left(K_1(2\xi_3^{(1)} \kappa) + K_3(2\xi_3^{(1)} \kappa) \right), M_{720}^{(1)} = 0, M_{730}^{(1)} = 0$$

$$M_{712}^{(2)} = -\frac{2}{\kappa} I_2(2\xi_1^{(2)} \kappa), M_{722}^{(2)} = 2\xi_2^{(2)} \left(I_1(2\xi_2^{(2)} \kappa) + I_3(2\xi_2^{(2)} \kappa) \right)$$

$$M_{732}^{(2)} = 2\xi_3^{(2)} \left(I_1(2\xi_3^{(2)} \kappa) + I_3(2\xi_3^{(2)} \kappa) \right), M_{720}^{(2)} = 0, M_{730}^{(2)} = 0$$

$$M_{812}^{(1)} = \xi_1^{(1)} \left(K_1(2\xi_1^{(1)} \kappa) + K_3(2\xi_1^{(1)} \kappa) \right), M_{822}^{(1)} = \frac{4}{\kappa} K_2(2\xi_2^{(1)} \kappa), M_{832}^{(1)} = \frac{4}{\kappa} K_2(2\xi_3^{(1)} \kappa)$$

$$M_{820}^{(1)} = 0, M_{830}^{(1)} = 0, M_{812}^{(2)} = \xi_1^{(2)} \left(I_1(2\xi_1^{(2)} \kappa) + I_3(2\xi_1^{(2)} \kappa) \right), M_{822}^{(2)} = -\frac{4}{\kappa} I_2(2\xi_2^{(2)} \kappa)$$

$$M_{832}^{(2)} = -\frac{4}{\kappa} I_2(2\xi_3^{(2)} \kappa), M_{820}^{(2)} = 0, M_{830}^{(2)} = 0$$

$$M_{912}^{(1)} = 0, M_{922}^{(1)} = 0, M_{932}^{(1)} = 0, M_{920}^{(1)} = 4 \frac{\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_2^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_0(2\xi_2^{(1)} \kappa)$$

$$M_{930}^{(1)} = 4 \frac{\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_3^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_0(2\xi_3^{(1)} \kappa), M_{912}^{(2)} = 0, M_{922}^{(2)} = 0, M_{932}^{(2)} = 0$$

$$M_{920}^{(2)} = -4 \frac{\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_2^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_0(2\xi_2^{(2)} \kappa)$$

$$M_{930}^{(2)} = -4 \frac{\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_0(2\xi_3^{(2)} \kappa),$$

$$M_{1012}^{(1)} = 0, M_{1020}^{(1)} = 0, M_{1030}^{(1)} = 0$$

$$M_{1022}^{(1)} = 4 \frac{\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_2^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_2(2\xi_2^{(1)} \kappa)$$

$$M_{1032}^{(1)} = 4 \frac{\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}\right) \left(\xi_3^{(1)}\right)^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_2 \left(2\xi_3^{(1)} \kappa\right)$$

$$M_{1012}^{(2)} = 0, \quad M_{1020}^{(2)} = 0, \quad M_{1030}^{(2)} = 0$$

$$M_{1022}^{(2)} = -4 \frac{\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}\right) \left(\xi_2^{(2)}\right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_2 \left(2\xi_2^{(2)} \kappa\right)$$

$$M_{1032}^{(2)} = -4 \frac{\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}\right) \left(\xi_3^{(2)}\right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_2 \left(2\xi_3^{(2)} \kappa\right) \quad (\text{E3.4})$$

Ek 4 Schapery Yöntemi

Schapery yöntemi

$$\bar{f}(\lambda) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\lambda t} dt \quad (E4.1)$$

şeklinde verilen integral denklemin bazı durumlarda yaklaşık çözümünü elde etmeği sağlamaktadır. Bu yöntem Laplace dönüşümlerinin sadece sayısal değerleri belli olduğu durumlarda da uygun ters Laplace dönüşümlerinin sayısal değerlerinin bulunmasına uygulanabilir.

(E4.1)'de verilen $\bar{f}(\lambda)$ ve aranan $f(t)$ fonksiyonlarının

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty); \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \bar{f}(\lambda) = f(\infty); f(\infty) < \infty \quad (E4.2)$$

koşullarını sağladığı ve $f(\infty)$ değerinin verildiği kabul edilmektedir. Bundan sonra

$$\delta f(t) = f(t) - f(\infty) \quad (E4.3)$$

fonksiyonunun Laplace dönüşümü olan

$$\overline{\delta f}(\lambda) = \bar{f}(\lambda) - \frac{1}{\lambda} f(\infty) \quad (E4.4)$$

ifadesinin λ 'nın keyfi λ_i değerlerinde bilindiği kabul edilmektedir. Bu durumda (E4.3) ile belirlenen $\delta f(t)$ fonksiyonunun yaklaşık ifadesi

$$\delta f_D(t) = \sum_{i=1}^N S_i e^{-\lambda_i t} \quad (E4.5)$$

şeklinde aranmaktadır. Burada λ_i ve S_i 'ler gerçel sayılardır. (E4.5)'deki bilinmeyen S_i katsayılarının elde edilmesi için en küçük kareler yöntemi

$$E = \int_0^{\infty} [\delta f(t) - \delta f_D(t)]^2 dt \quad (E4.6)$$

fonksiyoneline uygulanır ve

$$\frac{\partial E}{\partial S_i} = 0 \quad (E4.7)$$

koşulundan

$$\sum_{j=1}^N \frac{S_j}{\lambda_j + \frac{1}{\lambda_i}} = \lambda \delta f \Big|_{\lambda=\lambda_i} \quad (\text{E4.8})$$

denklemleri elde edilir. (E4.8)'den S_j 'ler bulunduktan sonra aranan $f(t)$ fonksiyonu

$$f(t) \approx \delta f_D(t) + f(\infty) \quad (\text{E4.9})$$

formülünden elde edilir.



Ek 5 Bölüm 3’de Yer Alan Denklemlerdeki Fonksiyonların Açık İfadeleri

(3.38)’deki $F_{ij}^{(k),1}$, $F_{nij}^{(k),1}$ fonksiyonlarının açık ifadeleri:

$$F_{n1j}^{(1),1} = F_{t1j}^{(2),1} \left(K_{n+t}(\xi_1^{(1)} \frac{R_{12}}{R} \kappa) - K_{n-t}(\xi_1^{(1)} \frac{R_{12}}{R} \kappa) \right)$$

$$F_{n2j}^{(1),1} = -F_{t2j}^{(2),1} \left(K_{n+t}(\xi_2^{(1)} \frac{R_{12}}{R} \kappa) + K_{n-t}(\xi_2^{(1)} \frac{R_{12}}{R} \kappa) \right)$$

$$F_{n3j}^{(1),1} = -F_{t3j}^{(2),1} \left(K_{n+t}(\xi_3^{(1)} \frac{R_{12}}{R} \kappa) + K_{n-t}(\xi_3^{(1)} \frac{R_{12}}{R} \kappa) \right), \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$F_{t11}^{(1),1} = \frac{2\mu^{(1)}t}{\kappa^2} K_t(\xi_1^{(1)} \kappa) + \frac{\mu^{(1)}\xi_1^{(1)}t}{\kappa} \left(K_{t-1}(\xi_1^{(1)} \kappa) + K_{t+1}(\xi_1^{(1)} \kappa) \right)$$

$$F_{t21}^{(1),1} = -\frac{\lambda^{(1)}\xi_2^{(1)}}{2\kappa} \left(K_{t-1}(\xi_2^{(1)} \kappa) + K_{t+1}(\xi_2^{(1)} \kappa) \right) + \frac{(\xi_2^{(1)})^2 (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})}{4} \left(K_{t-2}(\xi_2^{(1)} \kappa) + 2K_t(\xi_2^{(1)} \kappa) \right. \\ \left. + K_{t+2}(\xi_2^{(1)} \kappa) \right) - \frac{\lambda^{(1)}t^2}{\kappa^2} K_t(\xi_2^{(1)} \kappa) - \frac{\lambda^{(1)} \left[(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_2^{(1)})^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} \right]}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_t(\xi_2^{(1)} \kappa)$$

$$F_{t31}^{(1),1} = -\frac{\lambda^{(1)}\xi_3^{(1)}}{2\kappa} \left(K_{t-1}(\xi_3^{(1)} \kappa) + K_{t+1}(\xi_3^{(1)} \kappa) \right) + \frac{(\xi_3^{(1)})^2 (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})}{4} \left(K_{t-2}(\xi_3^{(1)} \kappa) + 2K_t(\xi_3^{(1)} \kappa) \right. \\ \left. + K_{t+2}(\xi_3^{(1)} \kappa) \right) - \frac{\lambda^{(1)}t^2}{\kappa^2} K_t(\xi_3^{(1)} \kappa) - \frac{\lambda^{(1)} \left[(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_3^{(1)})^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} \right]}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_t(\xi_3^{(1)} \kappa)$$

$$F_{t11}^{(2),1} = \frac{2\mu^{(2)}t}{\kappa^2} I_t(\xi_1^{(2)} \kappa) - \frac{\mu^{(2)}\xi_1^{(2)}t}{\kappa} \left(I_{t-1}(\xi_1^{(2)} \kappa) + I_{t+1}(\xi_1^{(2)} \kappa) \right)$$

$$F_{t21}^{(2),1} = \frac{\lambda^{(2)}\xi_2^{(2)}}{2\kappa} \left(I_{t-1}(\xi_2^{(2)} \kappa) + I_{t+1}(\xi_2^{(2)} \kappa) \right) + \frac{(\xi_2^{(2)})^2 (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})}{4} \left(I_{t-2}(\xi_2^{(2)} \kappa) + 2I_t(\xi_2^{(2)} \kappa) \right. \\ \left. + I_{t+2}(\xi_2^{(2)} \kappa) \right) - \frac{\lambda^{(2)}t^2}{\kappa^2} I_t(\xi_2^{(2)} \kappa) - \frac{\lambda^{(2)} \left[(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_2^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right]}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_t(\xi_2^{(2)} \kappa)$$

$$F_{t31}^{(2),1} = \frac{\lambda^{(2)}\xi_3^{(2)}}{2\kappa} \left(I_{t-1}(\xi_3^{(2)}\kappa) + I_{t+1}(\xi_3^{(2)}\kappa) \right) + \frac{\left(\xi_3^{(2)}\right)^2 \left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}\right)}{4} \left(I_{t-2}(\xi_3^{(2)}\kappa) + 2I_t(\xi_3^{(2)}\kappa) \right. \\ \left. + I_{t+2}(\xi_3^{(2)}\kappa) \right) - \frac{\lambda^{(2)}t^2}{\kappa^2} I_t(\xi_3^{(2)}\kappa) - \frac{\lambda^{(2)} \left[\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}\right) \left(\xi_3^{(2)}\right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right]}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_t(\xi_3^{(2)}\kappa)$$

$$F_{t12}^{(1),1} = \mu^{(1)} \left[\frac{t^2}{\kappa^2} K_t(\xi_1^{(1)}\kappa) + \frac{\left(\xi_1^{(1)}\right)^2}{4} \left(K_{t-2}(\xi_1^{(1)}\kappa) + 2K_t(\xi_1^{(1)}\kappa) + K_{t+2}(\xi_1^{(1)}\kappa) \right) \right. \\ \left. + \frac{\xi_1^{(1)}}{2\kappa} \left(K_{t-1}(\xi_1^{(1)}\kappa) + K_{t+1}(\xi_1^{(1)}\kappa) \right) \right]$$

$$F_{t22}^{(1),1} = \mu^{(1)} \left[\frac{\xi_2^{(1)}t}{\kappa} \left(K_{t-1}(\xi_2^{(1)}\kappa) + K_{t+1}(\xi_2^{(1)}\kappa) \right) + \frac{2t}{\kappa^2} K_t(\xi_2^{(1)}\kappa) \right]$$

$$F_{t32}^{(1),1} = \mu^{(1)} \left[\frac{\xi_3^{(1)}t}{\kappa} \left(K_{t-1}(\xi_3^{(1)}\kappa) + K_{t+1}(\xi_3^{(1)}\kappa) \right) + \frac{2t}{\kappa^2} K_t(\xi_3^{(1)}\kappa) \right]$$

$$F_{t12}^{(2),1} = \mu^{(2)} \left[\frac{t^2}{\kappa^2} I_t(\xi_1^{(2)}\kappa) + \frac{\left(\xi_1^{(2)}\right)^2}{4} \left(I_{t-2}(\xi_1^{(2)}\kappa) + 2I_t(\xi_1^{(2)}\kappa) + I_{t+2}(\xi_1^{(2)}\kappa) \right) \right. \\ \left. - \frac{\xi_1^{(2)}}{2\kappa} \left(I_{t-1}(\xi_1^{(2)}\kappa) + I_{t+1}(\xi_1^{(2)}\kappa) \right) \right]$$

$$F_{t22}^{(2),1} = \mu^{(2)} \left[-\frac{\xi_2^{(2)}t}{\kappa} \left(I_{t-1}(\xi_2^{(2)}\kappa) + I_{t+1}(\xi_2^{(2)}\kappa) \right) + \frac{2t}{\kappa^2} I_t(\xi_2^{(2)}\kappa) \right]$$

$$F_{t32}^{(2),1} = \mu^{(2)} \left[\frac{\xi_3^{(2)}t}{\kappa} \left(I_{t-1}(\xi_3^{(2)}\kappa) + I_{t+1}(\xi_3^{(2)}\kappa) \right) + \frac{2t}{\kappa^2} I_t(\xi_3^{(2)}\kappa) \right]$$

$$F_{t13}^{(1),1} = -\frac{\mu^{(1)}t}{\kappa} K_t(\xi_1^{(1)}\kappa)$$

$$F_{t23}^{(1),1} = -\frac{\mu^{(1)}\xi_2^{(1)}\left[\lambda^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} + \left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}\right)\left(\xi_2^{(1)}\right)^2\right]}{2\left(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}\right)}\left(K_{t-1}(\xi_2^{(1)}\kappa) + K_{t+1}(\xi_2^{(1)}\kappa)\right)$$

$$F_{t33}^{(1),1} = -\frac{\mu^{(1)}\xi_3^{(1)}\left[\lambda^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} + \left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}\right)\left(\xi_3^{(1)}\right)^2\right]}{2\left(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}\right)}\left(K_{t-1}(\xi_3^{(1)}\kappa) + K_{t+1}(\xi_3^{(1)}\kappa)\right)$$

$$F_{t13}^{(2),1} = -\frac{\mu^{(2)}t}{\kappa}I_t(\xi_1^{(2)}\kappa)$$

$$F_{t23}^{(2),1} = \frac{\mu^{(2)}\xi_2^{(2)}\left[\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} + \left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}\right)\left(\xi_2^{(2)}\right)^2\right]}{2\left(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}\right)}\left(I_{t-1}(\xi_2^{(2)}\kappa) + I_{t+1}(\xi_2^{(2)}\kappa)\right)$$

$$F_{t33}^{(2),1} = \frac{\mu^{(2)}\xi_3^{(2)}\left[\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} + \left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}\right)\left(\xi_3^{(2)}\right)^2\right]}{2\left(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}\right)}\left(I_{t-1}(\xi_3^{(2)}\kappa) + I_{t+1}(\xi_3^{(2)}\kappa)\right)$$

$$F_{t14}^{(1),1} = -\frac{t}{\kappa}K_t(\xi_1^{(1)}\kappa), \quad F_{t24}^{(1),1} = -\frac{\xi_2^{(1)}}{2}\left(K_{t-1}(\xi_2^{(1)}\kappa) + K_{t+1}(\xi_2^{(1)}\kappa)\right)$$

$$F_{t34}^{(1),1} = -\frac{\xi_3^{(1)}}{2}\left(K_{t-1}(\xi_3^{(1)}\kappa) + K_{t+1}(\xi_3^{(1)}\kappa)\right), \quad F_{t14}^{(2),1} = -\frac{t}{\kappa}I_t(\xi_1^{(2)}\kappa)$$

$$F_{t24}^{(2),1} = \frac{\xi_2^{(2)}}{2}\left(I_{t-1}(\xi_2^{(2)}\kappa) + I_{t+1}(\xi_2^{(2)}\kappa)\right), \quad F_{t34}^{(2),1} = \frac{\xi_3^{(2)}}{2}\left(I_{t-1}(\xi_3^{(2)}\kappa) + I_{t+1}(\xi_3^{(2)}\kappa)\right)$$

$$F_{t15}^{(1),1} = -\frac{\xi_1^{(1)}}{2}\left(K_{t-1}(\xi_1^{(1)}\kappa) + K_{t+1}(\xi_1^{(1)}\kappa)\right), \quad F_{t25}^{(1),1} = -\frac{t}{\kappa}K_t(\xi_2^{(1)}\kappa)$$

$$F_{t35}^{(1),1} = -\frac{t}{\kappa}K_t(\xi_3^{(1)}\kappa), \quad F_{t15}^{(2),1} = \frac{\xi_1^{(2)}}{2}\left(I_{t-1}(\xi_1^{(2)}\kappa) + I_{t+1}(\xi_1^{(2)}\kappa)\right),$$

$$F_{t25}^{(2),1} = -\frac{t}{\kappa}I_t(\xi_2^{(2)}\kappa), \quad F_{t35}^{(2),1} = -\frac{t}{\kappa}I_t(\xi_3^{(2)}\kappa)$$

$$\begin{aligned}
F_{t16}^{(1),1} &= 0, \quad F_{t26}^{(1),1} = \frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \left(\xi_2^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{ZZ}^{(1),0}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_t(\xi_2^{(1)} \kappa) \\
F_{t36}^{(1),1} &= \frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \left(\xi_3^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{ZZ}^{(1),0}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_t(\xi_3^{(1)} \kappa), \quad F_{t16}^{(2),1} = 0 \\
F_{t26}^{(2),1} &= \frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \left(\xi_2^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{ZZ}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_t(\xi_2^{(2)} \kappa) \\
F_{t36}^{(2),1} &= \frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{ZZ}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_t(\xi_3^{(2)} \kappa) \tag{E5.1}
\end{aligned}$$

(3.54)'deki $\Phi_{i1n}^{(1)}$, $\Phi_{i2n}^{(1)}$, $\Phi_{i1n}^{(2)}$, $\Phi_{i2n}^{(2)}$ $i=1,2,3,4$ fonksiyonlarının açık ifadeleri:

$$\begin{aligned}
\Phi_{11n}^{(1)} &= -2\mu^{(1)} \left(4 - 4\nu^{(1)} + n \right) (n+1) \kappa^{-(n+2)} \cos \theta + \\
&\quad (-1)^n \left(\kappa \frac{R_{12}}{R} \right)^{-(n+2)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{k=0}^t \left(\frac{R}{R_{12}} \right)^{2t-k+m-1} \left\{ \Lambda_1 \left(3 - 4\nu^{(1)} - 2t + k + m \right) \times \right. \\
&\quad \left. \left(\lambda^{(1)} + \left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) (2t - k + m) \right) + \Lambda_3 \lambda^{(1)} m \left(4 - 4\nu^{(1)} \right) + \Lambda_1 \lambda^{(1)} m^2 + \Lambda_1 \lambda^{(1)} k^2 \right\} \cos m\theta \cos^k \theta \\
&\quad \left(\Lambda_3 \lambda^{(1)} k \left(-4 + 4\nu^{(1)} \right) - 2\Lambda_1 \lambda^{(1)} km \right) \sin m\theta \sin \theta \cos^{k-1} \theta - \Lambda_1 \lambda^{(1)} k(k-1) \cos m\theta \cos^{k-2} \theta \\
\Phi_{121}^{(1)} &= \left[\left(3 - 4\nu^{(1)} \right) \left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) - \lambda^{(1)} \right] \kappa^{-1} \cos \theta - \left(\kappa \frac{R_{12}}{R} \right)^{-1} \ln \left(\kappa \frac{R_{12}}{R} \right) \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s=0}^t \left\{ \left(\frac{R}{R_{12}} \right)^{2t-s} \times \right. \\
&\quad \left[\left(\Lambda_{0s} \left(2 - 4\nu^{(1)} - 2t + s \right) \left[\lambda^{(1)} + \left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) (2t - s + 1) \right] + \Lambda_{0s} \lambda^{(1)} \left(4\nu^{(1)} - 3 + s \right) (s+1) \right) \cos^{s+1} \theta \right. \right. \\
&\quad \left. \Lambda_{0s} \lambda^{(1)} s \left(3 - 4\nu^{(1)} - s \right) \cos^{s-1} \theta \right] + \left(\frac{R}{R_{12}} \right)^{2t-s-1} \left[\left(\Lambda_{0s} \left(2t - s - 3 + 4\nu^{(1)} \right) \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left(\lambda^{(1)} + \left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) (2t - s) \right) - \Lambda_{0s} \lambda^{(1)} s^2 \right) \cos^s \theta + \Lambda_{0s} \lambda^{(1)} s(s-1) \cos^{s-2} \theta \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(2\kappa \frac{R_{12}}{R} \right)^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^m \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s=0}^t \left\{ \left(\frac{R}{R_{12}} \right)^{2m-k+2t-s} \left[\Lambda_5 (2-4v^{(1)} - 2m+k-2t+s) \times \right. \right. \\
& \left. \left[\lambda^{(1)} + (\lambda^{(1)} + (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})(2m-k+2t-s+1)) \right] + \Lambda_5 \lambda^{(1)} (-3+4v^{(1)} + s+k)(k+s+1) \right] \cos^{k+s+1} \theta \\
& + \Lambda_5 \lambda^{(1)} (k+s) (3-4v^{(1)} - s-k) \cos^{k+s-1} \theta \left. \right] + \left(\frac{R}{R_{12}} \right)^{2m-k+2t-s-1} \left[(\Lambda_5 \times \right. \\
& (2m-k+2t-s-3+4v^{(1)}) [\lambda^{(1)} + (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})(2m-k+2t-s)] - \Lambda_5 \lambda^{(1)} (k+s)^2 \right] \cos^{k+s} \theta \\
& \left. + \Lambda_5 \lambda^{(1)} (k+s)(k+s-1) \cos^{k+s-2} \theta \right] \left. \right\} \\
\Phi_{12n}^{(1)} &= \left[(2-4v^{(1)} + n) (\lambda^{(1)} - (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})(n-1)) + (4v^{(1)} - 4 + n) \lambda^{(1)} n \right] \kappa^{-n} \cos n\theta \\
& + (-1)^n \left(\kappa \frac{R_{12}}{R} \right)^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{k=0}^t \left(\frac{R}{R_{12}} \right)^{2t-k+m-1} \left\{ \left(\Lambda_2 (3-4v^{(1)} - 2t+k-m) [\lambda^{(1)} + (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \times \right. \right. \\
& (2t-k+m)] + \Lambda_4 \lambda^{(1)} m (4v^{(1)} - 4) + \Lambda_2 \lambda^{(1)} m^2 + \Lambda_2 \lambda^{(1)} k^2 \right) \cos m\theta \cos^k \theta \\
& \left. \left(\Lambda_4 \lambda^{(1)} k (4-4v^{(1)}) - 2\Lambda_2 \lambda^{(1)} km \right) \sin m\theta \sin \theta \cos^{k-1} \theta - \Lambda_2 \lambda^{(1)} k(k-1) \cos m\theta \cos^{k-2} \theta \right\} \\
\Phi_{11n}^{(2)} &= \left[(2-4v^{(2)} - n) (\lambda^{(2)} + (n+1)(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})) + (4-4v^{(2)} + n) \lambda^{(2)} n \right] \kappa^n \cos n\theta \\
\Phi_{12n}^{(2)} &= \left[4-4v^{(2)} - n \right] 2\mu^{(2)} (n-1) \kappa^{n-2} \cos n\theta \\
\Phi_{21n}^{(1)} &= \mu^{(1)} (4v^{(1)} - 4 - n) (2n+2) \kappa^{-(n+2)} \sin n\theta + (-1)^n \mu^{(1)} \left(\kappa \frac{R_{12}}{R} \right)^{-(n+2)} \times \\
& \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{k=0}^t \left(\frac{R}{R_{12}} \right)^{2t-k+m-1} \left\{ \left[\Lambda_1 m (4v^{(1)} - 3+2t-k+m) + (\Lambda_3 (4-4v^{(1)}) + \Lambda_1 m) \times \right. \right. \\
& (2t-k+m-1) \left. \right] \sin m\theta \cos^k \theta + \Lambda_1 k (4v^{(1)} + 4t-2k+2m-4) \cos m\theta \sin \theta \cos^{k-1} \theta \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{221}^{(1)} = & \mu^{(1)} (4v^{(1)} - 3) \kappa^{-1} \sin \theta - \mu^{(1)} \left(\kappa \frac{R_{12}}{R} \right)^{-1} \ln \left(\kappa \frac{R_{12}}{R} \right) \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s=0}^t \left\{ \left(\frac{R}{R_{12}} \right)^{2t-s} \left[\Lambda_{0s}(s+1) \times \right. \right. \\
& \left. \left(4v^{(1)} - 2 + 2t - s \right) + \Lambda_{0s} \left(4v^{(1)} - 4 + s + 1 \right) (2t - s) \right] \sin \theta \cos^s \theta + \left(\frac{R}{R_{12}} \right)^{2t-s-1} \times \\
& \left. \Lambda_{0s} \left[s(s - 2t - 4v^{(1)}) - 2t + 4s + 1 \right] \sin \theta \cos^{s-1} \theta \right\} - \\
& \mu^{(1)} \left(2\kappa \frac{R_{12}}{R} \right)^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^m \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s=0}^t \left\{ \left(\frac{R}{R_{12}} \right)^{2m-k+2t-s} \left[\Lambda_5(s+k+1) \times \right. \right. \\
& \left. \left(4v^{(1)} - 2 + 2m - k + 2t - s \right) + \Lambda_5 \left(4v^{(1)} - 3 + k + s \right) (2m - k + 2t - s) \right] \sin \theta \cos^{k+s} \theta + \\
& \left. \left(\frac{R}{R_{12}} \right)^{2m-k+2t-s-1} \Lambda_5(k+s) \left(2k - 4m - 4t + 2s + 4 - 4v^{(1)} \right) \sin \theta \cos^{k+s-1} \theta \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{12n}^{(1)} = & \mu^{(1)} n(2 - 2n) \kappa^{-n} \sin n\theta + (-1)^n \mu^{(1)} \left(\kappa \frac{R_{12}}{R} \right)^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{k=0}^t \left(\frac{R}{R_{12}} \right)^{2t-k+m-1} \left\{ \left[\Lambda_2 m \times \right. \right. \\
& \left. \left(4v^{(1)} - 3 + 2t - k + m \right) + \left(\Lambda_4 \left(4v^{(1)} - 4 \right) + \Lambda_2 m \right) (2t - k + m - 1) \right] \sin m\theta \cos^k \theta + \\
& \left. \Lambda_2 k \left(4v^{(1)} + 4t - 2k + 2m - 4 \right) \cos m\theta \sin \theta \cos^{k-1} \theta \right\}
\end{aligned}$$

$$\Phi_{21n}^{(2)} = 2\mu^{(2)} n(n+1) \kappa^n \sin n\theta$$

$$\Phi_{22n}^{(2)} = 2\mu^{(2)} n(n-1) \left(4v^{(2)} - 4 + n \right) \kappa^{n-2} \sin n\theta$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{31n}^{(1)} = & \left(4 - 4v^{(1)} + n \right) \kappa^{-(n+1)} \cos n\theta + (-1)^n \left(\kappa \frac{R_{12}}{R} \right)^{-(n+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{k=0}^t \left(\frac{R}{R_{12}} \right)^{2t-k+m} \Lambda_1 \times \\
& \left(3 - 4v^{(1)} - 2t + k - m \right) \cos m\theta \cos^k \theta
\end{aligned}$$

$$\Phi_{321}^{(1)} = \left[\left(3 - 4v^{(1)} \right) \ln \kappa - 1 \right] \cos \theta - \ln \left(\kappa \frac{R_{12}}{R} \right) \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s=0}^t \left\{ \left(\frac{R}{R_{12}} \right)^{2t-s+1} \Lambda_{0s} \left(3 - 4v^{(1)} - 2t + s - 1 \right) \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \cos^{s+1} \theta + \left(\frac{R}{R_{12}} \right)^{2t-s} (2t-s-3+4v^{(1)}) \cos^s \theta \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^m \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s=0}^t \left\{ \left(\frac{R}{R_{12}} \right)^{2m-k+2t-s+1} \right. \right. \\
& \Lambda_5 (3-4v^{(1)}-2m+k-2t+s-1) \cos^{s+k+1} \theta + \\
& \left. \left(\frac{R}{R_{12}} \right)^{2m-k+2t-s} \Lambda_5 (-3+4v^{(1)}+2m-k+2t-s) \cos^{s+k} \theta \right\} \\
\Phi_{32n}^{(1)} &= (2-4v^{(1)}+n) \kappa^{-(n-1)} \cos n\theta + (-1)^n \left(\kappa \frac{R_{12}}{R} \right)^{-(n-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{k=0}^t \left(\frac{R}{R_{12}} \right)^{2t-k+m} \Lambda_2 \times \\
& (3-4v^{(1)}-2t+k-m) \cos m\theta \cos^k \theta \\
\Phi_{31n}^{(2)} &= (2-4v^{(2)}-n) \kappa^{n+1} \cos n\theta \\
\Phi_{32n}^{(2)} &= (4-4v^{(2)}-n) \kappa^{n-1} \cos n\theta \\
\Phi_{41n}^{(1)} &= (4-4v^{(1)}+n) \kappa^{-(n+1)} \sin n\theta + (-1)^n \left(\kappa \frac{R_{12}}{R} \right)^{-(n+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{k=0}^t \left(\frac{R}{R_{12}} \right)^{2t-k+m} \times \\
& \left[(\Lambda_3 (4-4v^{(1)}) + \Lambda_1 m) \sin m\theta \cos^k \theta + \Lambda_1 k \cos m\theta \sin \theta \cos^{k-1} \theta \right] \\
\Phi_{421}^{(1)} &= (4v^{(1)}-3) \ln \kappa \sin \theta - \ln \left(\kappa \frac{R_{12}}{R} \right) \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s=0}^t \left\{ \left(\frac{R}{R_{12}} \right)^{2t-s+1} \Lambda_{0s} (4v^{(1)}-4+s+1) \sin \theta \cos^s \theta \right. \\
& \left. - \left(\frac{R}{R_{12}} \right)^{2t-s} s \Lambda_{0s} \sin \theta \cos^{s-1} \theta \right\} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^m \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s=0}^t \left\{ \left(\frac{R}{R_{12}} \right)^{2m-k+2t-s+1} \Lambda_5 \times \right. \\
& \left. (4v^{(1)}-3+s+k) \sin \theta \cos^{k+s} \theta - \left(\frac{R}{R_{12}} \right)^{2m-k+2t-s} \Lambda_5 (k+s) \sin \theta \cos^{k+s-1} \theta \right\} \\
\Phi_{42n}^{(1)} &= (4v^{(1)}-4+n) \kappa^{-(n-1)} \sin n\theta + (-1)^n \left(\kappa \frac{R_{12}}{R} \right)^{-(n+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{k=0}^t \left(\frac{R}{R_{12}} \right)^{2t-k+m} \times
\end{aligned}$$

$$\left[\left(\Lambda_4 (4\nu^{(1)} - 4) + \Lambda_2 m \right) \sin m\theta \cos^k \theta + \Lambda_2 k \cos m\theta \sin \theta \cos^{k-1} \theta \right]$$

$$\Phi_{41n}^{(2)} = \left(4 - 4\nu^{(2)} + n \right) \kappa^{n+1} \sin \theta$$

$$\Phi_{41n}^{(2)} = \left(4\nu^{(2)} - 4 + n \right) \kappa^{n-1} \sin n\theta$$

$$\Lambda_1 = \binom{-n}{m} \binom{-1/2}{t} \binom{t}{k} 2^k (-1)^{k+m+n}, \quad \Lambda_2 = \binom{-n}{m} \binom{1/2}{t} \binom{t}{k} 2^k (-1)^{k+m+n}, \quad \Lambda_3 = -\Lambda_1,$$

$$\Lambda_4 = -\Lambda_2, \quad \Lambda_{0s} = \binom{-1/2}{t} \binom{t}{s} 2^s (-1)^s, \quad \Lambda_5 = \Lambda_{0s} \binom{m}{k} \frac{(-1)^{m+k-1}}{m} 2^k \quad (E5.2)$$

(3.58)'deki $F_{ij}^{(k),1}$, $F_{nij}^{(k),1}$ fonksiyonlarının açık ifadeleri:

$$F_{n1j}^{(1),2} = F_{t1j}^{(2),2} \left(K_{n+t} (2\xi_1^{(1)} \frac{R_{12}}{R} \kappa) - K_{n-t} (2\xi_1^{(1)} \frac{R_{12}}{R} \kappa) \right)$$

$$F_{n2j}^{(1),2} = -F_{t2j}^{(2),2} \left(K_{n+t} (2\xi_2^{(1)} \frac{R_{12}}{R} \kappa) + K_{n-t} (2\xi_2^{(1)} \frac{R_{12}}{R} \kappa) \right)$$

$$F_{n3j}^{(1),2} = -F_{t3j}^{(2),2} \left(K_{n+t} (2\xi_3^{(1)} \frac{R_{12}}{R} \kappa) + K_{n-t} (2\xi_3^{(1)} \frac{R_{12}}{R} \kappa) \right), \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$F_{t11}^{(1),2} = \frac{4\mu^{(1)} t}{\kappa^2} K_t (2\xi_1^{(1)} \kappa) + \frac{4\mu^{(1)} \xi_1^{(1)} t}{\kappa} \left(K_{t-1} (2\xi_1^{(1)} \kappa) + K_{t+1} (2\xi_1^{(1)} \kappa) \right)$$

$$F_{t21}^{(1),2} = \frac{4\lambda^{(1)} \xi_2^{(1)}}{\kappa} \left(K_{t-1} (2\xi_2^{(1)} \kappa) + K_{t+1} (2\xi_2^{(1)} \kappa) \right) - 4(\xi_2^{(1)})^2 (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \left(K_{t-2} (2\xi_2^{(1)} \kappa) + 2K_t (2\xi_2^{(1)} \kappa) \right.$$

$$\left. + K_{t+2} (2\xi_2^{(1)} \kappa) \right) + \frac{4\lambda^{(1)} t^2}{\kappa^2} K_t (2\xi_2^{(1)} \kappa) + \frac{16\lambda^{(1)} \left[(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_2^{(1)})^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} \right]}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_t (2\xi_2^{(1)} \kappa)$$

$$F_{t31}^{(1),2} = \frac{4\lambda^{(1)} \xi_3^{(1)}}{\kappa} \left(K_{t-1} (2\xi_3^{(1)} \kappa) + K_{t+1} (2\xi_3^{(1)} \kappa) \right) - 4(\xi_3^{(1)})^2 (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \left(K_{t-2} (2\xi_3^{(1)} \kappa) + 2K_t (2\xi_3^{(1)} \kappa) \right.$$

$$\left. + K_{t+2} (2\xi_3^{(1)} \kappa) \right) + \frac{4\lambda^{(1)} t^2}{\kappa^2} K_t (2\xi_3^{(1)} \kappa) + \frac{16\lambda^{(1)} \left[(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_3^{(1)})^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} \right]}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_t (2\xi_3^{(1)} \kappa)$$

$$F_{t11}^{(2),2} = \frac{4\mu^{(2)}t}{\kappa^2} I_t(2\xi_1^{(2)}\kappa) - \frac{4\mu^{(2)}\xi_1^{(2)}t}{\kappa} \left(I_{t-1}(2\xi_1^{(2)}\kappa) + I_{t+1}(2\xi_1^{(2)}\kappa) \right)$$

$$F_{t21}^{(2),2} = -\frac{4\lambda^{(2)}\xi_2^{(2)}}{\kappa} \left(I_{t-1}(2\xi_2^{(2)}\kappa) + I_{t+1}(2\xi_2^{(2)}\kappa) \right) - 4\left(\xi_2^{(2)}\right)^2 \left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(I_{t-2}(2\xi_2^{(2)}\kappa) + 2I_t(2\xi_2^{(2)}\kappa) \right. \\ \left. + I_{t+2}(2\xi_2^{(2)}\kappa) \right) + \frac{4\lambda^{(2)}t^2}{\kappa^2} I_t(2\xi_2^{(2)}\kappa) + \frac{16\lambda^{(2)} \left[\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_2^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right]}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_t(2\xi_2^{(2)}\kappa)$$

$$F_{t31}^{(2),2} = -\frac{4\lambda^{(2)}\xi_3^{(2)}}{\kappa} \left(I_{t-1}(2\xi_3^{(2)}\kappa) + I_{t+1}(2\xi_3^{(2)}\kappa) \right) - \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 \left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(I_{t-2}(2\xi_3^{(2)}\kappa) + 2I_t(2\xi_3^{(2)}\kappa) \right. \\ \left. + I_{t+2}(2\xi_3^{(2)}\kappa) \right) + \frac{4\lambda^{(2)}t^2}{\kappa^2} I_t(2\xi_3^{(2)}\kappa) + \frac{16\lambda^{(2)} \left[\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right]}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_t(2\xi_3^{(2)}\kappa)$$

$$F_{t12}^{(1),2} = \mu^{(1)} \left[\frac{2t^2}{\kappa^2} K_t(2\xi_1^{(1)}\kappa) + 2\left(\xi_1^{(1)}\right)^2 \left(K_{t-2}(2\xi_1^{(1)}\kappa) + 2K_t(2\xi_1^{(1)}\kappa) + K_{t+2}(2\xi_1^{(1)}\kappa) \right) \right. \\ \left. + \frac{2\xi_1^{(1)}}{\kappa} \left(K_{t-1}(2\xi_1^{(1)}\kappa) + K_{t+1}(2\xi_1^{(1)}\kappa) \right) \right]$$

$$F_{t22}^{(1),2} = -\mu^{(1)} \left[\frac{8\xi_2^{(1)}t}{\kappa} \left(K_{t-1}(2\xi_2^{(1)}\kappa) + K_{t+1}(2\xi_2^{(1)}\kappa) \right) + \frac{8t}{\kappa^2} K_t(2\xi_2^{(1)}\kappa) \right]$$

$$F_{t32}^{(1),2} = -\mu^{(1)} \left[\frac{8\xi_3^{(1)}t}{\kappa} \left(K_{t-1}(2\xi_3^{(1)}\kappa) + K_{t+1}(2\xi_3^{(1)}\kappa) \right) + \frac{8t}{\kappa^2} K_t(2\xi_3^{(1)}\kappa) \right]$$

$$F_{t12}^{(2),2} = \mu^{(2)} \left[\frac{2t^2}{\kappa^2} I_t(2\xi_1^{(2)}\kappa) + 2\left(\xi_1^{(2)}\right)^2 \left(I_{t-2}(2\xi_1^{(2)}\kappa) + 2I_t(2\xi_1^{(2)}\kappa) + I_{t+2}(2\xi_1^{(2)}\kappa) \right) \right. \\ \left. - \frac{2\xi_1^{(2)}}{\kappa} \left(I_{t-1}(2\xi_1^{(2)}\kappa) + I_{t+1}(2\xi_1^{(2)}\kappa) \right) \right]$$

$$F_{t22}^{(2),2} = \mu^{(2)} \left[\frac{8\xi_2^{(2)} t}{\kappa} \left(I_{t-1}(2\xi_2^{(2)} \kappa) + I_{t+1}(2\xi_2^{(2)} \kappa) \right) - \frac{8t}{\kappa^2} I_t(2\xi_2^{(2)} \kappa) \right]$$

$$F_{t32}^{(2),2} = \mu^{(2)} \left[\frac{8\xi_3^{(2)} t}{\kappa} \left(I_{t-1}(2\xi_3^{(2)} \kappa) + I_{t+1}(2\xi_3^{(2)} \kappa) \right) - \frac{8t}{\kappa^2} I_t(2\xi_3^{(2)} \kappa) \right]$$

$$F_{t13}^{(1),2} = \frac{4\mu^{(1)} t}{\kappa} K_t(2\xi_1^{(1)} \kappa)$$

$$F_{t23}^{(1),2} = -\frac{4\mu^{(1)} \xi_2^{(1)} \left[\lambda^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} + \left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_2^{(1)} \right)^2 \right]}{\left(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)} \right)} \left(K_{t-1}(2\xi_2^{(1)} \kappa) + K_{t+1}(2\xi_2^{(1)} \kappa) \right)$$

$$F_{t33}^{(1),2} = -\frac{4\mu^{(1)} \xi_3^{(1)} \left[\lambda^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} + \left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_3^{(1)} \right)^2 \right]}{\left(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)} \right)} \left(K_{t-1}(2\xi_3^{(1)} \kappa) + K_{t+1}(2\xi_3^{(1)} \kappa) \right)$$

$$F_{t13}^{(2),2} = \frac{4\mu^{(2)} t}{\kappa} I_t(2\xi_1^{(2)} \kappa)$$

$$F_{t23}^{(2),2} = \frac{4\mu^{(2)} \xi_2^{(2)} \left[\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} + \left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_2^{(2)} \right)^2 \right]}{\left(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)} \right)} \left(I_{t-1}(2\xi_2^{(2)} \kappa) + I_{t+1}(2\xi_2^{(2)} \kappa) \right)$$

$$F_{t33}^{(2),2} = \frac{4\mu^{(2)} \xi_3^{(2)} \left[\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} + \left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 \right]}{\left(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)} \right)} \left(I_{t-1}(2\xi_3^{(2)} \kappa) + I_{t+1}(2\xi_3^{(2)} \kappa) \right)$$

$$F_{t14}^{(1),2} = -\frac{2t}{\kappa} K_t(2\xi_1^{(1)} \kappa), \quad F_{t24}^{(1),2} = 2\xi_2^{(1)} \left(K_{t-1}(2\xi_2^{(1)} \kappa) + K_{t+1}(2\xi_2^{(1)} \kappa) \right)$$

$$F_{t34}^{(1),2} = 2\xi_3^{(1)} \left(K_{t-1}(2\xi_3^{(1)} \kappa) + K_{t+1}(2\xi_3^{(1)} \kappa) \right), \quad F_{t14}^{(2),2} = -\frac{2t}{\kappa} I_t(2\xi_1^{(2)} \kappa)$$

$$F_{t24}^{(2),2} = -2\xi_2^{(2)} \left(I_{t-1}(2\xi_2^{(2)} \kappa) + I_{t+1}(2\xi_2^{(2)} \kappa) \right), \quad F_{t34}^{(2),2} = -2\xi_3^{(2)} \left(I_{t-1}(2\xi_3^{(2)} \kappa) + I_{t+1}(2\xi_3^{(2)} \kappa) \right)$$

$$F_{t15}^{(1),2} = -2\xi_1^{(1)} \left(K_{t-1}(2\xi_1^{(1)} \kappa) + K_{t+1}(2\xi_1^{(1)} \kappa) \right), \quad F_{t25}^{(1),2} = \frac{4t}{\kappa} K_t(2\xi_2^{(1)} \kappa)$$

$$F_{t35}^{(1),2} = \frac{4t}{\kappa} K_t(2\xi_3^{(1)}\kappa), \quad F_{t15}^{(2),2} = 2\xi_1^{(2)} \left(I_{t-1}(2\xi_1^{(2)}\kappa) + I_{t+1}(2\xi_1^{(2)}\kappa) \right),$$

$$F_{t25}^{(2),2} = \frac{4t}{\kappa} I_t(2\xi_2^{(2)}\kappa) \quad F_{t35}^{(2),2} = \frac{4t}{\kappa} I_t(2\xi_3^{(2)}\kappa)$$

$$F_{t16}^{(1),2} = 0, \quad F_{t26}^{(1),2} = 8 \frac{\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_2^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{ZZ}^{(1),0}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_t(2\xi_2^{(1)}\kappa)$$

$$F_{t36}^{(1),2} = 8 \frac{\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_3^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{ZZ}^{(1),0}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_t(2\xi_3^{(1)}\kappa), \quad F_{t16}^{(2),2} = 0$$

$$F_{t35}^{(2),2} = 8 \frac{\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_2^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{ZZ}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_t(2\xi_2^{(2)}\kappa)$$

$$F_{t36}^{(2),2} = 8 \frac{\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{ZZ}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_t(2\xi_3^{(2)}\kappa) \tag{E5.3}$$

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 04.05.1970

Doğum yeri İskenderun

Lise 1984-1987 İskenderun Barbaros Lisesi

Lisans 1987-1991 Yıldız Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi,
Matematik Mühendisliği Bölümü

Yüksek Lisans 1992-1995 İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Mühendislik Bilimleri Anabilim Dalı,

Doktora 1998- Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Çalıştığı kurum(lar)

1992-Devam ediyor YTÜ, Kimya-Metalurji Fakültesi,
Matematik Müh. Bölümünde Araştırma Görevlisi

