

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**



TERS FAKTÖRİYEL SERİLERİ

Büşra BUDAK

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEMMUZ 2023

ANTALYA

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**



TERS FAKTÖRİYEL SERİLERİ

Büşra BUDAK

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEMMUZ 2023

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TERS FAKTÖRİYEL SERİLERİ

Büşra BUDAK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 26/07/2023 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Ayhan DİL (Danışman)

Prof. Dr. Mehmet CENKÇİ

Prof. Dr. Seçil ÇEKEN

ÖZET

TERS FAKTÖRİYEL SERİLERİ

Büşra BUDAK

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ayhan DİL

TEMMUZ 2023, 54 sayfa

Seriler hem teorik matematikte hem de uygulama alanlarında sıkça ortaya çıkan, önemli matematiksel kavramlardır. Bu tez çalışmasında ilk örnekleri 19. yüzyıla uzanan ters faktöriyel serileri ele alınmıştır. Newton, Stirling, Nielsen, Landau ve Nörlund gibi önemli matematikçiler tarafından temelleri oluşturulan ters faktöriyel serileri değeri ölçüsünde ilgi görmemiştir. Bu tez çalışmasının öncelikli hedeflerinden birisi ters faktöriyel serilerinin temel teorik altyapısının literatürünü içeren bir Türkçe kaynak oluşturmaktır. Sonrasında ise daha güncel sonuçları inceleyip uygulamalar vermektir. Bu bağlamda, p -Stirling, harmonik, hiperharmonik ve skew-harmonik sayılarla ilgili sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca verilen bir dizi için, onun binom, Stirling ve Lah dönüşümlerinin ters faktöriyel serileri arasındaki ilişkiler araştırılmıştır.

ANAHTAR KELİMELELER: Artan faktöriyel, Azalan faktöriyel, Binom dönüşümü, Fark operatörü, Gamma fonksiyonu, Harmonik sayılar, Hiperharmonik sayılar, Lah dönüşümü, Laplace integrali, Seriler, Skew-harmonik sayılar, Stirling sayıları, Stirling dönüşümü, Üreteç fonksiyonları.

JÜRİ: Doç. Dr. Ayhan DİL

Prof. Dr. Mehmet CENKÇİ

Prof. Dr. Seçil ÇEKEN

ABSTRACT

INVERSE FACTORIAL SERIES

Büşra BUDAK

MSc Thesis in MATHEMATICS

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ayhan DİL

July 2023, 54 pages

Series are important mathematical concepts that appear frequently in both theoretical and applied mathematics. In this thesis, inverse factorial series, the first examples of which date back to the 19th century, are discussed. Inverse factorial series, which were founded by important mathematicians such as Newton, Stirling, Nielsen, Landau and Nörlund, did not attract attention as much as its value. One of the primary objectives of this thesis is to create a Turkish source containing the literature on the basic theoretical background of inverse factorial series. Recent results are also examined and some applications are given. In this study, results related to p -Stirling, harmonic, hyperharmonic and skew-harmonic numbers are obtained. Also, for a given sequence, the relationships between its binomial, Stirling and Lah transforms and inverse factorial series are investigated.

KEYWORDS: Binomial transform, Difference operator, Falling factorial, Gamma function, Generating functions, Harmonic numbers, Hyperharmonic numbers, Laplace integral, Lah transform, Rising factorial, Series, Skew-harmonic numbers, Stirling numbers, Stirling transform.

COMMITTEE: Assoc. Dr. Ayhan DİL

Prof. Dr. Mehmet CENKÇİ

Prof. Dr. Seçil ÇEKEN

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması ters faktöriyel serilerinin genel teorisini ve uygulamalarını içermektedir. Ters faktöriyel serilerine dair literatürde yer alan sonuçlar derlenmiştir. Mevcut sonuçların bazılarının genelleştirilmesi ve bu bilgiler yardımıyla yeni sonuçların elde edilmesi amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda birinci tip Stirling sayıları ile ilgili bir sonuç, birinci tip p -Stirling sayıları için genelleştirilmiştir. Bununla birlikte verilen bir dizi ile onun binom, Stirling ve Lah dönüşümlerinin ters faktöriyel serileri arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. Ayrıca ters faktöriyel serilerinin mevcut sonuçları çerçevesinde hiperharmonik ve skew-harmonik sayıların Dirichlet serileri için bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Tez çalışması süresince, benden ilgi ve desteğini esirgemeyen, her koşulda tecrübeleriyle yol gösteren danışman hocam sayın Doç. Dr. Ayhan DİL'e minnetimi ve sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez çalışmasının fikri ve temel sonuçları Khristo N. Boyadzhiev'in eserlerine dayanmaktadır. Tez çalışmasının tamamlanmasına yakın, 28 Haziran 2023 tarihinde hayata gözlerini yuman K. N. Boyadzhiev'in aziz hatırasına saygılarımı sunuyorum.

Son olarak her zaman yanımda olan ve her anlamda desteklerini hissettiğim annem Hacer BUDAK, babam Ali BUDAK ile kardeşlerim Esra ve Esma'ya teşekkür ederim. ederim. Ayrıca tezin son aşamasındaki desteğinden dolayı Ar. Gör. Çağla SEKİN'e teşekkür ederim

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
AKADEMİK BEYAN	v
SİMGELER VE KISALTMALAR	vi
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK TARAMASI	5
2.1. Faktöriyel Serilerinin Genel Teorisi	5
2.2. Ters Faktöriyel Serileri	7
3. MATERYAL VE METOT	9
3.1. Bir Fonksiyonun Ters Faktöriyel Seri Açılımı	9
3.2. Ters Faktöriyel Serileri ve Stirling Sayıları	14
3.3. Ters Faktöriyel Serilerinde İşlemler	25
3.4. Genelleştirilmiş Ters Faktöriyel Serileri	31
3.5. Ters Faktöriyel Serilerde Dönüşümler	31
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	35
5. SONUÇLAR	49
6. KAYNAKLAR	50
ÖZGEÇMİŞ	

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Ters Faktöriyel Serileri” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

26/07/2023

Büşra BUDAK



SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

z^n	: Azalan faktöriyel
$z^{\bar{n}}$	: Artan faktöriyel
Δ	: Fark operatörü
H_n	: Harmonik sayı
$h_n^{(r)}$	: Hiperharmonik sayı
H_n^m	: Genelleştirilmiş harmonik sayı
$\tilde{H}_m$	: Skew-harmonik sayı
$\binom{n}{k}$	: Binom katsayısı
$s(n, k)$	: Birinci çeşit işaretli Stirling sayısı
$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$	: Birinci çeşit işaretsiz Stirling sayısı
$S(n, k)$	: İkinci çeşit Stirling sayısı
$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p$	: Birinci çeşit p - Stirling sayısı
$L(n, k)$	: Lah sayısı
$\varphi_n(x)$	: Üstel polinom
$w_n(x)$	: Geometrik polinom
$B_n(x)$	: Bernoulli polinomu
φ_n	: Üstel sayı
w_n	: Geometrik sayı
B_n	: Bernoulli sayısı
C_n	: Birinci çeşit Cauchy sayısı
d_n	: İkinci çeşit Cauchy sayısı
$\psi(z)$	: Digamma fonksiyonu
$\zeta(s)$	: Riemann zeta fonksiyonu
$\zeta(s, a)$	: Hurwitz zeta fonksiyonu
$\beta(z)$	: Nielsen beta fonksiyonu
$\gamma(z, x)$	: Tamamlanmamış alt gamma fonksiyonu

1. GİRİŞ

Seriler matematiğin ve uygulama alanlarının hemen hepsinde çok önemli matematiksel kavramlardır. Farklı amaçlar doğrultusunda farklı seri tipleri ile çalışılmıştır. Seriler kalkülüs ve matematiksel analiz alanındaki kullanımı ile yani uygun koşullar altındaki fonksiyonların kuvvet serisine açılması ya da verilen bir kuvvet serisinin yakınsadığı fonksiyonun belirlenmesi açısından 19. yy ortalarından beri çalışılmaktadır. Diğer taraftan yakınsama veya toplamın ne olduğu sorularından daha çok katsayıların özelliklerinin analiz edildiği formal seriler çok daha eski dönemlerden beri (17.yy) çalışılmaktadır. Bu çalışmada seriler çoğunlukla, özel öneme sahip bazı dizileri araştırmak amacıyla kullanıldığından, genellikle formal seriler olarak ele alınmıştır.

Söz konusu seriler arasında en yaygınları; kuvvet serileri, Laurent serileri, Dirichlet serileri ve trigonometrik (Fourier) serilerdir.

Kuvvet serileri: Bir x_0 noktasının komşuluğunda

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

biçiminde verilen serilere kuvvet serileri denir. Burada a_n katsayıları reel ya da kompleks olabilir. Kuvvet serilerinin en önemlisi olan Taylor serisi, $f^{(n)}$ her mertebeden türevlenebilir bir f fonksiyonunun n -inci türevini göstermek üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

biçiminde tanımlanır. Bunun en meşhur örnekleri olarak geometrik seri

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, |x| < 1$$

ve üstel fonksiyonun serisi

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R}$$

verilebilir.

Bu serilere formal (biçimsel) seri gözüyle bakıldığında ise, verilen bir (a_n) dizisi için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

serisi bu dizinin adi üreteç fonksiyonu ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

serisi ise üstel üreteç fonksiyonu olarak adlandırılır.

Dirichlet serisi: Bir $s \in \mathbb{C}$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

biçiminde ifade edilen serilere Dirichlet serileri denir. En meşhur örneklerinden birisi Riemann zeta fonksiyonunun seri formudur:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1.$$

Faktöriyel Serileri:

Bu tez çalışmasının esas konusu olan *faktöriyel serileri*, ilk olarak Newton ve Stirling'in çalışmalarında görülmüştür. Daha sonra 19. yy ortalarında Schlömilch tarafından çalışılmıştır. Teoriye esas olarak önemli katkılar Bendixson, Nielsen, Landau ve Nörlund tarafından yapılmıştır.

Faktöriyel fonksiyonları

$$F_n(z) = \frac{n!}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}$$

ve Newton polinomları

$$N_n(z) = (-1)^n \frac{z(z-1)(z-2)\dots(z-n+1)}{n!}$$

eşitlikleri ile tanımlanırlar (Markett 1992). Bu kavramlar yardımıyla birinci çeşit faktöriyel serisi veya diğer adıyla ters faktöriyel serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n!}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}$$

ve ikinci çeşit faktöriyel serisi veya diğer adıyla Newton serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n N_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n (-1)^n z(z-1)(z-2)\dots(z-n+1)}{n!}$$

eşitlikleri ile tanımlanırlar.

$\Delta f(z) = f(z+1) - f(z)$ fark operatörü olmak üzere, her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $(N_{-1}(z) = 0$ kabulüyle)

$$\Delta F_n(z) = -F_{n+1}(z)$$

$$\Delta N_n(z) = -N_{n-1}(z)$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece diferansiyel kalkülüsteki $\frac{n!}{z^{n+1}}$ ve $\frac{(-z)^n}{n!}$ ifadelerine sonlu farklar kalküsünde karşılık gelen ifadeler $F_n(z)$ ve $N_n(z)$ olur. Bu bakış açısıyla diferansiyel denklemler teorisi alanında kuvvet serisi çözümlerinin rolünü doğrusal fark denklemleri alanında faktöriyel serileri üstlenirler. Bu bakımdan faktöriyel serileri fark denklemleri alanında önemli bir kavramdır.

Bu tez çalışmasının temel amacı ters faktöriyel serilerinin incelenmesi ve bazı özel fonksiyonlara karşılık gelen ters faktöriyel seri açılımlarının belirlenmesidir. Ters faktöriyel serilerine temel bir örnek olarak aşağıdaki seriyi verebiliriz (bkz. Örnek 3.12.):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{z(z+1)\dots(z+n)} = \frac{1}{z^2}.$$

Ters faktöriyel serilerinin ilk örneklerinden birisi Schlömilch (1878) tarafından verilen, $\operatorname{Re} z > 0$ olmak üzere

$$\ln \left(1 + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{\alpha_1}{z(z+1)} + \frac{\alpha_2}{z(z+1)(z+2)} - \dots$$

serisidir. Burada katsayılar,

$$\alpha_n = \int_0^1 t(1-t)(2-t)\dots(n-1-t) dt$$

şeklinededir.

İlk örneklerden bir diğeri, 1839 yılında Binet tarafından verilen

$$\ln \Gamma(z+1) = \left(z + \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln 2\pi + J(z)$$

eşitliğinde ortaya çıkmıştır. Burada

$$J(z) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{c_1}{z+1} + \frac{c_2}{2(z+1)(z+2)} + \frac{c_3}{3(z+1)(z+2)(z+3)} + \dots \right\}$$

ifadesi ters faktöriyel serisi formunda olup katsayılar

$$c_k = \int_0^1 (x+1)(x+2)\dots(x+k-1)(2x-1) x dx$$

eşitliği ile belirlenir. Bu seri $\operatorname{Re}(z) > 0$ için yakınsaktır.

Ters faktöriyel serilerinin temel teorisi ve önemli özellikleri, Milne-Thomson (1951), Nörlund (1914; 1926; 1954) ve Watson (1912) gibi alanlarında iyi bilinen kaynaklarda verilmiştir. Öte yandan bu serilerin çeşitli özelliklerinin ve uygulamalarının ortaya konulması aktif bir çalışma alanıdır (Boyadzhiev (2023); Karp ve Prilepkina (2018); Mathar (2009); Weniger (2010)). Boyadzhiev, 2008 yılındaki çalışmasında kombinatorik alanının en önemli sayı ailelerinden birisi olan birinci çeşit (işaretsiz) Stirling sayıları ile ters faktöriyel serilerinin ilişkisini ortaya koymuştur. Boyadzhiev, 2023 yılındaki çalışmasında ise

$$\frac{1}{x^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

eşitliğini kullanarak asimptotik seriler ile ters faktöriyel serileri ilişkilendiren bir teorem kanıtlamıştır (bkz. Teorem 3.23.). Bu teorem yardımı ile birçok önemli sayı ailesi için çok çeşitli eşitlikler elde etmiştir. Bu tez çalışması, Boyadzhiev'in teoriye kattığı bakış açısı ile birlikte kaynaça kısmında verilen kaynaklardaki mevcut bilgilerin tartışılması, çeşitlendirilmesi ve genelleştirilmesini hedeflemektedir.

2. KAYNAK TARAMASI

2.1. Faktöriyel Serilerinin Genel Teorisi

Bu bölümde faktöriyel serilerin iki tipi için de yakınsaklık ile ilgili temel teoremler sunulacaktır. Bu bölüm Hughes (1931), Milne-Thomson (1951) ve Watson (1912) kaynaklarından derlenmiştir.

Tanım 2.1. (Milne-Thomson (1951)) Faktöriyel serileri birinci tip faktöriyel serisi ve ikinci tip faktöriyel serisi olmak üzere iki gruba ayrılmaktadır. Birinci tip faktöriyel serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n!}{z(z+1)\dots(z+n)} \quad (2.1)$$

ve ikinci tip faktöriyel serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{z-1}{n} \quad (2.2)$$

biçimindedir.

Bu iki serinin pek çok ortak özelliği vardır. Faktöriyel serilerinin yakınsaklık bölgesi, genel olarak z karmaşık düzleminde dikey bir doğrunun sağında uzanan bir yarım düzlemdir. Faktöriyel serilerin genel teorisi ve yakınsaklığı Nielsen (1901; 1902; 1904a; 1904b; 1904c; 1904d), Landau (1906) ve Pincerle (1902; 1903; 1905) tarafından incelenmiştir. Ayrıca Nörlund, 1914 yılındaki çalışmasında düzgün yakınsama bölgesi ile ilgili önemli bir sonucu kanıtlamıştır.

Faktöriyel Serileri için Temel Yakınsaklık Teoremleri

Teorem 2.2. (Bendixson (1887); Nielsen (1902))

a) (2.1) serisi bir $z = z_0$ için yakınsak ise $z = 0, -1, -2, \dots$ hariç $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(z_0)$ olan her z için yakınsaktır.

b) (2.2) serisi $z = 0, 1, 2, \dots$ hariç olmak üzere, bir $z = z_0$ için yakınsak ise $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(z_0)$ olan her z için yakınsaktır.

(2.1) ve (2.2) serilerinin yakınsaklık bölgesi soldan $\operatorname{Re}(z) = \lambda$ doğrusu ile sınırlı bir yarı düzlemdir. λ bir genelleştirilmiş reel sayıdır ve yakınsaklık apsisi olarak adlandırılır. Seri $\operatorname{Re}(z) = \lambda$ doğrusunun sağında her yerde (belki sonlu sayıda nokta hariç) yakınsak, solunda ise ıraksaktır. Doğru üzerinde ise serilerin yakınsaklığı ile ilgili kesin bir şey

söylenemez. Eğer (2.1) serisi için $z = 0, -1, -2, \dots$ noktaları sınır çizgisinin sağında yer alırsa bu noktalar hariç tutulur çünkü bu noktalarda serinin terimleri tanımsızdır. Eğer (2.2) serisi için $z = 0, 1, 2, \dots$ noktaları sınır çizgisinin sağında yer alırsa bu noktalar hariç tutulur çünkü serinin terimleri bu noktalarda sıfırdır.

Landau (2.1) ve (2.2) serilerinin düzgün yakınsaklığı ile ilgili aşağıdaki teoremi kanıtlamıştır.

Teorem 2.3. (Landau (1906)) (2.1) ve (2.2) serileri, sınırlarıyla birlikte yakınsaklık yarı düzleminin içinde yer alan ve $z = 0, -1, -2, \dots$ noktalarını içermeyen herhangi bir R bölgesinde düzgün yakınsaktır.

Faktöriyel serilerinin düzgün yakınsadığı alternatif bir bölge Nörlund (1914) tarafından verilmiştir.

Teorem 2.4. (Nörlund (1914)) (2.1) serisi için $z = 0, -1, -2, \dots$ ve (2.2) serisi için $z = 0, 1, 2, \dots$ noktaları hariç olmak üzere köşesi z_0 noktasında bulunan ve aşağıdaki eşitsizlikler ile karakterize edilen açısız bir δ bölgesinde düzgün yakınsaktır:

$$0 \leq |z - z_0| \leq G, \quad \frac{-\pi}{2} + \varepsilon \leq \arg(z - z_0) \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

Burada G herhangi pozitif tam sayı ve ε yeterince küçük pozitif bir sayıdır.

Teorem 2.5. (Nörlund (1914)) (2.1) ve (2.2) serilerinin her biri yakınsama yarı düzleminde analitik bir fonksiyonu temsil eder.

Söz konusu (2.1) ve (2.2) serileri için yakınsaklık apsisi λ 'nın nasıl belirleneceği aşağıdaki teoremden verilmiştir.

Teorem 2.6. (Landau (1906)) (2.1) ve (2.2) serileri için yakınsaklık apsisi λ ,

$$\begin{aligned} \alpha &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \left| \sum_{s=0}^n a_s \right| / \ln n \right), \beta = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \left| \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s a_s \right| / \ln n \right), \\ \bar{\alpha} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \left| \sum_{s=n+1}^{\infty} a_s \right| / \ln n \right), \bar{\beta} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \left| \sum_{s=n}^{\infty} (-1)^s a_s \right| / \ln n \right), \end{aligned}$$

olmak üzere, sırasıyla,

$$\lambda = \begin{cases} \alpha, & \sum_{s=0}^{\infty} a_s \text{ ıraksak ise,} \\ \bar{\alpha}, & \sum_{s=0}^{\infty} a_s \text{ yakınsak ise,} \end{cases}$$

ve

$$\lambda = \begin{cases} \beta, & \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s a_s \text{ ıraksak ise,} \\ \bar{\beta}, & \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s a_s \text{ yakınsak ise,} \end{cases}$$

olarak tanımlanır. $\lambda = -\infty$ ise seri tüm düzlemde yakınsak ve $\lambda = \infty$ ise tüm düzlemde ıraksaktır.

2.2. Ters Faktöriyel Serileri

Uygun bir $f(z)$ fonksiyonu için faktöriyel serilerin birinci tipi olan ve

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n!}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

şeklinde ifade edilen serilere ters faktöriyel serileri denir. λ yakınsaklık apsisi olmak üzere $f(z)$ 'nin yakınsama bölgesinin soldan $\operatorname{Re}(z) = \lambda$ doğrusu ile sınırlı bir yarı düzlem olduğundan bahsedilmişti. Seri $z = 0, -1, -2, -3, \dots$ noktaları için tanımsız olduğundan bu noktaların yakınsama düzleminin dışında kaldığı varsayılır. $\lambda = -\infty$ olduğunda bu noktalardan sonlu tanesinin yakınsama yarı düzleminin içinde kalması gerektiği açıktır.

Teorem 2.7. (Milne-Thomson (1951)) Bir fonksiyonun ters faktöriyel seri açılımı varsa bu açılım tek türdür.

Fonksiyonların Ters Faktöriyel Serisine Açılması

Ters faktöriyel serileri ile ilgili en temel çalışmalardan olan Watson 1912'de asimptotik açılıma sahip (yani $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^{k+1}}$ şeklinde) seriler için genel olarak ters faktöriyel tipli açılımın mümkün olduğu gösterilmiştir. Bu teknik sonuç şöyle ifade edilebilir:

Teorem 2.8. (Watson (1912)) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ve $\rho < \frac{3}{\pi}$,

$$2 \cos \left(\frac{\sin \alpha}{\rho} \right) = \exp \left(-\frac{\cos \alpha}{\rho} \right)$$

eşitliğini sağlayan sayılar olsun. γ bir sonlu sayı ve $\delta > 0$ olmak üzere $f(z)$ fonksiyonu,

$$D = \left\{ z : |z| > \gamma, |\arg z| \leq \frac{1}{2}\pi + \alpha + 2\delta \right\}$$

bölgesinde bir analitik fonksiyon olsun. D bölgesinde $f(z)$ fonksiyonunun, her $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ için n sayısından bağımsız olan A , B ve σ sabitleri ile

$$|a_n| < A\rho^n n! \quad \text{ve} \quad |R_n z^{n+1}| < B\sigma^n n!$$

özelliklerini sağlayan

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots + \frac{a_n}{z^n} + R_n$$

asimptotik açılımı var olsun. Bu durumda, $\operatorname{Re}(z) < \gamma + 1$ ve $\operatorname{Re}(z) > 2$ için

$$f(z) = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z(z+1)} + \frac{b_3}{z(z+1)(z+2)} + \cdots$$

yakınsak seri açılımı vardır.

Nielsen (1901), bir fonksiyonun asimptotik açılımı varsa bir ters faktöriyel seri açılımı vardır ve bu açılım ya asimptotik ya da yakınsaktır gerçeğini göstermiştir.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Bir Fonksiyonun Ters Faktöriyel Seri Açılımı

Bu bölümün amacı uygun bir $f(z)$ fonksiyonu verildiğinde bu fonksiyonun ters faktöriyel serisini belirlemek ya da ters faktöriyel serisi verilen fonksiyonu bulmaktır. Bu bölüm Nörlund (1926) ve Boyadzhiev'in (2023) çalışmalarını temel almaktadır.

Tanım 3.9. Verilen bir n doğal sayısı için azalan faktöriyel,

$$z^{\underline{n}} = z(z-1)(z-2)\dots(z-n+1)$$

ve artan faktöriyel,

$$z^{\overline{n}} = z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)$$

eşitlikleri ile verilir. Artan faktöriyel Pochhammer fonksiyonu olarak da bilinir.

Tanım 3.10. Euler gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \text{Re}(z) > 0$$

ile ifade edilir.

n doğal sayısı için $\Gamma(n) = (n-1)!$ sağlanır. Gamma fonksiyonu ile artan faktöriyel arasında

$$z^{\overline{n}} = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}$$

eşitliği vardır (Abramowitz ve Stegun (1972)).

Tanım 3.11. Euler beta fonksiyonu

$$\beta(z, y) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad \text{Re}(z) > 0, \text{Re}(y) > 0$$

şeklinde verilir.

Gamma ve beta fonksiyonları arasında

$$\beta(z, y) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(y)}{\Gamma(z+y)}$$

ilişkisi vardır.

Bu tanım ve özellikler yardımıyla daha önce tanımlanan $f(z)$ fonksiyonunun ters faktöriyel seri ifadesi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!a_n}{z(z+1)\dots(z+n)} = \Gamma(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!a_n}{\Gamma(z+n+1)}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade gamma ve beta fonksiyonlarının ilişkisi kullanılarak

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \beta(z, n+1)$$

şeklinde ifade edilebilir. Beta fonksiyonunun integral tanımından

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^n dt$$

olur. Bu gösterimde

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (1-t)^n = \phi(t) \quad (3.1)$$

denilirse

$$f(z) = \int_0^1 t^{z-1} \phi(t) dt \quad (3.2)$$

elde edilir. Bu formdaki integrallere Laplace integrali denir. Bu integral kullanılarak ters faktöriyel serisi verilen fonksiyon belirlenebilir. Diğer taraftan (3.2) ifadesinde $f(z)$ fonksiyonunun Mellin dönüşümü ile $\phi(t)$ fonksiyonunun integral ifadesi

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} t^{-z} f(z) dz \quad (3.3)$$

şeklinde elde edilir (Nörlund (1926)). $\phi(t)$, ters faktöriyel serisinin *üreteç fonksiyonu* olarak adlandırılır. Burada l , $f(z)$ fonksiyonunun ters faktöriyel serisinin yakınsaklık apsinden büyük herhangi bir sayıdır.

Şimdi bu bilgilerden yararlanarak, verilen bir fonksiyonun ters faktöriyel serisinin bulunması ve verilen bir ters faktöriyel serisinin ait olduğu fonksiyonun bulunmasına dair örnekler verilecektir.

Örnek 3.12.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

ters faktöriyel serisinin ait olduğu fonksiyonu elde edelim. Bunun için (3.1) eşitliğinde

(a_n) dizisi olarak $a_0 = 0$ ve $n \geq 1$ için $a_n = n^{-1}$ alınırsa

$$\phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-t)^n}{n} = -\ln t$$

olur. Diğer taraftan (3.2) göz önünde tutulursa

$$f(z) = - \int_0^1 t^{z-1} \ln t dt = \frac{1}{z^2}$$

elde edilir, yani

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{z(z+1) \dots (z+n)} = \frac{1}{z^2}$$

bulunur (Milne-Thomson (1951)). Bu seri $\operatorname{Re}(z) > 0$ için yakınsaktır.

Örnek 3.13. $f(z) = \frac{1}{z-a}$ fonksiyonunun ters faktöriyel seri açılımını yani a_n katsayılarını bulalım. (3.3) integralinden

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} \frac{t^{-z}}{z-a} dz = t^{-a}$$

elde edilir. Bunun doğruluğunu (3.2) eşitliği yardımıyla

$$f(z) = \frac{1}{z-a} = \int_0^1 t^{z-1-a} dt$$

olarak teyit edebiliriz. Diğer taraftan $\phi(t)$ fonksiyonunun istenilen seri açılımı için binom teoremi kullanılırsa

$$t^{-a} = [1 - (1-t)]^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a+n-1}{n} (1-t)^n$$

elde edilir, yani $a_n = \binom{a+n-1}{n}$ bulunur. Böylece istenilen ters faktöriyel seri açılımı

$$\frac{1}{z-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{a+n-1}{n} n!}{z(z+1) \dots (z+n)}$$

biçimindedir. İlk birkaç terimi açık olarak yazarsak

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z} + \frac{a}{z(z+1)} + \frac{a(a+1)}{z(z+1)(z+2)} + \dots$$

olur (Nörlund (1926)). Bu seri $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(a)$ için yakınsaktır.

Örnek 3.14.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} \frac{n!}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}$$

ters faktöriyel serisinin ait olduğu fonksiyonu bulalım. Burada $a_n = \binom{n+k}{n}$ olduğundan

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} (1-t)^n = \frac{1}{t^{k+1}}$$

şeklindedir. Böylece (3.2) yardımıyla istenen fonksiyon

$$f(z) = \int_0^1 t^{z-1} \phi(t) dt = \int_0^1 t^{z-k-2} dt = \frac{1}{z-k-1}$$

olarak elde edilir. Yani

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} \frac{n!}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)} = \frac{1}{z-k-1}, \quad \operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(k+1)$$

olduğu görülür.

Sıradaki örneklerde katsayıları harmonik ve hiperharmonik sayılar olan ters faktöriyel serileri ile ilgileneneğimiz için harmonik ve hiperharmonik sayılar tanımlanacak ve bazı özellikleri verilecektir.

Tanım 3.15. $n \in \mathbb{N}$ için n . harmonik sayı H_n ile gösterilir ve

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

şeklinde ifade edilir (Özel olarak $H_0 = 0$ kabul edilir.).

Cauchy çarpımından harmonik sayıların üreteç fonksiyonunun

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n z^n = -\frac{\ln(1-z)}{1-z}$$

şeklinde olduğu açıktır.

Tanım 3.16. $h_n^{(1)} = H_n$ ile gösterilmek üzere

$$h_n^{(2)} = \sum_{k=1}^n h_k^{(1)}$$

toplamı ikinci mertebeden n . hiperharmonik sayı olarak adlandırılır. Genel halde $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$h_n^{(r)} = \sum_{k=1}^n h_k^{(r-1)}$$

ile gösterilen sayıya r . mertebeden n . hiperharmonik sayı adı verilir (Conway ve Guy (1996)). Özel olarak, $h_n^{(0)} = \frac{1}{n}$ ve $h_0^{(r)} = 0$ alınır.

Tanımın doğrudan bir sonucu olarak

$$h_n^{(r)} = h_{n-1}^{(r)} + h_n^{(r-1)}$$

eşitliği sağlanır. Hiperharmonik sayıların üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(r)} z^n = -\frac{\ln(1-z)}{(1-z)^r}$$

biçimindedir (Benjamin vd. (2003); Dil ve Mezö (2008)).

Örnek 3.17. Katsayıları H_n olan ters faktöriyel serisi için,

$$\frac{1}{(z-1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! H_n}{z(z+1) \dots (z+n)}, \quad \operatorname{Re}(z) > 1$$

eşitliğinin sağlandığını görelim.

$a_n = H_n$ olduğundan harmonik sayıların üreteç fonksiyonu ve (3.1) ile

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n (1-t)^n = \frac{-\ln t}{t}$$

elde edilir. Buradan (3.2) kullanılarak istenen fonksiyon

$$f(z) = \int_0^1 t^{z-1} \phi(t) dt = - \int_0^1 t^{z-1} \frac{\ln t}{t} dt = - \int_0^1 t^{z-2} \ln t dt = \frac{1}{(z-1)^2}$$

olarak elde edilir.

Ayrıca bu serinin $\operatorname{Re}(z) > 1$ için yakınsak olduğu Teorem 2.6. yardımıyla gösterilebilir. Şöyle ki $\sum_{s=0}^{\infty} H_s = \infty$ olduğundan $\lambda = \alpha$ biçimindedir. Bu α değeri ise

$$\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \left| \sum_{s=0}^n H_s \right| / \ln n \right)$$

şeklinde dir. $\sum_{s=0}^n H_s = (n+1)(H_{n+1} - 1)$ ve $n \rightarrow \infty$ için $H_n \sim \ln n$ olduğu bilinmektedir (Dil ve Mezö (2010)). Bu bilgi göz önüne alınırsa $\alpha = 1$ bulunur.

Aynı bakış açısıyla hiperharmonik sayıları içeren ters faktöriyel serisi aşağıdaki gibidir.

Örnek 3.18. Katsayıları $h_n^{(r)}$ olan ters faktöriyel serisi için

$$\frac{1}{(z-r)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! h_n^{(r)}}{z(z+1)\dots(z+n)}, \quad \operatorname{Re}(z) > r$$

eşitliğinin sağlandığını görelim. $a_n = h_n^{(r)}$ olmak üzere hiperharmonik sayıların üreteç fonksiyonu ve (3.1) ile

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(r)} (1-t)^n = \frac{-\ln t}{t^r}$$

olur. (3.2) kullanılarak $\operatorname{Re}(z) > r$ için

$$f(z) = \int_0^1 t^{z-1} \phi(t) dt = - \int_0^1 t^{z-1} \frac{\ln t}{t^r} dt = - \int_0^1 t^{z-r-1} \ln t dt = \frac{1}{(z-r)^2}$$

elde edilir.

3.2. Ters Faktöriyel Serileri ve Stirling Sayıları

Boyadzhiev'in çalışmalarında (bkz. 2008 ve 2023) Stirling sayıları ve ters faktöriyel seriler arasında güçlü ilişkiler olduğu ortaya konulmuştur. Bu alt bölümde Stirling sayılarını ve ters faktöriyel serileri içeren, literatürden bazı sonuçlar verilecektir.

Tanım 3.19. $s(n, k)$, birinci tip (işaretli) ve $S(n, k)$, ikinci tip Stirling sayılarını göstermek üzere birinci ve ikinci tip Stirling sayıları, sırasıyla

$$\frac{[\ln(1+z)]^k}{k!} = \sum_{n=k}^{\infty} s(n, k) \frac{z^n}{n!}$$

ve

$$\frac{(e^z - 1)^k}{k!} = \sum_{n=k}^{\infty} S(n, k) \frac{z^n}{n!}$$

üstel üreteç fonksiyonları ile ifade edilirler (Comtet (1974)).

Birinci tip işaretli Stirling sayıları $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ ile gösterilir. Birinci tip işaretli ve işaretli Stirling sayıları arasında $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = (-1)^{n-k} s(n, k)$ eşitliği sağlanır (Abramowitz ve Stegun (1972)). Bu özellik yardımı ile birinci çeşit işaretli Stirling sayılarının üstel üreteç fonksiyonu

$$\frac{[-\ln(1-z)]^k}{k!} = \sum_{n=k}^{\infty} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] \frac{z^n}{n!}, \quad |z| \leq 1$$

şeklinde (Comtet (1974)).

Artan faktöriyel ile $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ sayıları arasında

$$z^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} z^k$$

eşitliği vardır. Bu ifade bazı kaynaklarda birinci tip işaretli Stirling sayılarının adi üreteç fonksiyonu olarak da adlandırılır. Bu ikisinden daha az bilinen bir üreteç fonksiyonu

$$\frac{1}{z^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{1}{z(z+1)\dots(z+n)} \quad (3.4)$$

biçimindedir (Boyadzhiev (2012); Tweddle (2003)). Bu ifade bir ters faktöriyel serisidir. Bu eşitlik çalışmamız için oldukça kıymetli olup çeşitli seriler üretmek için kullanılacaktır.

Şimdi birinci tip işaretli Stirling sayılarının iki özel durumunu not edelim. Bunlar $\begin{bmatrix} n+1 \\ 1 \end{bmatrix} = n!$ ve harmonik sayılar ile birinci çeşit işaretli Stirling sayıları arasındaki bir ilişkiyi veren $\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} = n!H_n$ (Graham vd. (1993)) eşitlikleridir. Bu iki ilişki kullanılarak (3.4) serisinin $k = 1$ ve $k = 2$ özel durumları için

$$\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{z(z+1)\dots(z+n)} \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{(z-1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!H_n}{z(z+1)\dots(z+n)} \quad (3.6)$$

olduğunu görmek kolaydır. Bu iki seri $\text{Re}(z) > 1$ için yakınsaktır.

Riemann zeta fonksiyonu için (3.4) ters faktöriyel serisi yardımı ile aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 3.20. (Jordan (1939); Boyadzhiev (2008); Boyadzhiev (2023)) Rieamann zeta fonksiyonu için

$$\zeta(k+1) = \sum_{n=k}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{1}{n!n} \quad (3.7)$$

sağlanır.

İspat Özel olarak (3.4) eşitliğinde $z = m$ pozitif tam sayı değeri göz önüne alınıp m üzerinden toplama geçilirse

$$\zeta(k+1) = \sum_{n=k}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)\dots(m+n)}$$

elde edilir. Burada karşımızda çıkan içerdeki seri toplamının

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)\dots(m+n)} = \frac{1}{n!n}$$

olduğu iyi bilinen bir sonuçtur (Boyadzhiev (2008)). Buradan Riemann zeta fonksiyonu için

$$\zeta(k+1) = \sum_{n=k}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{1}{n!n}$$

eşitliği elde edilir. □

Tanım 3.21. Hurwitz zeta fonksiyonu

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1, a \neq 0, -1, -2, \dots$$

şeklinde ifade edilir.

Riemann zeta fonksiyonu için elde edilen eşitliğin benzeri Hurwitz zeta fonksiyonu için aşağıdaki önerme ile verilmiştir.

Önerme 3.22. (Boyadzhiev (2023)) $k \geq 1$ ve $a > 0$ olmak üzere

$$\zeta(k+1, a) = \Gamma(a) \sum_{n=k}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{1}{n\Gamma(n+a)} \quad (3.8)$$

şeklindedir.

İspat (3.4) ifadesinde $z = m + a$ alınırsa

$$\frac{1}{(m+a)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{1}{(m+a)(m+a+1)\dots(m+a+n)}$$

olur ve m üzerinden toplam alınırsa

$$\zeta(k+1, a) = \sum_{n=k}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+a)(m+a+1)\dots(m+a+n)} \right\}$$

elde edilir. Parantez içindeki toplamı düzenlersek

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+a)(m+a+1)\dots(m+a+n)} = \frac{\Gamma(a)}{n\Gamma(n+a)}$$

olduğundan

$$\zeta(k+1, a) = \Gamma(a) \sum_{n=k}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{1}{n\Gamma(n+a)}$$

elde edilir. $\square$

Not: (3.8) eşitliği özel durumda $a = 1$ için (3.7) ifadesine indirgenir.

Şimdi bir sonraki teoremden merkezi bir rolü olan Stirling dönüşümünü verelim.

Bir (a_n) dizisi verildiğinde

$$b_n = \sum_{k=0}^n S(n, k) a_k$$

biçiminde tanımlanan bağıntıya (a_n) dizisinin Stirling dönüşümü denilir. Bu dönüşümün evriği

$$a_n = \sum_{k=0}^n s(n, k) b_k$$

olarak ortaya çıkar (Comtet (1974); Boyadzhiev (2018)).

Aşağıdaki önerme bir dizinin asimptotik serisi ile onun Stirling dönüşümünün ters faktöriyel serisi arasındaki eşitliği verir. Bu önerme sayesinde çeşitli ters faktöriyel serilerin üretilebileceğini göreceğiz.

Teorem 3.23. (Boyadzhiev (2023)) Verilen bir (a_n) dizisi için

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z(z+1)\dots(z+n)} \left\{ \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a_k \right\} \quad (3.9)$$

eşitliği sağlanır.

İspat (3.4) ifadesinde her iki taraf a_k ile çarpılıp k üzerinden sıfırdan sonsuza toplam alınır ve toplamaların yerleri değiştirilirse (3.9) elde edilir. $\square$

Burada

$$b_n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a_k$$

Stirling dönüşümü yardımı ile (3.9) eşitliği kullanılarak birbirinin Stirling dönüşümü olan diziler içeren ters faktöriyel serileri elde edilebilir. İşaretsiz yerine işaretli Stirling sayılarını kullanmak istersek

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (-1)^{n-k} s(n, k)$$

eşitliği ile (3.9) ifadesinde a_k yerine $(-1)^k a_k$ olarak denk bir ifade olan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a_k}{z^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z(z+1)\dots(z+n)} \left\{ \sum_{k=0}^n s(n, k) a_k \right\} \quad (3.10)$$

eşitliğine ulaşılır.

Şimdi (3.9) ve (3.10) kullanılarak elde edilen bazı ters faktöriyel serileri verilecektir. Bunun öncesinde Stirling sayıları ile ilgili bazı hatırlatmalara ihtiyaç vardır.

Tanım 3.24. İkinci tip Stirling sayıları

$$\sum_{n=0}^{\infty} S(n, m) x^n = \frac{x^m}{(1-x)(1-2x)\dots(1-mx)} \quad (3.11)$$

üreteç fonksiyonu ile ifade edilirler ve $0 \leq p < n$ olan iki tam sayı için,

$$\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} S(k+1, p+1) = \frac{n!}{p!} \binom{n}{p} \quad (3.12)$$

özellliği sağlanır (Boyadzhiev (2018)).

Örnek 3.25. (3.9) ifadesinde $a_k = S(k+1, p+1)$ alınıp, ardından (3.12) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S(k+1, p+1)}{z^{k+1}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z(z+1)\dots(z+n)} \left\{ \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} S(k+1, p+1) \right\} \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{z(z+1)\dots(z+n)} \binom{n}{p} \end{aligned}$$

olur. Sol taraftaki seri için (3.11) ifadesinde $x = \frac{1}{z}$ yazılırsa

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)\dots(z-p-1)} = \frac{1}{p!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{z(z+1)\dots(z+n)} \binom{n}{p}, \quad \text{Re}(z) > p+1$$

elde edilir. Bu seriden $p=0$ için (3.5) elde edilir (Boyadzhiev (2023)).

Sıradaki örnek için önce genelleştirilmiş harmonik sayı tanımı verilecektir.

Tanım 3.26. Genelleştirilmiş n . harmonik sayı H_n^m ile gösterilir ve

$$H_n^m = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^m}$$

şeklinde ifade edilir. Özel olarak $H_n^1 = h_n^1 = H_n$ yani harmonik sayıdır.

Genelleştirilmiş harmonik sayılar için

$$\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} k^2 = n! (H_n + H_n^2 - H_n^{(2)}) \quad (3.13)$$

sağlanır (Boyadzhiev (2018)).

Örnek 3.27. (3.9) ifadesinde $a_k = k^2$ alınırsa

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{z^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z(z+1)\dots(z+n)} \left\{ \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} k^2 \right\}$$

olur. (3.13) eşitliğinden

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{z^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! (H_n + H_n^2 - H_n^{(2)})}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

elde edilir. Sol taraftaki seriyi $z > 1$ için hesaplırsak

$$\frac{z+1}{(z-1)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! (H_n + H_n^2 - H_n^{(2)})}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

ters faktöriyel serisine ulaşılır (Boyadzhiev (2023)).

Birinci ve ikinci tip Cauchy sayılarını içeren örnekler için öncelikle bu sayıları hatırlatalım.

Tanım 3.28. C_n ile gösterilen birinci tip Cauchy sayıları ile d_n ile gösterilen ikinci tip Cauchy sayıları üreteç fonksiyonları diliyle, sırasıyla

$$\frac{x}{\ln(1+x)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{x^n}{n!}$$

ve

$$\frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \frac{x^n}{n!}$$

olarak ifade edilirler (Comtet (1974)).

İkinci tip Cauchy sayıları için

$$\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{1}{k+1} = (-1)^n d_n$$

ve birinci tip Cauchy sayıları için

$$\sum_{k=0}^n s(n, k) \frac{1}{k+1} = C_n$$

özellliği sağlanır (Boyadzhiev (2018)).

Örnek 3.29. (3.9) eşitliğinde $a_k = \frac{1}{k+1}$ alınırsa

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1) z^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n d_n}{z(z+1) \dots (z+n)}, \quad z > 1$$

olduğu görülür. Soldaki seri

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1) z^{k+1}} = -\ln \left(1 - \frac{1}{z} \right)$$

olduğundan

$$-\ln \left(1 - \frac{1}{z} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n d_n}{z(z+1) \dots (z+n)}, \quad z > 1$$

ters faktöriyel serisi elde edilir. Benzer şekilde (3.10) ifadesi yardımıyla

$$\ln \left(1 + \frac{1}{z} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n C_n}{z(z+1) \dots (z+n)}, \quad z > 0$$

eşitliği elde edilebilir (Boyadzhiev (2023)).

Örnek 3.30. $\psi(z) = \Gamma'(z) / \Gamma(z)$ olarak tanımlanan digamma fonksiyonunun türevinin ters faktöriyel serisi

$$\psi'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{z(z+1) \dots (z+n)} \frac{1}{(n+1)}$$

şeklindedir (Hansen (1975)).

Örnek 3.31. Nielsen Beta fonksiyonu

$$\beta(z) = \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{t+1} dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{-zt}}{e^{-t}+1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+z}, \quad \operatorname{Re}(z) \geq 0$$

ile tanımlanır (Nielsen (1965)). $\beta(z)$ için kısmi integrasyon ile

$$\beta(z) = \frac{1}{2z} + \frac{1}{z} \int_0^1 \frac{t^z}{(t+1)^2} dt$$

elde edilir (Boyadzhiev (2008)). Bu işlem tekrar tekrar uygulanarak Nielsen Beta fonksiyonu için

$$\beta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^{n+1}} \frac{1}{z(z+1) \dots (z+n)} \quad (3.14)$$

ters faktöriyel serisi elde edilir (Nielsen 1965, Nörlund 1914).

Örnek 3.32. *Tamamlanmamış alt gamma fonksiyonu*

$$\gamma(z, x) = \int_0^x t^{z-1} e^{-t} dt \quad x > 0, \quad \operatorname{Re}(z) > 0 \quad (3.15)$$

şeklinde tanımlanır. Tamamlanmamış alt gamma fonksiyonunun ters faktöriyel seri açılımı

$$\gamma(z, x) = x^z e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

şeklindedir (Temme (1996)).

$x = 1$ için,

$$e\gamma(z, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

olur.

Boyadzhiev'in 2023 yılındaki çalışmasında, meşhur birçok sayı ve polinom ailesini ters faktöriyel serileri etrafında ilişkilendiren sonuçlar verilmiştir. Bunlardan bahsetmek için önce bazı hatırlatmalar yapılacaktır.

Tanım 3.33. $\varphi_n(x)$ ile gösterilen üstel polinomlar,

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^n S(n, k) x^k$$

eşitliği ile ifade edilmektedir. $x = 1$ için $\varphi_n(1)$ ifadesine n . üstel sayı denir (Bell (1934); Riordan (1958)).

Tanım 3.34. $w_n(x)$ ile gösterilen geometrik polinomlar

$$w_n(x) = \sum_{k=0}^n S(n, k) k! x^k$$

eşitliği ile ifade edilir. Özel olarak $x = 1$ için $w_n(1)$ ifadesine n . geometrik sayı denir (Schwatt (1962); Tanny (1974)).

Tanım 3.35. *Bir x parametresi için $B_n(x)$ Bernoulli polinomu, üreteç fonksiyonları di-*

liyle

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n, \quad (|z| < 2\pi)$$

biçiminde ifade edilmektedir. Bernoulli polinomları için,

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k x^{n-k}$$

eşitliği sağlanır. Özel olarak $x = 0$ için, $B_n(0)$ sayıları Bernoulli sayıları olarak adlandırılır ve B_n ile gösterilir (Apostol (1976)).

Tanım 3.36. Bir x parametresi için $E_n(x)$ Euler polinomu, üreteç fonksiyonları diliyle,

$$\frac{2e^{xz}}{e^z + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{z^n}{n!}, \quad (|z| < \pi)$$

biçiminde ifade edilmektedir. Euler sayıları, $E_n = 2^n E_n\left(\frac{1}{2}\right)$ olarak tanımlanır (Abramowitz ve Stegun (1972)).

Ters faktöriyel seri temsilleri bilinen fonksiyonların asimptotik serilerini elde etmek için (3.9) ifadesinden yararlanılabilir. Şimdi buna örnek olarak, Nielsen beta fonksiyonu $\beta(z)$, tamamlanmamış gamma fonksiyonu $\gamma(z, x)$ ve digamma fonksiyonun türevi $\psi'(z)$ için asimptotik temsillerin elde edilmesini göreceğiz.

Önerme 3.37. (Boyadzhiev (2023)) Nielsen beta fonksiyonu için bir asimptotik açılım

$$\beta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} B_{n+1} (1 - 2^{n+1}) \frac{1}{z^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{E_n(0)}{z^{n+1}}$$

şeklindedir.

İspat Nielsen beta fonksiyonu $\beta(z)$ için (3.14) eşitliğinden yararlanarak

$$\beta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^{n+1}} \frac{1}{z(z+1)\dots(z+n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z(z+1)\dots(z+n)} \left\{ \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a_k \right\}$$

olur. Burada

$$b_n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a_k = \frac{n!}{2^{n+1}}$$

olarak göz önüne alınıp Stirling dönüşümü kullanılırsa

$$(-1)^n a_n = \sum_{k=0}^n S(n, k) k! \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n S(n, k) k! \left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

şeklinde yazılabilir. Burada geometrik polinomların tanımı hatırlanırsa

$$(-1)^n a_n = \frac{1}{2} w_n \left(-\frac{1}{2}\right)$$

olur. Ayrıca geometrik polinomlar ile Bernoulli sayıları ve Euler polinomları arasında

$$w_n \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{n+1} (1 - 2^{n+1}) B_{n+1} = E_n(0)$$

ilişkisi vardır (Graham vd. (1993)). Bunlar göz önüne alınırsa

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+1} (1 - 2^{n+1}) B_{n+1} = (-1)^n \frac{E_n(0)}{2}$$

olarak elde edilir. $\square$

Önerme 3.38. (Boyadzhiev (2023)) Tamamlanmamış alt gamma fonksiyonu $\gamma(z, x)$ için bir asimptotik açılım

$$\gamma(z, x) = x^z e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi_n(-x)}{z^{n+1}}$$

şeklindedir.

İspat (3.9) ifadesinden

$$\begin{aligned} \gamma(z, x) &= x^z e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{z(z+1) \dots (z+n)} \\ &= x^z e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z(z+1) \dots (z+n)} \left\{ \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a_k \right\} \end{aligned}$$

yazılabilir. Stirling dönüşümü ile

$$\begin{aligned} b_n &= x^n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a_k \\ a_n &= (-1)^n \sum_{k=0}^n S(n, k) (-1)^k x^k \end{aligned}$$

olur. Üstel polinomların tanımı hatırlanırsa $a_n = (-1)^n \varphi_n(-x)$ olduğunu görülür. Böylece (3.9) eşitliğinden

$$\gamma(z, x) = x^z e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi_n(-x)}{z^{n+1}}$$

olur. Buradan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{z(z+1) \dots (z+n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi_n(-x)}{z^{n+1}}$$

elde edilir. $\square$

Önerme 3.39. (Boyadzhiev (2023)) $\psi'(z)$ için bir asimptotik açılım

$$\psi'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B_n}{z^{n+1}}$$

şeklindedir.

İspat (3.10) ifadesinde

$$\psi'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{z(z+1)\dots(z+n)} \frac{(-1)^n}{(n+1)}$$

olmak üzere

$$\frac{(-1)^n n!}{(n+1)} = \sum_{k=0}^n s(n, k) a_k$$

olur. Burada

$$a_n = \sum_{k=0}^n S(n, k) (-1)^k \frac{k!}{k+1}$$

eşitliği elde edilir ki bu da tam olarak Bernoulli sayılarıdır (bkz. Boyadzhiev (2012)). Yani $a_n = B_n$ olur. Sonuç olarak (3.10) yardımı ile

$$\psi'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B_n}{z^{n+1}}$$

elde edilmiş olur. □

Binom toplamı ve ters faktöriyel serisini ilişkilendiren bir önerme aşağıdaki gibidir.

Önerme 3.40. (Boyadzhiev (2023)) Herhangi $p \geq 1, k \geq 0, m \geq 0$ tam sayıları için

$$\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{(-1)^j}{(j+p)^{k+1}} = (p-1)! \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{n! (n+m+1)(n+m+2)\dots(n+m+p)}$$

sağlanır.

İspat Birinci tip işaretli Stirling sayılarının üstel üreteç fonksiyonu olan

$$(-1)^k \ln^k(1-x) = k! \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{x^n}{n!} \quad |x| < 1$$

eşitliğinde her iki taraf $x^m (1-x)^{p-1}$ ile çarpılıp $[0, 1]$ aralığında x değişkenine göre integral alınırsa

$$(-1)^k \int_0^1 x^m (1-x)^{p-1} \ln^k(1-x) dx = k! \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{n!} \int_0^1 x^{n+m} (1-x)^{p-1} dx$$

bulunur. Sol taraftaki integralde $1-x = e^{-t}$ dönüşümü yapılırsa

$$(-1)^k \int_0^1 x^m (1-x)^{p-1} \ln^k(1-x) dx = \int_0^{\infty} (1-e^{-t})^m e^{-pt+t} t^k e^{-t} dt$$

elde edilir. Burada binom açılımı yardımıyla

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (1 - e^{-t})^m e^{-pt+t} t^k e^{-t} dt &= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (-1)^j \int_0^\infty t^k e^{-(j+p)t} dt \\ &= k! \sum_{n=0}^\infty (-1)^j \frac{1}{(j+p)^{k+1}} \end{aligned}$$

olur. Sağ taraftaki integral için Euler beta fonksiyonu tanımından

$$\int_0^1 x^{n+m} (1-x)^{p-1} dx = \frac{(p-1)!}{(n+m+1)(n+m+2)\dots(n+m+p)}$$

eşitliği kullanılarak istenilen elde edilir. $\square$

3.3. Ters Faktöriyel Serilerinde İşlemler

Bu alt bölümde ters faktöriyel serilerinin aritmetiğinden bahsedilecektir.

Ters Faktöriyel Serilerinde Toplama, Çıkarma ve Çarpma

Ters faktöriyel seri açılımları

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!a_n}{z(z+1)\dots(z+n)}, \quad \operatorname{Re}(z) > \lambda$$

ve

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!b_n}{z(z+1)\dots(z+n)}, \quad \operatorname{Re}(z) > \lambda'$$

biçiminde olan iki fonksiyon verilsin. Eğer l sayısı λ ve λ' sayılarından büyük bir sayı olarak seçilirse; toplamın ters faktöriyel seri açılımı

$$f_1(z) \pm f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(a_n \pm b_n)}{z(z+1)\dots(z+n)}, \quad \operatorname{Re}(z) > l$$

şeklindedir.

Çarpma problemi çarpımdaki katsayıların karmaşıklığı yüzünden daha zordur. Bu problemin çözümü şöyle verilebilir.

Teorem 3.41. (Nielsen (1904)) Yukarıdaki biçimde ters faktöriyel açılımları verilmiş $f_1(z)$ ve $f_2(z)$ fonksiyonlarının çarpımı, $\operatorname{Re}(z) > l$ için geçerli olan bir ters faktöriyel serisidir. Bu ters faktöriyel serisi, $n \geq 0$ ile $r \geq 0$ tam sayıları için

$$C_{n,s} = \sum_{p=0}^r \binom{p+r}{p} a_{s-p} \quad \text{ve} \quad A_{n+1} = \sum_{s=0}^n (n-s)!s!b_{n-s}C_{n,s}$$

olmak üzere

$$f_1(z) f_2(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A_s}{z(z+1) \cdots (z+s)}$$

şeklindedir.

Not: Çarpımdaki bu katsayıları elde etmek için ilgili fonksiyonların Laplace integral-leri kullanılabilir.

$$f_1(z) = \int_0^1 \alpha^{z-1} \mu(\alpha) d\alpha \text{ ve } f_2(z) = \int_0^1 \theta^{z-1} \sigma(\theta) d\theta$$

olmak üzere

$$f_1(z) f_2(z) = \int_0^1 \int_0^1 (\alpha\theta)^{z-1} \mu(\alpha) \sigma(\theta) d\alpha d\theta$$

olur. $\alpha\theta = t$ değişken değişikliği yapılırsa

$$f_1(z) f_2(z) = \int_0^1 t^{z-1} \chi(t) dt$$

elde edilir. Burada

$$\chi(t) = \int_t^1 \sigma\left(\frac{t}{\alpha}\right) \frac{\mu(\alpha)}{\alpha} d\alpha = \int_t^1 \mu\left(\frac{t}{\theta}\right) \frac{\sigma(\theta)}{\theta} d\theta$$

şeklindedir (Milne-Thomson (1951)). Bu ifadenin $(1-t)$ 'nin kuvvetlerine göre seri açılımındaki katsayılar, çarpımın ters faktöriyel serisinin katsayılarıdır. Bir örnek üzerinde görelim.

Örnek 3.42. Örnek 3.13'te elde edilen seri dikkate alınır

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-p} &= \frac{1}{z} + \frac{p}{z(z+1)} + \frac{p(p+1)}{z(z+1)(z+2)} + \cdots = \int_0^1 t^{z-p-1} dt \\ \frac{1}{z-q} &= \frac{1}{z} + \frac{q}{z(z+1)} + \frac{q(q+1)}{z(z+1)(z+2)} + \cdots = \int_0^1 t^{z-q-1} dt \end{aligned}$$

biçimindedir. Bu ifadeler için

$$\chi(t) = \int_t^1 \alpha^{-p-1} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{-q} d\alpha = \frac{t^{-p} - t^{-q}}{p-q}$$

şeklindedir. $\chi(t)$ fonksiyonunun $(1-t)$ 'nin kuvvetlerine göre seri açılımı

$$t^{-p} = [1 - (1-t)]^{-p} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p+n-1}{n} (1-t)^n$$

ve

$$t^{-q} = [1 - (1 - t)]^{-q} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{q+n-1}{n} (1-t)^n$$

olmak üzere

$$\chi(t) = \frac{1}{p-q} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\binom{p+n-1}{n} - \binom{q+n-1}{n} \right] (1-t)^n$$

şeklindedir. Buradaki katsayılar $\frac{1}{(z-p)(z-q)}$ fonksiyonunun ters faktöriyel seri açılımındaki katsayılardır. Özel olarak $p = 1$ ve $q = 2$ alınırsa

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!n}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

şeklinde elde edilir (Hansen (1975)).

Ters Faktöriyel Seriler ve Fark Operatörü

Uygun bir f fonksiyonu için Δ fark operatörü,

$$\Delta f(z) = f(z+1) - f(z)$$

şeklinde tanımlanır. Özel olarak $\Delta^0 f(z) = f(z)$ alınır. Fark operatörünün herhangi bir f fonksiyona k defa uygulanması ile elde edilen ifadeyi veren teorem aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.43. (Abramowitz ve Stegun (1972)) $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere herhangi bir f fonksiyonu için

$$\Delta^k f(z) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(z+i) \quad (3.16)$$

eşitliği sağlanır.

Fark operatörünün tanımı ile birlikte $(-1) \Delta f(z)$, operatörü

$$(-1) \Delta f(z) = f(z) - f(z+1)$$

şeklindedir. Fark operatörü ters faktöriyel seriler ile oldukça uyumlu bir davranış gösterir.

Ters faktöriyel seri açılımı

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!a_n}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

biçiminde olan f fonksiyonuna $(-1) \Delta f(z)$ operatörü bir defa uygulanırsa

$$(-1) \Delta f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!a_{n-1}}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

bulunur. Bu işlemin tekrarlı uygulanmasıyla aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.44. (Milne-Thomson (1951)) $(-1) \triangle f(z)$ operatörü $f(z)$ fonksiyonunun ters faktöriyel seri açılımına k defa uygulanırsa

$$(-1)^k \triangle^k f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n! a_{n-k}}{z(z+1) \dots (z+n)}$$

eşitliği elde edilir.

Ters Faktöriyel Serilerin Türevi

Teorem 3.45. (Milne-Thomson (1951)) Ters faktöriyel serisi,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! a_n}{z(z+1) \dots (z+n)} = \int_0^1 t^{z-1} \phi(t) dt$$

biçiminde verilen bir $f(z)$ fonksiyonu için $f'(z)$ 'nin ters faktöriyel serisi

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n-1} + \dots + \frac{a_{n-1}}{1}\right) n!}{z(z+1) \dots (z+n)}$$

biçimindedir.

İspat $f(z) = \int_0^1 t^{z-1} \phi(t) dt$ ifadesi için

$$f'(z) = \int_0^1 t^{z-1} \phi(t) \ln t dt$$

şeklindedir. $f'(z)$ 'nin ters faktöriyel serisi için

$$\ln t = -(1-t) - \frac{(1-t)^2}{2} - \frac{(1-t)^3}{3} - \dots$$

ve

$$\phi(t) = a_0 + a_1(1-t) + a_2(1-t)^2 + \dots$$

olmak üzere bu ifadelerin Cauchy çarpımı ile

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n-1} + \dots + \frac{a_{n-1}}{1}\right) n!}{z(z+1) \dots (z+n)}$$

elde edilir. □

$f(z)$ fonksiyonunun ters faktöriyel serisi için yakınsaklık apsisi $\lambda > 0$ ise $f(z)$ ile $f'(z)$ aynı yakınsaklık apsisine sahiptir. Ancak $\lambda < 0$ durumunda $f'(z)$ 'in yakınsaklık apsisi sıfırdır.

Örnek 3.46. *Daha önce elde edilmiş olan*

$$f(z) = \frac{1}{z-a} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{z(z+1)\dots(z+n)} = \int_0^1 t^{z-a-1} dt$$

serisi için

$$f'(z) = -\frac{1}{(z-a)^2} = \int_0^1 t^{z-a-1} \ln t dt$$

şeklinde olur. Burada Teorem 3.45 yardımıyla

$$\frac{1}{(z-a)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{z(z+1)\dots(z+n)} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \dots + \frac{1}{a+n-1} \right)$$

elde edilir (Milne-Thomson (1951)).

Ters Faktöriyel Serilerin İntegrali

Bu bölümde ters faktöriyel seri açılımı bilinen bir fonksiyonun integralinin ters faktöriyel serisini veren teoremden bahsedilecektir. Öncesinde teoremin içerisinde bahsi geçen yüksek mertebeden Bernoulli sayılarını tanımlayalım.

Tanım 3.47. *Yüksek mertebeden Bernoulli sayıları,*

$$\frac{t}{\ln(1+t)} = 1 + \frac{1}{2}t - \sum_{v=2}^{\infty} \frac{B_v^{(v-1)} t^v}{(v-1)v!} \quad (3.17)$$

üreteç fonksiyonu ile ifade edilir (Milne-Thomson (1951)).

Teorem 3.48. *(Milne-Thomson (1951)) Ters faktöriyel serisi,*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!a_n}{x(x+1)\dots(x+n)} = \int_0^1 t^{x-1} \phi(t) dt$$

biçiminde verilen bir fonksiyon için x_0 yakınsama yarı düzleminde bir iç nokta olmak üzere

$$\int_{x_0}^x f(x) dx = C + a_0 \ln x + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{b_s s!}{x(x+1)\dots(x+s)}$$

biçimindedir. Burada $b_0 = -a_1$, $b_1 = -a_2 + \frac{1}{2}a$ ve $s \geq 2$ için

$$b_s = \left(-a_{s+1} + \frac{1}{2}a_s + \sum_{v=2}^s \frac{(-1)^v B_v^{(v-1)} a_{s-v+1}}{(v-1)v!} \right)$$

şeklindedir.

İspat (3.2) ifadesinden

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^x f(x) dx \\ &= \int_0^1 (t^{x-1} - t^{x_0-1}) \frac{\phi(t)}{\ln t} dt \\ &= \phi(1) \int_0^1 \frac{t^{x-1} - 1}{\ln t} dt - \int_0^1 \frac{t^{x_0-1} \phi(t) - \phi(1)}{\ln t} dt + \int_0^1 t^{x-1} \frac{\phi(t) - \phi(1)}{\ln t} dt \end{aligned}$$

olur. Sağdaki ikinci terim x ten bağımsızdır (C olsun). Bununla birlikte

$$\int_0^1 \frac{(t^{x-1} - 1)}{\ln t} dt = \ln x$$

olduğundan

$$\int_{x_0}^x f(z) dz - \phi(1) \ln x - C = \int_0^1 t^{x-1} \frac{\phi(t) - \phi(1)}{\ln t} dt$$

şeklindedir. Şimdi

$$\frac{\phi(t) - \phi(1)}{1-t} = a_1 + a_2(1-t) + a_3(1-t)^2 + \dots$$

ifadesi ile yüksek mertebeden Bernoulli sayıları için verilen (3.17) ifadesi

$$\frac{1-t}{\ln t} = -1 + \frac{1}{2}(1-t) + \sum_{v=2}^{\infty} \frac{B_v^{(v-1)} (-1)^v (1-t)^v}{(v-1)v!}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlik kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{\phi(t) - \phi(1)}{\ln t} &= -a_1 + \left(-a_2 + \frac{1}{2}a_1\right)(1-t) \\ &\quad + \left(-a_3 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{B_2^{(1)}}{2!}a_1\right)(1-t)^2 + \dots \end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle

$$\int_{x_0}^x f(x) dx = C + a_0 \ln x + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{b_s s!}{x(x+1)\dots(x+s)}$$

olur. Burada $b_0 = -a_1$, $b_1 = -a_2 + \frac{1}{2}a_1$ ve $s \geq 2$

$$b_s = \left(-a_{s+1} + \frac{1}{2}a_s + \sum_{v=2}^s \frac{(-1)^v B_v^{(v-1)} a_{s-v+1}}{(v-1)v!}\right)$$

şeklindedir. □

Bu sonuç $\operatorname{Re}(x) > 0$, $\operatorname{Re}(x) > \lambda$ için sağlanır. Eğer $a_0 = 0$ ise $\operatorname{Re}(x) > \lambda$ durumunda sağlanır.

3.4. Genelleştirilmiş Ters Faktöriyel Serileri

Tanım 3.49. (Oxley (1956)) Genelleştirilmiş ters faktöriyel serisi bir z karmaşık değişkeni için

$$F_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n A_n^{(k)}(z)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$A_n^{(k)}(z) = \frac{k}{z+k-1} \cdot \frac{\Gamma(nk)}{\Gamma(z+nk)} \cdot \frac{\Gamma(z+k)}{\Gamma(k)}$$

şeklindedir.

$k = 1$ durumu bildiğimiz birinci tip faktöriyel seridir. İlk birkaç k değeri için

$$A_n^{(1)}(z) = \frac{(n-1)!}{z(z+1)\dots(z+n-1)}$$

$$A_n^{(2)}(z) = \frac{2(2n-1)!}{(z+1)(z+2)\dots(z+2n-1)}$$

$$A_n^{(k)}(z) = \frac{k}{(k-1)!} \frac{(kn-1)!}{(z+k-1)(z+k)(z+k+2)\dots(z+kn-1)}$$

şeklindedir. Genelleştirilmiş ters faktöriyel serisi için Laplace integrali

$$F_k(z) = \int_0^1 t^{z+k-2} \phi(t) dt$$

şeklinde olup burada $\phi(t)$ fonksiyonu

$$\phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n k \Gamma(nk)}{\Gamma(k) \Gamma((n-1)k+1)} (1-t)^{(n-1)k}$$

şeklindedir (Oxley (1956)).

3.5. Ters Faktöriyel Serilerde Dönüşümler

Bu alt bölümde ters faktöriyel seriler üzerinde tanımlanmış dönüşümlerden bahsedilecektir.

1) $(z, z+m)$ Dönüşümü (Milne-Thomson (1951))

Ters faktöriyel serilerinin,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! a_n}{z(z+1)\dots(z+n)} = \int_0^1 t^{z-1} \phi(t) dt$$

tanımından sağ taraftaki integral

$$f(z) = \int_0^1 t^{z+m-1} t^{-m} \phi(t) dt$$

olarak yazılabilir. Burada

$$t^{-m} \phi(t) = [1 - (1-t)]^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (1-t)^n$$

olup katsayılar $b_n = a_n + \binom{m}{1} a_{n-1} + \binom{m+1}{2} a_{n-2} + \dots + \binom{m+n-1}{n} a_0$ şeklindedir. Böylece

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! b_n}{(z+m)(z+m+1) \dots (z+m+n)}$$

olur.

Örnek 3.50. $\frac{1}{(z-1)^2} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n! H_n}{z(z+1) \dots (z+n)}$ ters faktöriyel seri açılımına $(z, z+m)$ dönüşümü uygulanırsa;

$$a_n = H_n \text{ ve } \phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n (1-t)^n = \frac{-\ln t}{t} \text{ olmak üzere}$$

$$f(z) = \int_0^1 t^{z-1} \phi(t) dt = - \int_0^1 t^{z-1} \frac{\ln t}{t} dt$$

$$f(z) = - \int_0^1 t^{z+m-1} t^{-m} \frac{\ln t}{t} dt$$

şeklinde olur. Burada Cauchy çarpımı ile

$$\begin{aligned} -t^{-m} \frac{\ln t}{t} &= t^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} H_n (1-t)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} (1-t)^n \sum_{n=0}^{\infty} H_n (1-t)^n \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece

$$-t^{-m} \frac{\ln t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{m+k-1}{k} H_{n-k} (1-t)^n$$

olur ve $b_n = \sum_{k=0}^n \binom{m+k-1}{k} H_{n-k}$ şeklindedir. Bu katsayıları daha sade bir formda yazmaya çalışalım. Hiperharmonik sayıların üreteç fonksiyonu olan

$$-\frac{\ln(1-x)}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(m+1)} x^n$$

ifadesinde $t = 1 - x$ yazılırsa

$$-t^{-m-1} \ln t = \sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(m+1)} (1-t)^n$$

elde edilir. O halde $(1-t)^n$ katsayıları karşılaştırılırsa

$$\sum_{k=0}^n \binom{m+k-1}{k} H_{n-k} = h_n^{(m+1)}$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{1}{(z-1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! h_n^{(m+1)}}{(z+m)(z+m+1) \dots (z+m+n)}$$

serisine ulaşılır.

2) $(z, \frac{z}{w})$ Dönüşümü (Milne-Thomson (1951))

$f(z) = \int_0^1 t^{z-1} \phi(t) dt$ integralinde $w > 1$ için $x = t^w$ değişken değişikliği yapılırsa;

$$f(z) = \frac{1}{w} \int_0^1 x^{\frac{z}{w}-1} \phi\left(x^{\frac{1}{w}}\right) dx$$

olur. Burada amaç yeni oluşan $\phi\left(x^{\frac{1}{w}}\right)$ fonksiyonunun, $(1-t)$ 'nin kuvvetlerine göre seri açılımının katsayılarını belirlemektir. Ters faktöriyel serilerinin üreteç fonksiyonunun tanımından

$$\phi\left(x^{\frac{1}{w}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1-x^{\frac{1}{w}})^n$$

olur. Burada

$$1-x^{\frac{1}{w}} = 1-(1-1+x)^{\frac{1}{w}} = \frac{1-x}{w} + \frac{w-1}{2!} \left(\frac{1-x}{w}\right)^2 + \frac{(w-1)(w-2)}{3!} \left(\frac{1-x}{w}\right)^3 + \dots$$

şeklindedir. Bunun ışığında $(1-x^{\frac{1}{w}})^n$ ifadesinin açılımını

$$(1-x^{\frac{1}{w}})^n = \sum_{k=0}^{\infty} f_{k,n}(w) (1-x)^k$$

biçiminde ifade edelim. Böylece

$$\phi\left(x^{\frac{1}{w}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (1-x)^n$$

serisinin katsayıları $b_n = f_{n,1}(w) a_1 + f_{n,2}(w) a_2 + \dots + f_{n,n}(w) a_n$ formundadır. Yani

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! b_n w^n}{z(z+w) \dots (z+wn)}$$

şeklini alır.

Örnek 3.51. $\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1)!}{z(z+1)\dots(z+n)}$ ters faktöriyel seri açılımına $(z, \frac{z}{w})$ dönüşümü uygulanırsa:

$$\phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-t)^n}{n} = -\ln t$$

olmak üzere

$$f(z) = -\int_0^1 t^{z-1} \ln t dt = \frac{1}{z^2}$$

şeklindedir. Burada $t^w = x$ dönüşümüyle

$$f(z) = -\int_0^1 x^{\frac{z}{w}-1} \phi\left(x^{\frac{1}{w}}\right) dx$$

olduğunu biliyoruz. Böylece

$$\phi\left(x^{\frac{1}{w}}\right) = -\ln\left(x^{\frac{1}{w}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1-x^{\frac{1}{w}}\right)^n}{n}$$

olur. Burada ki $-\ln x^{\frac{1}{w}}$ ifadesinin Taylor açılımı

$$-\underbrace{\ln x^{\frac{1}{w}}}_{g_w(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_w^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k$$

şeklindedir. Burada $g_w^{(0)}(1) = 0$ ve $k \geq 1$ için $g_w^{(k)}(1) = \frac{(-1)^k (k-1)!}{w}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} -\ln x^{\frac{1}{w}} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (k-1)!}{w k!} (x-1)^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kw} (1-x)^k \end{aligned}$$

şeklindedir. Böylece $b_0 = 0$ ve $n \geq 1$ için $b_n = \frac{1}{nw}$ elde edilir ve

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! b_n w^n}{z(z+w)\dots(z+wn)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)! w^{n-1}}{z(z+w)\dots(z+wn)} \end{aligned}$$

serisine ulaşılır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde tez çalışmasında elde edilen önerme, teorem ve sonuçlar yer almaktadır. İlk olarak p -Stirling sayılarını içeren sonuçlar verilecek, bunun için öncesinde bazı hatırlatmalar yapılacaktır.

Ters Faktöriyel Serileri ve p -Stirling Sayıları

Tanım 4.52. (Merris (2000)) $p \geq 0$ ve $n \geq k > 0$ olmak üzere birinci tip p -Stirling sayıları

$$\sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p \frac{x^n}{n!} = \frac{(-\ln(1-x))^k}{(1-x)^p k!}$$

üreteç fonksiyonu ile ifade edilirler.

Teorem 4.53. (Merris (2000)) $x \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$ ve $p \geq k \geq 0$ olmak üzere

$$\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p x^k = (p+x)^{\bar{n}} \quad (4.1)$$

sağlanır.

Ters faktöriyel serisi ve birinci tip p -Stirling sayılarını ilişkilendiren teorem aşağıdaki gibidir.

Teorem 4.54. $p \in \mathbb{N}$ ve $p \geq k \geq 0$ için

$$\frac{1}{(z-p)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p \frac{1}{z(z+1)\dots(z+n)}, \quad \operatorname{Re}(z) > p \quad (4.2)$$

şeklindedir.

İspat

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p \frac{1}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

ters faktöriyel seri formunda verilen f fonksiyonunu belirleyelim. Burada (3.1) ifadesi, p -Stirling sayılarının üstel üreteç fonksiyonu yardımıyla

$$a_n = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p \frac{1}{n!} \text{ ve } \phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p \frac{(1-t)^n}{n!} = \frac{(-\ln t)^k}{t^p k!}$$

şeklindedir. Bu ifade (3.2) eşitliğinde kullanılırsa $f(z)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_0^1 t^{z-1} \phi(t) dt = \int_0^1 t^{z-1} \frac{(-\ln(t))^k}{t^p k!} dt \\ &= \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 t^{z-p-1} \ln^k(t) dt \\ &= \frac{1}{(z-p)^{k+1}} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanır. $\square$

Not: (4.2) ifadesinde $p = 0$ durumu (3.4) ters faktöriyel serisini verir.

Sonuç 4.55. $\operatorname{Re}(z) > p$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(z-p)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p+x)^{\bar{n}}}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

şeklindedir.

İspat (4.2) ifadesi x^k ile çarpılıp k üzerinden toplam alınırsa ve (4.1) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(z-p)^{k+1}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z(z+1)\dots(z+n)} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p x^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p+x)^{\bar{n}}}{z(z+1)\dots(z+n)} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $\square$

Dizi Dönüşümleri ve Ters Faktöriyel Seriler

Materyal ve Metot bölümünde verilen (3.9) eşitliği, bir dizinin asimptotik serisi ve onun Stirling dönüşümünün ters faktöriyel serisi arasındaki ilişkiyi ortaya koymaktadır. Bu kısımda bir dizi ve onun binom dönüşümü, Stirling dönüşümü ve Lah dönüşümünün ters faktöriyel serisini ilişkilendiren teoremler verilecektir. Öncesinde binom dönüşümünü hatırlatalım.

Bir (a_n) dizisi verildiğinde

$$b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k$$

biçiminde tanımlanan bağıntıya (a_n) dizisinin binom dönüşümü denilir. Bu dönüşümün evriği ise

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} b_k$$

olarak ortaya çıkar (Riordan (1979)).

Binom dönüşümü yardımıyla elde edilen sonuçlar aşağıdaki teoremdedir.

Teorem 4.56. Verilen bir (a_n) dizisi ve onun binom dönüşümü olan (b_n) dizisine karşılık gelen ters faktöriyel serileri sırasıyla

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z(z+1)\dots(z+n)}, \quad \tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

şeklinde ve bu ters faktöriyel serilerinin üreteç fonksiyonları

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (1-t)^n}{n!} \text{ ve } \tilde{\phi}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n (1-t)^n}{n!}$$

biçiminde olsun. Bu durumda

a)

$$\phi(t) = e^{t-1} \tilde{\phi}(t)$$

b)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \tilde{f}(z+k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n \tilde{f}(z)}{n!}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat

a)

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} b_k \frac{(1-t)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1-t)^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{(1-t)^n}{n!} \\ &= e^{t-1} \tilde{\phi}(t) \end{aligned}$$

olur.

b) $\phi(t) = e^{t-1} \tilde{\phi}(t)$ ilişkisi kullanılırsa (3.2) ifadesi

$$f(z) = \int_0^1 t^{z-1} \phi(t) dt = \int_0^1 t^{z-1} e^{t-1} \tilde{\phi}(t) dt$$

şeklinde olur. Amacımız $f(z)$ ile $\tilde{f}(z)$ fonksiyonlarını ilişkilendirmek. $\tilde{f}(z) = \int_0^1 t^{z-1} \tilde{\phi}(t) dt$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_0^1 t^{z-1} \tilde{\phi}(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1-t)^n}{n!} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^n \tilde{\phi}(t) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \int_0^1 t^{z+k-1} \tilde{\phi}(t) dt \\ f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \tilde{f}(z+k) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca burada (3.16) ifadesinden

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \tilde{f}(z+k) = \Delta^n \tilde{f}(z)$$

şeklinde dir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır. $\square$

Verilen bir dizi ile onun Stirling dönüşümünün ters faktöriyel serileri arasındaki ilişkiyi veren teorem aşağıdaki gibidir.

Teorem 4.57. Verilen bir (a_n) dizisi ve onun Stirling dönüşümü olan (b_n) dizisine karşılık gelen ters faktöriyel serileri sırasıyla

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z(z+1)\dots(z+n)}, \quad \tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

şeklinde ve bu ters faktöriyel serilerinin üreteç fonksiyonları

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (1-t)^n}{n!} \text{ ve } \tilde{\phi}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n (1-t)^n}{n!}$$

biçiminde olsun. Bu durumda üreteç fonksiyonları arasında $\phi(2 - e^{1-t}) = \tilde{\phi}(t)$ ilişkisi vardır.

İspat

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n s(n, k) b_k \frac{(1-t)^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sum_{n=0}^{\infty} s(n, k) \frac{(1-t)^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{(\ln(2-t))^k}{k!} \end{aligned}$$

olur. Buradan $\phi(2 - e^{1-t}) = \tilde{\phi}(t)$ elde edilir. $\square$

Bu teoremin birinci çeşit işaretli Stirling sayıları kullanarak elde edilmiş hali aşağıdaki gibidir.

Teorem 4.58. *Eğer*

$$(-1)^n a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k s(n, k) b_k$$

biçiminde verilirse

$$a_n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} b_k$$

şeklindedir ve

$$\phi(e^{t-1}) = \tilde{\phi}(t)$$

sağlanır.

İspat

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} b_k \frac{(1-t)^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{(1-t)^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k (-1)^k \frac{\ln^k t}{k!} \end{aligned}$$

olur. Buradan $\phi(e^{t-1}) = \tilde{\phi}(t)$ elde edilir. $\square$

Şimdi bu teorem yardımı ile bir dizi ve onun Stirling dönüşümü ile ilişkili ters faktöriyel serilerin elde edilmesini görelim.

Örnek 4.59. *Daha önce elde edilen*

$$\frac{1}{(z-1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! H_n}{z(z+1) \dots (z+n)}$$

serisi ele alınsın. Burada

$$(-1)^n n! H_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k s(n, k) k$$

yani

$$n! H_n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} k$$

biçimindedir (Boyadzhiev (2018)). Ters faktöriyel serisinin üreteç fonksiyonu

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n (1-t)^n = \frac{-\ln t}{t}$$

biçimindedir. Buradan

$$\phi(e^{t-1}) = \frac{1-t}{e^{t-1}}$$

elde edilir. $\phi(e^{t-1}) = \tilde{\phi}(t)$ olduğundan

$$\int_0^1 t^{z-1} \phi(e^{t-1}) dt = \int_0^1 t^{z-1} \tilde{\phi}(t) dt = \tilde{f}(z)$$

yazılabilir. Böylece

$$\int_0^1 t^{z-1} \left(\frac{1-t}{e^{t-1}} \right) dt = e \left(\int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt - \int_0^1 t^z e^{-t} dt \right) = \tilde{f}(z)$$

elde edilir. Burada tamamlanmamış alt gamma fonksiyonunun tanımı olan (3.15) ifadesi hatırlanırsa

$$e(\gamma(z, 1) - \gamma(z+1, 1)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{z(z+1) \dots (z+n)} \quad (4.3)$$

şeklinde olur. Sol taraftaki ifadeyi düzenlemek için

$$\gamma(z+1, 1) = \int_0^1 t^z e^{-t} dt$$

ifadesine bir defa kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\gamma(z+1, 1) = -e^{-1} + z \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt = -e^{-1} + z\gamma(z, 1)$$

elde edilir. Bu ifade (4.3) ifadesinde yerine yazılırsa

$$e\gamma(z, 1)(1-z) + 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{z(z+1) \dots (z+n)}$$

serisine ulaşılır.

Yukarıdaki sonuçların benzerlerini Lah dönüşümü için ifade etmeden önce Lah dönüşümünü hatırlatalım.

Bir (a_n) dizisi verildiğinde

$$b_n = \sum_{k=0}^n L(n, k) a_k$$

biçiminde tanımlanan bağıntıya (a_n) dizisinin Lah dönüşümü denilir. Bu dönüşümün evriği ise

$$a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} L(n, k) b_k$$

olarak ortaya çıkar (Riordan (1979)). Burada karşımıza çıkan $L(n, k)$ ifadesi

$$\frac{1}{k!} \left(\frac{x}{1-x} \right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L(n, k) x^n}{n!}$$

üstel üreteç fonksiyonu ile tanımlanan Lah sayılarıdır (Lah (1954)).

Teorem 4.60. *Verilen bir (a_n) dizisi ve onun Lah dönüşümü olan (b_n) dizisine karşılık gelen ters faktöriyel serileri sırasıyla*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z(z+1)\dots(z+n)}, \quad \tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

şeklinde ve bu ters faktöriyel serilerinin üreteç fonksiyonları

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (1-t)^n}{n!} \text{ ve } \tilde{\phi}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n (1-t)^n}{n!}$$

biçiminde olsun. Bu durumda üreteç fonksiyonları arasında $\phi\left(2 - \frac{1}{t}\right) = \tilde{\phi}(t)$ ilişkisi vardır.

İspat

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} L(n, k) b_k \frac{(1-t)^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L(n, k) \frac{(1-t)^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{(t-1)^k}{k! (t-2)^k} \end{aligned}$$

olur. Buradan $\phi\left(2 - \frac{1}{t}\right) = \tilde{\phi}(t)$ elde edilir. □

Harmonik Sayıların Genelleştirmeleri ve Faktöriyel Tipli Seriler

Burada harmonik sayılar ve genelleştirmeleriyle ilgili ters faktöriyel tipli seriler için bazı eşitlikler verilecektir.

Daha önce de söylediğimiz gibi ters faktöriyel serilerinin ilk örneklerinden birisi Sch-lömilch (1878) tarafından verilen, $\operatorname{Re} z > 0$ olmak üzere

$$\ln \left(1 + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{z} - \frac{\alpha_1}{z(z+1)} + \frac{\alpha_2}{z(z+1)(z+2)} - \dots \quad (4.4)$$

serisidir. Burada katsayılar

$$\alpha_n = \int_0^1 t(1-t)(2-t) \dots (n-1-t) dt$$

şeklindedir. Bu açılım yardımıyla, harmonik ve hiperharmonik sayıların alterne üreteç fonksiyonlarına karşılık gelen bazı ters faktöriyel tipli seri açılımları aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Önerme 4.61. $\alpha_n = \int_0^1 t(1-t)(2-t) \dots (n-1-t) dt$ olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{H_n}{z^n} = -\frac{1}{z+1} + \frac{\alpha_1}{(z+1)^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \alpha_n}{(z+1)^2(z+2) \dots (z+n)}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{h_n^{(r)}}{z^n} = -\frac{z^{r-1}}{(1+z)^r} + \frac{\alpha_1 z^{r-1}}{(z+1)^{r+1}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{r-1} (-1)^{n-1} \alpha_n}{(z+1)^{r+1}(z+2) \dots (z+n)}$$

şeklindedir.

İspat Harmonik sayıların üreteç fonksiyonundan

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{H_n}{z^n} = -\frac{\ln \left(1 + \frac{1}{z} \right)}{1 + \frac{1}{z}} = -\frac{z}{z+1} \ln \left(1 + \frac{1}{z} \right)$$

elde edilir. Bu üreteç fonksiyonu ve (4.4) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} -\frac{z}{z+1} \ln \left(1 + \frac{1}{z} \right) &= -\frac{z}{z+1} \left(\frac{1}{z} - \frac{\alpha_1}{z(z+1)} + \frac{\alpha_2}{z(z+1)(z+2)} - \dots \right) \\ &= -\frac{1}{z+1} + \frac{\alpha_1}{(z+1)^2} - \frac{\alpha_2}{(z+1)^2(z+2)} - \dots \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu önermenin ilk ifadesini verir. Benzer ifade hiperharmonik sayılar için

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{h_n^{(r)}}{z^n} = -\frac{\ln \left(1 + \frac{1}{z} \right)}{\left(1 + \frac{1}{z} \right)^r} = -\frac{z^r}{(1+z)^r} \ln \left(1 + \frac{1}{z} \right)$$

yazılabilir. Buradan (4.4) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} -\frac{z^r}{(1+z)^r} \ln \left(1 + \frac{1}{z} \right) &= -\frac{z^r}{(1+z)^r} \left(\frac{1}{z} - \frac{\alpha_1}{z(z+1)} + \frac{\alpha_2}{z(z+1)(z+2)} - \dots \right) \\ &= -\frac{z^{r-1}}{(1+z)^r} + \frac{\alpha_1 z^{r-1}}{(z+1)^{r+1}} - \frac{\alpha_2 z^{r-1}}{(z+1)^{r+1}(z+2)} + \dots \end{aligned}$$

elde edilir bu ise önermenin ikinci iddiasıdır. $\square$

Sonuç 4.62. *Cauchy sayılarının*

$$C_n = \int_0^1 t(t-1)(t-2)\dots(t-n+1) dt$$

tanımı (Merlini vd. (2006)) hatırlanırsa, yukarıda bahsedilen α_n katsayıları

$$\alpha_n = (-1)^{n-1} C_n$$

formunda da ifade edilebilir. Yani,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{H_n}{z^n} = -\frac{1}{z+1} + \frac{C_1}{(z+1)^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n}{(z+1)^2(z+2)\dots(z+n)}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{h_n^{(r)}}{z^n} = -\frac{z^{r-1}}{(1+z)^r} + \frac{C_1 z^{r-1}}{(z+1)^{r+1}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{r-1} C_n}{(z+1)^{r+1}(z+2)\dots(z+n)}$$

eşitlikleri yazılabilir.

Aşağıdaki önerme, (3.4) ters faktöriyel serisi yardımıyla harmonik sayıların Dirichlet serisi ile Stirling sayılarını ilişkilendirir.

Önerme 4.63. *(Boyadzhiev (2023)) $k \geq 1$ ve $\psi'(z)$ için*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{H_m}{m^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \frac{\psi'(n)}{n!}$$

eşitliği sağlanır.

İspat (3.4) eşitliğinde $z = m$ pozitif tam sayı değeri göz önüne alınıp, eşitliğin her iki tarafı H_m ile çarpılıp, m üzerinden toplam alınırsa

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{H_m}{m^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \sum_{m=1}^{\infty} \frac{H_m}{m(m+1)\dots(m+n)}$$

olur. Burada

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{H_m}{m(m+1)\dots(m+n)} = \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(s+n)^2} = \frac{\psi'(n)}{n!}$$

olduğu (Boyadzhiev (2008)) göz önüne alınırsa ispat tamamlanır. □

Bu ifade harmonik zeta fonksiyonunun

$$\zeta_H(k+1) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{H_m}{m^{k+1}}$$

gösterimi yardımıyla

$$\zeta_H(k+1) = \sum_{n=k}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{\psi'(n)}{n!}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Benzer bir bakış açısı ile Dil ve Boyadzhiev'in 2015 yılındaki çalışmaları ışığında hiperharmonik ve skew-harmonik sayıların Dirichlet serilerine karşık gelen ifadeler ters faktöriyel serileri kullanılarak elde edilmiştir.

Önerme 4.64. $n+1 > r > 0$ için

$$\frac{1}{n! (r-n-1)^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h_{m-1}^{(r)}}{m(m+1) \dots (m+n)} \quad (4.5)$$

eşitliği sağlanır.

İspat Beta fonksiyonunun tanımından yararlanarak

$$\int_0^1 t^n (1-t)^{m-1} dt = \beta(n+1, m) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m+1)} = \frac{n!}{m(m+1) \dots (m+n)}$$

yani

$$\frac{1}{n!} \int_0^1 t^n (1-t)^{m-1} dt = \frac{1}{m(m+1) \dots (m+n)}$$

yazılabilir. Her iki taraf $h_{m-1}^{(r)}$ ile çarpılıp $m = 2, 3, 4, \dots$ için toplam alınırsa

$$\frac{1}{n!} \int_0^1 t^n \sum_{m=2}^{\infty} h_{m-1}^{(r)} (1-t)^{m-1} dt = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{h_{m-1}^{(r)}}{m(m+1) \dots (m+n)}$$

olur. Sağdaki seri $n+1 > r > 0$ için yakınsaktır (Dil ve Mezö (2010)). Burada $m = 1$ için $h_0^{(r)} = 0$ durumu ve hiperharmonik sayıların üreteç fonksiyonu göz önüne alınarak

$$-\frac{1}{n!} \int_0^1 t^{n-r} \ln t dt = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h_{m-1}^{(r)}}{m(m+1) \dots (m+n)}$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{1}{n! (r-n-1)^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h_{m-1}^{(r)}}{m(m+1) \dots (m+n)}$$

olur. □

Bu önerme yardımıyla hiperharmonik sayıların Dirichlet serisi için aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Sonuç 4.65. *Hiperharmonik sayıların Euler toplamı gösterimi olan (Dil, Mezö ve Cenkci (2017))*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{h_m^{(r)}}{m^{k+1}} = \zeta_{h^{(r)}}(k+1)$$

yardımla

$$\zeta_{h^{(r)}}(k+1) = \sum_{p=1}^r \sum_{n=k}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{1}{n! (p-n-1)^2} + \zeta(k+2)$$

sağlanır.

İspat $h_m^{(r)} = h_{m-1}^{(r)} + h_m^{(r-1)}$ olduğundan

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{h_m^{(r)}}{m^{k+1}} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h_m^{(r-1)}}{m^{k+1}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h_{m-1}^{(r)}}{m^{k+1}}$$

yazılabilir. Burada (3.4) eşitliğinde $z = m$ pozitif tam sayı değeri göz önüne alınıp, eşitliğin her iki tarafı $h_{m-1}^{(r)}$ ile çarpılıp, m üzerinden toplam alırsa

$$\zeta_{h^{(r)}}(k+1) - \zeta_{h^{(r-1)}}(k+1) = \sum_{n=k}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h_{m-1}^{(r)}}{m(m+1)\dots(m+n)}$$

elde edilir. Bu ise (4.5) eşitliğinden

$$\zeta_{h^{(r)}}(k+1) - \zeta_{h^{(r-1)}}(k+1) = \sum_{n=k}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{1}{n! (r-n-1)^2}$$

ifadesini verir. Burada

$$\sum_{n=k}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{1}{n! (r-n-1)^2} = T(k, r)$$

denilirse

$$\begin{aligned} \zeta_{h^{(r)}}(k+1) &= T(k, r) + \zeta_{h^{(r-1)}}(k+1) \\ &= T(k, r) + T(k, r-1) + \zeta_{h^{(r-2)}}(k+1) \\ &= T(k, r) + T(k, r-1) + \dots + T(k, 1) + \zeta_{h^{(0)}}(k+1) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} \zeta_{h^{(r)}}(k+1) &= \sum_{p=1}^r T(k, p) + \zeta(k+2) \\ &= \sum_{p=1}^r \sum_{n=k}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{1}{n! (p-n-1)^2} + \zeta(k+2) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Tanım 4.66. *Skew-harmonik sayı $\tilde{H}_n$ ile gösterilir ve*

$$\tilde{H}_n = 1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

şeklinde ifade edilir. Özel olarak $\tilde{H}_0 = 0$ olarak alınır (Boyadzhiev (2018)).

Skew-harmonik sayıların üreteç fonksiyonu

$$\frac{\ln(1+t)}{1-t} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{H}_n t^n$$

şeklindedir (Boyadzhiev (2018)). Skew-harmonik sayıların tanımından

$$\tilde{H}_n = \tilde{H}_{n-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

olduğu açıktır. Skew-harmonik sayılar için aşağıdaki önerme elde edilmiştir.

Önerme 4.67. *Skew-harmonik sayılar için*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{H}_{m-1}}{m(m+1)\dots(m+n)} = \frac{1}{n!} \left(\frac{2^n}{n} \ln 2 - \frac{2^n}{n} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{1}{2^k k} (-1)^k - 2^n \frac{H_n}{n} \right) \quad (4.6)$$

eşitliği sağlanır.

İspat Önerme 4.64'ün ispatına benzer şekilde

$$\frac{1}{n!} \int_0^1 t^n (1-t)^{m-1} dt = \frac{1}{m(m+1)\dots(m+n)}$$

ifadesinde her iki taraf $\tilde{H}_{m-1}$ ile çarpılıp $m = 2, 3, 4, \dots$ için toplam alınırsa

$$\frac{1}{n!} \int_0^1 t^n \sum_{m=2}^{\infty} \tilde{H}_{m-1}^{(r)} (1-t)^{m-1} dt = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\tilde{H}_{m-1}}{m(m+1)\dots(m+n)}$$

şeklinde olur. Burada skew-harmonik sayıların üreteç fonksiyonu ve $m = 1$ için $\tilde{H}_0 = 0$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\frac{1}{n!} \int_0^1 t^{n-1} \ln(2-t) dt = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{H}_{m-1}}{m(m+1)\dots(m+n)} \quad (4.7)$$

elde edilir. Şimdi sol taraftaki integralin çözümü için kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_0^1 t^{n-1} \ln(2-t) dt = \frac{t^n \ln(2-t)}{n} \Big|_0^1 + \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{t^n}{2-t} dt$$

olur. Eşitliğin sağındaki ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n} \int_0^1 \frac{t^n}{t-2} dt &= -\frac{1}{n} \int_0^1 \frac{(t-2+2)^n}{t-2} dt \\ &= -\frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (t-2)^k 2^{n-k}}{t-2} dt \end{aligned}$$

elde edilir. İçerdeki toplamda $k = 0$ durumunu ayırıp integralleri hesaplırsak

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n} \int_0^1 \frac{t^n}{t-2} dt &= \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{2^n}{2-t} dt - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} \int_0^1 (t-2)^{k-1} dt \\ &= -\frac{2^n}{n} \ln(2-t) \Big|_{t=0}^{t=1} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{2^{n-k} (t-2)^k}{k} \Big|_{t=0}^{t=1} \\ &= \frac{2^n}{n} \ln 2 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{2^{n-k}}{k} \left((-1)^k - (-2)^k \right) \\ &= \frac{2^n}{n} \ln 2 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{2^{n-k}}{k} (-1)^k (1-2^k) \\ &= \frac{2^n}{n} \ln 2 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{2^{n-k}}{k} (-1)^k - \frac{1}{n} 2^n \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Burada karşımıza çıkan ifade için $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = H_n$ olduğu bilinmektedir (Boyadzhiev (2018)). Bu ifade ile elde edilen eşitlik, (4.7) ifadesindeki integralin çözümüdür. Çözümün yerine yazılması ile önermenin ispatı tamamlanır. $\square$

Bu önerme ve (3.4) kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Sonuç 4.68. *Skew-harmonik sayılar için*

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{H}_m}{m^{k+1}} &= \sum_{n=k}^{\infty} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \left\{ \frac{1}{n!} \left(\frac{2^n}{n} \ln 2 - \frac{2^n}{n} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{1}{2^k k} (-1)^k - 2^n \frac{H_n}{n} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m^2 (m+1) \dots (m+n)} \right\} \end{aligned}$$

sağlanır.

İspat (3.4) eşitliğinde $z = m$ pozitif tam sayı değeri göz önüne alınıp, eşitliğin her iki tarafı $\tilde{H}_m$ ile çarpılıp, m üzerinden toplam alınırsa

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{H}_m}{m^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{H}_m}{m(m+1) \dots (m+n)}$$

şeklinde olur. Burada $\tilde{H}_m = \tilde{H}_{m-1} + \frac{(-1)^{m-1}}{m}$ olduğundan

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{H}_m}{m^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{H}_{m-1} + \frac{(-1)^{m-1}}{m}}{m(m+1)\dots(m+n)}$$

biçimindedir. Sağ taraftaki toplamın düzenlenmesi ile

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{H}_m}{m^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{H}_{m-1}}{m(m+1)\dots(m+n)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m^2(m+1)\dots(m+n)} \right\}$$

elde edilir. Böylece (4.6) ile birlikte ispat tamamlanır. $\square$

Not: Hipergeometrik fonksiyonların bazı özel halleri faktöriyel serileri ile ilişkilendirilebilir.

Tanım 4.69. *Pochhammer notasyonu yardımıyla hipergeometrik fonksiyon $|z| < 1$ olmak üzere*

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{\bar{n}} b^{\bar{n}}}{c^{\bar{n}}} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{ab}{c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots$$

eşitliği ile ifade edilmektedir.

Burada a, b ve c kompleks parametreler olup $c \neq 0, -1, -2, \dots$ şeklindedir. Bu ifade yeniden düzenlenerek a yerine $1 - a$ alınırsa

$$\begin{aligned} {}_2F_1(1-a, b; c; z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^{\bar{n}}}{c^{\bar{n}}} \frac{z^n}{n!} (1-a)(2-a)\dots(n-a) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{b^{\bar{n}}}{c^{\bar{n}}} z^n \frac{(a-1)(a-2)\dots(a-n)}{n!} \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu ise $(-1)^n \frac{b^{\bar{n}}}{c^{\bar{n}}} z^n$ dizisinin ikinci çeşit faktöriyel serisi olarak yorumlanabilir. Hipergeometrik fonksiyon birinci çeşit faktöriyel serileri cinsinden ise

$$\begin{aligned} {}_2F_1(1, 1; z; x) &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{n!}{z(z+1)\dots(z+n-1)} \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^{n+1} \frac{n!}{z(z+1)\dots(z+n)} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir.

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, matematiğin birçok uygulama alanı ile ilişkili olan ters faktöriyel serileri araştırılmıştır. Çalışma boyunca ters faktöriyel serilerinin genel teorisi verilip çeşitli uygulamalar yapılmıştır. Ters faktöriyel serilerinin özel sayı aileleri ve özel fonksiyonlar ile güçlü ilişkileri vardır. Literatürde yer alan bu bilgilerin analiz edilmesi ile elde edilen sonuçlar Bulgular ve Tartışma bölümünde verilmiştir.

Bu tez çalışmasında, verilen bir dizi ile onun binom, Stirling ve Lah dönüşümlerinin ters faktöriyel serileri arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. Ayrıca Boyadzhiev'in çalışmalarında farklı seri tipleri için (asimptotik seri ve Dirichlet serisi) ters faktöriyel serileri kullanılarak yeni eşitlikler elde edilebileceği analiz edilmiştir. Bu motivasyon ile hiperharmonik ve skew-harmonik sayıların Dirichlet serileri için bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Ters faktöriyel serileri bu çok yönlü çalışılabilirliğine rağmen değeri ölçüsünde ilgi görmemiştir. Türkçe kaynaklarda ise neredeyse hiç yer almamıştır. Bu tez çalışmasının, literatüre Türkçe bir kaynak kazandırmasının yanı sıra sunduğu bakış açısı ve çalışmada elde edilen sonuçlar bakımından yeni çalışmalara ışık tutacağı düşünülmektedir.

6. KAYNAKLAR

- Abramowitz, M. and Stegun, I. 1972. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series:55, 10th Printing, Washington, 1046 p.
- Adamchik, V. 1997. On Stirling numbers and Euler sums. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 79(1), 119-130.
- Andrews, G. E., and Berndt, B. C. 2005. Ramanujan's lost notebook (Vol. 1). New York: Springer, 744 p.
- Apostol, T. M. 1976. Introduction to Analytic Number Theory. Springer-Verlag, New York, 338 p.
- Bell, E. T. 1934. *Exponential polynomials*. *Annals of Mathematics*, 35(2): 258–277.
- Bendixson, I. 1887. Sur une extension à l'infini de la formule d'interpolation de Gauss.
- Benjamin, A.T., Gaebler, D. and Gaebler, R. 2003. A combinatorial approach to hyper harmonic numbers. *Integers: The Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*, 3: 1–9.
- Binet, J. P. M. 1839. Mémoire sur les intégrales définies eulériennes et sur leur application à la théorie des suites ainsi qu'à l'évaluation des fonctions des grands nombres. Bachelier.
- Bohr, H. 1909. Über die Summabilität Dirichletscher Reihen. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, *Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1909, 247-262.
- Boyadzhiev, K. N. 2005. A series transformation formula and related polynomials. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2005(23), 3849-3866.
- Boyadzhiev, K. N. 2012. Close encounters with the Stirling numbers of the second kind. *Mathematics Magazine*, 85(4), 252-266.

- Boyadzhiev, K. N. 2008. Evaluation of some simple Euler-type series, *Far East Journal of Mathematical Sciences*. 29, 1–11.
- Boyadzhiev, K. N. 2018. Notes on the Binomial Transform: Theory and Table with Appendix on Stirling Transform. World Scientific, 189 p.
- Boyadzhiev, K. N. 2020. New series identities with Cauchy, Stirling, and harmonic numbers, and Laguerre polynomials. *Journal of Integer Sequences*, Vol. 23, Article 20.11.7.
- Boyadzhiev, K. N. 2013. Power series with skew-harmonic numbers, dilogarithms, and double integrals. *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 56(1), 93-108.
- Boyadzhiev, K. N. 2023. Stirling numbers and inverse factorial series. *Contributions to Mathematics*. 7, 24–33.
- Comtet, L. 1974. Advanced Combinatorics: The art of finite and infinite expansions. Springer Science and Business Media.
- Dil, A. and Mezö, I. 2008. A symmetric algorithm for hyperharmonic and Fibonacci numbers. *Applied Mathematics and Computation*, 206(2): 942-951
- Dil, A. and Mezö. 2010. Hyperharmonic series involving Hurwitz zeta function. *Journal of Number Theory*, 130(2), 360-369.
- Dil, A. and Boyadzhiev, K. N. 2015. Euler sums of hyperharmonic numbers. *Journal of Number Theory*, 147: 490-498.
- Dil, A.; Mezö, I.; and Cenkci, M. (2017) "Evaluation of Euler-like sums via Hurwitz zeta values. *Turkish Journal of Mathematics*, Vol. 41: No. 6, Article 22.
- Graham, R. L., Knuth, D. E. and Patashnik, O. 1993. Concrete Mathematics. Addison Wesley, 657 p.
- Hansen, E. R. 1975. A table of series and products, Prentice-Hall, 523 p.
- Hughes, H. K. 1931. On the analytical extension of functions defined by factorial series. *American Journal of Mathematics*, 53(4), 757-780.

- Jordan, C. 1950. Calculus of Finite Differences Chelsea Publishing Company. New York, 672 p.
- Landau, E. 1906. Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen, *Sitzsber. Akad. München*, 36, 151–218.
- Karp, D. B. and Prilepkina, E. G. 2018. An inverse factorial series for a general gamma ratio and related properties of the Nörlund–Bernoulli polynomials. *Journal of Mathematical Sciences*, 234, 680-696.
- Markett, C., and Rovnyakt, J. 1992. An incomplete Gamma transform and applications to factorial series. *Analysis*, 12(1-2), 159-186.
- Merlini, D., Sprugnoli, R. and Verri, M. C. 2006. The Cauchy numbers. *Discrete Mathematics*, 306(16), 1906-1920.
- Merris, R. 2000. The p -Stirling numbers. *Turkish Journal of Mathematics*, 24(4), 379-399.
- Milne-Thomson, L. M. 1951. The Calculus of Finite Differences. American Mathematical Soc, 558 p.
- Nielsen, N. 1965. Die Gammafunktion, Chelsea, New York, MR, 32(2622), 47-49.
- Nielsen, N. 1904a. Les séries de factorielles et les opérations fondamentales. *Mathematische Annalen*, 59(3), 355-376.
- Nielsen, N. 1904b. Note sur les séries de fonctions bernoulliennes. *Mathematische Annalen*, 59(1-2), 103-109.
- Nielsen, N. 1902. Recherches sur les séries de factorielles. In *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* Vol. 19, pp. 409-453.
- Nielsen, N. 1904c. Recherches sur une classe de fonctions méromorphes (Vol. 2). B. Lunos bogtr.[Hovedkommissionær: AF Høst].
- Nielsen, N. 1904d. Sur la multiplication de deux séries de factorielles. *Rendiconti della R. Acc. dei Lincei*, (5), 13, 517-524.

- Nörlund, N. E. 1914. Sur les séries de facultés. *Acta mathematica*, 37(1), 327-387.
- Nörlund, N. E. 1924. Vorlesungen über differenzenrechnung (Vol. 13). Springer.
- Nörlund, N. E. 1926. Leçons sur les séries d'interpolation (Vol. 32). Gauthier-Villars.
- Obrechhoff, N. 2017. Summation by Euler's Transform of the Series Of Dirichlet, Factorial Series and the Series of Newton. *Pliska Studia Mathematica Bulgarica*, 28(1), 7p-127p.
- Oxley Jr, T. D. 1956. A Study Of a Generalized Factorial Series. Doctoral dissertation, Purdue University.
- Riordan, J. 1958. An Introduction to Combinatorial Analysis. John Wiley&Sons Inc., New York, 244 p
- Riordan, J. 1979. Combinatorial Identities. R. E. Krieger Pub. Co., Huntington NY, 256 p.
- Pincherle, S. 1914. Sulle serie di fattoriali generalizzate. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* (1884-1940), 37(1), 379-390.
- Schlömilch, O. 1859. Über Facultätenreihen. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 4, 390-415.
- Schlömilch, O. X. 1878. Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis: t. Aufgaben aus der Integralrechnung. 4. Aufl. Bearb. von. Prof. Dr. R. Henke (Vol. 2). BG Teubner.
- Schwatt, I. J. 1962. An Introduction to the Operations with Series. Chelsea Publishing Company, New York, 287 p.
- Tanny, S. M. 1974. On some numbers related to the Bell numbers. *Canadian Mathematical Bulletin*, 17(5): 733-738.
- Temme, N. M. 1996. Special functions: An introduction to the classical functions of mathematical physics. John Wiley and Sons, 387 p.

Tweddle, I. 2003. James Stirling's Methodus Differentialis: An Annotated Translation of Stirling's Text, Springer, New York, 2003.

Watson, G. N. 1912. The transformation of an asymptotic series into a convergent series of inverse factorials [*Memoir crowned by the Danish Royal Academy of Science*]. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* (1884-1940), 34(1), 41-88.

Wasow, W. 2018. Asymptotic expansions for ordinary differential equations. *Courier Dover Publications*, 362p.

Weniger, E. J. 2010. Summation of divergent power series by means of factorial series. *Applied numerical mathematics*, 60(12), 1429-1441.

ÖZGEÇMİŞ

BÜŞRA BUDAK

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans:	Akdeniz Üniversitesi
2020-2023	Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ABD, Antalya
Lisans:	Akdeniz Üniversitesi
2015-2020	Fen Fakültesi Matematik Bölümü