

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

İSTATİSTİK ve BİLGİSAYAR BİLİMLERİ ANABİLİM DALI

TİP-2 BULANIK KÜMELEMeye DAYALI PARAMETRE TAHMİNİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Seda SAĞIRKAYA

**HAZİRAN - 2017
TRABZON**



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İSTATİSTİK ve BİLGİSAYAR BİLİMLERİ ANABİLİM DALI

TİP-2 BULANIK KÜMELEMeye DAYALI PARAMETRE TAHMİNİ

Seda SAĞIRKAYA

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
"YÜKSEK LİSANS (İSTATİSTİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.**

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih :26.05.2017
Tezin Savunma Tarihi :19.06.2017

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Türkan ERBAY DALKILIÇ

Trabzon 2017

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalında
Seda SAĞIRKAYA Tarafından Hazırlanan

TİP-2 BULANIK KÜMELEMEYE DAYALI PARAMETRE TAHMİNİ

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 31 / 05 / 2017 gün ve 1704 sayılı
kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:

Başkan : Prof. Dr. Türkan ERBAY DALKILIÇ

Üye : Doç. Dr. Zafer KÜÇÜK

Üye : Yrd. Doç. Dr. Burcu KARTAL



Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında bulanık mantık ile ilgili temel kavramlar, Bulanık C-Ortalamalar (FCM) ve Tip-2 Bulanık Kümeleme Algoritmaları, parametre tahmini ve bulanık kümelemeye dayalı parametre tahmini üzerinde durulmuştur. Bulanık kümelemeye dayalı parametre tahminleri, bulanık kümeleme yöntemlerinden biri olan tip-2 bulanık kümeleme algoritmasından elde edilen üyelik dereceleri kullanılarak elde edilmiştir. Bu tahminlere ilişkin hata miktarları, bulanık c-ortalamalar (FCM) algoritmasına dayalı üyeliklerden elde edilen tahminlerin hata miktarları ve en küçük kareler (EKK) yönteminden elde edilen parametrelere bağlı tahminlerin hata miktarları ile karşılaştırılmıştır.

Öncelikle çalışmalarımı yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyen, yoğun çalışma temposunda bana zaman ayıran danışman hocam sayın Prof. Dr. Türkan ERBAY DALKILIÇ'a gönülden teşekkürü bir borç bilirim.

Yüksek lisans eğitimi yapma fırsatı bulduğum İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümündeki tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Öğrenim hayatım süresince her zaman yanımda olan ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Seda SAĞIRKAYA
Trabzon 2017

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Tip-2 Bulanık Kümelemeye Dayalı Parametre Tahmini” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Türkan ERBAY DALKILIÇ’ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri kendim topladığımı, analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 19/06/2017

Seda SAĞIRKAYA

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
ÖZET	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	IX
TABLolar DİZİNİ	X
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XI
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Önceki Çalışmalar.....	2
1.3. Bulanık Mantık Kavramı.....	5
1.4. Bulanık Küme	6
1.5. Bulanık Mantıkta Üyelik Fonksiyonları.....	7
1.5.1. Üçgen Üyelik Fonksiyonu.....	8
1.5.2. Yamuk Üyelik Fonksiyonu	9
1.5.3. Gaussian Üyelik Fonksiyonu	10
1.5.4. S Şekilli Üyelik Fonksiyonu	11
1.6. Bulanık Kümelerde Temel Kavramlar ve İşlemler.....	12
1.6.1. Destek Kümesi.....	12
1.6.2. α – Kesmesi	12
1.6.3. Yükseklik.....	13
1.6.4. Normallik.....	13
1.6.5. Cebirsel Toplama İşlemi.....	13
1.6.6. Cebirsel Fark İşlemi	13
1.6.7. Fark İşlemi.....	14
1.6.8. Kesişim İşlemi	14
1.6.9. Birleşim İşlemi.....	14
1.6.10. Tümlleme İşlemi	15
1.7. Tip-2 Bulanık Mantık	15
1.7.1. Tip-2 Bulanık Kümeler.....	16
1.7.2. Tip-2 Bulanık Kümelerde İşlemler	17

1.8.	Kümeleme Analizi.....	20
1.8.1.	Hiyerarşik Kümeleme	22
1.8.2.	Hiyerarşik Olmayan Kümeleme Yöntemleri	23
1.8.2.1.	K-Ortalamlar Yöntemi	23
1.8.2.2.	Bulanık Kümeleme Yöntemleri.....	24
1.8.2.2.1.	Bulanık C-Ortalamlar Algoritması	25
1.9.	Doğrusal Regresyon Çözümlemesi.....	26
2.	YAPILAN ÇALIŞMALAR	29
2.1.	Tip-2 Bulanık Kümeleme	29
2.2.	Tip-2 Bulanık Kümelemeye Dayalı Parametre Tahmini İçin Bir Algoritma	31
2.3.	Uygulama	34
3.	SONUÇ VE ÖNERİLER	49
4.	KAYNAKLAR	50
ÖZGEÇMİŞ		

Yüksel Lisans Tezi

ÖZET

TİP-2 BULANIK KÜMELEMeye DAYALI PARAMETRE TAHMİNİ

Seda SAĞIRKAYA

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Türkan ERBAY DALKILIÇ
2017, 55 Sayfa

Regresyon çözümlemesinde, verilerin mevcut varsayımların tümünü sağlamaması durumunda, parametre tahmini sürecinde klasik çözümlemelerin dışına çıkılması gerekir. Böyle durumlarda bulanık mantığa dayalı tahmin yöntemleri alternatif yöntemler olarak kendini göstermektedir. Model parametrelerinin elde edilmesi probleminde, bulanık mantığa dayalı çözümler elde edebilmenin önemli adımlarından biri veri setini meydana getiren kümelerin belirlenmesi ve bu kümelerde yer alan verilerin tahmine katkılarını belirleyecek üyelik derecelerinin elde edilmesidir. Bu çalışmada tip-2 bulanık kümelemeye dayalı parametre tahmini ele alınmıştır. İlk olarak tip-1 bulanık kümeleme problemi $m = 2$ bulanıklık indeksi ile bulanık C-ortalamlar (FCM) yöntemiyle çözülmüş. Daha sonra bulanıklık indeksi m tip-2 bulanık mantığa dayalı çözümler elde edilmek üzere $m = [m_1, m_2]$ biçiminde aralık sayı olarak tanımlanmış ve gözlemlerin kümelere ait olma dereceleri tip-2 bulanık kümeleme yöntemi ile belirlenmiştir. Tip-1 ve tip-2 bulanık mantığa dayalı kümelenme sonucunda elde edilen üyelik dereceleri, gözlemlerin modele katkılarını belirleyen ağırlıklar olarak kullanılmış ve bu üyelik derecesini kullanarak parametre tahmini önerilen algoritma ile elde edilmiştir. Son olarak, tip-1 ve tip-2 bulanık kümeleme yöntemlerinden elde edilen ağırlıklar ile parametreler tahmin edilmiş ve sonuçlar, gözlenen değerler ile tahmin edilen değerler arasındaki farka dayalı hata kriteri ile karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelime: Bulanık Mantık, Bulanık C-Ortalamlar Algoritması (FCM), Tip-2 Bulanık Kümeleme, Parametre Tahmini.

Master Thesis

SUMMARY

PARAMETER ESTIMATION BASED ON TYPE-2 FUZZY CLUSTERING

Seda SAĞIRKAYA

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Statistic and Computer Science Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Türkan ERBAY DALKILIÇ
2017, 55 Pages

In regression analysis, if the data can not satisfy all of the existing assumptions, it is requires to go beyond the classical analyzes in the parameter estimation process. In such cases, estimation methods based on fuzzy logic is preferred as alternative methods. One of the important steps in obtaining the solution based on the fuzzy logic in the problem of obtaining the model parameters is to determine the clusters bringing up the data set and to obtain the membership grades which will determine the contributions of the data in these clusters. In this study, parameter estimation based on type-2 fuzzy clustering is discussed. Firstly, type-1 fuzzy clustering problem was solved by the fuzzy c-means (FCM) method when the fuzzifier index $m = 2$. Then the fuzzifier m index was defined as interval number in the form of $m = [m_1, m_2]$ for obtain solutions based on type-2 fuzzy logic. The degrees of belonging to the sets of observations were determined by type-2 fuzzy clustering method. Degree of memberships obtained as a result of clustering based on type-1 and type-2 fuzzy logic are used as weight that determine the model contributions of observations and parameter estimation using these degree of membership is determined by the proposed algorithm. Finally, the estimation result of the type-1 and type-2 fuzzy clustering parameter were compared with the error criterion based on the difference between observed values and the predicted values.

Keywords: Fuzzy Logic, Fuzzy C-Means (FCM) Algorithm, Type-2 Fuzzy Clustering, Parameter Estimation.

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1. Üçgen üyelik fonksiyonu ve kısımları	9
Şekil 2. Yamuk üyelik fonksiyonu ve kısımları	10
Şekil 3. Gaussian üyelik fonksiyonu ve kısımları	11
Şekil 4. S şekilli üyelik fonksiyonu	12
Şekil 5. A ve B bulanık kümelerinin kesişimi	14
Şekil 6. A ve B bulanık kümelerinin birleşimi	15
Şekil 7. $\tilde{A}$ bulanık kümesinin tümleyeni	15
Şekil 8. a) Tip-1 bulanık küme, b) Belirsizliklerin etkisi, c) Tip-2 bulanık küme	16
Şekil 9. Kesin olmayan standart sapmaya sahip tip-2 bulanık küme	17
Şekil 10. Kesin olmayan ortalamaya sahip tip-2 bulanık küme	17
Şekil 11. İki örnek tip-2 Gauss üyelik fonksiyonları.....	18
Şekil 12. İki tip-2 Gauss üyelik fonksiyonunun birleşimi	19
Şekil 13. İki tip-2 Gauss üyelik fonksiyonlarının kesişimi	19
Şekil 14. EKK bulanık kümeleme yöntemi ile elde edilen modeller	35
Şekil 15. Tip-2 bulanık kümeleme yöntemi ile elde edilen modeller.....	35
Şekil 16. EKK bulanık kümeleme yöntemi ile elde edilen modeller	38
Şekil 17. Tip-2 bulanık kümeleme yöntemi ile elde edilen modeller.....	38
Şekil 18. EKK bulanık kümeleme yöntemi ile elde edilen modeller	41
Şekil 19. Tip-2 bulanık kümeleme yöntemi ile elde edilen modeller.....	41
Şekil 20. EKK bulanık kümeleme yöntemi ile elde edilen modeller	44
Şekil 21. Tip-2 bulanık kümeleme yöntemi ile elde edilen modeller.....	44
Şekil 22. EKK bulanık kümeleme yöntemi ile elde edilen modeller	47
Şekil 23. Tip-2 bulanık kümeleme yöntemi ile elde edilen modeller.....	47

TABLÖLAR DİZİNİ

Sayfa No

Tablo 1. Uzaklık ölçüleri	21
Tablo 2. Verilerin üç farklı yöntem ile elde edilen tahminler ve hataları	34
Tablo 3. Uygulamada kullanılan hacim ve bulanıklaştırma indeks değerleri	36
Tablo 4. Doğrusal regresyon modelleri ve hataları	36
Tablo 5. Verilerin üç farklı yöntem ile elde edilen tahminler ve hataları	37
Tablo 6. Uygulamada kullanılan hacim ve bulanıklaştırma indeks değerleri	39
Tablo 7. Doğrusal regresyon modelleri ve hataları	39
Tablo 8. Verilerin üç farklı yöntem ile elde edilen tahminleri ve hataları	40
Tablo 9. Uygulamada kullanılan hacim ve bulanıklaştırma indeks değerleri	42
Tablo 10. Doğrusal regresyon modelleri ve hataları	42
Tablo 11. Verilerin üç farklı yöntem ile elde edilen tahminleri ve hataları	43
Tablo 12. Uygulamada kullanılan hacim ve bulanıklaştırma indeks değerleri	45
Tablo 13. Doğrusal regresyon modelleri ve hataları	45
Tablo 14. Verilerin üç farklı yöntem ile elde edilen tahminler ve hataları	46
Tablo 15. Uygulamada kullanılan hacim ve bulanıklaştırma indeks değerleri	48
Tablo 16. Doğrusal regresyon modelleri ve hataları	48

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

FCM	: Bulanık C-Ortalamalar (Fuzzy C-Means)
m	: Bulanıklık indeksi
m_i	: i . kümenin bulanıklık indeksi
G-K	: Gustafson-Kessel
$\tilde{A}$	: A bulanık kümesi
$\tilde{B}$	: B bulanık kümesi
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	: $\tilde{A}$ bulanık kümesindeki x verisinin üyelik derecesi
max	: Maksimum
min	: Minimum
x_i	: i . eleman
$d(x_i, x_j)$	: x_i ve x_j arasındaki uzaklık
HKT	: Hata Kareler Toplamı
$J(U, v)$	: Bulanık kümeleme için amaç fonksiyonu
v_j	: j . kümenin merkezi
U	: Üyelik matrisi
ε	: Durdurma kriteri
ε_i	: Hata ölçütü
n	: Toplam nesne sayısı
c	: Küme sayısı
u_{ji}	: j . kümenin i . elemanın üyelik derecesi
d_{ji}	: i . elemanın j . kümeye olan uzaklığı
V_t	: t . iterasyondaki küme merkezi
$J_{m_1}(U, v)$	: Bulanık kümelemede 1. kümeye ilişkin amaç fonksiyonu
$J_{m_2}(U, v)$	: Bulanık kümelemede 2. kümeye ilişkin amaç fonksiyonu
V_{Lj}	: j . kümenin m_1 bulanıklık parametresi kullanılarak elde edilen merkezi
V_{Rj}	: j . kümenin m_2 bulanıklık parametresi kullanılarak elde edilen merkezi

$\bar{u}_{ji}$	: Üst üyelik dereceleri
$\underline{u}_{ji}$	: Alt üyelik dereceleri
V_{Lt}	: t . adımdaki m_1 bulanıklık parametresi kullanılarak elde edilen merkez
V_{Rt}	: t . adımdaki m_2 bulanıklık parametresi kullanılarak elde edilen merkez
COV	: Kovaryans
$E(X)$	: Beklenen değer
Y	: Bağımlı değişken
X	: Bağımsız değişken
β	: Regresyon katsayısı
$\hat{Y}$	: Y 'nin tahmin edicisi
$\hat{\beta}$	: Regresyon katsayısı tahmin edicisi
X_{w_i}	: Üyelik dereceleri ile ağırlıklandırılmış veriler
$\hat{Y}_{EKK}$	: En Küçük Kareler yönteminden elde edilen Y 'nin tahmini
$\hat{Y}_{FCM}$	: Bulanık C-Ortalamlar algoritmasından elde edilen Y 'nin tahmini
$\hat{Y}_{Tip-2}$	: Tip-2 bulanık kümeleme algoritmasından elde edilen Y 'nin tahmini
ε_{EKK}	: En Küçük Kareler yöntemi kullanılarak hesaplanan hata terimi
ε_{FCM}	: Bulanık C-Ortalamlar algoritması kullanılarak hesaplanan hata terimi
ε_{Tip-2}	: Tip-2 bulanık kümeleme yöntemi kullanılarak hesaplanan hata terimi

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Bulanık mantığın temeli bulanık küme ve alt kümelere dayanır. Klasik yaklaşımda bir veri bir kümenin ya elemanıdır ya da değildir. Matematiksel olarak ifade edilmek istendiğinde; bir veri bir kümenin elemanı ise üyelik derecesi "1", kümenin elemanı değil ise üyelik derecesi "0" değerini alır. Bulanık mantık, klasik küme gösteriminin genişletilmesidir. Bulanıklık belirsizliği ifade etmekte olup; insan düşüncesi bulanık kavramlarla doludur. ‘Kaldığım otel şehre çok yakın’, ‘Mülakatım çok iyi geçti’, ‘Zeynep çok zayıf’ ifadeleri bulanık kavramlar içermektedir. Kurulan bu tür cümleler ardından, “Ne kadar yakın? Ne kadar iyi? Ne kadar zayıf?” sorularını getirmektedir. Bu tür belirsizlikler matematiksel olarak ifade edilebilmektedir. Belirsizliğin ölçüsü üyelik fonksiyonları ile ifade edilir. Üyelik fonksiyonları $[0, 1]$ aralığında değerler alabilen fonksiyonlardır [2, 52, 72]. Üyelik fonksiyonlarından yararlanarak verilerin mevcut kümelerle ait olma durumları derecelendirilebilir. Her bir verinin küme sayısı kadar üyelik değeri vardır. Normal oda sıcaklığı 20 derece olarak kabul edilirse, klasik küme kuramına göre 20 derecenin üzerindeki dereceler sıcak olarak kabul edilir ve bu derecelerın sıcak kümesine üyelik dereceleri "1" olur. 20 derecenin altındaki durumlar is soğuk olarak adlandırılır ve sıcak kümesine üyelik dereceleri "0" olarak kabul edilir. Soğuk kümesi dikkate alındığında bu değerler tersine döner. Isı ile ilgili bu durum bulanık küme yaklaşımı ile ele alınmak istendiğinde; bir elemanın bir kümeye ait olma derecelerini ifade eden üyelik değerleri $[0,1]$ aralığında değerler aldığından, 25 derecelik sıcaklık için üyelik derecesi "0,25", 30 sıcaklık derecesi için üyelik değeri "0,50" olabilir. Böylece her eleman mevcut kümelerle belirli derecelere ait olmaktadır. Birbirine çok benzeyen birimler aynı kümede yüksek üyelik ilişkisine göre yer alırlar. Verilerin mevcut kümelerle ait olma durumları kesinlik taşımadığında bulanık mantığa dayalı kümeleme algoritmalarından faydalanılabilir. Bulanık kümeleme algoritmalarından en yaygın olanı Bulanık C-Ortalamalar algoritmasıdır (FCM). Tip-1 bulanık kümeleme algoritması olarak da tanımlanan FCM algoritmasında verilerin kümelerle ait olma dereceleri eşit bulanıklaştırma indeksi ile belirlenmektedir, bu durum kümeler farklı hacme sahip olduklarında performans kaybına neden olabilmektedir. Bu sebeple Tip-2 bulanık kümeleme algoritmasında bulanıklık indeksi $m = [m_1, m_2]$ aralık olarak ele alınır.

ve her kümeye farklı bulanıklaştırma indeksi verilir. Böylece Tip-2 bulanık kümeleme algoritması, kümeler farklı küme hacimlerine sahip olduğu durumlarda daha iyi performans göstermektedir [62, 65].

Klasik regresyon analizinde, veri kümesindeki gözlemlerin tek bir sınıftan geldiği varsayılır. Regresyon çözümlemesinde verilerin farklı dağılımlara sahip olması durumu tahmin sürecinde klasik çözümlemelerin dışına çıkılmasını gerektirir. Böyle durumlarda bulanık çözümleme yöntemleri alternatif yöntemler olarak kendini göstermektedir. Bulanık regresyon çözümlemesinin önemli adımlarından biri veri setini meydana getiren kümelerin belirlenmesi ve bu kümelerde yer alan verilerin tahmine katkılarının derecelerini belirleyecek üyelik derecelerinin elde edilmesidir.

Bu çalışmada veri setlerinin üyelik derecelerinin belirlenmesi aşamasında bulanık c-ortalamlar algoritmasının bir genişlemesi olarak tanımlanan tip-2 bulanık kümeleme algoritmasından faydalanılmıştır. Algoritma sonuçlarında oluşan küme elemanlarına ait elde edilen üyelik derecelerini kullanarak regresyon çözümlemesi yapılmıştır. Burada regresyon çözümlemesi için bulanıklık parametresi aralık olarak önerilen algorithmadan elde edilmiştir. Önerilen algoritma ile elde edilen tahminler, mevcut yöntemler sonucu elde edilen tahminler ile karşılaştırılmıştır.

1.2. Önceki Çalışmalar

1965 yılında Zadeh L. A., bulanık kümeler çalışmasını yayımlamıştır. Bu çalışmada, bulanık küme teorisi ve bulanık mantık teorisini ele alan Zadeh, bulanık kümelerde, niteliklerin dereceli üyelik fonksiyonlarıyla ifade edilmesi üzerinde durmuştur [75].

1970 yılında Zadeh L. A. vd. 1973 ve 1978 yıllarında Zadeh'in kesin olmayan karar verme süreçlerinde kullanılan bulanık mantıkla ilgili çalışmaları, bulanık mantığın çok hızlı gelişmesine ve geniş uygulama alanları bulmasına olanak sağlamıştır [76, 7].

1973 yılında Dunn J. A., tarafından ortaya atılan Bulanık C-Ortalamlar Algoritması, 1981'de Bezdek tarafından geliştirilmiştir [24].

1990 yılında Dombi J., üyelik fonksiyonları üzerine yaptığı çalışmada farklı üyelik fonksiyonlarını tanımlamış, üyelik fonksiyonlarının varsayımlarını, özelliklerini ve matematiksel formlarını açıklamıştır [23].

1999 yılında Cheng C-B. ve Lee E. S., bulanık regresyon analizi için bulanık uyarlamalı ağlardan yararlanmış ve hata terimini hesaplamışlardır [13].

2002 yılında Mendel J. vd. çalışmalarında tip-2 bulanık kümelerin basit halini incelemişlerdir [56].

2005 yılında Dalkılıç E. T., bağımsız değişkenlerin normal ve üstel dağılımdan gelmesi durumunda switching regresyonda bulanık sinir ağıları yaklaşımı ile parametre tahmini yapmış ve hata terimini; En Küçük Kareler yönteminden elde edilen hata terimi ile karşılaştırmıştır [20].

2006 yılında Güler N., Bulanık kümeleme algoritmalarından; Bulanık C-Ortalamlar ve Bulanık C-Regresyon kümeleme algoritmalarının bulanık modellemeye uygulamalarını ele almıştır. Mamdani, Takagi-Sugeno ve Sugeno-Yasukawa gibi çok iyi tanınan bulanık modellerin yapısı ve kurulmaları için gerekli aşamaları açıklamış; bulanık modellemeyi kullanarak Türkiye'nin elektrik tüketimini tahmin etmiştir [33].

2007 yılında Hwang C. ve Rhee F., çalışmalarında bulanık c-ortalamlar (FCM) algoritmasının m bulanıklaştırma parametresinin belirsizliği üzerinde durulmuş ve m bulanıklaştırma parametresi $[m_1, m_2]$ aralığı biçiminde belirlenmiştir. Sonuç olarak FCM algoritmasını içeren aralık tip-2 bulanık küme algoritmasına durulama işlemi uygulanması ile çözümler elde edilmiştir [39].

2009 yılında Erilli N.A., Devlet Planlama Teşkilatının illerin gelişmişlik göstergelerinde kullanılan sosyo-ekonomik, sağlık, sanayi, tarım, eğitim, istihdam, mali veriler yardımıyla Türkiye'deki 81 ili bulanık kümeleme algoritmaları kullanarak kümelere ayırmıştır [28].

2009 yılında Eine S., kalp hastalıklarının yaşam kalitesi üzerinde etkili olan faktörleri belirlemek için Tanaka tarafından geliştirilmiş bulanık doğrusal regresyon kullanılarak bulanık parametreleri tahmin etmiştir [29].

2009 yılında Türkşen B., bulanık fonksiyonlar üzerinde durarak bulanık sistem modellerini inceleme çalışmasını yayımlamıştır. Bu çalışmada Türkşen, Zedeh ve Takagi-Suego'nun bilinen tip-1 bulanık model sistemlerini inceleyerek tip-2 bulanık sistem potansiyelini gözden geçirmiş ve tip-2 bulanık sistem modelinin temel sorunlarından olan hesaplama karmaşıklığına çözüm aramıştır [69].

2009 yılında Juang C-F vd. çalışmalarında, dinamik sistem işleme için tekrarlanan ve kendiliğinden gelişen aralık tip-2 bulanık sinir ağını önermiştir [45].

2009 yılında Dalkılıç, E. T. vd. bağımsız değişkenlerin üstel dağılımdan gelmesi durumunda switching regresyonda bulanık sinir ağıları yaklaşımı ile parametre tahmini yapmıştır [17].

2010 yılında Büyüköz D., Bulanık C-Ortalamalar Algoritmasını kullanarak Avrupa Birliği ülkeleri ve Türkiye'nin ekonomik, nüfus, cinsiyet ayrımcılığı, ulaşım altyapısı, teknolojik altyapı ve teknolojik gelişim değişkenlerine göre kümeleme yapmıştır [11].

2011 yılında Enke D. vd. çoklu regresyon, tip-2 bulanık kümeleme ve yapay sinir ağları ile borsa tahmini çalışmasını yayımlamıştır. Bu çalışmada üç aşamalı borsa tahmin sisteminin ikinci aşamasında diferansiyel evrim tabanlı tip-2 bulanık kümeleme, bir tahmin oluşturmak için kullanılırken üçüncü aşamada tip-2 bulanık sinir ağı gelecek hisse senedi fiyatı tahmini için kullanılmaktadır. Ağ simülasyonları sonucu önerilen model borsa fiyatları tahmini için geleneksel modellerden daha iyi performans göstermektedir [26].

2011 yılında Ergün E., bulanık küme teorisi ve bulanık doğrusal programlamayı ele almış ve prefabrik konut fiyatlarının tahminine yönelik sayısal bir modelle çalışmasını desteklemiştir [27].

2011 yılında Aliev R. A. vd. çalışmalarında tip-2 bulanık kümelerin üç boyutlu üyelik fonksiyonlarının belirsizlik modelleri için doğrudan ve daha etkin hesaplamaları mümkün kılan serbestlik derecesi önerilmiştir. Ayrıca evrimsel optimizasyon yardımı ile geliştirilen tip-2 bulanık mantık sistemleri, "Eğer-İse" kuralları sonucu etkili bir modelleme oluşturmuştur [1].

2012 yılında Fazel Zarandi M. H. vd. çalışmalarında Takagi-Sugeno sistemlerinin yapısının tamamlanması aşaması için yeni bir tip-2 bulanık c-regresyon kümeleme algoritması önermişlerdir [32].

2013 yılında Enke D. ve Mehdiyev N., kısa vadeli ABD faiz oranlarının tahmini çalışmalarında tip-2 bulanık kümelemeden yararlanmışlardır [25].

2014 yılında Melin P. vd. çalışmalarında görüntü tanıma, sınıflandırma ve kümeleme problemlerinde tip-2 bulanık mantık uygulamaları derlemesi sunulmuştur [59].

2015 yılında Kalhori M. R. N. ve Fazel Zarandi M. H., çalışmalarında aralıklı tip-2 bulanık kümeleme yöntemi için yeni bir yaklaşım önermişler ve önerilen yaklaşımda kümelenmelerin yoğunluğunu ve eşzamanlı ayrımını göz önüne almışlardır. Ayrıca amaç fonksiyonu, güvenilirlik kavramını kullanarak üyelik ve üyelik dışı dereceleri olarak tasarlanmıştır. Son olarak, kümelerin ayrılması için yeni bir geçerlilik indeksi önerilmiş, önerilen yöntemin avantajları ele alınmıştır [46].

2016 yılında Giordani P. ve Ramos-Guajardo A. B., rastgele bulanık kümeler için bulanık kümeleme yöntemini önermişlerdir [35].

2016 yılında Golsefid S. M. M. ve Fazel Zarandi M. H., kümeleme algoritması, parametrelerin kestirimi, doğrulama ile doğrulama indekslerini içeren çalışmalarının kümeleme sürecindeki tüm aşamalarını kapsayan tip-2 bulanık kümeleme için bir kümeleme çerçevesi sunmuşlardır [36].

2016 yılında Hwak K. C., çalışmasında doğrusal regresyon ve doğrusal modelin bulanık uyarlamasına dayanan modelin tasarımı için bir yöntem önermiştir. Burada, bağlam tabanlı aralık tip-2 bulanık c-ortalamlar kullanılmıştır [38].

1.3. Bulanık Mantık Kavramı

Bulanık mantık kuramı ilk kez 1965 yılında California Berkeley Üniversitesi'nde Prof. A. Lotfi Zadeh tarafından ortaya atılmıştır. Zadeh'in teorisinde mutlak doğru diye bir şey yoktur. Yani doğrulama derecelidir, kesin değil bulanıktır. Bulanık mantık, belirsiz ifadelerle yapılan, belirsiz işlemler değildir. Modelleme aşamasında değişkenler ve kuralların esnek bir şekilde belirlenmesidir. Bu esneklik asla rastgelelik ya da belirsizlik içermez. Nasıl bir lastik, içinde bulunduğu duruma göre şeklini değiştirirken, bütünlük yapısını koruyabilirse, bir bulanık modelde değişen koşullara değişen cevaplar verirken özündeki yapıyı muhafaza eder [51]. Bulanık mantık karar verme mekanizması olarak tanımlanabilecek sözel ifadelerin bir uzman kişi tarafından belirtilen kesin olmayan sınırlar içindeki davranışını matematiksel olarak modellemeye yarar. Modelleme kesin olmayan bulanık kümelerden oluştuğundan bulanık olarak ifade edilir. Bulanıklık, kişisel ya da uzman kişinin kesin çizgilerle ifade edemediği ancak bölgesel olarak yaklaşık sınırlarının belirlenebildiği durumlarda anlamlı sonuçlar vermektedir. Bulanık mantık hesaplama tekniği, bu tür sorunları büyük ölçüde çözebilmektedir. Bu nedenle bilinen geleneksel hesaplama yöntemlerine alternatif olarak ortaya çıkan bu yöntem, doğadaki işleyişi taklit ederek çözüme ulaşır. Bulanık mantık kavramı iki temel öğeden oluşur;

1. Bulanık kümeler ve bu kümeleri kullanarak bir dizi kural oluşturma,
2. Karar verme süreci.

Bulanık mantık kuramının uygulamaları, günümüzün karmaşık problemlerinin çözümünde kullanışlı bir araç haline gelmiştir. İlk ortaya atıldığı tarihten bu yana, matematikçiler, bilim adamları ve mühendisler tarafından birbirinden bağımsız pek çok çalışmaya konu edilmiştir [74].

Bulanık mantık, kurucusu Prof. A. Lotfi Zadeh tarafından Aristo mantığının bir genişlemesi olarak ortaya atılmıştır. Aristoteles'in mantık teorisini oluşturma çabaları ile matematik bilimi gelişmiş ve "Düşüncenin Yasaları" oluşturulmuştur. Bu yasalardan biri, her önermenin ya doğru ya da yanlış olması gerektiğini belirtmektedir. Bu anlayışa geleneksel anlayış ya da Aristo Mantığı denilmektedir [42,51].

Aristoteles'in 3 temel ilkesi,

1. Özdeşlik ilkesi: Bir şey ne ise odur.
2. Çelişmezlik ilkesi: Bir şey hem kendi, hem de başka bir şey olamaz.
3. Üçüncünün olmazlığı ilkesi: Bir şey ya A'dır ya da A olmayandır. Üçüncü bir durum düşünülemez [6].

Bulanık mantık, Aristoteles'in sözü edilen ilkelerinin, kesin olarak tanımlanamayan gerçek dünya problemleri için bir genişlemesidir. Bulanıklık matematiksel olarak çok değerlilik anlamına gelir. Klasik mantıkta ikili değer mevcuttur. Bulanık mantık insan mantığında olduğu gibi kesin değerler yerine ara değerleri de dikkate almaktadır. Çok sıcak, sıcak, ılık, soğuk ve çok soğuk gibi dilsel terimler bulanık değişkenlerdir. Bulanık mantığın genel özellikleri Zadeh tarafından aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

1. Bulanık mantıkta, kesin değerlere dayanan düşünme yerine yaklaşık düşünme kullanılır.
2. Bulanık mantıkta bir kümeye ait olma $[0,1]$ aralığında belirli bir derece ile gösterilir.
3. Bulanık mantıkta bilgi, büyük, küçük, çok, az gibi dilsel ifadeler şeklindedir.
4. Bulanık çıkarım işlemi dilsel ifadeler arasında tanımlanan kurallar arasında yapılır.
5. Her mantıksal işlem bulanık olarak ifade edilebilir.
6. Bulanık mantık matematiksel modeli zor elde edilen sistemler için uygundur [15].

1.4. Bulanık Küme

Kümeler teorisinde bir eleman ya bir kümeye aittir ya da değildir. Fakat bulanık kümelerde bir eleman birden fazla kümeye ait olabilmektedir. Bulanık kümelerde kesinlik kavramı yoktur [16]. Bir elemanın herhangi bir bulanık kümeye olan üyeliğini belirlemek için üyelik fonksiyonları kullanılır. Bulanık küme bir elemanın farklı üyelik dereceleriyle birden fazla kümeye ait olmasına imkân sağlar. Bir elemanın bir kümeye ait üyelik derecesinin 0 olması durumu, elemanın kümeye ait olmadığını, 1 olması durumu ise kesin olarak o kümeye ait olduğunu gösterirken; 1'e yakın değerler elemanın yüksek derecede

kümeye ait olduğunu, 0'a yakın değerler de ise düşük derecede ait olduğunu gösterir. Buradan da anlaşılacağı gibi klasik kümede üyelik fonksiyonları $\{0,1\}$ değerlerini alırken; bulanık kümede üyelik fonksiyonları $[0,1]$ aralığında değerler alabilirler.

Bulanık bir küme, bir eleman ve bu elemanın ilgili kümeye üyelik derecesini gösteren sıralı çiftlerle ifade edilir. $\tilde{A} = (X, \mu_{\tilde{A}}(X))$ biçimindeki her bir çifte, bulanık teklik denir. Bulanık teklikler $\mu_{\tilde{A}}(X)/X$ şeklinde de gösterilebilirler [68].

Evrensel kümenin sonlu olduğu durumda $\tilde{A}$ bulanık kümesinin gösterimi Eşitlik (1) de olduğu gibidir.

$$\tilde{A} = \mu_{\tilde{A}}(X_i)/X_i = \mu_{\tilde{A}}(X_1)/X_1 + \mu_{\tilde{A}}(X_2)/X_2 + \dots + \mu_{\tilde{A}}(X_m)/X_m \quad (1)$$

Evrensel kümenin sonsuz olduğu durumda ise $\tilde{A}$ bulanık kümesinin gösterimi

$$\tilde{A} = \int \mu_{\tilde{A}}(X_i)/X_i \quad (2)$$

biçimindedir.

Eşitlik (1) ve Eşitlik (2) ile verilen ifadelerde $\sum$, $\int$, $/$ ve $+$ işaretleri cebirsel anlamda sırasıyla toplam, integral alma, bölme ve toplama işlemlerini göstermez. ' $\sum$ ' ve ' $\int$ ' simgeleri, bulanık tekliklerin sırasıyla kesikli ve sürekli evrenlerde bir araya getirilmesini ifade eder. ' $/$ ' simgesi bulanık teklikleri birbirinden ayırmaya yarayan bir ayıraçtır. ' $+$ ' simgesi ise bulanık tekliklerin bir araya geldiğini göstermektedir [27].

1.5. Bulanık Mantıkta Üyelik Fonksiyonları

Dilsel ifadelerin dilsel olgusunu açıklayan teknik sayının değerine üyelik derecesi denir. Üyelik derecesi sübjektif olarak belirlenir. Sürekli bir değişken için üyelik derecesi üyelik fonksiyonuyla ifade edilir. Bulanık küme teorisinin temelini oluşturan üyelik fonksiyonları 0 ile 1 arasında bir üyelik derecesine sahiptir.

Klasik bir küme, kesin sınırlamalarla verilen bir kümedir. Klasik kümelerle göre bulanık kümeler, kesin limitleri olmayan kümelerdir. Yani, "kümeye ait olan" dan "kümeye ait olmayana" geçiş 1 ilâ 0 arasında değerler alarak aşamalı şekilde olur. Bulanık kümelerde

modelleme, çoğunlukla dilsel açıklamalara esneklik kazandıran bu düzgün geçiş, üyelik fonksiyonları olarak tanımlanmaktadır.

Bulanık kümeler $\mu_A(x)$ üyelik fonksiyonu ile temsil edilir. $\mu_A(x)$ üyelik fonksiyonu, bir x noktasının A bulanık kümesine ait olma üyelik derecesini temsil eder. $\mu_A(x) = 1$ şeklinde ifade edilen üyelik derecesi, x 'in A bulanık kümesinin kesin bir elemanı olduğunu ifade etmektedir. Benzer şekilde $\mu_A(x) = 0$, x 'in A bulanık kümesi dışında olduğunu anlamına gelir. $0 < \mu_A(x) < 1$ arasındaki her değer, x 'in A bulanık kümesindeki üyeliğinin belirsiz değeridir. Bu sebeple kesin olmayan aitlikler üyelik fonksiyonları tarafından belirtilmiş bulanık kümelerle temsil edilirler [5]. Literatürde tanımlanmış birçok üyelik fonksiyonu mevcuttur. Bunlardan en yaygın kullanılanları; Üçgen, Yamuk, Gaussian ve S şekilli üyelik fonksiyonlarıdır.

1.5.1. Üçgen Üyelik Fonksiyonu

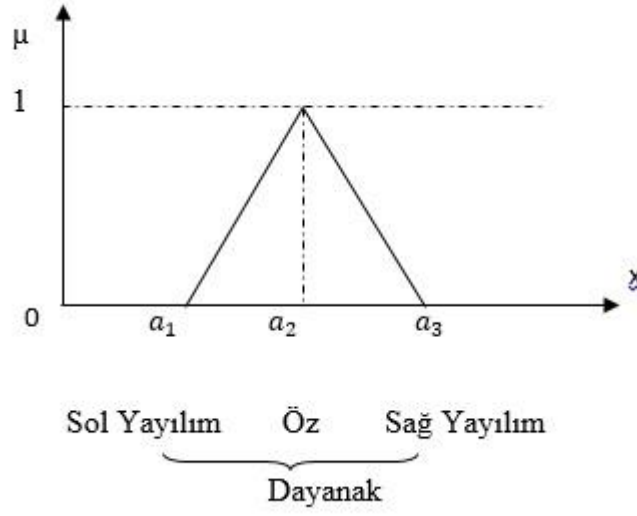
Üçgen üyelik fonksiyonu a_1, a_2, a_3 ile verilen 3 parametre ile tanımlanır. Bunlardan a_1 üçgenin sol ayağını, a_3 sağ ayağını, a_2 ise tepe noktasının iz düşümünü gösterir ve üçgen üyelik fonksiyonu

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} & ; \quad a_1 < x \leq a_2 \\ \frac{a_3 - x}{a_3 - a_2} & ; \quad a_2 \leq x < a_3 \\ 0 & ; \quad x \leq a_1, \quad x \geq a_3 \end{cases} \quad (3)$$

biçiminde tanımlanır.

Şekil 1'deki x değişkeninin a_1 alt ve a_3 üst sınırları arasındaki her noktasına ayrı bir üyelik derecesi atanmış olur.

Şekil 1'de görüldüğü gibi a_1 ve a_2 aralığına sol yayılım, a_3 ve a_2 aralığına sağ yayılım denir. Eğer Üçgen Üyelik Fonksiyonu simetrik ise; a_1, a_2 ve a_3 aralıklarına yarıçap denir. $\mu(x) = 1$ değerini alan elemana, öz eleman denir. $\mu(x) > 0$ değerini alan elemanlar kümenin dayanak kümesini oluşturur.



Şekil 1. Üçgen üyelik fonksiyonu ve kısımları

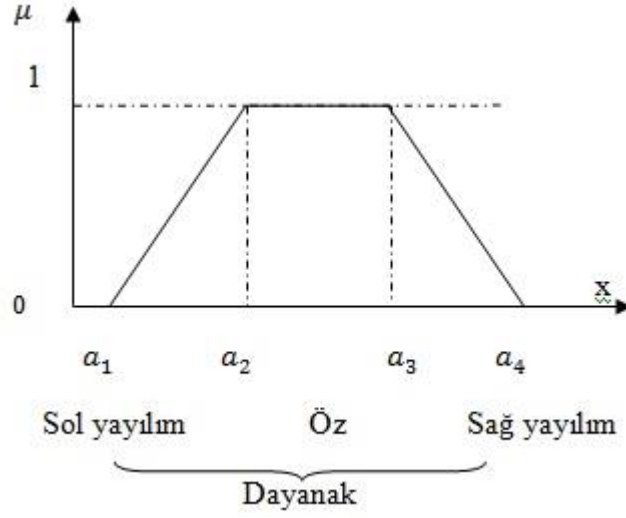
1.5.2. Yamuk Üyelik Fonksiyonu

Bir yamuk üyelik fonksiyonu a_1, a_2, a_3 ve a_4 olarak dört parametre ile

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} & ; & a_1 < x < a_2 \\ 1 & ; & a_2 \leq x \leq a_3 \\ \frac{a_4 - x}{a_4 - a_3} & ; & a_3 < x < a_4 \\ 0 & ; & x \leq a_1, x \geq a_4 \end{cases} \quad (4)$$

biçiminde tanımlanır.

Şekil 2’de görüldüğü gibi, a_1 ve a_2 aralığına sol yayılım, a_3 ve a_4 aralığına sağ yayılım denir. $\mu(x) = 1$ değerini alan elemanlara, öz eleman denir. $\mu(x) > 0$ değerini alan elemanlar kümenin dayanak kümesini oluşturur.



Şekil 2. Yamuk üyelik fonksiyonu ve kısımları

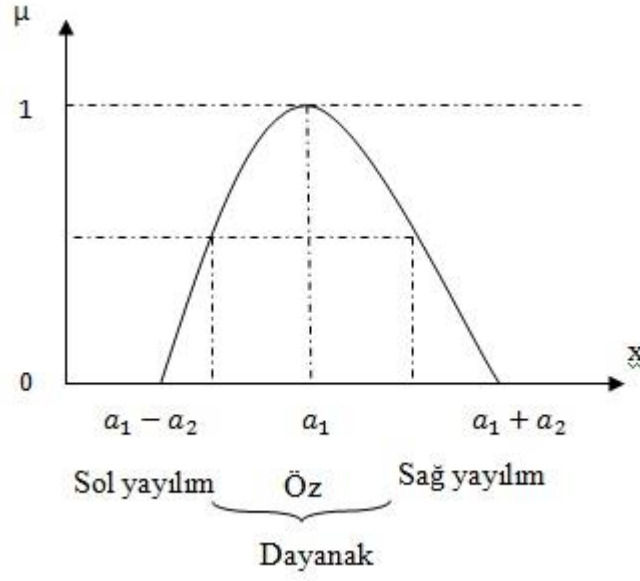
1.5.3. Gaussian Üyelik Fonksiyonu

Gaussian üyelik fonksiyonu iki parametreden oluşur. Bu parametreler a_1 ve a_2 ’ dir. “ a_1 ” merkezi temsil ederken “ a_2 ” ise merkezden sapmayı temsil etmektedir. Yani “ a_2 ” ne kadar büyük olursa üyelik fonksiyonu o kadar genişlemiş olur. Matematiksel olarak

$$\mu_A(x) = e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2a_2^2}} \quad (5)$$

biçiminde ifade edilir.

Şekil 3’de $[a_1 - a_2; a_1]$ aralığına sol yayılım, $[a_1 + a_2; a_1]$ aralığına sağ yayılım denir. $\mu(x) = 1$ değerini alan elemana, öz eleman denir. $\mu(x) > 0$ değerini alan elemanlar bulanık kümenin dayanak kümesini oluşturur.

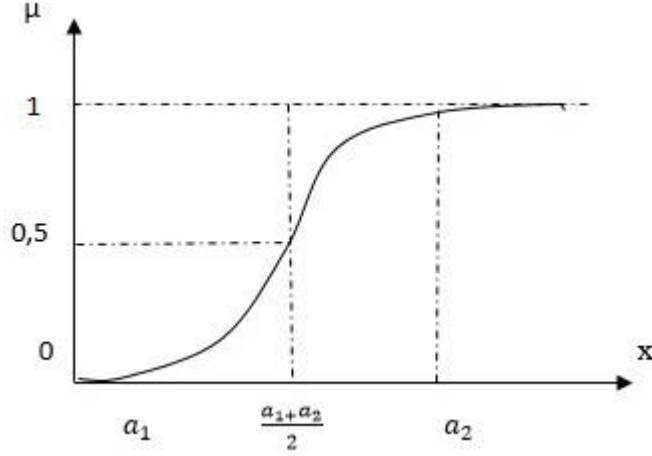


Şekil 3. Gaussian üyelik fonksiyonu ve kısımları

1.5.4. S Şekilli Üyelik Fonksiyonu

S şekilli üyelik fonksiyonu iki parametreden oluşur. Bu parametreler a_1 ve a_2 ' dir. Üyelik fonksiyonunda 0,5'e eşit olan $\frac{a_1+a_2}{2}$ noktasına geçiş noktası denir.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \leq a_1 \\ 2 \left(\frac{x - a_1}{a_2 - a_1} \right)^2 & ; \quad a_1 < x \leq \frac{a_1 + a_2}{2} \\ 1 - 2 \left(\frac{x - a_2}{a_2 - a_1} \right)^2 & ; \quad \frac{a_1 + a_2}{2} \leq x < a_2 \\ 1 & ; \quad x \geq a_2 \end{cases} \quad (6)$$



Şekil 4. S şekilli üyelik fonksiyonu

1.6. Bulanık Kümelerde Temel Kavramlar ve İşlemler

1.6.1. Destek Kümesi

Bulanık bir kümenin üyelik fonksiyonunda, üyelik derecesi sıfırdan farklı olan elemanların bir araya getirildiği kümeye destek kümesi denir ve

$$\text{Support}(\tilde{A}) = \{x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\} \quad (7)$$

biçiminde tanımlanır.

1.6.2. α – Kesmesi

Bulanık bir kümenin α – kesmesi, üyelik fonksiyon değeri α ' ya eşit ve daha büyük olan elemanların yer aldığı bulanık kümeye denir. α değeri, $\alpha \in (0,1]$ koşuluyla tanımlanan gerçel bir sayıdır. Matematiksel gösterimi;

$$\tilde{A}_{\alpha} = \{x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} \quad (8)$$

biçimindedir.

1.6.3. Yükseklik

Bulanık bir kümenin en büyük üyelik derecesi kümenin yüksekliğini belirler. Matematiksel gösterimi;

$$Yükseklik(\tilde{A}) = \max \{\mu_{\tilde{A}}(x), x \in X\} \quad (9)$$

biçimindedir.

1.6.4. Normallik

Bulanık bir kümenin en büyük üyelik derecesi 1 ise küme normal bir bulanık kümedir. Matematiksel gösterimi;

$$Yükseklik(\tilde{A}) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x) = 1, x \in X\} \quad (10)$$

biçimindedir.

1.6.5. Cebirsel Toplama İşlemi

$\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ iki bulanık küme olsun. $\tilde{A} + \tilde{B}$ 'nin üyelik fonksiyonu ile gösterimi;

$$\mu_{\tilde{A} + \tilde{B}}(x) = \{\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x), x \in X\} \quad (11)$$

ile verilir.

1.6.6. Cebirsel Fark İşlemi

$\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ iki bulanık küme olsun. $\tilde{A} - \tilde{B} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$ 'nin üyelik fonksiyonu ile gösterimi;

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x), x \in X\} \quad (12)$$

ile verilir

1.6.7. Fark İşlemi

$\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ iki bulanık küme olsun. $\tilde{A} \setminus \tilde{B} = \tilde{A} \cap \tilde{B}'$ 'nin üyelik fonksiyonu ile gösterimi;

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}'}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), 1 - \mu_{\tilde{B}}(x), x \in X\} \quad (13)$$

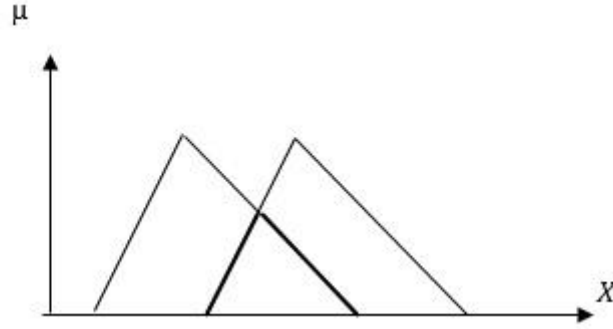
biçimindedir.

1.6.8. Kesişim İşlemi

$\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ iki bulanık küme olsun. $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ 'nin üyelik fonksiyonu ile gösterimi;

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x), x \in X\} \quad (14)$$

biçimindedir ve Şekil 5'de gösterilmiştir.



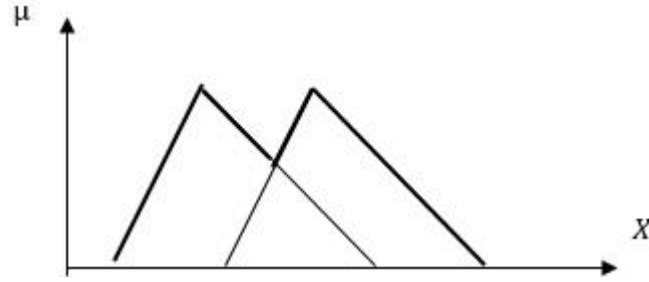
Şekil 5. A ve B bulanık kümelerinin kesişimi

1.6.9. Birleşim İşlemi

$\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ iki bulanık küme olsun. $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ 'nin üyelik fonksiyonu ile gösterimi:

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x), x \in X\} \quad (15)$$

biçimindedir ve Şekil 6'da gösterilmiştir.

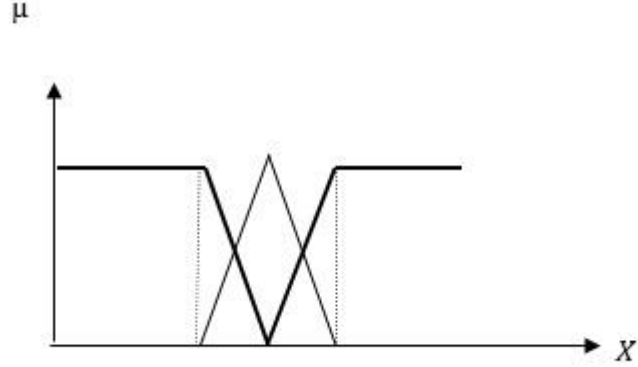


Şekil 6. A ve B bulanık kümelerinin birleşimi

1.6.10. Tümlleme İşlemi

A bir bulanık küme olsun. A'nın üyelik fonksiyonu ile gösterimi Eşitlik (16) da veildiği gibidir.

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \{1 - \mu_A(x), x \in X\} \quad (16)$$

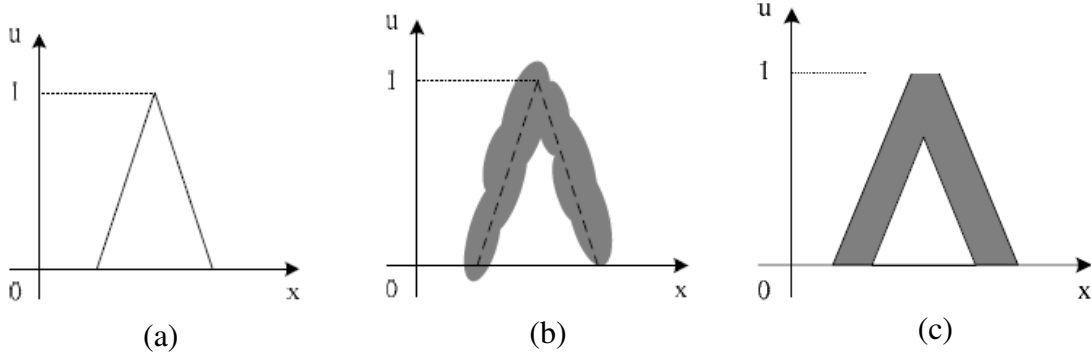


Şekil 7. A~ bulanık kümesinin tümlenyeni

1.7. Tip-2 Bulanık Mantık

Temel olarak bir tip-2 bulanık küme, üyelik fonksiyonu hakkında belirsizliğe sahip bir kümedir. Bulanıklığın sadece dilsel değişkenlerle sınırlanmadığı ayrıca üyelik fonksiyonunun tanımında da devam ettiği için tip-2 bulanık kümenin geleneksel tip-1 bulanık kümenin bir genelleşmesi olduğunu söylenebilir.

Şekil 8'de tip-1 üyelik fonksiyonundan tip-2 üyelik fonksiyonuna geçiş grafiksel olarak gösterilmiştir.



Şekil 8. a) Tip-1 bulanık küme, b) Belirsizliklerin etkisi, c) Tip-2 bulanık küme

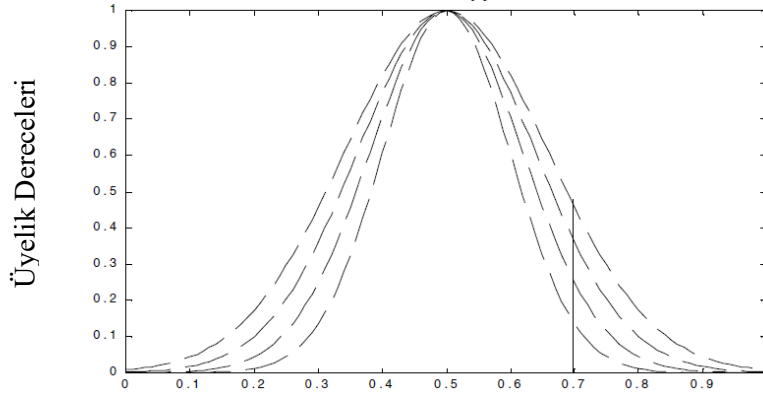
Bilindiği gibi tip-1 bulanık kümelerde elemanların bir kümeye ait olma üyelik dereceleri $[0,1]$ aralığında keskin değerler almaktadır. Tip-2 bulanık kümeler ise o kümeye ait her bir elemanın üyelik derecelerinin de bir bulanık küme belirttiği üyelik fonksiyonları ile ifade edilirler.

1.7.1. Tip-2 Bulanık Kümeler

Tip-2 bulanık küme kavramı 1975 de Zadeh tarafından tip-1 bulanık kümelerin genişlemesi olarak ortaya konulmuştur. Tip-2 bulanık kümeler bulanık üyelik fonksiyonları ile karakterize edilirler, bu kümelerin her bir elemanı için üyelik derecesi de $[0,1]$ aralığında bir bulanık kümedir. Bu anlamda tip-1 bulanık kümelerden farklıdır çünkü tip-1 bulanık kümelerde üyelik derecesi $[0,1]$ aralığında kesin bir sayıdır. Böyle kümeler, üyelik dereceleri hakkında belirsizlik olması ve üyelik fonksiyonlarının şekillerinin veya bazı parametrelerinin belirsiz olması durumlarında kullanılabilir. Ortalaması m , standart sapması $[\sigma_1, \sigma_2]$ aralığından değer alan Normal üyelik fonksiyonu ile karakterize edilen bir bulanık küme durumunu göz önüne alındığında, üyelik fonksiyonu

$$\mu(x) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{x-m}{\sigma} \right]^2 \right\}; \quad \sigma \in [\sigma_1, \sigma_2] \quad (17)$$

ile ifade edilir ve σ 'nın her değerine karşılık farklı bir üyelik fonksiyonu eğrisi Şekil 9'da gösterildiği gibi elde edilir.

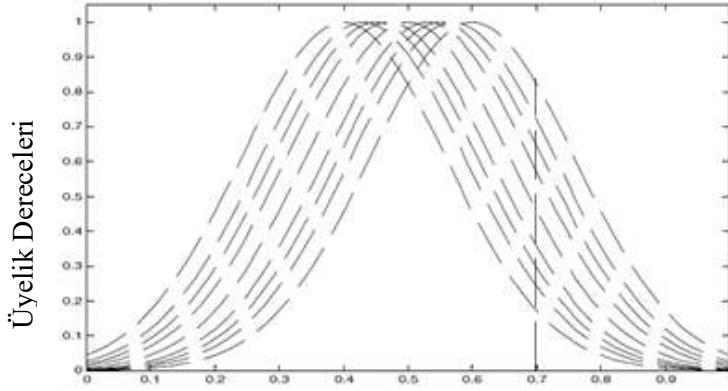


Şekil 9. Kesin olmayan standart sapmaya sahip tip-2 bulanık küme

Böylece, x 'in her belirli değerinin ($x = m$ hariç) üyelik derecesi σ 'nın değerlerine bağlı değerler alabilir. Standart sapması sabit ve ortalaması $[m_1, m_2]$ aralığından değer alan normal üyelik fonksiyonu ile karakterize edilen bir bulanık küme durumunu göz önüne alındığında ise üyelik fonksiyonu

$$\mu(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-m}{\sigma}\right]^2\right\}; \quad m \in [m_1, m_2] \quad (18)$$

ile verilir, burada $\mu(x)$ bir bulanık kümedir ve üyelik fonksiyonu eğrisi Şekil 10'da gösterildiği gibi elde edilir.



Şekil 10. Kesin olmayan ortalamaya sahip tip-2 bulanık küme

1.7.2. Tip-2 Bulanık Kümelerde İşlemler

Tip-2 bulanık kümeler için teorik küme işlemleri, tip-1 bulanık kümeler için tanımlanmış küme işlemlerinin genişlemesi olarak ifade edilmektedir. Tip-2 bulanık

kümelerin birleşim, kesişim ve tümleyenlerini hesaplamak için kesin sayılardan tip-1 bulanık kümelerle gerçekleştirilen minimum ve maksimumun ikili işlemlerine ihtiyaç vardır. Tip-2 bulanık kümelerde; birleşim, kesişim ve tümleyenlerin hesaplanması için temel araç Zadeh'in genişleme prensibidir [76]. $\tilde{A}_1$ ve $\tilde{A}_2$ tip-2 bulanık kümeler olarak düşünüldüğünde;

$$\tilde{A}_1 = \int_x \mu_{\tilde{A}_1}(x)/x \text{ ve } \tilde{A}_2 = \int_x \mu_{\tilde{A}_2}(x)/x \quad (19)$$

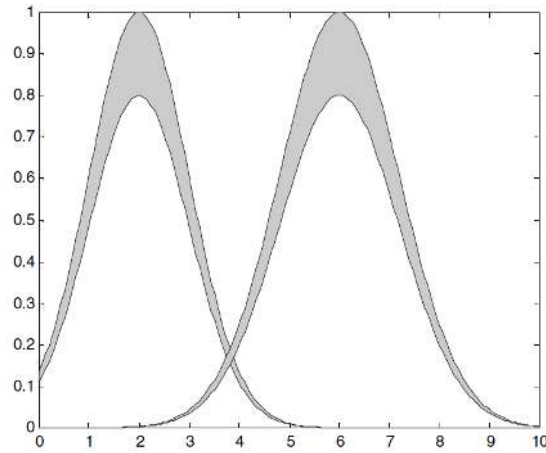
biçiminde ifade edilirler. Bu kümeler üzerindeki işlemler aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

1.7.2.1. Tip-2 Bulanık Kümelerin Birleşimleri

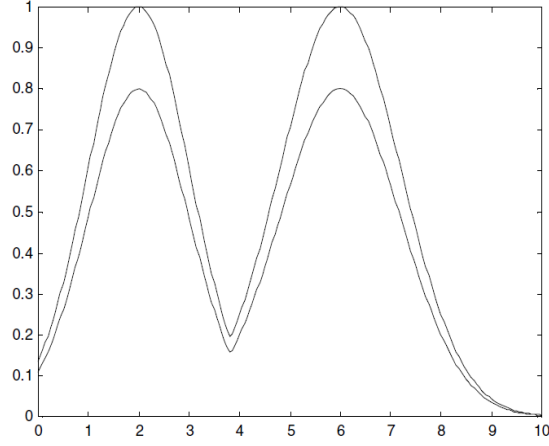
$\tilde{A}_1$ ve $\tilde{A}_2$ ile tanımlanan tip-1 bulanık kümelerin birleşimlerinin başka bir tip-1 bulanık küme olması gibi, $\tilde{A}_1$ ve $\tilde{A}_2$ ile tanımlanan tip-2 bulanık kümelerinin birleşimleri de başka bir tip-2 bulanık kümedir. Matematiksel gösterimi;

$$\tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2 = \int_{x \in X} \mu_{\tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2}(x)/x \quad (20)$$

biçimindedir. Örnek olarak Şekil 11' de gösterilen Gaussian üyelik fonksiyonları ele alındığında birleşim işlemi Şekil 12' de gösterildiği gibi gerçekleşir.



Şekil 11. İki örnek tip-2 Gauss üyelik fonksiyonları



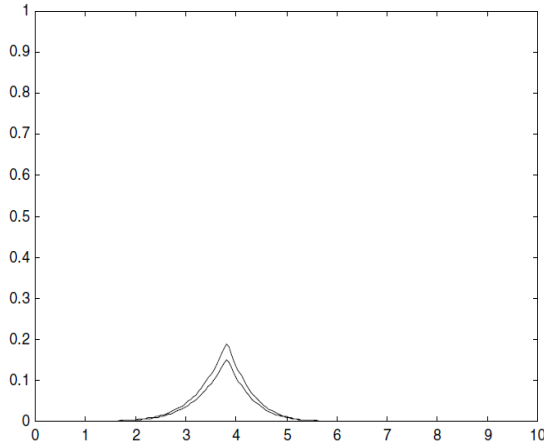
Şekil 12. İki tip-2 Gauss üyelik fonksiyonunun birleşimi

1.7.2.2. Tip-2 Bulanık Kümelerin Kesişimleri

$\tilde{A}_1$ ve $\tilde{A}_2$ bulanık kümelerinin kesişimleri başka bir tip-2 bulanık kümedir. Matematiksel gösterimi;

$$\tilde{A}_1 \cap \tilde{A}_2 = \int_{x \in X} \mu_{\tilde{A}_1 \cap \tilde{A}_2}(x)/x \quad (21)$$

biçimindedir. Şekil 11' de gösterilen tip-2 Gaussian üyelik fonksiyonlarının kesişimleri de Şekil 13.'de gösterildiği gibi gerçekleşir.



Şekil 13. İki tip-2 Gauss üyelik fonksiyonlarının kesişimi

1.7.2.3. Tip-2 Bulanık Kümelerin Tümleyenleri

Bir $\tilde{A}$ tip-2 bulanık kümesinin tümleyeni başka bir tip-2 bulanık kümedir. Matematiksel gösterimi;

$$\tilde{A}' = \int_x \mu_{\tilde{A}'1(x)/x} \quad (22)$$

biçimindedir.

1.8. Kümeleme Analizi

Kümeleme analizi, bir araştırmada incelenen birimleri aralarındaki benzerliklerine göre belirli gruplar içinde toplayarak sınıflandırma yapmayı, birimlerin ortak özelliklerini ortaya koymayı ve bu sınıflar ile ilgili genel tanımlar yapmayı sağlayan bir yöntemdir [50]. Kümeleme analizi içinde, asıl dikkat edilecek durumlar; örneklemin popülasyonu temsil etme başarısı, değişkenler arasındaki çoklu bağlantı ve gözlemlerdeki aykırı değerlerdir.

Kümeleme analizi, elde bulunan veri yığınına belirlenen yöntemlerle analiz ederek daha önceden etiketleri belli olmayan gruplara ayrılması işlemidir. Bu işlem sonucunda elde edilen kümeler yüksek düzeyde küme içi homojenlik ve kümeler arası heterojenlik gösterirler [3].

Kümeleme analizi, bir veri matrisinde yer alan ve gruplamaları bilinmeyen birimleri birbirleriyle benzer alt kümelere ayırmaya yarayan yöntemler topluluğudur. Veri setinde yer alan değişkenler itibariyle, bireyler arasındaki uzaklık temel alınarak, benzer bireylerin aynı kümelere toplanması ve yeni bir bireyin hangi gruba dâhil olduğunun tahmin edilmesi kümeleme analizinin esasını teşkil etmektedir [73].

Kümeleme analizinin genel amacı, gruplanmamış verileri benzerliklerine göre sınıflandırmak ve araştırmacıya uygun, işe yarar, özetleyici bilgiler elde etmede yardımcı olmaktır. Kümeleme analizinde gruplandırma benzerlik ve farklılıklara göre yapılır [44].

Kümeleme analizinin adımları aşağıdaki gibi verilmektedir.

Adım 1: Birimlerin değişkenlere ilişkin gözlemlerinin elde edilmesi (veri matrisinin oluşturulması).

Adım 2: Birimlerin birbirleri ile olan benzerliklerini ya da farklılıklarını gösteren uygun bir benzerlik ölçüsü ile uzaklıklarının hesaplanması (benzerlik ya da farklılık matrisinin oluşturulması).

Adım 3: Uygun kümeleme yöntemi kullanılarak benzerlik/farklılık matrislerine göre birimlerin uygun sayıda kümeler ayrılması.

Adım 4: Elde edilen kümelerin yorumlanması ve bu kümeleme yapısına dayalı olarak kurulan hipotezlerin doğrulanması için gerekli analitik yöntemlerin uygulanması [33].

Kümeleme analizinin amacı, aynı küme içerisindeki gözlemlerin birbirine benzer, diğer kümelerdeki gözlemlerden farklı olacak şekilde yapılmasıdır. Bu amaç için benzerlik ve farklılık kavramları kullanılır. Benzerlik iki nesne veya iki özellik arasındaki ilişkinin kuvveti olarak açıklanır. Bu nicel değer alınan ölçeğe veya veri tipine göre değişik yollardan elde edilir. Farklılık ise, iki nesne arasındaki zıtlık ya da uyumsuzluğun bir ölçüsü olan farklılıkları ölçer. Benzerlik ve farklılık ölçümleri gözlemlerin birbirinden ayırt edilmesini sağlar ve bu sayede gözlemler gruplara ayrılır [22, 67].

Değişken tipleri kesikli ve sürekli olmak üzere iki kategoride sınıflandırılabilir. Kümeleme analizinde değişkenlerin ölçek türleri önem taşır. Analizde kullanılacak olan uzaklık ya da benzerlik ölçüleri değişkenlerin ölçü birimlerine göre belirlenmelidir [33].

Kümeleme analizinde kullanılan benzerlik ölçütleri Tablo 1’de verilmiştir. Bulanık mantığa dayalı kümeleme analizlerinde en yaygın kullanılan uzaklık ölçütleri Öklit uzaklığı ve Mahalanobis uzaklığıdır.

Tablo 1. Uzaklık ölçüleri

Uzaklık Ölçüleri	Formül
Öklid uzaklığı	$D(x_i, x_j) = \sqrt{\sum_{k=1}^N (x_{ik} - x_{jk})^2}$
Manhattan (City-Block) Uzaklığı	$D(x_i, x_j) = \sum_{k=1}^N x_{ki} - x_{kj} $
Minkowski Uzaklığı	$D(x_i, x_j) = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^N (x_{ik} - x_{jk})^p}$
Mahalanobis Uzaklığı	$D(x_i, x_j) = (x_i - x_j)' F^{-1} (x_i - x_j)$

Öklid uzaklığı veri kümesi sıkı ya da izole edilmiş kümeler içerdiğinde genellikle iyi sonuçlar verir. Küresel küme şekillerini bulmaya eğilimlidir. Minkowski uzaklık ölçüsü ise

en büyük ölçekli nesnenin diğerlerine baskın gelmesi mantığına dayanır. Formülde de görüldüğü gibi, Minkowski ölçüsünün $p = 2$ durumu Öklid uzaklığını, $p = 1$ durumu ise Manhattan uzaklığını vermektedir. Öklid uzaklığı ölçüsü çok kümelenmeye neden olur ki, bu kümelerin sabit üyelik yüzeyleri çok boyutlu küresel kümelerdir.

Mahalanobis ölçüsü ise uzaklık ölçüsünde kovaryansları F dikkate aldığı için, farklı ölçü birimlerine sahip veriler arasındaki uzaklıkları hesaplamak için uygundur. Mahalanobis uzaklık ölçüsünde çok boyutlu elips kümelerin eksenleri x koordinat eksenleriyle bir açı oluşturarak farklı şekillerde biçimlendirilebilir. Uyarlanmış Mahalanobis uzaklık ölçüsü çok boyutlu elips kümeleri elde etmek için kullanılır. Uzaklıkları hesaplarken veri setleri farklı ölçü birimlerinden veriler içerdiğinde, hesaplama yapmak için öncelikle veri setinin normalleştirilmesi gerekir.

Ayrıca nesneler arasında bir doğrusal ilişki olması da, uzaklık ölçülerini etkileyebilmektedir. Bu durumlarda veri kümesinin normalleştirilmesi ya da Mahalanobis uzaklığının karesinin kullanılması ile daha doğru sonuçlar elde edilebilir [11].

Kümeleme analizi teknikleri temel anlamda Hiyerarşik Kümeleme ve Hiyerarşik Olmayan Kümeleme olarak ikiye ayrılır. Hiyerarşik Kümeleme, Bölen Hiyerarşik Kümeleme ve Toplanmış Hiyerarşik Kümeleme olarak iki alt kategoride incelenir. Hiyerarşik Olmayan Kümeleme; Merkez Tabanlı Kümeleme, Yoğunluk Tabanlı Kümeleme, Izgara Tabanlı Kümeleme, Kategorik Kümeleme ve Bulanık Kümeleme olarak beş alt kategoride incelenmektedir. Merkez Tabanlı Kümeleme de yaygın olarak K-Ortalamalar ve K-Metodid algoritmaları kullanılır. Bulanık Kümeleme de en yaygın kullanılan algoritma C-Ortalamalar algoritmasıdır. Kümelerin farklı geometrik durumları için Gustafson-Kessel ve Gath-Geva algoritmaları geliştirilmiştir [34, 53, 54, 71, 77].

1.8.1. Hiyerarşik Kümeleme

Hiyerarşik kümeleme yöntemleri gruplayan ve bölen olmak üzere iki ana başlık altında toplanabilirler [43]. Gruplayıcı hiyerarşik yöntemde her birim veya her gözlem başlangıçta bir küme olarak kabul edilir. Daha sonra en yakın iki küme (veya gözlem) yeni bir kümede toplanarak birleştirilir. Böylece her adımda küme sayısı bir azaltılır. Bu süreç dendogram veya ağaç grafiği adı verilen şekilde gösterilebilir. Bölücü hiyerarşik yöntemde ise süreç gruplayıcı hiyerarşik yöntemin tam tersidir. Bu yöntemde tüm gözlemlerden oluşan büyük

bir küme ile işe başlanır. Benzer olmayan gözlemler ayıklanarak daha küçük kümeler oluşturulur [30].

1.8.2. Hiyerarşik Olmayan Kümeleme Yöntemleri

Hiyerarşik olmayan kümeleme tekniklerde küme sayısı hakkında ön bilgiler vardır veya araştırmacı anlamlı olacak şekilde bir küme sayısına karar vermektedir. Hiyerarşik olmayan teknikler, hiyerarşik tekniklere göre daha büyük veri setine uygulanır.

Hiyerarşik olmayan teknikler ya gruplardaki birimlerin ilk parçalarından ya da kümelerin çekirdeklerinden oluşan çekirdek noktaların ilk setiyle işe başlar. İlk gruplaşmalar için seçim serbesttir. Başlangıç yollardan biri birimler arasındaki çekirdek noktaların rasgele seçilmesi veya ilk gruplardaki birimlerin rasgele parçalanmasıdır [44].

Hiyerarşik kümeleme yöntemleri, merkez tabanlı, yoğunluk tabanlı, ızgara tabanlı, kategorik ve bulanık kümeleme başlıkları altında toplanabilirler. Merkez tabanlı kümeleme yöntemlerinden K-Ortalamlar yöntemi, Bulanık Kümeleme yöntemlerine temel teşkil etmesi bakımından önemlidir.

1.8.2.1. K-Ortalamlar Yöntemi

Bu yöntemde küme sayısı, en az 2 ve en fazla gözlem sayısına eşit ya da daha az olacak şekilde belirlenir. K-Ortalamlar yönteminin amacı, gözlemleri, sayısı araştırmacı tarafından belirlenen kümelerle sınıflandırmaktır. Sonuçta, K-Ortalamlar yöntemiyle gözlemler, kümeler arasındaki değişkenlik en büyük, kümeler içi değişkenlik en küçük olacak biçimde farklı kümelerle yerleştirilirler [4].

K-Ortalamlar yöntemine sahip kümeleme algoritması, hata kareler kriterini kullanan kesin kümeleme tekniğidir. Hata kareler toplamı (HKT);

$$HKT = \sum_{i=1}^N \sum_{r \in i} \|x_r^i - v_i\|^2 \quad (23)$$

biçiminde ifade edilir. Eşitlik (23), nesnelerin bulundukları kümenin merkez noktalarına olan uzaklıklarının kareleri toplamını vermektedir. Nesnelerin, bulundukları küme merkezlerine olan uzaklık ya da yakınlıkları HKT değerinin yüksek ya da düşük çıkmasına

sebebi olur. Düşük HKT değeri nesnelerin, küme merkezlerine yakın konumlandıkları, yüksek HKT değeri ise nesneler ile küme merkezlerinin birbirlerine uzak oldukları anlamına gelmektedir. Amaç sıkı, birbirine benzer yani yakın nesneleri barındıran kümeler elde etmek olduğundan en düşük HKT değerine sahip kümeleme en iyi sonucu vermektedir [9].

K-Ortalamalar algoritması da kümeleme işlemi sonunda, mümkün olan küme içi en sıkı ve kümeler arası en ayık k tane kümenin elde edilmesini hedefler. Rastgele seçilen bir bölümlerle başlar ve nesneler ile küme merkezleri arasındaki uzaklığa bağlı olarak, hata kriteri sağlanana kadar nesnelerin kümelere devri gerçekleştirilir. K-Ortalamalar Algoritması aşağıdaki gibi adımlandırılır.

Adım 1: k adet birim başlangıç küme merkezleri olarak rastgele seçilir.

Adım 2: Küme merkezi olmayan birimler belirlenen uzaklık ölçülerine göre başlangıç küme merkezlerinin ait oldukları kümelere atanır.

Adım 3: Yeni küme merkezleri oluşturulan k adet başlangıç kümesindeki değişkenlerin ortalamaları alınarak tekrar oluşturulur.

Adım 4: Birimler, en yakın oldukları yeni küme merkezli kümelere atanır ve yeni merkezler olan uzaklıklar hesaplanır.

Adım 5: Bir önceki küme merkezlerine olan uzaklıklar ile yeni oluşturulan küme merkezlerine olan uzaklıklar karşılaştırılır.

Adım 6: Uzaklıklar makul görülebilir oranda azalmış ise 4. adıma dönlür.

Adım 7: Eğer çok büyük bir değişiklik söz konusu değil ise, süreç sona erdirilir. Son tekrarda belirlenen merkezler küme merkezleri olarak elde edilmiş olur.

1.8.2.2. Bulanık Kümeleme Yöntemleri

Bulanık kümeleme yöntemi, kümeler birbirinden belirgin bir şekilde ayrılamıyorsa ya da bazı birimler küme üyeliğinde kararsızsa böyle birimleri mevcut kümelere dahil edebilmek için uygun bir yöntem olarak ortaya çıkmaktadır. Birbirine çok benzeyen birimler aynı kümede yüksek üyelik ilişkisine göre yer alırlar. Bundan dolayı Bulanık Kümeleme Yöntemi, birimlerin kümeye ya da kümelere ait olabilme katsayılarını hesaplar. Üyelik katsayılarının toplamı daima 1'e eşittir. Böylelikle birim en yüksek üyelik katsayısına sahip olduğu kümeye atanır. Üyelik fonksiyonları, kümedeki elemanlar sürekli veya süreksiz olsun bir bulanık kümedeki belirsizliği karakterize eden fonksiyonlardır. Klasik kümeleme yöntemlerinde ise her bir birim, sıfır olmayan sadece bir üyelik katsayısına sahiptir ve bu

değer daima 1'dir. Dolayısıyla klasik kümeleme yöntemleri, bulanık kümelemenin sınırlı bir durumudur [10, 34, 69]. Bulanık kümeleme yöntemlerine C-Ortalamlar, Gustafson-Kessel ve Gath-Geva algoritmaları örnek olarak verilebilir. Bulanık Kümeleme de en yaygın kullanılan algoritma C-Ortalamlar algoritmasıdır.

1.8.2.2.1. Bulanık C-Ortalamlar Algoritması

Bulanık kümeleme yöntemi, elemanların kümelere hangi derece ile ait olduğunu belirleyen üyelik fonksiyonlarını hesaplamak ve veri seti içerisindeki örtüşen kümeleri saptamak üzere kullanılmaktadır [21]. Bulanık C-ortalamlar (FCM) algoritması bulanık kümeleme yöntemlerinin en iyi bilinen ve en yaygın kullanılanıdır. 1973 yılında Dunn tarafından ortaya atılmış, 1981'de Bezdek tarafından geliştirilmiştir. K-ortalama kümeleme algoritmasının bulanık mantık için uyarlanmış halidir. Algoritmanın amacı, küme merkezleri ile gözlemler arasındaki uzaklıkların toplamı biçimde tanımlanan amaç fonksiyonunu minimize etmektir. Algoritmada kullanılan uzaklık ölçüsü öklid uzaklığıdır. Bu sebeple, algoritma sonuçlandığında, p boyutlu uzaydaki noktalar küresel şekiller oluşturur. Bu nedenle algoritma en güzel sonucu küresel olarak dağılmış veriler için verir. FCM algoritması kümelerin yaklaşık olarak aynı boyutta olduğunu varsayar [70].

Her bir kümeyi küme merkezi temsil eder. X veri kümesinin c adet alt kümeye sahip olduğu düşünülürse;

$$X = [x_1, x_2 \dots, x_c] \quad (24)$$

biçiminde ifade edilir.

Veri setindeki bir elemanın üyelik dereceleri, veri noktası ile küme merkezi arasındaki uzaklık hesaplanarak belirlenir. Nesne hangi küme merkezine yakınsa o kümeye ait olma üyeliği, diğer kümelere ait olma üyeliğinden daha büyük olacaktır. FCM algoritmasının uygulanabilmesi için ilk olarak küme merkezlerinin veya üyelik derecesinin bilinmesi gerekir. Bu parametrelerin önceden bilinmesi zor olduğu için deneme yanılma yöntemi ile en uygun değerler elde edilebilir.

FCM algoritmasının amacı veri setinde yer alan gözlemlerin c alt bulanık kümeye optimal ait olma derecelerini belirlemektir. Algoritma bu amacına, en küçük kareler tekniğinin genellemesi olan amaç fonksiyonunu yinelemeli olarak minimize ederek

ulaşmaya çalışır [78]. m bulanıklaştırma indeksi ile gözlem değerleri ile küme merkezleri arasındaki mesafeye dayalı amaç fonksiyonu,

$$J(U, v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^c u_{ji}^m \|x_i - v_j\|^2 \quad (25)$$

biçiminde ifade edilir.

Bu fonksiyon da n gözlem sayısını, c küme sayısını, m bulanıklık indeksi, u_{ji} ; j . kümenin i . elemanına ait üyelik derecesi, v_j ; j . kümenin merkezini temsil etmektedir. Ağırlıklandırılmış en küçük kareler fonksiyonu olan $J(U, v)$ ağırlıklandırılmış hata kareler toplamıdır. FCM Algoritması aşağıdaki gibi adımlandırılır.

Adım 1: Başlangıç değerleri belirlenir (küme sayısı c , bulanıklık indeksi m , üyelik dereceleri matrisi U , süreç durdurma kriteri ε).

Adım 2: U matrisinde yer alan ve başlangıçta rastgele üretilen üyelik dereceleri kullanılarak küme merkezleri Eşitlik (26) kullanılarak hesaplanır.

$$v_j = \frac{\sum_{i=1}^n u_{ji}^m x_i}{\sum_{i=1}^n u_{ji}^m} \quad (26)$$

Adım 3: Verilerin kümelerine ait olma dereceleri Eşitlik (27) ile güncellenir.

$$u_{ji} = \frac{1}{\sum_{k=1}^c \left(\frac{\|x_i - v_j\|}{\|x_i - v_k\|} \right)^{2/m-1}} \quad (27)$$

Adım 4: $\|V_t - V_{t-1}\| < \varepsilon$ ise iterasyon durdurulur aksi takdirde Adım 2'ye geri dönlür.

1.9. Doğrusal Regresyon Çözümlemesi

Regresyon çözümlemesi, aralarında sebep-sonuç ilişkisi bulunan iki veya daha fazla değişken arasındaki ilişkiyi belirlemek ve bu ilişkiyi kullanarak gelecek ile ilgili tahminler ya da kestirimler yapabilmek için kullanılır. Regresyon çözümlemesinin genel amacı;

bağımlı değişken (Y) ile bağımsız değişkenler ($X_1, \dots, X_n$) arasındaki ilişkinin matematiksel modelini tanımlayarak regresyon katsayıları (β)'lerinin belirlenmesi ile bağımsız değişkene ilişkin tahmin değerlerinin elde edilmesi olarak özetlenebilir [18, 37, 41, 66].

Doğrusal regresyon modelinin parametrelerini tahmin etmek için en sık kullanılan yöntem En Küçük Kareler yöntemidir. En Küçük Kareler yönteminin varsayımları aşağıdaki gibidir.

- 1) Hata terimleri rastgeledir.
- 2) Hata terimlerinin ortalaması sıfırdır; $E(\varepsilon_i) = 0$.
- 3) Hata terimleri sabit varyansa sahiptir; $E(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \sigma^2$.
- 4) Hata terimleri sıfır ortalamalı, sabit varyanslı Normal Dağılıma sahiptir; $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$.
- 5) Hata terimleri arasında ilişki (otokorelasyon) yoktur;

$$\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = E\{[\varepsilon_i - E(\varepsilon_i)][\varepsilon_j - E(\varepsilon_j)]\} = 0 \quad (28)$$

- 6) Bağımsız değişken ve hata terimi arasında ilişki yoktur;

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\varepsilon_i, X_i) &= E\{[\varepsilon_i - E(\varepsilon_i)][X_i - E(X_i)]\} \\ &= E\{\varepsilon_i[X_i - E(X_i)]\} \\ &= E(\varepsilon_i X_i) - E(\varepsilon_i) \cdot E(X_i) \\ &= E(\varepsilon_i, X_i) = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

- 7) Bağımsız değişkenler arasında ilişki yoktur.

Bu varsayımlar altında basit doğrusal regresyon modeli,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \quad (30)$$

biçiminde, çoklu doğrusal regresyon modeli ise,

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_n X_n + \varepsilon \quad (31)$$

biçiminde tanımlanır ve çoklu doğrusal regresyon modelinin matris ve vektör ile gösterimi,

$$\underline{Y} = X\underline{\hat{\beta}} + \underline{\varepsilon}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & \dots & X_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & X_{n1} & \dots & X_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad (32)$$

biçiminde ifade edilir.

Burada;

Y : Bağımlı değişken (açıklanan değişken) $n \times 1$ boyutlu.

X : Bağımsız değişken (açıklayıcı değişken) $n \times p$ boyutlu.

β : Regresyon Katsayısı $n \times 1$ boyutlu.

ε : Rastgele hata terimi $n \times 1$ boyutlu.

Regresyon çözümlemesinde amacımız parametre tahmini yapmaktır. [19]. Yukarıdaki regresyon katsayıları β , tahmin edicileri $\hat{\beta}$ ile ifade edilir. $\hat{\beta}$ 'yi hesaplamak için;

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y \quad (33)$$

eşitliği kullanılır.

Bağımlı değişken Y 'nin tahmin edicisi $\hat{Y}$ ile ifade edilir ve

$$\hat{Y} = X\hat{\beta} \quad (34)$$

ile hesaplanır. Gerçek değerler ile tahmin değerleri arasındaki farka dayalı hata terimi ε ile ifade edilir ve

$$\varepsilon = Y - \hat{Y} \quad (35)$$

ile elde edilir ve hata kareler toplamının gözlem sayısına oranı olarak belirlenen hata ölçütü,

$$\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n_i} \frac{(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n} \quad (36)$$

ile belirlenir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Tip-2 Bulanık Kümeleme

Tip-2 bulanık küme kavramı, tip-1 bulanık kümelemenin bir genişlemesi olarak tanımlanmaktadır [31, 48, 49, 63]. Tip-1 bulanık kümeleme de kümeler eşit bulanıklaştırma indeksi verilmektedir, bu durum kümeler farklı hacme sahip olduklarında performans kaybına neden olabilmektedir. Bu sebeple tip-2 bulanık kümeleme de bulanıklık indeksi $m = [m_1, m_2]$ biçiminde aralık olarak tanımlanır ve her kümeye farklı bulanıklaştırma indeksi verilir. Böylece tip-2 bulanık kümeleme, kümeler farklı küme hacimlerine sahip olduğu durumlarda daha iyi performans göstermektedir [14, 39, 57].

Bulanıklık indeksi $m = [m_1, m_2]$ parametrelerinin belirlenmesi için; öncelikle FCM algoritması kullanılarak elde edilen kümelerin hacimleri hesaplanır ve bu hacimlere dayalı olarak m_1 ve m_2 parametreleri belirlenir. Burada amaç büyük hacimli kümeye küçük bulanıklaştırma indeksi, küçük hacimli kümeye büyük bulanıklaştırma indeksi verilmesini sağlayarak istenmeyen kümelenmelerin oluşmasını engellemektir [12, 40, 58, 79].

Tip-2 bulanık kümelemede $m = [m_1, m_2]$ aralığında hesaplanan ve hatayı minimum yapmayı amaçlayan fonksiyon,

$$\begin{aligned} J_{m_1}(U, v) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^c u_{ji}^{m_1} d_{ji}^2 \\ J_{m_2}(U, v) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^c u_{ji}^{m_2} d_{ji}^2 \end{aligned} \quad (37)$$

biçiminde verilmiştir, burada; $d_{ji}^2 = \|x_i - v_j\|^2$ dir [64].

Eşitlik (37) ile verilen denklem sisteminde n gözlem sayısı, c küme sayısı, m_1 ; birinci kümenin bulanıklık indeksini, m_2 ; ikinci kümenin bulanıklık indeksini, u_{ji} ; j . kümenin i . elemanına ait üyelik derecesini, v_j ; j . kümenin merkezini temsil etmektedir. Ağırlıklandırılmış en küçük kareler fonksiyonu olan $J_{m_1}(U, v)$ birinci kümenin ağırlıklandırılmış hata kareler toplamı, $J_{m_2}(U, v)$ ikinci kümenin ağırlıklandırılmış hata

kareler toplamıdır. Tip-2 bulanık kümeleme algoritmasının adımları aşağıdaki gibi verilebilir [47, 55, 61].

Adım 1: Küme sayısı c , bulanıklık indeksleri m_1 ve m_2 , üyelik dereceleri matrisi U ve durdurma kriteri olan ε için başlangıç değerleri belirlenir.

Adım 2: Başlangıçta keyfi olarak belirlenen U üyelik dereceleri ve $m = [m_1, m_2]$ bulanıklık parametreleri kullanılarak küme merkezleri hesaplanır.

$$\begin{aligned} v_{Lj} &= \frac{\sum_{i=1}^n u_{ji}^{m_1} x_i}{\sum_{i=1}^n u_{ji}^{m_1}} ; \quad j = 1, \dots, c \\ v_{Rj} &= \frac{\sum_{i=1}^n u_{ji}^{m_2} x_i}{\sum_{i=1}^n u_{ji}^{m_2}} ; \quad j = 1, \dots, c \end{aligned} \quad (38)$$

Adım 3: Gözlemlerin kümelere ait olma dereceleri Eşitlik (39) ve Eşitlik (40) ile güncellenir. $\bar{u}_{ji}$ üst üyelik derecelerini, $\underline{u}_{ji}$ alt üyelik derecelerini ifade etmektedir [39].

$$\bar{u}_{ji} = \begin{cases} \frac{1}{\sum_{k=1}^c (d_{ji}/d_{ki})^{\frac{2}{m_1-1}}} , & \text{eğer } \frac{1}{\sum_{k=1}^c \left(\frac{d_{ji}}{d_{ki}}\right)} < \frac{1}{c} \\ \frac{1}{\sum_{k=1}^c (d_{ji}/d_{ki})^{\frac{2}{m_2-1}}} , & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (39)$$

$$\underline{u}_{ji} = \begin{cases} \frac{1}{\sum_{k=1}^c (d_{ji}/d_{ki})^{\frac{2}{m_1-1}}} , & \text{eğer } \frac{1}{\sum_{k=1}^c \left(\frac{d_{ji}}{d_{ki}}\right)} \geq \frac{1}{c} \\ \frac{1}{\sum_{k=1}^c (d_{ji}/d_{ki})^{\frac{2}{m_2-1}}} , & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (40)$$

Adım 4: Küme merkezlerine Eşitlik (41) ile durulama (tip azaltma) işlemi uygulanır.

$$v_j = \frac{v_{Lj} + v_{Rj}}{2} ; \quad j = 1, \dots, c \quad (41)$$

Burada; m_1 bulanıklık parametresi kullanılarak elde edilen merkez v_L ile m_2 bulanıklık parametresi kullanılarak elde edilen merkez v_R ile ifade edilmektedir.

Adım 5: Üyelik derecelerine durulama işlemi,

$$u_{ji} = \frac{\bar{u}_{ji} + \underline{u}_{ji}}{2} \quad ; \quad j = 1, \dots, c, \quad i = 1, \dots, n \quad (42)$$

biçiminde uygulanır.

Adım 6: Üyelik fonksiyonları ile ağırlıklandırılmış kümelerin amaç fonksiyonlarına durulama işlemi,

$$J(U, v) = \frac{J_{m_1}(U, v) + J_{m_2}(U, v)}{2} \quad (43)$$

biçiminde uygulanır.

Adım 7: $\|v_{L_t} - v_{L_{t-1}}\| < \varepsilon$ ve $\|v_{R_t} - v_{R_{t-1}}\| < \varepsilon$ ise iterasyon durdurulur, aksi takdirde Adım 2'ye geri dönlür.

2.2. Tip-2 Bulanık Kümelemeye Dayalı Parametre Tahmini İçin Bir Algoritma

Tip-2 bulanık üyeliklere dayalı parametre tahmini, klasik regresyon çözümlemesindeki gibi parametreleri en küçük hata ile tahmin etmeyi amaçlar. Farklı sınıflardan gelen veriler birer küme olarak düşünüldüğünde veriye uygun bulanık kümeleme algoritmaları kullanılır ve veri kümelendir. Elde edilen kümelere ait üyelik dereceleri en uygun üyelik dereceleri olarak belirlenir. Böylece üyelik dereceleri ile veri ağırlıklandırılabilir. Ağırlıklandırılmış veriler kullanılarak regresyon modelini kurmak için en az hata ile tahmin ediciler hesaplanır.

Tip-2 Bulanık Kümeleme Algoritmasından faydalanan bulanık ağırlıklara dayalı parametre tahmini için önerilen algoritma adımsal olarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir;

Adım 1: Küme sayısı c , bulanıklık indeksi m , üyelik dereceleri matrisi U ve durdurma kriteri ε için başlangıç değerleri belirlenir.

Adım 2: Başlangıç üyelik derecelerine göre başlangıç küme merkezleri,

$$v_j = \frac{\sum_{i=1}^n u_{ji}^m x_i}{\sum_{i=1}^n u_{ji}^m} \quad ; \quad j = 1, \dots, c \quad (44)$$

biçiminde elde edilir.

Adım 3: Elde edilen küme merkezleri ile amaç fonksiyonu,

$$J(U, v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^c u_{ji}^m \|x_i - v_j\|^2 \quad (45)$$

biçiminde hesaplanır.

Adım 4: Üyelik dereceleri,

$$u_{ji} = \frac{1}{\sum_{k=1}^c \left(\frac{\|x_i - v_j\|}{\|x_i - v_k\|} \right)^{2/m-1}} \quad (46)$$

formülü ile güncellenir.

Adım 5: Küme merkezleri yeni üyelik derecelerine göre Eşitlik (44) ile güncellenir.

Adım 6: Güncel merkezler kullanılarak Eşitlik (45) ile amaç fonksiyonu güncellenir.

Adım 7: t . adımdaki merkez ile $(t - 1)$. adımdaki merkez değeri arasındaki fark belirlenen durdurma kriteri ε 'dan küçük olduğunda iterasyon durdurulur. Aksi takdirde Adım 2'ye geri dönlür. Sonuçta en iyi merkez ve üyelik dereceleri elde edilmiştir.

Adım 8: Veriler belirlenen üyelik derecelerine göre kümeler ayrılır.

Adım 9: Elde edilen kümelerin hacimleri verilerin yayıldığı alan göz önüne alınarak hesaplanır.

Adım 10: Elde ettiğimiz hacimlere dayalı m_1 ve m_2 bulanıklaştırma indeksleri ve bu indekslere dayalı küme merkezleri Eşitlik (38) ile hesaplanır ve bu merkezlere göre amaç fonksiyonlarının değerleri Eşitlik (37) ile elde edilir.

Adım 11: Elde edilen küme merkezlerine Eşitlik (41) ve elde edilen amaç fonksiyonu değerlerine Eşitlik (43) ile verilen durulama işlemi uygulanır.

Adım 12: Tip-2 bulanık mantığa dayalı kümeleme için üyelik dereceleri m_1 ve m_2 bulanıklık indeksine bağlı olarak Eşitlik (39) ve Eşitlik (40) ile belirlenir.

Adım 13: Üyelik derecelerine Eşitlik (42) ile durulama işlemi uygulanır.

Adım 14: Yeni üyelik dereceleri ile kümeler ilişkili merkezler güncellenir ve güncellenmiş merkez değerlerine dayalı amaç fonksiyonu değerleri hesaplanır.

Adım 15: Mevcut kümeler için t . adımdaki merkez ile $(t - 1)$. adımdaki merkez değeri arasındaki fark belirlenen durdurma kriteri ε 'dan küçük olduğunda süreç durdurulur. En iyi merkez ve üyelik dereceleri elde edilmiştir. En iyi merkez ve üyelik derecelerini

veren m_1 ve m_2 belirlenir ve elde edilen üyelik derecelerine dayanarak gözlemler kümelerine ayrılır.

Adım 16: Kümelere ilişkin doğrusal regresyon modelinin parametreleri tip-2 bulanık kümelemekten elde edilen üyelik derecelerinin ağırlık olarak kullanılması ile parametre tahmini gerçekleştirilir ve bağımsız değişken verileri,

$$X_{W_{i(Tip-2)}} = u_{ij(Tip-2)} x_j \quad ; \quad i = 1, \dots, c \quad , \quad j = 1, \dots, n \quad (47)$$

biçiminde ağırlıklandırılır. Ağırlıklandırılmış veriler kullanarak modelin parametresi,

$$\hat{B}_{i(Tip-2)} = \left(\left(X_{W_{i(Tip-2)}} \right)' X_j \right)^{-1} \left(\left(X_{W_{i(Tip-2)}} \right)' Y_j \right); \quad (48)$$

$$i = 1, \dots, c \quad j = 1, \dots, n_i$$

biçiminde belirlenir. $\hat{Y}_i$ ile ifade edilen tahmin değeri,

$$\hat{Y}_{i(Tip-2)} = X_{W_{i(Tip-2)}} \hat{B}_{i(Tip-2)} \quad i = 1, \dots, c \quad (49)$$

ile hesaplanır.

Adım 17: Tip-1 ve tip-2 bulanık kümelemeye bağlı olarak elde edilen parametrelere ilişkin tahminler ve gerçek değerleri arasındaki fark olarak tanımlanan hata miktarları hesaplanır ve hata kareler toplamının gözlem sayısına oranı olarak belirlenen hata ölçütü,

$$\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n_i} \frac{(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n} \quad (50)$$

ile belirlenir. Küçük hataya sahip model tahmin model olarak kullanılır.

Adım 18: Tip-1 bulanık kümeleme yöntemi, tip-2 bulanık kümeleme yöntemi ve klasik en küçük kareler yönteminden elde edilen parametre tahmini sonuçları hata kareler toplamı anlamında karşılaştırılır.

2.3. Uygulama

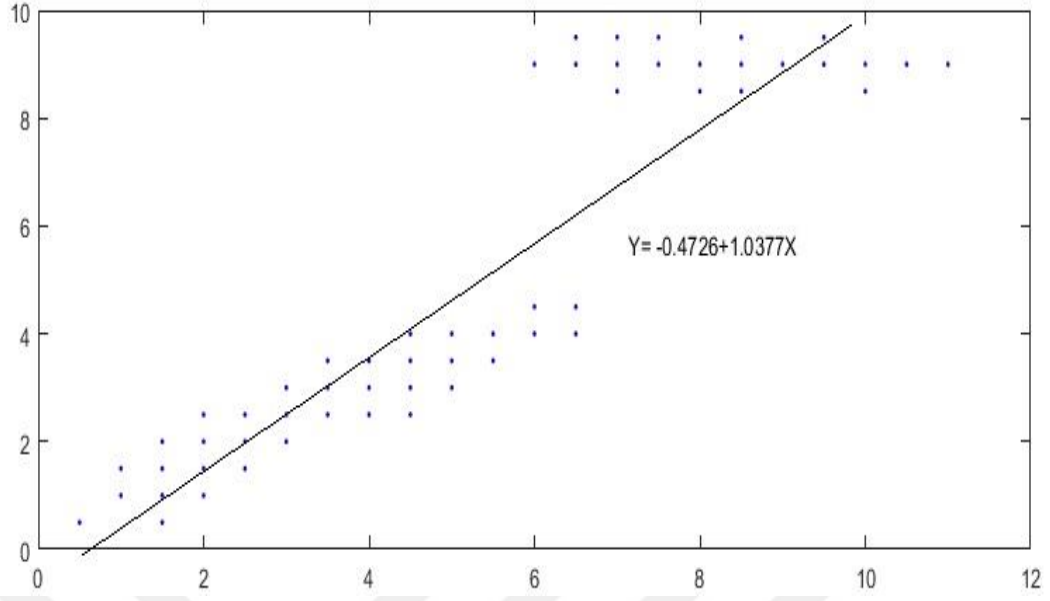
Bu bölümde verilerin birden fazla kümeye ayrılması durumunda Bölüm (2.2) de önerilen tip-2 bulanık kümelemeye dayalı parametre tahmini için önerilen algoritmanın kullanılabilirliğini irdelemek amacı ile çeşitli uygulamalara yer verilmiştir.

Örnek 1: Bu örnekte yer alan veri seti 56 gözlemden oluşmakta ve verilerin bir kısmı Tablo 2’de yer almaktadır. Veri setinde bir bağımlı ve bir bağımsız değişken bulunmaktadır. Bağımlı değişken Y , bağımsız değişken ise X ile ifade edilmektedir.

Tablo 2’de EKK yöntemi, Tip-1 bulanık kümeleme yöntemi ve Tip-2 bulanık kümeleme yöntemi algoritmalarından elde edilen tahminler ve bu tahminlere ilişkin hata miktarları yer almaktadır.

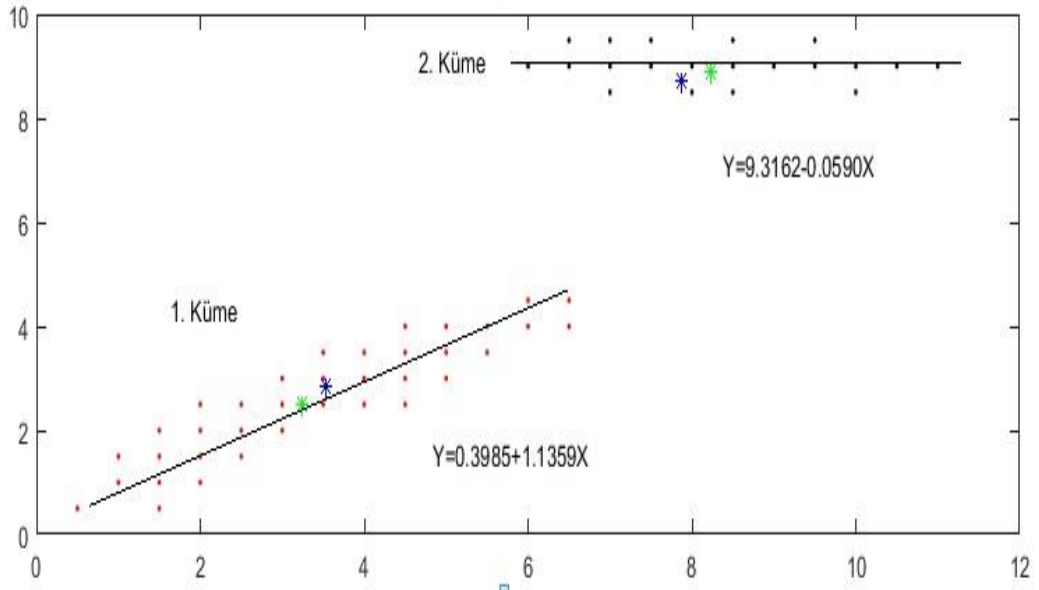
Tablo 2. Verilerin üç farklı yöntem ile elde edilen tahminler ve hataları

		Klasik Regresyon		Tip-1 Kümeleme Yöntemi		Tip-2 Kümeleme Yöntemi	
X	Y	$\hat{Y}_{EKK}$	ε_{EKK}	$\hat{Y}_{tip-1}$	ε_{tip-1}	$\hat{Y}_{tip-2}$	ε_{tip-2}
4.0	3.5	3.6784	-0.1784	3.2249	0.2751	3.0998	0.4002
0.5	0.5	0.0463	0.4537	0.6236	-0.1236	0.7083	-0.2083
1.0	1.0	0.5652	0.4348	0.9899	0.0101	1.0248	-0.0248
1.0	1.5	0.5652	0.9348	0.9948	0.5052	1.0273	0.4727
1.5	0.5	1.0840	-0.5840	1.3508	-0.8508	1.3391	-0.8391
1.5	1.0	1.0840	-0.0840	1.3628	-0.3628	1.3451	-0.3451
1.5	1.5	1.0840	0.4160	1.3720	0.1280	1.3509	0.1491
1.5	2.0	1.0840	0.9160	1.3774	0.6226	1.3554	0.6446
2.0	1.0	1.6029	-0.6029	1.7422	-0.7422	1.6706	-0.6706
2.0	1.5	1.6029	-0.1029	1.7570	-0.2570	1.6820	-0.1820
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
7.0	9.5	6.7916	2.7084	9.0729	0.4271	9.0746	0.4254
7.5	9.0	7.3105	1.6895	9.0489	-0.0489	9.0429	-0.0429
7.5	9.5	7.3105	2.1895	9.0502	0.4498	9.0482	0.4518
8.0	8.5	7.8294	0.6706	9.0285	-0.5285	9.0250	-0.5250
8.0	9.0	7.8294	1.1706	9.0278	-0.0278	8.9367	0.0633
8.5	8.5	8.3482	0.1518	9.0098	-0.5098	9.0130	-0.5130
8.5	9.0	8.3482	0.6518	9.0091	-0.0091	9.0049	-0.0049
8.5	9.5	8.3482	1.1518	9.0106	0.4894	9.0110	0.4890
9.0	9.0	8.8671	0.1329	8.9925	0.0075	9.0009	-0.0009
9.5	9.0	9.3860	-0.3860	8.9780	0.0220	8.9921	0.0079
9.5	9.5	9.3860	0.1140	8.9789	0.5211	8.9924	0.5076
10.0	8.5	9.9049	-1.4049	8.9667	-0.4667	8.9832	-0.4832
10.0	9.0	9.9049	-0.9049	8.9652	0.0348	8.9814	0.0186
10.5	9.0	10.4237	-1.4237	8.9538	0.0462	8.9696	0.0304
11.0	9.0	10.9426	-1.9426	8.9434	0.0566	8.9572	0.0428
HATA		$\varepsilon_{EKK} = 1.7559$		$\varepsilon_{tip-1} = 0.4223$		$\varepsilon_{tip-2} = 0.3238$	



Şekil 14. EKK bulanık kümeleme yöntemi ile elde edilen modeller

Şekil 14’de en küçük kareler yöntemi ile elde edilen modelin grafiği ve modele ilişkin regresyon doğrusu verilmektedir.



Şekil 15. Tip-2 bulanık kümeleme yöntemi ile elde edilen modeller

Şekil 15’de 56 veri için elde edilen merkezler, tip-1 kümeleme için yeşil, tip-2 kümeleme için mavi renk olarak gösterilmiş ve elde edilen merkezler sonucunda veriler şekilde görüldüğü gibi kümelenmiş ve üyelik dereceleri kullanılması ile elde edilen modellere ayrı ayrı yer verilmiştir.

Tablo 3’de Tip-1 bulanık kümeleme yöntemi için bulanıklaştırma indeks değerleri, tip-1 bulanık kümeleme yöntemi sonucunda elde edilen kümelerin hacimleri ve tip-2 bulanık kümeleme yöntemi için bulanıklaştırma indeks değerleri verilmiştir.

Tablo 3. Uygulamada kullanılan hacim ve bulanıklaştırma indeks değerleri

	Küme-1	Küme-2
Tip-1 bulanık kümeleme yöntemi için bulanıklaştırma indeks değerleri	$m = 2$	$m = 2$
Tip-1 bulanık kümeleme yöntemi sonucunda elde edilen kümelerin hacimleri	24	5
Tip-2 bulanık kümeleme yöntemi için bulanıklaştırma indeks değerleri	$m_1 = 8$	$m_2 = 27$

Tablo 4’de kullanılan üç yöntem ile elde edilen parametreler ile oluşturulan modeller ve modellere ilişkin hata miktarları yer almaktadır.

Tablo 4. Doğrusal regresyon modelleri ve hataları

En Küçük Kareler Yöntemi	Tip-1 Bulanık Kümeleme	Tip-2 Bulanık Kümeleme
$\hat{Y} = -0.4726 + 1.0377X$	$\hat{Y}_1 = 0.2737 + 0.7621X_{1j}$ $\hat{Y}_2 = 9.3286 - 0.0376X_{2j}$	$\hat{Y}_1 = 0.3985 + 1.1359X_{1j}$ $\hat{Y}_2 = 9.3162 - 0.0590X_{2j}$
$\varepsilon_{EKK} = 1.7559$	$\varepsilon_{tip-1} = 0.4223$	$\varepsilon_{tip-2} = \mathbf{0.3238}$

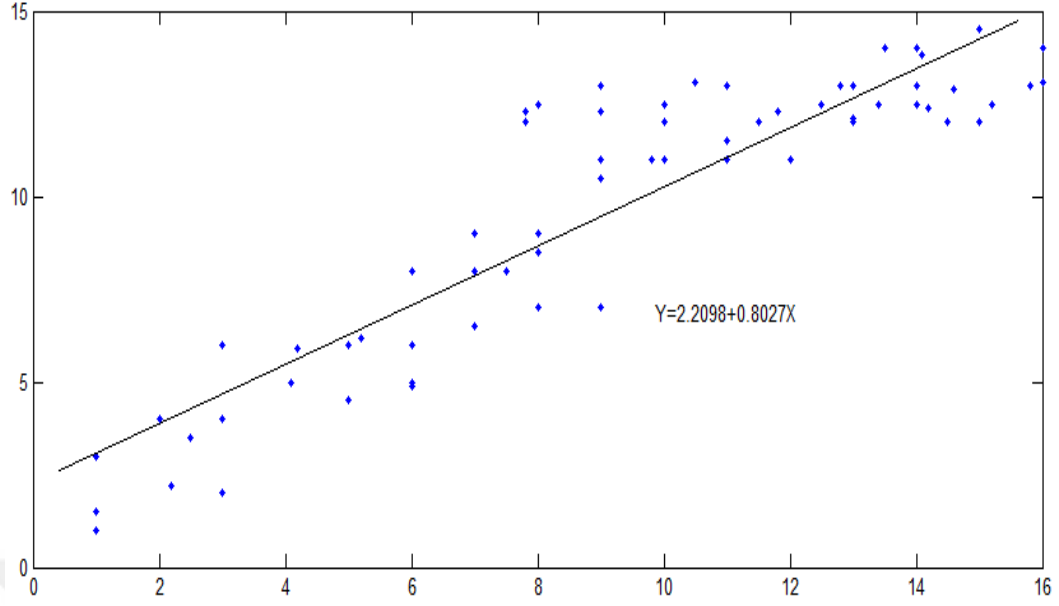
Bulanık ağırlıklara dayalı parametre tahmini yapılırken, tip-2 bulanık kümeleme yöntemi ile kümelенmiş ve buradan elde edilen üyelik dereceleri kullanılarak ağırlıklandırılmış verilerden tahmin edilen parametreler ile kurulan modele ilişkin toplam hata; Eşitlik (50) ile verilen hata kriterinden 0.3238 olarak hesaplanmıştır. Tip-1 bulanık kümeleme yöntemi ile kümelенmiş ve buradan elde edilen üyelik dereceleri kullanılarak ağırlıklandırılmış verilerden tahmin edilen parametreler ile kurulan modele ilişkin toplam hata; Eşitlik (50) ile verilen hata kriterinden 0.4223 olarak hesaplanmıştır. EKK yöntemi kullanılarak elde edilen parametrelere ilişkin modelin hatası ise 1.7559 olarak elde edilmiştir. Sonuç olarak regresyon çözümlemesinde, verilerin farklı dağılımlara sahip olması durumu tahmin sürecinde klasik çözümlemelere alternatif olabilecek olan tip-2 bulanık kümelemeye dayalı parametre tahmini yöntemi ile elde edilen tahminler en küçük hata miktarına sahiptir.

Örnek 2: Bu örnekte yer alan veri seti 66 gözlemden oluşmakta ve verilerin bir kısmı Tablo 5’de yer almaktadır. Veri setinde bir bağımlı bir bağımsız veri bulunmaktadır. Bağımlı değişken Y , bağımsız değişken ise X ile ifade edilmektedir.

Tablo 5’de EKK yöntemi, tip-1 bulanık kümeleme yöntemi ve tip-2 bulanık kümeleme yöntemi algoritmalarından elde edilen tahminler ve bu tahminlere ilişkin hata miktarları yer almaktadır.

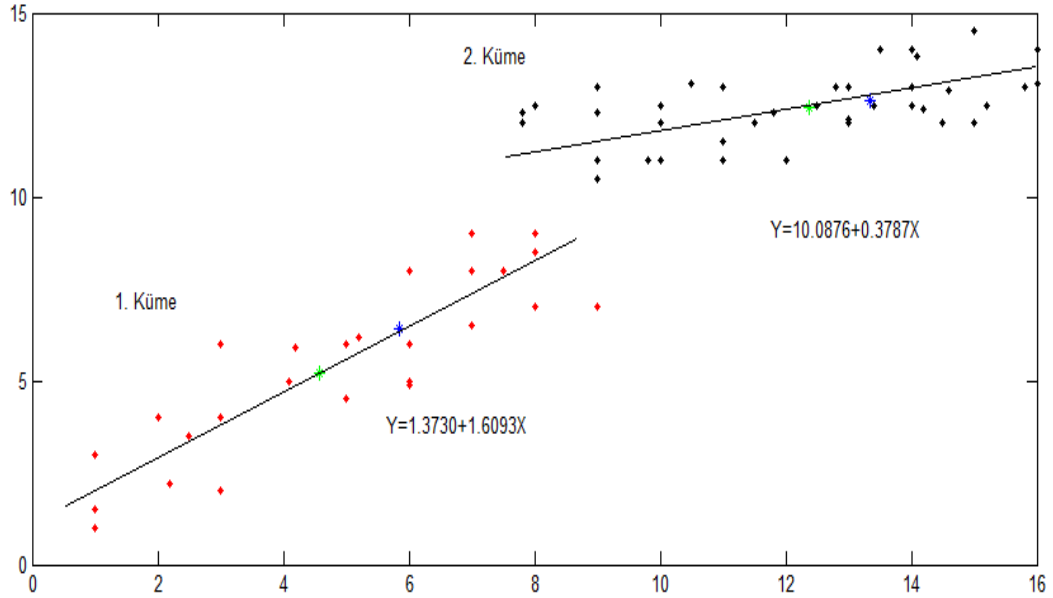
Tablo 5. Verilerin üç farklı yöntem ile elde edilen tahminler ve hataları

X	Y	Klasik Regresyon		Tip-1 Kümeleme Yöntemi		Tip-2 Kümeleme Yöntemi	
		$\hat{Y}_{EKK}$	ε_{EKK}	$\hat{Y}_{tip-1}$	ε_{tip-1}	$\hat{Y}_{tip-2}$	ε_{tip-2}
1	1	3.0125	-2.0125	2.2536	-1.2536	2.1912	-1.1912
1	1.5	3.0125	-1.5125	2.2621	-0.7621	2.1917	-0.6917
1	3	3.0125	-0.0125	2.2834	0.7166	2.1932	0.8068
2	4	3.8152	0.1848	3.2688	0.7312	3.0187	0.9813
2.2	2.2	3.9757	-1.7757	3.4106	-1.2106	3.1785	-0.9785
2.5	3.5	4.2165	-0.7165	3.7564	-0.2564	3.4307	0.0693
3	2	4.6179	-2.6179	4.1710	-2.1710	3.8364	-1.8364
3	4	4.6179	-0.6179	4.2801	-0.2801	3.8477	0.1523
3	6	4.6179	1.3821	4.2807	1.7193	3.8564	2.1436
4.1	5	5.5008	-0.5008	5.4395	-0.4395	4.7785	0.2215
4.2	4.5	5.5811	0.3189	5.5231	0.3769	4.8752	1.0248
5	6	6.2232	-1.7232	6.3175	-1.8175	5.5289	-1.0289
5	6.2	6.2232	-0.2232	6.3018	-0.3018	5.5759	0.4241
5.2	4.9	6.3837	-0.1837	6.4645	-0.2645	5.7626	0.4374
6	5	7.0259	-2.1259	7.2147	-2.3147	6.3827	-1.4827
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
15	12	14.2499	-2.2499	12.9869	-0.9869	13.0516	-1.0516
15	14.5	14.2499	0.2501	12.9594	1.5406	13.0379	1.4621
15.2	12.5	14.4105	-1.9105	13.0150	-0.5150	13.0933	-0.5933
15.8	13	14.8921	-1.8921	13.0751	-0.0751	13.1950	-0.1950
16	13.1	15.0526	-1.9526	13.0937	0.0063	13.2291	-0.1291
16	14	15.0526	-1.0526	13.0825	0.9175	13.2243	0.7757
8	12.5	8.6312	3.8688	11.5427	0.9573	11.6082	0.8918
9	13	9.4339	3.5661	11.8389	1.1611	11.8099	1.1901
9	12.3	9.4339	2.8661	11.8181	0.4819	11.8066	0.4934
7.8	12.3	8.4707	3.8293	11.4758	0.8242	11.5677	0.7323
7.8	12	8.4707	3.5293	11.4546	0.5454	11.5661	0.4339
HATA		$\varepsilon_{EKK} = 2.4313$		$\varepsilon_{tip-1} = 2.9430$		$\varepsilon_{tip-2} = 1.8696$	



Şekil 16. EKK bulanık kümeleme yöntemi ile elde edilen modeller

Şekil 16’da en küçük kareler yöntemi ile elde edilen modelin grafiği ve modele ilişkin regresyon doğrusu verilmektedir.



Şekil 17. Tip-2 bulanık kümeleme yöntemi ile elde edilen modeller

Şekil 17’de 66 veri için elde edilen merkezler, tip-1 kümeleme için yeşil, tip-2 kümeleme için mavi renk olarak gösterilmiş ve elde edilen merkezler sonucunda veriler şekilde görüldüğü gibi kümelenmiş ve üyelik dereceleri kullanılması ile elde edilen modeller ayrı ayrı ifade edilmiştir.

Tablo 6’da Tip-1 bulanık kümeleme yöntemi için bulanıklaştırma indeks değerleri, tip-1 bulanık kümeleme yöntemi sonucunda elde edilen kümelerin hacimleri ve tip-2 bulanık kümeleme yöntemi için bulanıklaştırma indeks değerleri verilmiştir.

Tablo 6. Uygulamada kullanılan hacim ve bulanıklaştırma indeks değerleri

	Küme-1	Küme-2
Tip-1 bulanık kümeleme yöntemi için bulanıklaştırma indeks değerleri	$m = 2$	$m = 2$
Tip-1 bulanık kümeleme yöntemi sonucunda elde edilen kümelerin hacimleri	64	32.8
Tip-2 bulanık kümeleme yöntemi için bulanıklaştırma indeks değerleri	$m_1 = 35.8$	$m_2 = 67$

Tablo 7’da kullanılan üç yöntem ile elde edilen parametreler ile oluşturulan modeller ve modellere ilişkin hatalar yer almaktadır.

Tablo 7. Doğrusal regresyon modelleri ve hataları

En Küçük Kareler Yöntemi	Tip-1 Bulanık Kümeleme	Tip-2 Bulanık Kümeleme
$\hat{Y} = 2.2098 + 0.8027X$	$\hat{Y}_1 = 1.3607 + 0.9969X_{1j}$ $\hat{Y}_2 = 10.4492 + 0.1769X_{2j}$	$\hat{Y}_1 = 1.3730 + 1.6093X_{1j}$ $\hat{Y}_2 = 10.0876 + 0.3787X_{2j}$
$\varepsilon_{EKK} = 2.4313$	$\varepsilon_{tip-1} = 2.9430$	$\varepsilon_{tip-2} = 1.8696$

Bulanık ağırlıklara dayalı parametre tahmini yapılırken, tip-2 bulanık kümeleme yöntemi ile kümelenmiş ve buradan elde edilen üyelik dereceleri kullanılarak ağırlıklandırılmış verilerden tahmin edilen parametreler ile kurulan modele ilişkin toplam hata; Eşitlik (50) ile verilen hata kriterinden 1.8696 olarak hesaplanmıştır. Tip-1 bulanık kümeleme yöntemi ile kümelenmiş ve buradan elde edilen üyelik dereceleri kullanılarak ağırlıklandırılmış verilerden tahmin edilen parametreler ile kurulan modele ilişkin toplam hata; Eşitlik (50) ile verilen hata kriterinden 2.9430 olarak hesaplanmıştır. EKK yöntemi elde edilen parametrelere ilişkin modelin toplam hatası 2.4313 olarak elde edilmiştir.

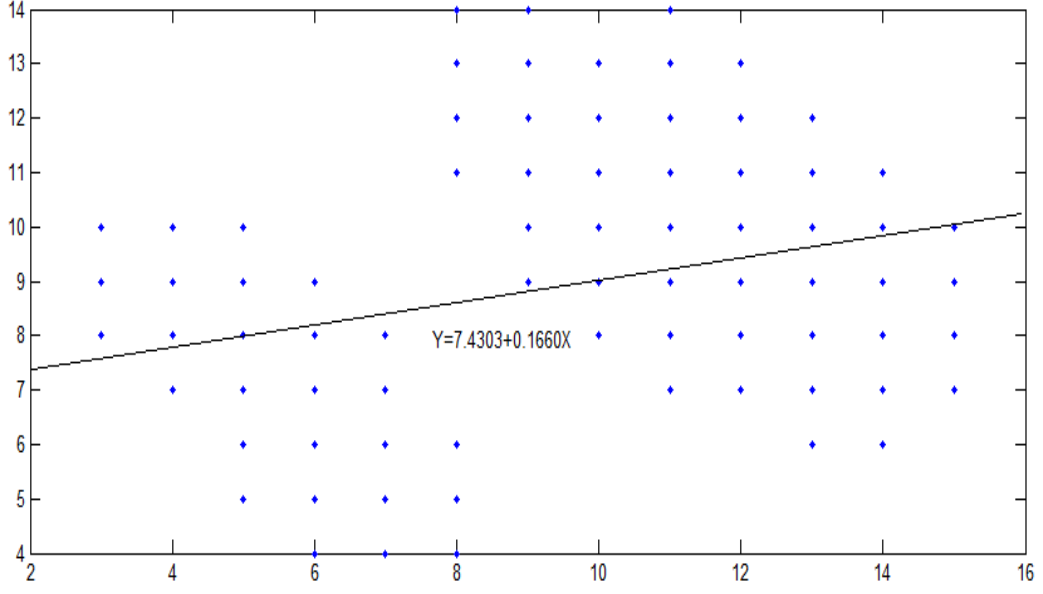
Sonuç olarak regresyon çözümlemesinde, verilerin farklı dağılımlara sahip olması durumu tahmin sürecinde klasik çözümlemelere alternatif olabilecek olan tip-2 bulanık kümelemeye dayalı parametre tahmini yöntemi ile elde edilen tahminler en küçük hata miktarına sahiptir.

Örnek 3: Bu örnekte yer alan veri seti 75 gözlemden oluşmakta ve verilerin bir kısmı Tablo 8’de yer almaktadır. Veri setinde bir bağımlı bir bağımsız veri bulunmaktadır. Bağımlı değişken Y , bağımsız değişken ise X ile ifade edilmektedir.

Tablo 8’de EKK yöntemi, tip-1 bulanık kümeleme yöntemi ve tip-2 bulanık kümeleme yöntemi algoritmalarından elde edilen tahminler ve bu tahminlere ilişkin hata miktarları yer almaktadır.

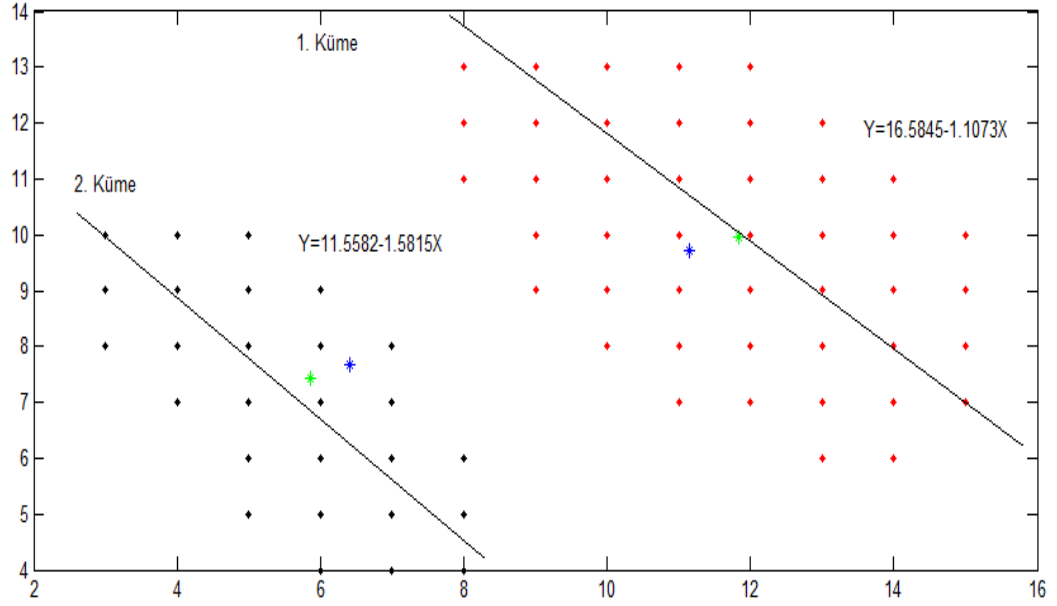
Tablo 8. Verilerin üç farklı yöntem ile elde edilen tahminleri ve hataları

X	Y	Klasik Regresyon		Tip-1 Kümeleme Yöntemi		Tip-2 Kümeleme Yöntemi	
		$\hat{Y}_{EKK}$	ε_{EKK}	$\hat{Y}_{tip-1}$	ε_{tip-1}	$\hat{Y}_{tip-2}$	ε_{tip-2}
15	10	9.9209	0.0791	8.8507	1.1493	8.1361	1.8639
3	8	7.9284	0.0716	11.9058	-0.9058	12.1526	-1.1526
3	9	7.9284	1.0716	11.7726	0.2274	12.1419	-0.1419
3	10	7.9284	2.0716	11.7119	1.2881	12.1382	0.8618
4	7	8.0945	-1.0945	11.6907	2.3093	12.1375	1.8625
4	8	8.0945	-0.0945	11.5652	-2.5652	11.5808	-2.5808
4	9	8.0945	0.9055	11.2927	-1.2927	11.5500	-1.5500
4	10	8.0945	1.9055	11.1750	-0.1750	11.5451	-0.5451
5	5	8.2605	-3.2605	11.1665	0.8335	11.5515	0.4485
5	6	8.2605	-2.2605	11.2057	1.7943	11.5589	1.4411
5	7	8.2605	-1.2605	11.2584	2.7416	11.5651	2.4349
5	8	8.2605	-0.2605	10.9512	-2.9512	10.9789	-2.9789
5	9	8.2605	0.7395	10.5826	-1.5826	10.9009	-1.9009
5	10	8.2605	1.7395	10.4042	-0.4042	10.8684	-0.8684
6	4	8.4266	-4.4266	10.4241	0.5759	10.9164	0.0836
6	5	8.4266	-3.4266	10.5426	1.4574	10.9533	1.0467
6	6	8.4266	-2.4266	10.6816	2.3184	10.9760	2.0240
6	4	8.4266	-1.4266	10.6117	-3.6117	10.4247	-3.4247
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
13	9	9.5888	-0.5888	6.6536	-1.6536	6.6895	-1.6895
13	10	9.5888	0.4112	6.3876	-0.3876	6.6397	-0.6397
13	11	9.5888	1.4112	6.2084	0.7916	6.5156	0.4844
13	12	9.5888	2.4112	6.2322	1.7678	6.5459	1.4541
14	6	9.7549	-3.7549	6.5285	2.4715	6.6694	2.3306
14	7	9.7549	-2.7549	6.4158	-2.4158	5.9288	-1.9288
14	8	9.7549	-1.7549	6.1106	-1.1106	5.9032	-0.9032
14	9	9.7549	-0.7549	5.8017	0.1983	5.8650	0.1350
14	10	9.7549	0.2451	5.5953	1.4047	5.8191	1.1809
14	11	9.7549	1.2451	5.6712	2.3288	5.8366	2.1634
15	7	9.9209	-2.9209	6.1555	-2.1555	5.1530	-1.1530
15	8	9.9209	-1.9209	5.9171	-0.9171	5.1386	-0.1386
15	9	9.9209	-0.9209	5.7023	0.2977	5.1235	0.8765
HATA		$\varepsilon_{EKK} = 6.1691$		$\varepsilon_{tip-1} = 6.4164$		$\varepsilon_{tip-2} = 5.4877$	



Şekil 18. EKK bulanık kümeleme yöntemi ile elde edilen modeller

Şekil 18’de en küçük kareler yöntemi ile elde edilen modelin grafiği ve modele ilişkin regresyon doğrusu verilmektedir.



Şekil 19. Tip-2 bulanık kümeleme yöntemi ile elde edilen modeller

Şekil 19’da 75 veri için elde edilen merkezler, tip-1 kümeleme için yeşil, tip-2 kümeleme için mavi renk olarak gösterilmiş ve elde edilen merkezler sonucunda veriler şekilde görüldüğü gibi kümelenmiş ve üyelik dereceleri kullanılması ile elde edilen modeller ayrı ayrı ifade edilmiştir.

Tablo 9’da tip-1 bulanık kümeleme yöntemi için bulanıklaştırma indeks değerleri, tip-1 bulanık kümeleme yöntemi sonucunda elde edilen kümelerin hacimleri ve tip-2 bulanık kümeleme yöntemi için bulanıklaştırma indeks değerleri verilmiştir.

Tablo 9. Uygulamada kullanılan hacim ve bulanıklaştırma indeks değerleri

	Küme-1	Küme-2
Tip-1 bulanık kümeleme yöntemi için bulanıklaştırma indeks değerleri	$m = 2$	$m = 2$
Tip-1 bulanık kümeleme yöntemi sonucunda elde edilen kümelerin hacimleri	56	30
Tip-2 bulanık kümeleme yöntemi için bulanıklaştırma indeks değerleri	$m_1 = 33$	$m_2 = 59$

Tablo 10’da kullanılan üç yöntem ile elde edilen parametreler ile oluşturulan modeller ve modellere ilişkin hatalar yer almaktadır.

Tablo 10. Doğrusal regresyon modelleri ve hataları

En Küçük Kareler Yöntemi	Tip-1 Bulanık Kümeleme	Tip-2 Bulanık Kümeleme
$\hat{Y} = 7.4303 + 0.1660X$	$\hat{Y}_1 = 13.2838 - 0.3285X_{1j}$ $\hat{Y}_2 = 11.3094 - 0.8541X_{2j}$	$\hat{Y}_1 = 16.5845 - 1.1073X_{1j}$ $\hat{Y}_2 = 11.5582 - 1.5815X_{2j}$
$\varepsilon_{EKK} = 6.1691$	$\varepsilon_{tip-1} = 6.4164$	$\varepsilon_{tip-2} = 5.4877$

Bulanık ağırlıklara dayalı parametre tahmini yapılırken, tip-2 bulanık kümeleme yöntemi ile kümelенmiş ve buradan elde edilen üyelik dereceleri kullanılarak ağırlıklandırılmış verilerden tahmin edilen parametreler ile kurulan modele ilişkin toplam hata; Eşitlik (50) ile verilen hata kriterinden 5.4877 olarak hesaplanmıştır. Tip-2 bulanık kümeleme yöntemi ile kümelенmiş ve buradan elde edilen üyelik dereceleri kullanılarak ağırlıklandırılmış verilerden tahmin edilen parametreler ile kurulan modele ilişkin toplam hata; Eşitlik (50) ile verilen hata kriterinden 6.4164 olarak hesaplanmıştır. EKK yöntemi elde edilen parametrelere ilişkin modelin toplam hatası 6.1691 olarak elde edilmiştir.

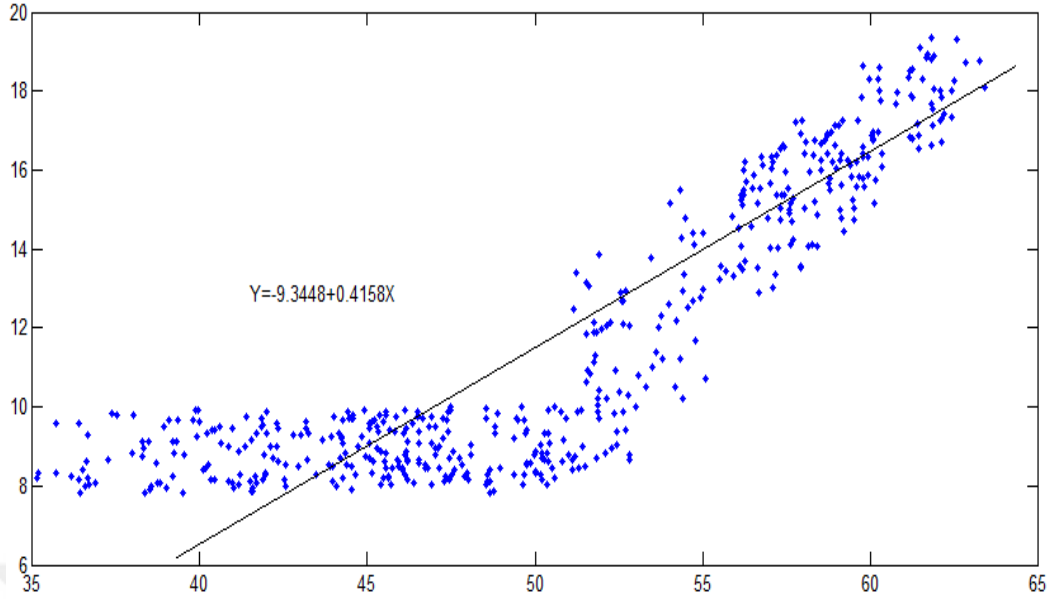
Sonuç olarak bu örnek içinde tip-2 bulanık kümelemeye dayalı parametre tahmini yöntemi ile elde edilen tahminler en küçük hata miktarına sahiptir.

Örnek 4: Bu örnekte yer alan veri seti 510 gözlemden oluşmakta ve verilerin bir kısmı Tablo 11’de yer almaktadır. Veri setinde bir bağımlı bir bağımsız veri bulunmaktadır. Bağımlı değişken Y , bağımsız değişken ise X ile ifade edilmektedir.

Tablo 11’de EKK yöntemi, tip-1 bulanık kümeleme yöntemi ve tip-2 bulanık kümeleme yöntemi algoritmalarından elde edilen tahminler ve bu tahminlere ilişkin hata miktarları yer almaktadır.

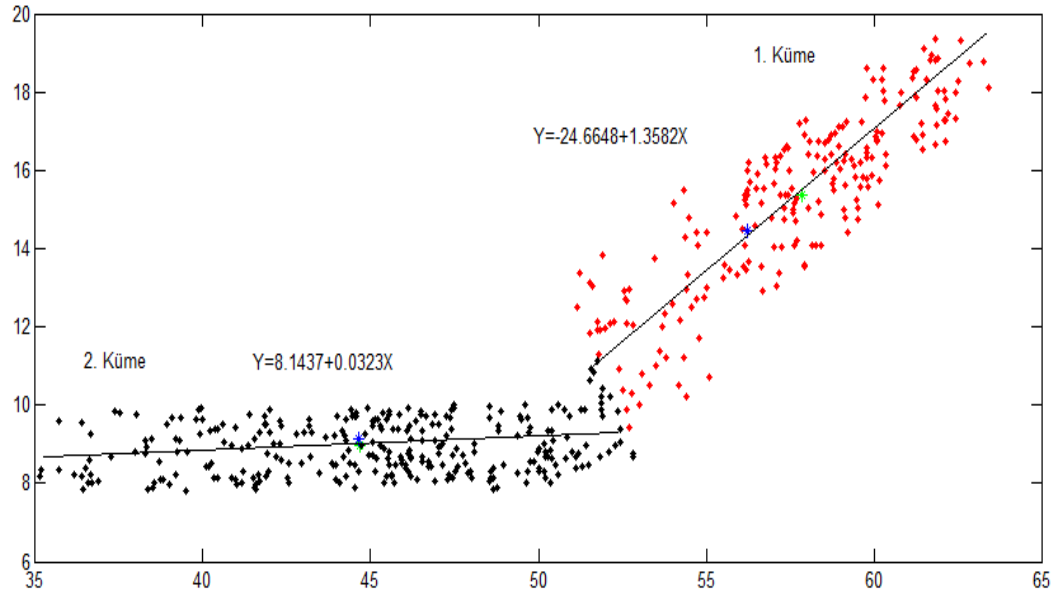
Tablo 11. Verilerin üç farklı yöntem ile elde edilen tahminleri ve hataları

		Klasik Regresyon		Tip-1 Kümeleme Yöntemi		Tip-2 Kümeleme Yöntemi	
X	Y	$\hat{Y}_{EKK}$	ε_{EKK}	$\hat{Y}_{tip-1}$	ε_{tip-1}	$\hat{Y}_{tip-2}$	ε_{tip-2}
35.1200	8.2000	5.2574	2.9426	10.2253	1.6047	10.1544	-0.2844
35.1800	8.3400	5.2823	3.0577	10.5451	1.3649	10.2357	-0.3357
35.6900	8.3300	5.4944	2.8356	10.2699	1.0401	10.3009	-0.8109
35.7100	9.6000	5.5027	4.0973	10.6560	1.2440	10.4941	1.3359
36.1700	8.2400	5.6939	2.5461	10.9106	1.0694	10.4512	0.4888
36.3900	8.1700	5.7854	2.3846	11.1569	0.9131	10.6182	0.5218
36.4000	9.5700	5.7896	3.7804	11.3457	0.7843	10.6713	1.2387
36.4300	7.8400	5.8020	2.0380	10.7762	0.1438	10.6786	0.6314
36.5000	8.4000	5.8311	2.5689	10.6325	-0.2525	10.5367	-1.8367
36.5800	8.0100	5.8644	2.1456	12.0571	0.6429	10.7444	1.1556
36.6000	8.6100	5.8727	2.7373	11.7682	0.3318	10.6337	-0.5937
36.6300	9.2700	5.8852	3.3848	12.0953	0.5847	10.6597	-0.4597
36.6600	8.2100	5.8977	2.3123	10.4768	-0.6068	10.6476	-0.7676
.	.	.	.	.	.	.	.
53.6200	11.4000	12.9493	-1.5493	8.8360	0.1000	8.9152	0.0208
53.7100	12.0000	12.9867	-0.9867	8.8354	-0.6654	8.9044	-0.7344
54.0000	12.6000	13.1073	-0.5073	8.8347	-0.1637	8.9019	-0.2309
54.2000	10.5000	13.1904	-2.6904	8.8390	-0.3860	8.8977	-0.4447
54.3500	11.2000	13.2528	-2.0528	8.8468	0.7452	8.8926	0.6994
54.5500	12.5000	13.3360	-0.8360	8.8619	0.3491	8.8940	0.3170
54.8000	11.7000	13.4399	-1.7399	8.8700	0.8630	8.8782	0.8548
55.0000	13.0000	13.5231	-0.5231	8.9113	-0.7713	8.8469	-0.7069
54.7200	12.7000	13.4066	-0.7066	8.9165	0.5515	8.8438	0.6242
53.8000	11.2000	13.0241	-1.8241	8.9166	0.0934	8.8433	0.1667
55.1000	10.7000	13.5646	-2.8646	8.9228	0.0872	8.8394	0.1706
54.4000	10.2000	13.2736	-3.0736	8.9531	-0.6611	8.8216	-0.5296
HATA		$\varepsilon_{EKK} = 2.8569$		$\varepsilon_{tip-1} = 2.2958$		$\varepsilon_{tip-2} = 1.7083$	



Şekil 21. EKK bulanık kümeleme yöntemi ile elde edilen modeller

Şekil 20’de en küçük kareler yöntemi ile elde edilen modelin grafiği ve modele ilişkin regresyon doğrusu verilmektedir.



Şekil 20. Tip-2 bulanık kümeleme yöntemi ile elde edilen modeller

Şekil 21’de 510 veri için elde edilen merkezler, tip-1 kümeleme için yeşil, tip-2 kümeleme için mavi renk olarak gösterilmiş ve elde edilen merkezler sonucunda veriler şekilde görüldüğü gibi kümelenmiş ve üyelik dereceleri kullanılması ile elde edilen modeller ayrı ayrı ifade edilmiştir.

Tablo 12’de tip-1 bulanık kümeleme yöntemi için bulanıklaştırma indeks değerleri, tip-1 bulanık kümeleme yöntemi sonucunda elde edilen kümelerin hacimleri ve tip-2 bulanık kümeleme yöntemi için bulanıklaştırma indeks değerleri verilmiştir.

Tablo 12. Uygulamada kullanılan hacim ve bulanıklaştırma indeks değerleri

	Küme-1	Küme-2
Tip-1 bulanık kümeleme yöntemi için bulanıklaştırma indeks değerleri	$m = 2$	$m = 2$
Tip-1 bulanık kümeleme yöntemi sonucunda elde edilen kümelerin hacimleri	122.0737	58.8271
Tip-2 bulanık kümeleme yöntemi için bulanıklaştırma indeks değerleri	$m_1 = 61.8271$	$m_2 = 125.0737$

Tablo 13’de kullanılan üç yöntem ile elde edilen parametreler ile oluşturulan modeller yer almaktadır.

Tablo 13. Doğrusal regresyon modelleri ve hataları

En Küçük Kareler Yöntemi	Tip-1 Bulanık Kümeleme	Tip-2 Bulanık Kümeleme
$\hat{Y} = -9.3448 + 0.4158X$	$\hat{Y}_1 = 5.1989 + 0.1902X_{1j}$ $\hat{Y}_2 = 9.7504 - 0.0201X_{2j}$	$\hat{Y}_1 = -24.6648 + 1.3582X_{1j}$ $\hat{Y}_2 = 8.1437 + 0.0323X_{2j}$
$\varepsilon_{EKK} = 2.8569$	$\varepsilon_{FCM} = 2.2958$	$\varepsilon_{Tip-2} = 1.7083$

Bulanık ağırlıklara dayalı parametre tahmini yapılırken, tip-2 bulanık kümeleme yöntemi ile kümelenmiş ve buradan elde edilen üyelik dereceleri kullanılarak ağırlıklandırılmış verilerden tahmin edilen parametreler ile kurulan modele ilişkin toplam hata; Eşitlik (50) ile verilen hata kriterinden 1.7083 olarak hesaplanmıştır. Tip-1 bulanık kümeleme yöntemi ile kümelenmiş ve buradan elde edilen üyelik dereceleri kullanılarak ağırlıklandırılmış verilerden tahmin edilen parametreler ile kurulan modele ilişkin toplam hata; Eşitlik (50) ile verilen hata kriterinden 2.2958 olarak hesaplanmıştır. EKK yöntemi elde edilen parametrelere ilişkin modelin toplam hatası 2.8569 olarak elde edilmiştir.

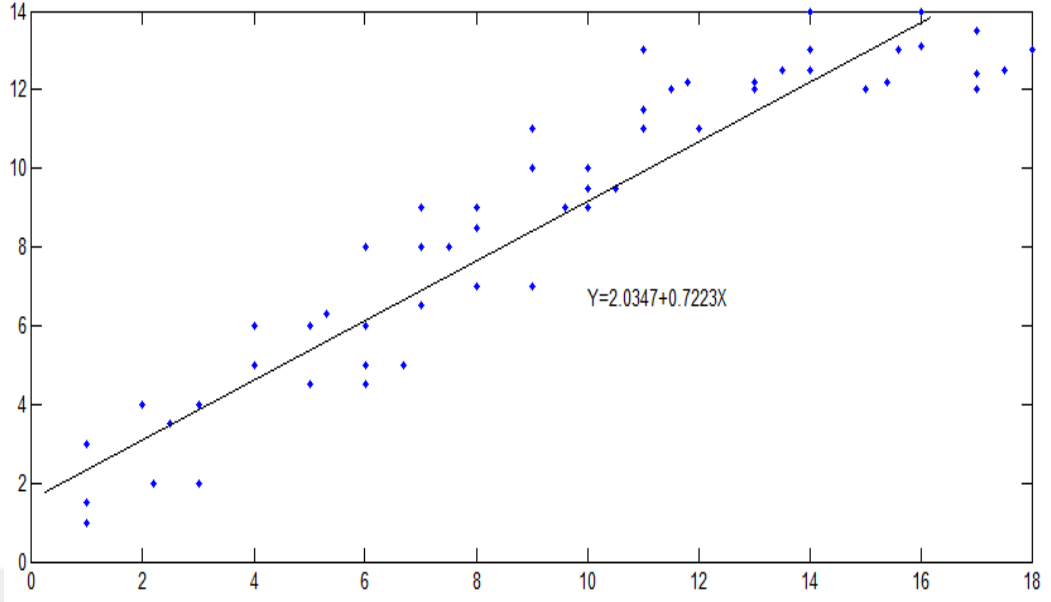
Sonuç olarak regresyon çözümlemesinde verilerin farklı dağılımlara sahip olması durumu tahmin sürecinde klasik çözümlemelerin dışında olan tip-2 bulanık kümelemeye dayalı parametre tahmini yöntemi ile elde edilen tahminler en küçük hata miktarına sahiptir.

Örnek 5: Bu örnekte yer alan veri seti 55 gözlemden oluşmakta ve verilerin bir kısmı Tablo 14’ de yer almaktadır. Veri setinde bir bağımlı bir bağımsız veri bulunmaktadır. Bağımlı değişken Y , bağımsız değişken X ile ifade edilmektedir.

Tablo 14’de EKK yöntemi, tip-1 bulanık kümeleme yöntemi ve tip-2 bulanık kümeleme yöntemi algoritmalarından elde edilen tahminler ve bu tahminlere ilişkin hata miktarları yer almaktadır.

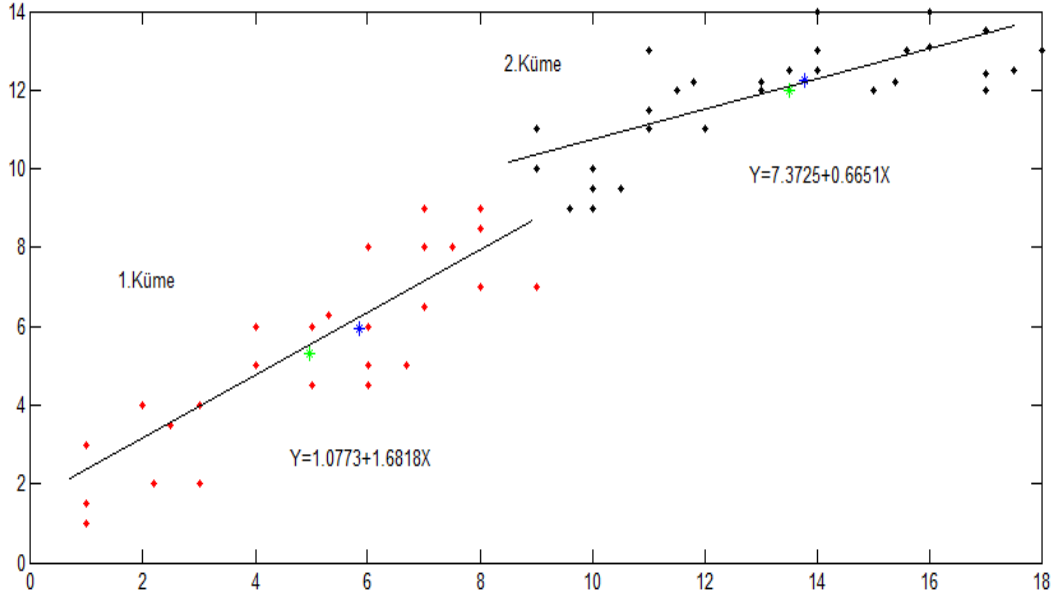
Tablo 14. Verilerin üç farklı yöntem ile elde edilen tahminler ve hataları

		Klasik Regresyon		Tip-1 Kümeleme Yöntemi		Tip-2 Kümeleme Yöntemi	
X	Y	$\hat{Y}_{EKK}$	ε_{EKK}	$\hat{Y}_{tip-1}$	ε_{tip-1}	$\hat{Y}_{tip-2}$	ε_{tip-2}
10	10	2.7570	-1.7570	2.0489	-1.0489	1.9315	-0.9315
10	15	2.7570	-1.2570	2.0567	-0.5567	1.9320	-0.4320
10	30	2.7570	0.2430	2.0760	0.9240	1.9334	1.0666
20	40	3.4794	0.5206	3.0109	0.9891	2.7949	1.2051
22	20	3.6238	-1.6238	3.1407	-1.1407	2.9618	-0.9618
25	35	3.8405	-0.3405	3.4751	0.0249	3.2254	0.2746
30	20	4.2017	-2.2017	3.8745	-1.8745	3.6497	-1.6497
30	40	4.2017	-0.2017	3.9734	0.0266	3.6609	0.3391
40	50	4.9240	0.0760	4.9877	0.0123	4.5455	0.4545
40	60	4.9240	1.0760	4.9727	1.0273	4.5502	1.4498
50	45	5.6464	-1.1464	5.9461	-1.4461	5.4249	-0.9249
50	60	5.6464	0.3536	5.9474	0.0526	5.4693	0.5307
53	63	5.8631	0.4369	6.1992	0.1008	5.7541	0.5459
60	45	6.3687	-1.8687	6.8383	-2.3383	6.3024	-1.8024
60	50	6.3687	-1.3687	6.8612	-1.8612	6.3359	-1.3359
60	60	6.3687	-0.3687	6.8277	-0.8277	6.5495	-0.5495
60	80	6.3687	1.6313	6.3284	1.6716	6.2577	1.7423
67	50	6.8743	-1.8743	7.3903	-2.3903	6.9205	-1.9205
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
140	125	12.1474	0.3526	12.4675	0.0325	12.4308	0.0692
140	140	12.1474	1.8526	12.3628	1.6372	12.1969	1.8031
150	120	12.8697	-0.8697	12.7421	-0.7421	12.5681	-0.5681
154	122	13.1587	-0.9587	12.8347	-0.6347	12.6861	-0.4861
156	130	13.3031	-0.3031	12.8605	0.1395	12.7434	0.2566
160	131	13.5921	-0.4921	12.9428	0.1572	12.8637	0.2363
160	140	13.5921	0.4079	12.8892	1.1108	12.8502	1.1498
170	120	14.3144	-2.3144	13.1415	-1.1415	13.1725	-1.1725
170	124	14.3144	-1.9144	13.1467	-0.7467	13.1750	-0.7750
170	135	14.3144	-0.8144	13.1230	0.3770	13.1735	0.3265
175	125	14.6756	-2.1756	13.2311	-0.7311	13.3334	-0.8334
180	130	15.0368	-2.0368	13.3098	-0.3098	13.4937	-0.4937
HATA		$\varepsilon_{EKK} = 1.6455$		$\varepsilon_{tip-1} = 2.6609$		$\varepsilon_{tip-2} = 2.0787$	



Şekil 22. EKK bulanık kümeleme yöntemi ile elde edilen modeller

Şekil 22’de en küçük kareler yöntemi ile elde edilen modelin grafiği ve modele ilişkin regresyon doğrusu verilmektedir.



Şekil 23. Tip-2 bulanık kümeleme yöntemi ile elde edilen modeller

Şekil 23’de 55 veri için elde edilen merkezler, tip-1 kümeleme için yeşil, tip-2 kümeleme için mavi renk olarak gösterilmiş ve elde edilen merkezler sonucunda veriler şekilde görüldüğü gibi kümelenmiş ve üyelik dereceleri kullanılması ile elde edilen modeller ayrı ayrı ifade edilmiştir.

Tablo 15’de Tip-1 bulanık kümeleme yöntemi için bulanıklaştırma indeks değerleri, tip-1 bulanık kümeleme yöntemi sonucunda elde edilen kümelerin hacimleri ve tip-2 bulanık kümeleme yöntemi için bulanıklaştırma indeks değerleri verilmiştir.

Tablo 15. Uygulamada kullanılan hacim ve bulanıklaştırma indeks değerleri

	Küme-1	Küme-2
Tip-1 bulanık kümeleme yöntemi için bulanıklaştırma indeks değerleri	$m = 2$	$m = 2$
Tip-1 bulanık kümeleme yöntemi sonucunda elde edilen kümelerin hacimleri	64	45
Tip-2 bulanık kümeleme yöntemi için bulanıklaştırma indeks değerleri	$m_1 = 48$	$m_2 = 67$

Tablo 16’da kullanılan üç yöntem ile elde edilen parametreler ile oluşturulan modeller yer almaktadır.

Tablo 16. Doğrusal regresyon modelleri ve hataları

En Küçük Kareler Yöntemi	Tip-1 Bulanık Kümeleme	Tip-2 Bulanık Kümeleme
$\hat{Y} = 2.0347 + 0.7223X$	$\hat{Y}_1 = 1.1994 + 0.9540X_{1j}$ $\hat{Y}_2 = 7.8216 + 0.3331X_{2j}$	$\hat{Y}_1 = 1.0773 + 1.6818X_{1j}$ $\hat{Y}_2 = 7.3725 + 0.6651X_{2j}$
$\epsilon_{EKK} = 1.6455$	$\epsilon_{tip-1} = 2.6609$	$\epsilon_{tip-2} = 2.0787$

Bulanık ağırlıklara dayalı parametre tahmini yapılırken, tip-2 bulanık kümeleme yöntemi ile kümelenmiş ve buradan elde edilen üyelik dereceleri kullanılarak ağırlıklandırılmış verilerden tahmin edilen parametreler ile kurulan modele ilişkin toplam hata; Eşitlik (50) ile verilen hata kriterinden 2.0787 olarak hesaplanmıştır. Tip-1 bulanık kümeleme yöntemi ile kümelenmiş ve buradan elde edilen üyelik dereceleri kullanılarak ağırlıklandırılmış verilerden tahmin edilen parametreler ile kurulan modele ilişkin toplam hata; Eşitlik (50) ile verilen hata kriterinden 2.6609 olarak hesaplanmıştır. EKK yöntemi elde edilen parametrelere ilişkin modelin hatası 1.6455 olarak elde edilmiştir.

55 gözlemden oluşan bu veri seti klasik en küçük kareler yönteminin temel varsayımlarını sağladığı için, EKK yöntemine dayalı modelden elde edilen tahminlerin en küçük hata miktarına sahip olduğu gözlenmiştir.

3. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada farklı sınıflardan gelen veriler birer küme olarak düşünüldüğünde veriye uygun bulanık kümeleme algoritmaları kullanılmış ve veriler kümelenmiştir. Verilerin mevcut kümelere üyelik dereceleri belirlenmiş ve böylece üyelik dereceleri ile veri ağırlıklandırılmıştır. Ağırlıklandırılmış veriler kullanılarak regresyon modeline ilişkin parametreler minimum hataya sahip tahminleri verecek biçimde belirlenmiştir.

Uygulamalarda ele alınan veri setleri için, tip-1 bulanık kümeleme algoritması ve tip-2 bulanık kümeleme algoritması kullanılarak küme merkezleri elde edilmiştir. Tip-1 bulanık kümeleme sonucunda elde edilen kümelerin hacimleri hesaplanmış ve bu hesaplanan hacimler dayanarak tip-2 bulanık kümelemede kullanılan m_1 ve m_2 bulanıklaştırma indeksleri belirlenmiştir. Belirlenen bulanıklaştırma indeksleri kullanılarak belirlenen küme merkezlerine bağlı üyelik dereceleri elde edilmiş ve bu üyelik dereceleri ile ağırlıklandırılan veriler ile parametre tahminleri gerçekleştirilmiştir. Uygulama aşamasında ele alınan veri setlerine mevcut yöntemler ve önerilen algoritma uygulanarak regresyon modellerine ilişkin parametreler belirlenmiş ve bu parametrelere ilişkin tahmin değerleri elde edilerek tahminlere için hata miktarları belirlenmiştir.

Elde edilen sonuçlardan da izlenebileceği gibi, klasik regresyon çözümlemesi için temel varsayımlar sağlanmadığı durumlarda, tip-2 bulanık kümeye dayalı parametre tahmini için önerilen algorithmadan elde edilen tahminlere ilişkin toplam hata miktarı, tip-1 bulanık kümeleme yöntemi ve en küçük kareler yöntemine göre daha küçük hata miktarına sahiptir. Sonuç olarak hatası küçük tahminlere ulaşmak için verilerin kümelere ait olma derecelerinin elde edilmesi bulanıklaştırma indeksi m 'nin alacağı değerlere bağlıdır. Bundan sonraki çalışmalarda aykırı değerlerin kümelenme üzerindeki etkisi ve bu durumda önerilen algoritmanın etkinliği irdelenebilir.

4. KAYNAKLAR

1. Aliev, R.A., Pedrycz, W., Guirimov, B.G., Aliev, R.R., İlhan, U., Babagil, M. ve Mammadli, S., Type-2 Fuzzy Neural Networks with Fuzzy Clustering and Differential Evolution Optimization, Inform. Sci. 181 (2011) 1591–1608.
2. Altaş, İ. H., Bulanık Mantık: Bulanıklılık Kavramı, Enerji, Elektrik, Elektromekanik-3e, Temmuz 1999, 62, 80-85, Bilesim yayıncılık A.Ş., İstanbul
3. Atbaş., G., A., C., Kümeleme Analizinde Küme Sayısının Belirlenmesi Üzerine Bir Çalışma, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2008.
4. Alpar, R. Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistiksel Yöntemler. Ankara: Detay Yayıncılık 2011.
5. Baba, A.F. İTÜ Triga Mark-II Reaktörünün Bulanık Mantık Kontrolü, Doktora Tezi, Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 1995.
6. Baykal, N., Beyan, T., Bulanık Mantık İlke ve Temelleri, Bıçaklar Kitabevi, Ankara, 2004.
7. Bellman, R. and Zadeh, L.A., Decision-Making in a Fuzzy Environment, Management Science, 17B (1970) 141-164.
8. Bezdek, J., C., Ehrlich, R., and Full, W., Fcm: The Fuzzy C-Means Clustering Algorithm, Computers&Geosciences , 10 (1984) 191-203.
9. Bezdek, C., J., A Convergence Theorem for the Fuzzy ISODATA Clustering Algorithms, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell. I-2, (1980) 1-8.
10. Bezdek, I., Fuzzy Mathematics in Pattern Classification, Ph.D. thesis Applied Math, Center, Cornell Universty, Ithaca, USA, 1973.
11. Büyükköz, D., Fuzzy Kümeleme Teknikleri ve Avrupa Birliği Üye Ülkeleri ile Türkiye'nin Fuzzy Kümelenmesi, Yüksek Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, İstanbul, 2010.
12. Choi, B. ve IRhee, F.C., Interval Type-2 Fuzzy Membership Function Generation Methods for Pattern Recognition, Inform. Sci. 179 (2009) 2102–2122.
13. Cheng, C-B. ve Lee, E.S., Applying Fuzzy Adaptive Network to Fuzzy Regression Analysis, 38 (1999) 123-140.
14. Çelikyılmaz A. ve Türksen I.B., Modeling Uncertainty with Fuzzy Logic: with Recent Theory and Applications, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2009.

15. Ç., Elmas, Bulanık Mantık Denetleyiciler, Seçkin Yayınevi, 22-40, 230s., Ankara, 2003.
16. Dağdelen, Ulvi., Bulanık Mantık ile Adım Motor Kontrolü, Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 1996.
17. Dalkılıç, E.T. ve Apaydın, A., A Fuzzy Adaptive Network Approach to Parameter Estimation is Cases Where Independent variable Come from on Expanential Distribution, Journal of Computational and Applied Mathematics, 233 (2009) 36-45.
18. Dalkılıç, E.T., Kula S.K. ve Apaydın A., Parameter Estimation by Anfis where Dependent Variable has Outlier, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 43-2 (2014) 309-322.
19. Dalkılıç E., T., Minmad Regresyon Problemine Sinir Ağları Yaklaşımı, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 1999.
20. Dalkılıç. E., T., Switching Regresyon’da Bulanık Sinir Ağları Yaklaşımı ile Parametre Tahmini, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2005.
21. De Oliveira, J.V. ve Pedrycz, W., Advances in Fuzzy Clustering and is Applications, Wiley, West Sussex, 2007.
22. Doğan, I., Kümeleme Analizi ile Seleksiyon, Turk J Vet Anim Sci., (2002) 26: 47-53.
23. Dombi, J., Membership Function as an Avalution, Fuzzy Set and Systems, 35 (1990) 1-21.
24. Dunn, J. C., A Fuzzy Relative of ISODATA Process and its Use in Detecting Compact Well-Separated Clusters, Journal of Cybernetics, 3 (1973) 32-57.
25. Enke, D. ve Mehdiyew, N., Type-2 Fuzzy Clustering and Type-2 Fuzzy Inference Neural Network for the Prediction of Short-term Interest Rates, Procedia Computer Science 20 (2013) 115-120.
26. Enke, D., Grauer, M. and Mehdiyev, N., Stock Market Prediction with Multiple Regression, Fuzzy Type-2 Clustering and Neural Networks, Procedia CS, 6 (2011) 201-206.
27. Ergün, E., Bulanık Regresyon ve Yarı parametrik Toplamsal Regresyon Üzerine Bir Örnek Uygulama Çalışması, Yüksek Lisans Tezi, Muğla Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Muğla, 2011.
28. Erilli, N., A., Kümeleme Analizine Bulanık Yaklaşım Algoritmaları ve Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun, 2009.

29. Eını., S., Bulanık Doğrusal Regresyon Uygulaması, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2009.
30. Everitt, B., Landau, S. ve Leese, M., Cluster Analysis, London: Oxford University Press, 2001.
31. Fazel Zarandi M.H., Turksen, I.B. ve Torabi Kasbi, O., Type-2 Fuzzy Modeling for Desulphurization of Steel Process, Expert Syst. Appl. 32 (2007) 157–171.
32. Fazel Zarandi, M.H., Turksen, I.B., Gamasae, R., A Type-2 Fuzzy C-Regression Clustering Algorithm for Takagi-Sugeno System, Identification and its Application in the Steel Industry, Information Science, 187 (2012) 179-203.
33. Güler, N., Bulanık Kümeleme Analizi ve Bulanık Modellemeye Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Muğla Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Muğla, 2006.
34. Gath, I. ve Geva, A.B., Unsupervised Optimal Fuzzy Clustering, IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 11, 7 (1989) 773–781.
35. Giordani, P. ve Ramos-Guajardo, A. B., A Fuzzy Clustering Procedure for Random Fuzzy Sets, Fuzzy Sets and Systems, 305 (2016) 54-69.
36. Golsefid, S. M. M. ve Zarandi, M. H. F., Dual-Centers Type-2 Fuzzy Clustering Framework and its. Verification and Validation Indices, Applied Soft Computing ,47 (2016) 600-613.
37. Gunst F. R. ve Mason R. L., Regression Analysis and Applications, Marcel Dekker INC, Newyork, ABD, 1980.
38. HWAK, K. C., A Design of Incremental Granular Model Using Context-Based Interval Type-2 Fuzzy C-Means Algorithmic IEICE Trans. Inf. & Syst., vol.e99-d, 1 (2016).
39. Hwang, C. ve Rhee, F., Uncertain Fuzzy Clustering: Interval Type-2 Fuzzy Approach to C-Means, IEEE Transaction on fuzzy Systems, 15, 1 (2007) 107-120.
40. Hwang, C. and Rhee, F., An Interval Type-2 Fuzzy c Spherical Shells Algorithm, Proc. Int. Conf. Fuzzy Syst., 2 (2004) 1117–1122.
41. Hathaway, R.J. ve Bezdek, J.C., Switching Regression Models and Fuzzy Clustering, IEEE Trans. Fuzzy Syst. 1, 3 (1993) 195–204.
42. http://www.bumat.itu.edu.tr/dokuman_BULANIK_KUMELER.doc. 10 Ekim 2016.
43. Hubert, L., Approximate Evaluation Techniques for The Single-Link and Complete link Hierarchical Clustering Procedures. Journal of the American Statistical Association, 69 (1974) 698-704.

44. Johnson, A.R. ve Wichern, D.W., Applied Multivariate Statistical Analysis. International Editions, New Jersey : Prentice Hall, 1992.
45. Juang, C.-F., Huang, R.-B. ve Lin, Y.-Y., A Recurrent Self-Evolving Interval Type-2 Fuzzy Neural Network for Dynamic System Processing, IEEE Trans. Fuzzy Syst. 17 (2009) 1092–1105.
46. Kalhori, M.R.N.ve Fazel Zarandi, M. H., Interval Type-2 Credibilistic Clustering for Pattern Recognition, Pattern Recognition, 48 (2015) 3652-3672.
47. Karnik, N.N. ve Mendel, J.M., Type-2 Fuzzy Logic Systems: Type-Reduction, in: IEEE Systems, Man, Cybernet Conference, San Diego, CA, 1998.
48. Karnik, N. ve Mendel, J.M., Operations on Type-2 Fuzzy Sets, Fuzzy Sets and Systems 122 (2001) 327-348.
49. Karnik, N. ve Mendel, J.M., Type-2 Fuzzy Logic Systems, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 7 (1999) 643–658.
50. Kaufman, L. ve Rousseeuw, P.J., Finding Groups In Data: An Introduction To Cluster Analysis, New York: John Wiley And Sons, 1990.
51. Kıyak, E., Bulanık Mantık Yöntemiyle Uçuş Kontrol Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi, , Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, 2003.
52. Klir G. J. ve Yuan B., Fuzzy Sets and Fuzzy Logic Theory and Applications, Prentice Hall PTR, New Jersey, 1995.
53. Krishnapuram, R. and Kim, J., A Note on the Gustafson-Kessel and Adaptive Fuzzy Clustering Algorithms, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 7 (1999) 453-461.
54. Kruse, R. and Lesot, M., J., Gustafson-Kessel-Like Clustering Algorithm based on Typicality Degrees, Uncertainty and Intelligent Information System, (2008) 117-130.
55. Liang, Q. ve Mendel, J.M., Interval Type-2 Fuzzy Logic Systems: Theory and Design, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 8 (2000) 535–550.
56. Mendel, J., John, R. ve Bob, I., Type-2 Fuzzy Sets Made Simple, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 10, 2 (2002) 117–127.
57. Mendel, J., Uncertain Rule-Based Fuzzy Logic Systems: Introduction and New Directions. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2001.
58. Mendel, J., Computing Derivatives in Interval Type-2 Fuzzy Logic Systems, IEEE Trans. Fuzzy Syst., 12, 1 (2004) 84–98.
59. Melin, P. ve Castillo, O., A Review on Type-2 Fuzzy Logic Applications in Clustering, Classification and Pattern Recognition, Applied Soft Computing 21 (2014) 568-577.

60. Melin, P. ve Castillo, O., Type-2 Fuzzy Logic: Theory and Applications, Spirenger Valong Berlin Heidelberg, 2008.
61. Mizumoto, M. ve Tanaka, K., Some Properties of Fuzzy Sets of Type 2, Information and Control 31 (1976) 312–340.
62. Rhee F. and Hwang, C., A Type-2 Fuzzy C-Means Clustering Algorithm, Proc. Joint Conf. IFSA/NAFIPS, Jul. (2001) 1926–1919.
63. Ozkan , I. ve Turksen, I. B., Entropy Assessment for Type-2 Fuzziness, proc. Int. Conf. Fuzzy Syst., Jul. 2, (2004) 1111-1115.
64. Ozkan, I. ve Turksen, I. B., Upper and Lower Values for the Level of Fuzziness in FCM, Information Sciences 177, 23 (2007) 5143–5152.
65. Ozkan, B ve Turksen, I. B, Mini Max S-Stable Cluster Validity Index for Type-2 Fuzzy- Ness, in: Proceedings of the NAFIPS 2010 Conference, (art. no. 5548183).
66. Seber G. A. F. ve Lee A. J., Linear Regression Analysis, John Willey&Sons, New Jersey, Canada, 2003.
67. Servi, T., Çok Değişkenli Karma Dağılım Modeline Dayalı Kümeleme Analizi, Doktora Tezi, Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana, 2009.
68. Şen, Z., Bulanık Mantık ve Modelleme İlkeleri, Bilge Sanat Yapım Evi, İstanbul, Ekim, 2001.
69. Turksen, B., Review of Fuzzy System Models with an Emphasis on Fuzzy Functions, Transaction of the Institute of Measurement and Control 31, 1 (2009) 7-31.
70. Ulutagay, G., Bulanık C-Ortalamlar Kümeleme Analizi ve Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Bornova-İzmir, 2004.
71. Windham, M. P., Geometrical Fuzzy Clustering algorithms, Reprinted with Permission from Fuzzy Sets and Systems, 10 (1983) 271-279.
72. Wang L., A course in Fuzzy System sand Control, Prenice Hall RTR, New Jersey, 1997.
73. Yılcı, V., Bulanık Kümeleme Analizi ile Türkiye’deki İllerin Sosyoekonomik Açidan Sınıflandırılması, Süleyman Demirel Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, 15, 3 (2010) 453-470.
74. Yılmaz, S., Kocaeli Üniversitesi, Bulanık Mantık ve Mühendislik Uygulamaları Ders Notları, 2006.
75. Zadeh, L. A., Fuzzy Sets, Information and Control, 8 (1965) 338-353.

76. Zadeh, L. A., Fu, K., Tanaka, K. ve Shimura, M., Fuzzy Sets and their Applications to Cognitive and Decision Processes, 1975.
77. Zelh, K., Einax J., W. and Sarbu, C., Fuzzy Divisive Hierarchical Clustering of Soil Data Using Gustafson-Kessel Algorithm, Chemometrics and Intelligent Laboratory System, 86 (2007) 121-129.
78. Zhang, W.-B., Hu, H.-Z. ve Liu, W.-J., Rules Extraction Of Interval Type-2 Fuzzy Logic System Based On Fuzzy C-Means Clustering, in: Proceedings – Fourth International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery, FSKD 2 (2007) 256–260 (art. no. 4406083).
79. Zhou, C. Li, Xiang, J., Li, Q., ve An, X., T-S Fuzzy Model Identifications Based on A Novel Fuzzy C-Regression Model Clustering Algorithm, Eng. Appl. Artif. Intell. 22 (2009) 646-653.



ÖZGEÇMİŞ

Seda SAĞIRKAYA, 11 Mart 1992 tarihinde İzmir’de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Fatih İlköğretim Okulu’nda, lise öğrenimini Ülfet Onart Lisesi’nde tamamladı. 2010-2011 öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü’ne yerleşti. 2014 yılında mezun olduktan sonra aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik ve Bilgisayar bilimleri Anabilim Dalı, tezli yüksek lisans programına dahil oldu.

