

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



TRABZON



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORCID : - - -

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce

Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : / /

Tezin Savunma Tarihi : / /

Tez Danışmanı :
ORCID : - - -

Trabzon

ÖNSÖZ

“*TL –ALTYARIGRUBUN TL –İDEALLERİNİN KAFESLERİ*” isimli bu tez Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Doktora Programı’nda hazırlanmıştır.

Tez çalışmam boyunca hiçbir desteğini esirgemeyen ve bilim insanı olma yolundaki ilk adımlarımı atarken kıymetli bilgileriyle ve tecrübesiyle yolumu aydınlatan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Sultan YAMAK’a teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca, yapıcı eleştirileri ve önerileri ile tezime büyük katkıları bulunan saygıdeğer hocalarım Sayın Prof. Dr. Funda KARAÇAL’a ve Sayın Prof. Dr. İsmail Hakkı ALTAŞ’a, eğitim öğretim hayatımda katkısı olan tüm hocalarıma ve ortak olarak çalışmalar yürüttüğümüz ve tez çalışması süresinde de hiçbir yardımdan kaçınmayan bölümümdeki araştırma görevlisi arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Son olarak, doğduğum günden beri elimi hiç bırakmayan, hayatım boyunca aldığım tüm kararlarda bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım ve her kararında arkamda olan, maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen ve bugünlere gelmemde en büyük paya sahip olan annem Nurşen EKİNCİ’ye ve rahmetli babam Behçet EKİNCİ’ye, sevgili eşim Alim OKUMUŞ’a, kardeşlerim Kemal Can EKİNCİ ve Adil Cem EKİNCİ’ye, teşekkür eder, minnettarlığımı sunarım. Ayrıca tez süresince burs desteği sağlayan TÜBİTAK-Bilim Adamı Yetiştirme Grubuna teşekkür ederim.

Bu tez çalışmasının bundan sonraki çalışmalara katkı sağlamasını temenni ederim.

Emine Funda OKUMUŞ

Trabzon 2025

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum “*TL – altyarı grubun TL – ideallerinin Kafes Yapısı*” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Sultan YAMAK’ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, analizleri ilgili yaptığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 25/06/2025

Emine Funda OKUMUŞ

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET.....	VI
SUMMARY	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VIII
TABLolar DİZİNİ.....	IX
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	X
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Kafesler	3
1.3. Tam Kafes Üzerinde T -Normlar	7
1.4. L -Alt Kümeler	10
1.5. Yarıgrup Teorisi	12
1.6. TL - Altyarıgruplar ve İdealler	14
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	21
2.1. TL - Altyarı grubun TL -Sol, TL - Sağ ve TL -İki Yanlı İdealleri	21
2.2. TL - Altyarı grubun TL -Bi İdeali, TL - Quasi İdeali ve TL -Interior İdeali.....	33
3. SONUÇLAR.....	54
4. ÖNERİLER.....	56
5. KAYNAKLAR	57
ÖZGEÇMİŞ	

Doktora Tezi

ÖZET

TL-ALTYARIGRUBUN *TL*-İDEALLERİNİN KAFES YAPISI

Emine Funda OKUMUŞ

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Sultan YAMAK
2025, 58 Sayfa

Matematikte özel yarıgrupların, grupların, halkaların ve modüllerin belirlenmesi için pek çok yöntem kullanılmıştır. Bunlardan bir tanesi alt cebirsel yapıların kafes yapılarını incelemektir. Özellikle bir grubun alt gruplarının kafes yapıları ile bir grubun devirli grup, değişmeli grup ve p -grup olup olmadığı belirlenmiştir. Bu bakış sonrasında TL – altcebirsel yapılar (özel olarak $T = T_M$ veya $L = [0,1]$) kafes, tam kafes, modüler kafes ve dağılımlı kafes yönleri ile incelenmiştir.

Bu tezin konusu başlangıç olarak, yarıgruplarda bir TL – altyarı grubun TL – sol(sağ) ideallerini, bi-ideallerini, quasi ideallerini, interior ideallerini ve bunların ilişkilerini inceleyerek, kafes yapılarının özelliklerini araştırmaktır. Kafes yapılarının özellikleri yardımıyla özel yarıgrupların karakterizasyonu ele alınacaktır. Ayrıca bu yapıların yarıgrup homomorfisi altında görüntüsü ve ters görüntüsü incelenecektir. Ek olarak yarıgrupların kartezyen çarpımları üzerinde bu tür yapıların etkisi araştırılacaktır. Sonrasında yapılan önceki çalışmalar örnek alınarak sentezlenecek ve yeni teoremler verilecektir.

Anahtar Kelimeler: TL - altyarı grup, TL - sol ideal, TL - bi ideal, TL - quasi ideal, TL - interior ideal

PhD. Thesis

SUMMARY

LATTICE STRUCTURE TL -IDEALS OF TL -SUBSEMIGROUP

Emine Funda OKUMUŞ

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Sultan YAMAK
2025, 58 Pages

In mathematics, many methods have been used to determine special semigroups, groups, rings and modules. One of these is to examine the lattice structures of subalgebraic structures. In particular, the lattice structures of subgroups of a group and whether a group is a cyclic group, abelian group and p-group have been determined. After this view, TL -subalgebraic structures (in particular $T = T_M$ or $L = [0,1]$) have been examined in terms of lattice, complete lattice, modular lattice and distributed lattice.

The subject of this thesis is to investigate the properties of the lattice structures by examining the TL –left(right) ideals, bi-ideals, quasi ideals, interior ideals and their relations of a TL – subsemigroup in semigroups. With the help of the properties of the lattice structures, the characterization of special semigroups will be discussed. In addition, the image reverse view of these structures will be examined under semigroup homomorphism. Further, the effect of such structures on the cartesian product of semigroups will be investigated. Based on previous studies, it will be synthesized and new theorems will be given.

Key Words: TL - subsemigroup, TL - left ideal, TL - bi ideal, TL - quasi ideal, TL - interior ideal

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1 (a) ve (b) L kafes yapısı.....	6
Şekil 2 (a), (b) ve (c) birer L kafes yapısı.....	7
Şekil 3 (a): M_3 kafes yapısı ve (b): N_5 kafes yapısı	7



TABLÖLAR DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1 TL - altyarıgrubu çeşitlerinin gösterimleri ve isimlendirilmesi	15
Tablo 2 Bir yarıgrubun L -sol, L -sağ, L -ideallerinin kümelerinin gösterimleri ve isimlendirilmesi	17
Tablo 3 TL –Bi İdeal, L – Quasi İdeal ve L – Interior İdeallerinin kümelerinin gösterimleri ve isimlendirilmesi.	18
Tablo 4 TL –altyarıgrubunun TL –sol(sağ, iki yanlı) ideallerinin ideallerinin gösterimleri ve isimlendirilmesi	21
Tablo 5 TL – Altyarıgrubunun TL –Bi İdeali, TL – Quasi İdeali ve TL – Interior İdeallerinin kümelerinin gösterimleri ve isimlendirilmeleri.....	34

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$a \wedge b$	: a ile b nin infimumu
$a \vee b$	: a ile b nin supremumu
$a b$	: a böler b
$\bigvee_{i \in \Omega} a_i$	: $\{a_i i \in \Omega\}$ ailesinin supremumu
$\bigwedge_{i \in \Omega} a_i$	: $\{a_i i \in \Omega\}$ ailesinin infimumu
D_T	: L üzerinde tanımlı T t - normuna göre idempotent elemanların kümesi
$F(X)$	: X in bulanık alt kümelerinin kümesi
$F(X, L)$	: X in L alt kümelerinin kümesi
$F(X, v, L)$	: $\{ \mu \in F(X, L) \mu \subseteq v \}$ kümesi
$F(X, T, L)$	: $\{ \mu \in F(X, L) Im\mu \subseteq D_T \}$ kümesi
1_A	: A nın karakteristik fonksiyonu
$Im\mu$	: μ nün görüntü kümesi
μ_α	: μ nün α - seviye alt kümesi
$f(\mu)$	: μ nün f altındaki görüntüsü
$f^{-1}(\mu)$	: μ nün f altındaki ters görüntüsü
$\mu \odot_T v$	: μ ve v 'nün T -çarpımı
$\prod_{i \in \Omega} \mu_i$	: $\{\mu_i i \in \Omega\}$ ailesinin kartezyen çarpımı
$\mu_1 \otimes \mu_2$	: μ ve v 'nün güçlü kartezyen çarpımı
$U(X, \mu, T, \alpha)$	: μ nün güçlü α s seviyesi alt kümesi
$\mu_1 \times_T \dots \times_T \mu_n$	: $\{\mu_i i \in \Omega\}$ ailesinin T -kartezyen çarpım

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Belirsizliği temsil etmek amacıyla bir kümenin bulanık alt kümesi kavramını ortaya ilk olarak Zadeh 1965 yılında öne sürmüştür. Bu yaklaşımı, Goguen 1967 yılındaki çalışmasında bulanık kümelerin değerleri $[0,1]$ yerine kafesler üzerinde taşımıştır. Bu gelişmeleri takiben, Rosenfeld (1971) bulanık grup teorisine yönelik çalışmalara öncülük ederek bulanık alt grupoid ve bulanık alt grup kavramlarını tanıtmış, bulanık kümeler teorisini cebirsel yapılara uyarlamıştır. Bu tarihten itibaren literatürde birçok araştırmacı tarafından bulanık alt yarıgruplar, bulanık alt halkalar, bulanık idealler ve benzeri yapılar için temel sonuçlar verilmiştir (Ajmal & Thomas, 1994; Morderson vd., 2003; Kuroki, 1980; Dixit vd., 1991; Malik vd., 1992; Zahedi, 1993). Özellikle, bir yarıgrupun bulanık ideal kavramı ise ilk olarak Kuroki (1981, 1991, 1992) tarafından ele alınmıştır. Daha sonra bu yapılar t -normlara genişletilmiştir (Anthony & Sherwood, 1979). Bir grubun TL -alt grubu, bir halkanın TL -alt halkası ve TL -ideali, bir yarıgrupun TL -alt yarı grubu, bir modülün TL -alt modülleri kavramları tanımlanmış ve bu yapıların çeşitli özellikleri ayrıntılı bir biçimde incelenmiştir (Bayrak & Yamak, 2015; Dheena & Mohanraaj, 2011; Ray, 1997; Sessa, 1984; Yu & Wang, 1997).

Matematiğin pek çok alanında uygulamaları bulunan bulanık küme teorisi, özellikle bulanık yarıgruplar teorisi birçok bulanık cebirsel yapıların temelini oluşturmaktadır. Bulanık yarıgrup yapıları teorik sonuçlarının yanı sıra, kesinliği net olmayan durumlarda karar verme adına; kontrol sistemleri, robotik ve sağlık alanları gibi geniş uygulama sahasına sahiptir (Morderson vd., 2003).

Cebirsel yapıların temel çalışma alanlarından biri de belirli bir küme ya da bulanık altküme tarafından üretilen alt cebirsel yapıların karakterizasyonunun belirlenmesidir. Bu problem klasik cebir ve bulanık cebir alanları olmak üzere iki aşamada tartışılmaktadır. Örneklendirmek gerekirse, klasik cebirsel yapılarda; gruplar teorisinde bir kümeyi içeren en küçük alt grup, halkalar teorisinde bir kümeyi içeren en küçük alt halka, en küçük sol ideal, en küçük sağ ideal, en küçük ideal; modül teorisinde de bir kümeyi içeren en küçük alt modülün belirlenmesi için bir çok karakterizasyon mevcuttur (Hungerford, 2012).

Özellikle yarıgrup teorisinde boştan farklı bir kümeyi kapsayan en küçük sol ideal, sağ ideal, ideal, genelleştirilmiş bi ideal, bi ideal, quasi ideal ve interior idealler sırasıyla aşağıdaki şekildedir (Mordeson vd., 2003)(Samuel vd., 1965). $\emptyset \neq X$ bir kümesi için,

- $X \cup SX$
- $X \cup XS$
- $X \cup XS \cup SX \cup SXS$
- $X \cup XSX$
- $X \cup X^2 \cup XSX$
- $X \cup (SX \cap XS)$
- $X \cup SXS$

Diğer bir aşaması olan, θ bulanık alt kümesini içeren en küçük bulanık alt grup; en küçük bulanık alt halka, en küçük bulanık sol ideal, en küçük bulanık sağ ideal, en küçük bulanık ideal; en küçük bulanık alt modülün belirlenmesi için birçok yöntem geliştirilmiştir (Ajmal & Thomas, 1998) (Bhambri & Kumar, 2009).

Yarıgruplarda bir θ bulanık alt kümesini içeren en küçük bulanık sol ideal, bulanık sağ ideal, genelleştirilmiş bulanık bi ideal, bulanık bi ideal, bulanık quasi ideal ve bulanık interior idealleri sırasıyla aşağıdaki şekilde belirlenmiştir (Mordeson vd., 2003, Zhi-Wen&Xue-Ping, 1995).

- $\theta \cup 1_X \circ \theta$
- $\theta \cup \theta \circ 1_X$
- $\theta \cup \theta \circ 1_X \cup 1_X \circ \theta \cup 1_X \circ \theta \circ 1_X$
- $\theta \cup \theta \circ 1_X \circ \theta$
- $\theta \cup \theta^2 \cup \theta \circ 1_X \circ \theta$
- $\theta \cup (\theta \circ 1_X \cap 1_X \circ \theta)$
- $\theta \cup 1_X \circ \theta \circ 1_X$

şeklindedir (Mordeson vd., 2003).

Her bir genelleştirmenin sonucunda bulanık cebirsel yapılar teorisinin, klasik alt cebirsel yapıların sonuçlarından biraz daha uzaklaştığı gözlemlendi. Bu sorunu aşmak adına özel kafesler veya özel t –normlar alınarak bu yapılar incelendi. Son genelleştirme olarak, bir bulanık küme yardımıyla bulanık alt cebirsel yapıların tanımları yeniden ele alındı. Bulanık gruplar teorisinde L –altgrubunun L –altgrupları tanımları verildi (Ajmal vd., 2015). Daha sonra nilpotent L -altgrupları, çözülebilir L –altgrupları ve L - altgrubunun

normal altgrubu kavramları çalışıldı (Jahan vd., 2017) (Ajmal & Jahan, 2015) (Jahan vd., 2017, 2022). Bulanık halkalar teorisinde L - bulanık halkasının L - bulanık idealleri tanıtıldı (Martínez, 1999). Bu çalışmalar baz alınarak, yarıgruplar teorisinde bulanık alt cebirsel yapıların keyfi bir TL -alt yarıgrup ile ele alınabileceği problemi bu tezin ana fikrini oluşturmuştur.

Bu tez iki ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tezde gerekli olan tanım ve teoremler altı ara başlık altında verildi. İkinci bölümde bir TL – altyarıgrubu kullanılarak TL –sol ideal, TL –sağ ideal, TL –iki yanlı ideal, TL –genelleştirilmiş bi ideal, TL – bi ideal, TL –quasi ideal ve TL – interior ideali tanımları iki alt başlık altında tanıtıldı. Verilen tanımların literatürde kullanılan tanımlarla karşılaştırması yapıldı (Önerme 2.1.2 ve Önerme 2.2.2). Daha sonra bu tanımlara denk şartlar verildi (Teorem 2.1.4 ve Teorem 2.2.3). Bu ideallerin kümesi t-normlar inceltirilerek veya TL -alt yarıgruplar karşılaştırılarak sonuçları incelendi (Önerme 2.1.6 ve Önerme 2.1.7). Seviye altkümeleri ile bu yapılar karakterize edildi (Teorem 2.1.8, Teorem 2.1.9, Teorem 2.1.10, Teorem 2.1.11, Teorem 2.2.13, Teorem 2.2.14 ve Sonuç 2.2.15). Bu yapıların kafes özellikleri incelendi (Teorem 2.1.12, Sonuç 2.1.13, Teorem 2.1.14, Sonuç 2.1.16, Teorem 2.2.17 ve Sonuç 2.2.18). Verilen tanımlara ait kümeler üzerinde ikili veya n-ary işlemler tanıtıldı (Teorem 2.1.12, Teorem 2.1.14, Önerme 2.1.19, Teorem 2.1.23, Teorem 2.2.21, Teorem 2.2.22 ve Teorem 2.2.25). Sunulan tanımların bir fonksiyon altındaki görüntüsü ve ters görüntüsüne ait özellikler verildi (Teorem 2.1.21, Teorem 2.1.22, Teorem 2.2.23 ve Teorem 2.2.24). TL -alt yarıgrubunun içinde herhangi bir L -alt kümesinin kapsayan en küçük TL –sol ideal, TL –sağ ideal, TL –iki yanlı ideal, TL –genelleştirilmiş bi ideal, TL – bi ideal, TL –quasi ideal ve TL – interior idealler karakterize edildi (Teorem 2.1.24 ve Teorem 2.2.27).

1.2. Kafesler

Bu bölümde, kafesler ile ilgili tanım ve teoremler (Birkhoff, 1940) derlenerek verilmiştir.

Tanım 1.2.1: $(L, \leq)$ sıralı bir küme olsun.

(i) L 'ye kafes (örgü) denir : $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in L$ için $Sup\{a, b\} = a \vee b$ ve $Inf\{a, b\} = a \wedge b$ mevcuttur,

(ii) $(L, \leq)$ tam sıralı küme (zincir) denir $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in L$ için $a \leq b$ veya $b \leq a$,

(iii) $(L, \leq)$ tam kafes denir $\Leftrightarrow$ Her $B \subseteq L$ için $Sup B$ ve $Inf B$ mevcuttur,

(iv) $(L, \leq)$ sınırlı kafes denir $\Leftrightarrow L$ kafes ve $1 = EBEL$, $0 = EKEL$ mevcuttur.

Teorem 1.2.2: $(L, \preceq)$ sıralı bir küme ve $x, y \in L$ olsun.

- (i) L tam sıralı ise L kafestir,
- (ii) L tam kafes ise L sınırlı kafestir.

Teorem 1.2.3: $(L, \leq)$ sıralı bir küme olsun.

- (i) L kafes, $\emptyset \neq T \subseteq L$, T sonlu küme ise $\text{Inf}T$, $\text{Sup}T$ mevcuttur,
- (ii) L kafes ve $\emptyset \neq L$ sonlu küme ise L tam kafestir.

Teorem 1.2.4: $(L, \leq)$ sıralı bir küme olsun. Bu taktirde aşağıdaki önermeler denktir.

- (i) $(L, \leq)$ tam kafestir,
- (ii) Her $B \subseteq L$ için $\text{Inf}B$ mevcuttur,
- (iii) Her $B \subseteq L$ için $\text{Sup}B$ mevcuttur,
- (iv) $1 \in L$ ve $\forall \emptyset \neq T \subseteq L$ için $\text{Inf} T$ mevcuttur,
- (v) $0 \in L$ ve $\forall \emptyset \neq T \subseteq L$ için $\text{Sup} T$ mevcuttur.

Tanım 1.2.5: $(L, \leq)$ bir kafes olsun. Bu durumda,

- (i) L 'ye dağılımlı kafes denir $\Leftrightarrow$ Her $x, y, z \in L$ için

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \text{ ve } x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

- (ii) L 'ye modüler kafes denir $\Leftrightarrow$ Her $x, y, z \in L$ için $x \leq y$ ise $x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z)$.

Tanım 1.2.6: $(L, \leq)$ bir tam kafes olsun.

- (i) L 'ye sonsuz $\vee$ -dağılımlı kafes denir: $\Leftrightarrow$ Her $a, b_i \in L$, $i \in J$ için

$$a \wedge \left(\bigvee_{i \in J} b_i \right) = \bigvee_{i \in J} (a \wedge b_i),$$

- (ii) L 'ye sonsuz $\wedge$ -dağılımlı kafes denir: $\Leftrightarrow$ Her $a, b_i \in L$, $i \in J$ için

$$a \vee \left(\bigwedge_{i \in J} b_i \right) = \bigwedge_{i \in J} (a \vee b_i),$$

- (iii) L 'ye sonsuz dağılımlı kafes denir: $\Leftrightarrow L$ 'ye sonsuz $\vee$ -dağılımlı ve sonsuz $\wedge$ -dağılımlı kafestir.

Teorem 1.2.7: $(L, \leq)$ kafes olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur.

- (i) Her $x, y, z \in L$ için $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$,
- (ii) Her $x, y, z \in L$ için $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$,

(iii) Her $x, y, z \in L$ için $x \leq y$ ise $x \vee (y \wedge z) \leq y \wedge (x \vee z)$.

Teorem 1.2.8: $(L, \leq)$ tam kafes olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

- (i) L tam sıralı ise L dağılımlı kafestir,
- (ii) L sonsuz $\vee$ -dağılımlı kafes ise L dağılımlı kafes,
- (iii) L sonsuz $\wedge$ -dağılımlı kafes ise L dağılımlı kafes,
- (iv) L dağılımlı kafes ise L modüler kafestir.

Tanım 1.2.9: $(L, \leq)$ bir kafes ve $\emptyset \neq T \subseteq L$ olsun. T ye alt kafes denir $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in T$ için $a \vee b, a \wedge b \in T$.

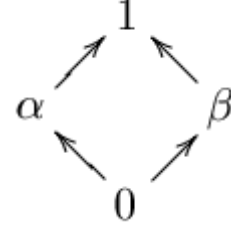
Teorem 1.2.10: $(L_1, \leq_1), (L_2, \leq_2)$ kafesler ve $L = L_1 \times L_2$ olsun. Aksi söylenmedikçe L üzerindeki bağıntı $(x, y) \leq (x', y') \Leftrightarrow x \leq_1 x', y \leq_2 y'$ ile $(L, \leq)$ kümesi bir kafestir. Aksi söylenmedikçe L üzerindeki sıralama bağıntısı bu şekilde alınacaktır.

Örnek 1.2.11:

$L = \{0, \alpha, \beta, 1\}$ kümesi üzerindeki iki sıralama bağıntısının Hasse diyagramları aşağıda gösterilmiştir. Buna göre Şekil 1 (a)'da verilen sıralama ile L bir zincirdir. Şekil 1 (b)'de verilen sıralama ile L bir kafestir ancak bir zincir değildir.



(a)



(b)

Şekil 1 (a) ve (b) L kafes yapısı**Örnek 1.2.12:**

X bir küme ve $P(X)$, X 'in bütün alt kümelerinin kümesi olsun. Bu durumda $(P(X), \subseteq)$ tam kafestir. Eğer X en az iki elemanlı bir küme ise $(P(X), \subseteq)$ sıralı kümesi zincir değildir.

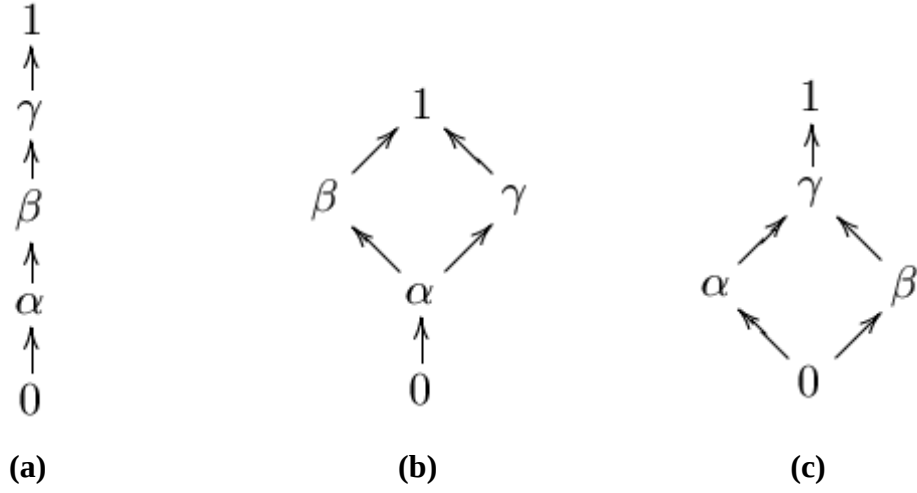
Örnek 1.2.13:

" $\leq$ ", $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerindeki sıralama olarak alınırsa $(\mathbb{N}, \leq)$ bir zincirdir, ancak bir tam kafes değildir.

Örnek 1.2.14:

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olmak üzere her $x, y \in \mathbb{N}$ için $x \leq y \Leftrightarrow x \mid y$ olarak alınırsa $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \leq)$ kümesi bir kafestir. Ancak zincir ve tam kafes değildir.

Örnek 1.2.15: Kafes diyagramları Şekil 2 de (a), (b), (c), gibi verilen $L = \{0, \alpha, \beta, \gamma, 1\}$ kafesleri birer dağılımlı kafestir ancak M_3 ve N_5 kafesleri dağılımlı değildir.



Şekil 2 (a), (b) ve (c) birer L kafes yapısı



Şekil 3 (a): M_3 kafes yapısı ve (b): N_5 kafes yapısı

1.3. Tam Kafes Üzerinde T –Normlar

Bu bölümde üçgensel norm (kısaca t -norm) kavramı verilecektir. Ayrıntılı bilgi için (Klement vd., 2013; Ray, 1997) çalışmasına başvurulabilir. Diğer yandan aksi söylenmedikçe, L daima tam kafes olarak alınacaktır.

Tanım 1.3.1: $(L, \leq, \wedge, \vee, 0, 1)$ kafesi üzerinde tanımlı $T: L^2 \rightarrow L$ ikili işlemine bir t -norm denir : $\Leftrightarrow$

- (i) Her $x, y \in L$ için $T(x, y) = T(y, x)$,
- (ii) Her $x, y, z \in L$ için $T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z))$,
- (iii) Her $x, y, z \in L$ için $x \leq y$ ise $T(x, z) \leq T(y, z)$,

(iv) Her $x \in L$ için $T(x, 1) = x$.

Her $x_1, x_2, \dots, x_n \in L$ için $T \left(\bigwedge_{i=1}^n x_i \right) = T \left(\bigwedge_{i=1}^{n-1} x_i, x_n \right)$ olarak alınacaktır.

Herhangi $x, y \in L$ için $T(x, y)$ notasyonu yerine xTy notasyonu da kullanılabilir.

Tanım 1.3.2: L kafes ve T, L üzerinde bir t -norm olsun.

(i) T 'ye L üzerinde $\vee$ -dağılımlı t -norm denir: $\Leftrightarrow$ Her $a, b_1, b_2 \in L$ için $T(a, b_1 \vee b_2) = T(a, b_1) \vee T(a, b_2)$,

(ii) T 'ye L üzerinde sonsuz $\vee$ -dağılımlı t -norm denir : $\Leftrightarrow$ Her $a, b_i \in L, i \in J$ için $T(a, \bigvee_{i \in J} b_i) = \bigvee_{i \in J} T(a, b_i)$.

Tanım 1.3.3: L kafes ve T, L üzerinde bir t -norm olsun. $a \in L$ 'ye L 'nin, T t -normuna göre bir idempotent elemanı denir : $\Leftrightarrow T(a, a) = a$ 'dır.

L 'nin tüm idempotent elemanlarının kümesi $D_T = \{a \in L | T(a, a) = a\}$ ile gösterilir.

Örnekler 1.3.4: Bir L kafesi üzerinde aşağıdaki t -norm örnekleri verilebilir:

(i) Her $x, y \in L$ için ,

$$T_D(x, y) = \begin{cases} x \wedge y, & 1 \in \{x, y\}, \\ 0, & 1 \notin \{x, y\} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan T_D ikili işlemi L üzerinde bir t -normdur,

(ii) Her $x, y \in L$ için

$$T_M(x, y) = x \wedge y$$

şeklinde tanımlanan T_M ikili işlemi L üzerinde bir t -normdur.

Burada $D_{T_D} = \{0, 1\}$, $D_{T_M} = L$ dir.

Örnek 1.3.5: $L = [0, 1]$ kafesi üzerinde tanımlanan temel t -normlar aşağıdaki şekildedir.

(i) $T_P(x, y) = x \cdot y$, (Çarpım t -norm)

(ii) $T_L(x, y) = \max(x + y - 1, 0)$, (Lukasiewicz t -norm)

(iii) $T^{nM}(x, y) = \begin{cases} 0, & x + y \leq 1, \\ \min(x, y), & x + y > 1 \end{cases}$, (Nilpotent Minimum)

Burada $D_{T_P} = \{0, 1\}$, $D_{T_L} = \{0, 1\}$, $D_{T^{nM}} = \{0\} \cup (\frac{1}{2}, 1]$ dir.

Tanım 1.3.6: $(L, \leq)$ kafes ve T_1, T_2, L üzerinde herhangi iki t -norm olsun. T_1, T_2 'den zayıftır (veya T_2, T_1 'den güçlüdür) denir : $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in L$ için $T_1(x, y) \leq T_2(x, y)$ 'dir. Bu durum $T_1 \leq T_2$ şeklinde yazılır. Açık olarak L üzerindeki herhangi bir T t -normu için $T_D \leq T \leq T_M$ dır.

Teorem 1.3.7: L kafes ve T, L üzerinde t -norm olsun. Bu takdirde aşağıdakiler gerçekleşir:

- (i) Her $x, y \in L$ için $xTy \leq x \wedge y$,
- (ii) Her $x \in L$ için $xT0 = 0Tx = 0$,
- (iii) Her $x_1, x_2, y_1, y_2 \in L$ için $x_1 \leq x_2$ ve $y_1 \leq y_2$ ise $x_1Ty_1 \leq x_2Ty_2$.

Teorem 1.3.8: L kafes ve T, L üzerinde bir t -norm olsun. I ve J birer indis kümesi olmak üzere $\{a_i \in L | i \in I\}, \{b_j \in L | j \in J\}$ aileleri ve $b \in L$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

- (i) $(\bigwedge_{i \in I} a_i)T(\bigwedge_{j \in J} b_j) \leq \bigwedge_{j \in J} (a_iTb_j)$,
- (ii) $(\bigwedge_{i \in I} a_i)Tb \leq \bigwedge_{j \in J} (a_iTb_j)$,
- (iii) $(\bigvee_{j \in J} a_iTb_j) \leq (\bigvee_{i \in I} a_i)T(\bigvee_{j \in J} b_j)$,
- (iv) $\bigvee_{i \in I} (a_iTb) \leq (\bigvee_{i \in I} a_i)Tb$.

Teorem 1.3.9: $(L, \leq)$ sınırlı kafes ve T, L üzerinde bir t -norm olsun. Bu takdirde,

- (i) $a, b \in D_T$ ise $aTb \in D_T$,
- (ii) $\{a_i | i \in I\} \subseteq D_T$ ise $\bigvee_{i \in I} a_i \in D_T$,
- (iii) $(D_T, \leq)$ tam kafestir.

D_T tam kafesinde $\{a_i | i \in I\}$ ailesinin infimumu $\bigwedge_{i \in I}^T a_i$ ile gösterilir.

Teorem 1.3.10: T_1, L_1 üzerinde, T_2, L_2 üzerinde t - norm ise

$$T = T_1 \times T_2: (L_1 \times L_2)^2 \rightarrow L_1 \times L_2,$$

$$T((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (T_1(x_1, x_2), T_2(y_1, y_2))$$

ile tanımlanan T ikili işlemi $L_1 \times L_2$ kafesi üzerinde bir t -normdur.

1.4. L -Alt Kümeler

Bu bölümde L -bulanık alt kümelere ait bilgiler verilecektir. Ayrıntılı bilgi için (Goguen, 1967; Morderson&Malik, 1998) çalışmalarına başvurulabilir. Aksi söylenmedikçe L daima tam kafes olarak alınacaktır.

Tanım 1.4.1: L kafes ve $\emptyset \neq X$ bir küme olsun. Her bir $\mu: X \rightarrow L$ fonksiyonuna X 'in bir L -alt kümesi denir. X 'in bütün L -alt kümelerinin kümesine X 'in L -güç kümesi denir ve $F(X, L)$ veya (L^X) ile gösterilir. Özel olarak $L = [0,1]$ olarak seçilirse μ 'ye X 'in bir bulanık alt kümesi denir ve X 'in tüm bulanık alt kümelerinin kümesi $F(X)$ ile gösterilir. $Im\mu = \{ \mu(x) | x \in X \}$ kümesine μ 'nün görüntüsü denir. $\{ \mu \in F(X, L) | Im\mu \subseteq D_T \}$ kümesi $F(X, T, L)$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.4.2: $\mu, \nu \in F(X, L)$ olsun. Bu durumda, μ ye ν 'nün L -alt kümesi denir : $\Leftrightarrow$ Her $x \in X$ için $\mu(x) \leq \nu(x)$. $\mu \nu$ 'nün L -alt kümesi ise $\mu \subseteq \nu$ olarak gösterilir. $\{ \mu \in F(X, L) | \mu \subseteq \nu \}$ kümesi $F(X, \nu, L)$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.4.3: $\mu \in F(X, L)$ ve $\alpha \in L$ için ,

$$\{x \in X | \alpha \leq \mu(x)\}$$

olarak tanımlanan kümeye μ 'nün α seviye alt kümesi denir ve μ_α veya $U(X, \mu, \alpha)$ ile gösterilir. Ayrıca,

$$\{x \in X | \alpha = \alpha T \mu(x)\}$$

olarak tanımlanan kümeye güçlü α seviye alt kümesi denir ve $U(X, \mu, T, \alpha)$ ile gösterilir.

Teorem 1.4.4: $\mu, \nu \in F(X, L)$ ve $\alpha, \beta \in L$ için aşağıdakiler gerçekleşir.

- (i) $\mu \subseteq \nu$ ise $\mu_\alpha \subseteq \nu_\alpha$,
- (ii) $\alpha \leq \beta$ ise $\mu_\beta \subseteq \mu_\alpha$,
- (iii) $\mu \subseteq \nu$ ise $U(X, \mu, T, \alpha) \subseteq U(X, \nu, T, \alpha)$.

Tanım 1.4.5: $\mu, \nu \in F(X, L)$, $\{\mu_i | i \in I\} \subseteq F(X, L)$ için aşağıdaki şekilde tanımlanan $\mu \cup \nu$, $\mu \cap \nu$, $\mu T \nu$, $\bigcup_{i \in I} \mu_i$ ve $\bigcap_{i \in I} \mu_i$ L -altkümelerine sırasıyla μ ve ν 'nün birleşimi, kesişimi, T -kesişimi, $\{\mu_i | i \in I\}$ ailesinin birleşimi ve kesişimi denir. Her $x \in X$,

$$\begin{aligned}
(\mu \cup \nu)(x) &= \mu(x) \vee \nu(x), \\
(\mu \cap \nu)(x) &= \mu(x) \wedge \nu(x), \\
(\mu T \nu)(x) &= \mu(x) \wedge \nu(x), \\
(\bigcup_{i \in \Omega} \mu_i)(x) &= \bigvee_{i \in \Omega} \mu_i(x), \\
(\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i)(x) &= \bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(x).
\end{aligned}$$

Tanım 1.4.6: $\{X_i | i \in \Omega\}$ kümelerin bir ailesi ve $\{\mu_i \in F(X_i, L) | i \in \Omega\}$ olarak verilsin. Bu durumda,

$$\mu: \prod_{i \in \Omega} X_i \rightarrow L, \mu((x_i)) = \bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(x_i)$$

olarak tanımlanan L -altkümesine $\{\mu_i | i \in \Omega\}$ ailesinin kartezyen çarpımı denir ve $\prod_{i \in \Omega} \mu_i$ ile gösterilir.

Tanım 1.4.7: $\mu \in F(X, L), \nu \in F(Y, L)$ olarak verilsin. Bu durumda,

$$\mu \times_T \nu: X \times Y \rightarrow L, (\mu \times_T \nu)(x, y) = \mu(x) T \nu(y)$$

olarak tanımlanan L -altkümesine μ ve ν nün T -kartezyen çarpımı denir.

Tanım 1.4.8: $\mu_1 \in F(X_1, L_1), \mu_2 \in F(X_2, L_2)$ larak verilsin. Bu durumda,

$$\mu_1 \otimes \mu_2: X_1 \times X_2 \rightarrow L_1 \times L_2, \mu_1 \otimes \mu_2(x_1, x_2) = (\mu_1(x_1), \mu_2(x_2))$$

olarak tanımlanan $L_1 \times L_2$ - alt kümesine μ_1 ve μ_2 nin güçlü kartezyen çarpımı denir.

Tanım 1.4.9: $\mu \in F(X, L), \nu \in F(Y, L)$ ve $f: X \rightarrow Y$ için aşağıdaki şekilde tanımlanan $f(\mu) \in F(Y, L)$ ve $f^{-1}(\nu) \in F(X, L)$ L -bulanık kümelerine sırasıyla , μ 'nün f altındaki görüntüsü ve ν 'nün f altındaki ters görüntüsü denir.

$$\begin{aligned}
f(\mu)(y) &= \bigvee_{f(x)=y} \mu(x), \\
f^{-1}(\nu)(x) &= \nu(f(x)).
\end{aligned}$$

Tanım 1.4.10: $A \subseteq X$ ve $\alpha, \beta \in L, \alpha < \beta$ için $(\alpha, \beta)_A \in F(X, L)$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(\alpha, \beta)_A(x) = \begin{cases} \beta, & x \in A, \\ \alpha, & x \notin A \end{cases}$$

$(0, \beta)_A$ L -alt kümesi β_A ile gösterilir. 1_A L -alt kümesine A ' nin karakteristik fonksiyonu denir.

1.5. Yarıgrup Teorisi

Bu bölümde S kümesi daima yarıgrup olarak alınacaktır. Ayrıca $x, y \in S$ için, $x.y$ yerine xy notasyonunda kullanılabilir. Ayrıntılı bilgiler için (Clifford & Preston, 1976; Iseki, 1956; Lajos, 1968; Lajos, 1969; Steinfield, 1980) kaynaklarına bakılabilir.

Tanım 1.5.1: Her $A, B \in P(S)$ için $AB = \{a.b \mid a \in A, b \in B\}$ kümesine A ile B kümelerinin çarpımı denir. Açık olarak $A = \emptyset$ veya $B = \emptyset$ ise $AB = \emptyset$ dır.

Tanım 1.5.2: $(S, .)$ yarıgrubuna regüler denir $\Leftrightarrow$ Her $a \in S$ için $\exists x \in S : a = axa$

Teorem 1.5.3: $\{S_i \mid i \in \Omega\}$ yarıgrupların bir ailesi ise $\prod_{i \in \Omega} S_i$ kümesi $(x_i).(y_i) = (x_i y_i)$ ikili işlemi ile bir yarıgruptur.

Tanım 1.5.4: $\{S_i \mid i \in \Omega\}$ yarıgrupların bir ailesi için Teorem 1.5.3 de verilen $\prod_{i \in \Omega} S_i$ yarıgrubuna $\{S_i \mid i \in \Omega\}$ yarıgruplar ailesinin kartezyen çarpımı denir.

Örnek 1.5.5: L bir kafes ise $(L, \vee)$ ve $(L, \wedge)$ yarıgruplardır.

Tanım 1.5.6: S ve S' yarıgruplar ve $f: S \rightarrow S'$ bir fonksiyon olsun.

- (i) f' 'ye, S' 'ten S' 'ye yarıgrup homomorfisi denir: $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in S$ için $f(x)f(y) = f(xy)$,
- (ii) f' 'ye epimorfi denir : $\Leftrightarrow f$ örten ve yarıgrup homomorfisi,
- (iii) f' 'ye monomorfi denir : $\Leftrightarrow f$ birebir ve yarıgrup homomorfisi,

Tanım 1.5.7: S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq A \subseteq S$ olsun. Bu takdirde

- (i) A' 'ya, S' 'nin alt yarıgrubu denir : $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in A$ için $xy \in A$,
- (ii) A' 'ya, S' nin sol ideali denir : $\Leftrightarrow$ Her $x \in S$ ve $y \in A$ ve için $xy \in A$,
- (iii) A' 'ya, S' nin sağ ideali denir : $\Leftrightarrow$ Her $x \in A$ ve $y \in S$ için $xy \in A$,
- (iv) A' 'ya, S' nin (iki yanlı) ideali denir : $\Leftrightarrow$ Her $x \in A$ ve $y \in S$ için $yx, xy \in A$,
- (v) A' 'ya, S' nin genelleştirilmiş bi-ideali denir: $\Leftrightarrow$ Her $x, z \in A$ ve $y \in S$ için $xyz \in A$,
- (vi) A' 'ya, S' nin bi-ideali denir: $\Leftrightarrow$ Her $x, z \in A$ ve $y \in S$ için $xyz, xzy \in A$,
- (vii) A' 'ya S' nin quasi-ideali denir : $\Leftrightarrow$ Her $a, d \in A$ ve $b, c \in S$ için $x = ab = cd$ ise $x \in A$,

(viii) A 'ya, S 'nin interior ideali denir: $\Leftrightarrow$ Her $x, z \in S$ ve $y \in A$ için $xyz \in A$.

Teorem 1.5.8: S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq A \subseteq S$ olsun. Bu takdirde;

- (i) A S 'nin alt yarıgrubudur $\Leftrightarrow AA \subseteq A$,
- (ii) A S 'nin sol idealidir $\Leftrightarrow SA \subseteq A$,
- (iii) A S 'nin sağ idealidir $\Leftrightarrow AS \subseteq A$,
- (iv) A S 'nin iki yanlı idealidir $\Leftrightarrow AS \subseteq A$ ve $SA \subseteq A$,
- (v) A S 'nin genelleştirilmiş bi-idealidir $\Leftrightarrow ASA \subseteq A$,
- (vi) A S 'nin bi-idealidir $\Leftrightarrow ASA \subseteq A, AA \subseteq A$,
- (vii) A S 'nin quasi idealidir $\Leftrightarrow SA \cap AS \subseteq A$,
- (viii) A S 'nin interior idealidir $\Leftrightarrow SAS \subseteq A$.

Teorem 1.5.9: S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq A \subseteq S$ olsun. Bu takdirde;

- (i) A S 'nin sol veya sağ ideali ise A S 'nin quasi idealidir,
- (ii) A S 'nin quasi ideali ise A S 'nin bi-idealidir,
- (iii) A S 'nin iki yanlı ideali ise A S 'nin interior idealidir,

Teorem 1.5.10: S regüler yarıgrup ve $\emptyset \neq A \subseteq S$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki denklikler geçerlidir;

- (iv) A S 'nin interior ideali $\Leftrightarrow A$ S 'nin iki yanlı idealidir,
- (v) A S 'nin genelleştirilmiş bi-ideali $\Leftrightarrow A$ S 'nin bi-idealidir.

Teorem 1.5.11: S bir yarıgrup, $\emptyset \neq \Omega$, $\{A_i \mid i \in \Omega\} \subseteq P(A)$ ve $\bigcap_{i \in \Omega} A_i \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda,

- (i) Her $i \in \Omega$ için A_i S 'nin alt yarıgrubu ise $\bigcap_{i \in \Omega} A_i$ S 'nin alt yarıgrubudur,
- (ii) Her $i \in \Omega$ için A_i S 'nin sol ideali ise $\bigcap_{i \in \Omega} A_i$ S 'nin sol idealidir,
- (iii) Her $i \in \Omega$ için A_i S 'nin sağ ideali ise $\bigcap_{i \in \Omega} A_i$ S 'nin sağ idealidir,
- (iv) Her $i \in \Omega$ için A_i S 'nin iki yanlı deali ise $\bigcap_{i \in \Omega} A_i$ S 'nin iki yanlı idealidir,
- (v) Her $i \in \Omega$ için A_i S 'nin genelleştirilmiş bi-ideali ise $\bigcap_{i \in \Omega} A_i$ S 'nin genelleştirilmiş bi-idealidir,
- (vi) Her $i \in \Omega$ için A_i S 'nin bi-ideali ise $\bigcap_{i \in \Omega} A_i$ S 'nin bi-idealidir,
- (vii) Her $i \in \Omega$ için A_i S 'nin quasi ideali ise $\bigcap_{i \in \Omega} A_i$ S 'nin quasi idealidir,

(viii) Her $i \in \Omega$ için A_i S 'nin interior ideali ise $\bigcap_{i \in \Omega} A_i$ S 'nin interior idealidir.

Teorem 1.5.12: S bir yarıgrup, $\emptyset \neq \Omega$, $\{A_i \mid i \in \Omega\} \subseteq P(A)$ olsun. Bu durumda,

- (i) Her $i \in \Omega$ için A_i S 'nin sol ideali ise $\bigcup_{i \in \Omega} A_i$ S 'nin sol idealidir,
- (ii) Her $i \in \Omega$ için A_i S 'nin sağ ideali ise $\bigcup_{i \in \Omega} A_i$ S 'nin sağ idealidir,
- (iii) Her $i \in \Omega$ için A_i S 'nin iki yanlı ideali ise $\bigcup_{i \in \Omega} A_i$ S 'nin iki yanlı idealidir,
- (iv) Her $i \in \Omega$ için A_i S 'nin interior ideali ise $\bigcup_{i \in \Omega} A_i$ S 'nin interior idealidir.

Teorem 1.5.13: S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq A \subseteq S$, $\emptyset \neq B \subseteq S$ olsun. Bu durumda,

- (i) A sol ideal ise $A.B$ sol idealdir,
- (ii) B sağ ideal ise $A.B$ sağ idealdir,
- (iii) A sol ideal ve B sağ ideal ise $A.B$ iki yanlı idealdir,
- (iv) S regüler, A, B interior idealler ise $A.B$ interior idealdir,
- (v) A veya B genelleştirilmiş bi-idealler ise $A.B$ genelleştirilmiş bi-idealdir.

Teorem 1.5.14: S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq A \subseteq S$, $\emptyset \neq B \subseteq S$ olsun. Bu durumda,

- (i) $A \cap B \neq \emptyset$, A S 'nin sol ideali, B S 'nin sağ ideali ise $A \cap B$ S 'nin quasi idealidir,
- (ii) A ve B S 'nin quasi ideali ise $A.B$ S 'nin bi-idealidir,

1.6. TL – Altyarıgruplar ve İdealler

Bu bölümde S kümesi daima yarıgrup olarak alınacaktır. TL -altyarıgruplar ve TL – idealler ile ilgili tanım ve teoremler (Dheena& Mohanraaj, 2011; Chon, 2011; Kuroki, 1992; Ray, 1997; Sessa, 1984; Yu & Wang, 1994) kaynaklarından derlenmiştir.

Tanım 1.6.1: $\mu, \nu \in F(S, L)$ olmak üzere her $x \in S$ için,

$$(\mu \circ_T \nu)(x) = \bigvee_{x=a.b} \mu(a)T\nu(b)$$

ile tanımlanan $\mu \circ_T \nu$ L -bulanık alt kümesine μ ve ν 'nün T -çarpımı denir. $T = T_M$ için $\mu \circ_T \nu$ L -alt kümesine μ ve ν nün çarpımı denir ve $\mu.\nu$ olarak gösterilecektir.

Önerme 1.6.2: $\{\mu_i \mid i \in \Omega\} \subseteq F(S, L)$, $\mu, \nu, \theta \in F(S, L)$ olsun. Bu takdirde;

- (i) $\mu \subseteq \nu$ ise $\mu \circ_T \theta \subseteq \nu \circ_T \theta$,
- (ii) $\mu \subseteq \nu$ ise $\theta \circ_T \mu \subseteq \theta \circ_T \nu$,
- (iii) $[\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i] \circ_T \theta \subseteq \bigcap_{i \in \Omega} [\mu_i \circ_T \theta]$,

- (iv) $\theta \circ_T [\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i] \subseteq \bigcap_{i \in \Omega} [\theta \circ_T \mu_i]$,
- (v) $\bigcup_{i \in \Omega} [\theta \circ_T \mu_i] \subseteq [\theta \circ_T \bigcup_{i \in \Omega} \mu_i]$,
- (vi) $\bigcup_{i \in \Omega} [\mu_i \circ_T \theta] \subseteq [\bigcup_{i \in \Omega} \mu_i] \circ_T \theta$,
- (vii) T sonsuz $\vee$ –dağılımlı bir t -norm ise $(\theta \circ_T \mu) \circ_T \vartheta = \theta \circ_T (\mu \circ_T \vartheta)$,
- (viii) T sonsuz $\vee$ –dağılımlı bir t -norm ise $\bigcup_{i \in \Omega} [\theta \circ_T \mu_i] = \theta \circ_T [\bigcup_{i \in \Omega} \mu_i]$,
- (ix) T sonsuz $\vee$ –dağılımlı bir t -norm ise $\bigcup_{i \in \Omega} [\mu_i \circ_T \theta] = [\bigcup_{i \in \Omega} \mu_i] \circ_T \theta$,

Önerme 1.6.3: TL üzerinde bir t -norm olsun. Bu durumda,

- (i) T sonsuz $\vee$ –dağılımlı bir t -norm ise $(F(S, L, \circ_T))$ yarıgruptur,
- (ii) L sonsuz $\vee$ –dağılımlı bir kafes ise $(F(S, L), \cdot)$ yarıgruptur,
- (iii) $(F(S, L), T)$ yarıgruptur,
- (iv) $(F(S, L), \cup)$ yarıgruptur,
- (v) $(F(S, L), \cap)$ yarıgruptur.

Tanım 1.6.4: $\mu \in F(S, L)$ olsun. Bu takdirde,

μ 'ye, S 'nin TL -alt yarıgrubu denir: $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in S$ için $\mu(x)T\mu(y) \leq \mu(xy)$ T ve L 'nin özel seçimlerine göre gösterimleri ve isimlendirilmeleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 1 TL - altyarıgrubu çeşitlerinin gösterimleri ve isimlendirilmesi

T t –norm	$T = T_M$	T t –norm	$T = T_M$
L tam kafes	L tam kafes	$L = [0,1]$	$L = [0,1]$
$Sub(S, T, L)$	$Sub(S, L)$	$Sub(S, T)$	$Sub(S)$
S 'nin TL -alt yarıgrubu	S 'nin L -alt yarıgrubu	S 'nin bulanık T – alt yarıgrubu	S 'nin bulanık alt yarıgrubu

Teorem 1.6.5: $\mu \in F(S, L)$ olsun. Bu takdirde,

$$\mu \text{ } S \text{'nin } TL\text{-alt yarıgrubudur} \Leftrightarrow \mu \circ_T \mu \subseteq \mu.$$

Teorem 1.6.6: $\{\mu_i | i \in \Omega\} \subseteq F(S, L)$ olsun. Bu takdirde,

Her $i \in \Omega$ için μ_i S 'nin TL - alt yarıgrubu ise $\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i$ S 'nin TL -alt yarıgrubudur.

Teorem 1.6.7: $\nu \in F(S, L)$ ve TL -üzerinde bir t -norm olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler geçerlidir.

- (i) $\alpha \in L$ ve $v \in Sub(S, T, L)$ ve için $U(S, v, T, \alpha) \neq \emptyset$ ise $U(S, v, T, \alpha)$ S nin alt yarıgrubudur,
- (ii) $v \in F(S, T, L)$, $\forall \alpha \in L$ için $U(S, v, T, \alpha)$ S nin alt yarıgrubu ise $v \in Sub(S, T, L)$,
- (iii) $v \in Sub(S, T, L)$ ve $\forall \alpha \in D_T$ için $v_\alpha \neq \emptyset$ ise v_α S nin alt yarıgrubudur,
- (iv) Her $\alpha \in L$ için $\emptyset \neq v_\alpha$ S nin alt yarıgrubu ise $v \in Sub(S, T, L)$.

Sonuç 1.6.8: $v \in F(S, L)$ ise aşağıdaki önermeler denktir.

- (i) $v \in Sub(S, L)$ ve $\forall \alpha \in L$ için $v_\alpha \neq \emptyset$ ise v_α S nin alt yarıgrubudur,
- (ii) Her $\alpha \in L$ ve v_α S 'nin alt yarıgrubu ise $v \in Sub(S, L)$.

Önerme 1.6.9: $\emptyset \neq A \subseteq S$, $\alpha, \beta \in L$ ve $\alpha < \beta$ ise aşağıdaki özellikler sağlanır.

- (i) Eğer A, S nin altyarıgrubu ise $(\alpha, \beta)_A$, S nin TL - altyarıgrubudur,
- (ii) $\beta \in D_T$ ve $(\alpha, \beta)_A$, S nin TL - altyarıgrubu ise A, S nin altyarıgrubudur,
- (iii) $(\alpha, 1)_A$, S nin TL - altyarıgrubu $\Leftrightarrow A, S$ nin altyarıgrubudur,
- (iv) 1_A , S nin TL - altyarıgrubu $\Leftrightarrow A, S$ nin altyarıgrubudur.

Önerme 1.6.10: T_1, T_2 L kafesi üzerinde t -normlar ve $T_1 \leq T_2$ ise $Sub(S, T_2, L) \subseteq Sub(S, T_1, L)$ dir.

Teorem 1.6.11: $f: S \rightarrow S'$ yarıgrup homomorfisi olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler geçerlidir.

- (i) T sonsuz $\vee$ – dağılımlı t –norm ve $\mu \in Sub(S, T, L)$ ise $f(\mu) \in Sub(S', T, L)$,
- (ii) $v \in Sub(S', T, L)$ ise $f^{-1}(v) \in Sub(S, T, L)$.

Teorem 1.6.12: $\{S_i | i \in \Omega\}$ yarıgrupların bir ailesi ve $\forall i \in \Omega$ için $\mu_i \in Sub(S_i, T, L)$ ise $\prod_{i \in \Omega} \mu_i \in Sub(\prod_{i \in \Omega} S_i, T, L)$ dir.

Teorem 1.6.13: T L -üzerinde bir t -norm olsun. Eğer $\mu_1, \mu_2 \in Sub(S, T, L)$ ise $\mu_1 T \mu_2 \in Sub(S, T, L)$ dir.

Teorem 1.6.14: $v_1 \in Sub(S_1, T_1, L_1)$ ve $v_2 \in Sub(S_2, T_2, L_2)$ ise $v_1 \otimes v_2 \in Sub(S_1 \times S_2, T_1 \times T_2, L_1 \times L_2)$.

Tanım 1.6.15: S bir yarıgrup ve $\mu \in F(S, L)$ olsun. Bu takdirde;

- (i) μ 'ye, S 'nin sağ L - ideali denir : $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in S$ için $\mu(x) \leq \mu(xy)$,
- (ii) μ 'ye, S 'nin sol L - ideali denir : $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in S$ için $\mu(y) \leq \mu(xy)$,
- (iii) μ 'ye, S 'nin iki yanlı L - ideali denir : $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in S$ için $\mu(x) \vee \mu(y) \leq \mu(xy)$,
- (iv) μ 'ye, S 'nin genelleştirilmiş TL -bi ideali denir : $\Leftrightarrow$ Her $x, y, z \in S$ için $\mu(x)T\mu(z) \leq \mu(xyz)$,
- (v) μ 'ye, S 'nin TL -bi ideali denir : $\Leftrightarrow$ Her $x, y, z \in S$ için $\mu(x)T\mu(z) \leq \mu(xyz)$,
 $\mu(x)T\mu(y) \leq \mu(xy)$,
- (vi) μ 'ye, S 'nin L - interior ideali denir : $\Leftrightarrow$ Her $x, y, z \in S$ için $\mu(y) \leq \mu(xyz)$,
- (vii) μ 'ye, S 'nin L - quasi ideali denir : $\Leftrightarrow$ Her $x \in S$ için $(\bigvee_{x=a.b} \mu(a)) \wedge (\bigvee_{x=c.d} \mu(d)) \leq \mu(x)$.

Tablo 2 Bir yarıgrupun L -sol, L -sağ, L -ideallerinin kümelerinin gösterimleri ve isimlendirilmesi

L tam kafes	$L = [0,1]$
$LIdeal(S, L)$ S 'nin L - sol ideali	$LIdeal(S)$ S 'nin bulanık sol ideali
$RIdeal(S, L)$ S 'nin L - sağ ideali	$RIdeal(S, v, T, L)$ S 'nin bulanık sağ ideali
$Ideal(S, L)$ S 'nin L -(iki yanlı) ideali	$Ideal(S, v, T)$ S 'nin bulanık (iki yanlı) ideali

Tablo 3 TL – Bi İdeal, L – Quasi İdeal ve L – Interior İdeallerinin kümelerinin gösterimleri ve isimlendirilmesi.

T L üzerinde t –norm L tam kafes	$T = T_M$	$L = [0,1]$	$T = T_M, L = [0,1]$
$GBIdeal(S, T, L)$ S' 'nin genelleştirilmiş TL – bi deali	$GBIdeal(S, L)$ S' 'nin genelleştirilmiş L – bi deali	$GBIdeal(S, T)$ S' 'nin genelleştirilmiş bulanık T – bi deali	$GBIdeal(S)$ S' 'nin genelleştirilmiş bulanık bi deali
$BIdeal(S, T, L)$ S' 'nin TL – bi deali	$BIdeal(S, L)$ S' 'nin L - bideali	$BIdeal(S, T)$ S' 'nin bulanık T - bideali	$BIdeal(S)$ S nin bulanık bi deali
	$QIdeal(S, L)$ S' 'nin L – quasi ideali	$QIdeal(S)$ S' 'nin bulanık quasi ideali	
	$Iideal(S, L)$ S' 'nin L – interior ideali	$Iideal(S)$ S' 'nin bulanık interior ideali	

Teorem 1.6.15: S bir yarıgrup , $\mu \in F(S, L)$ ve T sonsuz $\vee$ – dağılımlı t –norm olsun. Bu takdirde;

- (i) μ S' 'nin sağ L idealidir $\Leftrightarrow \mu \circ_T 1_S \subseteq \mu$,
- (ii) μ S' 'nin sol L - idealidir $\Leftrightarrow 1_S \circ_T \mu \subseteq \mu$,
- (iii) μ S' 'nin iki yanlı L – idealidir $\Leftrightarrow \mu \circ_T 1_S \subseteq \mu$ ve $1_S \circ_T \mu \subseteq \mu$,
- (iv) μ S' 'nin genelleştirilmiş TL -bi idealidir $\Leftrightarrow \mu \circ_T 1_S \circ_T \mu \subseteq \mu$,
- (v) μ S' 'nin TL -bi idealidir $\Leftrightarrow \mu \circ_T 1_S \circ_T \mu \subseteq \mu$ ve $\mu \circ_T \mu \subseteq \mu$,
- (vi) μ S' 'nin L - interior idealidir $\Leftrightarrow 1_S \circ_T \mu \circ_T 1_S \subseteq \mu$,
- (vii) μ S' 'nin L - quasi idealidir $\Leftrightarrow \mu \circ_T 1_S \cap 1_S \circ_T \mu \subseteq \mu$.

Önerme 1.6.16: $\emptyset \neq A \subseteq S$, $\alpha, \beta \in L$ ve $\alpha < \beta$ ise aşağıdaki özellikler sağlanır.

- (i) A, S nin sol idealidir $\Leftrightarrow (\alpha, \beta)_A$, S' 'nin sol L - idealidir,
- (ii) A, S nin sağ idealidir $\Leftrightarrow (\alpha, \beta)_A$, S' 'nin sağ L – idealidir,
- (iii) A, S nin iki yanlı idealidir $\Leftrightarrow (\alpha, \beta)_A$, S' 'nin iki yanlı L - idealidir,
- (iv) A, S nin sol idealidir $\Leftrightarrow \alpha_A$ S' 'nin L -sol idealidir,

(v) A, S nin sağ idealidir $\Leftrightarrow \alpha_A S'$ nin L –sağ idealidir,

(vi) A, S nin iki yanlı idealidir $\Leftrightarrow \alpha_A S'$ nin L -iki yanlı idealidir.

Teorem 1.6.17: S bir yarıgrup ve $\{\mu_i | i \in \Omega\} \subseteq F(S, L)$ olsun. Bu takdirde;

(i) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i S'$ nin sol L - ideali ise $\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i S'$ nin sol L -idealidir,

(ii) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i S'$ nin sağ L - ideali ise $\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i S'$ nin sağ L - idealidir,

(iii) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i S'$ nin iki yanlı L - ideali ise $\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i S'$ nin iki yanlı L - idealidir,

(iv) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i S'$ nin genelleştirilmiş TL -bi ideali ise $\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i S'$ nin genelleştirilmiş TL -bi idealidir ,

(v) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i S'$ nin TL -bi ideali ise $\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i S'$ nin TL -bi idealidir,

(vi) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i S'$ nin L -interior ideali ise $\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i S'$ nin L -interior idealidir,

(vii) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i S'$ nin L - quasi ideali ise $\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i S'$ nin L - quasi idealidir.

İspat:

(i) Her $i \in \Lambda$ için $\mu_i S'$ nin sol ideali olduğundan,

$$\begin{aligned} (\bigcap_{i \in \Lambda} \mu_i(y)) &= \bigwedge_{i \in \Lambda} \mu_i(y), \\ &\leq \bigwedge_{i \in \Lambda} \mu_i(xy), \\ &= \bigcap_{i \in \Lambda} \mu_i(xy) \end{aligned}$$

Böylece $\bigcap \mu_i, S$ nün L –sol idealidir.

(ii)(i)'ye benzer şekilde ispat edilir.

(iii)(i) ve (ii) den elde edilir.

(iv) Her $x, y, z \in S$ için

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in \Lambda} \mu_i(x) T \bigcap_{i \in \Lambda} \mu_i(z) &= \bigwedge_{i \in \Lambda} \mu_i(x) T \bigwedge_{i \in \Lambda} \mu_i(z), \\ &\leq \bigwedge_{i \in \Lambda} \mu_i(x) T \mu_i(y), \\ &\leq \bigwedge_{i \in \Lambda} \mu_i(xyz), \\ &= \bigcap_{i \in \Lambda} \mu_i(xyz), \end{aligned}$$

Dolayısıyla, $\bigcap \mu_i, S'$ nin genelleştirilmiş TL – bi idealidir.

(v) Teorem 1.6.6 ve (iv) şikkından sonuç elde edilir.

(vi) Her $x, y, z \in S$ için,

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in \Lambda} \mu_i(y) &= \bigwedge_{i \in \Lambda} \mu_i(y), \\ &\leq \bigwedge_{i \in \Lambda} \mu_i(xyz), \end{aligned}$$

$$= \bigcap_{i \in \Lambda} \mu_i(xyz)$$

Dolayısıyla, $\bigcap \mu_i$, S 'nin L -interior idealidir.

(vii) Her $x \in S$ için,

$$\begin{aligned} (V_{x=ab}(\bigwedge_{i \in \Lambda} \mu_i(a)) \wedge (V_{x=cd}(\bigwedge_{i \in \Lambda} \mu_i(d))) &\leq (V_{x=ab}(\bigwedge_{i \in \Lambda} \mu_i(a)) \wedge (V_{x=cd}(\bigwedge_{i \in \Lambda} \mu_i(d))) \\ &\leq (\bigwedge_{i \in \Lambda} V_{x=ab} \mu_i(a)) \wedge (\bigwedge_{i \in \Lambda} V_{x=cd} \mu_i(d)) \\ &\leq \bigwedge_{i \in \Lambda} \mu_i(x). \end{aligned}$$

olup, $\bigcap \mu_i$ S 'nin L -quasi idealidir.

Teorem 1.6.18: S bir yarıgrup ve $\{\mu_i | i \in \Omega\} \subseteq F(S, L)$ olsun. Bu takdirde,

- (i) Her $i \in \Omega$ için μ_i S 'nin sağ L -ideali ise $\bigcup_{i \in \Omega} \mu_i$ S 'nin sağ L -ideali idealidir,
- (ii) Her $i \in \Omega$ için μ_i S 'nin sol L -ideali ise $\bigcup_{i \in \Omega} \mu_i$ S 'nin sol L -ideali idealidir,
- (iii) Her $i \in \Omega$ için μ_i S 'nin iki yanlı L -ideali ise $\bigcup_{i \in \Omega} \mu_i$ S 'nin iki yanlı L -ideali idealidir,
- (iv) Her $i \in \Omega$ için μ_i S 'nin L -interior idealidir ise $\bigcup_{i \in \Omega} \mu_i$ S 'nin L -interior idealidir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. TL – Altyarıgrubun TL –Sol, TL – Sağ ve TL –İki Yanlı İdealleri

Bu bölümde TL – altyarıgrubun TL – sol ideal, TL – sağ ideal ve TL – iki yanlı ideal tanımları verilecek ve bu tip ideallerin çeşitli özellikleri verilecektir.

Tanım 2.1.1: $v \in Sub(S, T, L)$ ve $\mu \in F(S, v, L)$ olsun.

- (i) μ ye v nün TL –sol ideali denir $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in S$ için $v(x)T\mu(y) \leq \mu(xy)$,
- (ii) μ ye v nün TL –sağ ideali denir $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in S$ için $\mu(x)Tv(y) \leq \mu(xy)$,
- (iii) μ ye v nün TL – iki yanlı ideali denir $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in S$ için $v(x)T\mu(y) \vee \mu(x)Tv(y) \leq \mu(xy)$.

Tablo 4 TL –altyarıgrubunun TL –sol(sağ, iki yanlı) ideallerinin ideallerinin gösterimleri ve isimlendirilmesi

T t - norm L tam kafes	$T = T_M$ L tam kafes	T t - norm $L = [0,1]$	$T = T_M$ $L = [0,1]$
$LIdeal(S, v, T, L)$ v nün TL - sol ideali	$LIdeal(S, v, L)$ v nün L - sol ideali	$LIdeal(S, v, T)$ v nün bulanık T - sol ideali	$LIdeal(S, v)$ v nün bulanık sol ideali
$RIdeal(S, v, T, L)$ v nün TL - sağ ideali	$RIdeal(S, v, L)$ v nün L - sağ ideali	$RIdeal(S, v, T, L)$ v nün bulanık T - sağ ideali	$RIdeal(S, v)$ v nün bulanık sağ ideali
$Ideal(S, v, T, L)$ v nün TL iki yanlı ideali	$Ideal(S, v, L)$ v nün L iki yanlı ideali	$Ideal(S, v, T)$ v nün bulanık T - iki yanlı ideali	$Ideal(S, v)$ v nün bulanık iki yanlı ideali

T t -normun özellikleri ve Tanım 2.1.1 ile aşağıdaki önerme kolaylıkla elde edilir.

Önerme 2.1.2: T L -üzerinde bir t –norm ise aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

- (i) $LIdeal(S, 1_S, T, L) = LIdeal(S, L)$,
- (ii) $RIdeal(S, 1_S, T, L) = RIdeal(S, L)$,

(iii) $Ideal(S, 1_S, T, L) = Ideal(S, L)$.

Örnek 2.1.3: L tam kafes, T, L üzerinde herhangi bir t –norm ve $S = \{0,1\}$ kümesi yarıgrup yapacak şekilde dört farklı ikili işlem aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$\boxtimes$	0	1	$\boxplus$	0	1	$\boxdot$	0	1	$\odot$	0	1
0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1

Buna göre $v \in Sub(S, T, L)$ için $Sub(S, T, L)$, $LIdeal(S, L)$, $RIdeal(S, L)$, $Ideal(S, L)$, $LIdeal(S, v, T, L)$, $RIdeal(S, v, T, L)$, $Ideal(S, v, T, L)$ kümeleri her bir ikili işlem için aşağıdaki şekildedir:

(i) " $\boxtimes$ " ikili işlemi için

- $Sub(S, T, L) = F(S, L)$
- $LIdeal(S, L) = RIdeal(S, L) = Ideal(S, L) = \{\mu \in F(S, L) \mid \mu(1) \leq \mu(0)\}$
- $LIdeal(S, v, T, L) = RIdeal(S, v, T, L) = Ideal(S, v, T, L) = \{\mu \in F(S, v, T, L) \mid \mu(1)Tv(0) \leq \mu(0)\}$

(ii) " $\boxplus$ " ikili işlemi için,

- $Sub(S, T, L) = \{\mu \in F(S, L) \mid \mu(1)T\mu(1) \leq \mu(0)\}$
- $LIdeal(S, L) = RIdeal(S, L) = Ideal(S, L) = \{\mu \in F(S, L) \mid \mu(1) = \mu(0)\}$
- $LIdeal(S, v, T, L) = RIdeal(S, v, T, L) = Ideal(S, v, T, L) = \{\mu \in F(S, v, T, L) \mid \mu(1)Tv(1) \leq \mu(0), \mu(0)Tv(1) \leq \mu(1)\}$

(iii) " $\boxdot$ " ikili işlemi için,

- $Sub(S, T, L) = LIdeal(S, L) = F(S, L)$
- $RIdeal(S, L) = Ideal(S, L) = \{\mu \in F(S, L) \mid \mu(1) = \mu(0)\}$
- $LIdeal(S, v, T, L) = F(S, v, T, L)$
- $RIdeal(S, v, T, L) = Ideal(S, v, T, L) = \{\mu \in F(S, v, T, L) \mid \mu(0)Tv(1) \leq \mu(1), \mu(1)Tv(0) \leq \mu(0)\}$

(iv) " $\odot$ " ikili işlemi için,

- $Sub(S, T, L) = RIdeal(S, L) = F(S, L)$
- $LIdeal(S, L) = Ideal(S, L) = \{\mu \in F(S, L) \mid \mu(1) = \mu(0)\}$
- $RIdeal(S, v, T, L) = F(S, v, T, L)$

$$\bullet LIdeal(S, v, T, L) = Ideal(S, v, T, L) = \{\mu \in F(S, v, T, L) \mid \mu(0)Tv(1) \leq \mu(1), \mu(1)Tv(0) \leq \mu(0)\}$$

Teorem 2.1.4: $v \in Sub(S, T, L)$ ve $\mu \in F(S, v, L)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki denklilikler geçerlidir.

- (i) μ, v 'nün TL -sol idealidir $\Leftrightarrow v \circ_T \mu \subseteq \mu$,
- (ii) μ, v 'nün TL -sağ idealidir $\Leftrightarrow \mu \circ_T v \subseteq \mu$,
- (iii) μ, v 'nün TL -iki yanlı idealidir $\Leftrightarrow v \circ_T \mu \cup \mu \circ_T v \subseteq \mu$.

İspat:

(i) μ, v nün TL -sol ideali olsun. Hipotezden her $x \in S$ için,

$$v \circ_T \mu(x) = \bigvee_{x=ab} v(a)T\mu(b) \leq \bigvee_{x=ab} \mu(ab) = \mu(x)$$

Böylece $v \circ_T \mu \subseteq \mu$ dir.

Tersine her $x \in S$ için,

$$v(x)T\mu(y) \leq \bigvee_{xy=ab} v(a)T\mu(b) = v \circ_T \mu(xy) \leq \mu(xy)$$

Dolayısıyla, μ, v nün TL -sol idealidir.

(ii)(i)'ye benzer şekilde ispat edilir.

(iii)(i) ve (ii) den elde edilir.

Önerme 2.1.5: $v \in Sub(S, T, L)$ ise aşağıdaki özellikler sağlanır.

- (i) $LIdeal(S, v, T, L) \subseteq Sub(S, T, L)$,
- (ii) $RIdeal(S, v, T, L) \subseteq Sub(S, T, L)$,
- (iii) $LIdeal(S, v, T, L) \cap RIdeal(S, v, T, L) = Ideal(S, v, T, L)$.

İspat:

(i) $\mu \in LIdeal(S, v, T, L)$ için

$$\mu(x)T\mu(y) \leq v(x)T\mu(y) \leq \mu(xy).$$

Dolayısıyla, $\mu \in Sub(S, T, L)$ dir. Böylece $LIdeal(S, v, T, L) \subseteq Sub(S, T, L)$ dır.

(ii)(i)'ye benzer şekilde yapılır.

(iii) Tanımların açık sonucudur.

Önerme 2.1.6: $v \in Sub(S, T, L)$, T_1, T_2 L kafesi üzerinde t-normlar ve $T_1 \leq T_2$ ise aşağıdaki özellikler sağlanır.

- (i) $LIdeal(S, v, T_2, L) \subseteq LIdeal(S, v, T_1, L)$,
- (ii) $RIdeal(S, v, T_2, L) \subseteq RIdeal(S, v, T_1, L)$,
- (iii) $Ideal(S, v, T_2, L) \subseteq Ideal(S, v, T_1, L)$.

İspat:

(i) $\mu \in LIdeal(S, v, T_2, L)$ ve $x, y \in S$ için,

$$v(x)T_1\mu(y) \leq v(x)T_2\mu(y) \leq \mu(xy)$$

Böylece, $\mu \in LIdeal(S, v, T_1, L)$.

(ii)(i)'ye benzer şekilde ispat edilir.

(iii)(i) ve (ii) den elde edilir.

Önerme 2.1.7: $v_1, v_2 \in Sub(S, T, L)$ ve $v_1 \subseteq v_2$ ise aşağıdaki özellikler sağlanır.

- (i) $LIdeal(S, v_2, T, L) \cap F(S, v_1, L) \subseteq LIdeal(S, v_1, T, L)$,
- (ii) $RIdeal(S, v_2, T, L) \cap F(S, v_1, L) \subseteq RIdeal(S, v_1, T, L)$,
- (iii) $Ideal(S, v_2, T, L) \cap F(S, v_1, L) \subseteq Ideal(S, v_1, T, L)$.

İspat:

(i) $\mu \in LIdeal(S, v_2, T, L) \cap F(S, v_1, L)$ ve $x, y \in S$ için, T t -normun monotonluk özelliğinden,

$$v_1(x)T\mu(y) \leq v_2(x)T\mu(y) \leq \mu(xy)$$

olup, $\mu \in LIdeal(S, v_1, T, L)$ dır.

(ii)(i)'ye benzer şekilde ispat edilir.

(iii)(i) ve (ii) den elde edilir.

Teorem 2.1.8: $v \in Sub(S, T, L)$ ve $\mu \in F(S, v, L)$ için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

- (i) $\mu \in LIdeal(S, v, T, L)$ ve $\alpha \in L$ için $U(S, \mu, T, \alpha) \neq \emptyset$ ise $U(S, \mu, T, \alpha) U(S, v, T, \alpha)'$ 'nin sol idealidir,
- (ii) $\mu \in RIdeal(S, v, T, L)$ ve $\alpha \in L$ için $U(S, \mu, T, \alpha) \neq \emptyset$ ise $U(S, \mu, T, \alpha) U(S, v, T, \alpha)'$ 'nin sağ idealidir,
- (iii) $\mu \in Ideal(S, v, T, L)$ ve $\alpha \in L$ için $U(S, \mu, T, \alpha) \neq \emptyset$ ise $U(S, \mu, T, \alpha) U(S, v, T, \alpha)'$ 'nin iki yanlı idealidir.

İspat:

(i) Teorem 1.4.4 ile $U(S, \mu, T, \alpha) \subseteq U(S, v, T, \alpha)$ dir. Teorem 1.6.7. ile $U(S, v, T, \alpha)$ S 'nin alt yarıgrupudur. Diğer yandan $x \in U(S, v, T, \alpha)$, $y \in U(S, \mu, T, \alpha)$ için,

$$\begin{aligned}\alpha &\geq \mu(xy)T\alpha \geq (v(x)T\mu(y))T\alpha \\ &= v(x)T(\mu(y)T\alpha) \\ &= v(x)T\alpha = \alpha\end{aligned}$$

Böylece $xy \in U(S, \mu, T, \alpha)$ elde edilir. Buradan $U(S, \mu, T, \alpha)$ $U(S, v, T, \alpha)$ 'nin sol idealidir.

(ii) i)'ye benzer şekilde yapılır.

(iii) i) ve ii) den elde edilir.

Teorem 2.1.9: $v \in Sub(S, T, L)$, $\mu \in F(S, v, L)$ ve $Im\mu \cup Imv \subseteq D_T$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler geçerlidir.

(i) Her $\alpha \in L$ için $U(S, \mu, T, \alpha)$, $U(S, v, T, \alpha)$ 'nin sol ideali ise $\mu \in LIdeal(S, v, T, L)$,

(ii) Her $\alpha \in L$ için $U(S, \mu, T, \alpha)$, $U(S, v, T, \alpha)$ 'nin sağ ideali ise $\mu \in RIdeal(S, v, T, L)$,

(iii) Her $\alpha \in L$ için $U(S, \mu, T, \alpha)$, $U(S, v, T, \alpha)$ 'nin iki yanlı ideali ise $\mu \in Ideal(S, v, T, L)$.

İspat:

(i) $x, y \in S$, $\alpha = v(x)T\mu(y)$ alınsın. Buradan

$$\begin{aligned}v(x)T\alpha &= v(x)T(v(x)T\mu(y)) \\ &= v(x)T\mu(y) = \alpha\end{aligned}$$

Böylece $x \in U(S, v, T, \alpha)$ dir.

$$\begin{aligned}\mu(y)T\alpha &= \mu(y)T(v(x)T\mu(y)) \\ &= v(x)T\mu(y)T\mu(y) \\ &= v(x)T\mu(y) = \alpha\end{aligned}$$

Böylece $y \in U(S, \mu, T, \alpha)$ elde edilir. Hipotezden, $xy \in U(S, \mu, T, \alpha)$. Buradan

$$v(x)T\mu(y) = \alpha = \mu(xy)T\alpha \leq \mu(xy).$$

Dolayısıyla μ, v nün TL -sol idealidir.

(ii) i)'ye benzer şekilde yapılır.

(iii) i) ve ii) den elde edilir.

Teorem 2.1.10: $v \in Sub(S, T, L)$, $\mu \in F(S, v, L)$ ve T L -üzerinde bir t -norm olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler geçerlidir.

- (i) $\mu \in LIdeal(S, v, T, L)$ ve $\forall \alpha \in D_T$ için $\mu_\alpha \neq \emptyset$ ise $\mu_\alpha v_\alpha$ 'nin sol idealidir,
- (ii) $\mu \in RIdeal(S, v, T, L)$ ve $\forall \alpha \in D_T$ için $\mu_\alpha \neq \emptyset$ ise $\mu_\alpha v_\alpha$ 'nin sağ idealidir,
- (iii) $\mu \in Ideal(S, v, T, L)$ ve $\forall \alpha \in D_T$ için $\mu_\alpha \neq \emptyset$ ise $\mu_\alpha v_\alpha$ 'nin iki yanlı idealidir.

İspat:

- (i) Teorem 1.4.4 ii) şikkından dolayı $\mu_\alpha \subseteq v_\alpha$ dir. $x \in v_\alpha, y \in \mu_\alpha$ alınsın. $\alpha \in D_T, \alpha \leq \mu(y)$ ve $\alpha \leq v(x)$ olduğundan,

$$\alpha = \alpha T \alpha \leq v(x) T \mu(y) \leq \mu(xy)$$

olup $xy \in \mu_\alpha$ dir. $\mu_\alpha v_\alpha$ 'nin sol idealidir.

(ii) i)'ye benzer şekilde yapılır.

(iii) i) ve ii) den elde edilir.

Sonuç 2.1.11: $v \in Sub(S, L)$, $\mu \in F(S, v, L)$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

- (i) Eğer $\forall \alpha \in L, \mu_\alpha \neq \emptyset$ için μ_α, v_α 'nin sol ideali $\Leftrightarrow \mu \in LIdeal(S, v, L)$,
- (ii) Eğer $\forall \alpha \in L, \mu_\alpha \neq \emptyset$ için μ_α, v_α 'nin sağ ideali $\Leftrightarrow \mu \in RIdeal(S, v, L)$,
- (iii) Eğer $\forall \alpha \in L, \mu_\alpha \neq \emptyset$ için μ_α, v_α 'nin iki yanlı ideali $\Leftrightarrow \mu \in Ideal(S, v, L)$.

Teorem 2.1.12: $v \in Sub(S, T, L)$ ve $\{\mu_i : i \in \Lambda\} \subseteq F(S, v, L)$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir.

- (i) Her $i \in \Lambda$ için $\mu_i \in LIdeal(S, v, T, L)$ ise $\bigcap_{i \in \Lambda} \mu_i \in LIdeal(S, v, T, L)$,
- (ii) Her $i \in \Lambda$ için $\mu_i \in RIdeal(S, v, T, L)$ ise $\bigcap_{i \in \Lambda} \mu_i \in RIdeal(S, v, T, L)$,
- (iii) Her $i \in \Lambda$ için $\mu_i \in Ideal(S, v, T, L)$ ise $\bigcap_{i \in \Lambda} \mu_i \in Ideal(S, v, T, L)$.

İspat:

- (i) Her $i \in \Lambda$ için $\mu_i \in LIdeal(S, v, T, L)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} v(x) T (\bigcap_{i \in \Lambda} \mu_i(y)) &= v(x) T \bigwedge_{i \in \Lambda} \mu_i(y) \\ &\leq \bigwedge_{i \in \Lambda} v(x) T \mu_i(y) \\ &\leq \bigwedge_{i \in \Lambda} \mu_i(xy) \\ &= \bigcap_{i \in \Lambda} \mu_i(xy) \end{aligned}$$

Böylece $\bigcap \mu_i, v$ nün TL –sol idealidir.

(ii)i)'ye benzer şekilde yapılır.

(iii)i) ve ii) den elde edilir.

Teorem 1.2.3 ve Teorem 2.1.12 ‘den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.1.13: $v \in Sub(S, T, L)$ ise aşağıdakiler geçerlidir.

(i)($Lideal(S, v, T, L), \subseteq$) tam kafestir,

(ii)($Rideal(S, v, T, L), \subseteq$) tam kafestir,

(iii)($Ideal(S, v, T, L), \subseteq$) tam kafestir.

Teorem 2.1.14: $v \in Sub(S, T, L)$, $\{\mu_i : i \in \Lambda\} \subseteq F(S, v, L)$ ve T sonsuz V - dağılımlı bir t -norm olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir.

(i)Her $i \in \Lambda$ için $\mu_i \in Lideal(S, v, T, L)$ ise $\bigcup_{i \in \Lambda} \mu_i \in Lideal(S, v, T, L)$,

(ii)Her $i \in \Lambda$ için $\mu_i \in Rideal(S, v, T, L)$ ise $\bigcup_{i \in \Lambda} \mu_i \in Rideal(S, v, T, L)$,

(iii)Her $i \in \Lambda$ için $\mu_i \in Ideal(S, v, T, L)$ ise $\bigcup_{i \in \Lambda} \mu_i \in Ideal(S, v, T, L)$.

İspat:

(i)Her $i \in \Lambda$ için $\mu_i \in Lideal(S, v, T, L)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} v(x)T(\bigcup_{i \in \Lambda} \mu_i(y)) &= v(x)T[\bigvee_{i \in \Lambda} \mu_i(y)] \\ &= \bigvee_{i \in \Lambda} v(x)T\mu_i(y) \quad (T \text{ sonsuz } V\text{- dağılımlı}) \\ &\leq \bigvee_{i \in \Lambda} \mu_i(xy) \\ &= \bigcup_{i \in \Lambda} \mu_i(xy). \end{aligned}$$

Böylece $\bigcup_{i \in \Lambda} \mu_i v$ nün TL –sol idealidir.

(ii)i)'ye benzer şekilde yapılır.

(iii)i) ve ii) den elde edilir.

Sonsuz V - dağılımlı olmayan t -normlar için yukarıdaki teorem genel olarak doğru olmayabilir. Buna aşağıdaki şekilde örnek verilebilir.

Örnek 2.1.15: $L = \{0, \alpha, \beta, \gamma, 1\}$ kümesi üzerindeki kafes yapısı Şekil 1 (b)’ deki gibi ve $(S = \{0, 1\}, .)$ yarıgrubu için $v, \mu, \phi \in F(S, L)$ elemanları aşağıdaki şekilde tanımlansın.

Bu durumda $(S = \{0, 1\}, .)$ yarıgrubu için aşağıdakiler geçerlidir.

(i)Her T t -normu için $Sub(S, T, L) = F(S, L)$ dır.

(ii) Her $v \in Sub(S, T, L)$ için $Ideal(S, v, T, L) = \{\mu \in F(S, v, T, L) \mid \mu(1)Tv(0) \leq \mu(0)\}$ dir.

(iii)

x	0	1
$v(x)$	γ	1
$\mu(x)$	α	γ
$\phi(x)$	α	β

Buna göre $v \in Sub(S, T_D, L)$ ve $\mu, \phi \in Ideal(S, v, T_D, L)$ dir. Ancak $\mu \cup \phi$ v 'nün $T_D L$ –ideali değildir. Çünkü $(\mu \cup \phi)(1)Tv(0) = \gamma \not\leq (\mu \cup \phi)(0) = \alpha$ dir.

Sonuç 2.1.16: T sonsuz V - dağılımlı bir t -norm olsun.

- (i) L dağılımlı kafes ise $(LIdeal(S, v, T, L), \cap, \cup)$ dağılımlı kafestir,
- (ii) L modüler kafes ise $(LIdeal(S, v, T, L), \cap, \cup)$ modüler kafestir,
- (iii) L sonsuz dağılımlı kafes ise $(LIdeal(S, v, T, L), \cap, \cup)$ ise sonsuz dağılımlı kafestir.

Sonuç 2.1.17: T sonsuz V - dağılımlı bir t -norm olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir.

- (i) $(LIdeal(S, v, T, L) \cap F(S, T, L), \cap, \cup)$ tam kafestir,
- (ii) $(RIdeal(S, v, T, L) \cap F(S, T, L), \cap, \cup)$ tam kafestir,
- (iii) $(Ideal(S, v, T, L) \cap F(S, T, L), \cap, \cup)$ tam kafestir.

Önerme 2.1.18: $v \in Sub(S, T, L)$, $Imv \subseteq D_T$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

- (i) $\mu_1, \mu_2 \in LIdeal(S, v, T, L)$ ise $\mu_1 T \mu_2 \in LIdeal(S, v, T, L)$,
- (ii) $\mu_1, \mu_2 \in RIdeal(S, v, T, L)$ ise $\mu_1 T \mu_2 \in RIdeal(S, v, T, L)$,
- (iii) $\mu_1, \mu_2 \in Ideal(S, v, T, L)$ ise $\mu_1 T \mu_2 \in Ideal(S, v, T, L)$.

İspat:

(i) $x, y \in S$ için,

$$\begin{aligned}
 v(x)T(\mu_1 T \mu_2)(y) &= v(x)Tv(x)T\mu_1(y)T\mu_2(y) \\
 &= v(x)T\mu_1(y)Tv(x)T\mu_2(y) \\
 &\leq \mu_1(xy)T\mu_2(xy) \\
 &= \mu_1 T \mu_2(xy)
 \end{aligned}$$

Böylece $\mu_1 T \mu_2 \in LIdeal(S, v, T, L)$

(ii)(i)'ye benzer şekilde ispat edilir.

(iii)(i) ve (ii) den elde edilir.

Önerme 2.1.19: $v \in Sub(S, T, L)$ ve $\mu \in F(S, L)$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

- (i) μ S nin L -sol ideali ise $\mu T v, v'$ nün TL -sol idealidir.
- (ii) μ S nin L -sağ ideali ise $\mu T v, v'$ nün TL -sağ idealidir.
- (iii) μ S nin L -iki yanlı ideali ise $\mu T v, v'$ nün TL -iki yanlı idealidir.

İspat:

(i) Açık olarak $\mu T v \subseteq v$ dır. $x, y \in S$ için,

$$\begin{aligned} v(x)T(\mu T v)(y) &= v(x)T\mu(y)Tv(y) \\ &= v(x)Tv(y)T\mu(y) \\ &\leq v(xy)T\mu(xy) = (\mu T v)(xy) \end{aligned}$$

Dolayısıyla $\mu T v, v'$ nün TL -sol idealidir.

(ii)(i)'ye benzer şekilde ispat edilir.

(iii)(i) ve (ii) den elde edilir.

Önerme 2.1.20: $v \in Sub(S, T, L)$ ve $\mu \in F(S, v, L)$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

- (i) μ S nin L -sol ideali ise μ, v' nün TL -sol idealidir,
- (ii) μ S nin L -sağ ideali ise μ, v' nün TL -sağ idealidir,
- (iii) μ S nin L -iki yanlı ideali ise μ, v' nün TL -iki yanlı idealidir.

İspat:

(i) Açık olarak $\mu \in F(S, v, L)$ olduğundan $\mu \subseteq v$ dır. $x, y \in S$ için,

$$v(x)T\mu(y) \leq \mu(y) \leq \mu(xy)$$

Dolayısıyla, μ, v' nün TL -sol idealidir.

(ii)(i)'ye benzer şekilde ispat edilir.

(iii)(i) ve (ii) den elde edilir.

Önerme 2.1.21: $v \in Sub(S, T, L)$ ve $\mu, \theta \in F(S, v, L)$ ve T sonsuz v –dağılımlı bir t -norm olsun. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır.

- (i) $\mu \in LIdeal(S, v, T, L)$ ise $\mu \circ_T \theta \in LIdeal(S, v, T, L)$,
- (ii) $\theta \in RIdeal(S, v, T, L)$ ise $\mu \circ_T \theta \in RIdeal(S, v, T, L)$,
- (iii) $\mu \in LIdeal(S, v, T, L)$, $\theta \in RIdeal(S, v, T, L)$ ise $\mu \circ_T \theta \in Ideal(S, v, T, L)$.

İspat:

(i) $\mu, \theta \in F(S, v, L)$ olduğundan $\mu \circ_T \theta \in F(S, v, L)$ olduğu açıktır. Önerme 1.6.2 (viii) ve Teorem 2.1.4 (i) den

$$v \circ_T (\mu \circ_T \theta) = v \circ_T \mu \circ_T \theta \subseteq \mu \circ_T \theta$$

olup $\mu \circ_T \theta \in LIdeal(S, v, T, L)$.

(ii)(i)'ye benzer şekilde ispat edilir.

(iii)(i) ve (ii) den elde edilir.

Teorem 2.1.22 : S_1, S_2 yarıgruplar, $v_1 \in Sub(S_1, T, L)$, $v_2 \in Sub(S_2, T, L)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

- (i) $\mu_i \in LIdeal(S_i, v_i, T, L)$, $i = 1, 2$ ise $\mu_1 x_T \mu_2 \in LIdeal(S_1 x S_2, v_1 x_T v_2, T, L)$,
- (ii) $\mu_i \in RIdeal(S_i, v_i, T, L)$, $i = 1, 2$ ise $\mu_1 x_T \mu_2 \in RIdeal(S_1 x S_2, v_1 x_T v_2, T, L)$,
- (iii) $\mu_i \in Ideal(S_i, v_i, T, L)$, $i = 1, 2$ ise $\mu_1 x_T \mu_2 \in Ideal(S_1 x S_2, v_1 x_T v_2, T, L)$.

İspat:

(i) Açık olarak $\mu_1 x_T \mu_2 \subseteq v_1 x_T v_2$ dır.

$x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in S_1 x S_2$ için

$$\begin{aligned} v(y)T(\mu_1 x_T \mu_2)(x) &= v_1(y_1)Tv_2(y_2)T\mu_1(x_1)T\mu_2(x_2) \\ &= v_1(y_1)T\mu_1(x_1)Tv_2(y_2)T\mu_2(x_2) \\ &\leq \mu_1(y_1 x_1)T\mu_2(y_2 x_2) \\ &= \mu_1 x_T \mu_2(y_1 x_1, y_2 x_2) \\ &= \mu_1 x_T x \mu_2(yx) \end{aligned}$$

Böylece olarak $\mu_1 x_T \mu_2 \in LIdeal(S_1 x S_2, v, T, L)$ dır.

(ii)i'ye benzer şekilde ispat edilir.

(iii) i) ve ii) den elde edilir.

Teorem 2.1.23: S_1, S_2 yarıgruplar, $v_1 \in Sub(S_1, T_1, L_1)$, $v_2 \in Sub(S_2, T_2, L_2)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

- (i) $\mu_i \in LIdeal(S_i, v_i, T, L_i)$, $i = 1, 2$ ise $\mu_1 \otimes \mu_2 \in LIdeal(S_1 x S_2, v_1 \otimes v_2, T_1 \times T_2, L_1 \times L_2)$,
- (ii) $\mu_i \in RIdeal(S_i, v_i, T, L_i)$, $i = 1, 2$ ise $\mu_1 \otimes \mu_2 \in RIdeal(S_1 x S_2, v_1 \otimes v_2, T_1 \times T_2, L_1 \times L_2)$,
- (iii) $\mu_i \in Ideal(S_i, v_i, T, L_i)$, $i = 1, 2$ ise $\mu_1 \otimes \mu_2 \in Ideal(S_1 x S_2, v_1 \otimes v_2, T_1 \times T_2, L_1 \times L_2)$.

İspat:

(i) Açık olarak $\mu_1 \otimes \mu_2 \subseteq v_1 \otimes v_2$ dır. $T = T_1 \times T_2$, $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in S_1 \times S_2$ için

$$\begin{aligned} v_1 \otimes v_2(x_1, x_2)T\mu_1 \otimes \mu_2(y_1, y_2) &= (v_1(x_1), v_2(x_2))T(\mu_1(y_1), \mu_2(y_2)) \\ &= (v_1(x_1)T_1\mu_1(y_1), v_2(x_2)T_2\mu_2(y_2)) \\ &\leq (\mu_1(x_1y_1), \mu_2(x_2y_2)) \\ &= \mu_1 \otimes \mu_2(x_1y_1, x_2y_2) \end{aligned}$$

Olup, $\mu_1 \otimes \mu_2 \in LIdeal(S_1 \times S_2, v_1 \otimes v_2, T_1 \times T_2, L_1 \times L_2)$ dır.

(ii) i)'ye benzer şekilde ispat edilir.

(iii) i) ve ii) den elde edilir.

Teorem 2.1.24: $f: S \rightarrow S'$ yarıgrup homomorfisi, $v \in Sub(S, T, L)$ ve T sonsuz $V -$ dağılımlı t -norm olsun. Bu taktirde aşağıdaki özellikler geçerlidir.

(i) $\mu \in LIdeal(S, v, T, L)$ ise $f(\mu) \in LIdeal(S, f(v), T, L)$,

(ii) $\mu \in RIdeal(S, v, T, L)$ ise $f(\mu) \in RIdeal(S, f(v), T, L)$,

(iii) $\mu \in Ideal(S, v, T, L)$ ise $f(\mu) \in Ideal(S, f(v), T, L)$.

İspat: (Yu,& Wang, 1994). Teorem 4.6 ve 4.7 ye benzer şekilde yapılır.

Teorem 2.1.25: $f: S \rightarrow S'$ yarıgrup homomorfisi ve $v' \in Sub(S', T, L)$ olsun. Bu taktirde,

(i) $\mu \in LIdeal(S', v', T, L)$ ise $f^{-1}(\mu') \in LIdeal(S, f^{-1}(v'), T, L)$,

(ii) $\mu \in RIdeal(S', v', T, L)$ ise $f^{-1}(\mu') \in RIdeal(S, f^{-1}(v'), T, L)$,

(iii) $\mu \in Ideal(S', v', T, L)$ ise $f^{-1}(\mu') \in Ideal(S, f^{-1}(v'), T, L)$.

İspat: (Yu,& Wang, 1994). Teorem 4.6 ve 4.7 ye benzer şekilde yapılır.

Tanım 2.1.26: $\mu, v \in F(S, L)$ olsun. Bu durumda $[\mu]_v, (\mu)_v, [\mu]_v$ L -altkümeleri aşağıdaki şekilde tanımlanacaktır.

(i) $[\mu]_v = \mu \cup v \circ_T \mu$,

(ii) $(\mu)_v = \mu \cup \mu \circ_T v$,

(iii) $[\mu]_v = \mu \cup \mu \circ_T v \cup v \circ_T \mu \cup v \circ_T \mu \circ_T v$.

Teorem 2.1.27: $v \in Sub(S, T, L)$, $\mu \in F(S, v, L)$ ve T sonsuz $\vee$ -dağılımlı bir t -norm olsun.

Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir.

- (i) $[\mu]_v$ L -altkümesi μ 'yu kapsayan v 'nün en küçük TL -sol idealidir,
- (ii) $(\mu)_v$ L -altkümesi μ 'yu kapsayan v 'nün en küçük TL -sağ idealidir,
- (iii) $[\mu]_v$ L -altkümesi μ 'yu kapsayan v 'nün en küçük TL -iki yanlı idealidir.

İspat:

(i) $\mu \subseteq [\mu]_v$ olduğu açıktır. $\mu \subseteq v$ olduğundan, $v \circ_T \mu \subseteq v \circ_T v \subseteq v$. Böylece $[\mu]_v \subseteq v$ dir.

Teorem 1.6.2 (viii) ve Teorem 2.1.3 ile,

$$\begin{aligned} v \circ_T [\mu]_v &= v \circ_T (\mu \cup v \circ_T \mu) \\ &= (v \circ_T \mu) \cup (v \circ_T v \circ_T \mu) \\ &\subseteq \mu \cup v \circ_T \mu \\ &= [\mu]_v \end{aligned}$$

Böylece, $[\mu]_v$ v 'nün TL –sol idealidir.

Son olarak, $\mu \subseteq \theta$ ve $\theta \in Ideal(S, v, T, L)$ alınsın. Böylece $\forall x \in S$ için $\mu(x) \leq \theta(x)$ ve

$$\begin{aligned} \bigvee_{x=ab} v(a)T\mu(b) &\leq \bigvee_{x=ab} v(a)T\theta(b) \\ &\leq \bigvee_{x=ab} \theta(ab) \\ &= \theta(x). \end{aligned}$$

Buradan $[\mu]_v \subseteq \theta$ dir. Böylece $[\mu]$ μ 'yu kapsayan v 'nün en küçük TL -sol idealidir.

(ii) i)'ye benzer şekilde ispat edilir.

(iii) $\mu \subseteq v$ olduğundan, ile $v \circ_T \mu \subseteq v \circ_T v \subseteq v$ ve $\mu \circ_T v \subseteq v \circ_T v \subseteq v$ olup $[\mu]_v \subseteq v$ dir.

Ayrıca, Teorem 1.6.2 (viii)

$$\begin{aligned} [\mu]_v &= (\mu \cup v \circ_T \mu \cup \mu \circ_T v \cup v \circ_T \mu \circ_T v) \circ_T v \\ &= \mu \circ_T v \cup v \circ_T \mu \circ_T v \cup \mu \circ_T v \circ_T v \cup v \circ_T \mu \circ_T v \circ_T v \\ &\subseteq \mu \circ_T v \cup v \circ_T \mu \circ_T v \cup v \circ_T \mu \circ_T v \\ &= \mu \circ_T v \cup v \circ_T \mu \circ_T v \\ &\subseteq \mu \circ_T v \cup v \circ_T \mu \circ_T v \cup v \end{aligned}$$

Böylece, $[\mu]_v$ v 'nün TL –sağ idealidir. Benzer şekilde TL –sol ideal olduğu gösterilir.

Son olarak, $\mu \subseteq \theta$ ve $\theta \in Ideal(S, v, T, L)$ alınsın.

$$\begin{aligned} \mu \cup v \circ_T \mu \cup \mu \circ_T v \cup v \circ_T \mu \circ_T v &\leq \theta \cup v \circ_T \theta \cup \theta \circ_T v \cup v \circ_T \theta \circ_T v \\ &\leq \theta \cup \theta \cup \theta \cup v \circ_T \theta \\ &\leq \theta \cup \theta \cup \theta \cup \theta = \theta \end{aligned}$$

Buradan $[\mu]_v \subseteq \theta$ dır. Böylece $[\mu]_v$ μ 'yu kapsayan v 'nün en küçük TL -iki yanlı idealidir.

Teorem 2.1.28: $v \in Sub(S, T, L)$, $\mu \in F(S, v, L)$ ve T sonsuz $\vee$ -dağılımlı bir t -norm olsun.

Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir.

- (i) μ, v 'nün TL -sağ ideali ise $[\mu]_v$ v 'nün TL -iki yanlı idealidir,
- (ii) μ, v 'nün TL -sol ideali ise $(\mu)_v$ v 'nün TL -iki yanlı idealidir.

İspat:

(i) Teorem 2.1.27 ile $[\mu]_v$ nün v 'nün TL -sol idealidir. $[\mu]_v$ v 'nün TL –sağ ideali olduğunu gösterelim. Teorem 2.1.3 (ii) ve Teorem 1.6.2 (vii) den ,

$$\begin{aligned} (\mu \cup v \circ_T \mu) \circ_T v &= \mu \circ_T v \cup v \circ_T \mu \circ_T v \\ &\subseteq \mu \cup v \circ_T \mu \end{aligned}$$

Böylece, $[\mu]_v v$ nün TL –sağ idealidir.

(ii) (i) şikkına benzer şekilde yapılır.

2.2. TL – Altyarıgrubun TL –Bi İdeali, TL – Quasi İdeali ve TL –Interior İdeali

Tanım 2.2.1: $v \in Sub(S, T, L)$ ve $\mu \in F(S, v, L)$ olsun.

- (i) μ ye v nün genelleştirilmiş TL –bi ideali denir $\Leftrightarrow$ Her $x, y, z \in S$ için $\mu(x)Tv(y)T\mu(z) \leq \mu(xyz)$,
- (ii) μ ye v nün TL – bi ideali denir $\Leftrightarrow$ Her $x, y, z \in S$ için $\mu(x)Tv(y)T\mu(z) \leq \mu(xyz)$,
 $\mu(x)T\mu(y) \leq \mu(xy)$,
- (iii) μ ye v nün TL – quasi ideali denir $\Leftrightarrow$ Her $x \in S$ için $(\bigvee_{x=ab} v(a)T\mu(b)) \wedge (\bigvee_{x=cd} \mu(c)Tv(d)) \leq \mu(x)$,
- (iv) μ ye v nün TL – interior ideali denir $\Leftrightarrow$ Her $x, y, z \in S$ için $v(x)T\mu(y)Tv(z) \leq \mu(xyz)$.

Tablo 5 TL – Altyarı grubunun TL – Bi İdeali, TL – Quasi İdeali ve TL – Interior İdeallerinin kümelerinin gösterimleri ve isimlendirilmeleri.

$T L$ üzerinde t – norm	$T = T_M,$	$L = [0,1]$	$T = T_M,$ $L = [0,1]$
$GBIdeal(S, v, T, L)$ v nün genelleştirilmiş TL – bi ideali	$GBIdeal(S, v, L)$ v nün genelleştirilmiş L – bi ideali	$GBIdeal(S, v, T)$ v nün genelleştirilmiş bulanık T – bi ideali	$GBIdeal(S, v)$ v nün genelleştirilmiş bulanık bi ideali
$BIdeal(S, v, T, L)$ v nün TL – bi deali	$BIdeal(S, v, L)$ v nün L – bi deali	$BIdeal(S, v, T)$ v nün bulanık L – bi deali	$BIdeal(S, v)$ v nün bulanık bi deali
$QIdeal(S, v, T, L)$ v nün TL – quasi ideali	$QIdeal(S, v, L)$ v nün L – quasi ideali	$QIdeal(S, v, T)$ v nün bulanık T – quasi ideali	$QIdeal(S, v)$ v nün bulanık quasi ideali
$Iideal(S, v, T, L)$ v nün TL – interior ideali	$Iideal(S, v, L)$ v nün L – interior ideali	$Iideal(S, v, T)$ v nün bulanık T – interior ideali	$Iideal(S, v)$ v nün bulanık interior ideali

Önerme 2.2.2:

- (i) $GBIdeal(S, 1_S, T, L) = GBIdeal(S, T, L),$
- (ii) $BIdeal(S, 1_S, T, L) = BIdeal(S, T, L),$
- (iii) $QIdeal(S, 1_S, T, L) = QIdeal(S, L),$
- (iv) $Iideal(S, 1_S, T, L) = Iideal(S, L).$

Teorem 2.2.3: $v \in Sub(S, T, L), \mu \in F(S, v, L)$ ve T V - dağılımlı bir t -norm olsun. Bu durumda aşağıdaki geçerlidir.

- (i) μ, v' nün genelleştirilmiş TL -bi idealidir $\Leftrightarrow \mu \circ_T v \circ_T \mu \subseteq \mu,$
- (ii) μ, v' nün TL -bi idealidir $\Leftrightarrow \mu \circ_T \mu \subseteq \mu$ ve $\mu \circ_T v \circ_T \mu \subseteq \mu,$
- (iii) μ, v' nün TL -quasi idealidir $\Leftrightarrow \mu \circ_T v \cap v \circ_T \mu \subseteq \mu,$
- (iv) μ, v' nün TL -interior idealidir $\Leftrightarrow v \circ_T \mu \circ_T v \subseteq \mu.$

İspat:

(i) μ v' nün genelleştirilmiş TL - bi ideali ve $x \in S$ olsun.

$$\begin{aligned}
 \mu \circ_T v \circ_T \mu(x) &= \bigvee_{x=ab} (\mu \circ_T v)(a) T \mu(b) \\
 &= \bigvee_{x=ab} [\bigvee_{a=cd} \mu(c) T v(d)] T \mu(b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bigvee_{x=ab, a=cd} \mu(c)Tv(d)T\mu(b) \\
&= \bigvee_{x=cdb} \mu(c)Tv(d)T\mu(b) \\
&\leq \bigvee_{x=cdb} \mu(cdb) \\
&= \mu(x)
\end{aligned}$$

Tersine olarak, hipotezden her $x, y, z \in S$ için,

$$\begin{aligned}
\mu(x)Tv(y)T\mu(z) &\leq \bigvee_{xyz=abc} \mu(a)Tv(b)T\mu(c) \\
&= \mu \circ_T v \circ_T \mu(xyz) \\
&\leq \mu(xyz)
\end{aligned}$$

(ii) Teorem 1.6.5 ve (i) ile elde edilir.

(iii) Tanımdan açıktır.

(iv) μ v 'nin TL - interior ideali olsun ve $x \in S$ alınsın.

$$\begin{aligned}
v \circ_T \mu \circ_T v(x) &= \bigvee_{x=ab} (v \circ_T \mu)(a)Tv(b) \\
&= \bigvee_{x=ab} [\bigvee_{a=cd} v(c)T\mu(d)]Tv(b) \\
&= \bigvee_{x=ab, a=cd} v(c)T\mu(d)Tv(b) \\
&= \bigvee_{x=cdb} v(c)T\mu(d)Tv(b) \\
&\leq \bigvee_{x=cdb} \mu(cdb) \\
&= \mu(x)
\end{aligned}$$

Tersine, her $x, y, z \in S$

$$\begin{aligned}
v(x)T\mu(y)Tv(z) &\leq \bigvee_{xyz=abc} v(a)T\mu(b)Tv(c) \\
&= v \circ_T \mu \circ_T v(xyz) \\
&\leq \mu(xyz)
\end{aligned}$$

Teorem 2.2.4: $v \in Sub(S, T, L)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

- (i) $BIdeal(S, v, T, L) \subseteq GBIdeal(S, v, T, L)$,
- (ii) $QIdeal(S, v, T, L) \subseteq BIdeal(S, v, T, L)$,
- (iii) $LIdeal(S, v, T, L) \cup RIdeal(S, v, T, L) \subseteq QIdeal(S, v, T, L)$,
- (iv) $Ideal(S, v, T, L) \subseteq Ideal(S, v, T, L)$.

İspat:

(i) Tanımdan açıktır.

(ii) $\mu \in QIdeal(S, v, T, L)$ ve $x, y, z \in S$ için,

$$\begin{aligned}
\mu(x)Tv(y)T\mu(z) &= (\mu(x)Tv(y)T\mu(z)) \wedge (\mu(x)Tv(y)T\mu(z)) \\
&\leq (\bigvee_{xyz=abc} \mu(a)Tv(b)T\mu(c)) \wedge (\bigvee_{xyz=def} \mu(d)Tv(e)T\mu(f))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\bigvee_{xyz=abc} v(a)Tv(b)T\mu(c) \right) \wedge \left(\bigvee_{xyz=def} \mu(d)Tv(e)Tv(f) \right) \\
&\leq \left(\bigvee_{xyz=abc} v(ab)T\mu(c) \right) \wedge \left(\bigvee_{xyz=def} \mu(d)Tv(ef) \right) \\
&\leq \left(\bigvee_{xyz=uv} v(u)T\mu(v) \right) \wedge \left(\bigvee_{xyz=u'v'} \mu(u')Tv(v') \right) \\
&\leq \mu(xyz)
\end{aligned}$$

Son olarak,

$$\begin{aligned}
\mu(x)T\mu(y) &\leq (\mu(x)Tv(y)) \wedge (v(x)T\mu(y)) \\
&\leq \left(\bigvee_{xy=ab} \mu(a)Tv(b) \right) \wedge \left(\bigvee_{xy=cd} v(c)T\mu(d) \right) \\
&\leq \mu(xy)
\end{aligned}$$

olup, $\mu \in BIdeal(S, v, T, L)$.

(iii) $\mu \in LIdeal(S, v, T, L)$ ve $x \in S$ olsun. Buradan

$$(\bigvee_{x=a.b} v(a)T\mu(b)) \wedge (\bigvee_{x=cd} \mu(c)Tv(d)) \leq \mu(x) \wedge (\bigvee_{x=cd} \mu(c)Tv(d)) \leq \mu(x)$$

Dolayısıyla, $\mu \in QIdeal(S, v, T, L)$ dir. Böylece $LIdeal(S, v, T, L) \subseteq QIdeal(S, v, T, L)$ elde edilir. Benzer şekilde $RIdeal(S, v, T, L) \subseteq QIdeal(S, v, T, L)$ olduğu gösterilir.

(iv) $\mu \in Ideal(S, v, T, L)$ ve $x, y, z \in S$ olsun. Hipotezden,

$$v(x)T\mu(y)Tv(z) \leq \mu(xy)Tv(z) \leq \mu(xyz)$$

Dolayısıyla, $\mu \in Iideal(S, v, T, L)$ dir.

Yukarıdaki Teoremdeki iddiaların tersleri genel olarak doğru olmayabilir. Bunu aşağıdaki örneklerde verebiliriz.

Örnek 2.2.5: $T = T_M$ t-normu, $S = \{a, b, c, d\}$ yarıgrubundaki ikili işlem tablosu ve $v, \mu \in F(S)$ elemanları aşağıdaki şekilde verilsin.

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	a
c	a	a	b	a
d	a	a	b	b

	a	b	c	d
$v(x)$	0.9	0.9	0.9	0.9
$\mu(x)$	0.8	0.6	0.7	0.6

Buna göre $\mu \subseteq v$ ve μv nün genelleştirilmiş TL –bi idealidir. Fakat μv nün TL –bi ideali değildir.

Örnek 2.2.6: $L = \{0, \alpha, \beta, 1\}$ kafesi Şekil 1 (b) deki gibi; L üzerindeki T t-norm, $S = \{0, a, b, c\}$ yarıgrubundaki ikili işlem tablosu ve $v, \mu \in F(S, L)$ elemanları aşağıdaki şekilde verilsin

.	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	0	0	0
b	0	0	0	b
c	0	0	b	a

T	0	α	β	1
0	0	0	0	0
α	0	α	0	α
β	0	0	0	β
1	0	α	β	1

	0	a	b	c
$v(x)$	1	α	1	1
$\mu(x)$	α	0	α	β

Buna göre $\mu \subseteq v$ μ, v nün TL –bi idealidir. Fakat μ, v nün TL –quasi ideali değildir.

Örnek 2.2.7: $S = \{a, b, c, d, e\}$ yarıgrubunda verilen ikili işlem ve $v, \mu \in F(S)$ bulanık alt kümeleri aşağıdaki gibi verilsin,

.	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	b	a	d	a
c	a	e	c	c	e
d	a	b	d	d	b
e	a	e	a	c	a

	a	b	c	d
$v(x)$	0.8	0.8	0.8	0.8
$\mu(x)$	0.6	0.6	0.4	0.4

Buna göre $\mu \subseteq v$, μ, v nün bulanık quasi idealidir fakat μ, v nün bulanık sol veya sağ ideali değildir.

Örnek 2.2.8: $S = \{a, b, c, d\}$ yarıgrubundaki ikili işlem tablosu Örnek 2.2.5 deki gibi ve $v, \mu \in F(S)$ elemanları aşağıdaki şekilde verilsin.

	a	b	c	d
$v(x)$	0.9	0.9	0.9	0.9
$\mu(x)$	0.8	0.6	0.8	0.6

Buna göre $\mu \subseteq v$ ve μv nün bulanık interior idealidir. Fakat μv nün bulanık sol ideali değildir.

Önerme 2.2.9: $\mu \in RIdeal(S, v, T, L)$ ve $\theta \in LIdeal(S, v, T, L)$ olsun. Bu durumda, $\mu \cap \theta v$ nün TL – quasi idealidir.

İspat: $\mu \in RIdeal(S, v, T, L)$ ve $\theta \in LIdeal(S, v, T, L)$ olduğundan ve Teorem 2.1.3 ten

$$\begin{aligned}
 ((\mu \cap \theta) \circ_T v) \cap (v \circ_T (\mu \cap \theta)) &\subseteq ((\mu \circ_T v) \cap (\theta \circ_T v)) \cap ((v \circ_T \mu) \cap (v \circ_T \theta)) \\
 &\subseteq (\mu \cap (\theta \circ_T v)) \cap ((v \circ_T \mu) \cap \theta) \\
 &\subseteq \mu \cap \theta
 \end{aligned}$$

olup Teorem 2.2.3 (iii) şıkkından $\mu \cap \theta v$ nün TL – quasi idealidir.

Teorem 2.2.10: S regüler yarıgrup, $v \in F(S, L)$ ve $\mu \in F(S, T, L)$ olsun. Bu durumda;

- (i) $v \in LIdeal(S, L)$ ve $\mu \in GBIdeal(S, v, T, L)$ ise $\mu \in BIdeal(S, v, T, L)$,
- (ii) $v \in RIdeal(S, L)$ ve $\mu \in GBIdeal(S, v, T, L)$ ise $\mu \in BIdeal(S, v, T, L)$.

İspat:

(i) v S' nin L -sol ideali $x, y \in S$ olsun. Buradan $\exists a \in S$ öyle ki $x = xax$

$$\begin{aligned}\mu(xy) &= \mu(xaxy) \geq \mu(x)Tv(ax)T\mu(y) \geq \mu(x)Tv(x)T\mu(y) \geq \mu(x)T\mu(x)T\mu(y) \\ &= \mu(x)T\mu(y)\end{aligned}$$

Dolayısıyla μ TL – altyarıgruptur. Buradan $\mu \in BIdeal(S, v, T, L)$.

(ii)i)'ye benzer şekilde ispat edilir.

Teorem 2.2.11: S regüler yarıgrup, $v \in Ideal(S, L)$ ve $\mu \in F(S, v, L) \cap F(S, T, L)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

(i) μ, v 'nün TL – idealidir,

(ii) μ, v 'nün TL – interior idealidir.

İspat:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Teorem 2.2.4 (iv) ile elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Her $x \in S$ için $\exists a \in S$ öyle ki $x = xax$

$$\begin{aligned}\mu(xy) &= \mu(xaxy) \\ &\geq v(xa)T\mu(x)Tv(y) \\ &\geq v(x)T\mu(x)Tv(y) \\ &\geq \mu(x)T\mu(x)Tv(y) \\ &= \mu(x)Tv(y)\end{aligned}$$

Dolayısıyla, μ, v 'nün TL – sağ idealidir. Benzer şekilde μ, v 'nün TL – sol idealidir. Böylece μ, v 'nün iki yanlı TL – idealidir.

Teorem 2.2.12: $v \in Sub(S, T, L)$ ve $\mu \in F(S, v, L)$ için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

(i) $\mu \in GBIdeal(S, v, T, L)$ ve $\alpha \in L$ için $U(S, \mu, T, \alpha) \neq \emptyset$ ise $U(S, \mu, T, \alpha)$

$U(S, v, T, \alpha)$ 'nin genelleştirilmiş bi-idealidir,

(ii) $\mu \in BIdeal(S, v, T, L)$ ve $\alpha \in L$ için $U(S, \mu, T, \alpha) \neq \emptyset$ ise $U(S, \mu, T, \alpha) U(S, v, T, \alpha)$ 'nin bi-idealidir,

(iii) $\mu \in QIdeal(S, v, T, L)$ ve $\alpha \in L$ için $U(S, \mu, T, \alpha) \neq \emptyset$ ise $U(S, \mu, T, \alpha) U(S, v, T, \alpha)$ 'nin quasi idealidir,

(iv) $\mu \in Ideal(S, v, T, L)$ ve $\alpha \in L$ için $U(S, \mu, T, \alpha) \neq \emptyset$ ise $U(S, \mu, T, \alpha) U(S, v, T, \alpha)$ 'nin interior idealidir.

İspat:

(i) Teorem 1.4.4 (iii) $U(S, \mu, T, \alpha) \subseteq U(S, \nu, T, \alpha)$ dır. $x, z \in U(S, \mu, T, \alpha)$ ve $y \in U(S, \nu, T, \alpha)$ olsun.

$$\begin{aligned}\alpha &\geq \mu(xyz)T\alpha \geq (\mu(x)T\nu(y)T\mu(z))T\alpha \\ &= \mu(x)T\nu(y)T\alpha, \\ &= \mu(x)T\alpha = \alpha\end{aligned}$$

Böylece, $xyz \in U(S, \mu, T, \alpha)$ dır. Buradan $U(S, \mu, T, \alpha)$, $U(S, \nu, T, \alpha)$ nin genelleştirilmiş bi idealidir.

(ii) $x, y \in U(S, \mu, T, \alpha)$ alınsın.

$$\begin{aligned}\alpha &\geq \mu(xy)T\alpha \geq (\mu(x)T\mu(y))T\alpha \\ &= \mu(x)T\mu(y)T\alpha \\ &= \mu(x)T\alpha = \alpha\end{aligned}$$

olup, $xy \in U(S, \mu, T, \alpha)$ dır. Böylece $U(S, \mu, T, \alpha)$ S 'nin TL -altıyarıgrubudur. (i) şikkından dolayı $U(S, \mu, T, \alpha) U(S, \nu, T, \alpha)$ 'nin bi-idealidir.

(iii) $p \in U(S, \mu, T, \alpha) \cdot U(S, \nu, T, \alpha) \cap U(S, \nu, T, \alpha) \cdot U(S, \mu, T, \alpha)$ alınsın.

$\exists x, x' \in U(S, \mu, T, \alpha)$ ve

$y, y' \in U(S, \nu, T, \alpha)$ öyle ki $p = xy = y'x'$. Buradan

$$\begin{aligned}\alpha &\geq \mu(p)T\alpha \geq (\bigvee_{p=ab} \nu(a)T\mu(b)) \wedge (\bigvee_{p=cd} \mu(c)T\nu(d))T\alpha \\ &\geq (\nu(y')T\mu(x') \wedge \mu(x)T\nu(y))T\alpha \\ &\geq (\nu(y')T\mu(x')T\mu(x)T\nu(y))T\alpha \\ &= \nu(y')T\mu(x')T\mu(x)T\alpha = \nu(y')T\mu(x')T\alpha = \nu(y')T\alpha = \alpha\end{aligned}$$

Böylece $p \in U(S, \mu, T, \alpha)$ dır. Dolayısıyla $U(S, \mu, T, \alpha) U(S, \nu, T, \alpha)$ 'nin quasi idealidir.

(iv) $x, z \in U(S, \nu, T, \alpha)$ ve $y \in U(S, \mu, T, \alpha)$ alınsın.

$$\begin{aligned}\alpha &\geq \mu(xyz)T\alpha \geq (\nu(x)T\mu(y)T\nu(z))T\alpha \\ &= \nu(x)T\mu(y)T\alpha, \\ &= \nu(x)T\alpha = \alpha\end{aligned}$$

Dolayısıyla, $U(S, \mu, T, \alpha) U(S, \nu, T, \alpha)$ 'nin interior idealidir.

Teorem 2.2.13: $\nu \in Sub(S, T, L)$, $\mu \in F(S, \nu, L)$ ve $Im\mu \cup Im\nu \subseteq D_T$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler geçerlidir.

(i) Eğer $\forall \alpha \in L$ için $U(S, \mu, T, \alpha)$, $U(S, \nu, T, \alpha)$ 'nin genelleştirilmiş bi-ideali ise $\mu \in$

$$GBIdeal(S, \nu, T, L),$$

- (ii) Eğer $\forall \alpha \in L$ için $U(S, \mu, T, \alpha)$, $U(S, v, T, \alpha)$ 'nin bi-ideali ise $\mu \in BIdeal(S, v, T, L)$,
 (iii) Eğer $\forall \alpha \in L$ için $U(S, \mu, T, \alpha)$, $U(S, v, T, \alpha)$ 'nin interior ideali ise $\mu \in Ideal(S, v, T, L)$.

İspat:

- (i) Her $x, y, z \in S$ için $\alpha = \mu(x)Tv(y)T\mu(z)$ olsun.

$$\begin{aligned} v(y)T\alpha &= v(y)T\mu(x)Tv(y)T\mu(z) = \mu(x)Tv(y)Tv(y)T\mu(z) \quad (Imv \subseteq D_T) \\ &= \mu(x)Tv(y)T\mu(z) = \alpha \end{aligned}$$

Böylece $y \in U(S, v, T, \alpha)$ dir. Benzer şekilde $x, z \in U(S, \mu, T, \alpha)$ elde edilir. Böylece $xyz \in U(S, \mu, T, \alpha)$ dir.

$$\mu(xyz) \geq \mu(xyz)T\alpha = \alpha = \mu(x)Tv(y)T\mu(z) .$$

Buradan ise μ, v 'nün genelleştirilmiş TL – biidealidir.

- (ii) Her $x, y \in S$ için $\alpha = \mu(x)T\mu(y)$ alınsın.

$$\mu(x)T\alpha = \mu(x)T\mu(x)T\mu(y) = \mu(x)T\mu(y) = \alpha \quad (Im\mu \subseteq D_T)$$

olup, $x \in U(S, \mu, T, \alpha)$ dir. Benzer şekilde $y \in U(S, \mu, T, \alpha)$ olduğu gösterilir. Hipotezden $xy \in U(S, \mu, T, \alpha)$ elde edilir. Böylece,

$$\mu(xy) \geq \mu(xy)T\alpha = \alpha = \mu(x)T\mu(y)$$

olduğundan μ S nin TL – altyarıgrubudur. (i) şikkından $\mu \in BIdeal(S, v, T, L)$ dir.

- (iii) Her $x, y, z \in S$ için $\alpha = v(x)T\mu(y)Tv(z)$ olsun.

$$v(x)T\alpha = v(x)Tv(x)T\mu(y)Tv(z) \quad (Imv \subseteq D_T) = v(x)T\mu(y)Tv(z) = \alpha$$

Böylece $x \in U(S, \mu, T, \alpha)$ dir. Benzer şekilde $y \in U(S, \mu, T, \alpha)$ ve $z \in U(S, \mu, T, \alpha)$ elde edilir. Böylece $xyz \in U(S, \mu, T, \alpha)$ dir.

$$\mu(xyz) \geq \mu(xyz)T\alpha = \alpha = v(x)T\mu(y)Tv(z) .$$

Buradan ise μ, v 'nün TL – interior idealidir.

Teorem 2.2.12 ve Teorem 2.2.13 ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.2.14: $v \in Sub(S, L)$, $\mu \in F(S, v, L)$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

- (i) Eğer $\forall \alpha \in L$, $\mu_\alpha \neq \emptyset$ için μ_α, v_α 'nın genelleştirilmiş bi-idealidir $\Leftrightarrow \mu \in GIdeal(S, v, L)$,
 (ii) Eğer $\forall \alpha \in L$, $\mu_\alpha \neq \emptyset$ için μ_α, v_α 'nın bi-idealidir $\Leftrightarrow \mu \in BIdeal(S, v, L)$,
 (iii) Eğer $\forall \alpha \in L$, $\mu_\alpha \neq \emptyset$ için μ_α, v_α 'nin quasi idealidir $\Leftrightarrow \mu \in QIdeal(S, v, L)$,
 (iv) Eğer $\forall \alpha \in L$, $\mu_\alpha \neq \emptyset$ için μ_α, v_α 'nin interior idealidir $\Leftrightarrow \mu \in Ideal(S, v, L)$.

İspat: $T = \wedge$ alındığında Teorem 2.2.12 nin özel durumudur.

Önerme 2.2.15: $\emptyset \neq A \subseteq S$, $\alpha, \beta \in L$ ve $\alpha < \beta$ ise aşağıdaki özellikler sağlanır.

- (i) A, S nin genelleştirilmiş bi-ideali ise $(\alpha, \beta)_A$, S 'nin genelleştirilmiş TL -bi-idealidir,
- (ii) $\beta \in D_T$ ve $(\alpha, \beta)_A$, S 'nin genelleştirilmiş TL -bi-ideali ise A, S nin genelleştirilmiş bi-idealidir,
- (iii) A, S nin bi-ideali ise $(\alpha, \beta)_A$, S 'nin TL -bi-idealidir,
- (iv) $\beta \in D_T$ ve $(\alpha, \beta)_A$, S 'nin TL -bi-ideali ise A, S nin bi-idealidir,
- (v) A, S nin quasi ideali ise $(\alpha, \beta)_A$, S 'nin TL -quasi idealidir,
- (vi) $\beta \in D_T$ ve $(\alpha, \beta)_A$, S 'nin TL -quasi ideali ise A, S nin quasi-idealidir,
- (vii) A, S nin interior idealidir ancak ve ancak $(\alpha, \beta)_A$, S 'nin TL -interior idealidir.

İspat:

(i) A, S nin genelleştirilmiş bi-ideali olsun. Her $x, y, z \in S$ için,

- $x, z \in A$ ise $xyz \in A$ olacağından,

$$(\alpha, \beta)_A(x)T(\alpha, \beta)_A(z) = \beta T \beta \leq \beta = (\alpha, \beta)_A(xyz)$$

olup, eşitlik sağlanır.

- $x \notin A$ veya $y \notin A$ ise T t - norm özeliğinden,

$$(\alpha, \beta)_A(x)T(\alpha, \beta)_A(z) \leq \alpha$$

olup, $(\alpha, \beta)_A(x)T(\alpha, \beta)_A(z) \leq (\alpha, \beta)_A(xyz)$ sağlanır. Dolayısıyla $(\alpha, \beta)_A$, S 'nin genelleştirilmiş TL -bi-idealidir.

(ii) $\beta \in D_T$ ve $(\alpha, \beta)_A$, S 'nin TL -quasi ideali olsun. Her $x, z \in A$ için,

$$(\alpha, \beta)_A(x)T(\alpha, \beta)_A(z) = \beta T \beta = \beta \leq (\alpha, \beta)_A(xyz)$$

olduğundan, $(\alpha, \beta)_A(xyz) = \beta$ dir. Dolayısıyla $xyz \in A$ dir. A, S 'nin genelleştirilmiş bi-idealidir.

(iii) Önerme 1.6.9 (i) şikkından ve Önerme 2.2.15 (i) şikkından elde edilir.

(iv) Önerme 1.6.9 (ii) şikkından ve Önerme 2.2.15 (ii) şikkından elde edilir.

(v) A, S nin quasi ideali olsun. $x \in S$ için,

- Her $a, b \in S$ $x = ab$, $a \notin A$ veya her $c, d \in S$ $x = cd$, $d \notin A$ ise

$$(\bigvee_{x=ab}(\alpha, \beta)_A(a)) \wedge (\bigvee_{x=cd}(\alpha, \beta)_A(d)) = \alpha \leq (\alpha, \beta)_A(x)$$

- $\exists a, b \in S \ x = ab, a \in A$ ve $\exists c, d \in S \ x = cd, d \in A$ ise $x \in AS \cap SA$ olup $x \in A$ dır. Dolayısıyla, $(\bigvee_{x=a.b}(\alpha, \beta)_A(a)) \wedge (\bigvee_{x=c.d}(\alpha, \beta)_A(d)) = \beta \leq (\alpha, \beta)_A(x)$ olup, $(\alpha, \beta)_A$, S 'nin TL -quasi idealidir.

(vi) $\beta \in D_T$ ve $(\alpha, \beta)_A$, S 'nin TL -quasi ideali olsun. $x \in AS \cap SA$ alınsın.

$\exists a, b \in S \ x = ab, a \in A$ ve $\exists c, d \in S \ x = cd, d \in A$ olup,

$$(\bigvee_{x=a.b}(\alpha, \beta)_A(a)) \wedge (\bigvee_{x=c.d}(\alpha, \beta)_A(d)) = \beta \leq (\alpha, \beta)_A(x)$$

olduğundan $x \in A$ dır. A, S 'nin quasi-idealidir.

(vii) A, S 'nin interior ideali ise $y \in A, x, z \in S$ için $xyz \in A$ olup,

$$(\alpha, \beta)_A(y) = \beta \leq (\alpha, \beta)_A(xyz)$$

olduğundan, $(\alpha, \beta)_A$, S 'nin TL -interior idealidir.

Tersine $(\alpha, \beta)_A$, S 'nin TL -interior ideali olsun. $y \in A, x, z \in S$ için,

$$\beta = (\alpha, \beta)_A(y) \leq (\alpha, \beta)_A(xyz)$$

olduğundan, $xyz \in A$ dır. A, S 'nin interior-idealidir.

Sonuç 2.2.16:

- (i) A, S 'nin genelleştirilmiş bi-idealidir $\Leftrightarrow 1_A S$ 'nin genelleştirilmiş L -bi-idealidir,
- (ii) A, S 'nin bi-idealidir $\Leftrightarrow 1_A S$ 'nin L -bi-idealidir,
- (iii) A, S 'nin quasi idealidir $\Leftrightarrow 1_A S$ 'nin L -quasi idealidir,
- (iv) A, S 'nin interior idealidir $\Leftrightarrow 1_A S$ 'nin L -interior idealidir.

İspat: $\alpha = 0$ ve $\beta = 1$ alındığında Önerme 2.2.15 in özel durumudur.

Teorem 2.2.17: $v \in Sub(S, T, L)$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir.

- (i) $\{\mu_i : i \in \Lambda\} \subseteq GBIdeal(S, v, T, L)$ ise $\bigcap_{i \in \Lambda} \mu_i \in GBIdeal(S, v, T, L)$,
- (ii) $\{\mu_i : i \in \Lambda\} \subseteq BIdeal(S, v, T, L)$ ise $\bigcap_{i \in \Lambda} \mu_i \in BIdeal(S, v, T, L)$,
- (iii) $\{\mu_i : i \in \Lambda\} \subseteq QIdeal(S, v, T, L)$ ise $\bigcap_{i \in \Lambda} \mu_i \in QIdeal(S, v, T, L)$,
- (iv) $\{\mu_i : i \in \Lambda\} \subseteq Ideal(S, v, T, L)$ ise $\bigcap_{i \in \Lambda} \mu_i \in Ideal(S, v, T, L)$.

İspat:

(i) Açık olarak $\bigcap \mu_i \subseteq v$ dür. Her $x, y, z \in S$ için ,

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in \Lambda} \mu_i(x)Tv(y)T \bigcap_{i \in \Lambda} \mu_i(z) &= \bigwedge_{i \in \Lambda} \mu_i(x)Tv(y)T \bigwedge_{i \in \Lambda} \mu_i(z) \\ &\leq \bigwedge_{i \in \Lambda} \mu_i(x)Tv(y)T\mu_i(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \bigwedge_{i \in \Lambda} \mu_i(xyz) \\ &= \bigcap_{i \in \Lambda} \mu_i(xyz) \end{aligned}$$

Dolayısıyla, $\bigcap \mu_i$, v nün genelleştirilmiş TL – bi idealidir.

(ii) Her $x, y, z \in S$ için ,

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in \Lambda} \mu_i(x) T \bigcap_{i \in \Lambda} \mu_i(y) &= \bigwedge_{i \in \Lambda} \mu_i(x) T \bigwedge_{i \in \Lambda} \mu_i(y) \\ &\leq \bigwedge_{i \in \Lambda} \mu_i(x) T \mu_i(y) \\ &\leq \bigwedge_{i \in \Lambda} \mu_i(xy) \end{aligned}$$

olup, $\bigcap \mu_i$ ‘ler S ’nin TL altıyarıgrubudur. (i) şikkından dolayı $\bigcap \mu_i \in BIdeal(S, v, T, L)$ dır.

(iii) Her $x \in S$ için,

$$\begin{aligned} &(\bigvee_{x=ab} (\bigwedge_{i \in \Lambda} \mu_i(a)) T v(b)) \wedge (\bigvee_{x=cd} (v(c) T \bigwedge_{i \in \Lambda} \mu_i(d))) \\ &\leq (\bigvee_{x=ab} (\bigwedge_{i \in \Lambda} (\mu_i(a) T v(b))) \wedge (\bigvee_{x=cd} (\bigwedge_{i \in \Lambda} v(c) \mu_i(d))) \\ &\leq (\bigwedge_{i \in \Lambda} \bigvee_{x=ab} \mu_i(a) T v(b)) \wedge (\bigwedge_{i \in \Lambda} \bigvee_{x=cd} v(c) T \mu_i(d)) \\ &\leq \bigwedge_{i \in \Lambda} (\bigvee_{x=ab} \mu_i(a) T v(b)) \wedge (\bigvee_{x=cd} v(c) T \mu_i(d)) \\ &\leq \bigwedge_{i \in \Lambda} \mu_i(x) \end{aligned}$$

Olup, $\bigcap \mu_i \in QIdeal(S, v, T, L)$ dir.

(iv) Her $x, y, z \in S$ için,

$$\begin{aligned} v(x) T \bigcap_{i \in \Lambda} \mu_i(y) T v(z) &= v(x) T \bigwedge_{i \in \Lambda} \mu_i(y) T v(z) \\ &\leq \bigwedge_{i \in \Lambda} v(x) T \mu_i(y) T v(z) \\ &\leq \bigwedge_{i \in \Lambda} \mu_i(xyz) \\ &= \bigcap_{i \in \Lambda} \mu_i(xyz) \end{aligned}$$

Dolayısıyla, $\bigcap \mu_i, v$ nün TL –interior idealidir.

Sonuç 2.2.18: $v \in Sub(S, T, L)$ ise aşağıdakiler geçerlidir.

- (i) $(GBIdeal(S, v, T, L), \subseteq)$ tam kafestir,
- (ii) $(BIdeal(S, v, T, L), \subseteq)$ tam kafestir,
- (iii) $(QIdeal(S, v, T, L), \subseteq)$ tam kafestir,
- (iv) $(Ideal(S, v, T, L), \subseteq)$ tam kafestir.

İspat: Teorem 1.2.4 ve Teorem 2.2.17 ‘den açıktır.

Teorem 2.2.19: $v \in Sub(S, T, L)$ ve T sonsuz $\vee$ - dağılımlı bir t -norm olsun. Bu durumda $\{\mu_i : i \in \Lambda\} \subseteq Ideal(S, v, T, L)$ ise $\bigcup_{i \in \Lambda} \mu_i \in Ideal(S, v, T, L)$.

İspat: Her $x, y, z \in S$ için,

$$\begin{aligned} v(x)T \bigcup_{i \in \Lambda} \mu_i(y)Tv(z) &= v(x)T \bigvee_{i \in \Lambda} \mu_i(y)T v(z) \\ &= \bigvee_{i \in \Lambda} v(x)T \mu_i(y)Tv(z) \\ &\leq \bigvee_{i \in \Lambda} \mu_i(xyz) \end{aligned}$$

olup, $\bigcup_{i \in \Lambda} \mu_i \in Ideal(S, v, T, L)$.

Sonuç 2.2.20: $(L, \leq)$ sonsuz $\vee$ -dağılımlı kafes ve T sonsuz $\vee$ -dağılımlı bir t -norm ise $(Ideal(S, v, T, L), \leq, \cap, \cup)$ sonsuz $\vee$ -dağılımlı kafestir.

Uyarı: T sonsuz $\vee$ -dağılımlı bir t -norm için Teorem 2.2.19 da verilen sonuç genel olarak $GBIdeal(S, v, T, L)$, $BIdeal(S, v, T, L)$, $QIdeal(S, v, T, L)$ kümeleri için geçerli olmayabilir. Bunu aşağıdaki örnekte gözlemleyebiliriz.

Örnek 2.2.21: $(a, b) \cdot (c, d) = (a, d)$ ikili işlemi ile $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ yarıgrubu ve kafesi yapısı Şekil 1 (b)' deki gibi olmak üzere $L = \{0, \alpha, \beta, \gamma, 1\}$ kafesi verilsin. Aşağıdaki şekilde $\mu_1, \mu_2 \in F(S, L)$ elemanları tanımlansın.

$$\mu_1(x, y) = \begin{cases} \beta, & \{(0, 0)\} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad \mu_2(x, y) = \begin{cases} \alpha, & \{(1, 1)\} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

Buna göre $\mu_1, \mu_2 \in GBIdeal(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, 1_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}, L)$ dır. Fakat $\mu_1 \cup \mu_2 \notin GBIdeal(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, 1_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}, L)$. Aynı örnek $BIdeal(S, v, T, L)$, $QIdeal(S, v, T, L)$ kümeleri içinde verilebilir.

Teorem 2.2.22: $v \in Sub(S, T, L)$, $Imv \subseteq D_T$ ve $\mu, \theta \in F(S, v, L)$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler gerçekleşir.

- (i) $\mu, \theta v$ 'nün genelleştirilmiş TL -bi-ideali ise $\mu T \theta v$ 'nün genelleştirilmiş TL -bi-idealidir,
- (ii) $\mu, \theta v$ 'nün TL -bi-ideali ise $\mu T \theta v$ 'nün TL -bi-idealidir,
- (iii) $\mu, \theta v$ 'nün TL -quasi ideali ise $\mu T \theta v$ 'nün TL -quasi idealidir,
- (iv) $\mu, \theta v$ 'nün TL -interior ideali ise $\mu T \theta v$ 'nün TL -interior idealidir.

İspat:

(i) $\mu, \theta v$ 'nün genelleştirilmiş TL -bi ideali ve $x, y, z \in S$ olsun.

$$(\mu T \theta)(x)Tv(y)T(\mu T \theta(z)) = \mu(x)T\theta(x)Tv(y)T\mu(z)T\theta(z)$$

$$\begin{aligned}
&= \mu(x)T\theta(x)Tv(y)Tv(y)T\mu(z)T\theta(z) \quad (Imv \subseteq D_T) \\
&= \mu(x)Tv(y)T\mu(z)T\theta(x)Tv(y)T\theta(z) \\
&\leq \mu(xyz)T\theta(xyz) = (\mu T\theta)(xyz)
\end{aligned}$$

Böylece, $\mu T\theta \in GBiideal(S, v, T, L)$ dir.

(ii) Teorem 1.6.14 ile $\mu T\theta$ TL -altyarıgrup ve (i) şikkından $\mu T\theta \in Biideal(S, v, T, L)$ dir.

(iii) μ, θ v 'nün TL -quasi ideali olsun.

$$\begin{aligned}
&(\bigvee_{x=ab}(\mu T\theta)(a)Tv(b)) \wedge (\bigvee_{x=cd}v(c)T(\mu T\theta)(d)) \\
&= (\bigvee_{x=ab}\mu(a)T\theta(a)Tv(b)) \wedge (\bigvee_{x=cd}v(c)T\mu(d)T\theta(d)) \\
&= (\bigvee_{x=ab}\mu(a)T\theta(a)Tv(b)Tv(b)) \wedge (\bigvee_{x=cd}v(c)Tv(c)\mu(d)T\theta(d)) \quad (Imv \subseteq D_T) \\
&\leq [\bigvee_{x=uv}\mu(u)Tv(v)]T[\bigvee_{x=zt}\theta(z)Tv(t)] \wedge [\bigvee_{x=pq}v(p)T\mu(q)]T[\bigvee_{x=ef}v(e)T\theta(f)] \\
&\leq [\bigvee_{x=uv}\mu(u)Tv(v)T\bigvee_{x=pq}v(p)T\mu(q)]T[\bigvee_{x=zt}\theta(z)Tv(t)T\bigvee_{x=ef}v(e)T\theta(f)] \\
&\leq \mu(x)T\theta(x) = (\mu T\theta)(x)
\end{aligned}$$

Dolayısıyla $\mu T\theta \in QIdeal(S, v, T, L)$ dir.

(iv) μ, θ v 'nün TL -interior ideali ve $x, y, z \in S$ olsun.

$$\begin{aligned}
v(x)T(\mu T\theta)(y)Tv(z) &= v(x)T\mu(y)T\theta(y)Tv(z) \\
&= v(x)Tv(x)T\mu(y)T\theta(y)Tv(z)Tv(z) \quad (Imv \subseteq D_T) \\
&= v(x)T\mu(y)Tv(z)Tv(x)T\theta(y)Tv(z) \\
&= \mu(xyz)T\theta(xyz)
\end{aligned}$$

Böylece, $\mu T\theta \in Ideal(S, v, T, L)$ dir.

Teorem 2.2.23: $v \in Sub(S, T, L)$ ve $\mu, \theta \in F(S, v, L)$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler gerçekleşir.

- (i) μ v 'nün TL - bi ideali ise $\mu \circ_T \theta$ v 'nün TL -bi idealidir,
- (ii) θ v 'nün TL - bi ideali ise $\mu \circ_T \theta$ v 'nün TL -bi idealidir,
- (iii) μ v 'nün TL - quasi ideali veya θ v 'nün TL - quasi ideali ise $\mu \circ_T \theta$ v 'nün TL -bi idealidir.

İspat:

(i) θ v 'nün TL - bi ideali olsun. $\mu, \theta \in F(S, v, L)$ olduğundan, $\mu \circ_T \theta \subseteq v$ dür.

$$(\mu \circ_T \theta) \circ_T (\mu \circ_T \theta) = \mu \circ_T (\theta \circ_T \mu \circ_T \theta) \subseteq \mu \circ_T (\theta \circ_T v \circ_T \theta) \subseteq \mu \circ_T \theta$$

Dolayısıyla $\mu \circ_T \theta$ TL -altyarıgrubudur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
(\mu \circ_T \theta) \circ_T v \circ_T (\mu \circ_T \theta) &\subseteq \mu \circ_T v \circ_T v \circ_T \mu \circ_T \theta \\
&\subseteq \mu \circ_T v \circ_T \mu \circ_T \theta
\end{aligned}$$

$$\subseteq \mu \circ_T \theta$$

olduğundan $\mu \circ_T \theta v$ ' nün TL -bi idealidir.

(ii)i'e benzer şekilde yapılır.

(iii) μv ' nün TL - quasi ideali olsun. Teorem 2.2.3 (iii) şikkından

$(\mu \circ_T \theta) \circ_T \mu \subseteq (\mu \circ_T v) \circ_T v \subseteq (\mu \circ_T v)$ benzer şekilde $(\mu \circ_T \theta) \circ_T \mu \subseteq v \circ_T \mu$ olup, $(\mu \circ_T \theta) \circ_T \mu \subseteq (\mu \circ_T v) \cap (v \circ_T \mu) \subseteq \mu$ dür. Dolayısıyla $(\mu \circ_T \theta) \circ_T (\mu \circ_T \theta) \subseteq (\mu \circ_T v)$ dır.

Ayrıca,

$(\mu \circ_T \theta) \circ_T v \circ_T \mu \subseteq \mu \circ_T v \circ_T v \circ_T v \circ_T \mu \subseteq \mu \circ_T v$ benzer şekilde $(\mu \circ_T \theta) \circ_T v \circ_T \mu \subseteq v \circ_T \mu$ dır. Böylece $(\mu \circ_T \theta) \circ_T v \circ_T \mu \subseteq \mu$ dır. Dolayısıyla $(\mu \circ_T \theta) \circ_T v \circ_T (\mu \circ_T \theta) \subseteq \mu \circ_T \theta$ dır. Böylece $\mu \circ_T \theta v$ ' nün TL -bi idealidir

Teorem 2.1.24: S_1, S_2 yarıgruplar, $v_i \in \text{Sub}(S_i, T_i, L_i)$, $i=1,2$ ve $v = v_1 \otimes v_2$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

- (i) $\mu_i \in \text{GBIdeal}(S_i, v_i, T_i, L_i)$, $i = 1,2$ ise $\mu_1 \otimes \mu_2 \in \text{GBIdeal}(S_1 x S_2, v, T_1 \times T_2, L_1 \times L_2)$,
- (ii) $\mu_i \in \text{BIdeal}(S_i, v_i, T_i, L_i)$, $i = 1,2$ ise $\mu_1 \otimes \mu_2 \in \text{BIdeal}(S_1 x S_2, v, T_1 \times T_2, L_1 \times L_2)$,
- (iii) $\mu_i \in \text{QIdeal}(S_i, v_i, T_i, L_i)$, $i = 1,2$ ise $\mu_1 \otimes \mu_2 \in \text{QIdeal}(S_1 x S_2, v, T_1 \times T_2, L_1 \times L_2)$,
- (iv) $\mu_i \in \text{Iideal}(S_i, v_i, T_i, L_i)$, $i = 1,2$ ise $\mu_1 \otimes \mu_2 \in \text{Iideal}(S_1 x S_2, v, T_1 \times T_2, L_1 \times L_2)$.

İspat:

(i) $T = T_1 \times T_2$, $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in S_1 x S_2$ için,

$$\begin{aligned} & \mu_1 \otimes \mu_2(x_1, x_2) T v_1 \otimes v_2(y_1, y_2) T \mu_1 \otimes \mu_2(z_1, z_2) \\ &= (\mu_1(x_1), \mu_2(x_2)) T (v_1(y_1), v_2(y_2)) T (\mu_1(z_1), \mu_2(z_2)) \\ &= (\mu_1(x_1) T_1 v_1(y_1) T_1 \mu_1(z_1), \mu_2(x_2) v_2(y_2) T_2 \mu_2(z_2)) \\ &\leq (\mu_1(x_1 y_1 z_1), \mu_2(x_2 y_2 z_2)) \\ &= \mu_1 \otimes \mu_2(x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2) \end{aligned}$$

Böylece $\mu_1 \otimes \mu_2 \in \text{GBIdeal}(S_1 x S_2, v, T_1 \times T_2, L_1 \times L_2)$ dır.

(ii) Teorem 1.6.19 dan ve (i) şikkından $\mu_1 \otimes \mu_2 \in \text{BIdeal}(S_1 x S_2, v, T_1 \times T_2, L_1 \times L_2)$.

(iv) $T = T_1 \times T_2$, $(x_1, x_2) \in S_1 x S_2$ için,

$$\begin{aligned} & \bigvee_{(x_1, x_2) = (a_1, a_2)(b_1, b_2)} \mu_1 \otimes \mu_2(a_1, a_2) T v_1 \otimes v_2(b_1, b_2) \wedge \\ & \quad \bigvee_{(x_1, x_2) = (c_1, c_2)(d_1, d_2)} v_1 \otimes v_2(c_1, c_2) T \mu_1 \otimes \mu_2(d_1, d_2) \\ &= \bigvee_{(x_1, x_2) = (a_1, a_2)(b_1, b_2)} (\mu_1(a_1), \mu_2(a_2)) T (v_1(b_1), v_2(b_2)) \wedge \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& V_{(x_1, x_2)=(c_1, c_2)(d_1, d_2)}(v_1(c_1), v_2(c_2))T(\mu_1(d_1), \mu_2(d_2)) \\
&= V_{(x_1, x_2)=(a_1, a_2)(b_1, b_2)}(\mu_1(a_1)T_1v_1(b_1), \mu_2(a_2)T_2v_2(b_2)) \wedge \\
& \quad V_{(x_1, x_2)=(c_1, c_2)(d_1, d_2)}(v_1(c_1)T_1\mu_1(d_1), v_2(c_2)T_2\mu_2(d_2)) \\
&= (V_{x_1=a_1b_1}\mu_1(a_1)T_1v_1(b_1) \wedge V_{x_1=c_1d_1}v_1(c_1)T_1\mu_1(d_1), \\
& \quad V_{x_2=a_2b_2}\mu_2(a_2)T_2v_2(b_2) \wedge V_{x_2=c_2d_2}v_2(c_2)T_2\mu_2(d_2)) \\
&\leq (\mu_1(x_1), \mu_2(x_2)) \\
&= \mu_1 \otimes \mu_2(x_1, x_2)
\end{aligned}$$

Böylece $\mu_1 \otimes \mu_2 \in QIdeal(S_1 \times S_2, v, T_1 \times T_2, L_1 \times L_2)$.

(iv) $(x_1, x_2), (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in S_1 \times S_2$ için,

$$\begin{aligned}
& v_1 \otimes v_2(x_1, x_2)T\mu_1 \otimes \mu_2(y_1, y_2)Tv_1 \otimes v_2(z_1, z_2) \\
&= (v_1(x_1), v_2(x_2))T(\mu_1(y_1), \mu_2(y_2))T(v_1(z_1), v_2(z_2)) \\
&= (v_1(x_1)T_1\mu_1(y_1)T_1v_1(z_1), v_2(x_2)T_2\mu_2(y_2)T_2v_2(z_2)) \\
&\leq \mu_1(x_1y_1z_1)T\mu_2(x_2y_2z_2) \\
&= \mu_1 \otimes \mu_2(x_1y_1z_1, x_2y_2z_2)
\end{aligned}$$

Böylece $\mu_1 \otimes \mu_2 \in Ideal(S_1 \times S_2, v, T_1 \times T_2, L_1 \times L_2)$ dir.

Teorem 2.2.25: $f: S \rightarrow S'$ yarıgrup homomorfisi, $v \in Sub(S, T, L)$ ve T sonsuz $\vee$ - dağılımlı t -norm olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler geçerlidir.

- (i) $\mu \in GBIdeal(S, v, T, L)$ ise $f(\mu) \in GBIdeal(S, f(v), T, L)$,
- (ii) $\mu \in BIdeal(S, v, T, L)$ ise $f(\mu) \in BIdeal(S, f(v), T, L)$,
- (iii) $\mu \in QIdeal(S, v, T, L)$ ise $f(\mu) \in QIdeal(S, f(v), T, L)$,
- (iv) $\mu \in Ideal(S, v, T, L)$ ise $f(\mu) \in Ideal(S, f(v), T, L)$.

İspat:

(i) μ v'nün genelleştirilmiş TL – bi-ideali olsun. $x, y, z \in S'$ için, $\mu \subseteq v$ olduğundan $f(\mu) \subseteq f(v)$ dür.

$$\begin{aligned}
& f(\mu)(x)Tf(v)(y)Tf(\mu)(z) \\
&= V_{f(a)=x}\mu(a)TV_{f(b)=y}v(b)TV_{f(c)=z}\mu(c) \\
&= V_{f(a)=x, f(b)=y, f(c)=z}\mu(a)Tv(b)T\mu(c) \quad (T \text{ sonsuz } \vee \text{ –dağılımlı}) \\
&\leq V_{f(abc)=xyz}\mu(abc) \\
&\leq V_{f(d)=xyz}\mu(d) \\
&= f(\mu)(xyz).
\end{aligned}$$

Buradan $f(\mu) \in GBIdeal(S, f(v), T, L)$.

(ii) Teorem 1.6.11' den ve (i) şikkından $f(\mu) \in BIdeal(S, f(v), T, L)$ dir.

(iii) $\mu \in QIdeal(S, v, T, L)$ olsun. Her $x \in S$ için, $\mu \subseteq v$ olduğundan $f(\mu) \subseteq f(v)$

$$\begin{aligned}
 & (\bigvee_{x=ab} f(\mu)(a)Tf(v)(b)) \wedge (\bigvee_{x=cd} f(v)(c)Tf(\mu)(d)) \\
 &= (\bigvee_{x=ab} (\bigvee_{f(p)=a} \mu(p)T \bigvee_{f(q)=b} v(q))) \wedge (\bigvee_{x=cd} (\bigvee_{f(k)=c} v(k)T (\bigvee_{f(r)=d} \mu(r)))) \\
 &\leq \bigvee_{f(u)=x} (\bigvee_{u=pq} \mu(p)T v(q)) \wedge (\bigvee_{f(v)=x} (\bigvee_{v=kr} v(k)T \mu(r))) \\
 &= \bigvee_{f(l)=x} (\bigvee_{l=pq} \mu(p)T v(q)) \wedge (\bigvee_{l=kr} v(k)T \mu(r)) \\
 &\leq \bigvee_{f(l)=x} \mu(l) \\
 &= f(\mu)(x)
 \end{aligned}$$

Buradan $f(\mu) \in QIdeal(S, f(v), T, L)$.

(iv) $\mu \in Ideal(S, v, T, L)$. $x, y, z \in S'$ için, $\mu \subseteq v$ olduğundan $f(\mu) \subseteq f(v)$ dür.

$$\begin{aligned}
 & f(v)(x)Tf(\mu)(y)Tf(v)(z) \\
 &= \bigvee_{f(a)=x} v(a)T \bigvee_{f(b)=y} \mu(b)T \bigvee_{f(c)=z} v(c) \\
 &= \bigvee_{f(a)=x, f(b)=y, f(c)=z} v(a)T \mu(b)T v(c) \text{ (} T \text{ sonsuz } \bigvee \text{ -dağılımlı)} \\
 &\leq \bigvee_{f(abc)=xyz} \mu(abc) \\
 &\leq \bigvee_{f(d)=xyz} \mu(d) \leq f(\mu)(xyz)
 \end{aligned}$$

Buradan $f(\mu) \in Ideal(S, f(v), T, L)$.

Teorem 2.2.26: $f: S \rightarrow S'$ yarıgrup homomorfisi ve $v' \in Sub(S', T, L)$ olsun. Bu taktirde,

(i) $\mu' \in GBIdeal(S', v', T, L)$ ise $f^{-1}(\mu') \in GBIdeal(S, f^{-1}(v'), T, L)$,

(ii) $\mu' \in BIdeal(S', v', T, L)$ ise $f^{-1}(\mu') \in BIdeal(S, f^{-1}(v'), T, L)$,

(iii) $\mu' \in QIdeal(S', v', T, L)$ ise $f^{-1}(\mu') \in QIdeal(S, f^{-1}(v'), T, L)$,

(iv) $\mu' \in Ideal(S', v', T, L)$ ise $f^{-1}(\mu') \in Ideal(S, f^{-1}(v'), T, L)$.

İspat:

(i) $\mu' v'$ nün genelleştirilmiş TL bi-ideali olsun. $x, y, z \in S$ için,

$$\begin{aligned}
 f^{-1}(\mu')(x)Tf^{-1}(v')(y)Tf^{-1}(\mu')(z) &= \mu'(f(x))Tv'(f(y))T\mu'(f(z)) \\
 &\leq \mu'(f(x)f(y)f(z)) = \mu'(f(xyz)) = f^{-1}(\mu')(xyz)
 \end{aligned}$$

olup, $f^{-1}(\mu') \in GBIdeal(S, f^{-1}(v'), T, L)$ dir.

(ii) Teorem 1.6.11' den ve (i) şikkından $f^{-1}(\mu') \in BIdeal(S, f^{-1}(v'), T, L)$ dir.

(iii) $\mu' v'$ TL quasi-ideali olsun. $\mu' \circ_T v' \cap v' \circ_T \mu' \subseteq \mu'$ olup, $f^{-1}(\mu' \circ_T v' \cap v' \circ_T \mu') \subseteq f^{-1}(\mu')$ dür. Teorem 2.2.3 (iii) ile

$$f^{-1}(\mu') \circ_T f^{-1}(v') \cap f^{-1}(v') \circ_T f^{-1}(\mu') \subseteq f^{-1}(\mu' \circ_T v' \cap v' \circ_T \mu') \subseteq f^{-1}(\mu')$$

olup, $f^{-1}(\mu') \in QIdeal(S, f^{-1}(v'), T, L)$.

(iv) $\mu' v'$ nün TL interior-ideali olsun. $x, y, z \in S$ için,

$$\begin{aligned} f^{-1}(v')(x)Tf^{-1}(\mu')(y)f^{-1}(v')(z) &= v'(f(x))T\mu'(f(y))Tv'(f(z)) \\ &\leq \mu'(f(x)f(y)f(z)) = \mu'(f(xyz)) = f^{-1}(\mu')(xyz) \end{aligned}$$

olup, $f^{-1}(\mu') \in Ideal(S, f^{-1}(v'), T, L)$ dir.

Teorem 2.2.27: S_1, S_2 yarıgruplar, $v_1 \in Sub(S_1, T, L)$, $v_2 \in Sub(S_2, T, L)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $\mu_i \in GBIdeal(S_i, v_i, T, L)$, $i = 1, 2$ ise $\mu_1 x_T \mu_2 \in GBIdeal(S_1 x S_2, v_1 x_T v_2, T, L)$,

(ii) $\mu_i \in BIdeal(S_i, v_i, T, L)$, $i = 1, 2$ ise $\mu_1 x_T \mu_2 \in BIdeal(S_1 x S_2, v_1 x_T v_2, T, L)$,

(iii) $\mu_i \in Ideal(S_i, v_i, T, L)$, $i = 1, 2$ ise $\mu_1 x_T \mu_2 \in Ideal(S_1 x S_2, v_1 x_T v_2, T, L)$.

İspat:

(i) Açık olarak $\mu_1 x_T \mu_2 \subseteq v_1 x_T v_2$ dir. $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2) \in S_1 x S_2$ için,

$$\begin{aligned} (\mu_1 x_T \mu_2)(x)T(v_1 x_T v_2)(y)T(\mu_1 x_T \mu_2)(z) \\ &= \mu_1(x_1)T\mu_2(x_2)Tv_1(y_1)Tv_2(y_2)T\mu_1(z_1)T\mu_2(z_2) \\ &= \mu_1(x_1)Tv_1(y_1)T\mu_1(z_1)T\mu_2(x_2)Tv_2(y_2)T\mu_2(z_2) \\ &\leq \mu_1(x_1 y_1 z_1)T\mu_2(x_2 y_2 z_2) \\ &= (\mu_1 x_T \mu_2)(xyz) \end{aligned}$$

Dolayısıyla, $\mu_1 x_T \mu_2, v_1 x_T v_2$ 'nın genelleştirilmiş TL – bi-idealidir.

(ii) Teorem 1.6.14 ve (i) den elde edilir.

Dolayısıyla $\mu_1 x_T \mu_2, v_1 x_T v_2$ 'nın TL – quasi bi-idealidir.

(iii) $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2) \in S_1 x S_2$ için

$$\begin{aligned} (v_1 x_T v_2)(x)T(\mu_1 x_T \mu_2)(y)T(v_1 x_T v_2)(z) \\ &= v_1(x_1)Tv_2(x_2)T\mu_1(y_1)T\mu_2(y_2)Tv_1(z_1)Tv_2(z_2) \\ &= v_1(x_1)T\mu_1(y_1)Tv_1(z_1)Tv_2(x_2)T\mu_2(y_2)Tv_2(z_2) \\ &\leq \mu_1(x_1 y_1 z_1)T\mu_2(x_2 y_2 z_2) \\ &= (\mu_1 x_T \mu_2)(xyz) \end{aligned}$$

Dolayısıyla, $\mu_1 x_T \mu_2, v_1 x_T v_2$ 'nin TL – interior idealidir.

Tanım 2.2.28: $\mu, v \in F(S, L)$ olsun. Bu durumda $G[\mu, v], B[\mu, v], Q[\mu, v], I[\mu, v]$ L -altkümeleri aşağıdaki şekilde tanımlanacaktır.

- (i) $G[\mu, v] = \mu \cup \mu \circ_T v \circ_T \mu,$
- (ii) $B[\mu, v] = \mu \cup \mu^2 \cup \mu \circ_T v \circ_T \mu,$
- (iii) $Q[\mu, v] = \mu \cup [\mu \circ_T v \cap v \circ_T \mu],$
- (iv) $I[\mu, v] = \mu \cup [v \circ_T \mu \circ_T v].$

Teorem 2.2.29: $v \in Sub(S, T, L), \mu \in F(S, v, L)$ ve T sonsuz V -dağılımlı bir t -norm olsun.

Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir.

- (i) $G[\mu, v]$ L -altkümesi μ 'yu kapsayan v 'nün en küçük genelleştirilmiş TL -bi idealidir,
- (ii) $B[\mu, v]$ L -altkümesi μ 'yu kapsayan v 'nün en küçük TL -bi idealidir,
- (iii) $Q[\mu, v]$ L -altkümesi μ 'yu kapsayan v 'nün en küçük TL -quasi idealidir,
- (iv) $I[\mu, v]$ L -altkümesi μ 'yu kapsayan v 'nün en küçük TL -interor idealidir.

İspat:

(i) $\mu \subseteq v$ ve $\mu \circ_T v \circ_T \mu \subseteq v \circ_T v \circ_T v \subseteq v$ olduğundan, $G[\mu, v] \subseteq v$ dir. Ayrıca, $\mu \subseteq G[\mu, v]$ dir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
 & (\mu \cup \mu \circ_T v \circ_T \mu) \circ_T v \circ_T (\mu \cup \mu \circ_T v \circ_T \mu) \\
 &= (\mu \circ_T v \circ_T \mu) \cup (\mu \circ_T v \circ_T \mu \circ_T v \circ_T \mu) \cup (\mu \circ_T v \circ_T \mu \circ_T v \circ_T \mu) \\
 & \quad \cup (\mu \circ_T v \circ_T \mu \circ_T v \circ_T \mu \circ_T v \circ_T \mu) \\
 & \subseteq (\mu \circ_T v \circ_T \mu) \cup (\mu \circ_T v \circ_T v \circ_T v \circ_T \mu) \cup (\mu \circ_T v \circ_T v \circ_T v \circ_T v \circ_T v \circ_T \mu) \\
 & \subseteq (\mu \circ_T v \circ_T \mu) \cup (\mu \circ_T v \circ_T \mu) \cup (\mu \circ_T v \circ_T \mu) \\
 &= (\mu \circ_T v \circ_T \mu) \\
 & \subseteq \mu \cup \mu \circ_T v \circ_T \mu
 \end{aligned}$$

olup, $G[\mu, v]$ v 'nün genelleştirilmiş TL -bi idealidir.

Son olarak, $\mu \subseteq \theta$ ve $\theta \in GIdeal(S, v, T, L)$ alınsın.

$$\mu \cup \mu \circ_T v \circ_T \mu \subseteq \theta \cup \theta \circ_T v \circ_T \theta \subseteq \theta$$

Buradan $G[\mu, v] \subseteq \theta$ dir. Böylece $G[\mu, v]$ μ 'yu kapsayan v 'nün en küçük genelleştirilmiş TL -bi idealidir.

(ii) $\mu \subseteq v$, $\mu \circ_T \mu \subseteq v \circ_T v \subseteq v$, $\mu \circ_T v \circ_T \mu \subseteq v \circ_T v \circ_T v \subseteq v$ olduğundan, $B[\mu, v] \subseteq v$ dür. Ayrıca, $\mu \subseteq B[\mu, v]$ dir Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
& (\mu \cup \mu^2 \cup \mu \circ_T v \circ_T \mu) \circ_T v \circ_T (\mu \cup \mu^2 \cup \mu \circ_T v \circ_T \mu) \\
&= (\mu \circ_T v \circ_T \mu) \cup (\mu \circ_T v \circ_T \mu^2) \cup (\mu \circ_T v \circ_T \mu \circ_T v \circ_T \mu) \cup (\mu^2 \circ_T v \circ_T \mu) \\
&\quad \cup (\mu^2 \circ_T v \circ_T \mu^2) \cup (\mu^2 \circ_T v \circ_T \mu \circ_T v \circ_T \mu) \cup (\mu \circ_T v \circ_T \mu \circ_T v \circ_T \mu) \\
&\quad \cup (\mu \circ_T v \circ_T \mu \circ_T v \circ_T \mu^2) \cup (\mu \circ_T v \circ_T \mu \circ_T v \circ_T \mu \circ_T v \circ_T \mu) \\
&\subseteq (\mu \circ_T v \circ_T \mu) \cup (\mu \circ_T v \circ_T v \circ_T \mu) \cup (\mu \circ_T v \circ_T v \circ_T v \circ_T \mu) \\
&\quad \cup (\mu \circ_T v \circ_T v \circ_T \mu) \cup (\mu \circ_T v \circ_T v \circ_T v \circ_T \mu) \\
&\quad \cup (\mu \circ_T v \circ_T v \circ_T v \circ_T v \circ_T \mu) \cup (\mu \circ_T v \circ_T v \circ_T v \circ_T v \circ_T \mu) \\
&\quad \cup (\mu \circ_T v \circ_T v \circ_T v \circ_T v \circ_T v \circ_T \mu) \cup (\mu \circ_T v \circ_T v \circ_T v \circ_T v \circ_T v \circ_T v \circ_T \mu) \\
&\subseteq (\mu \circ_T v \circ_T \mu) \\
&\subseteq \mu \cup \mu^2 \cup \mu \circ_T v \circ_T \mu
\end{aligned}$$

Öte yandan,

$$\begin{aligned}
& (\mu \cup \mu^2 \cup \mu \circ_T v \circ_T \mu) \circ_T (\mu \cup \mu^2 \cup \mu \circ_T v \circ_T \mu) \\
&\subseteq \mu^2 \cup \mu^3 \cup \mu^2 \circ_T v \circ_T \mu \cup \mu^3 \cup \mu^4 \cup \mu^3 \circ_T v \circ_T \mu \\
&\quad \cup \mu \circ_T v \circ_T \mu^2 \cup \mu \circ_T v \circ_T \mu^3 \cup \mu \circ_T v \circ_T \mu^2 \circ_T v \circ_T \mu \\
&\subseteq \mu^2 \cup \mu \circ_T v \circ_T \mu \cup \mu \circ_T v \circ_T v \circ_T \mu \cup \mu \circ_T v \circ_T \mu \\
&\quad \cup \mu \circ_T v \circ_T v \circ_T \mu \cup \mu \circ_T v \circ_T v \circ_T v \circ_T \mu \cup \mu \circ_T v \circ_T v \circ_T \mu \\
&\quad \cup \mu \circ_T v \circ_T v \circ_T v \circ_T \mu \cup \mu \circ_T v \circ_T v^2 \circ_T v \circ_T \mu \\
&\subseteq \mu^2 \cup \mu \circ_T v \circ_T \mu \cup \mu \circ_T v \circ_T \mu \cup \mu \circ_T v \circ_T \mu \cup \mu \circ_T v \circ_T \mu \\
&\quad \cup \mu \circ_T v \circ_T \mu \cup \mu \circ_T v \circ_T \mu \cup \mu \circ_T v \circ_T \mu \cup \mu \circ_T v \circ_T \mu \\
&\subseteq \mu^2 \cup \mu \circ_T v \circ_T \mu \subseteq \mu \cup \mu^2 \cup \mu \circ_T v \circ_T \mu
\end{aligned}$$

olup, $\mu \cup \mu^2 \cup \mu \circ_T v \circ_T \mu$ TL altyanıgruptur. Dolayısıyla, $\mu \cup \mu^2 \cup \mu \circ_T v \circ_T \mu$ v' nün TL -bi idealidir.

Son olarak, $\mu \subseteq \theta$ ve $\theta \in BIdeal(S, v, T, L)$ alınsın.

$$\mu \cup \mu^2 \cup \mu \circ_T v \circ_T \mu \subseteq \theta \cup \theta \circ_T \theta \cup \theta \circ_T v \circ_T \theta \subseteq \theta$$

Buradan $B[\mu, v] \subseteq \theta$ dir. Böylece $B[\mu, v]$ μ 'yu kapsayan v 'nün en küçük TL -bi idealidir.

(iii) $\mu \subseteq v$ ve $\mu \circ_T v \cap v \circ_T \mu \subseteq v \circ_T v \cap v \circ_T v \subseteq v$ olduğundan $Q[\mu, v] \subseteq v$ dür. Ayrıca, $\mu \subseteq Q[\mu, v]$ dir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
& (v \circ_T \mu \cup [\mu \circ_T v \cap v \circ_T \mu]) \cap (\mu \cup [\mu \circ_T v \cap v \circ_T \mu]) \circ_T v \\
&= (v \circ_T \mu) \cup (v \circ_T [\mu \circ_T v \cap v \circ_T \mu]) \cap (\mu \circ_T v \cup [\mu \circ_T v \cap v \circ_T \mu] \circ_T v) \\
&\subseteq (v \circ_T \mu \cup (v \circ_T \mu \circ_T v \cap v^2 \circ_T \mu)) \cap (\mu \circ_T v \cup (\mu \circ_T v^2 \cap v \circ_T \mu \circ_T v))
\end{aligned}$$

$$\subseteq v \circ_T \mu \cup (v \cap v \circ_T \mu) \cap (\mu \circ_T v \cup (\mu \circ_T v \cap v)) \\ \subseteq \mu \cup [\mu \circ_T v \cap v \circ_T \mu]$$

olup, $Q[\mu, v]$ v' nün TL –quasi idealidir.

Son olarak, $\mu \subseteq \theta$ ve $\theta \in QIdeal(S, v, T, L)$ alınsın. $\mu \circ_T v \subseteq \theta \circ_T v$ ve $v \circ_T \mu \subseteq v \circ_T \theta$ olduğundan,

$\mu \cup [\mu \circ_T v \cap v \circ_T \mu] \subseteq \theta \cup [\theta \circ_T v \cap v \circ_T \theta] \subseteq \theta$ dır. Böylece $Q[\mu, v]$ μ' yu kapsayan v' nün en küçük TL -quasi idealidir.

(iv) $\mu \subseteq v$ ve $v \circ_T \mu \circ_T v \subseteq v \circ_T v \circ_T v \subseteq v$ olduğundan $I[\mu, v] \subseteq v$ dır. Ayrıca, $\mu \subseteq I[\mu, v]$ dır. Diğer taraftan,

$$v \circ_T (\mu \cup [v \circ_T \mu \circ_T v]) \circ_T v = v \circ_T \mu \circ_T v \cup v^2 \circ_T \mu \circ_T v^2 \subseteq v \circ_T \mu \circ_T v \cup \\ v \circ_T \mu \circ_T v \subseteq \mu \cup [v \circ_T \mu \circ_T v]$$

olup, $I[\mu, v]$ v' nün TL –interior idealidir.

Son olarak, $\mu \subseteq \theta$ ve $\theta \in Ideal(S, v, T, L)$ alınsın.

$$\mu \cup [v \circ_T \mu \circ_T v] \subseteq \theta \cup v \circ_T \theta \circ_T v \subseteq \theta$$

olduğundan, $I[\mu, v]$ μ' yu kapsayan v' nün en küçük TL -interior idealidir.

Sonuç 2.2.30: $v \in Sub(S, T, L)$, $\mu_1, \mu_2 \in F(S, v, L)$ ve T sonsuz $\vee$ - dağılımlı bir t -norm olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir.

(i) $\mu_1, \mu_2 \in GBI(S, v, T, L)$,

$$\mu_1 \vee \mu_2 = G[\mu_1 \cup \mu_2, v] = \mu_1 \cup \mu_2 \cup (\mu_1 \circ_T v \circ_T \mu_2) \cup (\mu_2 \circ_T v \circ_T \mu_1)$$

(ii) $\mu_1, \mu_2 \in BI(S, v, T, L)$,

$$\mu_1 \vee \mu_2 = B[\mu_1 \cup \mu_2, v] \\ = \mu_1 \cup \mu_2 \cup (\mu_1 \circ_T \mu_2) \cup (\mu_2 \circ_T \mu_1) \cup (\mu_1 \circ_T v \circ_T \mu_2) \\ \cup (\mu_2 \circ_T v \circ_T \mu_1)$$

(iii) $\mu_1, \mu_2 \in QI(S, v, T, L)$,

$$\mu_1 \vee \mu_2 = Q[\mu_1 \cup \mu_2, v] \\ = \mu_1 \cup \mu_2 \cup ((\mu_1 \circ_T v) \cap (v \circ_T \mu_2)) \cup ((\mu_2 \circ_T v) \cap (v \circ_T \mu_1))$$

(iv) $\mu_1, \mu_2 \in II(S, v, T, L)$,

$$\mu_1 \vee \mu_2 = II[\mu_1 \cup \mu_2, v] = \mu_1 \cup \mu_2 \cup (v \circ_T \mu_1 \circ_T v) \cup (v \circ_T \mu_2 \circ_T v)$$

3. SONUÇLAR

Bu tezin birinci bölümünde TL –altıyarıgrupun TL -sol ideal, TL -sağ ideal ve TL -iki yanlı ideal tanımları verilmiş, aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. Aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

- 1) TL – altıyarıgrupun TL –sol (sağ, iki yanlı) ideallerinin karakterizasyonu verilmiştir.
- 2) $Lideal(S, v, T, L) (Rideal(S, v, T, L), Ideal(S, v, T, L)) \subseteq "$ bağıntısına göre tam kafes belirttiği gösterilmiştir. Ayrıca bu kafeslerin infimum ve supremumları belirlenmiştir.
- 3) TL – altıyarıgrupun TL –sol (sağ, iki yanlı) idealleri kullanılarak yeni TL –sol (sağ, iki yanlı) idealler üretilmiştir.
- 4) TL –altıyarıgrupun TL –sol (sağ, iki yanlı) idealinin görüntüsü, ters-görüntüsü ve kartezyen çarpımlarında aynı özellikte olduğu gösterilmiştir.
- 5) Son olarak μ 'yu kapsayan v 'nün en küçük TL –sol (sağ, iki yanlı) ideali belirlenmiştir.

Bu tezin ikinci kısmında TL –altıyarıgrupun, genelleştirilmiş TL –bi ideali, TL –bi ideali, TL –quasi ideali ve TL –interior ideali tanımları verilmiş ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

- 1) TL –altıyarıgrupun, genelleştirilmiş TL –bi ideali (bi, quasi, interior) olması için gerek ve yeter şart verilmiştir.
- 2) TL –altıyarıgrupun, genelleştirilmiş TL –bi ideali, TL –bi ideali, TL –quasi ideali ve TL –interior ideali arasındaki ilişkiler incelenmiştir.
- 3) TL –altıyarıgrupun, genelleştirilmiş TL –bi ideali (bi, quasi, interior) ile güçlü seviye alt kümesi arasındaki ilişki incelenmiştir.
- 4) TL –altıyarıgrupun, genelleştirilmiş TL –bi (bi, quasi, interior) ideallerinin kümesi $" \subseteq "$ bağıntısına göre tam kafes belirttiği gösterilmiştir. Ayrıca bu kafeslerin infimumları belirlenmiştir.
- 5) TL –altıyarıgrupun, genelleştirilmiş TL –bi (bi, quasi, interior) idealleri kullanılarak yeni TL –altıyarıgrupun, TL –genelleştirilmiş bi idealleri (bi, quasi, interior) üretilmiştir.

- 6) TL - altyarı grubun, genelleştirilmiş $TL - bi$ (bi, quasi, interior) ideallerinin görüntüsü, ters-görüntüsü ve kartezyen çarpımlarında aynı özellikte olduğu gösterilmiştir.
- 7) Son olarak μ 'yu kapsayan ν 'nün en küçük genelleştirilmiş $TL bi$ (bi, quasi, interior) ideali belirlenmiştir.



4. ÖNERİLER

- 1) TL - altyarıgrubun, genelleştirilmiş TL – bi (bi, quasi, interior) ideallerinin kafesinin modülerlik, dağılımlılık ve komplementlenebilirlik özellikleri incelenebilir.
- 2) Yapılan çalışmalar T sonsuz V - dağılımlı bir t -norm olmadığı durum için incelenebilir.
- 3) Elde edilen teorem ve sonuçlar literatürde var olan Relative TL -idealler ile yeniden değerlendirilebilir.



5. KAYNAKLAR

- Ajmal, N., & Thomas, K. V. (1994). Fuzzy lattices. *Information sciences*, 79(3-4), 271-291.
- Ajmal, N., & Thomas, K. V. (1998). The join of fuzzy algebraic substructures of a group and their lattices. *Fuzzy sets and systems*, 99(2), 213-224.
- Ajmal, N., & Jahan, I. (2015). Generated L -subgroup of an L -group. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 12(2), 129-136.
- Anthony, J. M., & Sherwood, H. (1979). Fuzzy groups redefined. *Journal of mathematical analysis and applications*, 69(1), 124-130.
- Bayrak, D., & Yamak, S. (2015). A note on the lattice of TL -submodules of a module. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 10(2).
- Bhambri, S. K., & Kumar, P. (2009). Lattices of Fuzzy Submodules. In *International mathematical forum* 4(13), 653-659).
- Birkhoff, G. (1940). *Lattice theory*. Rhode Island: American Mathematical Soc..
- Chon, I. (2011). On fuzzy bi-ideals in semigroups. *Korean Journal of Mathematics*, 19(3), 321-330.
- Clifford, A., & Preston, G. (1976). *Algebraic Theory of Semigroups*. Rhode Island.: American Mathematical Soc..
- Dixit, V., Kumar, R., & Ajmal, N. (1991). Fuzzy ideals and fuzzy prime ideals of a ring. *Fuzzy sets and systems*, 44(1), 127-138.
- Dheena, P., & Mohanraaj, G. (2011). T -fuzzy ideals in rings. *International journal of computational cognition*, 9(2).
- Goguen, J. A. (1967). L -fuzzy sets. *Journal of mathematical analysis and applications*, 18(1), 145-174.
- Howie, J. M. (1976). *An introduction to semigroup theory*. London: Academic Press.
- Hungerford, T. W. (2012). *Algebra* . New York: Springer Science & Business Media.
- Iséki, K. (1956). A characterization of regular semigroup. *Proc. Japan Acad.*, 32, 676-677.
- Jahan, I., Davvaz, B., & Ajmal, N. (2017). Nilpotent L -subgroups satisfy the normalizer condition. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 33(3), 1841-1854.
- Jahan, I., Ajmal, N., & Davvaz, B. (2022). Subnormality and theory of L -subgroups. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 15(4), 2086-2115.
- Klement, E. P., Mesiar, R., & Pap, E. (2000). *Triangular norms*. Dordrecht: Springer Science & Business Media.

- Kuroki, N. (1980). Fuzzy bi-ideals in semigroups. *Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli*, 28(1), 17-21.
- Kuroki, N. (1981). On fuzzy ideals and fuzzy bi-ideals in semigroups. *Fuzzy sets and systems*, 5(2), 203-215.
- Kuroki, N. (1991). On fuzzy semigroups. *Information sciences*, 53(3), 203-236.
- Kuroki, N. (1992). Fuzzy generalized bi-ideals in semigroups. *Information sciences*, 66(3), 235-243.
- Lajos, S. (1968). On Characterization of Regular Semigroups. *Proc. Japan Acad.*, 44(5).
- Lajos, S. (1969). On the bi ideals in Semigroups. *Proc. Japan Acad.*, 45.
- Malik, D. S., Mordeson, J. N., & Nair, P. S. (1992). Fuzzy normal subgroups in fuzzy subgroups. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 29(1), 1-8.
- Martinez, L. (1999). Prime and primary L -fuzzy ideals of L -fuzzy rings. *Fuzzy Sets and Systems*, 101(3), 489-494.
- Mordeson, J. N., Malik, D. S., & Kuroki, N. (2012). *Fuzzy semigroups*. Omaha: Springer.
- Ray, S. (1997). Modified TL -subgroups of a group. *Fuzzy sets and systems*, 91(3), 375-387.
- Samuel, A., & Rodgers, B. A. (1965). *Ideals In Semigroups*. North Texas State University, Yüksek Lisans Tezi, Denton.
- Sessa, S. (1984). On fuzzy subgroups and fuzzy ideals under triangular norms. *Fuzzy Sets and Systems*, 13(1), 95-100.
- Steinfeld, O. (1980). Quasi-ideals in rings and semigroups. *Semigroup Forum*, 19, 371-372.
- Yu, Y., & Wang, Z. (1994). TL -subrings and TL -ideals. Part 1. Basic concepts. *Fuzzy sets and Systems*, 68(1), 93-103.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3), 338-353.
- Zahedi, M. M. (1993). Some results on L -fuzzy modules. *Fuzzy Sets and Systems*, 55(3), 355-361.
- Zhi-Wen, M., & Xue-Ping, W. (1995). Fuzzy ideals generated by fuzzy sets in semigroups. *Information sciences*, 86(4), 203-210.

ÖZGEÇMİŞ

Emine Funda Okumuş, ilköğrenimini İsmet İnönü İlköğretim okulunda, lise öğrenimini Adana Erkek Lisesinde tamamladı. 2010-2011 Eğitim- Öğretim yılında girdiği Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Bölümünü 2015 yılında bölüm birincisi ve fakülte birincisi olarak tamamladı. 2016 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Billimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında bütünleşik doktora öğrenimine başlamıştır. 2018 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak atanan Okumuş, halen görevine devam etmektedir.

