

**TOPLAMSAL İNTEGRAL TİP OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM
ÖZELLİKLERİ**

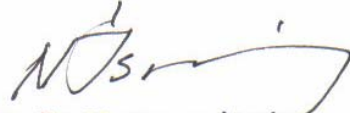
İsmet YÜKSEL

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ŞUBAT 2006
ANKARA**

İsmet YÜKSEL tarafından hazırlanan "TOPLAMSAL İNTEGRAL TİP OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ" adlı bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.


Doç. Dr. Nurhayat İSPİR
Tez Yöneticisi

Bu çalışma jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Abdullah ALTIN

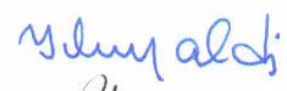
Üye : Prof. Dr. Ahmet Ali ÖCAL

Üye : Doç. Dr. Bahri TURAN

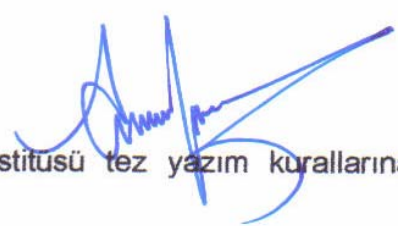
Üye : Doç. Dr. Yılmaz AKDİ

Üye : Doç. Dr. Nurhayat İSPİR




Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.



TOPLAMSAL İNTEGRAL TİP OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM

ÖZELLİKLERİ

(Doktora Tezi)

İsmet YÜKSEL

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Şubat 2006

ÖZET

Bu tezde, Srivastava ve Gupta tarafından tanımlanmış olan $G_{n,c}$ toplamsal integral tip lineer pozitif operatörler genel ailesinin farklı fonksiyon uzaylarında yaklaşım özellikleri araştırılmış ve şu sonuçlar elde edilmiştir. İlk olarak, $[0, \infty)$ da sürekli ve ∞ da polinomsal büyüme hızına sahip fonksiyonların uzayında $G_{n,c}$ operatörler dizisinin ağırlıklı yaklaşım özellikleri incelenerek ağırlıklı süreklilik modülü cinsinden bu operatörlerin yaklaşım hızı elde edildi. İkinci olarak, $G_{n,c}$ operatörler dizisinin simultaneous yaklaşım özellikleri araştırılarak noktasal yakınsaklık teoremi ve Voronowskaja tip asimptotik yaklaşım teoremi elde edildi. Ayrıca düzgün fonksiyonlar için $G_{n,c}$ operatörleri ile yaklaşımın derecesine ait bir oran verildi. Son olarak, $G_{n,c}$ operatörlerinin Bezier varyantı tanımlanarak sınırlı salınlı fonksiyonlar için bu operatörler dizisinin yaklaşım hızı üzerine bir oran elde edildi.

Bilim Kodu : 204.1.095

Anahtar Kelimeler :Toplamsal integral tip operatörler, yaklaşım hızı, simultaneous yaklaşım, Bezier varyant, sınırlı salınlı fonksiyonlar.

Sayfa Adedi : 77

Tez Yöneticisi : Doç. Dr. Nurhayat İSPİR

APPROXIMATION PROPERTIES BY SUMMATION INTEGRAL TYPE

OPERATORS

(Ph.D.Thesis)

İsmet YÜKSEL

GAZİ UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

February 2005

ABSTRACT

In this thesis, we investigated the approximation properties of a general family of summation integral type linear positive operators $G_{n,c}$, defined by Srivastava and Gupta, in different function spaces and we obtained the following results. Firstly, we investigated the weighted approximation properties of the sequence of the operators $G_{n,c}$ for continuous functions on $[0, \infty)$ and having polynomial growth at infinity. We estimated rate of convergence of these operators in terms of the weighted modulus of continuity. Secondly, we studied the properties of simultaneous approximation by the operators $G_{n,c}$. We established the basic pointwise convergence theorem and Voronowskaja type asymptotic approximation theorem. Moreover, we gave an estimate of degree of approximation by $G_{n,c}$ for smooth functions. Finally, we introduced the Bezier variant of the operators $G_{n,c}$ and obtained an estimate of the rate of convergence of sequence of these operators for functions of bounded variation.

Science Code : 204.1.095

Key Words : Summation integral type operators, rate of convergence, simultaneous convergence, Bezier variant, bounded variation functions.

Page Number : 77

Adviser : Doç. Dr. Nurhayat İSPİR

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren değerli Hocam Doç.Dr. Nurhayat İSPİR'e, manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan sevgili eşim Sevda' ya teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	5
2.1. Lineer Pozitif Operatörler	5
2.2. Lineer Pozitif Operatörler Dizisinin Yakınsaklık Koşulları	6
2.3. Ağırlıklı Uzaylar	7
2.4. Sınırlı Salınlı Fonksiyonlar	10
3. $G_{n,c}$ OPERATÖR DİZİLERİNİN AĞIRLIKLIL YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ	12
3.1. $G_{n,c}$ Operatör Dizisi İle Ağırlıklı Yaklaşım	12
3.2. $G_{n,c}$ Operatörünün Ağırlıklı Süreklilik Modülüyle Yaklaşım Hızının Hesaplanması	21
4. $G_{n,c}$ OPERATÖR DİZİSİNİN SİMÜLTANEOUS YAKLAŞIMI	27
5. TOPLAMSAL İNTEGRAL TİP OPERATÖRLERİN BEZİER VARYANTI İLE YAKLAŞIM HIZININ HESAPLANMASI	52
5.1. $G_{n,c}$ Operatör Dizisinin Bezier Varyantı	52
5.2. M_n Operatör Dizisinin Bezier Varyantı	61
KAYNAKLAR	74
ÖZGEÇMİŞ	77

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simge ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$C[a, b]$	Sonlu aralıkta sürekli fonksiyon uzayı
$\rho(x)$	Ağırlık fonsiyonu
$B_\rho(\mathbb{R})$	Her $x \in \mathbb{R}$ için $ f(x) \leq M_f \rho(x)$ koşulunu sağlayan fonksiyon uzayı
$C_\rho(\mathbb{R})$	Her $x \in \mathbb{R}$ için $ f(x) \leq M_f \rho(x)$ koşulunu sağlayan sürekli fonksiyon uzayı
C_ρ^k	$\left\{ f \in C_\rho : \lim_{ x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = k_f < \infty \right\}$ altuzayı
$\ f\ _\rho$	$B_\rho(\mathbb{R})$ uzayında tanımlanan norm
$< a, b >$	$[a, b], [a, b), (a, b], (a, b), (-\infty, \infty), (-\infty, a), (a, \infty)$ aralıklarından biri
$\omega(f, \delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\Omega(f, \delta)$	f fonksiyonunun ağırlıklı süreklilik modülü
$BV_\beta[0, \infty)$	Sonlu alt aralıkta, her $x \in \mathbb{R}$ için $ f(x) \leq M_f (1+x)^\beta$ koşulunu sağlayan sınırlı salınımlı fonksiyonlar uzayı
$V_a^b(f)$	f nin $[a, b]$ aralığındaki toplam salınımı

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisinin merkezi teoremlerinden biri keyfi bir fonksiyonun daha basit, daha kullanışlı olan diğer fonksiyonlar cinsinden bir gösterimini elde etmektir. Örneğin bir fonksiyonu kuvvet serilerine açmak için uğraşırken polinomlar cinsinden fonksiyonun bir gösterimini bulmaya çalışırız. Böyle bir gösterim sıklıkla çözümlenemez olan bir fonksiyon hakkında bilgi elde etmenin basit yolunu verir. Polinomların sonlu çoklukta sayılar cinsinden gösterilmelerinin avantajları kullanılarak bir polinomun değerini bilgisayarlarda hesaplamak kolaydır. O halde bir fonksiyonu doğrudan değerlendirmek ve zor bir program yazarak sonunda yaklaşık bir cevap bulmak yerine fonksiyonlara yaklaşan iyi bir polinom bulup bu polinom için paket programlar kullanarak daha net bir sonuç elde edebiliriz. Bu durumda basit ve daha kullanışlı fonksiyonların sınıfı ne olmalıdır ve yaklaşabileceğimiz fonksiyonlar hangi tür fonksiyonlardır sorusu gündeme gelmektedir.

Bilindiği gibi sonlu $[a,b]$ aralığında sürekli her f fonksiyonu için $f(x)$ e $[a,b]$ aralığında düzgün yakınsayan bir $\{P_n(x)\}$ polinom dizisinin varlığı Weierstrass tarafından ispatlanmıştır (1,2). Bu teoremi ispatlamak isteyen matematikçilerden her birisi bir dizi oluşturmuş ve bu dizilerin oluşturulma tekniği lineer pozitif operatörlerle yaklaşım problemini ortaya çıkarmıştır. Bernstein (3) $[0,1]$ aralığında sürekli fonksiyonlara yaklaşım için

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, 0 \leq x \leq 1$$

toplamsal operatörünü tanımlayarak bu operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığında düzgün olarak f fonksiyonuna yaklaştığını ispatlamıştır. Bohman (4) özel bir lineer pozitif operatörler dizisi tanımlayarak bu tip dizilerin $[0,1]$ kapalı aralığında sürekli fonksiyonlara yaklaşım koşullarını vermiş daha sonra Korovkin (1,2) daha genel durumda lineer pozitif operatörler dizisinin yaklaşım problemini ele alarak “Korovkin Teoremi” olarak bilinen teoremini ispatlamıştır.

Süreksiz fonksiyonlar için Chlodovsky (5), Herzog ve Hill (6) tarafından f nin $[0,1]$ aralığında sınırlı ve bir $x \in (0,1)$ noktasında birinci çeşit süreksizliği olması halinde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(f; x) = \frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)] \quad [1.1]$$

olduğu ispatlanmıştır. Benstein operatörünün birinci çeşit süreksizliği olan fonksiyonlar için yaklaşım hızı Cheng (7) tarafından elde edilmiştir. Belirtelim ki f , $[0,1]$ aralığında sınırlı salınımlı ise bu durumda $[0,1]$ aralığındaki her x için Eş. 1.1 ifadesi açık olarak doğrudur.

$[0,1]$ aralığında Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlara yaklaşmak için Durrmeyer (2) Bernstein polinomlarının integral modifikasyonunu

$$p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

olmak üzere

$$D_n(f; x) = (n+1) \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) \int_0^1 p_{n,k}(t) f(t) dt \quad [1.2]$$

olarak tanımladı ve bu operatörlerin yaklaşım özelliklerini inceledi. Bu operatörlerin sınırlı salınımlı fonksiyonlar için yaklaşım hızına ait sonuçlar Guo (8) tarafından verilmiştir. Aynı zamanda Eş. 1.2 de verilen bu operatörün bazı küçük modifikasyonları yapılarak sınırlı salınımlı fonksiyonlar için yaklaşım hızına ait tahminler elde edilmiştir (9). Sınırlı salınımlı fonksiyonlara, Bojanic (10) Fourier serileriyle, Bojanic ve Vuilleumier (11) Fourier- Legendre serileriyle, Bojanic ve Cheng (12) Hermite- Fejer polimolarıyla, Cheng (13) Benstein polinomlarıyla, Guo ve Khan (14) Baskakov ve Mirakjan- Szasz operatörleriyle yaklaşım hızı tahmininde

bulundular. Bu sonuçlar $[0, \infty)$ da noktasal olarak veya sonlu kapalı alt aralıklarda verilmiştir.

Agrawal ve Thamer (15) temel fonksiyonları klasik Baskakov fonksiyonları olan bir toplamsal-integral tip operatör tanımlayarak bu operatörlerin $[0, \infty)$ aralığında sürekli ve polinomsal büyüme hızına sahip fonksiyonlara simultaneous (aynı anda, eşzamanlı) yaklaşım özelliklerini araştırdılar. (16) da Srivastava ve Gupta özel durumları yaklaşım teorisinde önemli bir yer tutan bazı önemli operatörleri içeren toplamsal-integral tip operatörlerin bir genel dizisini tanımladı. Bu operatörler dizisinin, $[0, \infty)$ un sonlu alt aralıklarında sınırlı salınımlı fonksiyonlara ayrışım tekniği ile yakınsaklık hızı üzerine bir tahmin verdiler. Bu operatörler

$$\phi_{n,c}(x) = \begin{cases} e^{-nx}, & c = 0 \\ (1+cx)^{-n/c}, & c = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

ve

$$p_{n,k}(x; c) = \frac{(-x)^k}{k!} \phi_{n,c}^{(k)}(x)$$

olmak üzere

$$G_{n,c}(f; x) = n \sum_{k=1}^{\infty} p_{n,k}(x; c) \int_0^{\infty} p_{n+c,k-1}(t; c) f(t) dt + p_{n,0}(x; c) f(0)$$

biçiminde tanımlanmaktadır.

Bu tezde amacımız, $G_{n,c}$ genel lineer pozitif operatörler dizisinin farklı yapıdaki fonksiyon uzaylarında yaklaşım özelliklerini araştırmaktır.

Bu tez birinci bölüm giriş bölümü olmak üzere beş bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan temel kavram ve teoremler kısaca verilmiştir.

Tezin üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümleri tamamen orjinal olup aşağıdaki incelemeler yapılmıştır.

Üçüncü bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda $[0, \infty)$ aralığında sürekli ve ∞ da polinomsal büyüyen fonksiyonlara $G_{n,c}$ operatörlerinin ağırlıklı yaklaşım özellikleri incelenmiştir. İkinci kısımda bir ağırlıklı süreklilik modülü tanımlanarak yaklaşım hızına ilişkin bir sonuç elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde $G_{n,c}$ operatörlerinin simultaneous yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Simultaneous yaklaşımda üç problem üzerinde durulmuştur. İlk olarak operatörün r inci basamaktan türevinin fonksiyonun r inci basamaktan türevine noktasal yaklaşımı verilmiş ikinci olarak $[0, \infty)$ aralığında r inci basamaktan türevlenebilen fonksiyonlar için Voronowskaja tip asimptotik yaklaşım incelenmiş ve son olarak da düzgün fonksiyonlara yaklaşım oranı verilmiştir.

Beşinci bölüm $G_{n,c}$ operatörlerinin daha genel bir durumu olan Bezier varyantının yaklaşım özelliklerinin incelendiği bölümdür. Bu bölümün ilk kısmında $G_{n,c}$ operatörünün Bezier varyantı tanımlanarak operatörün sınırlı salınımlı fonksiyonlara yaklaşım hızına ilişkin bir teorem elde edilmiştir. Bu teorem (16) de verilen teoremden daha geneldir ve operatörün özel durumları (17-20) deki sonuçlarında içermektedir. İkinci kısmında $G_{n,c}$ operatörünün $c = 1$ durumunun basit modifikasyonu olan (15) de tanımlanan M_n operatörlerinin Bezier varyantını tanımlıyarak bu operatörler dizisinin $[0, \infty)$ aralığının sonlu alt aralıklarında sınırlı salınımlı fonksiyonlara yaklaşım hızı olasılık teorisinin bazı sonuçları kullanılarak elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Lineer Pozitif Operatörler

X ve Y lineer normlu fonksiyon uzayları olsun. X den alınan her f fonksiyonuna Y de bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralına X den Y ye operatör denir. $f \in X$ ve x , g nin tanım kümesine ait olmak üzere $g(x) = L(f; x)$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.1.1: $L : X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. Her $f_1, f_2 \in X$ ve $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$L(a_1 f_1 + a_2 f_2; x) = a_1 L(f_1; x) + a_2 L(f_2; x)$$

eşitliği sağlanıyor ise L ye lineer operatör denir.

Tanım 2.1.2: $L : X \rightarrow Y$ lineer operatör olmak üzere Kabul edelim ki $X^+ = \{f \in X : f(t) \geq 0\}$ ve $Y^+ = \{g \in Y : g(x) \geq 0\}$ olsun. Eğer, X uzayında tanımlanan L lineer operatörü, X^+ kümesindeki her bir f fonksiyonunu Y^+ kümesinde bir fonksiyona dönüştürüyor ise L operatörüne lineer pozitif operatör denir.

L lineer pozitif operatör ise $L(X^+) \subset Y^+$ sağlanır. Yani $f(t) \geq 0$ olduğunda $L(f; x) \geq 0$ olur.

Önerme 2.1.3: $L : X \rightarrow Y$ lineer pozitif operatör olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i) $f, g \in X$ olmak üzere $\forall t$ için $f(t) \leq g(t)$ ise $L(f(t); x) \leq L(g(t); x)$ dir.

Buna L lineer pozitif operatörünün “monotonluk özelliği”denir.

$$\text{ii) } |L(f; x)| \leq L(|f|; x).$$

2.2 Lineer Pozitif Operatörler Dizisinin Yakınsaklık Koşulları

1951 yılında H. Bohmann, toplam şeklinde lineer pozitif operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığında sürekli $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşması problemini incelemiştir.

H. Bohmann (4) göstermiştir ki $x \in [0,1]$, $0 \leq \alpha_{n,k} \leq 1$ ve $k < r$ için $\alpha_{n,k} < \alpha_{n,r}$ olduğunda

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f(\alpha_{n,k}) p_{n,k}(x); \quad p_{n,k}(x) \geq 0$$

lineer pozitif operatörler dizisinin, $n \rightarrow \infty$ için $[0,1]$ aralığında sürekli f fonksiyonuna düzgün yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter koşul üç tanedir. Bunlar:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(1; x) - 1\|_{C[0,1]} &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(t; x) - x\|_{C[0,1]} &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(t^2; x) - x^2\|_{C[0,1]} &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilirler.

Aşıkardır ki Bohmann' ın araştırdığı operatörlerin değeri, f fonksiyonunun $[0,1]$ aralığının dışındaki değerlerden bağımsızdır.

1953 yılında P. P. Korovkin, H. Bohmann' ın teoremini daha genel bir halde vermiştir.

Teorem 2.2.1 (Korovkin Teoremi): $\{L_n\}$ lineer pozitif operatörler dizisi olsun. $\alpha_n(x), \beta_n(x)$ ve $\gamma_n(x)$, $[a, b]$ de düzgün olarak sifıra yakınsak olmak üzere $\forall x \in [a, b]$ için

$$L_n(1; x) = 1 + \alpha_n(x)$$

$$L_n(t; x) = x + \beta_n(x)$$

$$L_n(t^2; x) = x^2 + \gamma_n(x)$$

koşulları sağlanıyorsa bu durumda $L_n(f; x)$, $[a, b]$ aralığı üzerinde $f(x)$ e düzgün olarak yakınsar. Burada f , $[a, b]$ de sürekli, a da soldan, b de sağdan sürekli ve $\mathbb{R}$ de sınırlı bir fonksiyondur (1,2).

Korovkin teoremi sonlu aralıklarda sağlanmasına rağmen sonsuz aralıkta sağlanmaz. Sınırsız bölgelerde Korovkin teoreminin sağlanmadığını ve hangi koşullar altında problemin sağlandığını 1976 yılında A. D. Gadjiev (21,22) de vermiştir.

Bu konuda Gadjiev' in ispatladığı teoremleri verelim.

2.3. Ağırlıklı Uzaylar

$\varphi(x)$ reel eksen de sürekli monoton artan fonksiyon olmak üzere $\rho(x) = 1 + [\varphi(x)]^2$ olsun. Bu durumda

$$|f(x)| \leq M_f \rho(x), \quad M_f > 0$$

eşitsizliğini sağlayan reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonların kümesini $B_\rho(\mathbb{R})$ ile $B_\rho(\mathbb{R})$ uzayındaki sürekli fonksiyonların kümesini $C_\rho(\mathbb{R})$ ile gösterelim. Bu uzaylar

$$\|f\|_{\rho} = \sup \left\{ \frac{|f(x)|}{\rho(x)} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

normu ile birer normlu uzay olur. Burada ρ ya ağırlık fonksiyonu $B_{\rho}(\mathbb{R})$ ve $C_{\rho}(\mathbb{R})$ uzaylarına ise ağırlıklı uzaylar denir. $C_{\rho}(\mathbb{R})$ uzayının

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = k_f < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlarının kümesini $C_{\rho}^k(\mathbb{R})$ ile gösterelim. $C_{\rho}^k(\mathbb{R})$ uzayı $C_{\rho}(\mathbb{R})$ uzayının bir alt uzayı olur. Aşağıdaki teoremler (21-23) de bulunabilir.

Teorem 2.3.1 (21,22): $\varphi(x)$ reel ekseninde sürekli monoton artan fonksiyon olmak üzere $\rho(x) = 1 + [\varphi(x)]^2$ ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda

(i). $C_{\rho}(\mathbb{R})$ uzayından $B_{\rho}(\mathbb{R})$ uzayına öyle $\{A_n\}$ lineer pozitif operatörler dizisi tanımlanabilir ki bu operatörler dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(\varphi^v; x) - \varphi^v(x)\|_{\rho} = 0, \quad v = 0, 1, 2$$

[2.1]

koşulları sağlanmasına rağmen öyle bir $f^* \in C_{\rho}(\mathbb{R})$ fonksiyonu bulunabilir ki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(f^*; x) - f^*(x)\|_{\rho} \geq 1 \text{ olur.}$$

(ii). $C_{\rho}(\mathbb{R})$ uzayından $B_{\rho}(\mathbb{R})$ uzayına bir $\{A_n\}$ lineer pozitif operatörler dizisi Eş.

2.1 koşullarını sağlıyor ise her $f \in C_{\rho}^k(\mathbb{R})$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(f; x) - f(x)\|_{\rho} = 0$ eşitliği sağlanır.

$p \geq 1$ olmak üzere L_p uzayı p -yinci mertebeden Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonların uzayı olsun. Şimdi sonsuz bölgede $L_{p,\rho}$ uzayını tanımlayalım. $\rho(x) = 1 + x^2$ ağırlık fonksiyonu, $h > 0$ keyfi sabit ve $p \geq 1$ için

$$L_{p,\rho} = \left\{ f : \left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(u)|^p du \right)^{1/p} \leq M_f \rho(x), M_f > 0 \right\}$$

biçiminde tanımlanır. Bu uzayda norm

$$\|f\|_{p,\rho} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(u)|^p du \right)^{1/p}}{\rho(x)}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzayın iki alt uzayını

$$L_{p,\rho}^k = \left\{ f \in L_{p,\rho} : \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(u)|^p du \right)^{1/p}}{\rho(x)} = k_f < \infty \right\}$$

ve

$$L_{p,\rho}^0 = \{ f \in L_{p,\rho}^k : k_f = 0 \}$$

olarak tanımlayabiliriz.

Teorem 2.3.2 (23): $L_{p,\rho}$ dan $L_{p,\rho}$ ya dönüşüm yapan öyle lineer pozitif $\{A_n\}$ operatörler dizisi tanımlayabiliriz ki aşağıdaki şartlar geçerli olur.

(i) Öyle bir K pozitif sayısı vardırki her n için $\|A_n\|_{L_{p,\rho} \rightarrow L_{p,\rho}} \leq K$ sağlanır.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(t^v; x) - x^v\|_{L_{p,\rho}} = 0, v = 0, 1, 2$

sağlanır ve $L_{p,\rho}$ da öyle bir f^* fonksiyonu bulabiliriz ki $n \rightarrow \infty$ için $\|A_n(f^*; x) - f^*\|_{L_{p,\rho}} > 0$ olur.

Teorem 2.3.3 (23): $\{A_n\}$, $L_{p,\rho}$ dan $L_{p,\rho}$ ya dönüşüm yapan lineer pozitif operatörler dizisi olmak üzere

(i) Öyle bir K pozitif sayısı vardırki her n için $\|A_n\|_{L_{p,\rho} \rightarrow L_{p,\rho}} \leq K$ ve

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(t^v; x) - x^v\|_{L_{p,\rho}} = 0, v = 0, 1, 2$

koşulları sağlansın. Bu durumda her $f \in L_{p,\rho}^k$ için $n \rightarrow \infty$ iken $\|A_n(f; x) - f\|_{L_{p,\rho}} \rightarrow 0$ olur.

2.4. Sınırlı Salınlımlı Fonksiyonlar

f , $[a, b]$ üzerinde tanımlı, reel değerli bir fonksiyon, $p = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $[a, b]$ aralığının bir parçalanması ve P de $[a, b]$ aralığının tüm p parçalanmalarının kümesi olsun. f nin $[a, b]$ üzerindeki toplam salınlımı

$$V_a^b(f) = \sup_{p \in P} \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

genişletilmiş reel sayıdır.

Tanım 2.4.1: Eğer, $V_a^b(f)$ sonlu ise f fonksiyonuna $[a, b]$ üzerinde sınırlı salınlımlıdır denir.

$[a, b]$ üzerindeki sınırlı salınlımlı fonksiyonların sınıfı $BV[a, b]$ ile gösterilir.

Önerme 2.4.2: Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde monoton ise f sınırlı salınımlıdır.

Önerme 2.4.3: Eğer f_1 ve f_2 $[a, b]$ üzerinde azalmayan iki fonksiyon ise $f_1 - f_2 \in BV[a, b]$ dir.

Önerme 2.4.4: Eğer $f \in BV[a, b]$ ise f azalmayan iki fonksiyonun farkıdır.

Önerme 2.4.5: Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde sınırlı salınımlı ise her $c \in (a, b)$ için $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c+)$ ve $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c-)$ vardır.

3. $G_{n,c}$ OPERATÖR DİZİLERİNİN AĞIRLIKLILIK YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde $[0, \infty)$ aralığında polinomsal büyüme hızına sahip sürekli fonksiyonlara genel bir toplamsal-integral tip operatör dizisi olan $\{G_{n,c}\}$ operatör dizilerinin yaklaşım özelliklerini araştıracağız ve ağırlıklı yaklaşım hızına ait bir sonuç vereceğiz.

3.1. $G_{n,c}$ Operatör Dizisi İle Ağırlıklı Yaklaşım

$m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $C_{2m}[0, \infty)$ sınıfı $|f(x)| \leq M_f(1+x^{2m})$, $M_f > 0$, ağırlık şartını sağlayan $[0, \infty)$ aralığında sürekli fonksiyonların kümesi olsun. $C_{2m}[0, \infty)$ lineer uzayı

$$\|f\|_{(2m)} = \sup_{x \geq 0} \frac{|f(x)|}{1+x^{2m}}$$

normu ile bir normlu uzay olur. $C_{2m}[0, \infty)$ uzayındaki

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{1+x^{2m}} = k_f < \infty$$

şartını sağlayan fonksiyonların kümesi $C_{2m}^k[0, \infty)$ ile gösterelim.

Bu kısımda Srivastava ve Gupta'nın (16) da tanımladığı özel durumları yaklaşım teorisinde çok kullanılan bazı operatörleri içeren $G_{n,c}$ operatörlerini ele alıyoruz.

$C_{2m}^k[0, \infty)$ uzayında bu operatörlerin ağırlıklı yaklaşımını elde edeceğiz.

Bu operatörler:

$$\phi_{n,c}(x) = \begin{cases} e^{-nx}, & c = 0 \\ (1+cx)^{-n/c}, & c = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

ve

$$p_{n,k}(x; c) = \frac{(-x)^k}{k!} \phi_{n,c}^{(k)}(x)$$

olmak üzere

$$G_{n,c}(f; x) = n \sum_{k=1}^{\infty} p_{n,k}(x; c) \int_0^{\infty} p_{n+c,k-1}(t; c) f(t) dt + p_{n,0}(x; c) f(0) \quad [3.1]$$

biçiminde verilmiştir.

Burada $\{\phi_{n,c}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyonlar dizisi $[0, b]$, $b > 0$, aralığı üzerinde tanımlı olup aşağıdaki özellikleri sağlar:

(i). Her $n \in \mathbb{N}$ için $\phi_{n,c} \in C^{\infty}[a, b]$, $b > a \geq 0$.

(ii). Her $n \in \mathbb{N}$ için $\phi_{n,c}(0) = 1$.

(iii). Her $n \in \mathbb{N}$ ve $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $(-1)^k \phi_{n,c}^{(k)}(x) \geq 0$, $0 \leq x \leq b$, olduğundan $\phi_{n,c}(x)$ katlı monotondur.

(iv). Her $n \in \mathbb{N}$ ve $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\phi_{n,c}^{(k+1)}(x) = -n\phi_{n+c,c}^{(k)}(x)$ eşitsizliği sağlanır.

Bu operatörler $c = 0$ için ;

$$p_{n,k}(x; 0) = \frac{e^{-nx} (nx)^k}{k!}$$

olmak üzere

$$G_{n,0}(f; x) = n \sum_{k=1}^{\infty} p_{n,k}(x; 0) \int_0^{\infty} p_{n,k-1}(t; 0) f(t) dt + p_{n,0}(x; 0) f(0) \quad [3.2]$$

biçiminde tanımlı $G_{n,0}$ operatörleri (17,18) de tanımlanan ve yaklaşım özellikleri incelenen Phillips operatörlerine indirgenir.

$c = 1$ için;

$$p_{n,k}(x; 1) = \binom{n+k-1}{k} x^k (1+x)^{-n/c-k}$$

$$G_{n,1}(f; x) = n \sum_{k=1}^{\infty} p_{n,k}(x; 1) \int_0^{\infty} p_{n+1,k-1}(t; 1) f(t) dt + p_{n,0}(x; 1) f(0) \quad [3.3]$$

biçiminde tanımlı $G_{n,1}$ operatörleri (20) de tanımlanan toplamsal integral tip operatörler olur. Bu operatörlerin (20) de simultaneous yaklaşım özellikleri verilmiştir.

Lemma 3.1.1: $m \in \mathbb{N}$ ve $x \geq 0$ olmak üzere,

$$(i). G_{n,c}(t^m; x) = a_0 \frac{n(n+c) \dots (n+(m-1)c)}{(n-c)(n-2c) \dots (n-mc)} x^m + a_1 \frac{n(n+c) \dots (n+(m-2)c)}{(n-c)(n-2c) \dots (n-mc)} x^{m-1} \\ + \dots + a_{m-1} \frac{n}{(n-c)(n-2c) \dots (n-mc)} x, \quad a_0 = 1, a_1 = m(m-1), a_2, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{N}$$

(ii). $\rho(x) = 1 + x^{2m}$ olmak üzere $G_{n,c}(\rho; x) \leq M \rho(x)$ olacak biçimde bir $M > 0$ sabit sayısı vardır.

İspat (i). $c = 0$ için:

$$p_{n,k}(t; 0) = \frac{e^{-nt} (nt)^k}{k!}$$

ve

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} p_{n,k-1}(t;0) t^m dt &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-nt} (nt)^{k-1}}{(k-1)!} t^m dt \\
 &= \frac{1}{n^{m+1}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u} (u)^{k+m-1}}{(k-1)!} du \\
 &= \frac{\Gamma(k+m)}{n^{m+1} (k-1)!} \\
 &= \frac{k(k+1) \dots (k+m-1)}{n^{m+1}}
 \end{aligned}$$

olur. Burada Γ , Gamma fonksiyonudur.

Bu durumda

$$G_{n,c}(t^m; x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1) \dots (k+m-1)}{n^m} p_{n,k}(x;0)$$

olur.

$k, m \in \mathbb{N}$ ve $k \neq m-1$ olmak üzere

$$\prod_{j=0}^{m-1} (k+j) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \prod_{j=0}^{m-1-i} (k-j), \quad a_0 = 1, a_1 = m(m-1), a_2, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{N} \quad [3.4]$$

eşitliği yardımı ile

$$\begin{aligned}
 G_{n,c}(t^m; x) &= \sum_{i=0}^{m-1} a_i \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k-1) \dots (k-(m-i-1))}{n^m} e^{-nx} \frac{(nx)^k}{k!} \right] \\
 &= \sum_{i=0}^{m-1} a_i \left[\sum_{k=m-i}^{\infty} \frac{1}{n^m} e^{-nx} \frac{(nx)^k}{(k-(m-i))!} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{m-1} a_i \frac{1}{n^m} (nx)^{m-i} \left[\sum_{k=m-i}^{\infty} e^{-nx} \frac{(nx)^{k-(m-i)}}{(k-(m-i))!} \right] \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} a_i \frac{1}{n^i} x^{m-i}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

elde edilir.

$c = 1, 2, 3, \dots$ için:

$$\binom{n/c + k - 1}{k} = \frac{\Gamma(n/c + k)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(n/c)}, \quad p_{n,k}(x; c) = \binom{n/c + k - 1}{k} \frac{(cx)^k}{(1 + cx)^{n/c + k}}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} p_{n+c, k-1}(t; c) t^m dt &= \binom{n/c + k - 1}{k - 1} \int_0^{\infty} \frac{(ct)^{k-1}}{(1 + ct)^{n/c + k}} t^m dt \\
&= \frac{1}{c^{m+1}} \binom{n/c + k - 1}{k - 1} \int_0^{\infty} \frac{(u)^{k+m-1}}{(1 + u)^{n/c + k}} du \\
&= \frac{1}{c^{m+1}} \frac{\Gamma(n/c + k)}{\Gamma(k)\Gamma(n/c + 1)} \frac{\Gamma(k + m)\Gamma(n/c - m)}{\Gamma(n/c + k)} \\
&= \frac{k(k + 1) \dots (k + m - 1)}{n(n - c) \dots (n - mc)}
\end{aligned}$$

dir.

O halde

$$\begin{aligned}
G_{n,c}(t^m; x) &= \sum_{k=1}^{\infty} p_{n,k}(x; c) \frac{k(k + 1) \dots (k + m - 1)}{(n - c) \dots (n - mc)} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n/c + k - 1}{k} \frac{k(k + 1) \dots (k + m - 1)}{(n - c) \dots (n - mc)} \frac{(cx)^k}{(1 + cx)^{n/c + k}}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Eş. 3.4 Eş 3.6 ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
G_{n,c}(t^m; x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n/c+k-1}{k} \frac{\sum_{i=0}^{m-1} a_i \prod_{j=0}^{m-1-i} (k-j)}{(n-c)\dots(n-mc)} \frac{(cx)^k}{(1+cx)^{n/c+k}} \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} a_i \frac{1}{(n-c)\dots(n-mc)} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n/c+k-1}{k} k(k-1)\dots(k-(m-1-i)) \frac{(cx)^k}{(1+cx)^{n/c+k}} \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} a_i \frac{1}{(n-c)\dots(n-mc)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n/c+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n/c)} k(k-1)\dots(k-(m-1-i)) \frac{(cx)^k}{(1+cx)^{n/c+k}} \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} a_i \frac{1}{(n-c)\dots(n-mc)} \sum_{k=m-i}^{\infty} \frac{\Gamma(n/c+k)}{(k-(m-i))!\Gamma(n/c)} \frac{\frac{n}{c} \dots (\frac{n}{c} + m-1-i)}{\frac{n}{c} \dots (\frac{n}{c} + m-1-i)} \frac{(cx)^k}{(1+cx)^{n/c+k}} \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} a_i \frac{\frac{n}{c} \dots (\frac{n}{c} + m-1-i)}{(n-c)\dots(n-mc)} \sum_{k=m-i}^{\infty} \frac{\Gamma(n/c+k)}{(k-(m-i))!\Gamma(n/c)} \frac{1}{\frac{n}{c} \dots (\frac{n}{c} + m-1-i)} \frac{(cx)^k}{(1+cx)^{n/c+k}} \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} a_i \frac{\frac{n}{c} \dots (\frac{n}{c} + m-1-i)}{(n-c)\dots(n-mc)} \sum_{k=m-i}^{\infty} \frac{\Gamma(n/c+k)}{(k-(m-i))!\Gamma(n/c+m-i)} \frac{(cx)^k}{(1+cx)^{n/c+k}} \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} a_i \frac{\frac{n}{c} \dots (\frac{n}{c} + m-1-i)}{(n-c)\dots(n-mc)} \sum_{k=m-i}^{\infty} \binom{n/c+k-1}{k-(m-i)} \frac{(cx)^k}{(1+cx)^{n/c+k}} \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} a_i \frac{\frac{n}{c} \dots (\frac{n}{c} + m-1-i)}{(n-c)\dots(n-mc)} \sum_{k=m-i}^{\infty} \binom{n/c+k-1}{k-(m-i)} \frac{(cx)^{k-(m-i)} (cx)^{m-i}}{(1+cx)^{n/c+k}} \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} a_i \frac{\frac{n}{c} \dots (\frac{n}{c} + m-1-i)}{(n-c)\dots(n-mc)} (cx)^{m-i} \sum_{k=m-i}^{\infty} \binom{n/c+k-1}{k-(m-i)} \frac{(cx)^{k-(m-i)}}{(1+cx)^{n/c+k}} \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} a_i \frac{\frac{n}{c} \dots (\frac{n}{c} + m-1-i)}{(n-c)\dots(n-mc)} (cx)^{m-i} \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} a_i \frac{n(n+c)\dots(n+(m-1-i)c)}{(n-c)\dots(n-mc)} x^{m-i}
\end{aligned}$$

[3.7]

olur.

O halde Eş. 3.5 ve Eş. 3.7 ifadelerinden $c = 0, 1, 2, \dots$ için

$$G_{n,c}(t^m; x) = a_0 \frac{n(n+c)\dots(n+(m-1)c)}{(n-c)(n-2c)\dots(n-mc)} x^m + a_1 \frac{n(n+c)\dots(n+(m-2)c)}{(n-c)(n-2c)\dots(n-mc)} x^{m-1} \\ + \dots + a_{m-1} \frac{n}{(n-c)(n-2c)\dots(n-mc)} x$$

elde edilir.

$$(ii). \quad G_{n,c}(1+t^{2m}; x) = G_{n,c}(1; x) + G_{n,c}(t^{2m}; x) = 1 + G_{n,c}(t^{2m}; x). \quad \text{Lemma 3.1.1 (i)}$$

şıkkından dolayı $G_{n,c}(t^{2m}; x)$ ifadesi derecesi $2m$ olan bir polinomdur. Bu polinomun katsayılarına sırasıyla

$$b_0(n, m, c) = \frac{n(n+c)\dots(n+(2m-1)c)}{(n-c)(n-2c)\dots(n-2mc)}$$

ve

$$b_i(n, m, c) = a_i \frac{n(n+c)\dots(n+(2m-i-1)c)}{(n-c)(n-2c)\dots(n-2mc)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 2m-1$$

denilirse $n \rightarrow \infty$ için $b_0(n, m, c) \rightarrow 1$ ve $i = 1, 2, \dots, 2m-1$ için $b_i(n, m, c) \rightarrow 0$ olur.

$i = 0, 1, \dots, 2m-1$ için $b_i(n, m, c)$ katsayılarının bir üst sınırı $M_1 \geq 1$ olsun. Bu durumda

$$G_{n,c}(1+t^{2m}; x) = 1 + G_{n,c}(t^{2m}; x) \\ \leq 1 + M_1 (x^{2m} + x^{2m-1} + \dots + x) \\ \leq M_1 (x^{2m} + x^{2m-1} + \dots + x + 1)$$

$$\text{ve } \sup_{x \geq 0} \frac{1+x+\dots+x^{2m}}{1+x^{2m}} \leq M_2 \text{ olmak üzere } M_1 M_2 = M \text{ denilirse}$$

$$G_{n,c}(1+t^{2m};x) \leq M(1+x^{2m})$$

olur.

$G_{n,c}$, $C_{2m}[0, \infty)$ dan $B_{2m}[0, \infty)$ a bir operatördür.

Lemma 3.1.2 (16): $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere m -yinci moment fonksiyonu

$T_{n,m}(x; c) = G_{n,c}((t-x)^m; x)$ olsun. O zaman

$$T_{n,0}(x; c) = 1, \quad T_{n,1}(x; c) = \frac{cx}{n-c}, \quad T_{n,2}(x; c) = \frac{x(1+cx)(2n-c) + (1+3cx)cx}{(n-c)(n-2c)} \quad \text{ve}$$

$$T_{n,m}(x; c) = O(n^{-\lfloor (m+1)/2 \rfloor}) \text{ dir.}$$

Teorem 3.1.3: Her $m \in \mathbb{N}$ ve her $f \in C_{2m}^k[0, \infty)$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|G_{n,c}(f; x) - f(x)\|_{(2m)} = 0$$

olur.

İspat. Lemma 3.1.2 den $G_{n,c}(1; x) = 1$ olduğu için

$$\|G_{n,c}(1; x) - 1\|_{(2m)} = \sup_{x \geq 0} \frac{|G_{n,c}(1; x) - 1|}{1 + x^{2m}} = 0$$

olur.

Lemma 3.1.1 (i) den

$$G_{n,c}(t^m; x) - x^m = \left(\frac{n(n+c)\dots(n+(m-1)c}{(n-c)(n-2c)\dots(n-mc)} - 1 \right) x^m + a_1 \frac{n(n+c)\dots(n+(m-2)c}{(n-c)(n-2c)\dots(n-mc)} x^{m-1} \\ + \dots + a_{m-1} \frac{n}{(n-c)(n-2c)\dots(n-mc)} x$$

yazılırsa

$$\|G_{n,c}(t^m; x) - x^m\|_{(2m)} = \sup_{x \geq 0} \frac{|G_{n,c}(t^m; x) - x^m|}{1 + x^{2m}} \\ = O(n^{-1}) \sup_{x \geq 0} \frac{x + x^2 + \dots + x^m}{1 + x^{2m}} \\ = O(n^{-1})$$

eşitliği elde edilir.

Benzer biçimde

$$\|G_{n,c}(t^{2m}; x) - x^{2m}\|_{(2m)} = O(n^{-1})$$

olur.

O halde Teorem 2.3.1 den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|G_{n,c}(f; x) - f(x)\|_{(2m)} = 0$$

olur.

3.2. $G_{n,c}$ Operatörünün Ağırlıklı Süreklilik Modülüyle Yaklaşım Hızının Hesaplanması

Tanım 3.2.1: $\langle a, b \rangle \subseteq \mathbb{R}$ alt aralığında tanımlı reel değerli ve sürekli bir f fonksiyonu için $\delta > 0$ olmak üzere $\omega(f, \delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|$ sayısına f nin

birinci süreklilik modülü denir. $\omega(f, \delta)$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.

- (i). $\omega(f, \delta)$ fonksiyonu δ nin monoton artan fonksiyonudur.
- (ii). $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(f, \delta) = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul f fonksiyonunun $\langle a, b \rangle$ aralığında düzgün sürekli olmasıdır.
- (iii). Her $r \in \mathbb{N}$ için $\omega(f, r\delta) \leq r\omega(f, \delta)$ eşitsizliği sağlanır.
- (iv). Her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(f, \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(f, \delta)$ eşitsizliği sağlanır.

$\omega(f, \delta)$ fonksiyonunun (ii) şıkkındaki limitin 0 olması f nin $\langle a, b \rangle$ aralığında düzgün sürekli olması ile mümkündür. Biz ise $f \in C_{2m}^k[0, \infty)$ için f nin $[0, \infty)$ aralığında düzgün süreklilik koşulu olmaksızın $G_{n,c}$ operatörlerinin yaklaşım hızını $[0, \infty)$ aralığının tamamında elde etmek istiyoruz. Bu amaçla $[0, \infty)$ aralığında yeni bir süreklilik modülü tanımlayalım.

Tanım 3.2.2: $f \in C_{2m}^k[0, \infty)$ için

$$\Omega_m(f, \delta) = \sup_{x \geq 0, |h| \leq \delta} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{1 + (x+h)^{2m}} \quad [3.8]$$

ifadesine f nin ağırlıklı süreklilik modülü denir.

Farklı ağırlıklı uzaylarda toplamsal operatörler için Gadjiev ve İspir (24) de ve İspir (25) de ağırlıklı süreklilik modülleri tanımlamışlar ve özellikleri vermişlerdir.

$\Omega_m(f, \delta)$ ağırlıklı süreklilik modülünün Tanım 3.2.1 de verilen birinci süreklilik modülüne benzer özellikleri sağladığını aşağıdaki Lemma da gösterelim.

Lemma 3.2.3: $m \in \mathbb{N}$ ve $f \in C_{2m}^k[0, \infty)$ olmak üzere $\Omega_m(f, \delta)$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.

- (i). $\Omega_m(f, \delta)$ fonksiyonu δ nın monoton artan fonksiyonudur.
- (ii). Her $f \in C_{2m}^k[0, \infty)$ için $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \Omega_m(f, \delta) = 0$.
- (iii). Her $r \in \mathbb{N}$ için $\Omega_m(f, r\delta) \leq r\Omega_m(f, \delta)$ eşitsizliği sağlanır.
- (iv). Her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\Omega_m(f, \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\Omega_m(f, \delta)$ eşitsizliği sağlanır.

İspat (i). Tanımdan açıktır.

(ii). $m \in \mathbb{N}$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $f \in C_{2m}^k[0, \infty)$ olduğundan öyle bir $x_0 > 0$ reel sayısı bulunabilir ki her $x \geq x_0$ için $\left| \frac{f(x)}{1+x^{2m}} - k_f \right| < \varepsilon/2$ eşitsizliği sağlanır. $x_1 \geq x_0 + \delta$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \Omega_m(f, \delta) &\leq \sup_{0 \leq x \leq x_1, |h| \leq \delta} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{1+(x+h)^{2m}} \right| + \sup_{x \geq x_1, |h| \leq \delta} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{1+(x+h)^{2m}} \right| \\ &\leq \omega_{[0, x_1]}(f, \delta) + \sup_{x \geq x_1, |h| \leq \delta} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{1+(x+h)^{2m}} \right| \end{aligned}$$

olur. $x \geq x_1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{1+(x+h)^{2m}} \right| &\leq \left| \frac{f(x+h)}{1+(x+h)^{2m}} - k_f + k_f - \frac{f(x)}{1+(x+h)^{2m}} \right| \\ &\leq \left| \frac{f(x+h)}{1+(x+h)^{2m}} - k_f \right| + \left| \frac{f(x)}{1+(x+h)^{2m}} - k_f \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< \varepsilon / 2 + \left| \frac{(1+x^{2m})f(x)}{(1+x^{2m})(1+(x+h)^{2m})} - \frac{1+x^{2m}}{(1+(x+h)^{2m})}k_f + \frac{1+x^{2m}}{(1+(x+h)^{2m})}k_f - k_f \right| \\
&\leq \varepsilon / 2 + \frac{1+x^{2m}}{1+(x+h)^{2m}} \left| \frac{f(x)}{1+x^{2m}} - k_f \right| + |k_f| \left| 1 - \frac{1+x^{2m}}{1+(x+h)^{2m}} \right| \\
&\leq \varepsilon + |k_f| \left| 1 - \frac{1+x^{2m}}{1+(x+h)^{2m}} \right| \\
&\leq \varepsilon + |k_f| \delta \sum_{i=1}^{2m} \binom{2m}{i} \delta^{i-1}
\end{aligned}$$

o zaman

$$\Omega_m(f, \delta) \leq \omega_{[0, x_1]}(f, \delta) + \varepsilon + |k_f| \delta \sum_{i=1}^{2m} \binom{2m}{i} \delta^{i-1}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \Omega_m(f, \delta) \leq \varepsilon$ elde edilir ki $\varepsilon > 0$ sayısı keyfi olduğundan ispat tamamlanır.

(iii). $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
|f(x+rh) - f(x)| &= \left| \sum_{k=1}^r (f(x+kh) - f(x+(k-1)h)) \right| \\
&\leq r(1+(x+h)^{2m})\Omega_m(f, \delta)
\end{aligned}$$

olduğundan $\Omega_m(f, r\delta) \leq r\Omega_m(f, \delta)$ olur.

(iv). $\lambda < \llbracket \lambda \rrbracket + 1$ eşitsizliğine (i) ve (iii) uygulanarak elde edilir.

Teorem 3.2.4. $m \in \mathbb{N}$ ve $f \in C_{2m}^k[0, \infty)$ olsun. Bu durumda M , n den bağımsız pozitif bir sabit olmak üzere yeterince büyük n ler için

$$\|G_{n,c}(f;x) - f(x)\|_{(2m+1)} \leq M\Omega_m(f, n^{-1/2})$$

eşitsizliği gerçekleşir.

İspat. Eş. 3.8 ve Lemma 3.2.3 (iv) den

$$\begin{aligned} |f(t) - f(x)| &\leq \left(1 + (x + |t - x|)^{2m}\right) \left(\frac{|t - x|}{\delta} + 1\right) \Omega_m(f, \delta) \\ &\leq \left(1 + (2x + t)^{2m}\right) \left(\frac{|t - x|}{\delta} + 1\right) \Omega_m(f, \delta) \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizliğe $G_{n,c}$ operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} G_{n,c}(|f(t) - f(x)|; x) &\leq \Omega_m(f, \delta) \left[G_{n,c}(1 + (2x + t)^{2m}; x) \right. \\ &\quad \left. + G_{n,c}\left(\left(1 + (2x + t)^{2m}\right) \frac{|t - x|}{\delta}; x\right) \right] \end{aligned} \quad [3.9]$$

elde edilir. İkinci terime Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$G_{n,c}\left(\left(1 + (2x + t)^{2m}\right) \frac{|t - x|}{\delta}; x\right) \leq \left(G_{n,c}\left(\left(1 + (2x + t)^{2m}\right)^2; x\right)\right)^{1/2} \left(G_{n,c}\left(\frac{|t - x|^2}{\delta^2}; x\right)\right)^{1/2} \quad [3.10]$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Eş. 3.10 eşitsizliği Eş. 3.9 da yerine yazılırsa

$$G_{n,c}(|f(t) - f(x)|; x) \leq \Omega_m(f, \delta) \left\{ G_{n,c}(1 + (2x + t)^{2m}; x) + \left(G_{n,c} \left((1 + (2x + t)^{2m})^2; x \right) \right)^{1/2} \left(G_{n,c} \left(\frac{|t - x|^2}{\delta^2}; x \right) \right)^{1/2} \right\} \quad [3.11]$$

olur.

Lemma 3.1.1 (ii) den

$$G_{n,c}(1 + (2x + t)^{2m}; x) \leq M_3(1 + x^{2m}) \quad [3.12]$$

ve

$$\left(G_{n,c} \left((1 + (2x + t)^{2m})^2; x \right) \right)^{1/2} \leq M_4(1 + x^{2m}) \quad [3.13]$$

eşitsizliklerini sağlayan M_3 ve M_4 pozitif sabitleri vardır.

Lemma 3.1.2 den

$$\left(G_{n,c} \left(\frac{|t - x|^2}{\delta^2}; x \right) \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\delta} O(n^{-1/2}) \sqrt{x + x^2} \leq M_5 \frac{1 + x}{\delta \sqrt{n}}. \quad [3.14]$$

O halde Eş. 3.14 ve Eş. 3.13 eşitsizliklerinden $M_6 = \sup_{x \geq 0} \frac{(1 + x)(1 + x^{2m})}{1 + x^{2m+1}}$ ve

$M_7 = M_4 M_5 M_6$ olmak üzere

$$\left(G_{n,c} \left((1 + (2x + t)^{2m})^2; x \right) \right)^{1/2} \left(G_{n,c} \left(\frac{|t - x|^2}{\delta^2}; x \right) \right)^{1/2} \leq M_7 \frac{1 + x^{2m+1}}{\delta \sqrt{n}} \quad [3.15]$$

olur.

Eş. 3.15 ve Eş. 3.12 eşitsizlikleri Eş. 3.11 de yerine yazılırsa

$$G_{n,c}(|f(t) - f(x)|; x) \leq \Omega_m(f, \delta) \left\{ M_3 (1 + x^{2m}) + M_7 \frac{1 + x^{2m+1}}{\delta \sqrt{n}} \right\}$$

olur.

Bu eşitsizlikte $M_8 = \sup_{x \geq 0} \frac{1 + x^{2m}}{1 + x^{2m+1}}$ olmak üzere $M = M_3 M_8 + M_7$ ve $\delta = n^{-1/2}$

seçerek $1 + x^{2m+1}$ e bölüp supremum alınırsa teoremden istenen sonuç elde edilir.

4. $G_{n,c}$ OPERATÖR DİZİSİNİN SİMÜLTANEOUS YAKLAŞIMI

Simultaneous yaklaşımda operatörün türevinin fonksiyononun türevine yaklaşımı ve Voronowskaja tip asimptotik yaklaşımı problemi incelenir. Bu kısımda $G_{n,c}$ operatörünün r - yinci basamaktan türevinin fonksiyononun r - yinci basamaktan türevine yaklaşımı ve r - yinci basamaktan türev cinsinden Voronowskaja tip asimptotik yaklaşıma ilişkin sonuçlar elde edilecektir. Ayrıca düzgün fonksiyonların yaklaşımına ilişkin bir sonuç verilecektir.

Bu bölümde β pozitif bir reel sayı olmak üzere $C_\beta[0,\infty)$ ile $|f(x)| \leq M_f(1+x)^\beta$, $M_f > 0$, ağırlık şartını sağlayan $[0,\infty)$ aralığında sürekli fonksiyonların uzayı alınacaktır. Ayrıca Eş. 3.1 de tanımlanan $G_{n,c}$ operatörlerini, $\delta(t)$ Dirac delta

fonksiyonu ve $K_{n,c}(x,t) = n \sum_{k=1}^{\infty} p_{n,k}(x;c) p_{n+c,k-1}(t;c) + p_{n,k}(x;c) \delta(t)$ olmak üzere

$G_{n,c}(f;x) = \int_0^{\infty} K_{n,c}(x,t) f(t) dt$ olarak ifade edeceğiz.

Lemma 4.1 (19,26): $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere $c = 0$ için Szasz operatörünün ve $c = 1, 2, 3, \dots$ için Lupas operatörünün m yinci moment fonksiyonu

$$\mu_{n,m}(x;c) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x;c) \left(\frac{k}{n} - x \right)^m$$

ise $\mu_{n,0}(x;c) = 1$, $\mu_{n,1}(x;c) = 1$ ve $\mu_{n,m}(x;c) = O\left(n^{-\lfloor (m+1)/2 \rfloor}\right)$ dir.

Lemma 4.2 (19,26):

$$x^r (1+cx)^r \frac{d^r}{dx^r} p_{n,k}(x;c) = \sum_{\substack{2i+j \leq r \\ i,j \geq 0}} n^i (k-nx)^j q_{i,j,r}(x;c) p_{n,k}(x;c)$$

olacak biçimde n ve k dan bağımsız $q_{i,j,r}(x;c)$ polinomları vardır.

Teorem 4.3: Eğer, $f \in C_\beta[0, \infty)$ olmak üzere $r = 1, 2, 3, \dots$ için $x \in (0, \infty)$ noktasında $f^{(r)}$ varsa, o zaman

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_{n,c}^{(r)}(f(t); x) = f^{(r)}(x) \quad [4.1]$$

olur.

Ayrıca, eğer $f^{(r)}$ var ve $(a - \eta, b + \eta) \subset (0, \infty), \eta > 0$, alt aralığında sürekli ise Eş. 4.1 ifadesindeki yakınsama $[a, b]$ aralığında düzgündür.

İspat. f nin Taylor açılımından $t \rightarrow x$ için $\varepsilon(t, x) \rightarrow 0$ olmak üzere

$$f(t) = \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}(x)}{i!} (t-x)^i + \varepsilon(t, x)(t-x)^r \quad [4.2]$$

yazılır. Bu durumda

$$\begin{aligned} G_{n,c}^{(r)}(f(t); x) &= \int_0^\infty K_{n,c}^{(r)}(t; x) f(t) dt \\ &= \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}(x)}{i!} \int_0^\infty K_{n,c}^{(r)}(t; x) (t-x)^i dt + \int_0^\infty K_{n,c}^{(r)}(t; x) \varepsilon(t, x) (t-x)^r dt \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Lemma 3.1.1 (i) den $\int_0^\infty K_{n,c}^{(r)}(t; x) t^v dt = G_{n,c}^{(r)}(t^v; x)$ ifadesi x in derecesi v olan bir polinomu olduğu dikkate alınarak,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}(x)}{i!} \int_0^\infty K_{n,c}^{(r)}(t; x) (t-x)^i dt \\
&= \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}(x)}{i!} \sum_{v=0}^i \binom{i}{v} (-x)^{i-v} \frac{d^r}{dx^r} \int_0^\infty K_{n,c}(t; x) t^v dt \\
&= \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}(x)}{i!} \sum_{v=0}^i \binom{i}{v} (-x)^{i-v} \frac{d^r}{dx^r} \left[\frac{n(n+c)\dots(n+(v-1)c)}{(n-c)(n-2c)\dots(n-vc)} x^v + \right. \\
&\quad \left. a_1 \frac{n(n+c)\dots(n+(v-2)c)}{(n-c)(n-2c)\dots(n-vc)} x^{v-1} + \dots + a_{v-1} \frac{n}{(n-c)(n-2c)\dots(n-vc)} x \right] \\
&= f^{(r)}(x) \frac{n(n+c)\dots(n+(r-1)c)}{(n-c)(n-2c)\dots(n-rc)}.
\end{aligned}$$

Dolayısı ile $n \rightarrow \infty$ için $I_1 \rightarrow f^{(r)}(x)$ olur.

Lemma 4.2 yi kullanarak

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^\infty K_{n,c}^{(r)}(t; x) \mathcal{E}(t, x) (t-x)^r dt \\
&= n \sum_{k=1}^\infty \left[\sum_{\substack{2i+j \leq r \\ i, j \geq 0}} \frac{n^i (k-nx)^j}{x^r (1+cx)^r} q_{i,j,r}(x; c) p_{n,k}(x; c) \right] \\
&\quad \times \int_0^\infty p_{n+c, k-1}(t; c) \mathcal{E}(t, x) (t-x)^r dt + \phi_{n,c}^{(r)}(x) \mathcal{E}(0, x) (-x)^r
\end{aligned}$$

Üstelik,

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leq \sum_{\substack{2i+j \leq r \\ i, j \geq 0}} n^{i+1} \frac{|q_{i,j,r}(x; c)|}{x^r (1+cx)^r} \sum_{k=1}^\infty p_{n,k}(x; c) |(k-nx)^j| \\
&\quad \times \int_0^\infty p_{n+c, k-1}(t; c) |\mathcal{E}(t, x)| |(t-x)^r| dt + |\phi_{n,c}^{(r)}(x)| |\mathcal{E}(0, x)| x^r \\
&= I_3 + I_4.
\end{aligned}$$

$t \rightarrow x$ için $\varepsilon(t, x) \rightarrow 0$ olduğundan, $\varepsilon > 0$ verildiğinde öyle bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilir ki $0 < |t - x| < \delta$ olduğunda $|\varepsilon(t, x)| < \varepsilon$ olur. Ayrıca, Eğer, $\nu > \max(\beta, r)$ olacak biçimde bir doğal sayı ise, öyle bir K pozitif sabiti bulunabilir ki $|t - x| \geq \delta$ olduğunda $|\varepsilon(t, x)(t - x)^r| < K|t - x|^\nu$ olur. Bu durumda

$$C_1 = \sup_{\substack{2i+j \leq r \\ i, j \geq 0}} \frac{|q_{i,j,r}(x; c)|}{x^r (1 + cx)^r}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} I_3 &\leq C_1 \sum_{\substack{2i+j \leq r \\ i, j \geq 0}} n^{i+1} \sum_{k=1}^{\infty} p_{n,k}(x; c) |(k - nx)^j| \\ &\quad \times \left\{ \varepsilon \int_{|t-x| < \delta} p_{n+c,k-1}(t; c) |t - x|^r dt + K \int_{|t-x| \geq \delta} p_{n+c,k-1}(t; c) |t - x|^\nu dt \right\} \\ &= C_1 \varepsilon \sum_{\substack{2i+j \leq r \\ i, j \geq 0}} n^{i+1} \sum_{k=1}^{\infty} p_{n,k}(x; c) |(k - nx)^j| \int_{|t-x| < \delta} p_{n+c,k-1}(t; c) |t - x|^r dt \\ &\quad + C_1 K \sum_{\substack{2i+j \leq r \\ i, j \geq 0}} n^{i+1} \sum_{k=1}^{\infty} p_{n,k}(x; c) |(k - nx)^j| \int_{|t-x| \geq \delta} p_{n+c,k-1}(t; c) |t - x|^\nu dt \\ &= I_5 + I_6. \end{aligned}$$

I_5 ifadesinde $\int_0^\infty p_{n+c,k-1}(t; c) dt = n^{-1}$ eşitliğini göz önüne alıp önce integrale sonra

toplam üzerine Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} I_5 &\leq \varepsilon C_1 \sum_{\substack{2i+j \leq r \\ i, j \geq 0}} n^{i+1} \sum_{k=1}^{\infty} p_{n,k}(x; c) |(k - nx)^j| \\ &\quad \times \left(\int_0^\infty p_{n+c,k-1}(t; c) dt \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty p_{n+c,k-1}(t; c) |t - x|^{2r} dt \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \varepsilon C_1 \sum_{\substack{2i+j \leq r \\ i,j \geq 0}} n^i \left(\sum_{k=1}^{\infty} p_{n,k}(x;c) |k-nx|^{2j} \right)^{1/2} \\
&\quad \times \left(n \sum_{k=1}^{\infty} p_{n,k}(x;c) \int_0^{\infty} p_{n+c,k-1}(t;c) |t-x|^{2r} dt \right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

olur.

Lemma 4.1 den

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} p_{n,k}(x;c) |k-nx|^{2j} &= n^{2j} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x;c) \left(\frac{k}{n} - x \right)^{2j} - p_{n,0}(x;c) (-x)^{2j} \right\} \\
&= n^{2j} \left\{ O(n^{-j}) + O(n^{-s}) \right\}, \quad s > r \\
&= O(n^j)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Benzer şekilde Lemma 3.1.2 den

$$\begin{aligned}
n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x;c) \int_0^{\infty} p_{n+c,k-1}(t;c) |t-x|^{2r} dt &= T_{n,2r}(x;c) - p_{n,0}(x;c) (-x)^{2r} \\
&= O(n^{-r}) + O(n^{-s}), \quad s > r \\
&= O(n^{-r}).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Eş. 4.4 ve Eş. 4.5 Eş. 4.3 de yerine yazılırsa

$$I_5 \leq \varepsilon C_1 \sum_{\substack{2i+j \leq r \\ i,j \geq 0}} n^i O(n^{j/2}) O(n^{-r/2}) = \varepsilon O(1)$$

elde edilir.

Tekrar, I_6 ifadesinde $\int_0^\infty p_{n+c,k-1}(t;c)dt = n^{-1}$ eşitliğini göz önüne alıp önce integrale sonra toplam üzerine Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa $C_2 = C_1 K$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
I_6 &\leq C_2 \sum_{\substack{2i+j \leq r \\ i,j \geq 0}} n^{i+1} \sum_{k=1}^{\infty} p_{n,k}(x;c) |(k-nx)^j| \\
&\quad \times \int_{|t-x| \geq \delta} p_{n+c,k-1}(t;c) |t-x|^\nu dt \\
&\leq C_2 \sum_{\substack{2i+j \leq r \\ i,j \geq 0}} n^{i+1} \sum_{k=1}^{\infty} p_{n,k}(x;c) |(k-nx)^j| \\
&\quad \times \left(\int_{|t-x| \geq \delta} p_{n+c,k-1}(t;c) dt \right)^{1/2} \left(\int_{|t-x| \geq \delta} p_{n+c,k-1}(t;c) |t-x|^{2\nu} dt \right)^{1/2} \\
&\leq C_2 \sum_{\substack{2i+j \leq r \\ i,j \geq 0}} n^i \left(\sum_{k=1}^{\infty} p_{n,k}(x;c) (k-nx)^{2j} \right)^{1/2} \\
&\quad \times \left(n \sum_{k=1}^{\infty} p_{n,k}(x;c) \int_0^\infty p_{n+c,k-1}(t;c) |t-x|^{2\nu} dt \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

olur.

Eş. 4.4 ve Eş. 4.5 den

$$I_6 \leq \sum_{\substack{2i+j \leq r \\ i,j \geq 0}} n^i O(n^{j/2}) O(n^{-\nu/2}) = O(n^{(r-\nu)/2})$$

elde edilir.

Limit durumunda $\varepsilon \rightarrow 0$ için $I_5 \rightarrow 0$ ve $n \rightarrow \infty$ için $I_6 \rightarrow 0$ olduğundan $I_3 = o(1)$ olur. Aynı zamanda $n \rightarrow \infty$ için $I_4 \rightarrow 0$ olduğundan $I_2 = o(1)$ bulunur. I_1 ve I_2 yerine yazıldığında Eş. 4.1 elde edilir.

Şimdi Voronowskaja tip asimptotik teoremi verelim.

Teorem 4.4: Eğer, $f \in C_\beta[0, \infty)$ olmak üzere $r = 1, 2, 3, \dots$ için $x \in (0, \infty)$ noktasında $f^{(r+2)}$ varsa, o zaman

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[G_{n,c}^{(r)}(f(t); x) - f^{(r)}(x) \right] = cr^2 f^{(r)}(x) + [c(2r+1)x + r] f^{(r+1)}(x) + x(1+cx) f^{(r+2)}(x) \quad [4.6]$$

olur.

Ayrıca, eğer $f^{(r+2)}$ var ve $(a-\eta, b+\eta) \subset (0, \infty), \eta > 0$, alt aralığında sürekli ise Eş. 4.6 ifadesindeki yakınsama $[a, b]$ aralığında düzgündür.

İspat. f nin Taylor açılımı Eş. 4.2 dikkate alınarak

$$\begin{aligned} G_{n,c}^{(r)}(f(t); x) &= \int_0^\infty K_{n,c}^{(r)}(t; x) f(t) dt \\ &= \sum_{i=0}^{r+2} \frac{f^{(i)}(x)}{i!} \int_0^\infty K_{n,c}^{(r)}(t; x) (t-x)^i dt + \int_0^\infty K_{n,c}^{(r)}(t; x) \mathcal{E}(t, x) (t-x)^{r+2} dt \\ &= I_7 + I_8. \end{aligned}$$

Önce I_7 nin yaklaşımını bulalım. $\int_0^\infty K_{n,c}^{(r)}(t; x) t^v dt = G_{n,c}^{(r)}(t^v; x)$ ifadesi x in derecesi v

olan bir polinomu olduğu gözönüne alınarak

$$\begin{aligned} I_7 &= \sum_{i=0}^{r+2} \frac{f^{(i)}(x)}{i!} \sum_{v=0}^i \binom{i}{v} (-x)^{i-v} \frac{d^r}{dx^r} \int_0^\infty K_{n,c}(t; x) t^v dt \\ &= \frac{f^{(r)}(x)}{r!} \left[G_{n,c}^{(r)}(t^r; x) \right] \\ &\quad + \frac{f^{(r+1)}(x)}{(r+1)!} \left[(r+1)(-x) G_{n,c}^{(r)}(t^r; x) + G_{n,c}^{(r)}(t^{r+1}; x) \right] \end{aligned}$$

$$+ \frac{f^{(r+2)}(x)}{(r+2)!} \left[\frac{(r+2)(r+1)}{2} x^2 G_{n,c}^{(r)}(t^r; x) + (r+2)(-x) G_{n,c}^{(r)}(t^{r+1}; x) + G_{n,c}^{(r)}(t^{r+2}; x) \right].$$

Lemma 3.1.1 den

$$G_{n,c}(t^m; x) = \frac{n(n+c)\dots(n+(m-1)c)}{(n-c)(n-2c)\dots(n-mc)} x^m + m(m-1) \frac{n(n+c)\dots(n+(m-2)c)}{(n-c)(n-2c)\dots(n-mc)} x^{m-1} + O(n^{-2})$$

yazılır. O zaman

$$\begin{aligned} I_7 = & f^{(r)}(x) \left[\frac{n(n+c)\dots(n+(r-1)c)}{(n-c)(n-2c)\dots(n-rc)} \right] \\ & + \frac{f^{(r+1)}(x)}{(r+1)!} \left[(r+1)(-x)r! \frac{n(n+c)\dots(n+(r-1)c)}{(n-c)(n-2c)\dots(n-rc)} \right. \\ & + \left\{ (r+1)! \frac{n(n+c)\dots(n+rc)}{(n-c)(n-2c)\dots(n-(r+1)c)} x + r(r+1)r! \frac{n(n+c)\dots(n+(r-1)c)}{(n-c)(n-2c)\dots(n-(r+1)c)} \right\} \\ & + \frac{f^{(r+2)}(x)}{(r+2)!} \left[\frac{(r+2)(r+1)}{2} x^2 r! \frac{n(n+c)\dots(n+(r-1)c)}{(n-c)(n-2c)\dots(n-rc)} \right. \\ & + (r+2)(-x) \left\{ (r+1)! \frac{n(n+c)\dots(n+rc)}{(n-c)(n-2c)\dots(n-(r+1)c)} x \right. \\ & + \left. r(r+1)r! \frac{n(n+c)\dots(n+(r-1)c)}{(n-c)(n-2c)\dots(n-(r+1)c)} \right\} \\ & + \left\{ \frac{(r+2)!}{2} \frac{n(n+c)\dots(n+(r+1)c)}{(n-c)(n-2c)\dots(n-(r+2)c)} x^2 \right. \\ & + \left. \left. (r+1)(r+2)(r+1)! \frac{n(n+c)\dots(n+rc)}{(n-c)(n-2c)\dots(n-(r+2)c)} x + O(n^{-2}) \right\} \right]. \end{aligned}$$

Bu durumda

$$n \left[G_{n,c}^{(r)}(f(t); x) - f^{(r)}(x) \right] = n \left[I_7 + I_8 - f^{(r)}(x) \right] = n \left[I_7 - f^{(r)}(x) \right] + n I_8 \quad [4.7]$$

yazabiliriz.

Önce sağ taraftaki ilk terimi hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
I_7 - f^{(r)}(x) &= f^{(r)}(x) \left[\frac{n(n+c)\dots(n+(r-1)c}{(n-c)(n-2c)\dots(n-rc)} - 1 \right] \\
&+ \frac{f^{(r+1)}(x)}{(r+1)!} \left[(r+1)(-x)r! \frac{n(n+c)\dots(n+(r-1)c}{(n-c)(n-2c)\dots(n-rc)} \right. \\
&+ \left\{ (r+1)! \frac{n(n+c)\dots(n+rc)}{(n-c)(n-2c)\dots(n-(r+1)c)} x + r(r+1)r! \frac{n(n+c)\dots(n+(r-1)c}{(n-c)(n-2c)\dots(n-(r+1)c)} \right\} \Big] \\
&+ \frac{f^{(r+2)}(x)}{(r+2)!} \left[\frac{(r+2)(r+1)}{2} x^2 r! \frac{n(n+c)\dots(n+(r-1)c}{(n-c)(n-2c)\dots(n-rc)} \right. \\
&+ (r+2)(-x) \left\{ (r+1)! \frac{n(n+c)\dots(n+rc)}{(n-c)(n-2c)\dots(n-(r+1)c)} x \right. \\
&+ \left. \left. + r(r+1)r! \frac{n(n+c)\dots(n+(r-1)c)}{(n-c)(n-2c)\dots(n-(r+1)c)} \right\} \right. \\
&+ \left\{ \frac{(r+2)!}{2} \frac{n(n+c)\dots(n+(r+1)c)}{(n-c)(n-2c)\dots(n-(r+2)c)} x^2 \right. \\
&+ \left. \left. + (r+1)(r+2)(r+1)! \frac{n(n+c)\dots(n+rc)}{(n-c)(n-2c)\dots(n-(r+2)c)} x + O(n^{-2}) \right\} \Big].
\end{aligned}$$

Bu ifadede $f^{(r)}(x)$, $f^{(r+1)}(x)$ ve $f^{(r+2)}(x)$ terimlerinin katsayılarına sırasıyla $A(n, c, r)$, $B(n, c, r)$ ve $C(n, c, r)$ diyelim.

Bu durumda

$$I_7 - f^{(r)}(x) = A(n, c, r)f^{(r)}(x) + B(n, c, r)f^{(r+1)}(x) + C(n, c, r)f^{(r+2)}(x)$$

olur.

r üzerinden tümevarım yöntemi ile

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nA(n, c, r) = cr^2,$$

[4.8]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nB(n, c, r) = c(2r + 1)x + r \quad [4.9]$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nC(n, c, r) = x(1 + cx) \quad [4.10]$$

olduğunu ispatlayalım.

Önce Eş. 4.8 ifadesini ispatlayalım.

$$\begin{aligned} A(n, c, r) &= \frac{n(n+c)\dots(n+(r-1)c)}{(n-c)(n-2c)\dots(n-rc)} - 1 \\ &= \frac{n(n+c)\dots(n+(r-1)c) - (n-c)(n-2c)\dots(n-rc)}{(n-c)(n-2c)\dots(n-rc)} \end{aligned}$$

dir.

$r = 1$ için:

$$A(n, c, 1) = \frac{n - (n - c)}{n - c} = \frac{c}{n - c}.$$

Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nA(n, c, 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{c}{n - c} = c$$

olur.

$r = 2$ için:

$$A(n, c, 2) = \frac{n(n+c) - (n-c)(n-2c)}{(n-c)(n-2c)} = \frac{4cn - 2c^2}{(n-c)(n-2c)}.$$

Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nA(n, c, 2) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{4cn - 2c^2}{(n-c)(n-2c)} = 4c$$

olur.

Kabul edelim ki $r-1$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nA(n, c, r-1) = c(r-1)^2 \quad [4.11]$$

olsun.

$$\begin{aligned} A(n, c, r) &= \frac{n(n+c) \dots (n+(r-1)c)}{(n-c)(n-2c) \dots (n-rc)} - 1 \\ &= \frac{n(n+c) \dots (n+(r-1)c) - (n-c)(n-2c) \dots (n-rc)}{(n-c)(n-2c) \dots (n-rc)} \\ &= \frac{[n(n+c) \dots (n+(r-2)c)](n+(r-1)c) - [(n-c)(n-2c) \dots (n-(r-1)c)](n-rc)}{(n-c)(n-2c) \dots (n-rc)} \\ &= \frac{n[n(n+c) \dots (n+(r-2)c)] + (r-1)c[n(n+c) \dots (n+(r-2)c)]}{(n-c)(n-2c) \dots (n-rc)} \\ &\quad + \frac{-n[(n-c)(n-2c) \dots (n-(r-1)c)] + rc[(n-c)(n-2c) \dots (n-(r-1)c)]}{(n-c)(n-2c) \dots (n-rc)} \\ &= \frac{1}{n-rc} \left[n \frac{n(n+c) \dots (n+(r-2)c) - (n-c)(n-2c) \dots (n-(r-1)c)}{(n-c)(n-2c) \dots (n-(r-1)c)} \right] \\ &\quad + \frac{(r-1)c[n(n+c) \dots (n+(r-2)c)] + rc[(n-c)(n-2c) \dots (n-(r-1)c)]}{(n-c)(n-2c) \dots (n-rc)} \\ &= \frac{1}{n-rc} [nA(n, c, r-1)] \end{aligned}$$

$$+ \frac{(r-1)c[n(n+c)...(n+(r-2)c)] + rc[(n-c)(n-2c)...(n-(r-1)c)]}{(n-c)(n-2c)...(n-rc)}$$

olur.

Bu eşitliğin her iki tarafını n ile çarparak $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa, Eş. 4.11 eşitliğini dikkate alarak

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} nA(n, c, r) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{1}{n-rc} nA(n, c, r-1) \right] \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{(r-1)c[n(n+c)...(n+(r-2)c)] + rc[(n-c)(n-2c)...(n-(r-1)c)]}{(n-c)(n-2c)...(n-rc)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{1}{n-rc} \lim_{n \rightarrow \infty} nA(n, c, r-1) \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{(r-1)c[n(n+c)...(n+(r-2)c)] + rc[(n-c)(n-2c)...(n-(r-1)c)]}{(n-c)(n-2c)...(n-rc)} \\ &= c(r-1)^2 + 2cr - c \\ &= cr^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi Eş. 4.9 ifadesini ispatlayalım.

$$\begin{aligned} B(n, c, r) &= -\frac{n(n+c)...(n+(r-1)c)}{(n-c)(n-2c)...(n-rc)} x + \frac{n(n+c)...(n+rc)}{(n-c)(n-2c)...(n-(r+1)c)} x \\ &\quad + r \frac{n(n+c)...(n+(r-1)c)}{(n-c)(n-2c)...(n-(r+1)c)} \end{aligned}$$

dir.

$r = 1$ için:

$$B(n, c, 1) = -\frac{n}{n-c} x + \frac{n(n+c)}{(n-c)(n-2c)} x + \frac{n}{(n-c)(n-2c)}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[-\frac{n}{n-c} + \frac{n(n+c)}{(n-c)(n-2c)} \right] x + \frac{n}{(n-c)(n-2c)} \\
&= \frac{(3cx+1)n}{(n-c)(n-2c)}.
\end{aligned}$$

Bu durumda

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} nB(n, c, 1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{(3cx+1)n}{(n-c)(n-2c)} \\
&= 3cx + 1
\end{aligned}$$

olur.

$r = 2$ için:

$$\begin{aligned}
B(n, c, 2) &= -\frac{n(n+c)}{(n-c)(n-2c)}x + \frac{n(n+c)(n+2c)}{(n-c)(n-2c)(n-3c)}x \\
&\quad + 2\frac{n(n+c)}{(n-c)(n-2c)(n-3c)} \\
&= \frac{(5cn^2 + 5c^2n)x + 2n(n+c)}{(n-c)(n-2c)(n-3c)}
\end{aligned}$$

Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nB(n, c, 2) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{(5cn^2 + 5c^2n)x + 2n(n+c)}{(n-c)(n-2c)(n-3c)} = 5cx + 2$$

olur.

Kabul edelimki $r-1$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nB(n, c, r-1) = c(2(r-1)+1)x + r-1 \quad [4.12]$$

olsun.

$$\begin{aligned}
B(n, c, r) &= \\
&= -\frac{n(n+c)\dots(n+(r-1)c)}{(n-c)\dots(n-rc)}x + \frac{n(n+c)\dots(n+rc)}{(n-c)\dots(n-(r+1)c)}x + r\frac{n(n+c)\dots(n+(r-1)c)}{(n-c)\dots(n-(r+1)c)} \\
&= -\frac{n(n+c)\dots(n+(r-1)c)}{(n-c)\dots(n-rc)}\frac{(n-(r+1)c)}{(n-(r+1)c)}x + \frac{n(n+c)\dots(n+rc)}{(n-c)\dots(n-(r+1)c)}x \\
&\quad + r\frac{n(n+c)\dots(n+(r-1)c)}{(n-c)\dots(n-(r+1)c)} \\
&= \left[\frac{[n(n+c)\dots(n+(r-2)c)](n+(r-1)c)((r+1)c-n)}{(n-c)\dots(n-rc)(n-(r+1)c)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{[n(n+c)\dots(n+(r-1)c)](n+rc)}{(n-c)\dots(n-(r+1)c)} \right] x + (r-1+1)\frac{[n(n+c)\dots(n+(r-2)c)](n+(r-1)c)}{(n-c)\dots(n-(r+1)c)} \\
&= n \left[\frac{[n(n+c)\dots(n+(r-2)c)](rc-n)}{(n-c)\dots(n-(r+1)c)} + \frac{n(n+c)\dots(n+(r-1)c)}{(n-c)\dots(n-(r+1)c)} \right] x \\
&\quad + \frac{n(n+c)\dots(n+(r-2)c)}{(n-c)\dots(n-(r+1)c)} \left[cn + r(r-1)c^2 - (r-1)cn + (r-1)c^2 \right] x \\
&\quad + rc\frac{n(n+c)\dots(n+(r-1)c)}{(n-c)\dots(n-(r+1)c)}x + n(r-1)\frac{n(n+c)\dots(n+(r-2)c)}{(n-c)\dots(n-(r+1)c)} \\
&\quad + (r-1)^2c\frac{n(n+c)\dots(n+(r-2)c)}{(n-c)\dots(n-(r+1)c)} + \frac{n(n+c)\dots(n+(r-1)c)}{(n-c)\dots(n-(r+1)c)}
\end{aligned}$$

Bu eşitliğin her iki tarafını n ile çarparak $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa, Eş. 4.12 eşitliğini dikkate alarak,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} nB(n, c, r) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n-(r+1)c)} \left\{ n \left[\frac{[n(n+c)\dots(n+(r-2)c)](rc-n)}{(n-c)\dots(n-rc)} + \frac{n(n+c)\dots(n+(r-1)c)}{(n-c)\dots(n-rc)} \right] x \right. \\
&\quad \left. + n(r-1)\frac{n(n+c)\dots(n+(r-2)c)}{(n-c)\dots(n-rc)} \right\} \\
&\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ \frac{n(n+c)\dots(n+(r-2)c)}{(n-c)\dots(n-(r+1)c)} \left[cn + r(r-1)c^2 - (r-1)cn + (r-1)c^2 \right] x \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +rc \frac{n(n+c)\dots(n+(r-1)c)}{(n-c)\dots(n-(r+1)c)} x + (r-1)^2 c \frac{n(n+c)\dots(n+(r-2)c)}{(n-c)\dots(n-(r+1)c)} + \frac{n(n+c)\dots(n+(r-1)c)}{(n-c)\dots(n-(r+1)c)} \Big\} \\
\lim_{n \rightarrow \infty} nB(n, c, r) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n-(r+1)c)} [nB(n, c, r-1)] \\
& + \lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ \frac{n(n+c)\dots(n+(r-2)c)}{(n-c)\dots(n-(r+1)c)} \left[cn + r(r-1)c^2 - (r-1)cn + (r-1)c^2 \right] x \right. \\
& + rc \frac{n(n+c)\dots(n+(r-1)c)}{(n-c)\dots(n-(r+1)c)} x + (r-1)^2 c \frac{n(n+c)\dots(n+(r-2)c)}{(n-c)\dots(n-(r+1)c)} + \left. \frac{n(n+c)\dots(n+(r-1)c)}{(n-c)\dots(n-(r+1)c)} \right\} \\
&= (2r-1)cx + r-1 + cx - rcx + cx + rcx + 1 \\
&= c(2r+1)x + r
\end{aligned}$$

elde edilir.

Son olarak Eş. 4.10 ifadesini ispatlayalım.

$$\begin{aligned}
C(n, c, r) &= \frac{n(n+c)\dots(n+(r-1)c)}{(n-c)\dots(n-rc)} \frac{x^2}{2} - \frac{n(n+c)\dots(n+rc)}{(n-c)\dots(n-(r+1)c)} x^2 - r \frac{n(n+c)\dots(n+(r-1)c)}{(n-c)\dots(n-(r+1)c)} x \\
& + \frac{n(n+c)\dots(n+(r+1)c)}{(n-c)\dots(n-(r+2)c)} \frac{x^2}{2} + (r+1) \frac{n(n+c)\dots(n+rc)}{(n-c)\dots(n-(r+2)c)} x + O(n^{-2}) \\
&= \frac{[n(n+c)\dots(n+(r-2)c)](n+(r-1)c)(n-(r+1)c)(n-(r+2)c)}{(n-c)\dots(n-(r+2)c)} \frac{x^2}{2} \\
& - \frac{[n(n+c)\dots(n+(r-1)c)](n+rc)(n-(r+2)c)}{(n-c)\dots(n-(r+2)c)} x^2 \\
& + r \frac{[n(n+c)\dots(n+(r-2)c)](n+(r-1)c)(n-(r+2)c)}{(n-c)\dots(n-(r+2)c)} x \\
& + \frac{[n(n+c)\dots(n+rc)](n+(r+1)c)}{(n-c)\dots(n-(r+2)c)} \frac{x^2}{2} \\
& + (r+1) \frac{[n(n+c)\dots(n+(r-1)c)](n+rc)}{(n-c)\dots(n-(r+2)c)} x + O(n^{-2})
\end{aligned}$$

dir.

$r = 1$ için:

$$\begin{aligned}
 C(n, c, 1) &= \frac{n}{n-c} \frac{x^2}{2} - \frac{n(n+c)}{(n-c)(n-2c)} x^2 - \frac{n}{(n-c)(n-2c)} x \\
 &\quad + \frac{n(n+c)(n+2c)}{(n-c)(n-2c)(n-3c)} \frac{x^2}{2} + 2 \frac{n(n+c)}{(n-c)(n-2c)(n-3c)} x \\
 &= \frac{n^2 [x(1+cx)] + n(\dots)}{(n-c)(n-2c)(n-3c)}.
 \end{aligned}$$

Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nC(n, c, 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{n^2 [x(1+cx)] + n(\dots)}{(n-c)(n-2c)(n-3c)} = x(1+cx)$$

olur.

$r = 2$ için:

$$\begin{aligned}
 C(n, c, 2) &= \frac{n(n+c)}{(n-c)(n-2c)} \frac{x^2}{2} - \frac{n(n+c)(n+2c)}{(n-c)(n-2c)(n-3c)} x^2 - \frac{n(n+c)}{(n-c)(n-2c)(n-3c)} x \\
 &\quad + \frac{n(n+c)(n+2c)(n+3c)}{(n-c)(n-2c)(n-3c)(n-4c)} \frac{x^2}{2} + 2 \frac{n(n+c)(n+2c)}{(n-c)(n-2c)(n-3c)(n-4c)} x \\
 &= \frac{n^3 [x(1+cx)] + [diğer terimler]}{(n-c)(n-2c)(n-3c)(n-4c)}.
 \end{aligned}$$

Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nC(n, c, 2) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{n^3 [x(1+cx)] + [diğer terimler]}{(n-c)(n-2c)(n-3c)(n-4c)} = x(1+cx)$$

olur.

Kabul edelim ki $r - 1$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nC(n, c, r - 1) = x(1 + cx) \quad [4.13]$$

olsun.

$$\begin{aligned}
& C(n, c, r) \\
&= \frac{n(n+c) \dots (n+(r-1)c)}{(n-c) \dots (n-rc)} \frac{x^2}{2} - \frac{n(n+c) \dots (n+rc)}{(n-c) \dots (n-(r+1)c)} x^2 - r \frac{n(n+c) \dots (n+(r-1)c)}{(n-c) \dots (n-(r+1)c)} x \\
&+ \frac{n(n+c) \dots (n+(r+1)c)}{(n-c) \dots (n-(r+2)c)} \frac{x^2}{2} + (r+1) \frac{n(n+c) \dots (n+rc)}{(n-c) \dots (n-(r+2)c)} x + O(n^{-2}) \\
&= \frac{[n(n+c) \dots (n+(r-2)c)](n+(r-1)c)(n-(r+1)c)(n-(r+2)c)}{(n-c) \dots (n-(r+2)c)} \frac{x^2}{2} \\
&- \frac{[n(n+c) \dots (n+(r-1)c)](n+rc)(n-(r+2)c)}{(n-c) \dots (n-(r+2)c)} x^2 \\
&+ r \frac{[n(n+c) \dots (n+(r-2)c)](n+(r-1)c)(n-(r+2)c)}{(n-c) \dots (n-(r+2)c)} x \\
&+ \frac{[n(n+c) \dots (n+rc)](n+(r+1)c)}{(n-c) \dots (n-(r+2)c)} \frac{x^2}{2} \\
&+ (r+1) \frac{[n(n+c) \dots (n+(r-1)c)](n+rc)}{(n-c) \dots (n-(r+2)c)} x + O(n^{-2}) \\
&= n \frac{n(n+c) \dots (n+(r-2)c)}{(n-c) \dots (n-(r-1)c)(n-(r+2)c)} \frac{x^2}{2} + \frac{n(n+c) \dots (n+(r-2)c)}{(n-c) \dots (n-(r-1)c)(n-(r+2)c)} \\
&\times [-2cn(n-(r+1)c) + (r-1)c(n-(r+1)c)(n-rc-2c)] \frac{x^2}{2} \\
&- n \frac{n(n+c) \dots (n+(r-1)c)}{(n-c) \dots (n-rc)(n-(r+2)c)} x^2 \\
&- \frac{n(n+c) \dots (n+(r-1)c)}{(n-c) \dots (n-(r+2)c)} [-nc + rc(n-(r+1)c) - rc^2] x^2 \\
&- n(r-1) \frac{[n(n+c) \dots (n+(r-2)c)]}{(n-c) \dots (n-rc)(n-(r+2)c)} x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(r-1) \frac{n(n+c) \dots (n+(r-2)c)}{(n-c) \dots (n-(r+2)c)} [-nc + (r-1)c(n-(r+1)c) - (r-1)c^2] x \\
& - \frac{n(n+c) \dots (n+(r-1)c)}{(n-c) \dots (n-(r+1)c)} x \\
& + n \frac{n(n+c) \dots (n+rc)}{(n-c) \dots (n-(r+2)c)} \frac{x^2}{2} + \frac{n(n+c) \dots (n+rc)}{(n-c) \dots (n-(r+2)c)} [(r+1)c] \frac{x^2}{2} \\
& + nr \frac{n(n+c) \dots (n+(r-1)c)}{(n-c) \dots (n-(r+2)c)} x + rc \frac{n(n+c) \dots (n+(r-1)c)}{(n-c) \dots (n-(r+2)c)} x \\
& + \frac{n(n+c) \dots (n+rc)}{(n-c) \dots (n-(r+2)c)} x + O(n^{-2}).
\end{aligned}$$

Bu eşitliğin her iki tarafını n ile çarparak $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa, Eş. 4.13 eşitliğini dikkate alarak,

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} nC(n, c, r) \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-(r+2)c} [nC(n, c, r-1)] + \lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ \frac{n(n+c) \dots (n+(r-2)c)}{(n-c) \dots (n-(r-1)c)(n-(r+2)c)} \right. \\
& \quad \times [-2cn(n-(r+1)c) + (r-1)c(n-(r+1)c)(n-rc-2c)] \frac{x^2}{2} \\
& \quad - \frac{n(n+c) \dots (n+(r-1)c)}{(n-c) \dots (n-(r+2)c)} [-nc + rc(n-(r+1)c) - rc^2] x^2 \\
& \quad - (r-1) \frac{n(n+c) \dots (n+(r-2)c)}{(n-c) \dots (n-(r+2)c)} [-nc + (r-1)c(n-(r+1)c) - (r-1)c^2] x \\
& \quad - \frac{n(n+c) \dots (n+(r-1)c)}{(n-c) \dots (n-(r+1)c)} x + \frac{n(n+c) \dots (n+rc)}{(n-c) \dots (n-(r+2)c)} [(r+1)c] \frac{x^2}{2} \\
& \quad + rc \frac{n(n+c) \dots (n+(r-1)c)}{(n-c) \dots (n-(r+2)c)} x \\
& \quad \left. + \frac{n(n+c) \dots (n+rc)}{(n-c) \dots (n-(r+2)c)} x + O(n^{-2}) \right\} \\
& = x(1+cx)
\end{aligned}$$

elde edilir.

O halde Eş. 4.8, Eş. 4.9 ve Eş. 4.10 sonuçları Eş. 4.7 ifadesinde yerine yazılırsa ve Eş. 4.7 ifadesindeki ikinci terimin limiti Teorem 4.3 deki I_2 nin ispatına benzer olarak hesaplanarak Eş. 4.6 sonucu elde edilir.

Teorem 4.5: $f \in C_\beta[0, \infty)$ ve $q = r$, $q = r + 1$ veya $q = r + 2$ olsun. Eğer, $f^{(q)}$ var ve $(a - \eta, b + \eta) \subset (0, \infty)$, $\eta > 0$, aralığında sürekli ise, o zaman yeterince büyük n ler için

$$\|G_{n,c}^{(r)}(f(t); x) - f^{(r)}(x)\|_{C[a,b]} \leq C_1 n^{-1} \sum_{i=r}^q \|f^{(i)}\|_{C[a,b]} + C_2 n^{-(q-r)/2} \omega(f^{(q)}, n^{-1/2}) + O(n^{-2}) \quad [4.14]$$

eşitsizliği sağlanır. Burada C_1 ve C_2 , n den bağımsız keyfi sabit ve $\omega(f^{(q)}, \delta)$, $f^{(q)}$ nun süreklilik modülüdür.

İspat. f nin Taylor açılımından, $\chi(t)$, $(a - \eta, b + \eta)$ nin karakteristik fonksiyonu olmak üzere

$$f(t) = \sum_{i=0}^q \frac{f^{(i)}(x)}{i!} (t-x)^i + \frac{f^{(q)}(\xi) - f^{(q)}(x)}{q!} (t-x)^q \chi(t) + h(t, x)(1 - \chi(t))$$

yazarız. Buna göre

$$\begin{aligned} G_{n,c}^{(r)}(f(t); x) - f^{(r)}(x) &= \left[\sum_{i=0}^q \frac{f^{(i)}(x)}{i!} \int_0^\infty K_{n,c}^{(r)}(t; x) (t-x)^i dt - f^{(r)}(x) \right] \\ &\quad + \int_0^\infty K_{n,c}^{(r)}(t; x) \frac{f^{(q)}(\xi) - f^{(q)}(x)}{q!} (t-x)^q \chi(t) dt \\ &\quad + \int_0^\infty K_{n,c}^{(r)}(t; x) h(t, x) (1 - \chi(t)) dt \\ &= I_9 + I_{10} + I_{11}. \end{aligned}$$

Önce I_9 için bir üst sınır bulalım. Lemma 3.1.1 dikkate alınarak,

$$\begin{aligned}
 I_9 &= \sum_{i=0}^q \frac{f^{(i)}(x)}{i!} \sum_{v=0}^i \binom{i}{v} (-x)^{i-v} \frac{d^r}{dx^r} \int_0^\infty K_{n,c}(t; x) t^v dt - f^{(r)}(x) \\
 &= \sum_{i=0}^q \frac{f^{(i)}(x)}{i!} \sum_{v=0}^i \binom{i}{v} (-x)^{i-v} \left[\frac{d^r}{dx^r} \left\{ \frac{n(n+c)\dots(n+(v-1)c)}{(n-c)(n-2c)\dots(n-vc)} x^v \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + v(v-1) \frac{n(n+c)\dots(n+(v-2)c)}{(n-c)(n-2c)\dots(n-vc)} x^{v-1} + b(n, c, v-2; x) \right\} \right] - f^{(r)}(x)
 \end{aligned}$$

yazılır. Burada $b(n, c, v-2; x)$, $G_{n,c}(t^v; x)$ polinomunun x in mertebesi $v-2$ den küçük yada eşit terimlerinin bir polinomudur.

Bu ifade

$q = r$ için:

$$I_9 = f^{(r)}(x) \left[\frac{n(n+c)\dots(n+(r-1)c}{(n-c)(n-2c)\dots(n-rc)} - 1 \right] = f^{(r)}(x) O(n^{-1}).$$

$q = r+1$ için:

$$\begin{aligned}
 I_9 &= f^{(r)}(x) \left[\frac{n(n+c)\dots(n+(r-1)c}{(n-c)(n-2c)\dots(n-rc)} - 1 \right] \\
 &+ \frac{f^{(r+1)}(x)}{(r+1)!} \left[(r+1)(-x)r! \frac{n(n+c)\dots(n+(r-1)c}{(n-c)(n-2c)\dots(n-rc)} \right. \\
 &+ \left. \left\{ (r+1)! \frac{n(n+c)\dots(n+rc)}{(n-c)(n-2c)\dots(n-(r+1)c)} x + r(r+1)r! \frac{n(n+c)\dots(n+(r-1)c}{(n-c)(n-2c)\dots(n-(r+1)c)} \right\} \right] \\
 &= f^{(r)}(x) O(n^{-1}) + f^{(r+1)}(x) O(n^{-1})(x+1).
 \end{aligned}$$

$q = r+2$ için:

$$\begin{aligned}
I_9 &= f^{(r)}(x) \left[\frac{n(n+c)\dots(n+(r-1)c}{(n-c)(n-2c)\dots(n-rc)} - 1 \right] \\
&+ \frac{f^{(r+1)}(x)}{(r+1)!} \left[(r+1)(-x)r! \frac{n(n+c)\dots(n+(r-1)c}{(n-c)(n-2c)\dots(n-rc)} \right. \\
&+ \left\{ (r+1)! \frac{n(n+c)\dots(n+rc)}{(n-c)(n-2c)\dots(n-(r+1)c)} x + r(r+1)r! \frac{n(n+c)\dots(n+(r-1)c}{(n-c)(n-2c)\dots(n-(r+1)c)} \right\} \Big] \\
&+ \frac{f^{(r+2)}(x)}{(r+2)!} \left[\frac{(r+2)(r+1)}{2} x^2 r! \frac{n(n+c)\dots(n+(r-1)c}{(n-c)(n-2c)\dots(n-rc)} \right. \\
&+ (r+2)(-x) \left\{ (r+1)! \frac{n(n+c)\dots(n+rc)}{(n-c)(n-2c)\dots(n-(r+1)c)} x \right. \\
&+ \left. \left. r(r+1)r! \frac{n(n+c)\dots(n+(r-1)c}{(n-c)(n-2c)\dots(n-(r+1)c)} \right\} \right. \\
&+ \left. \left\{ \frac{(r+2)!}{2} \frac{n(n+c)\dots(n+(r+1)c}{(n-c)(n-2c)\dots(n-(r+2)c)} x^2 \right. \right. \\
&+ \left. \left. (r+1)(r+2)(r+1)! \frac{n(n+c)\dots(n+rc)}{(n-c)(n-2c)\dots(n-(r+2)c)} x + b(n, c, r; x) \right\} \right] \\
&= f^{(r)}(x)O(n^{-1}) + f^{(r+1)}(x)O(n^{-1})(x+1) + f^{(r+2)}(x)O(n^{-1})(x^2 + x + 1) + O(n^{-2})
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\|I_9\|_{C[a,b]} \leq C_1 n^{-1} \sum_{i=r}^q \|f^{(i)}\|_{C[a,b]} + O(n^{-2}) \quad [4.15]$$

elde edilir.

Şimdi $|I_{10}|$ için bir üst sınır bulalım. $f^{(q)}$ için Tanım 3.2.1 i dikkate alarak,

$$\begin{aligned}
|I_{10}| &\leq \int_0^\infty |K_{n,c}^{(r)}(t; x)| \frac{|f^{(q)}(\xi) - f^{(q)}(x)|}{q!} |t-x|^q \chi(t) dt \\
&\leq \frac{\omega(f^{(q)}, \delta)}{q!} \int_0^\infty |K_{n,c}^{(r)}(t; x)| \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right) |t-x|^q dt
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\omega(f^{(q)}, \delta)}{q!} \left[n \sum_{k=1}^{\infty} |p_{n,k}^{(r)}(x; c)| \int_0^{\infty} p_{n+c, k-1}(t; c) (|t-x|^q + \delta^{-1} |t-x|^{q+1}) dt \right. \\ \left. + |\phi_{n,c}^{(r)}(x)| (|x|^q + \delta^{-1} |x|^{q+1}) \right], \delta > 0$$

Lemma 4.2 den

$$|I_{10}| \leq \frac{\omega(f^{(q)}, \delta)}{q!} \left[n \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{2i+j \leq r \\ i, j \geq 0}} n^i |(k-nx)^i| \frac{|q_{i,j,r}(x; c)|}{x^r (1+cx)^r} p_{n,k}(x; c) \right. \\ \times \int_0^{\infty} p_{n+c, k-1}(t; c) (|t-x|^q + \delta^{-1} |t-x|^{q+1}) dt \\ \left. + \phi_{n,c}^{(r)}(x) (|x|^q + \delta^{-1} |x|^{q+1}) \right], \delta > 0 \\ \leq \frac{\omega(f^{(q)}, \delta)}{q!} \left[\sum_{\substack{2i+j \leq r \\ i, j \geq 0}} n^i \left\{ n \sum_{k=1}^{\infty} p_{n,k}(x; c) |(k-nx)^i| \frac{|q_{i,j,r}(x; c)|}{x^r (1+cx)^r} \right. \right. \\ \times \int_0^{\infty} p_{n+c, k-1}(t; c) (|t-x|^q + \delta^{-1} |t-x|^{q+1}) dt \\ \left. \left. + |\phi_{n,c}^{(r)}(x)| (|x|^q + \delta^{-1} |x|^{q+1}) \right\} \right], \delta > 0$$

olur.

$$K = \sup_{\substack{2i+j \leq r \\ i, j \geq 0}} \sup_{x \in [a, b]} \frac{|q_{i,j,r}(x; c)|}{x^r (1+cx)^r}$$

denilirse

$$|I_{10}| \leq \frac{\omega(f^{(q)}, \delta)}{q!} \left[K \sum_{\substack{2i+j \leq r \\ i, j \geq 0}} n^i \left\{ n \sum_{k=1}^{\infty} p_{n,k}(x; c) |(k-nx)^i| \int_0^{\infty} p_{n+c, k-1}(t; c) |t-x|^q dt \right\} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\omega(f^{(q)}, \delta)}{q!} \left[K \sum_{\substack{2i+j \leq r \\ i, j \geq 0}} n^i \left\{ n \sum_{k=1}^{\infty} p_{n,k}(x; c) |k - nx|^j \left| \int_0^{\infty} p_{n+c, k-1}(t; c) \delta^{-1} |t - x|^{q+1} dt \right| \right\} \right. \\
& + \frac{\omega(f^{(q)}, \delta)}{q!} |\phi_{n,c}^{(r)}(x)| (|x|^q + \delta^{-1} |x|^{q+1}) \\
& = I_{12} + I_{13} + I_{14}.
\end{aligned}$$

Şimdi $s = 1, 2, 3, \dots$

$$n \sum_{k=1}^{\infty} p_{n,k}(x; c) |k - nx|^j \int_0^{\infty} p_{n+c, k-1}(t; c) |t - x|^s dt = O(n^{(j-s)/2}) \quad [4.16]$$

olduğunu gösterelim.

Bu ifadeye $\int_0^{\infty} p_{n+c, k-1}(t; c) dt = n^{-1}$ eşitliğini göz önüne alıp önce integrale sonra toplam üzerine Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& n \sum_{k=1}^{\infty} p_{n,k}(x; c) |k - nx|^j \int_0^{\infty} p_{n+c, k-1}(t; c) |t - x|^s dt \\
& \leq n \sum_{k=1}^{\infty} p_{n,k}(x; c) |k - nx|^j \left(\int_0^{\infty} p_{n+c, k-1}(t; c) dt \right)^{1/2} \left(\int_0^{\infty} p_{n+c, k-1}(t; c) |t - x|^{2s} dt \right)^{1/2} \\
& \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} p_{n,k}(x; c) |k - nx|^{2j} \right)^{1/2} \left(n \sum_{k=1}^{\infty} p_{n,k}(x; c) \int_0^{\infty} p_{n+c, k-1}(t; c) |t - x|^{2s} dt \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Bu eşitsizlik Eş. 4.4 ve Eş. 4.5 den

$$n \sum_{k=1}^{\infty} p_{n,k}(x; c) |k - nx|^j \int_0^{\infty} p_{n+c, k-1}(t; c) |t - x|^s dt \leq O(n^{j/2}) O(n^{-s/2}) = O(n^{(j-s)/2})$$

olur.

Eş. 4.16 dan

$$I_{12} = \frac{\omega(f^{(q)}, \delta)}{q!} \sum_{\substack{2i+j \leq r \\ i, j \geq 0}} n^i O(n^{(j-q)/2}) = \frac{\omega(f^{(q)}, \delta)}{q!} O(n^{(r-q)/2})$$

ve

$$I_{13} = \frac{\omega(f^{(q)}, \delta)}{q!} \sum_{\substack{2i+j \leq r \\ i, j \geq 0}} n^i O(n^{(j-q-1)/2}) \delta^{-1} = \frac{\omega(f^{(q)}, \delta)}{q!} O(n^{(r-q-1)/2}) \delta^{-1}$$

olur.

$s_0 > 0$ reel sayı olmak üzere $I_{14} = \frac{\omega(f^{(q)}, \delta)}{q!} O(n^{-s_0})$ alınır. I_{12} , I_{13} ve I_{14} ifadeleri yerine yazılır ve $\delta = n^{-1/2}$ seçilirse

$$\begin{aligned} \|I_{10}\|_{C[a,b]} &\leq \frac{\omega(f^{(q)}, \delta)}{q!} \left[O(n^{(r-q)/2}) + \delta^{-1} O(n^{(r-q-1)/2}) + O(n^{-s_0}) \right] \\ &\leq C_2 n^{-(q-r)/2} \omega(f^{(q)}, n^{-1/2}) \end{aligned} \quad [4.17]$$

elde edilir.

Son olarak I_{11} için bir üst sınır elde edelim. Lemma 4.2 yi dikkate alarak,

$$K = \sup_{\substack{2i+j \leq r \\ i, j \geq 0}} \sup_{x \in [a,b]} \frac{|q_{i,j,r}(x; c)|}{x^r (1+cx)^r} \quad \text{ve} \quad |h(t, x)| \leq M |t-x|^\nu, \quad \nu > \max\{\beta, q\} \quad \text{olmak üzere}$$

$$\begin{aligned} |I_{11}| &\leq n \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{2i+j \leq r \\ i, j \geq 0}} n^i |(k-nx)^j| \frac{|q_{i,j,r}(x; c)|}{x^r (1+cx)^r} p_{n,k}(x; c) \\ &\quad \times \int_{|t-x| \geq \delta} p_{n+c, k-1}(t; c) |h(t, x)| dt + |\phi_{n,c}^{(r)}(x)| |h(0, x)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq KM \sum_{\substack{2i+j \leq r \\ i,j \geq 0}} n^i \left\{ n \sum_{k=1}^{\infty} p_{n,k}(x; c) |(k - nx)^j| \right. \\
&\quad \times \int_0^{\infty} p_{n+c,k-1}(t; c) |t - x|^\nu dt \left. \right\} + |\phi_{n,c}^{(r)}(x)| |h(0, x)| \\
&= I_{15} + I_{16}.
\end{aligned}$$

Eş. 4.16 dan $I_{15} = O\left(n^{(r-\nu)/2}\right)$ ve $s_0 > 0$ reel sayı olmak üzere $I_{16} = O\left(n^{-s_0}\right)$ yazılır.

I_{15} ve I_{16} yerine yazılırsa

$$|I_{11}| \leq O\left(n^{(r-\nu)/2}\right) + O\left(n^{-s_0}\right) = O\left(n^{-2}\right) \quad [4.18]$$

olur.

Eş. 4.15, Eş. 4.17 ve Eş. 4.18 ifadeleri yerine yazılırsa Eş. 4.14 elde edilir.

5. TOPLAMSAL İNTEGRAL TİP OPERATÖRLERİN BEZİER VARYANTI İLE YAKLAŞIM HIZININ HESAPLANMASI

5.1. $G_{n,c}$ Operatör Dizisinin Bezier Varyantı

Bu kısımda pozitif reel eksenin her sonlu alt aralığında sınırlı salınımlı ve $\rho(x) = (1+x)^\beta$, $\beta > 0$, ağırlık şartını sağlayan fonksiyonların uzayı $BV_\beta[0, \infty)$ da $G_{n,c}$ operatörlerinin Bezier varyantını tanımlayıp yaklaşım hızını elde edeceğiz.

Tanım 5.1.1: $\alpha \geq 1$ bir reel sayı,

$$J_{n,k}(x; c) = \sum_{j=k}^{\infty} p_{n,j}(x; c) \text{ ve } Q_{n,k}^{(\alpha)}(x; c) = J_{n,k}^\alpha(x; c) - J_{n,k+1}^\alpha(x; c)$$

olmak üzere $f \in BV_\beta[0, \infty)$ için $G_{n,c}$ operatörlerinin Bezier varyantını

$$G_{n,c,\alpha}(f; x) = n \sum_{k=1}^{\infty} Q_{n,k}^{(\alpha)}(x; c) \int_0^{\infty} p_{n+c,k-1}(t; c) f(t) dt + Q_{n,0}^{(\alpha)}(x; c) f(0) \quad [5.1]$$

olarak tanımlıyoruz. $G_{n,c,\alpha}$ operatörü $G_{n,c}$ operatöründen daha genel bir operatördür. Çünkü $\alpha = 1$ için $G_{n,c,\alpha}$ operatörü $G_{n,c}$ operatörüne indirgenir. Aynı zamanda $G_{n,c,\alpha}$ operatörleri aşağıdaki özel durumları içerir.

Durum 1. Eğer, $\alpha = 1$ ve $c = 0$ ise $G_{n,0,1}$ operatörleri Eş. 3.2 de verilen $G_{n,0}$ Phillips operatörleri olur.

Durum 2. Eğer, $\alpha = 1$ ve $c = 1$ ise $G_{n,1,1}$ operatörleri Eş. 3.3 de verilen $G_{n,1}$ toplam-integral tip operatörler olur.

Eş. 5.1 de tanımlanan operatörleri $\delta(t)$ Dirac delta fonksiyonu ve

$$K_{n,c,\alpha}(x,t) = n \sum_{k=1}^{\infty} Q_{n,k}^{(\alpha)}(x;c) p_{n+c,k-1}(t;c) + Q_{n,0}^{(\alpha)}(x;c) \delta(t) \quad [5.2]$$

olmak üzere

$$G_{n,c,\alpha}(f;x) = \int_0^{\infty} K_{n,c,\alpha}(x;t) f(t) dt \quad [5.3]$$

biçiminde yazabiliriz.

Amacımız için aşağıdaki Lemmaları verelim.

Lemma 5.1.2 (16,27): Her $x \in (0, \infty)$ ve $k \in \mathbb{N}$ için

$$p_{n,k}(x;c) \leq \begin{cases} 1/\sqrt{2enx}, & \text{eğer } c = 0 \\ \sqrt{(1+cx)/2enx}, & \text{eğer } c = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

dir.

Lemma 5.1.3 (16,19): Her $x \in (0, \infty)$ için $n \int_x^{\infty} p_{n,k}(t;c) dt = \sum_{j=0}^k p_{n,j}(x;c)$ dir.

Lemma 5.1.4: $x \in (0, \infty)$ ve $K_{n,c,\alpha}(x,t)$ Eş. 5.2 deki eşitlik olsun. O zaman $\lambda > 2$ ve yeterince büyük n ler için

$$(i). \beta_{n,c,\alpha}(x;y) = \int_0^y K_{n,c,\alpha}(x,t) dt \leq \frac{\alpha \lambda x(1+cx)}{n(x-y)^2} \quad (0 \leq y < x)$$

$$(ii). 1 - \beta_{n,c,\alpha}(x;z) = \int_z^{\infty} K_{n,c,\alpha}(x,t) dt \leq \frac{\alpha \lambda x(1+cx)}{n(z-x)^2} \quad (x < z < \infty)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat (i). Lemma 3.1.2 ve $|a^\alpha - b^\alpha| \leq \alpha |a - b|$, $0 \leq a, b \leq 1$, $\alpha \geq 1$ eşitsizliğini kullanarak

$$\beta_{n,c,\alpha}(x; y) \leq \int_0^y \left(\frac{x-t}{x-y} \right)^2 K_{n,c,\alpha}(x, t) dt \leq \frac{\alpha}{(x-y)^2} T_{n,2}(x; c) \leq \frac{\alpha \lambda x (1 + cx)}{n(x-y)^2}$$

elde edilir.

(ii). Benzer biçimde gösterilir.

Teorem 5.1.5: $f \in BV_r[0, \infty)$, $r \in \mathbb{N}$, olsun. $\alpha \geq 1$ ve $\lambda > 2$ sayıları ve $x \in (0, \infty)$ için öyle bir $K(f, \alpha, c, \lambda, r, x)$ sabiti bulabiliriz ki yeterince büyük n ler için

$$g_x(t) = \begin{cases} f(t) - f(x-), & 0 \leq t < x \\ 0, & t = x \\ f(t) - f(x+), & t > x \end{cases},$$

$V_a^b(g_x)$, $[a, b]$ aralığı üzerinde g_x in toplam salınımı olmak üzere

$$\left| G_{n,c,\alpha}(f; x) - \left[\frac{1}{\alpha+1} f(x+) + \frac{\alpha}{\alpha+1} f(x-) \right] \right| \leq 2\alpha \sqrt{\frac{1+cx}{2enx}} |f(x+) - f(x-)| \\ + \frac{6\alpha\lambda(1+cx)}{nx} \sum_{k=1}^n V_{x-x/\sqrt{k}}^{x+x/\sqrt{k}}(g_x) + K(f, \alpha, c, \lambda, r, x) n^{-r}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

Burada $t = x$ noktasında $g_x(t)$ fonksiyonu sürekli olduğundan $\delta \rightarrow 0^+$ için $V_{x-\delta}^{x+\delta}(g_x) \rightarrow 0$ olup $n \rightarrow \infty$ için yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafı sıfıra gider.

İspat. Herhangi bir sınırlı salınımlı $f(t)$ fonksiyonu

$$\operatorname{sgn}_x(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t < x \\ 0, & t = x \\ 1, & t > x \end{cases} \quad \text{ve} \quad \delta_x(t) = \begin{cases} 1, & t = x \\ 0, & t \neq x \end{cases}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} f(t) = & \frac{1}{\alpha+1} f(x+) + \frac{\alpha}{\alpha+1} f(x-) + \frac{f(x+) - f(x-)}{2} \left(\operatorname{sgn}_x(t) + \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \right) \\ & + g_x(t) + \delta_x(t) \left[f(x) - \frac{f(x+)}{2} - \frac{f(x-)}{2} \right] \end{aligned} \quad [5.4]$$

biçiminde yazılır. Bu fonksiyona $G_{n,c,\alpha}$ operatörü uygulanarak

$$\begin{aligned} & \left| G_{n,c,\alpha}(f; x) - \left[\frac{1}{\alpha+1} f(x+) + \frac{\alpha}{\alpha+1} f(x-) \right] \right| \leq \\ & \frac{|f(x+) - f(x-)|}{2} \left| G_{n,c,\alpha}(\operatorname{sgn}_x(t); x) + \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \right| + |G_{n,c,\alpha}(g_x(t); x)| \\ & + \left| f(x) - \frac{f(x+)}{2} - \frac{f(x-)}{2} \right| |G_{n,c,\alpha}(\delta_x(t); x)| \end{aligned} \quad [5.5]$$

eşitsizliği elde edilir.

Sağ taraftaki terimlerin üst sınırlarını elde edelim. Aşıkarak $G_{n,c,\alpha}(\delta_x, x) = 0$ dır.

Lemma 5.1.3 ve Lemma 5.1.4 ü düşünerek ilk önce $G_{n,c,\alpha}(\operatorname{sgn}_x(t); x)$ ye bakalım.

$$\begin{aligned} G_{n,c,\alpha}(\operatorname{sgn}_x(t); x) &= -1 + 2n \sum_{k=1}^{\infty} Q_{n,k}^{(\alpha)}(x; c) \int_x^{\infty} p_{n+c,k-1}(t; c) dt \\ &= -1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} Q_{n,k}^{(\alpha)}(x; c) \sum_{j=1}^{k-1} p_{n,j}(x; c) \\ &= -1 + 2 \sum_{j=0}^{\infty} p_{n,j}(x; c) J_{n,j+1}^{\alpha}(x; c) \end{aligned}$$

Dolayısı ile $\sum_{j=0}^{\infty} Q_{n,j}^{(\alpha+1)}(x;c) = 1$ olduğu için

$$G_{n,c,\alpha}(\operatorname{sgn}_x(t); x) + \frac{\alpha-1}{\alpha+1} = 2 \sum_{j=0}^{\infty} p_{n,j}(x;c) J_{n,j+1}^{\alpha}(x;c) - \frac{2}{\alpha+1} \sum_{j=0}^{\infty} Q_{n,j}^{(\alpha)}(x;c)$$

elde edilir.

Ortalama değer teoreminden $J_{n,j+1}(x;c) < \gamma_{n,j}(x;c) < J_{n,j}(x;c)$ olmak üzere

$$Q_{n,j}^{(\alpha+1)}(x;c) = J_{n,j}^{\alpha+1}(x;c) - J_{n,j+1}^{\alpha+1}(x;c) = (\alpha+1)p_{n,j}(x;c)\gamma_{n,j}^{\alpha}(x;c)$$

eşitliği yazılırsa ve Lemma 5.1.2 den

$$\begin{aligned} \left| G_{n,c,\alpha}(\operatorname{sgn}_x(t); x) + \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \right| &\leq 2 \sum_{j=0}^{\infty} p_{n,j}(x;c) |J_{n,j+1}^{\alpha}(x;c) - J_{n,j}^{\alpha}(x;c)| \\ &\leq 2\alpha \sum_{j=0}^{\infty} p_{n,j}(x;c) p_{n,j}(x;c) \\ &\leq 2\alpha \sqrt{\frac{1+cx}{2enx}} \end{aligned} \quad [5.6]$$

elde edilir.

Şimdi $G_{n,c,\alpha}(g_x(t); x)$ için bir üst sınır elde edelim. Eş. 5.3 den

$$G_{n,c,\alpha}(g_x; x) = \left(\int_0^{x-x/\sqrt{n}} + \int_{x-x/\sqrt{n}}^{x+x/\sqrt{n}} + \int_{x+x/\sqrt{n}}^{\infty} \right) K_{n,c,\alpha}(x;t) g_x(t) dt \quad [5.7]$$

yazılır. Bu integrallere sırası ile E_1, E_2 ve E_3 diyelim.

E_1 için; $y = x - x/\sqrt{n}$ ve Lebesgue-Stieltjes kısmi integrali alınırsa

$$E_1 = \int_0^y g_x(t) d_t(\beta_{n,c,\alpha}(x; y)) - \int_0^y \beta_{n,c,\alpha}(x; t) d_t(g_x(t))$$

elde edilir. $|g_x(t)| \leq V_t^x(g_x)$ olduğu için

$$|E_1| \leq V_y^x(g_x) \beta_{n,c,\alpha}(x; y) + \int_0^y \beta_{n,c,\alpha}(x; t) d_t(-V_t^x(g_x))$$

eşitliği yazılıp Lemma 5.1.4 ü uygularsak

$$|E_1| \leq V_y^x(g_x) \frac{\alpha\lambda(1+cx)}{n(x-y)^2} + \frac{\alpha\lambda(1+cx)}{n} \int_0^y \frac{1}{(x-t)^2} d_t(V_t^x(g_x))$$

eşitliğini elde ederiz. Son terimin integrali alınırsa

$$|E_1| \leq \frac{\alpha\lambda(1+cx)}{n} \left[x^{-2} V_0^x(g_x) + 2 \int_0^y \frac{V_t^x(g_x)}{(x-t)^3} dt \right]$$

olur. y yerine $x - x/\sqrt{u}$ konulursa

$$|E_1| \leq \frac{\alpha\lambda(1+cx)}{n} \left[x^{-2} V_0^x(g_x) + x^{-2} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V_{x-x/\sqrt{k}}^x(g_x) \right]$$

eşitsizliği elde edilir. O halde

$$|E_1| \leq \frac{2\alpha\lambda(1+cx)}{nx} \sum_{k=1}^n V_{x-x/\sqrt{k}}^x(g_x) \quad [5.8]$$

sonucu elde edilir.

E_2 için; $t \in \left[x - x/\sqrt{n}, x + x/\sqrt{n} \right]$ olsun. Bu durumda

$$|E_2| \leq \int_{x-x/\sqrt{n}}^{x+x/\sqrt{n}} |g_x(t)| K_{n,\alpha,c}(x;t) dt$$

yazabiliriz.

$$(a, b) \subset [0, \infty) \text{ olduğu için } \int_a^b K_{n,c,\alpha}(x;t) dt \leq 1 \text{ dir. } |g_x(t)| \leq V_y^x(g_x) \leq V_{x-x/\sqrt{n}}^{x+x/\sqrt{n}}(g_x)$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$|E_2| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V_{x-x/\sqrt{k}}^{x+x/\sqrt{k}}(g_x) \quad [5.9]$$

elde edilir.

E_3 için;

$$\hat{g}_x(t) = \begin{cases} g_x(t), & 0 \leq t < 2x \\ g_x(2x), & 2x \leq t < \infty \end{cases}$$

olmak üzere

$$E_3 = \int_{x+x/\sqrt{n}}^{\infty} K_{n,c,\alpha}(x;t) \hat{g}_x(t) dt + \int_{2x}^{\infty} K_{n,c,\alpha}(x;t) [g_x(t) - g_x(2x)] dt$$

olur. Bu integrallerin her birine sırasıyla E_{31} ve E_{32} diyelim.

E_{31} için; $z = x + x/\sqrt{n}$ denilirse

$$E_{31} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ g_x(z) [1 - \beta_{n,c,\alpha}(x, z)] + \hat{g}_x(R) [\beta_{n,c,\alpha}(x, R) - 1] + \int_z^R [1 - \beta_{n,c,\alpha}(x, t)] d_t(\hat{g}_x(t)) \right\}$$

Lemma 5.1.4 uygulanırsa

$$\begin{aligned} |E_{31}| &\leq \frac{\alpha\lambda x(1+cx)}{n} \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{V_x^z(g_x)}{(z-x)^2} + \frac{\hat{g}_x(R)}{(R-x)^2} + \int_z^R \frac{1}{(t-x)^2} d_t(V_x^t(g_x)) \right\} \\ &= \frac{\alpha\lambda x(1+cx)}{n} \left\{ \frac{V_x^z(g_x)}{(z-x)^2} + \int_z^{2x} \frac{1}{(t-x)^2} d_t(V_x^t(g_x)) \right\} \end{aligned}$$

olup

$$\int_z^{2x} \frac{1}{(t-x)^2} d_t(V_x^t(g_x)) = x^{-2} V_x^{2x}(g_x) - \frac{V_x^z(g_x)}{(z-x)^2} + x^{-2} \sum_{k=1}^{n-1} V_x^{x+x/\sqrt{k}}(g_x)$$

olduğundan

$$|E_{31}| \leq \frac{2\alpha\lambda(1+cx)}{nx} \sum_{k=1}^{n-1} V_x^{x+x/\sqrt{k}}(g_x) \quad [5.10]$$

elde edilir.

E_{32} için; g_x fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} |E_{32}| &\leq \int_{2x}^{\infty} K_{n,c,\alpha}(x; t) [M_1(1+t)^r + M_2(1+2x)^r] dt \\ &\leq (M_1 + M_2) n \sum_{k=1}^{\infty} Q_{n,k}^{(\alpha)}(x; c) \int_{2x}^{\infty} p_{n+c,k-1}(x; c) [(1+t)^r + (1+2x)^r] dt \end{aligned}$$

$$\leq \alpha (M_1 + M_2) n \sum_{k=1}^{\infty} p_{n,k}(x; c) \int_{2x}^{\infty} p_{n+c,k-1}(x; c) \left[(1+t)^r + (1+2x)^r \right] dt$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizliğe $t \geq 2x$ için

$$(1+t)^r \leq 2^r \frac{(1+x)^r}{x^{2r}} (t-x)^{2r}$$

ve

$$(1+2x)^r \leq 2^r \frac{(1+x)^r}{x^{2r}} (t-x)^{2r}$$

eşitsizliği ile Lemma 5.1.3 ve Lemma 5.1.4 uygulanırsa $n > r$ için

$$|E_{32}| \leq \alpha (M_1 + M_2) 2^{r+1} \frac{(1+x)^r}{x^{2r}} T_{n,2r}(x; c) \leq \alpha (M_1 + M_2) 2^{r+1} \frac{(1+x)^r}{x^{2r}} M_3 n^{-r}$$

$$K(f, \alpha, c, \lambda, r, x) = \alpha (M_1 + M_2) M_3 2^{r+1} \frac{(1+x)^r}{x^{2r}}$$

denilirse

$$|E_{32}| \leq K(f, \alpha, c, \lambda, r, x) n^{-r} \quad [5.11]$$

elde edilir.

Eş. 5.8-5.11 sonuçları yerlerine yazılarak Eş. 5.7 sonucu elde edilir. Eş. 5.6 ve Eş. 5.7 sonucu Eş. 5.5 de yerine yazılırsa teoremden istenen elde edilir.

5.2. M_n Operatör Dizisinin Bezier Varyantı

Bu kısımda pozitif reel eksenin her sonlu alt aralığında sınırlı salınımlı ve $\rho(x) = (1+x)^\beta$ ağırlık şartını sağlayan fonksiyonların uzayı $BV_\beta[0, \infty)$ da Agrawal ve Thamer tarafından (15) de tanımlanmış olan M_n operatörlerinin Bezier varyantını tanımlayıp yaklaşım hızını elde edeceğiz. Belirtelim ki bu operatörler $G_{n,c}$ operatörlerinin $c = 1$ özel durumunun basit bir modifikasyonudur. Bu operatörler:

$$p_{n,k}(x) = \binom{n+k-1}{k} x^k (1+x)^{-n-k}$$

olmak üzere

$$M_n(f; x) = (n-1) \sum_{k=1}^{\infty} p_{n,k}(x) \int_0^{\infty} p_{n,k-1}(t) f(t) dt + (1+x)^{-n} f(0) \quad [5.12]$$

biçiminde verilmiştir.

Bu operatörlerin Agrawal ve Thamer (15) tarafından simultaneous yaklaşımı ve Gupta (28) tarafından sınırlı salınımlı fonksiyonlara yaklaşımı incelemiştir.

Tanım 5.2.1: $f \in BV_\beta[0, \infty)$, $\alpha \geq 1$ bir reel sayı, $J_{n,k}(x) = \sum_{j=k}^{\infty} p_{n,j}(x)$ ve

$Q_{n,k}^{(\alpha)}(x) = J_{n,k}^\alpha(x) - J_{n,k+1}^\alpha(x)$ olmak üzere

$$M_{n,\alpha}(f; x) = (n-1) \sum_{k=1}^{\infty} Q_{n,k}^{(\alpha)}(x) \int_0^{\infty} p_{n,k-1}(t) f(t) dt + Q_{n,0}^{(\alpha)}(x) f(0) \quad [5.13]$$

biçiminde tanımlanan $M_{n,\alpha}$ operatörlerine Eş. 5.12 de verilen M_n operatörlerinin Bezier varyantı denir.

$\alpha = 1$ için $M_{n,1}$ operatörleri M_n operatörlerine indirgenir. Bu nedenle Eş. 5.13 de verilen $M_{n,\alpha}$ operatörleri Eş. 5.12 de verilen M_n operatörlerinden daha genel bir operatörler dizisidir.

$\delta(t)$ Dirac delta fonksiyonu ve

$$K_{n,\alpha}(f; x) = (n-1) \sum_{k=1}^{\infty} Q_{n,k}^{(\alpha)}(x) p_{n,k-1}(t) + Q_{n,0}^{(\alpha)}(x) \delta(t) \quad [5.14]$$

olmak üzere

$$M_{n,\alpha}(f; x) = \int_0^{\infty} K_{n,\alpha}(x; t) f(t) dt \quad [5.15]$$

biçiminde yazabiliriz.

Amacımız için aşağıdaki Lemmaları verelim.

Lemma 5.2.2 (28): $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere m -yinci moment fonksiyon

$T_{n,m}(x) = M_n((t-x)^m; x)$ olsun. O zaman

$$T_{n,0}(x) = 1, \quad T_{n,1}(x) = \frac{2x}{n-2}, \quad T_{n,2}(x) = \frac{x^2(2n+6) + 2nx}{(n-2)(n-3)} \quad \text{ve} \quad T_{n,m}(x) = O(n^{-[(m+1)/2]})$$

dir.

Lemma 5.2.3: $x \in (0, \infty)$ ve $K_{n,\alpha}(x, t)$ Eş. 5.14 deki eşitlik olsun. O zaman $\lambda > 2$ ve yeterince büyük n ler için

$$(i). \quad \beta_{n,\alpha}(x; y) = \int_0^y K_{n,\alpha}(x, t) dt \leq \frac{\alpha \lambda x(1+x)}{n(x-y)^2} \quad (0 \leq y < x)$$

$$(ii). 1 - \beta_{n,\alpha}(x; z) = \int_z^{\infty} K_{n,\alpha}(x, t) dt \leq \frac{\alpha \lambda x(1+x)}{n(z-x)^2} \quad (x < z < \infty)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat (i). $0 \leq y < x$ ve $0 \leq t \leq y < x$ ise $\frac{x-t}{x-y} \geq 1$ dir. Lemma 5.2.2 ve $\alpha \geq 1$ için

$0 \leq a, b \leq 1$ olmak üzere $|a^\alpha - b^\alpha| \leq \alpha |a - b|$ eşitsizliğini kullanarak

$$\beta_{n,c,\alpha}(x; y) \leq \int_0^y \left(\frac{x-t}{x-y} \right)^2 K_{n,\alpha}(x, t) dt \leq \frac{\alpha}{(x-y)^2} T_{n,2}(x) \leq \frac{\alpha \lambda x(1+x)}{n(x-y)^2}$$

elde edilir.

(ii). Benzer biçimde gösterilir.

Lemma 5.2.4 (28): Her $x \in (0, \infty)$ için $(n-1) \int_x^{\infty} p_{n,k}(t) dt = \sum_{j=0}^k p_{n-1,k}(x)$ eşitliği

sağlanır.

Lemma 5.2.5 (28): $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ bağımsız rasgele değişkenler dizisi olsun. Her $x > 0$, $k \in \mathbb{N}$ için geometrik dağılım

$$P(\xi_i = k) = \left(\frac{x}{1+x} \right)^k \frac{1}{1+x}$$

biçiminde tanımlanırsa o zaman $E(\xi_1) = x$, $E(\xi_1 - E(\xi_1))^2 = x^2 + x$ ve $E|\xi_1 - E(\xi_1)|^3 \leq 3x(1+x)^2$ dir.

Lemma 5.2.6 (29): (Berry-Esseen) $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ bağımsız rasgele değişkenler dizisi olmak üzere $E(\xi_i) = \mu$, $V(\xi_i) = \sigma^2 > 0$ ve $E|\xi_1 - E(\xi_1)|^3 < \infty$ olsun. Bu durumda $1/\sqrt{2\pi} \leq C < 0,82$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ ve $t \in \mathbb{R}$ için

$$\left| P\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \mu) \leq t\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-u^2/2} du \right| \leq C \frac{E|\xi_1 - E(\xi_1)|^3}{\sigma^3 \sqrt{n}}$$

dir.

Lemma 5.2.7. Her $x \in (0, \infty)$ ve $k \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

$$(i) \quad |J_{n,k}^{\alpha}(x) - J_{n-1,k}^{\alpha}(x)| \leq \frac{\alpha(9x+8)}{\sqrt{nx(1+x)}}$$

ve

$$(ii) \quad |J_{n,k}^{\alpha}(x) - J_{n-1,k-1}^{\alpha}(x)| \leq \frac{\alpha(9x+8)}{\sqrt{nx(1+x)}}.$$

İspat (i). $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ rasgele değişkenler dizisi Lemma 5.2.5 deki gibi tanımlansın ve

$\eta_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \mu)$ olsun. Bu durumda η_n rasgele değişkenin olasılık dağılımı

$$P(\eta_n = k) = \binom{n+k-1}{k} x^k (1+x)^{-(n+k)} = p_{n,k}(x)$$

dir. O halde

$$\begin{aligned} |J_{n,k}^{\alpha}(x) - J_{n-1,k}^{\alpha}(x)| &\leq \alpha |J_{n,k}(x) - J_{n-1,k}(x)| \\ &\leq \alpha \left| \left(1 - \sum_{j=0}^{k-1} p_{n,j}(x)\right) - \left(1 - \sum_{j=0}^{k-1} p_{n-1,j}(x)\right) \right| \\ &\leq \alpha |P(\eta_{n-1} \leq k-1) - P(\eta_n \leq k-1)| \\ &\leq \alpha I. \end{aligned}$$

$$A_1 = \frac{k-1-nx}{\sqrt{nx(1+x)}} \text{ ve } A_2 = \frac{k-1-(n-1)x}{\sqrt{(n-1)x(1+x)}} \text{ denilirse}$$

$$I = \left| P(\eta_{n-1} \leq k-1) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{A_2} e^{-u^2/2} du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{A_2} e^{-u^2/2} du - P(\eta_n \leq k-1) \right|$$

yazılır.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{A_2} e^{-u^2/2} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{A_1} e^{-u^2/2} du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{A_1}^{A_2} e^{-u^2/2} du$$

olduğundan

$$I \leq \left| P(\eta_{n-1} \leq k-1) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{A_2} e^{-u^2/2} du \right| + \left| P(\eta_n \leq k-1) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{A_1} e^{-u^2/2} du \right| + \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{A_1}^{A_2} e^{-u^2/2} du \right|$$

olur.

Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ifadelere sırası ile I_1, I_2 ve I_3 diyelim. Lemma 5.2.5 ve Lemma 5.2.6 dan

$$I_1 \leq \left| P(\eta_{n-1} \leq k-1) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{A_2} e^{-u^2/2} du \right| \leq (0,82) \frac{E|\xi_1 - E(\xi_1)|^3}{\sigma^3 \sqrt{n-1}} \leq \frac{(3,6)(x+1)}{\sqrt{nx(1+x)}}$$

ve

$$I_2 \leq \left| P(\eta_n \leq k-1) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{A_1} e^{-u^2/2} du \right| \leq (0,82) \frac{E|\xi_1 - E(\xi_1)|^3}{\sigma^3 \sqrt{n}} \leq \frac{(2,4)(x+1)}{\sqrt{nx(1+x)}}$$

olur.

$$I_3 = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{A_1}^{A_2} e^{-u^2/2} du \right| \leq \frac{A_2 - A_1}{\sqrt{2\pi}(1 + A_1^2/2)}$$

yazılır.

Eğer, $1 \leq k \leq 3nx + 2$ ise

$$A_2 - A_1 = \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} \left(\frac{x}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} + \frac{k-1}{\sqrt{n}\sqrt{n-1}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})} \right) \leq \frac{(4,2)x + (1,4)}{\sqrt{nx(1+x)}}.$$

Eğer, $k > 3nx + 2$ ise

$$\frac{A_2 - A_1}{\sqrt{2\pi}(1 + A_1^2/2)} \leq \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} \left(\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{2nx(1+x)}{\sqrt{n}(k-1-2nx+(nx)^2/(k-1))} \right) \leq \frac{3x+2}{\sqrt{nx(1+x)}}$$

eşitsizliği sağlanır. O halde son iki eşitsizlikden her $k \in \mathbb{N}$ için

$$I_3 = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{A_1}^{A_2} e^{-u^2/2} du \right| \leq \frac{(1,44)x + (0,68)}{\sqrt{nx(1+x)}}$$

olur.

Bulunan I_1, I_2 ve I_3 sonuçları yerine konursa

$$I = |P(\eta_{n-1} \leq k-1) - P(\eta_n \leq k-1)| \leq \frac{(7,44)x + (6,68)}{\sqrt{nx(1+x)}}$$

elde edilir.

(ii).

$$\begin{aligned} |J_{n,k}^\alpha(x) - J_{n-1,k-1}^\alpha(x)| &\leq \alpha |J_{n,k}(x) - J_{n-1,k-1}(x)| \\ &\leq \alpha |J_{n,k+1}(x) + p_{n,k}(x) - J_{n-1,k-1}(x)| \\ &\leq \alpha (|J_{n,k+1}(x) - J_{n-1,k+1}(x)| + p_{n,k}(x)) \end{aligned}$$

yazılırsa Lemma 5.1.2 ve Lemma 5.2.7 (i) den istenen sonuç elde edilir.

Teorem 5.2.8: $f \in BV_r[0, \infty)$, $r \in \mathbb{N}$, olsun. $\alpha \geq 1$ ve $\lambda > 2$ sayıları ve $x \in (0, \infty)$ noktası için n den bağımsız öyle bir $K(f, \alpha, \lambda, r, x)$ sabiti bulabiliriz ki yeterince büyük n ler için

$$g_x(t) = \begin{cases} f(t) - f(x-), & 0 \leq t < x \\ 0, & t = x \\ f(t) - f(x+), & t > x \end{cases},$$

$V_a^b(g_x)$, $[a, b]$ aralığı üzerinde g_x in toplam salınımı olmak üzere

$$\begin{aligned} \left| M_{n,\alpha}(f; x) - \left[\frac{1}{\alpha+1} f(x+) + \frac{\alpha}{\alpha+1} f(x-) \right] \right| &\leq \frac{2\alpha(9x+8)}{\sqrt{nx(1+x)}} |f(x+) - f(x-)| \\ &+ \frac{6\alpha\lambda(1+x)}{nx} \sum_{k=1}^n V_{x-x/\sqrt{k}}^{x+x/\sqrt{k}}(g_x) + K(f, \alpha, \lambda, r, x) n^{-r} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $f(t)$ fonksiyonu Eş. 5.5 deki gibi yazılarak $M_{n,\alpha}$ operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left| M_{n,\alpha}(f; x) - \left[\frac{1}{\alpha+1} f(x+) + \frac{\alpha}{\alpha+1} f(x-) \right] \right| \leq \\ & \frac{1}{2} |f(x+) - f(x-)| \left| M_{n,\alpha}(\text{sgn}_x(t); x) + \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \right| + |M_{n,\alpha}(g_x(t); x)| \\ & + \left| f(x) - \frac{1}{2} f(x+) - \frac{1}{2} f(x-) \right| |M_{n,\alpha}(\delta_x(t); x)| \end{aligned} \quad [5.16]$$

eşitsizliği elde edilir.

Aşıkarak $M_{n,\alpha}(\delta_x, x) = 0$ dır. Teoremin ispatı için $M_{n,\alpha}(\text{sgn}_x(t); x)$ ve $M_{n,\alpha}(g_x(t); x)$ nin üst sınırlarının hesabına ihtiyacımız var. Lemma 5.2.4 ün sonucunu düşünerek,

$$\begin{aligned} M_{n,\alpha}(\text{sgn}_x(t); x) &= -1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} Q_{n,k}^{(\alpha)}(x) \sum_{j=0}^{k-1} p_{n-1,j}(x) \\ &= -1 + 2 \sum_{j=0}^{\infty} p_{n-1,j}(x) J_{n,j+1}^{\alpha}(x) \end{aligned}$$

yazılır. $\sum_{j=0}^{\infty} Q_{n-1,j}^{(\alpha)}(x) = 1$ olduğundan

$$M_{n,\alpha}(\text{sgn}_x(t); x) + \frac{\alpha-1}{\alpha+1} = 2 \sum_{j=0}^{\infty} p_{n-1,j}(x) J_{n,j+1}^{\alpha}(x) - \frac{2}{\alpha+1} \sum_{j=0}^{\infty} Q_{n-1,j}^{(\alpha)}(x)$$

elde edilir.

Ortalama değer teoreminden $J_{n-1,j+1}(x) < \gamma_{n-1,j}(x) < J_{n-1,j}(x)$ olmak üzere

$$Q_{n-1,j}^{(\alpha+1)}(x) = J_{n-1,j}^{\alpha+1}(x) - J_{n-1,j+1}^{\alpha+1}(x) = (\alpha+1) p_{n-1,j}(x) \gamma_{n-1,j}^{\alpha}(x)$$

eşitliği yazılırsa ve Lemma 5.2.7 den

$$\left| M_{n,\alpha}(\text{sgn}_x(t); x) + \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \right| \leq 2 \sum_{j=0}^{\infty} p_{n-1,j}(x) |J_{n,j+1}^{\alpha}(x) - \gamma_{n-1,j}^{\alpha}(x)|$$

$$\leq \frac{2\alpha(9x+8)}{\sqrt{nx(1+x)}} \quad [5.17]$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi $M_{n,\alpha}(g_x(t); x)$ ifadesini birinci kesimde yapılan işlemlerle benzer şekilde hesaplayacağız. Eş. 5.14 den

$$M_{n,\alpha}(g_x; x) = \left(\int_0^{x-x/\sqrt{n}} + \int_{x-x/\sqrt{n}}^{x+x/\sqrt{n}} + \int_{x+x/\sqrt{n}}^{\infty} \right) K_{n,\alpha}(x; t) g_x(t) dt \quad [5.18]$$

yazılır. Bu integrallerin her birine sırası ile E_1, E_2 ve E_3 diyelim.

E_1 için; $y = x - x/\sqrt{n}$ ve Lebesgue-Stieltjes kısmi integrali alınırsa

$$E_1 = \int_0^y g_x(t) d_t(\beta_{n,\alpha}(x; y)) - \int_0^y \beta_{n,\alpha}(x; t) d_t(g_x(t))$$

elde edilir. $|g_x(t)| \leq V_t^x(g_x)$ olduğu için

$$|E_1| \leq V_y^x(g_x) \beta_{n,\alpha}(x; y) + \int_0^y \beta_{n,\alpha}(x; t) d_t(-V_t^x(g_x))$$

eşitsizliği yazılır ve Lemma 5.2.3 uygulanırsa

$$|E_1| \leq V_y^x(g_x) \frac{\alpha \lambda x(1+x)}{n(x-y)^2} + \frac{\alpha \lambda x(1+x)}{n} \int_0^y \frac{1}{(x-t)^2} d_t(V_t^x(g_x))$$

eşitliğini elde ederiz. İntegral ifadesi hesaplanırsa

$$|E_1| \leq \frac{\alpha \lambda x(1+x)}{n} \left[x^{-2} V_0^x(g_x) + 2 \int_0^y \frac{V_t^x(g_x)}{(x-t)^3} dt \right]$$

olur. y yerine $x - x/\sqrt{u}$ konulursa

$$|E_1| \leq \frac{\alpha \lambda x(1+x)}{n} \left[x^{-2} V_0^x(g_x) + x^{-2} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V_{x-x/\sqrt{k}}^x(g_x) \right]$$

eşitsizliği elde edilir. O halde

$$|E_1| \leq \frac{2\alpha \lambda(1+x)}{nx} \sum_{k=1}^n V_{x-x/\sqrt{k}}^x(g_x) \quad [5.19]$$

sonucu elde edilir.

E_2 için; $t \in [x - x/\sqrt{n}, x + x/\sqrt{n}]$ olsun. Bu durumda

$$|E_2| \leq \int_{x-x/\sqrt{n}}^{x+x/\sqrt{n}} |g_x(t)| K_{n,\alpha}(x;t) dt$$

yazabiliriz.

$$(a, b) \subset [0, \infty) \text{ olduğu için } \int_a^b K_{n,\alpha}(x;t) dt \leq 1 \text{ dir. } |g_x(t)| \leq V_t^x(g_x) \leq V_{x-x/\sqrt{n}}^{x+x/\sqrt{n}}(g_x)$$

olduğu göz önüne alınır

$$|E_2| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V_{x-x/\sqrt{k}}^{x+x/\sqrt{k}}(g_x) \quad [5.20]$$

elde edilir.

E_3 için;

$$\hat{g}_x(t) = \begin{cases} g_x(t), & 0 \leq t < 2x \\ g_x(2x), & 2x \leq t < \infty \end{cases}$$

olmak üzere

$$E_3 = \int_{x+x/\sqrt{n}}^{\infty} K_{n,\alpha}(x;t) \hat{g}_x(t) dt + \int_{2x}^{\infty} K_{n,\alpha}(x;t) [g_x(t) - g_x(2x)] dt$$

olur. Bu integrallerin her birine sırasıyla E_{31} ve E_{32} diyelim.

E_{31} için; $z = x + x/\sqrt{n}$ denilirse

$$E_{31} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ g_x(z) [1 - \beta_{n,\alpha}(x, z)] + \hat{g}_x(R) [\beta_{n,\alpha}(x, R) - 1] + \int_z^R [1 - \beta_{n,\alpha}(x, t)] d_t(\hat{g}_x(t)) \right\}$$

Lemma 5.2.3 uygulanırsa

$$\begin{aligned} |E_{31}| &\leq \frac{\alpha \lambda x(1+x)}{n} \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{V_x^z(g_x)}{(z-x)^2} + \frac{\hat{g}_x(R)}{(R-x)^2} + \int_z^R \frac{1}{(t-x)^2} d_t(V_x^t(g_x)) \right\} \\ &= \frac{\alpha \lambda x(1+x)}{n} \left\{ \frac{V_x^z(g_x)}{(z-x)^2} + \int_z^{2x} \frac{1}{(t-x)^2} d_t(V_x^t(g_x)) \right\} \end{aligned}$$

olup

$$\int_z^{2x} \frac{1}{(t-x)^2} d_t \left(V_x^t(g_x) \right) = x^{-2} V_x^{2x}(g_x) - \frac{V_x^z(g_x)}{(z-x)^2} + x^{-2} \sum_{k=1}^{n-1} V_x^{x+x/\sqrt{k}}(g_x)$$

olduğundan

$$|E_{31}| \leq \frac{2\alpha\lambda(1+x)}{nx} \sum_{k=1}^{n-1} V_x^{x+x/\sqrt{k}}(g_x) \quad [5.21]$$

elde edilir.

E_{32} için; g_x fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} |E_{32}| &\leq \int_{2x}^{\infty} K_{n,\alpha}(x;t) \left[M_1(1+t)^r + M_2(1+2x)^r \right] dt \\ &\leq (M_1 + M_2)(n-1) \sum_{k=1}^{\infty} Q_{n,k}^{(\alpha)}(x) \int_{2x}^{\infty} p_{n,k-1}(t) \left[(1+t)^r + (1+2x)^r \right] dt \\ &\leq \alpha(M_1 + M_2)(n-1) \sum_{k=1}^{\infty} p_{n,k}(x) \int_{2x}^{\infty} p_{n,k-1}(t) \left[(1+t)^r + (1+2x)^r \right] dt \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizliğe $t \geq 2x$ için

$$(1+t)^r \leq 2^r \frac{(1+x)^r}{x^{2r}} (t-x)^{2r}$$

ve

$$(1+2x)^r \leq 2^r \frac{(1+x)^r}{x^{2r}} (t-x)^{2r}$$

eşitsizliği ile Lemma 5.2.2 ve Lemma 5.2.3 uygulanırsa $n > r$ için

$$|E_{32}| \leq \alpha (M_1 + M_2) 2^{r+1} \frac{(1+x)^r}{x^{2r}} T_{n,2r}(x) \leq \alpha (M_1 + M_2) 2^{r+1} \frac{(1+x)^r}{x^{2r}} M_3 n^{-r}.$$

$$K(f, \alpha, \lambda, r, x) = \alpha (M_1 + M_2) M_3 2^{r+1} \frac{(1+x)^r}{x^{2r}}$$

denilirse

$$|E_{32}| \leq K(f, \alpha, \lambda, r, x) n^{-r} \quad [5.22]$$

elde edilir.

Eş. 5.19-5.22 sonuçları yerlerine yazılarak Eş. 5.18 sonucu elde edilir. Eş. 5.17 ve Eş. 5.18 sonucu Eş. 5.16 da yerine yazılırsa teoremden istenen sonuç elde edilir.

KAYNAKLAR

1. Korovkin, P. P., "Linear Operators and Approximation Theory", **Hindustan Publishing Corp. (India)**, Delhi, 1-66 (1960).
2. Altomare, F. and Campiti, M., "Korovkin Type Approximation Theory and Its Applications", **Walter de Gruyter**, Berlin-New York, 195-352 (1994).
3. Bernstein, S., "Démonstration du théorème de Weierstrass, fondée sur le calcul des probabilités", **Commun. Soc. Math. Kharkow (2)**, 13: 1-2, (1912-1913).
4. Bohmann, H., "On approximation of continuous and analytic functions", **Arch. Math.**, 2: 43-56 (1952).
5. Chlodovsky, I., "Sur la représentation des fonctions discontinues par les polynômes de M. S. Bernstein", **Fund. Math.**, 13: 62-72 (1929).
6. Herzog, F. and Hill, J. D., "The Bernstein polynomials for discontinuous functions", **Amer. J. Math.**, 68: 109-124 (1946).
7. Cheng, F., "On the rate of Bernstein polynomials of function of bounded variation", **J. Approx. Theory**, 40: 226-241 (1984).
8. Guo, S., "On the rate of convergence of the Durrmeyer operator for functions of bounded variation", **J. Approx. Theory**, 51: 183-192 (1987).
9. Gupta, V. and Maheshwari, P., "Bezier variant of a new Durrmeyer type operators", **Riv. Mat. Univ. Parma**, 7 (2): 9-21 (2003).
10. Bojanic, R. , "An estimate of the rate of convergence for Fourier series of functions of bounded variation", **Publ. Ins. Math. (Belgrad) (N.S)** 26 (40): 57-60 (1979).
11. R. Bojanic and M. Vuilleumier, "On the rate of Fourier-Legendre series of functions of bounded variation", **J. Approx. Theory**, 31: 67-79 (1981).

12. Bojanic, R. and Cheng, F., "Estimates for the rate of approximation of functions of bounded variation by Hermite-Fejer polynomials", *Canadian Math. Soc. Conference Proceeding*, 3: 5-17 (1983).
13. Cheng, F., "On the rate of convergence of Bernstein polynomials of functions of bounded variation", *J. Approx. Theory*, 39: 259-274 (1983).
14. Guo, S. and Khan, M. K., "On the rate of convergence of some operators on functions of bounded variation", *J. Approx. Theory*, 58: 90-101 (1989).
15. Agrawal, P. N. and Thamer, J., "Approximation of unbounded functions by a new sequence of linear positive operators", *J. Math. Anal. Appl.*, 225: 660-672 (1998).
16. Srivastava, H. M. And Gupta, V., "A certain family of summation integral type operators", *Math. Comput. Modelling*, 37: 1307-1315 (2003).
17. May, C. P., "On Philips operators", *J. Approx. Theory*, 20: 315-332 (1977).
18. Phillips, R. S., "An inversion formula for semi-groups of linear operators", *Ann. of Math.*, 59 (2): 352-356 (1954).
19. Agrawal, P. N. and Gupta, V., "On convergence of derivatives of Phillips operators", *Demonstratio Mathematica*, Vol. XXVII (No. 2) : 501-510 (1994).
20. Gupta, V., Gupta, M. K. And Vasishta, V., "Simultaneous approximations by summation-integral type operators", *Nonlinear Funct. Anal. Appl.*, 8 (3): 399-412 (2003).
21. Gadjiev, A. D., "The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets, and theorems analogous to that of P. P. Korovkin", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 218 (5): 1001-1004 (1974) (in Russian), *Sov. Math. Dokl.* 15 (5): 1433-1436 (1974) (in English).

22. Gadjeiev, A. D., "Theorems of the type of P.P. Korovkin type theorems", *Math. Zametki* 20 (5): 781-786 (1976). English Translated in *Math. Notes* 20 (5-6): 996-998 (1976).
23. Hacısalihoğlu, H. H., ve Hacıyev, A., "Lineer pozitif operatör dizilerinin yakınsaklığı", *A. Ü. F. F.*, 1-100 (1995).
24. Gadjeiev, A. D. and İspir, N., "On a sequence of linear positive operators in weighted spaces", *Proceeding of IMM.*, Vol XX(IXX): 45-56 (1999).
25. İspir, N., "On modified Baskakov operators on weighted spaces", *Turkish Journal of Math.*, 25 (3): 355-365 (2001).
26. Kasana, H. S., Agrawal, P. N. and Gupta, V., "Inverse and saturation theorems for linear combination of modified Baskakov operators", *Approx. Theory Appl.* 7(2): 65-82 (1991).
27. Gupta, V. and Abel, U., "On the rate of convergence of Bezier variant of Szasz-Durrmeyer operators", *Anal. Theory Appl.*, 19: 81-88 (2003).
28. Gupta, V., "Rate of approximation by a new sequence of linear positive operators", *Comput. Math. Appl.*, 45 (12): 1895-1904 (2003).
29. Shirayayev, A. N., "Probability", *Springer –Verlag*, New-York, 342 (1984).

ÖZGEÇMİŞ

İsmet YÜKSEL 1970 yılında Balıkesir'in Sındırgı ilçesinin Taşköy köyünde doğdu. İlköğrenimini Taşköy ilkokulunda, ortaöğrenimini Sındırgı Lisesinde, yüksek öğrenimini Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde, Yüksek lisansını 1997 yılında Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik anabilim dalında tamamladı.

Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır. Evli ve bir çocuk babasıdır.