

**TOPLAMSAL İNTEGRAL TİP OPERATÖRLERİN
AĞIRLIKLİ YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ**

Halime Mücella DEMİRHAN ÇAVUŞOĞLU

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KASIM 2006
ANKARA**

Halime Mücella DEMİRHAN ÇAVUŞOĞLU tarafından hazırlanan TOPLAMSAL
İNTEGRAL TİP OPERATÖRLERİN AĞIRLIKLI YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ
adlı bu tezin YÜKSEK LİSANS tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Nurhayat İSPİR

Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile, MATEMATİK Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Ahmet Ali ÖÇAL

Üye : Prof. Dr. Bahri TURAN

Üye : Doç. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ

Üye : Doç. Dr. A.Duran TÜRKOĞLU

Üye : Doç. Dr. Nurhayat İSPİR

Tarih : 01.11.2006

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Halime Mücella DEMİRHAN ÇAVUŞOĞLU

**TOPLAMSAL İNTEGRAL TİP OPERATÖRLERİN
AĞIRLIKLIL YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ
(Yüksek Lisans Tezi)**

Halime Mücella DEMİRHAN ÇAVUŞOĞLU

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Kasım 2006**

ÖZET

Bu tezde, Agrawal ve Thamer tarafından tanımlanmış olan M_n toplamsal integral tip pozitif lineer operatörlerinin ağırlıklı yaklaşım özellikleri araştırıldı. İlk olarak, bu operatörler dizisinin yaklaşım derecesi, bilinen süreklilik modülü yardımı ile verildi ve $[0, \infty)$ aralığında tanımlı, sürekli sonsuzda polinomsal büyüyen fonksiyonların ağırlıklı yaklaşım özellikleri M_n operatörleri yardımıyla araştırıldı. Bundan başka, M_n operatörlerinin yakınsaklık hızı, ağırlıklı süreklilik modülü cinsinden ifade edildi. Son olarak, bu operatörlerle simultaneous yaklaşımın özellikleri çalışıldı.

Bilim Kodu : 204.1.095
Anahtar Kelimeler : Toplamsal integral tip operatör, Ağırlıklı yaklaşım, Yaklaşım hızı, Simultaneous (eşanlı) yaklaşım
Sayfa Adedi : 69
Tez Yöneticisi : Doç. Dr. Nurhayat İSPİR

**WEIGHTED APPROXIMATION PROPERTIES
BY SUMMATION INTEGRAL TYPE OPERATORS**

(M. Sc. Thesis)

Halime Mücella DEMİRHAN ÇAVUŞOĞLU

**GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

October 2006

ABSTRACT

In this thesis, we investigated the weighted approximation properties of a certain summation integral type linear positive operators M_n introduced by Agrawal and Thamer. Firstly, the degree of approximation of the sequence of these operators is given by usual modulus of continuity and weighted approximation properties of the continuous functions defined $[0, \infty)$, having polynomial growth at infinity, are investigated by the operators M_n . Furthermore, the rate of convergence of the operators M_n is estimated in terms of the weighted modulus of continuity. Finally, the properties of simultaneous approximation are studied by these operators.

Science Code : 204.1.095
Key Words : Summation integral type operators, Rate of convergence,
Simultaneous convergence
Page Number : 69
Adviser : Assoc. Prof. Dr. Nurhayat İSPİR

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca; bilgi, ilgi ve desteğini esirgemeyen, tecrübe ve katkıları ile beni yönlendiren, değerli danışmanım; Doç. Dr. Nurhayat İspir'e, ayrıca beni hiç yalnız bırakmayan sevgili aileme ve eşime teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Sonlu Aralıklarda Tanımlı Sürekli Fonksiyonlar Uzayı.....	3
2.2. Lineer Pozitif Operatörler.....	4
2.3. $C[a,b]$ Uzayında P.P. Korovkin Teoremi	13
2.3.1. Weierstrass'ın ilk yaklaşım teoremi.....	14
2.3.2. Weierstrass'ın ikinci yaklaşım teoremi.....	14
2.4. L_p Uzaylarında P.P. Korovkin Teoremi	20
2.5. Ağırlıklı Uzaylarda Yaklaşım	23
2.6. $L_{p,p}$ Uzaylarında Ağırlıklı Yaklaşım	31
3. TOPLAMSAL İNTEGRAL TİP OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ.....	41
3.1. M_n Operatörünün Temel Özellikleri	41
3.2. M_n Operatörünün Süreklilik Modülüyle Yaklaşım Hızının Hesaplanması ...	48
3.3. Ağırlıklı Süreklilik Modülü	53
3.4. Eş Anlı Yaklaşım.....	57
KAYNAKLAR.....	68
ÖZGEÇMİŞ.....	69

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\langle a, b \rangle$	$[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b) , $(-\infty, \infty)$, $(-\infty, a)$, (a, ∞) aralıklarından biri
$B_\rho(\mathbb{R})$	Her $x \in \mathbb{R}$ için $ f(x) \leq M_f \cdot \rho(x)$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayı
$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı
$C_{2\pi}$	2π periyotlu sürekli fonksiyonlar uzayı
$C_\rho(\mathbb{R})$	Her $x \in \mathbb{R}$ için $ f(x) \leq M_f \cdot \rho(x)$ koşulunu sağlayan sürekli fonksiyonlar uzayı
C_ρ^k	$\left\{ f \in C_\rho : \lim_{ x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = k_f < \infty \right\}$ alt uzayı
$\ f\ _\rho$	$B_\rho(\mathbb{R})$ uzayında tanımlanan norm
$\ L\ _{X \rightarrow Y}$	X normlu uzayından Y normlu uzayına dönüşüm yapan L operatörünün normu
$L_n(f; x)$	L operatörünün f fonksiyonuna uygulanmasından elde edilen fonksiyon
$L_{p, \rho}$	$\left\{ f : \left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(\zeta) ^p d\zeta \right)^{1/p} \leq M_f \cdot \rho(x), h > 0, M_f > 0 \right\}$
$L_p[a, b]$	$\left\{ f : \int_a^b f(x) ^p dx < \infty \right\}$
X^+	$\{f \in X : f(t) \geq 0\}$
$\rho(x)$	Ağırlık fonksiyonu
$\Omega(f; \delta)$	f fonksiyonunun ağırlıklı süreklilik modülü
$\omega(f; \delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\Rightarrow$	Düzgün yakınsama

1. GİRİŞ

Bu tezin amacı, pozitif reel ekseninde sürekli, polinomsal büyüme hızına sahip fonksiyonlara toplamsal – integral tip operatörler dizisi ile ağırlıklı yaklaşımın özelliklerini araştırmaktır.

Yaklaşım teorisinde, kompakt aralıklarda sürekli fonksiyonlara lineer pozitif operatörlerle yaklaşım problemi önemli bir yer tutmaktadır. Weierstrass, kompakt aralıklarda sürekli fonksiyonlara yakınsayan bir polinomlar dizisinin var olduğunu ispatlamıştır [1]. Daha sonra bir çok matematikçi tarafından bu teoremi sağlayan farklı polinom dizileri oluşturulmuştur. Bu dizilerin oluşturulma tekniği lineer pozitif operatörlerle yaklaşım problemini ortaya çıkarmıştır. Bernstein [2], $[0,1]$ aralığında sürekli fonksiyonlar için

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad 0 \leq x \leq 1$$

toplamsal operatörünü tanımlayarak, bu operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığında düzgün olarak f fonksiyonuna yaklaştığını ispatlamıştır. Bohman [3], özel bir lineer pozitif operatörler dizisi tanımlayarak bu tip dizilerin $[0,1]$ kapalı aralığında yaklaşım koşullarını vermiş, daha sonra Korovkin [4, 5], daha genel durumlarda lineer pozitif operatörler dizisinin yaklaşım problemini ele alarak “Korovkin Teoremi” olarak bilinen teoremi ispatlamıştır.

Bernstein operatörleri ile, süreksiz fonksiyonlara yaklaşmak uygun olmadığından, integrallenebilir fonksiyonlar uzayında Korovkin Teoremi’ni incelemek için, Kantorovich ve Durrmeyer ilk toplamsal integral tip operatörleri tanımlamışlardır [5]. Bu operatörler sırası ile, $f \in L_1[0,1]$, $x \in [0,1]$ ve

$$P_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

olmak üzere

$$K_n(f;x) = (n+1) \sum_{k=0}^n P_{k,n}(x) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t) dt$$

$$D_n(f;x) = (n+1) \sum_{k=0}^n P_{n,k}(x) \int_0^1 P_{n,k}(t) f(t) dt$$

şeklinde tanımlanır. Sonlu aralıklarda tanımlı bu operatörler için, Korovkin Teoremi sağlanır. Sınırsız aralıklarda, yaklaşım problemi, ağırlıklı uzaylarda incelenir. Ağırlıklı uzaylarda yaklaşım koşulları ve Korovkin tip teoremler Gadjiev [6,7] tarafından verilmiştir.

Bu tezde, Agrawal ve Thamer [8] tarafından tanımlanan, temel fonksiyonları klasik Baskakov fonksiyonları olan toplamsal – integral tip operatörlerin $[0,\infty)$ aralığında sürekli ve polinomsal büyüme hızına sahip fonksiyonlara ağırlıklı yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızı incelenmiştir.

Bu tez, birinci bölüm giriş bölümü olmak üzere üç bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde temel kavram ve teoremler tanıtılmıştır. Bu amaçla fonksiyon uzayları ve lineer pozitif operatörlerle ilgili tanım ve teoremler verilmiş, $C[a,b]$ uzayında Korovkin Teoremi ifade edilmiştir. Ayrıca $L_p[a,b]$ uzayı ve ağırlıklı uzaylarda yaklaşım koşullarına ilişkin teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümün ilk üç kesiminde, Agrawal ve Thamer [8] tarafından tanımlanan $\{M_n(f;x)\}$ toplamsal-integral tip operatörler dizisinin temel özellikleri ve ağırlıklı yaklaşımı incelenmiş, sonlu aralıklarda tanımlı fonksiyonlara yaklaşım hızı süreklilik modülü ile hesaplanırken, $C[0,\infty)$ uzayında tanımlı fonksiyonlara, yaklaşım hızı ağırlıklı süreklilik modülü ile ifade edilmiştir. Son kesimde ise [8] de verilen simultaneous (eş anlı) yaklaşım problemi ele alınarak, M_n operatörünün r . basamaktan türevinin, fonksiyonunun aynı basamaktan türevine yaklaşım problemi çalışılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışma boyunca kullanılacak temel kavramlar verilmiş, sürekli fonksiyon uzaylarında lineer pozitif operatörler tanımlanmıştır.

2.1. Sonlu Aralıklarda Tanımlı Sürekli Fonksiyonlar Uzayı

2.1. Tanım

$[a,b]$ kapalı ve sonlu aralığında tanımlı, sürekli fonksiyonlar uzayını $C[a,b]$ ile gösterelim. $C[a,b]$,

$$i) (f+g)(x) = f(x)+g(x) \text{ ve}$$

$$ii) \lambda \in \mathbb{R} \text{ olmak üzere}$$

$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ işlemleri ile bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayı üzerinde bir norm,

$$\|f\|_C = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanır.

$C[a,b]$, bu norm altında bir Banach uzayıdır.

(f_n) , $C[a,b]$ 'de bir dizi ve $f \in C[a,b]$ olmak üzere (f_n) dizisinin f fonksiyonuna yaklaşması için gerek ve yeter koşul, her $x \in [a,b]$ için

$$|f_n(x) - f(x)| < M \cdot \epsilon_n$$

olmasıdır [9]. Burada $M > 0$ ve ϵ_n ise sıfıra yakınsayan bir dizidir.

$C[a,b]$ uzayında tanımlanan maximum normuna göre $\lim f_n = f$ ile $\{f_n\}$ fonksiyonlar dizisinin f fonksiyonuna $[a,b]$ kümesi üzerinde düzgün yakınsaması aynı şeydir.

2.2. Lineer Pozitif Operatörler

X ve Y normlu fonksiyon uzayları olmak üzere X 'den alınan her f fonksiyonuna Y 'de bir g fonksiyonunu karşılık getiren bir L kuralı varsa, bu L kuralına X 'den Y 'ye bir operatör denir. $f \in X$, $g \in Y$ ve x , g 'nin tanım kümesine ait olmak üzere

$$L(f)(x) = L(f;x) = g(x)$$

ya da daha açık biçimde; t , f 'nin x , g 'nin tanım kümesine ait olmak üzere

$$L(f(t);x) = g(x)$$

biçiminde gösterilir.

X uzayına L operatörünün tanım bölgesi denir ve $X = D(L)$ ile gösterilir. $L(f;x) = g(x)$ ise Y uzayının bir elemanı olup bu şekildeki g fonksiyonlarının kümesine L operatörünün değerler kümesi denir ve $R(L)$ ile gösterilir. $R(L) \subset Y$ 'dir.

Bu kısımdaki tanımlarda X ve Y normlu fonksiyon uzayları olacaktır.

2.2. Tanım

$L: X \rightarrow Y$ bir operatör ve $x \in D_g$ olsun. L operatörü

$$i) \quad \forall f_1, f_2 \in X \text{ için } L(f_1 + f_2; x) = L(f_1; x) + L(f_2; x)$$

$$ii) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ için } L(\alpha f; x) = \alpha \cdot L(f; x)$$

şeklindeki iki koşulu sağlıyorsa, L operatörüne lineer operatör denir.

2.3. Tanım

$L: X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. $D(L) \subset X$, L 'nin tanım kümesi olmak üzere $\forall f \in D(L)$ için

$$\|L(f;x)\|_Y \leq M \cdot \|f\|_X \tag{2.1}$$

eşitsizliğini sağlayan $M \in \mathbb{R}^+$ varsa L 'ye $D(L)$ 'de sınırlı operatör denir.

$$\|L\|_{X \rightarrow Y} = \inf \{M: \|L(f;x)\|_Y \leq M \|f\|_X\}$$

sayısına L operatörünün normu denir.

2.1. Önerme

$L: X \rightarrow Y$ sınırlı lineer operatörü için

$$\|L\|_{X \rightarrow Y} = \sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f;x)\|_Y}{\|f\|_X}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$\|L\|_{X \rightarrow Y}$ tanımından

$$\frac{\|L(f;x)\|_Y}{\|f\|_X} \leq \|L\|_{X \rightarrow Y}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan

$$\sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f;x)\|_Y}{\|f\|_X} \leq \|L\|_{X \rightarrow Y} \quad (2.2)$$

eşitsizliği bulunur. Diğer taraftan infimum tanımından her $\varepsilon > 0$ için en az bir $f_\varepsilon \in X$ vardır öyle ki,

$$\|L(f_\varepsilon;x)\|_Y \geq (\|L\|_{X \rightarrow Y} - \varepsilon) \|f_\varepsilon\|_X$$

eşitsizliği bulunur. Buradan da

$$\frac{\|L(f_\varepsilon;x)\|_Y}{\|f_\varepsilon\|_X} \geq \|L\|_{X \rightarrow Y} - \varepsilon$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan

$$\sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f; x)\|_Y}{\|f\|_X} \geq \frac{\|L(f_\varepsilon; x)\|_Y}{\|f_\varepsilon\|_X} \geq \|L\|_{X \rightarrow Y} - \varepsilon$$

elde edilir. Sol taraf ε 'a bağlı olmadığından $\varepsilon \rightarrow 0$ için eşitsizlik bozulmaz. Buna göre

$$\sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f; x)\|_Y}{\|f\|_X} \geq \|L\|_{X \rightarrow Y} \quad (2.3)$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak Eş. 2.2 ve Eş. 2.3 eşitsizliklerinden

$$\|L\|_{X \rightarrow Y} = \sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f; x)\|_Y}{\|f\|_X}$$

bulunur.

2.1. Sonuç

$L: X \rightarrow Y$ sınırlı lineer operatörü için

$$\|L\|_{X \rightarrow Y} = \sup_{\|f\|_X = 1} \|L(f; x)\|_Y$$

eşitliği gerçekleşir.

İspat

Önerme 2.1'den

$$\begin{aligned} \|L\|_{X \rightarrow Y} &= \sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f; x)\|_Y}{\|f\|_X} = \sup_{\|f\|_X \neq 0} \left\| \frac{1}{\|f\|_X} L(f; x) \right\|_Y \\ &= \sup_{\|f\|_X \neq 0} \left\| L\left(\frac{f}{\|f\|_X}; x\right) \right\|_Y \end{aligned}$$

$g(x) = \frac{f}{\|f\|_X}$ dersek $\|g\|_X = 1$ olur. Buradan

$$\|L\|_{X \rightarrow Y} = \sup_{\|g\|_X = 1} \|L(g; x)\|_Y$$

elde edilir.

2.4. Tanım

$L: X \rightarrow Y$ lineer bir operatör olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşı gelen bir $\delta(\varepsilon, f_0) > 0$ sayısı, $\|f - f_0\|_X < \delta$ olduğunda $\|L(f) - L(f_0)\|_Y < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak şekilde bulunuyorsa L operatörü $f_0 \in X$ için süreklidir denir.

2.5. Tanım

$L: X \rightarrow Y$ lineer bir operatör, $(f_n) \subset X$ bir dizi olsun.

$$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} f_0 \text{ iken } L(f_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} L(f_0)$$

ise L operatörüne x_0 noktasında dizisel süreklidir denir.

2.1. Teorem

X, Y normlu uzaylar $L: X \rightarrow Y$ lineer operatör olsun. Bu durumda L operatörü için sınırlılık ve süreklilik birbirine denktir.

2.6. Tanım

$L: X \rightarrow Y$ lineer operatör olsun.

$$X^+ = \{f \in X: \forall t \in D_f \text{ için } f(t) \geq 0\} \quad \text{ve} \quad Y^+ = \{g \in Y: \forall x \in D_g \text{ için } g(x) \geq 0\}$$

olmak üzere, X uzayında tanımlanan L lineer operatörü, X^+ kümesindeki her bir f fonksiyonunu Y^+ kümesinde bir fonksiyona dönüştürüyorsa, başka bir deyimle

$L(X^+) \subset Y^+$ oluyorsa L operatörüne lineer pozitif operatör denir. L lineer pozitif operatör ise, $\forall t \in D_f$ için $f(t) \geq 0$ olduğunda $\forall x \in D_g$ için $L(f;x) \geq 0$ olur.

2.2. Önerme

$L: X \rightarrow Y$ lineer pozitif operatör olsun. $f, g \in X$ olmak üzere, her $t \in D(f)$ için $f(t) \leq g(t)$ ise $\forall x \in D_g$ için $L(f;x) \leq L(g;x)$ 'tir. Buna L lineer operatörünün monotonluk özelliği denir.

İspat

$\forall t \in D(f)$ için $f(t) \leq g(t)$ ise

$0 \leq (g-f)(t)$ 'dir.

L lineer pozitif operatör olduğu için, Tanım 2.6'dan

$0 \leq L(g-f;x)$

burada, Tanım 2.2'yi kullanırsak

$0 \leq L(g;x) - L(f;x)$

$L(f;x) \leq L(g;x)$

eşitsizliğine ulaşırız.

2.3. Önerme

$L: X \rightarrow Y$ lineer pozitif operatör olsun. Bu durumda $|L(f;x)| \leq L(|f|;x)$ eşitsizliği vardır.

İspat

$-|f| \leq f \leq |f|$ eşitsizliğini L operatörüne uygulayalım. Lineer pozitif operatörlerin monotonluk özelliğinden

$L(-|f|;x) \leq L(f;x) \leq L(|f|;x)$ eşitsizliği elde edilir. Burada Tanım 2.2'yi kullanırsak

$$-L(|f|;x) \leq L(f;x) \leq L(|f|;x)$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu ise,

$$|L(f;x)| \leq L(|f|;x) \text{ anlamına gelir.}$$

2.1. Örnek

$f \in C[0,1]$ olmak üzere $0 \leq x \leq 1$ için

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

şeklinde tanımlanan Bernstein Polinomu, her bir n için, bir lineer pozitif operatördür.

2.2. Örnek

$f, [0,\infty)$ da tanımlı reel değerli sürekli bir fonksiyon ve $x \geq 0$ olmak üzere

$$Z_n(f;x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!}$$

şeklinde tanımlanan Szasz Operatörü de, her bir n için, lineer pozitif operatördür.

2.3. Örnek

$f \in C[0,A)$ $A > 0$ olmak üzere

$$A_n(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}$$

şeklinde tanımlanan Baskakov Operatörü, her bir n için, lineer pozitif operatördür.

2.4. Önerme

$$K: [a,b] \times [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A: L[a,b] \rightarrow C[a,b]$$

olmak üzere

$$A(f;x) = \int_a^b f(t) \cdot K(t;x) dt$$

şeklinde tanımlanan A operatörünün pozitif olması için gerek ve yeter koşul $K(t;x)$ 'in pozitif olmasıdır. Burada $K(t;x)$ ifadesine A operatörünün çekirdeği denir.

İspat

A operatörünün lineer olduğu açıktır. Önce A operatörünün pozitif olduğunu kabul edelim ve kabul edelim ki en az bir t_0 için $K(t_0;x) < 0$ olsun. Operatörün K çekirdeği sürekli olduğundan, t_0 'ı içeren öyle bir $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ aralığı vardır ki, her $t \in [\alpha,\beta]$ için $K(t;x) < 0$ olur. Buna göre

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in [a,b] \setminus [\alpha,\beta] \\ 1 & , \quad x \in [\alpha,\beta] \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için, $f \geq 0$ olmasına karşın

$$A(f;x) = \int_{\alpha}^{\beta} K(t,x) dt < 0$$

bulunur. Bu ise A operatörünün pozitif olması ile çelişir. O halde her t ve x için $K(t;x) \geq 0$ olmalıdır.

Tersine, her t ve x için $K(t;x) \geq 0$ olduğunu kabul edelim ve $f \geq 0$ alalım A'nın tanımından

$$A(f;x) = \int_a^b f(t).K(t,x) dt > 0$$

elde edilir. Bu ise A'nın lineer pozitif operatör olması anlamına gelir.

2.5. Önerme

(a_k) reel sayıların bir dizisi ve f, P_k ($k \in \mathbb{N}$) reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonlar olmak üzere,

$$L(f;x) = \sum_{k=0}^n f(a_k) P_k(x)$$

şeklinde tanımlanan L operatörü lineerdir. L operatörünün pozitif olması için gerek ve yeter koşul, her x ve k için $P_k(x) \geq 0$ olmasıdır.

İspat

L operatörünün lineerliği açıktır. L operatörünün pozitif olduğunu ve en az bir k_0 için $P_{k_0} < 0$ olduğunu kabul edelim.

Buna göre

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \neq a_{k_0} \\ 1 & , \quad x = a_{k_0} \end{cases}$$

şeklinde verilen f fonksiyonu için f pozitif olmasına rağmen

$$\begin{aligned} L(f;x) &= \sum_{k=0}^n f(a_k) P_k(x) = f(a_{k_0}).P_{k_0}(x) \\ &= P_{k_0}(x) < 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise L'nin pozitif olması ile çelişir. Buna göre her x ve k için $P_k(x) \geq 0$ olmalıdır.

Buna göre; $n \in \mathbb{N}$, $f \in L_1[0,1]$, $x \in [0,1]$ olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanan, n . Kantorovich Operatörü

$$K_n: L_1[0,1] \rightarrow C[0,1]$$

$$K_n(f;x) = (n+1) \sum_{k=0}^n P_{k,n}(x) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t) dt$$

lineer pozitif bir operatördür.

2.5. Örnek

$n \geq 1$ olmak üzere, $\forall f \in L_1[0,1]$ ve $\forall x \in [0,1]$ için

$$P_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad \text{olmak üzere}$$

$$D_n(f;x) = (n+1) \sum_{k=0}^n P_{k,n}(x) \int_0^1 P_{k,n}(t) f(t) dt$$

şeklinde tanımlanan Bernstein–Durrmeyer Operatörü de lineer pozitif bir operatördür.

2.3. $C[a,b]$ Uzayında P.P. Korovkin Teoremi

Yaklaşım Teorisi'nin amacı, keyfi bir fonksiyonun daha basit, daha kullanışlı olan diğer fonksiyonlar cinsinden bir gösterimini elde etmektir. Böyle bir gösterim, fonksiyon hakkında bilgi elde etmenin daha basit bir yolunu verir.

1885 yılında Weierstrass $[a,b]$ aralığında sürekli her f fonksiyonuna bir polinomla yaklaşılabilirliğini ifade etmiştir.

2.3.1. Weierstrass'ın ilk yaklaşım teoremi [1]

$\forall \varepsilon > 0$ ve $f(x) \in C[a,b]$ için öyle bir $P(x)$ polinomu vardır ki, $\forall x \in [a,b]$ için $|P(x) - f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır.

Başka bir ifade ile $[a,b]$ aralığında sürekli her f fonksiyonu için $f(x)$ 'e $[a,b]$ aralığında düzgün yakınsayan bir $\{P_n(x)\}$ polinom dizisi vardır.

Bu teoremin birçok ispatı bulunmaktadır. Bu ispatlardan birini de 1912 yılında S.N. Bernstein [2] yaparak, lineer pozitif operatörler ile yaklaşım teorisinde önemli rol oynayan Bernstein Polinomları'nı tanımlamıştır.

2.3.2. Weierstrass'ın ikinci yaklaşım teoremi [1]

Bu teorem, periyodik sürekli fonksiyonlara yaklaşan trigonometrik polinomların bulunabileceğini ifade eder.

$f(x)$, 2π periyotlu sürekli bir fonksiyon ve $\varepsilon > 0$ ise öyle bir $T(x)$ trigonometrik polinomu vardır ki x 'in bütün reel değerleri için $|T(x) - f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır.

Bu teoremin ispatı De-La Vallee Poussin tarafından 1908'de yapılmıştır.

1952 yılında H. Bohman [3] toplam şeklindeki lineer pozitif operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığında sürekli f fonksiyonuna yaklaşması problemini incelemiştir. H. Bohman göstermiştir ki, $x \in [0,1]$ ve $0 \leq \alpha_{k,n} \leq 1$ $k < r$ için $\alpha_{k,n} < \alpha_{r,n}$ olduğunda

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^n f(\alpha_{k,n}) P_{k,n}(x) \geq 0$$

pozitif operatörler dizisinin, $n \rightarrow \infty$ için $[0,1]$ aralığında sürekli f fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşullar

$$L_n(1;x) \rightrightarrows 1$$

$$L_n(t;x) \rightrightarrows x$$

$$L_n(t^2; x) \rightrightarrows x^2$$

şeklinde ifade edilir. Bohman operatörlerin değeri, f fonksiyonunun $[0,1]$ aralığındaki değerlerinden bağımsızdır.

1953 yılında P.P. Korovkin [4], H. Bohman'ın teoremini genelleştirmiştir.

2.4. Teorem (Korovkin Teoremi)

$\{L_n\}$ lineer pozitif operatörler dizisi, $\forall x \in [a,b]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(t^\vartheta, x) - x^\vartheta\|_{C[a,b]} = 0 \quad \vartheta = 0, 1, 2 \quad (2.4)$$

koşulları sağlanıyorsa, bu durumda, $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli olan her f fonksiyonu için, $L_n(f; x)$, $[a,b]$ aralığında düzgün olarak $f(x)$ 'e yakınsar [7,4].

İspat

$f \in C[a,b]$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulabiliriz ki, $|t-x| < \delta$ olduğunda, $\forall x, t \in [a,b]$ için, $|f(t)-f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır.

Ayrıca

$$\begin{aligned} |f(t)-f(x)| &= |f(t)-f(x)| \chi(t) + |f(t)-f(x)| \chi(t) \\ &\quad [x-\delta, x+\delta] \quad [x-\delta, x+\delta]^c \\ &\leq \varepsilon \cdot 1 + 2.K_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Çünkü $t \in [x-\delta, x+\delta]^c$ olduğunda

$|t-x| \geq \delta$ olup

$$\frac{|t-x|}{\delta} \geq 1 \text{ ve buradan da}$$

$$\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Buna göre; $|t-x| \geq \delta$ olduğunda, f 'in sınırlılığını da göz önüne alarak $K_f > 0$ olmak üzere

$$|f(t)-f(x)| \leq 2.K_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi,

$\|L_n(f;x)-f(x)\|_C$ ifadesini düzenleyelim.

Üçgen eşitsizliğini ve lineer pozitif operatörlerin monotonluk özelliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} \|L_n(f;x)-f(x)\|_C &= \|L_n(f(t)-f(x);x) + f(x)L_n(1;x)-f(x)\|_C \\ &\leq \|L_n(|f(t)-f(x)|;x)\|_C + \|f(x)(L_n(1;x)-1)\|_C \\ &\leq \|L_n(|f(t)-f(x)|;x)\|_C + \|f\|_C \max_{a \leq t < b} |f(t)| \|L_n(1;x)-1\|_C \\ &= \|L_n(|f(t)-f(x)|;x)\|_C + \|f\|_C \|L_n(1;x)-1\|_C \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Bu eşitsizlikteki ikinci terim Eş. 2.4'den dolayı $n \rightarrow \infty$ iken sıfıra yakınsar, yani

$$\|f\|_C \|L_n(1;x)-1\|_C \leq \epsilon_n, \quad \epsilon_n \rightarrow 0$$

Buna göre

$$\|L_n(f;x)-f(x)\|_C \leq \|L_n(|f(t)-f(x)|;x)\|_C + \epsilon_n \tag{2.6}$$

olur.

Eşitsizliğin sağ tarafındaki birinci terim Eş. 2.5'den dolayı

$$\|L_n(|f(t)-f(x)|;x)\|_C \leq \varepsilon \|L_n(1;x)-1\|_C + \varepsilon + \frac{2K_f}{\delta^2} \{ \|L_n(t^2;x)-x^2\|_C - 2x \|L_n(t;x)-x\|_C + x^2 \|L_n(1;x)-1\|_C \}$$

eşitsizliğine dönüşür. Buradan da;

$$\|L_n(|f(t)-f(x)|;x)\|_C \leq \varepsilon \|L_n(1;x)-1\|_C + \varepsilon + \frac{2K_f}{\delta^2} \{ \|L_n(t^2;x)-x^2\|_C + (2 \max_{a \leq t < b} |x|) \|L_n(t;x)-x\|_C + (\max_{a \leq t < b} |x|^2) \|L_n(1;x)-1\|_C \}$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

$$2 \max_{a \leq t < b} |x| = 2b \quad \text{ve} \quad \max_{a \leq t < b} |x|^2 = b^2 \quad \text{olduğundan}$$

$$\|L_n(|f(t)-f(x)|;x)\|_C \leq \varepsilon \|L_n(1;x)-1\|_C + \varepsilon + \frac{2K_f}{\delta^2} \{ \|L_n(t^2;x)-x^2\|_C + 2b \|L_n(t;x)-x\|_C + b^2 \|L_n(1;x)-1\|_C \}$$

Bu eşitsizlikte de Eş. 2.4 koşullarından dolayı, $n \rightarrow \infty$ için

$$\|L_n(|f(t)-f(x)|;x)\|_C \rightarrow 0$$

olur. Buradan Eş. 2.6 eşitsizliğinden yararlanarak;

$$n \rightarrow \infty \text{ için}$$

$$\|L_n(f;x)-f(x)\|_C \rightarrow 0$$

olduğunu görürüz. Bu da ispatı tamamlar.

2.2. Sonuç

$\{L_n\}$ lineer pozitif operatörler dizisi $[a,b]$ aralığında

$$L_n(1;x) \rightrightarrows 1 \tag{2.7}$$

$$L_n((t-x)^2; x) \rightrightarrows 0 \quad (2.8)$$

koşullarını sağlıyorsa $C[a,b]$ uzayında olan her f fonksiyonu için, $[a,b]$ aralığında $n \rightarrow \infty$ iken,

$$L_n(f; x) \rightrightarrows f(x)$$

sağlanır [9, 14].

Burada $\rightrightarrows$ düzgün yakınsamayı ifade etmektedir.

Korovkin Teoremi'ndeki $1, x, x^2$ fonksiyonları yerine $[a,b]$ aralığında lineer bağımsız herhangi üç fonksiyonu alamayız.

2.5. Teorem [9]

f_0, f_1, f_2 sürekli fonksiyonlarından oluşmuş $[a,b]$ aralığında ikiden fazla sıfır yeri olan bir $F(x)$ polinomu varsa, bu durumda öyle bir L lineer pozitif operatörü bulabiliriz ki, $x \in [a,b]$ ve $k = 0,1,2$ için

$$L(f_k; x) = f_k(x)$$

koşulları sağlanmasına rağmen öyle bir $f^* \in C[a,b]$ fonksiyonu vardır ki

$$L(f^*; x) \neq f^*(x) \text{ 'dir.}$$

Dolayısıyla Korovkin Teoremi'nin koşullarındaki $1, x, x^2$ fonksiyonlarının yerine seçilecek fonksiyonlardan oluşturulmuş herhangi bir $F(x)$ polinomunun $[a,b]$ aralığında ikiden fazla sıfır yeri olmamalıdır.

2.6. Teorem (Baskakov Teoremi)

$L_n(f; x)$ lineer pozitif operatörler dizisi olsun. $\vartheta = 0,1,2$ için

$$L_n(t^\vartheta; x) \rightrightarrows x^\vartheta \quad (2.9)$$

şeklindeki üç koşul sağlanıyorsa ve tüm $\mathbb{R}$ 'de

$$|f(x)| \leq M_f(1+x^2) \quad (2.10)$$

ise, $\forall f \in C[a,b]$ için $L_n(f;x) \rightrightarrows f(x)$ 'dir.

İspat

$\forall \varepsilon > 0$ için $|t-x| \leq \delta$ olduğunda, $f \in C[a,b]$ olduğu için

$$|f(t)-f(x)| \leq \varepsilon$$

$|t-x| \geq \delta$ olduğunda ise, Eş. 2.10'dan dolayı

$$\begin{aligned} |f(t)-f(x)| &\leq |f(t)| + |f(x)| \\ &\leq M_f(1+t^2) + M_f(1+x^2) \\ &= M_f(2+t^2+x^2) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ayrıca $|t-x| \geq \delta$ ise $\frac{|t-x|}{\delta} \geq 1$ ve $\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1$ olacağından Eş. 2.11'den

$$\begin{aligned} |f(t)-f(x)| &\leq M_f(2+t^2+x^2) \\ &= M_f(2 + (t-x+x)^2 + x^2) \\ &= M_f(2 + (t-x)^2 + 2.(t-x).x + x^2 + x^2) \\ &\leq M_f\left(2.\frac{(t-x)^2}{\delta^2} + (t-x)^2 + 2.x|t-x| + 2x^2\right) \\ &\leq M_f\left(2.\frac{(t-x)^2}{\delta^2} + (t-x)^2 + 2.x\frac{(t-x)^2}{\delta} + 2x^2\frac{(t-x)^2}{\delta^2}\right) \\ &= M_f(t-x)^2\left(\frac{2}{\delta^2} + 1 + \frac{2x}{\delta} + \frac{2x^2}{\delta^2}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{2}{\delta^2} + 1 + \frac{2x}{\delta} + \frac{2x^2}{\delta^2} = C_\delta(x) \text{ dersek}$$

$\forall \varepsilon > 0$ için

$$|f(t)-f(x)| \leq \varepsilon + C_\delta(x) M_f(t-x)^2 \quad (2.12)$$

Buradan L_n 'nin lineerliğini ve Eş. 2.9'u kullanarak

$$\begin{aligned} L_n(|f(t)-f(x)|;x) &\leq \varepsilon L_n(1;x) + C_\delta(x) M_f L_n((t-x)^2;x) \\ &= \varepsilon (L_n(1;x)-1) + \varepsilon + C_\delta(x) M_f [L_n(t^2;x)-2x.L_n(t;x) + x^2 L_n(1;x)] \end{aligned} \quad (2.13)$$

Eş. 2.13 eşitsizliğinde Eş. 2.9 şartlarını kullanırsak, $C_\delta(x)$ sonlu bir sayı olduğu için,

$L_n(|f(t)-f(x)|;x)$ 'in 0'a yaklaştığı görülür. Buna göre

$L_n(f;x) \xrightarrow{p} f(x)$ sonucunu elde ederiz.

2.4. L_p Uzaylarında P.P. Korovkin Teoremi

2.7. Tanım

(X,A,μ) bir ölçü uzayı olsun. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere,

$$L_p = \{f \in M(X,A): \int_X |f(x)|^p dx < \infty\} \quad (2.14)$$

kümesine p-ninci kuvvetten integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı denir. Burada X bir küme, A X üzerinde bir σ cebiri $M(X,A)$ X üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli μ ölçülebilir bütün fonksiyonların kümesidir.

$f \in L_p$ olsun. $\alpha \in \mathbb{R}$ ise, $\alpha f \in L_p$ 'dir. Çünkü $f_p \in L_p$ olduğunda, $|f|^p$ integrallenebilir olup $|\alpha|^p \cdot |f|^p$ de integrallenebilirdir. Dolayısıyla $|\alpha f|^p$ integrallenebilirdir. Ayrıca $f,g \in L_p$ ise

$$|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p \leq (2 \cdot \max\{|f|,|g|\})^p \leq 2^p(|f|^p+|g|^p)$$

olacağından $|f+g|^p$ integrallenebilirdir ve dolayısıyla $f+g \in L_p$ olur. Şu halde L_p kümesi bir vektör uzayıdır. Bu uzay üzerinde $p \geq 1$ olmak üzere

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p} \quad (2.15)$$

şeklinde tanımlanan

$\|\cdot\|_p: L_p \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu L_p üzerinde bir yarı normdur.

2.7. Teorem (Hölder Eşitsizliği) [11]

$p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $f \in L_p$, $g \in L_q$ ise $f \cdot g \in L_1$ ve

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \text{ 'dir.} \quad (2.16)$$

2.8. Teorem (Minkowsky Eşitsizliği) [11]

Eğer $p \geq 1$, $f, g \in L_p$ ise $f+g \in L_p$ ve

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \text{ 'dır.} \quad (2.17)$$

Belirtelim ki; $f \in L_p$ olmak üzere $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow \int |f|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow$ hemen hemen her yerde $f = 0$ dır [11]. (2.18)

Buna göre L_p üzerinde tanımlanan $\|\cdot\|_p$ fonksiyonu için

(a) $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow$ hemen hemen her yerde $f = 0$

(b) $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p$

(c) $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

özellikleri sağlanır ki bu $\|\cdot\|_p$ fonksiyonunun L_p üzerinde bir yarı norm olduğunu gösterir.

L_p üzerinde

$f \sim g \Leftrightarrow$ hemen hemen her yerde $f = g$

biçiminde tanımlanan $\sim$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Dolayısıyla bu bağıntı L_p uzayını denklik sınıflarına ayırır. Bu denklik sınıflarının kümesi L_p ile gösterilir. Buna göre L_p 'nin elemanları $[f]$ biçimindeki denklik sınıflarıdır. L_p uzayı

$$[f] + [g] = [f+g]$$

$$\lambda.[f] = [\lambda.f]$$

şeklinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır. $p \geq 1$ olmak üzere

$$\| [f] \|_p = \| f \|_p = \left(\int_x |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

biçiminde tanımlanan $\| \cdot \|_p$ fonksiyonu L_p üzerinde bir normdur.

Her ne kadar L_p 'nin elemanları denklik sınıfları ise de, onları denklik sınıflarının temsilci elemanları ile göstermek mümkündür.

2.9. Teorem (Luzin Teoremi)

Sonlu aralıklarda tanımlanmış L_p uzaylarındaki her f fonksiyonu ve her $\varepsilon > 0$ için öyle sürekli bir g fonksiyonu bulabiliriz ki, bir μ ölçüsü için

$$\mu\{E: f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon \text{ 'dur [12].}$$

2.10. Teorem [9]

Kabul edelim ki $L_p(a,b)$ 'den $L_p(a,b)$ 'ye dönüşüm yapan $\{A_n\}$ lineer pozitif operatörler dizisi için aşağıdaki şartlar geçerli olsun.

a) A_n -lerin normları düzgün sınırlı olsun. Yani öyle bir M sabiti olsun ki tüm n -ler için

$$\|A_n\|_{L_p \rightarrow L_p} \leq M < \infty \quad n = 1, 2, \dots$$

sağlansın.

b) $n \rightarrow \infty$ ve $\vartheta = 0, 1, 2$, için

$$\|A_n(t^{\vartheta}; x) - x^{\vartheta}\|_{L_p} \rightarrow 0$$

olsun. O takdirde keyfi $f \in L_p(a, b)$ fonksiyonu için

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } \|A_n(f; x) - f(x)\|_{L_p} \rightarrow 0 \text{ olur.}$$

2.5. Ağırlıklı Uzaylarda Yaklaşım

Korovkin Teoremi reel eksenin sonlu ve kapalı aralıklarında verilmiştir. Reel eksenin tamamında veya sınırsız alt aralıklarında yaklaşım koşullarını Gadjiev [6,7] araştırmıştır. Sınırsız aralıklarda Korovkin Teoremi ağırlıklı uzaylarda incelenmiştir.

2.8. Tanım

φ reel ekseninde sürekli monoton artan bir fonksiyon olmak üzere

$$\rho(x) = 1 + [\varphi(x)]^2 \tag{2.19}$$

şeklinde ρ fonksiyonu tanımlansın.

$$|f(x)| \leq M_f \rho(x) \quad M_f > 0 \tag{2.20}$$

eşitsizliğini sağlayan reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonların kümesini $B_\rho(\mathbb{R})$ ile, bu uzaydaki sürekli fonksiyonların kümesini ise $C_\rho(\mathbb{R})$ ile göstereceğiz.

$$B_\rho(\mathbb{R}) = \{f: |f(x)| \leq M_f \rho(x)\}$$

$$C_\rho(\mathbb{R}) = \{f \in B_\rho(\mathbb{R}): f \text{ sürekli}\}$$

$B_p(\mathbb{R})$ uzayında, toplama ve skalerle çarpma işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$+: B_p(\mathbb{R}) \rightarrow B_p(\mathbb{R})$$

$$(f, g) \rightarrow f + g$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ için } |(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)|$$

$$\leq |f(x)| + |g(x)|$$

$$\leq M_f \cdot \rho(x) + M_g \cdot \rho(x) \quad \text{Eş. 2.20'den}$$

$$= M_{f+g} \cdot \rho(x)$$

Buna göre her $f, g \in B_p(\mathbb{R})$ için $f+g \in B_p(\mathbb{R})$ 'dir.

F herhangi bir cisim olmak üzere

$$F \times B_p(\mathbb{R}) \rightarrow B_p(\mathbb{R})$$

$$(\alpha, f) \rightarrow \alpha f$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ için } (\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$$

şeklinde tanımlansın,

$$f \in B_p(\mathbb{R}) \text{ ise } (\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x) \quad \text{Eş. 2.20'den}$$

$$\leq \alpha \cdot M_f \cdot \rho(x)$$

$$= M'_f \cdot \rho(x)$$

olduğundan

$$\forall f \in B_p(\mathbb{R}) \text{ için } \alpha \in F \text{ olmak üzere } (\alpha f) \in B_p(\mathbb{R})' \text{ dir.}$$

$B_p(\mathbb{R})$, yukarıda tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir lineer uzaydır. Bu uzayda norm

$$\|f\|_p = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} \quad (2.21)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu norm ile $B_p(\mathbb{R})$ ve $C_p(\mathbb{R})$ lineer normlu uzaylardır.

Burada ρ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu, $B_p(\mathbb{R})$ ve $C_p(\mathbb{R})$ uzaylarına ise ağırlıklı uzaylar denir.

$C_p(\mathbb{R})$ uzayında

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = k_f < \infty \quad (2.22)$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların kümesini $C_p^k(\mathbb{R})$ ile göstereceğiz. $C_p^k(\mathbb{R})$ ve $C_p(\mathbb{R})$, $B_p(\mathbb{R})$ 'nin alt uzayıdır.

2.6. Önerme

$C_p(\mathbb{R})$ 'de tanımlı bir lineer pozitif operatörün $C_p(\mathbb{R})$ 'den $B_p(\mathbb{R})$ 'ye dönüşüm yapması için gerek ve yeter koşul

$$\|L(\rho; x)\|_p \leq M \quad (2.23)$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısının bulunmasıdır.

İspat

Önce $f \in C_p(\mathbb{R})$ alalım ve

$L: C_p(\mathbb{R}) \rightarrow B_p(\mathbb{R})$ dönüşümünün var olduğunu kabul edelim. Buna göre $\forall f \in C_p(\mathbb{R})$ için $L(f; x) \in B_p(\mathbb{R})$ olur.

Özel olarak $M_1 > 0$ olmak üzere $|\rho(x)| \leq M_1 \cdot \rho(x)$ olduğu için $\rho(x) \in C_p(\mathbb{R})$ ve $L(\rho; x) \in B_p(\mathbb{R})$ olur. Bu ise Eş. 2.20'den

$$|L(\rho; x)| < M \cdot \rho(x)$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısının bulunması demektir.

Buradan $\frac{|L(\rho; x)|}{\rho(x)} < M$ eşitsizliğini elde ederiz.

Şimdi supremum alırsak,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|L(\rho; x)|}{\rho(x)} < M$$

Buradan da, Eş. 2.21'den dolayı

$$\|L(\rho; x)\|_p < M$$

sonucuna ulaşırız.

Şimdi $\|L(\rho; x)\|_p \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısının var olduğunu kabul edelim.

$$\|L(\rho; x)\|_p = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|L(\rho; x)|}{\rho(x)} \leq M$$

olduğuna göre

$$\frac{|L(\rho; x)|}{\rho(x)} \leq M$$

olacaktır. Bu ise

$$|L(\rho; x)| \leq M \cdot \rho(x) \tag{2.24}$$

anlamına gelir.

$f \in C_p(\mathbb{R})$ olduğu için Eş. 2.20'den

$|f(x)| \leq M_f \cdot \rho(x)$ olacak şekilde $M_f > 0$ vardır.

Lineer pozitif operatörlerin monotonluk özelliğinden

$$|L(f;x)| \leq L(|f|;x)$$

$$= L\left(\frac{|f|}{\rho};x\right)$$

olduğunu biliyoruz.

Buradan L 'nin lineerliğini kullanarak

$$\begin{aligned} &= \frac{|f|}{\rho} \cdot L(\rho;x) \\ &\leq M_f \cdot L(\rho;x) \quad \text{Eş. 2.24'den} \\ &\leq M_f \cdot M \cdot \rho(x) \end{aligned}$$

$M_f \cdot M = M_2$ dersek

$$|L(f;x)| \leq M_2 \cdot \rho(x)$$

eşitsizliğini elde ederiz ki bu da $L(f;x) \in B_\rho(\mathbb{R})$ olduğunu ispatlar.

2.7. Önerme

$L: C_\rho(\mathbb{R}) \rightarrow B_\rho(\mathbb{R})$ lineer pozitif operatörü tanımlansın. Bu durumda

$$\|L\|_{C_\rho \rightarrow B_\rho} = \|L(\rho;x)\|_\rho. \quad (2.25)$$

İspat

Operatör normunun tanımından

$$\begin{aligned} \|L\|_{C_\rho \rightarrow B_\rho} &= \sup_{\|f\|_\rho \neq 0} \frac{\|L(f;x)\|_\rho}{\|f\|_\rho} \\ &= \sup_{\|f\|_\rho = 1} \|L(f;x)\|_\rho \end{aligned}$$

$$= \sup_{\|f\|_p = 1} \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|L(f; x)|}{\rho(x)} \right\}$$

Buradan, lineer pozitif operatörlerin monotonluk özelliğinden

$$\begin{aligned} &\leq \sup_{\|f\|_p = 1} \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{L(|f|; x)}{\rho(x)} \right\} \\ &= \sup_{\|f\|_p = 1} \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{L\left(\frac{|f|}{\rho} \cdot \rho; x\right)}{\rho(x)} \right\} \\ &\leq \sup_{\|f\|_p = 1} \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{L\left(\rho(t) \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|f(t)|}{\rho(t)}; x\right)}{\rho(x)} \right\} \\ &= \sup_{\|f\|_p = 1} \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{L(\rho(t); x)}{\rho(x)} \right\} \|f\|_p \\ &= \|L(\rho; x)\|_p \end{aligned} \tag{2.26}$$

eşitsizliği elde edilir.

Diğer taraftan $\|\rho\|_p = 1$ olduğundan

$$\|L\|_{C_p \rightarrow B_p} = \sup_{\|f\|_p = 1} \|L(f; x)\|_p \geq \|L(\rho; x)\|_p \tag{2.27}$$

eşitsizliği bulunur. Eş. 2.26 ve Eş. 2.27'den Eş. 2.25 elde edilir.

2.11. Teorem [7, 9]

$\varphi(x)$ reel ekseninde sürekli monoton artan bir fonksiyon olmak üzere

$$\rho(x) = 1 + [\varphi(x)]^2$$

ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda $C_p(\mathbb{R})$ uzayından $B_p(\mathbb{R})$ uzayına öyle $\{A_n\}$ lineer pozitif operatörler dizisi tanımlanabilir ki, bu operatörler dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(\varphi^\vartheta; x) - \varphi^\vartheta(x)\|_p = 0 \quad \vartheta = 0, 1, 2$$

şeklindeki üç şart sağlanmasına rağmen öyle bir $f^* \in C_p(\mathbb{R})$ fonksiyonu bulunabilir ki;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(f^*; x) - f^*(x)\|_p \geq 1 \quad \text{olur.}$$

Bu teorem Korovkin Teoremi'nin sonsuz bölgelerde geçerli olmadığını gösterir.

2.6. Örnek

$f \in C[0, \infty)$ olmak üzere

$$A_n(f; x) = \begin{cases} f(x) + \frac{1}{2n}[f(x+1) - 2f(x) + f(x-1)] & 0 \leq x \leq n \\ f(x) & x \notin [0, n] \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın

$\varphi(x) = x$ ve $\rho(x) = 1+x^2$ olsun.

A_n lineer pozitif operatördür.

$$A_n(\rho; x) = \begin{cases} \rho(x) + \frac{1}{2n}[\rho(x+1) - 2\rho(x) + \rho(x-1)] & 0 \leq x \leq n \\ \rho(x) & x \notin [0, n] \end{cases}$$

$A_n(\rho; x) \leq 2\rho(x)$ olduğundan önerme 2.6'ya göre A_n C_p 'dan B_p 'ya bir dönüşüm tanımlar.

Şimdi Korovkin Teoremi'nin şartlarının sağlandığını gösterelim.

A_n 'nin tanımı gereğince

$A_n(1;x) = 1$ ve $A_n(t;x) = x$ olduğu açıktır.

$$A_n(t^2;x) = \begin{cases} x^2 + \frac{1}{2n}[(x+1)^2 - 2x^2 + (x-1)^2] & 0 \leq x \leq n \\ x^2 & x \notin [0, n] \end{cases}$$

olduğundan $n \rightarrow \infty$ için

$$A_n(t^2;x) \xrightarrow{p} x^2 \text{ dir.}$$

Buna göre Korovkin Teoremi'nin koşulları sağlanmaktadır.

Şimdi C_p 'dan

$$f^*(x) = x^2 \cdot \cos \pi x$$

fonksiyonunu alalım.

$$A_n(f^*;x) = \begin{cases} f^*(x) + \frac{1}{2n}[f^*(x+1) - 2f^*(x) + f^*(x-1)] & 0 \leq x \leq n \\ f^*(x) & x \notin [0, n] \end{cases}$$

$$|A_n(f^*;x) - f^*(x)| = \begin{cases} \frac{1}{2n} |\cos \pi x| (4x^2 + 2) & 0 \leq x \leq n \\ 0 & x \notin [0, n] \end{cases}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \|A_n(f^*;x) - f^*(x)\|_p &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|A_n(f^*;x) - f^*(x)|}{\rho(x)} \\ &= \frac{1}{2n} \sup_{x \in [0, n]} |\cos \pi x| (4x^2 + 2) \\ &= \frac{4n^2 + 2}{n} \end{aligned}$$

Buna göre

$$\|A_n(f^*;x) - f^*(x)\|_p \geq 1' \text{ dir.}$$

2.1. Lemma [9]

Eğer $A_n: C_p \rightarrow B_p$ lineer pozitif operatörler dizisi için $n \rightarrow \infty$ olduğunda

$$\|A_n(\varphi^\vartheta; x) - \varphi^\vartheta(x)\|_p \rightarrow 0 \quad \vartheta = 0, 1, 2$$

şeklindeki üç şart geçerli ise, her bir $f \in C_p$ fonksiyonu için herhangi bir $[a, b]$ sonlu aralığında

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [a, b]} |A_n(f, x) - f(x)| = 0 \quad (2.28)$$

olur.

2.12. Teorem [6,7]

$\{A_n\}$ lineer pozitif operatörler dizisi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(\varphi^\vartheta, x) - \varphi^\vartheta(x)\|_p = 0 \quad \vartheta = 0, 1, 2$$

şeklindeki üç şartı sağlıyorsa, her $f \in C_p^k$ için $n \rightarrow \infty$ iken,

$$\|A_n f - f\|_p \rightarrow 0$$

olur.

2.6. $L_{p,\rho}$ Uzaylarında Ağırlıklı Yaklaşım

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\rho(x) = 1 + x^2$$

olsun.

2.9. Tanım

Keyfi $h > 0$ sabiti ve $p \geq 1$ için $L_{p,\rho}$ uzayı

$$L_{p,\rho} = \left\{ f : \left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(\zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p} \leq M_f \cdot \rho(x) \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

$L_{p,\rho}$ uzayı bir lineer uzaydır.

Bu uzayda norm

$$\|f\|_{p,\rho} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(\zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p}}{\rho(x)} \quad (2.29)$$

şeklinde tanımlanır.

2.10. Tanım

$L_{p,\rho}$ uzayının $L_{p,\rho}^k$ alt uzayı

$$L_{p,\rho}^k = \left\{ f \in L_{p,\rho} : \exists K_f, \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(\zeta) - K_f \rho(\zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p}}{\rho(x)} = 0 \right\}$$

$$L_{p,\rho}^0 = \left\{ f \in L_{p,\rho}^k : \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(\zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p}}{\rho(x)} = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

2.13. Teorem [6, 7]

$L_{p,p}$ 'dan $L_{p,p}$ 'ya dönüşüm yapan öyle lineer pozitif $\{A_n\}$ operatörler dizisi tanımlayabiliriz ki aşağıdaki şartlar geçerli olur.

i) Öyle bir K pozitif sayısı vardır ki her n için

$$\|A_n\|_{L_{p,p} \rightarrow L_{p,p}} \leq K \quad \text{sağlanır.}$$

$$\text{ii) } \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(t^\vartheta; x) - x^\vartheta\|_{L_{p,p}} = 0 \quad \vartheta = 0, 1, 2$$

sağlanır ve $L_{p,p}$ 'da öyle bir f^* fonksiyonu bulabiliriz ki,

$n \rightarrow \infty$ için

$$\|A_n f - f^*\|_{L_{p,p}} > 0$$

olur.

2.14. Teorem

$L_{p,p}$ 'dan $L_{p,p}$ 'ya dönüşüm yapan öyle lineer pozitif $\{A_n\}$ operatörler dizisi tanımlayalım ki, aşağıdaki şartlar geçerli olsun.

i) Öyle bir $K > 0$ sayısı vardır ki, her n için

$$\|A_n\|_{L_{p,p} \rightarrow L_{p,p}} \leq K$$

$$\text{ii) } \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(t^\vartheta; x) - x^\vartheta\|_{L_{p,p}} = 0 \quad \vartheta = 0, 1, 2$$

Bu durumda, keyfi $f \in L_{p,p}^k$ için $n \rightarrow \infty$ iken $\|A_n f - f\|_{L_{p,p}} \rightarrow 0$ olur.

İspat

İspatı $L^0_{p,p}$ uzayı için yapmak yeterlidir. Çünkü, $f \in L^k_{p,p}$ ise

$F(x) = f(x) - k_f \rho(x) \in L^0_{p,p}$ 'dır. Buradan

$f(x) = F(x) + k_f \rho(x)$ yazabiliriz.

$$\|A_n f - f\|_p \leq \|A_n f - F\|_p + K_f \|A_n \rho - \rho\|_p$$

Eşitsizlikte 1. terim $F \in L^0_{p,p}$ olduğundan, 2. terim ise tanımdan dolayı $n \rightarrow \infty$ için 0'a yaklaşır.

Kabul edelim ki $f \in L^0_{p,p}$ olsun. Buna göre

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(\zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p}}{\rho(x)} = 0 \quad (2.30)$$

olacaktır.

Bu durumda öyle bir x_0 sayısı vardır ki $|x| > x_0$ iken

$$\left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(\zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p} < \varepsilon \rho(x) \quad (2.31)$$

olur.

Luzin Teoremi'ne göre

$$G_h(x_0) = [-x_0-h, x_0+h]$$

aralığında öyle sürekli bir g fonksiyonu vardır ki,

$$\left(\frac{1}{2h} \int_{-x_0-h}^{x_0+h} |f(\zeta) - g(\zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p} < \varepsilon \quad (2.32)$$

eşitsizliği sağlanır.

$G_h(x_0)$ aralığının kapalı bir G alt kümesinde

$g(x) = f(x)$ ve

$$\max_{x \in G} |f(x)| = \max_{x \in G_h(x_0)} |g(x)|$$

olur.

Şimdi kabul edelim ki

$$M(x_0) = \max \left\{ \max_{x \in G} |f(x)|, 1 \right\} = \max \left\{ \max_{x \in G_h(x_0)} |g(x)|, 1 \right\}$$

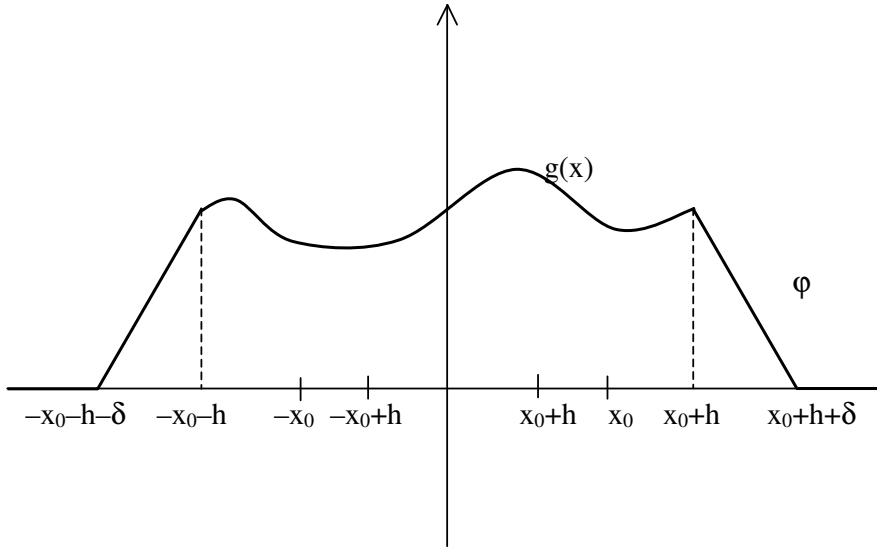
ve

$$\delta < \min \left\{ \frac{2h\varepsilon^p}{M^p(x_0)}; h \right\} \quad (2.33)$$

olsun.

Ayrıca aşağıdaki şekilde bir φ fonksiyonu tanımlayalım.

$$\varphi(x) = \begin{cases} g(x) & ; \quad x \in G_h(x_0) \\ 0 & ; \quad |x| > x_0 + h + \delta \\ \text{doğrusaldır} & ; \quad x \in G_{h+\delta}(x_0) \setminus G_h(x_0) \end{cases}$$



Bu durumda

$L_{p,p}$ 'daki norm tanımı ve Minkowsky eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
 \|f(x) - \varphi(x)\|_{L_{p,p}} &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(\zeta) - \varphi(\zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p}}{\rho(x)} \\
 &\leq \sup_{|x| \leq x_0} \frac{\left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(\zeta) - \varphi(\zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p}}{\rho(x)} + \sup_{|x| \geq x_0+h+\delta} \frac{\left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(\zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p}}{\rho(x)} + \\
 &\quad \sup_{|x| \geq x_0+h+\delta} \frac{\left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |\varphi(\zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p}}{\rho(x)} + \sup_{x \in [x_0, x_0+h+\delta] \cup [-x_0-h-\delta, -x_0]} \frac{\left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(\zeta) - \varphi(\zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p}}{\rho(x)} \quad (2.6.6)
 \end{aligned}$$

ifadesini yazabiliriz.

Burada Eş. 2.31'den

$$\sup_{|x| \geq x_0 + h + \delta} \frac{\left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(\zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p}}{\rho(x)} < \varepsilon$$

φ 'nin tanımından

$$\sup_{|x| \geq x_0 + h + \delta} \frac{\left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |\varphi(\zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p}}{\rho(x)} = 0 \text{ 'dır}$$

Buna göre Eş. 2.34 eşitsizliğini,

$$\begin{aligned} &\leq \left(\frac{1}{2h} \int_{-x_0-h}^{x_0+h} |f(\zeta) - \varphi(\zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p} + \varepsilon + \left(\frac{1}{2h} \int_{x_0-h}^{x_0+2h+\delta} |f(\zeta) - \varphi(\zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p} \\ &+ \left(\frac{1}{2h} \int_{-x_0-2h-\delta}^{-x_0+h} |f(\zeta) - \varphi(\zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p} \end{aligned} \quad (2.35)$$

şeklinde düzenleyebiliriz. Buradaki birinci terim Eş. 2.32'den dolayı ε 'dan küçüktür.

Buna göre

$$\begin{aligned} (2.6.7) &< 2\varepsilon + \left(\frac{1}{2h} \int_{x_0-h}^{x_0+h} |f(\zeta) - \varphi(\zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p} + \left(\frac{1}{2h} \int_{x_0+h}^{x_0+2h+\delta} |f(\zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p} \\ &+ \left(\frac{1}{2h} \int_{x_0+h}^{x_0+2h+\delta} |\varphi(\zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p} + \left(\frac{1}{2h} \int_{-x_0-2h-\delta}^{-x_0-h} |f(\zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p} + \left(\frac{1}{2h} \int_{-x_0-2h+\delta}^{-x_0-h} |\varphi(\zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p} \\ &+ \left(\frac{1}{2h} \int_{-x_0-h}^{-x_0+h} |f(\zeta) - \varphi(\zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p} \end{aligned} \quad (2.36)$$

eşitliğini yazabiliriz.

(2.36) eşitsizliğinde ikinci terim ve sonuncu terim (2.32)'den dolayı ε 'dan küçük kalır. Ayrıca φ 'nin tanımından

$$\left(\frac{1}{2h} \int_{x_0+h}^{x_0+2h+\delta} |\varphi(\zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p} = \left(\frac{1}{2h} \int_{x_0+h}^{x_0+h+\delta} |\varphi(\zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p}$$

ve

$$\left(\frac{1}{2h} \int_{-x_0-2h-\delta}^{-x_0-h} |\varphi(\zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p} = \left(\frac{1}{2h} \int_{-x_0-h-\delta}^{-x_0-h} |\varphi(\zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p}$$

olur.

Buna göre

$$\begin{aligned} 2.36 \leq 4\varepsilon + & \left(\frac{1}{2h} \int_{x_0+h}^{x_0+2h+\delta} |f(\zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p} + \left(\frac{1}{2h} \int_{x_0+h}^{x_0+h+\delta} |\varphi(\zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p} \\ & + \left(\frac{1}{2h} \int_{-x_0-2h-\delta}^{-x_0-h} |f(\zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p} + \left(\frac{1}{2h} \int_{-x_0-h-\delta}^{-x_0-h} |\varphi(\zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Buradan, φ 'nin tanımından $|\varphi(x)| \leq M(x_0)$ ve $\delta \leq h$ eşitsizliklerini kullanırsak;

$$\begin{aligned} (2.37) \leq 4\varepsilon + & \left(\frac{1}{2h} \int_{x_0+h}^{x_0+3h} |f(\zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p} + 2M(x_0) \left(\frac{\delta}{2h} \right)^{1/p} \\ & + \left(\frac{1}{2h} \int_{-x_0-3h}^{-x_0-h} |f(\zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p} \end{aligned} \quad (2.38)$$

olur.

Eş. 2.38 eşitsizliğinde Eş. 2.31'i kullanırsak

$$(2.38) \leq 4\varepsilon + \varepsilon.p(x_0+2h) + \varepsilon.p(-x_0-2h) + 2.M(x_0) \left(\frac{\delta}{2h} \right)^{1/p} \quad (2.39)$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

Eş. 2.39 eşitsizliğinde ρ 'nun tanımını ve Eş. 2.33'ü kullanırsak

$$\begin{aligned} \|f(x) - \varphi(x)\|_{L_{p,\rho}} &\leq 4\varepsilon + 2\varepsilon\rho(x_0+2h) + 2M(x_0) \cdot \frac{1}{(2h)^{1/p}} \cdot (2h)^{1/p} \cdot \varepsilon \\ &= \text{sbt} \cdot \varepsilon \end{aligned} \quad (2.40)$$

eşitsizliğine ulaşırız.

Ayrıca, burada $\rho(x) = 1+x^2$ olmak üzere öyle bir $x_1 > x_0$ sayısı bulabiliriz ki,

$$M(x_0) < \varepsilon \cdot \rho(x_1) \quad (2.41)$$

olur.

Şimdi

$\|A_n(f; x) - f(x)\|_{L_{p,\rho}}$ ifadesini düzenleyerek

$$\begin{aligned} \|A_n(f; x) - f(x)\|_{L_{p,\rho}} &\leq \|A_n(f; x) - f(x)\|_{L_{p,\rho}}[-x_1, x_1] \\ &+ \sup_{|x| \geq x_1} \frac{\left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(\zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p}}{\rho(x)} + \sup_{|x| \geq x_1} \frac{\left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |A_n(f; \zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p}}{\rho(x)} \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Eşitsizliğin sağ tarafındaki birinci terim, Lemma 2.1'e göre sıfıra yaklaşır.

$$\sup_{|x| \geq x_1} \frac{\left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |A_n(f; \zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p}}{\rho(x)} \leq \|A_n(f(t) - \varphi(t); x)\|_{L_{p,\rho}}$$

$$\begin{aligned}
& + \sup_{|x| \geq x_1} \frac{\left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |A_n(\varphi; \zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p}}{\rho(x)} \\
& \leq \|A_n\| \|f - \varphi\|_{L_{p,p}} + M(x_0) \|A_n(1; x) - 1\|_{L_{p,p}} + \frac{M(x_0)}{\rho(x_1)}
\end{aligned}$$

olup; Eş. 2.40, Eş. 2.41 ve teoremin i koşulundan dolayı

$$\|A_n\| \|f - \varphi\|_{L_{p,p}} < \varepsilon.K$$

$$\frac{M(x_0)}{\rho(x_1)} < \varepsilon$$

elde edilir. Buradan teoremin ii koşulunun kullanılması ile de $n \rightarrow \infty$ için

$$\|A_n(1; x) - 1\|_{L_{p,p}} \rightarrow 0$$

olduğundan ispat tamamlanır.

3. TOPLAMSAL İNTEGRAL TİP OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde $[0, \infty)$ 'da sürekli ve polinomsal büyüyen fonksiyonlar için Agrawal ve Thamer [8] tarafından tanımlanmış olan M_n toplamsal – integral tip operatörleri ele alınacaktır. İlk kesimde M_n operatörünün yaklaşım özellikleri, ikinci ve üçüncü kısımda ise, yaklaşım hızı verilecektir. Son kısımda operatörün [8] de verilen eş anlı yaklaşım özelliği incelenecektir.

3.1. M_n Operatörünün Temel Özellikleri

$$f \in C_p[0, \infty) = \{f \in C[0, \infty): |f(t)| \leq M_f(1+t^2), M_f > 0\}$$

$$P_{n,k}(x) = \binom{n+k-1}{k} x^k (1+x)^{-(n+k)} \quad x \in [0, \infty)$$

olmak üzere

$$M_n(f(t); x) = (n-1) \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}(x) \int_0^{\infty} P_{n,k-1}(t) f(t) dt + (1+x)^{-n} \cdot f(0) \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır.

3.1. Teorem

Eş. 3.1 ile tanımlanan M_n operatörü lineer pozitif bir operatördür ve her $f \in C_p^k$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|M_n(f; x) - f(x)\|_p = 0 \text{ dir.}$$

İspat

Her $f(t) \geq 0$ için $M_n(f; x) \geq 0$ olduğundan M_n operatörü pozitifdir.

M_n operatörünün lineerliği ise, integral ve toplam operatörünün lineerliğinden açıktır.

Her $f \in C_p^k$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|M_n(f; x) - f(x)\|_p = 0$ olduğunu gösterebilmek amacı ile, Teorem

2.12'nin şartlarını kontrol edelim.

$$M_n(1; x) = (n-1) \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}(x) \int_0^{\infty} P_{n,k-1}(t) dt + (1+x)^{-n} \quad (3.2)$$

Eş. 3.2'de $P_{n,k}(x)$ ve $P_{n,k-1}(t)$ değerlerini yerine yazarsak

$$\begin{aligned} M_n(1; x) = (n-1) \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k (1+x)^{-(n+k)} \int_0^{\infty} \binom{n+k-2}{k-1} t^{k-1} (1+t)^{-(n+k-1)} dt \\ + (1+x)^{-n} \end{aligned} \quad (3.3)$$

eşitliğini elde ederiz. Şimdi

$$\int_0^{\infty} \binom{n+k-2}{k-1} t^{k-1} (1+t)^{-(n+k-1)} dt$$

integralini hesaplayalım.

$$= \int_0^{\infty} \frac{(n+k-2)!}{(n-1)!(k-1)!} t^{k-1} (1+t)^{-(n+k-1)} dt$$

olup burada $t = \frac{u}{1-u}$ değişken değişimini kullanırsak

$$\frac{(n+k-2)!}{(n-1)!(k-1)!} \int_0^1 u^{k-1} (1-u)^{n-2} \quad (3.4)$$

integralini elde ederiz.

Beta fonksiyonu yardımı ile

$$\frac{(n+k-2)!}{(n-1)!(k-1)!} \int_0^1 u^{k-1} (1-u)^{n-2} = \frac{(n+k-2)!}{(n-1)!(k-1)!} \cdot B(k, n-1) = \frac{\Gamma(k) \Gamma(n-1)}{\Gamma(k+n-1)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(n+k-2)!}{(n-1)!(k-1)!} \cdot \frac{(k-1)!(n-2)!}{(k+n-2)!} \\
&= \frac{1}{n-1}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

bulunur.

Bu ifadeyi Eş. 3.3'de yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
M_n(1;x) &= (n-1) \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k (1+x)^{-(n+k)} \cdot \frac{1}{(n-1)} + (1+x)^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k (1+x)^{-(n+k)}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
(1+x-xt)^{-n} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n-1)! \cdot n(n+1) \dots (n+k-1)}{(n-1)! \cdot (1+x)^{n+k} \cdot k!} \cdot x^k \cdot t^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{(n+k)}} t^k
\end{aligned}$$

olduğundan, burada $t = 1$ alırsak

$$1^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{(n+k)}}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu son ifade bize

$$M_n(1;x) = 1 \tag{3.7}$$

olduğunu gösterir.

$M_n(1;x) = 1$ olduğuna göre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|M_n(1;x) - 1\|_p = 0 \tag{3.8}$$

olur.

$M_n(t;x)$ ifadesinin değerini bulabilmek için Eş. 3.1’de $f(t) = t$ alırsak

$$M_n(t;x) = (n-1) \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}(x) \int_0^{\infty} P_{n,k-1}(t) \cdot t \, dt \quad (3.9)$$

eşitliğini elde ederiz.

Şimdi,

$$\int_0^{\infty} P_{n,k-1}(t) \cdot t \, dt \text{ integralini hesaplayalım.}$$

$P_{n,k-1}(k)$ ifadesinin değerini yerine yazıp, $t = \frac{u}{1-u}$ değişken değişimini uygularsak,

$$\int_0^1 \frac{(n+k-2)!}{(n-1)! \cdot (k-1)!} u^k (1-u)^{n-3}$$

integralini elde ederiz. Buradan yine Beta Fonksiyonu yardımı ile

$$\begin{aligned} &= \frac{(n+k-2)!}{(n-1)! \cdot (k-1)!} \cdot \frac{k! \cdot (n-3)!}{(n+k-2)!} \\ &= \frac{k}{(n-2)(n-1)} \end{aligned} \quad (3.10)$$

eşitliğini elde ederiz.

Eş. 3.9 eşitliğini Eş. 3.8’de yerine yazarsak

$$\begin{aligned} M_n(t;x) &= (\cancel{n-1}) \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k (1+x)^{-(n+k)} \frac{k}{(n-2) \cdot (\cancel{n-1})} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+k+1)! \cdot x^k \cdot (1+x)^{-(n+k)}}{(n-1)! \cdot (k-1)! \cdot (n-2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{nx}{n-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)! \cdot x^k \cdot (1+x)^{-(n+k+1)}}{k! \cdot n!} \quad (3.11)$$

eşitliğini elde ederiz.

Eş. 3.11 eşitliğinden, Eş. 3.7'den dolayı

$$\begin{aligned} M_n(t;x) &= \frac{nx}{n-2} \cdot 1^{-(n+1)} \\ &= \frac{nx}{n-2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

eşitliğini elde ederiz.

$M_n(t;x)$ değerini kullanarak

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|M_n(t;x) - x\|_p &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{nx}{n-2} - x \right\|_p \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{2x}{n-2} \right\|_p \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{\left| \frac{2x}{n-2} \right|}{1+x^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n-2} \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{2x}{1+x^2} \end{aligned}$$

ifadesine ulaşırız. Buradaki supremum sonlu olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|M_n(t;x) - x\|_p = 0 \quad \text{bulunur.} \quad (3.13)$$

Benzer yöntemler kullanılarak

$$M_n(t^2;x) = \frac{n(n+1)x^2}{(n-3)(n-2)} + \frac{2nx}{(n-3)(n-2)} \quad (3.14)$$

bulunur.

Şimdi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|M_n(t^2; x) - x^2\|_p$$

ifadesini inceleyelim.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|M_n(t^2; x) - x^2\|_p &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{6nx^2 + 2nx - 6x^2}{n^2 - 5n + 6} \right\|_p \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{\left| \frac{6nx^2 + 2nx - 6x^2}{n^2 - 5n + 6} \right|}{1 + x^2} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n}{n^2 - 5n + 6} \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{x^2}{1 + x^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^2 - 5n + 6} \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{x}{1 + x^2} \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n^2 - 5n + 6} \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{x^2}{1 + x^2} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n}{n^2 - 5n + 6} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^2 - 5n + 6} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n^2 - 5n + 6} \end{aligned}$$

Bu son eşitsizlik 0'a yaklaştığı için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|M_n(t^2; x) - x^2\|_p = 0 \text{ dır.} \quad (3.15)$$

Sonuç olarak; Eş. 3.8, Eş. 3.13 ve Eş. 3.15 eşitliklerinden dolayı, Teorem 2.12'nin koşulları gerçekleştiğinden, her $f \in C_p^k$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|M_n(f; x) - f(x)\|_p = 0 \text{ dır.}$$

Eş. 3.7, Eş. 3.12 ve Eş. 3.14 eşitliklerini ve M_n operatörünün lineerliğini dikkate alarak M_n operatörü için merkezi momentleri hesaplayabiliriz.

$$M_n((t-x);x) = \frac{2x}{n-2} \quad (3.16)$$

$$M_n((t-x)^2;x) = \frac{(6+2n)x^2 + 2nx}{(n-3)(n-2)} \quad , \text{dir.} \quad (3.17)$$

Son ifadenin ispatını verelim.

$$M_n((t-x)^2;x) = M_n((t^2-2xt+x^2);x)$$

M_n 'nin lineerliğinden

$$= M_n(t^2;x) - 2xM_n(t;x) + x^2M_n(1;x)$$

eşitliğini elde ederiz.

Burada, $M_n(t^2;x)$, $M_n(t;x)$ ve $M_n(1;x)$ değerlerini yerine yazarsak

$$M_n((t-x)^2;x) = \frac{n^2x^2 + nx^2 + 2nx}{(n-3)(n-2)} - 2x \cdot \frac{nx}{n-2} + x^2$$

Buradan gerekli düzenlemelerle;

$$M_n((t-x)^2;x) = \frac{(6+2n)x^2 + 2nx}{(n-3)(n-2)}$$

eşitliğine ulaşırız.

Daha genel olarak aşağıdaki teoremi verelim.

3.2. Teorem [13]

$$M_n((t-x)^m;x) = T_{n,m}(x)$$

$$= (n-1) \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}(x) \int_0^{\infty} P_{n,k-1}(t)(t-x)^m dt + (-x)^m (1+x)^{-n}$$

olmak üzere

$$i) T_{n,m}(x) = O(n^{-(m+1)/2})$$

ii) Özel olarak herhangi $\lambda > 2$ ve $x > 0$ verildiğinde öyle bir $N(\lambda; x) > 2$ tamsayısı vardır ki $n \geq N(\lambda; x)$ olan tüm n 'ler için

$$T_{n,m}(x) \leq \frac{\lambda x(1+x)}{n} \text{ , dir.}$$

3.2. M_n Operatörünün Süreklilik Modülüyle Yaklaşım Hızının Hesaplanması

Burada $[0, \infty)$ 'un sonlu alt aralığında süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı bulunacak, daha sonra da ağırlıklı süreklilik modülüyle $[0, \infty)$ 'un tamamında yaklaşım hızı verilecektir.

3.1. Tanım

$\langle a, b \rangle$ ifadesi $[a, b]$, (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, \infty)$, $(-\infty, b)$, (a, ∞) aralıklarından birini gösterebilir, $x, y \in \langle a, b \rangle$ için $\delta > 0$ olmak üzere

$$\omega(\delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|$$

değerine f 'in süreklilik modülü denir [5,4,1]. $\omega(\delta)$ yerine $\omega(f; \delta)$, $\omega_f(\delta)$ gösterimleri de kullanılabilir.

Süreklilik modülünün özellikleri aşağıdaki gibidir.

i) ω fonksiyonu δ 'nın monoton artan bir fonksiyonudur.

ii) f 'nin $\langle a, b \rangle$ de düzgün sürekli olması için gerek ve yeter koşul $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(\delta) = 0$ olmasıdır.

iii) $m \in \mathbb{N}$ ise $\omega(m\delta) \leq m\omega(\delta)$ 'dır.

(iv) $\lambda > 0$ reel sayısı için $\omega(\lambda\delta) \leq (\lambda+1) \omega(\delta)$ 'dır.

$$v) |f(t)-f(x)| \leq \omega(|t-x|)$$

$$vi) |f(t)-f(x)| \leq \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1 \right) \omega(\delta)$$

3.3. Teorem

Eş. 3.1 ile tanımlanan M_n lineer pozitif operatörü ve $f \in C_g[0, \infty)$ olmak üzere, yeterince büyük n 'ler ve $A > 0$, $x \in [0, A] \subset [0, \infty)$ için,

$$|M_n(f; x) - f(x)| \leq K. \omega_{[0, A]} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

eşitsizliğini sağlar. Burada K , n den bağımsız bir sabit ve $\omega_{[0, A]}$, f 'nin $[0, A]$ aralığında verilen süreklilik modülüdür.

İspat

M_n 'nin lineerliğini kullanarak;

$$\begin{aligned} M_n(f(t)-f(x); x) &= M_n(f(t); x) - M_n(f(x); x) \\ &= M_n(f(t); x) - f(x).M_n(1; x) \end{aligned}$$

eşitliğini yazabiliriz.

M_n operatöründe $(1+x)^{-n}$ yerine onun eşiti olan $P_{n,0}$ yazarak ve üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} |M_n(f; x) - f(x)| &= \left| (n-1) \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}(x) \int_0^{\infty} P_{n,k-1}(t) (f(t) - f(x)) dt + P_{n,0}(f(0) - f(x)) \right| \\ &\leq (n-1) \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}(x) \int_0^{\infty} P_{n,k-1}(t) |f(t) - f(x)| dt + P_{n,0} |f(0) - f(x)| \quad (3.18) \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Süreklilik modülünün vi özelliğinden

$$|f(t)-f(x)| \leq \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right) \omega(\delta)$$

$$|f(0)-f(x)| \leq \left(1 + \frac{x}{\delta}\right) \omega(\delta)$$

eşitsizliklerini yazabiliriz. Bunları Eş. 3.18’de kullanırsak

$$\begin{aligned} |M_n(f;x)-f(x)| &\leq (n-1) \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}(x) \int_0^{\infty} P_{n,k-1}(t) \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right) dt \omega(\delta) \\ &\quad + P_{n,0} \left(1 + \frac{x}{\delta}\right) \omega(\delta) \\ &= \omega(\delta) \left[(n-1) \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}(x) \int_0^{\infty} P_{n,k-1}(t) dt + P_{n,0} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\delta} (n-1) \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}(x) \int_0^{\infty} P_{n,k-1}(t) |t-x| dt + P_{n,0} \cdot \frac{x}{\delta} \right] \\ &= \omega(\delta) \left[M_n(1;x) + \frac{1}{\delta} \left((n-1) \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}(x) \int_0^{\infty} P_{n,k-1}(t) |t-x| dt + P_{n,0} \cdot x \right) \right] \\ &= \omega(\delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} \left((n-1) \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}(x) \int_0^{\infty} P_{n,k-1}(t) |t-x| dt + P_{n,0} \cdot x \right) \right] \\ &= \omega(\delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} \left((n-1) \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}(x) \int_0^{\infty} \sqrt{P_{n,k-1}}(t) \sqrt{P_{n,k-1}}(t) |t-x| dt + P_{n,0} \cdot x \right) \right] \end{aligned}$$

Bu eşitlikte integral üzerine Cauchy-Schwartz Eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{aligned} &\leq \omega(\delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} \left((n-1) \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}(x) \left(\int_0^{\infty} \sqrt{P_{n,k-1}}^2(t) dt \right)^{1/2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot \left(\int_0^{\infty} \sqrt{P_{n,k-1}}^2(t-x)^2 dt \right)^{1/2} + P_{n,0} \cdot x \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \omega(\delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} \left((n-1) \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}(x) \left(\int_0^{\infty} P_{n,k-1}(t) dt \right)^{1/2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \cdot \left(\int_0^{\infty} P_{n,k-1}(t-x)^2 dt \right)^{1/2} + P_{n,0} \cdot x \right) \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlikte, toplam üzerine Cauchy-Schwartz Eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{aligned}
&\leq \omega(\delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} \left(\left((n-1) \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{P_{n,k}(x)}^2 \int_0^{\infty} P_{n,k-1}(t) dt \right)^{1/2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \cdot \left((n-1) \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{P_{n,k}(x)}^2 \cdot \int_0^{\infty} P_{n,k-1}(t)(t-x)^2 dt \right)^{1/2} + P_{n,0} \cdot x \right) \right] \\
&= \omega(\delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} \left(\left((n-1) \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}(x) \int_0^{\infty} P_{n,k-1}(t) dt \right)^{1/2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \cdot \left((n-1) \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}(x) \cdot \int_0^{\infty} P_{n,k-1}(t)(t-x)^2 dt \right)^{1/2} + P_{n,0} \cdot x \right) \right] \\
&= \omega(\delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} \left((M_n(1; x) - P_{n,0})^{1/2} \cdot (M_n((t-x)^2; x) - P_{n,0} \cdot x^2)^{1/2} + P_{n,0} \cdot x \right) \right]
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz.

$$M_n(1; x) - P_{n,0} = 1 - \frac{x}{(1+x)^n} \leq 1 \quad \text{olduğundan}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \omega(\delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} \left((M_n((t-x)^2; x) - P_{n,0} \cdot x^2)^{1/2} + P_{n,0} \cdot x \right) \right] \\
&\leq \omega(\delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} \left(M_n((t-x)^2; x)^{1/2} + P_{n,0} \cdot x \right) \right]
\end{aligned}$$

$$P_{n,0}.x = \frac{x}{(1+x)^n} \text{ ifadesi } x \in [0, \infty) \text{ için}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{(1+x)^n} &\leq \frac{1+x}{(1+x)^n} = \frac{1}{(1+x)^{n-1}} = (1+x)^{1-n} \\ &\leq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

ayrıca Teorem 3.2'den,

$$T_{n,m}(x) = O(n^{-(m+1)/2}) \text{ olduğundan}$$

$$T_{n,2}(x) = O(n^{-[3/2]}) = O(n^{-1}) \text{ 'dir.}$$

Buna göre

$$M_n((t-x)^2; x)^{1/2} + P_{n,0}.x \text{ ifadesi için, } K' \text{ bir sabit olmak üzere}$$

$$\leq \frac{K'}{\sqrt{n}} \text{ diyebiliriz.}$$

$$\delta_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ alırsak}$$

$$|M_n(f; x) - f(x)| \leq \omega_{[0,A]} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \left[1 + \sqrt{n} \cdot \frac{K'}{\sqrt{n}} \right] \right)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Buna göre,

$$\begin{aligned} |M_n(f; x) - f(x)| &\leq \omega_{[0,A]} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) (1 + K') \\ &= K \cdot \omega_{[0,A]}(n^{-1/2}). \end{aligned}$$

3.3. Ağırlıklı Süreklilik Modülü

$\omega(\delta)$ fonksiyonunda $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(\delta) = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşulun f 'in $\langle a, b \rangle$ 'de düzgün sürekli olması gerektiğini Tanım 3.1 ii'de belirtmiştik. Bu bölümde ise $f \in C_p^k[0, \infty)$ için f 'in düzgün süreklilik koşulu olmaksızın M_n lineer pozitif operatörünün yaklaşım hızını ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla bulacağız.

3.2. Tanım

$\rho(x) = 1+x^2$ olmak üzere, her $f \in C_p^k$ için

$$\Omega(f; \delta) = \sup_{x \geq 0, |h| \leq \delta} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{1 + (x+h)^2} \quad (3.19)$$

ifadesine f fonksiyonunun $C_p^k[0, \infty)$ uzayında ağırlıklı süreklilik modülü denir.

$\Omega(f; \delta)$ ağırlıklı süreklilik modülünün Tanım 3.1'de verilen süreklilik modülüne benzer özelliklerini aşağıdaki Lemma'da verelim.

3.1. Lemma [14, 15]

$f \in C_p^k[0, \infty)$ olmak üzere $\Omega(f; \delta)$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.

(i) $\Omega(f; \delta)$ fonksiyonu δ 'nın monoton artan fonksiyonudur.

(ii) Her $f \in C_p^k[0, \infty)$ için $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \Omega(f; \delta) = 0$

(iii) Her $r \in \mathbb{N}$ için $\Omega(f; r\delta) \leq r \cdot \Omega(f; \delta)$ eşitsizliği sağlanır.

(iv) Her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\Omega(f; \lambda\delta) \leq (\lambda+1) \Omega(f; \delta)$ eşitsizliği sağlanır.

$$(v) |f(t) - f(x)| \leq (1 + (2x+t)^2) \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1 \right) \Omega(f; \delta)$$

İspat

(i) Tanımdan açıktır.

(ii) $\varepsilon > 0$ olsun. $f \in C_p^k[0, \infty)$ olduğunda

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = k_f < \infty$$

olacaktır. Buna göre öyle bir $x_0 > 0$ sayısı vardır ki,

$$\text{Her } x \geq x_0 \text{ için } \left| \frac{f(x)}{\rho(x)} - k_f \right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ eşitsizliği sağlanır.}$$

$x_1 \geq x_0 + \delta$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \Omega(f; \delta) &\leq \sup_{0 \leq x \leq x_1, |h| \leq \delta} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{1 + (x+h)^2} \right| + \sup_{x \geq x_1, |h| \leq \delta} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{1 + (x+h)^2} \right| \\ &\leq \omega_{[0, x_1]}(f; \delta) + \sup_{x \geq x_1, |h| \leq \delta} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{1 + (x+h)^2} \right| \end{aligned}$$

olur. $x \geq x_1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{1 + (x+h)^2} \right| &= \left| \frac{f(x+h)}{1 + (x+h)^2} - K_f + K_f - \frac{f(x)}{1 + (x+h)^2} \right| \\ &\leq \left| \frac{f(x+h)}{1 + (x+h)^2} - K_f \right| + \left| \frac{f(x)}{1 + (x+h)^2} - K_f \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \left| \frac{(1+x^2)f(x)}{(1+x^2)(1+(x+h)^2)} - \frac{1+x^2}{1+(x+h)^2} \cdot K_f + \frac{1+x^2}{1+(x+h)^2} \cdot K_f - K_f \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1+x^2}{1+(x+h)^2} \left| \frac{f(x)}{1+x^2} - K_f \right| + |K_f| \left| 1 - \frac{1+x^2}{1+(x+h)^2} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + |K_f| \left| 1 - \frac{1+x^2}{1+(x+h)^2} \right| \\
&\leq \varepsilon + |K_f| \left| 1 - \frac{1+x^2}{1+(x+h)^2} \right|
\end{aligned} \tag{3.20}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Eş. 3.20 eşitsizliğinde,

$$\left| 1 - \frac{1+x^2}{1+(x+h)^2} \right| = \left| \frac{(x+h)^2 - x^2}{1+(x+h)^2} \right| = \left| \frac{h(2x+h)}{1+(x+h)^2} \right|$$

eşitliğinden yararlanarak, $|h| \leq \delta$ olduğundan

$$\left| 1 - \frac{1+x^2}{1+(x+h)^2} \right| \leq \delta(2+\delta)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bunu Eş. 3.20'ye uygularsak

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{1+(x+h)^2} \right| \leq \varepsilon + |K_f| \cdot \delta(2+\delta)$$

olur.

Buna göre

$$\Omega(f; \delta) \leq \omega_{[0, x_1]}(f; \delta) + \varepsilon + |K_f| \cdot \delta(2+\delta)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \Omega(f; \delta) \leq \varepsilon$

elde edilir ki $\varepsilon > 0$ sayısı keyfi olduğundan ispat tamamlanır.

(iii) $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$|f(x+rh)-f(x)| = \left| \sum_{k=1}^r (f(x+kh) - f(x+(k-1)h)) \right|$$

Buradan $\Omega(f;\delta)$ 'nın tanımından

$$|f(x+rh)-f(x)| \leq r(1+(x+h)^2).\Omega(f;\delta)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Buradan

$$\sup_{x \geq 0, |h| \leq \delta} \left| \frac{f(x+rh) - f(x)}{1 + (x+h)^2} \right| \leq r.\Omega(f;\delta)$$

$$\Omega(f;\delta r) \leq r.\Omega(f;\delta)$$

bulunur.

$$(iv) \quad \llbracket \lambda \rrbracket \leq \lambda \leq \llbracket \lambda \rrbracket + 1$$

eşitsizliğine $\Omega(f;\delta)$ 'nın (i) ve (iii) özellikleri uygulanarak

$\lambda \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\Omega(f;\lambda\delta) \leq (\lambda+1) \Omega(f;\delta)$$

eşitsizliğine ulaşılır.

$$(v) \quad \Omega(f;\delta) = \sup_{x \geq 0, |h| \leq \delta} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{1 + (x+h)^2}$$

tanımından ve (iv) özelliğinden

$$|f(t)-f(x)| \leq (1+(x+|t-x|)^2) \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1 \right) \Omega(f;\delta) \quad (3.21)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$1+(x+|t-x|)^2$ ifadesi,

$t \geq x$ iken

$$= 1+t^2 \quad x \in [0, \infty) \text{ olduğu için}$$

$$\leq 1+(2x+t)^2 \text{ 'dir.}$$

$t \leq x$ iken ise

$$= 1 + (2x-t)^2 \quad x \in [0, \infty) \text{ olduğundan}$$

$$\leq 1 + (2x+t)^2$$

Buna göre Eş. 3.3.3 eşitsizliğinden

$$|f(t)-f(x)| \leq (1+(2x+t)^2) \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1 \right) \Omega(f; \delta) \quad (3.22)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

3.4. Teorem

$f \in C_p^k[0, \infty)$ olsun. Bu durumda M, n 'den bağımsız pozitif bir sabit olmak üzere

$$\|M_n(f; x) - f(x)\|_{1+x^3} \leq M \cdot \Omega(f; n^{-1/2}).$$

İspat

Lemma 3.1 (v)'i M_n operatörüne uygularsak, M_n lineer pozitif operatörünün lineerliğinden ve monotonluk özelliğinden,

$$M_n(|f(t)-f(x)|; x) \leq \Omega(f; \delta) \left[M_n((1+(2x+t)^2); x) + M_n\left((1+(2x+t)^2 \cdot \frac{|t-x|}{\delta}); x\right) \right] \quad (3.23)$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu eşitsizlikte ikinci terime Cauchy-Schwartz Eşitsizliği uygulanırsa

$$M_n \left((1 + (2x + t)^2) \cdot \frac{|t - x|}{\delta}; x \right) \leq \left(M_n ((1 + (2x + t)^2)^2; x) \right)^{1/2} \cdot \left(M_n \left(\frac{|t - x|^2}{\delta^2}; x \right) \right)^{1/2}$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu eşitsizliği Eş. 3.23'de yerine yazarsak

$$M_n(|f(t) - f(x)|; x) \leq \Omega(f; \delta) \left[M_n((1 + (2x + t)^2); x) + M_n((1 + (2x + t)^2)^2; x)^{1/2} \cdot \left(M_n \left(\frac{(t - x)^2}{\delta^2}; x \right) \right)^{1/2} \right] \quad (3.24)$$

bulunur.

$M_n((1 + (2x + t)^2); x) = M_n(1; x) + 4x^2 M_n(1; x) + 4x M_n(t; x) + M_n(t^2; x)$ eşitliğinde

$M_n(1; x)$, $M_n(t; x)$, $M_n(t^2; x)$ değerleri yerine yazılırsa, $M_1 > 0$ olmak üzere

$$M_n((1 + (2x + t)^2); x) = 1 + 4x^2 + \frac{4x^2 \cdot n}{n - 2} + \frac{(n^2 + n) \cdot x^2}{(n - 2)(n - 3)} + \frac{2nx}{(n - 3)(n - 2)} \leq M_1(1 + x^2 + x)$$

eşitsizliği elde edilir.

Ayrıca $\sup_{x \geq 0} \frac{1 + x^2 + x}{1 + x^2} \leq M_2$ olacak şekilde $M_2 > 0$ reel sayısı vardır.

Buradan $M_1 \cdot M_2 = M_3 > 0$ olmak üzere

$$M_n((1 + (2x + t)^2); x) \leq M_3(1 + x^2) \quad (3.25)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} M_n((1+(2x+t)^2)^2; x)^{1/2} &= M_n((1+4x^2+4xt+t^2)^2; x)^{1/2} \\ &\leq M_4(1+x^4+2x^2)^{1/2} \\ &\leq M_4(1+x^2) \end{aligned} \quad (3.26)$$

olacak şekilde $M_4 > 0$ reel sayısı vardır.

Aynı düşünce ve Teorem 3.2 ii'nin kullanılması ile, $M_5 > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \left(M_n \left(\frac{(t-x)^2}{\delta^2}; x \right) \right)^{1/2} &= \frac{1}{\delta} \cdot (M_n((t-x)^2; x))^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{\delta} \cdot O(n^{-1/2}) \sqrt{x^2 + x} \\ &\leq \frac{M_5(1+x)}{\delta \sqrt{n}} \end{aligned} \quad (3.27)$$

eşitsizliği elde edilir.

Eş. 3.26 ve Eş. 3.27 eşitsizliklerinden

$$M_6 = \sup_{x \geq 0} \frac{(1+x)(1+x^2)}{1+x^3}$$

ve

$M_7 = M_4 \cdot M_5 \cdot M_6$ alırsak

$$\begin{aligned} &\left(M_n((1+(2x+t)^2)^2; x) \right)^{1/2} \cdot M_n \left(\frac{(t-x)^2}{\delta^2}; x \right)^{1/2} \\ &\leq M_4(1+x^2) \frac{M_5(1+x)}{\delta \sqrt{n}} \\ &\leq \frac{M_4 \cdot M_5}{\delta \sqrt{n}} \sup_{x \geq 0} \frac{(1+x) \cdot (1+x^2) \cdot (1+x^3)}{(1+x^3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{M_4 \cdot M_5}{\delta \sqrt{n}} \cdot M_6 (1 + x^3) \\
&= \frac{M_7 (1 + x^3)}{\delta \sqrt{n}}
\end{aligned}$$

olup

$$\left(M_n \left((1 + (2x + t)^2)^2; x \right)^{1/2} \cdot M_n \left(\frac{(t - x)^2}{\delta^2}; x \right)^{1/2} \leq \frac{M_7 (1 + x^3)}{\delta \sqrt{n}} \quad (3.28)$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi Eş. 3.24, Eş. 3.25 ve Eş. 3.28 eşitsizliklerini kullanırsak

$$M_n(|f(t) - f(x)|; x) \leq \Omega(f; \delta) \cdot (M_3(1 + x^2) + \frac{M_7(1 + x^3)}{\delta \sqrt{n}}) \quad (3.29)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$$\text{Burada } M_8 = \sup_{x \geq 0} \frac{1 + x^2}{1 + x^3} \text{ dersek}$$

Eş. 3.3.11 eşitsizliğinden

$$M_n(|f(t) - f(x)|; x) \leq \Omega(f; \delta) \left[M_3 \cdot M_8 (1 + x^3) + \frac{M_7}{\delta \sqrt{n}} (1 + x^3) \right]$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada

$$\delta = n^{-1/2} \text{ seçersek}$$

$$M_n(|f(t) - f(x)|; x) \leq \Omega(f; n^{-1/2}) \left[(M_3 \cdot M_8 + M_7) (1 + x^3) \right]$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Buradan da $M = M_3.M_8+M_7$ dersek

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{M_n(|f(t) - f(x)|; x)}{1 + x^3} \leq \Omega(f; n^{-1/2}).M$$

eşitsizliği bulunur. Sonuç olarak

$$\rho_2 = 1+x^3 \text{ dersek}$$

$$\|M_n(f; x) - f(x)\|_{\rho_2} \leq M.\Omega(f; n^{-1/2})$$

eşitsizliğine ulaşırız.

3.4. Eş Anlı Yaklaşım

Bu kısımda 3.1 ile tanımlanan M_n operatörünün r . basamaktan türevinin $f \in C_\alpha[0, \infty)$ fonksiyonunun $f^{(r)}$ türevine noktasal yakınsak olduğu verilecektir. Önce teoremin ispatında yardımcı olacak bazı tanım ve lemmaları verelim.

3.3. Tanım [8]

$$f \in C_\alpha[0, \infty) = \{f \in C[0, \infty) : |f(t)| \leq M.(1+t)^\alpha, \quad M > 0, \quad \alpha > 0\}$$

olmak üzere,

$$\|f\|_{C_\alpha} = \sup_{0 \leq t < \infty} \frac{|f(t)|}{(1+t)^\alpha}$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca Eş. 3.1 ile tanımlanan M_n operatörünü

$$M_n(f(t); x) = \int_0^\infty W_n(t; x) f(t) dt$$

$$W_n(t;x) = (n-1) \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}(x) P_{n,k-1}(t) + (1+x)^{-n} \cdot \delta(t)$$

şeklinde yeniden ifade edebiliriz.

3.2. Lemma [8]

$$x^r (1+x)^r \frac{d}{dx^r} P_{n,k}(x) = \sum_{\substack{2i+j \leq r \\ i,j \geq 0}} n^i (k-nx)^j q_{i,j,r}(x) \cdot P_{n,k}(x)$$

olacak şekilde n ve k'den bağımsız $q_{i,j,r}(x)$ polinomları vardır.

3.3. Lemma [8]

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} W_n(t;x) t^{\vartheta} dt &= M_n(t^{\vartheta}; x) \\ &= \frac{(n+\vartheta-1)!(n-\vartheta-2)!}{(n-1)!. (n-2)!} \cdot x^{\vartheta} \end{aligned}$$

3.4. Lemma [8]

$$\mu_{n,m}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x) \left(\frac{k}{n} - x \right)^m$$

olmak üzere $x \in [0, \infty)$ için $\mu_{n,m}(x) = O(n^{-(m+1)/2})$

dir.

3.5. Teorem

$f \in C_{\alpha}[0, \infty)$, $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere $i = 1, 2, 3, \dots$ için $x \in [0, \infty)$ noktasında $f^{(r)}$ varsa, o zaman

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n^{(r)}(f(t); x) = f^{(r)}(x) \quad \text{olur.}$$

İspat

$t \rightarrow x$ için $\varepsilon(t; x) \rightarrow 0$

olacak şekilde f 'in Taylor Açılımı

$$f(t) = \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}(x)}{i!} (t-x)^i + \varepsilon(t; x)(t-x)^r$$

dir. Buna göre

$$\begin{aligned} M_n^{(r)}(f(t); x) &= \int_0^\infty W_n^{(r)}(t; x) f(t) dt \text{ eşitliğinden,} \\ &= \int_0^\infty W_n^{(r)}(t; x) \left[\sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}(x)}{i!} (t-x)^i + \varepsilon(t; x)(t-x)^r \right] dt \\ &= \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}(x)}{i!} \int_0^\infty W_n^{(r)}(t; x) (t-x)^i dt + \int_0^\infty W_n^{(r)}(t; x) \varepsilon(t; x) (t-x)^r dt \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

eşitliğini yazabiliriz.

$$I_1 = \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}(x)}{i!} \int_0^\infty W_n^{(r)}(t; x) (t-x)^i dt \text{ ifadesinde}$$

$(t-x)^i$ 'nin binom açılımını yazalım.

$$(t-x)^i = \sum_{v=0}^i \binom{i}{v} (-x)^{i-v} t^v$$

Bu eşitliği I_1 'de yerine yazarsak:

$$I_1 = \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}(x)}{i!} \sum_{v=0}^i \binom{i}{v} (-x)^{i-v} \frac{d^r}{dx^r} \int_0^\infty W_n(t; x) t^v dt$$

Burada Lemma 3.3'ü kullanırsak

$$\begin{aligned} &= \frac{f^{(r)}(x)}{r!} \frac{d^r}{dx^r} \left[\frac{(n+r-1)!(n-r-2)!}{(n-1)!(n-2)!} x^r + \text{derecesi } r \text{ den küçük} \right. \\ &\quad \left. \text{olan } x \text{'li terimler} \right] \\ &= f^{(r)}(x) \left(\frac{(n+r-1)!(n-r-2)!}{(n-1)!.(n-2)!} \right) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade $n \rightarrow \infty$ için $f^{(r)}(x)$ 'e yaklaşır.

$$I_2 = \int_0^\infty W_n^{(r)}(t; x) \varepsilon(t; x) (t-x)^r dt \text{ eşitliğinde}$$

$W_n^{(r)}(t; x)$ ifadesini yerine yazarsak

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{d}{dx^r} \left((n-1) \sum_{k=1}^\infty P_{n,k}(x) P_{n,k-1}(t) + (1+x)^{-n} \delta(t) \right) \varepsilon(t; x) (t-x)^r dt .$$

Burada Lemma 3.2'yi kullanırsak

$$I_2 = \sum_{\substack{2i+j \leq r \\ i,j \geq 0}} \frac{n^i \cdot q_{i,j,r}(x)}{x^r (1+x)^r} (n-1) \sum_{k=1}^\infty P_{n,k}(x) (k-nx)^j x \int_0^\infty P_{n,k-1}(t) \cdot \varepsilon(t; x) \cdot$$

$$(t-x)^r dt + (-1)^r \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!} (1+x)^{-n-r} \varepsilon(0; x) \cdot (-x)^r$$

ve

$$|I_2| \leq \sum_{\substack{2i+j \leq r \\ i,j \geq 0}} \frac{n^i |q_{i,j,r}(x)|}{x^r (1+x)^r} (n-1) \sum_{k=1}^\infty P_{n,k}(x) |k-nx|^j \int_0^\infty P_{n,k-1}(t) |\varepsilon(t; x)| \cdot |t-x|^r dt$$

$$+ \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!} (1+x)^{-n-r} |\varepsilon(0;x)| \cdot x^r$$

$$= I_3 + I_4$$

olur.

$t \rightarrow x$ için $\varepsilon(t;x) \rightarrow 0$ olduğundan $\varepsilon > 0$ verildiğinde öyle bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilir ki $0 < |t-x| < \delta$ olduğunda $|\varepsilon(t;x)| < \varepsilon$ olur. Ayrıca $v > \max(\alpha, r)$ olacak biçimde bir doğal sayı ise öyle bir K pozitif sabiti bulunabilir ki $|t-x| \geq \delta$ olduğunda

$$|\varepsilon(t;x)(t-x)^r| < K \cdot |t-x|^v$$

olur. Bu durumda

$$C_1 = \sup_{\substack{2i+j \leq r \\ i, j \geq 0}} \frac{|q_{i,j,r}(x)|}{x^r (1+x)^r} \quad \text{dersek}$$

$$I_3 \leq C_1 \sum_{\substack{2i+j \leq r \\ i, j \geq 0}} n^i (n-1) \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}(x) |k-nx|^j x \left\{ \varepsilon \int_{|t-x| < \delta} P_{n,k-1}(t) |t-x|^r dt + \right.$$

$$\left. K \int_{|t-x| \geq \delta} P_{n,k-r}(t) \cdot |t-x|^v dt \right\}$$

$$= I_5 + I_6$$

eşitsizliği sağlanır.

I_5 ifadesinde önce integrale, sonra toplam üzerine Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$I_5 \leq \varepsilon C_1 \sum_{\substack{2i+j \leq r \\ i, j \geq 0}} n^i (n-1) \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}(x) |k-nx|^j \left(\int_0^{\infty} P_{n,k-1}(t) dt \right)^{1/2} \times \left(\int_0^{\infty} P_{n,k-1}(t) (t-x)^{2r} dt \right)^{1/2}$$

$$\leq \varepsilon C_1 \sum_{\substack{2i+j \leq r \\ i,j \geq 0}} n^i \left(\sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}(x) (k-nx)^{2j} \right)^{1/2} \times \left((n-1) \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}(x) \int_0^{\infty} P_{n,k-1}(t) (t-x)^{2r} dt \right)^{1/2}.$$

Ayrıca

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}(x) (k-nx)^{2j} = n^{2j} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x) \left(\frac{k}{n} - x \right)^{2j} - (1+x)^{-n} (-x)^{2j} \right\}$$

ifadesinde Lemma 3.4'ü kullanırsak herhangi bir $s > 0$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}(x) (k-nx)^{2j} &= n^{2j} \{O(n^{-j}) + O(n^{-s})\} \\ &= O(n^j) \end{aligned}$$

olur.

Şimdi

$$(n-1) \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}(x) \int_0^{\infty} P_{n,k-1}(t) (t-x)^{2r}$$

ifadesini inceleyelim; Burada Teorem 3.2'yi kullanırsak;

$$\begin{aligned} (n-1) \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}(x) \int_0^{\infty} P_{n,k-1}(t) (t-x)^{2r} &= M_n((t-x)^{2r}; x) - (1+x)^{-n} \cdot (-x)^{2r} \\ &= O(n^{-r}) + O(n^{-s}) \\ &= O(n^{-r}) \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Buna göre

$$I_5 \leq \varepsilon C_1 \sum_{\substack{2i+j \leq r \\ i,j \geq 0}} n^i O(n^{j/2}) \cdot O(n^{-r/2}) = \varepsilon \cdot O(1) \text{ olur.}$$

Benzer şekilde;

$$\begin{aligned}
I_6 &= C_1 \sum_{\substack{2i+j \leq r \\ i,j \geq 0}} n^i (n-1) \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}(x) |k-nx|^j \int_{|t-x| \geq \delta} P_{n,k-1}(t) \cdot K \cdot |t-x|^v dt \\
&\leq C_2 \sum_{\substack{2i+j \leq r \\ i,j \geq 0}} n^i (n-1) \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}(x) |k-nx|^j \left(\int_{|t-x| \geq \delta} P_{n,k-1}(t) dt \right)^{1/2} \left(\int_{|t-x| \geq \delta} P_{n,k-1}(t) \cdot (t-x)^{2v} dt \right)^{1/2} \\
&\leq C_2 \sum_{\substack{2i+j \leq r \\ i,j \geq 0}} n^i \left(\sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}(x) (k-nx)^{2j} \right)^{1/2} \times \left((n-1) \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}(x) \int_0^{\infty} P_{n,k-1}(t) (t-x)^{2v} dt \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Şimdi, Lemma 3.4'ü kullanırsak

$$I_6 = C_2 \sum_{\substack{2i+j \leq r \\ i,j \geq 0}} n^i O(n^{j/2}) \times \left((n-1) \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}(x) \int_0^{\infty} P_{n,k-1}(t) (t-x)^{2v} dt \right)^{1/2} \text{ dur.}$$

Tekrar Teorem 3.2'yi kullanırsak

$$\begin{aligned}
I_6 &= \sum_{\substack{2i+j \leq r \\ i,j \geq 0}} n^i O(n^{j/2}) \cdot O(n^{-v/2}) \\
&= O(n^{(r-v)/2}) = o(1)
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca limit durumunda $\varepsilon \rightarrow 0$ için $I_5 \rightarrow 0$ 'dır. $n \rightarrow \infty$ için $I_6 \rightarrow 0$ ve $I_3 = o(1)$ olur.

$n \rightarrow \infty$ için $I_4 \rightarrow 0$ olduğundan $I_2 = o(1)$ olur. I_1 ve I_2 yerine yazıldığında

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n^{(r)}(f(t); x) = f^{(r)}(x)$$

sonucuna ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır.

KAYNAKLAR

1. Natanson, I.P., "Constructive Function Theory Volume I", *Frederick Zingar Publishing*, New York, 1-15 (1964).
2. Bernstein, S., "Démonstration du théorémé de Weierstrass, fondee sur le calcul des probabilités", *Commun. Soc. Math. Kharkow* (2), 13: 1-2 (1912-1913).
3. Bohmann, H., "On approximation of continuos and analytic functions", *Arh. Math.*, 2: 43-56 (1952)
4. Korovkin, P.P., "Linear Operators and Approximation Theory", *Hindustan Publishing Corp. (India)*, Delhi, 1-63 (1960)
5. Altomare, F. and Campiti, M., "Korovkin-type Approximation Theory and its Applications", *Walter de Gryter*, Berlin, New York, 265-373 (1994).
6. Gadjiev, A.D., "On Korovkin Type Theorems", *Math. Notes* , 20, (5-6), 996-998 (1976).
7. Gadjev, A.D., "The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets, and theorems analogous to that of P.P. Korovkin" *Dokl. Akad. Nauk. SSSR.*, 218, No. 5, 1001-1004 (in Russian), *Sov. Math. Dokl.*, 15(5): 1433-1436 (1974)
8. Agrawal, P.N. and Thamer, J., "Approximation of unbounded functions by a new sequence of linear positive operators", *J. Math. Anal. Appl.*, 225: 660-672 (1998).
9. Hacısalıhoğlu, H.H. ve Hacıyev, A., "Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı", *Ankara Üniv. Basımevi*, Ankara, 1-80 (1995).
10. Şuhubi, S., "Fonksiyonel Analiz", *İstanbul Üniversitesi Vakfı*, 344 (2001).
11. Balcı, M., "Reel Analiz", *Ertem Matbaa*, Ankara, 93-98 (1998).
12. Rudin, W., "Real and Complex Analysis", *Mc Graw-Hill Book Company*, 3rd. Edition, New York, 55 (1987)
13. Gupta, V., "Rate of Approximation by a new sequence of linear positive operators", *Comput. Math. Appl.*, 45(12): 1895-1904 (2003).
14. Gadjiev, A.D. and İspir, N., "On a Sequence of Linear Positive Operators in Weighted Spaces", *Proc.Inst.Math.Mech.* ,11: 45-46 (1999)
15. İspir, N., "On Modified Baskakov Operators on Weighted Spaces", *Turkish Journal of Math.*, 25(3): 355-365 (2001).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : DEMİRHAN, ÇAVUŞOĞLU, Halime Mücella
 Uyruğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 27.11.1979 Ankara
 Medeni hali : Evli
 Telefon : 05054454527
 e-mail : mucellademirhan@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Anadolu Üniversitesi Matematik Bölümü	2001
Lise	Sincan Lisesi	1997

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2001–2004	Vatan Dershanesi	Matematik Öğretmeni
2004–2006	Kayı İlköğretim Okulu	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Edebiyat